Szigorlati feladatok *1997. szeptember*

1. Határozzuk meg az $u(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - x + 3y$ kétváltozós valós függvény szélsőértékeinek helyét és minőségét! Van-e olyan komplex reguláris függvény, amelynek valós vagy képzetes része az $u(x,y)$ függvény? (*12 pont*)

2. Legyenek az $\mathbf{A}$ tenzor vektorkoordinátái: $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ és $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + c \cdot \mathbf{k}$ $(c \in \mathbf{R})$, akkor az $\mathbf{Ar} = \mathbf{c}$ egyenlet $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ megoldásai a $c = 2$ esetben egy e egyenes pontjainak a helyvektorai, a $c \neq 2$ esetekben pedig nincs megoldás! Adjuk meg a $z = x^2 + y^2$ egyenletű forgási paraboloid e-re merőleges érintősíkjának az egyenletét! (*14 pont*)

3. Jelölje I_n a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vektor-vektorfüggvénynek az $x^2 + y^2 + z^2 = n - \sqrt{n^2 - 1}$ egyebletű $\mathcal{F}_n$ gömbfelületen vett zárt felületi integrálját kifelé mutató felületi normávektorral! Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} I_n (z + i)^n$ komplex hatványsor konvergencia-középpontját és konvergenciasugarát! (*15 pont*)

4. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} y(x) & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0 & \text{ha } x \notin (0,1) \end{cases}$$

függvény valamely ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ahol $y(x)$ az

$$y''' - y'' + y' - y = 2e^x$$

differenciálegyenletnek az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ és $y''(0) = 2$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldása! Határozzuk meg a ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását. (*19 pont*)