1. Gauss-Osztrogradszkij-tétellel: $\oint\limits_{\mathcal{F}} \mathbf{v}\, \mathbf{dF} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV$.

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (2x, xy, -z)$$
$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x,y,z) = 2 + x - 1 = x + 1$$

Hengerkoordinátákkal:

A két felület: $m = \dfrac{10}{1+r^2}$ és $m = r^2 - 8$.

A metszésvonaluk:

$$\tfrac{10}{1+r^2} = r^2 - 8$$
$$r^4 - 7r^2 - 18 = 0$$
$$(r^2 - 9)(r^2 + 2) = 0$$

$r^2 = 9$ vagy $r^2 = -2$

$r = 3$ *lehetetlen*

A tartomány határai: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ r^2 - 8 \le m \le \frac{10}{1+r^2},\ \ 0 \le r \le 3$.

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \int_0^3 \int_{r^2-8}^{\frac{10}{1+r^2}} \int_0^{2\pi} (1 + r\cos\varphi) r\, d\varphi\, dm\, dr = \int_0^3 \int_{r^2-8}^{\frac{10}{1+r^2}} \left[r^2 \sin\varphi + r\varphi\right]_0^{2\pi} dm\, dr =$$
$$= \int_0^3 \int_{r^2-8}^{\frac{10}{1+r^2}} 2\pi r\, dm\, dr = \int_0^3 \pi \cdot \left(\frac{20r}{1+r^2} - 2r^3 + 16r\right) dr = \left[\pi \cdot \left(10\ln(1+r^2) - \tfrac{1}{2}r^4 + 8r^2\right)\right]_0^3 =$$
$$= \pi \cdot \left(10 \ln 10 + \tfrac{63}{2}\right).$$

---

2. a) $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0.$$

Sajátértékek: $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol $t \neq 0$.

b) $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \Longrightarrow (A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

c) Az $y + z = 0$ sík vektorai: $\begin{bmatrix} s \\ t \\ -t \end{bmatrix}$, ahol $s, t \in \mathbf{R}$ tetszőleges.

$$A \cdot \begin{bmatrix} s \\ t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 3t \\ -s - 2t \\ s + 2t \end{bmatrix},$$

és ez kielégíti a sík egyenletét: $-s - 2t + s + 2t = 0$.

---

3. $\mathbf{r}(t) = (3t, 1, 2t\sqrt{t})$.

a) $\mathbf{r}(t_0) = (3t_0, 1, 2t_0\sqrt{t_0})$

Az $x - z = 0$ sík normálvektora: $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$.

$\mathbf{r}(t_0)$-ból a síkra bocsátott merőleges egyenes:

$$x = 3t_0 + t$$
$$y = 1$$
$$z = 2t_0\sqrt{t_0} - t$$

A síkkal vett metszéspontja:

$$3t_0 + t - 2t_0\sqrt{t_0} + t = 0$$
$$t = -\frac{2}{3}t_0 + t_0\sqrt{t_0}$$
$$P_0\left(\frac{3}{2}t_0 + t_0\sqrt{t_0}, 1, \frac{3}{2}t_0 + t_0\sqrt{t_0}\right).$$

A vetületgörbe egyenlete:

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{3}{2}t + t\sqrt{t}, 1, \frac{3}{2}t + t\sqrt{t}\right).$$

b) I. megoldás:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(t) =& (\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{t})\\ \dot{\mathbf{u}}(9) =& (3, 0, 9)\\ |\dot{\mathbf{u}}(9)| =& |(6,0,6)| = 6 \cdot |(1,0,1)| = 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

II. megoldás (az a) rész nélkül):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) =& (3, 0, 3\sqrt{t})\\ \dot{\mathbf{r}}(9) =& (3, 0, 9)\end{aligned}$$

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{r}}(9)$ vetületének hossza a síkon:

$$\sqrt{\mathbf{a}^2 - \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right)^2} = \sqrt{90 - 18} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

c)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) =& (3, 0, 3\sqrt{t})\\ |\dot{\mathbf{r}}(t)| =& \sqrt{9 + 9t} = 3\sqrt{t+1}\\ s =& \int_0^t 3\sqrt{\tau + 1}\, d\tau = \left[2(\tau+1)^{3/2}\right]_0^t = 2(t+1)^{3/2} - 2\\ t =& \left(\frac{s}{2} + 1\right)^{2/3} - 1\\ \mathbf{r}(s) =& \left(3\left(\left(\frac{s}{2}+1\right)^{2/3} - 1\right), 1, 2 \cdot \left(\left(\frac{s}{2}+1\right)^{2/3} - 1\right)^{3/2}\right).\end{aligned}$$

---

4. $y''' - 4y'' + 4y' = 8, \quad y(0) = \alpha,\ y'(0) = 2 + 2\alpha,\ y''(0) = 4\alpha.$

A homogén differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned}m^3 - 4m^2 + 4m =& 0\\ m(m-2)^2 =& 0\end{aligned}$$

$$c_1 + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$\begin{array}{lll} y_p &=& Ax \\ y_p' &=& A \qquad 4A = 8 \\ y_p'' &=& 0 \qquad\ \ A = 2 \qquad \Rightarrow y_p = 2x \\ y_p''' &=& 0 \end{array}$$

Az általános megoldás:

$$y = 2x + c_1 + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x}.$$

Ebből

$$\begin{array}{lll} & & y(0) = c_1 + c2 = \alpha \\ y' &=& 2 + 2c_2e^{2x} + c_3(1+2x)e^{2x} \qquad y'(0) = 2 + 2c_2 + c_3 = 2 + 2\alpha \\ y'' &=& 4c_2e^{2x} + c_3(4+4x)e^{2x} \qquad y''(0) = 4c_2 + 4c_3 = 4\alpha \end{array}$$

Ennek a megoldása: $c_1 = 0, \quad c_2 = \alpha, \quad c_3 = 0$, ezért a keresett függvény

$$y(x) = 2x + \alpha e^{2x}.$$

A második kérdés megoldása: $y(2) = 4 + e^4\alpha$, így $P\Big(y(2) \in (6,8)\Big) = P(6 < 4 + e^4\alpha < 8) =$

$$= P(2e^{-4} < \alpha < 4e^{-4}) = F_\alpha(4e^{-4}) - F_\alpha(2e^{-4}) = \Phi\left(\frac{4e^{-4} - 0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2e^{-4} - 0}{2}\right) = \Phi(2e^{-4}) - \Phi(e^{-4}).$$
