Szigorlati feladatok *1997. június*

1. Oldja meg az

$$x^3y''' + 4x^2y'' + xy' - y = \int_1^x t(1 + 2\ln t)dt$$

differenciálegyenletet. (*15 pont*)

2. Legyen $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, $\mathbf{A}$ és $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ pedig az

$$\begin{aligned} x + a\pi y - \tfrac{1}{6}z &= 1 \\ -x - 2y + z &= 0 \\ 2x - 2a\pi y + 3z &= -2 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer mátrixa, illetve kibővített mátrixa. Adjuk meg a

$$P\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Rang}\,\mathbf{A} \le \xi < \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\right)$$

valószínűséget, s számítsuk ki az $M(\xi)$ várható értéket, ha létezik. (*15 pont*)

3. Számítsa ki a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\mathbf{i} + \frac{1}{x}\cos xz\mathbf{j} + (y - z)\mathbf{k}$$

vektor-vektorfüggvény skalárértékű görbementi integrálját a

$$g: \quad \mathbf{r}(t) = \sqrt{1 - t^2}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}; \qquad 0 \le t \le \sqrt{1 - \arccos^2 \tfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

görbe mentén a paraméter növekedése szerinti irányban. Számítsa ki a g görbe $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pontjában a binormális egységvektort. (*15 pont*)

4. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f_1(x) = x\ln x$ és az $f_2(x) = \frac{1}{x}$ függvények Wronski-determinánsának abszolút értékén az $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$ intervallum felett. (*15 pont*)