1.

$$u(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - x + 3y$$

$$u'_x = x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2 = 1$$

$$u'_y = x^2 + 2xy + 3 = 0, \quad \text{és a két sor különbségéből} \quad y^2 = 4$$

Így a következő értékek adódnak:

	$x+y=1$	$x+y=-1$	$x+y=1$	$x+y=-1$
	$y=2$	$y=2$	$y=-2$	$y=-2$
	$P_1(-1,2)$	$P_2(-3,2)$	$P_3(3,-2)$	$P_4(1,-2)$
$D(x,y) = -4y(x+y)$:	-8	-8	8	8
$u''_{xx} = 2(x+y)$:	2	-2	2	-2,

ahol $D(x,y) = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x \end{vmatrix}$.

Így P_1-ben és P_2-ben nincs szélsőérték, mert ott $D(x,y) < 0$,
$P_3(3,-2)$-ben minimum van, mert ott $D(x,y) > 0$ és $u''_{xx} > 0$,
$P_4(1,-2)$-ben pedig maximum, mert ott $D(x,y) > 0$ és $u''_{xx} < 0$.

Nincs olyan komplex reguláris függvény, amelynek valós vagy képzetes része $u(x,y)$ lenne, ugyanis

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 4x + 2y \neq 0.$$

---

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Az $A\mathbf{r} = \mathbf{c}$ egyenlet megoldása:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -c \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -c \\ 0 & 7 & -7 & 3+2c \\ 0 & 14 & -14 & 4+5c \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -c \\ 0 & 7 & -7 & 3+2c \\ 0 & 0 & 0 & -2+c \end{array}\right]$$

Ha $c \neq 2$, akkor nincs megoldás. Ha $c = 2$, akkor tovább:

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 1+t \\ t \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

egy $\mathbf{v} = (-1,1,1)$ irányvektorú e egyenes vektoregyenlete.

A $z = x^2 + y^2$ felület érintősíkjának normálvektora az (x_0, y_0, z_0) pontjában $\mathbf{n} = (-2x_0, -2y_0, 1)$. A sík merőleges az e egyenesre, ha $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v}$, azaz egyik a másiknak skalárszorosa, tehát $-2x_0 = -1$, $-2y_0 = 1$. Ebből

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{2}, \quad z_0 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{2},$$

tehát a $P_0(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-beli érintősíkról van szó. Ennek normálvektora $\mathbf{n} = (-1,1,1)$, egyenlete pedig

$$-\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \text{azaz}$$

$$2x - 2y - 2z - 1 = 0.$$

---

3. $I_n = \oint_{\mathcal{F}_n} \mathbf{v}\, \mathbf{dF} = \iiint_{V_n} \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq n-\sqrt{n^2-1}} 3x^2 + 3y^2 + 3z^2\, dx\, dy\, dz,$

gömbi koordinátákkal:

$$= \int_0^{n-\sqrt{n^2-1}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 3r^2(r^2 \sin\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta\, dr = \int_0^{n-\sqrt{n^2-1}} \int_0^{\pi} 6\pi r^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr =$$

$$= \int_0^{n-\sqrt{n^2-1}} \Big[-6\pi r^4 \cos\vartheta \Big]_0^{\pi} = \int_0^{n-\sqrt{n^2-1}} 12\pi r^4\, dr = \left[\frac{12}{5}\pi r^5\right]_0^{n-\sqrt{n^2-1}} = \frac{12}{5}\pi\Big(n - \sqrt{n^2-1}\Big)^5.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} I_n(z+i)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{5}\pi\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)^5 (z+i)^n$ sor konvergenciaközéppontja $-i$, konvergenciasugara pedig

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)^5\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^5\left((n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}\right)^5}{\left((n+1)-\sqrt{(n+1)^2-1}\right)^5\left((n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}\right)^5\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}\right)^5}{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{n^2}}\right)^5}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)^5} = \frac{2^5}{2^5} = 1.$$

4.

$$y''' - y'' + y' - y = 2e^x \qquad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=2$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} m^3 - m^2 + m - 1 &= 0 \\ (m-1)(m-i)(m+i) &= 0 \end{aligned}$$

$$c_1 e^x + c_2\cos x + c_3 \sin x$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, próbafüggvénnyel:

$$\begin{aligned} y_p &= Axe^x \\ y_p' &= A(x+1)e^x \qquad & A\big((x+3)-(x+2)+(x+1)-x\big)e^x = 2e^x \\ y_p'' &= A(x+2)e^x \qquad & 2Ae^x = 2e^x \\ y_p''' &= A(x+3)e^x \qquad & A = 1 \end{aligned}$$

Az általános megoldás:

$$y = xe^x + c_1e^x + c_2\cos x + c_3 \sin x.$$

Ebből:

$$\begin{aligned} & & y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y' &= (x+1)e^x + c_1e^x - c_2\sin x + c_3\cos x \qquad & y'(0) &= 1 + c_1 + c_3 = 1 \\ y'' &= (x+2)e^x + c_1e^x - c_2\cos x - c_3\sin x \qquad & y''(0) &= 2 + c_1 - c_2 = 2 \end{aligned}$$

Ennek egyetlen megoldása: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, ezért a keresett megoldás $y(x) = xe^x$, és ezzel

$$f_\xi(x) = \begin{cases} xe^x & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0 & \text{ha } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Ez valóban sűrűségfüggvény, mert nemnegatív, véges sok ponttól eltekintve folytonos, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = \Big[(x-1)e^x\Big]_0^1 = 1.$$

Az eloszlásfüggvény:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \int_0^x te^t\,dt = [(t-1)e^t]_0^x = (x-1)e^x + 1 & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int_0^1 x^2e^x\,dx = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx = e - 2 \approx 0.72$

$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx = \int_0^1 x^3e^x\,dx = [x^3e^x]_0^1 - \int_0^1 3x^2e^x\,dx = e - 3(e-2) = -2e + 6 \approx 0.56$

$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = (-2e+6) - (e-2)^2 = -e^2 + 2e + 2$

$D(\xi) = \sqrt{-e^2 + 2e + 2} \approx 0.22.$
