Szigorlat *1999. június 18.*

1. Határozza meg az $f(x) = \det \mathbf{A}$ kétváltozós valós függvény szélsőértékeinek helyét és minőségét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x-1 & y & x & y \\ x & y & x & y \\ x+1 & y & 1 & x-1 \\ 2 & x+y & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Adja meg ezeken a helyeken a mátrix sajátértékeit és a negatív sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! (*15 pont*)

2. Jelölje I_n a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{x^3}{3}\mathbf{i} + \frac{y^3}{3}\mathbf{j} + (\ln z)\mathbf{k}$ vektor-vektorfüggvény felületi integráljait az $x^2 + y^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, a $z = 1$ és a $z = 2$ felületek által határolt $\mathcal{F}_n$ felületeken kifelé mutató normálvektorokkal! Számítsa ki az $[I_n]$ sorozat határértékét! (*15 pont*)

3. Számítsa ki az $x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$ differenciálegyenlet $y(1) = y'(1) = 1$ kezdeti feltételekhez tartozó $y(x)$ partikuláris megoldását! Legyen $f(x) = y(x)$, ha $x \in [\pi, 3\pi]$ és $f(x + 2\pi) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Adja meg f Fourier-sorát! Milyen x helyeken állítja elő a Fourier-sor az f függvényt? (*15 pont*)

4. A ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^4 + x^2}, & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozza meg az a paraméter értékét és ξ eloszlásfüggvényét! Számítsa ki ξ várható értékét és szórását! (*15 pont*)