

1. Mutassa meg, hogy az $f(x) = -\frac{1}{3} \ln(1 - x^3)$ függvény a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+3}}{3n+3}$ hatványsor összegfüggvénye! Határozza meg a sor konvergenciatartományát! Végezze el az összegfüggvény teljes vizsgálatát! (15 pont)
2. Mutassa meg, hogy az $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 4e^x$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei megegyeznek az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -13 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeivel! Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását! Számítsa ki a mátrix valós sajátértékeihez tartozó sajátvektorokat! (15 pont)

3. Oldja meg a $z^6 + 1 = 0$ komplex egyenletet! Mutassa meg, hogy az egyik megoldás egyenlő a

$$\frac{2}{\pi^2} \oint_{\mathcal{G}} \frac{\sinh \pi z}{(z^2 + 1)^2} dz$$

komplex integrállal, ahol $\mathcal{G}$ a $|z - i| = \frac{3}{2}$ egyenletű görbe pozitív forgásiránnyal! (15 pont)

4. Határozza meg az $a > 0$ paraméter értékét, ha

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2} e^{-x-ay}, & \text{ha } x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény valamely ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye! Függetlenek-e ezek a valószínűségi változók? Számítsa ki $\xi\eta$ várható értékét! (15 pont)