Szigorlati feladatok (1998.január 27.)

1. Adja meg az $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását! Mutassa meg, hogy az $y(x) = e^x + \sin 2x$ függvény az $y(0) = 1, y'(0) = 3$ és az $y''(0) = 1$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldás! Számítsa ki a függvény grafikonjának x-tengely körüli forgatásával kapott test térfogatát a $[0, \pi]$ intervallumban! (*14 pont*)

2. Számítsa ki az $I_n = \oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{\sin nz}{z^2+4} dz$ komplex integrálokat a $|z - 1 - i| = 3$ egyenletű $\mathcal{G}$ görbe mentén pozitív forgásiránnyal! Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n z^n$ komplex hatványsor konvergenciasugarát! (*12 pont*)

3. Számítsa ki az $f(x, y) = \det \mathbf{A}$ függvény szélsőértékeinek helyét, minőségét és értékét, ha:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ y & 1 & x \end{bmatrix}.$$

Határozza meg ezeken a helyeken az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és az egész sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! (*12 pont*)

4. Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2 y \ln z \mathbf{i} + xz\mathbf{j} + \frac{z}{z+1}\mathbf{k}$ vektor-vektorfüggvény felületi integrálját a $4x^2 + 4y^2 = z$ egyenletű forgási paraboloid, a $z = 1$ és a $z = 4$ egyenletű síkok által meghatározott zárt felületen kifelé mutató felületi normálvektorral! (*12 pont*)

5. A ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2+1}, & \text{ha } x \in (-1, 1); \\ 0, & \text{ha } x \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Határozza meg az a paraméter értékét és ξ eloszlásfüggvényét! Számítsa ki ξ várható értékét, szórását és a $P(\xi > \frac{1}{\sqrt{3}})$ valószínűséget! (*10 pont*)

Szigorlati feladatok (1998.február 2.)

1. Mutassa meg, hogy az $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$ hatványsor összegfüggvénye. Határozza meg a sor konvergenciatartományát! Végezze el az összegfüggvény teljes vizsgálatát! (*15 pont*)

2. Oldjuk meg az $(\mathbf{AB})\mathbf{r} = \mathbf{0}$ egyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektor pedig oszlopvektorként van megadva. Mutassuk meg, hogy a megoldások egy origón átmenő egyenes pontjainak koordinátái! (*8 pont*)

3. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ egyenletű gömbfelület azon részének felszínét, amelyet az $x^2 + y^2 - 2x = 0$ egyenletű hengerpalást metsz ki belőle! (*12 pont*)

4. Számítsa ki az $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = e^{-2x}$ differenciálegyenletnek azt az $y(x)$ partikuláris megoldását, amely kielégíti a $y(0) = 1$ és $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ feltételeket! (*13 pont*)

5. Mutassa meg, hogy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{\pi - x}{2}, & \text{ha } x \in (0, \pi); \\ 0, & \text{ha } x \notin (0, \pi) \end{cases}$$

függvény egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye! Számítsa ki az $A(\xi, 1, -1), B(1, 0, 1)$ és $C(0, -1, 1)$ pontok által meghatározott síkok és az $x = 4 - t,\ y = \frac{\xi}{2} + t,\ z = 2t$ egyenletrendszerű egyenesek metszéspontjainak várható értékét! (*12 pont*)