

Kombinatorikus problémák a távközlésben

Tapolcai János

BME Távközlési és Médiainformatikai Tanszék

MTA-BME Lendület Jövő Internet Kutatócsoport

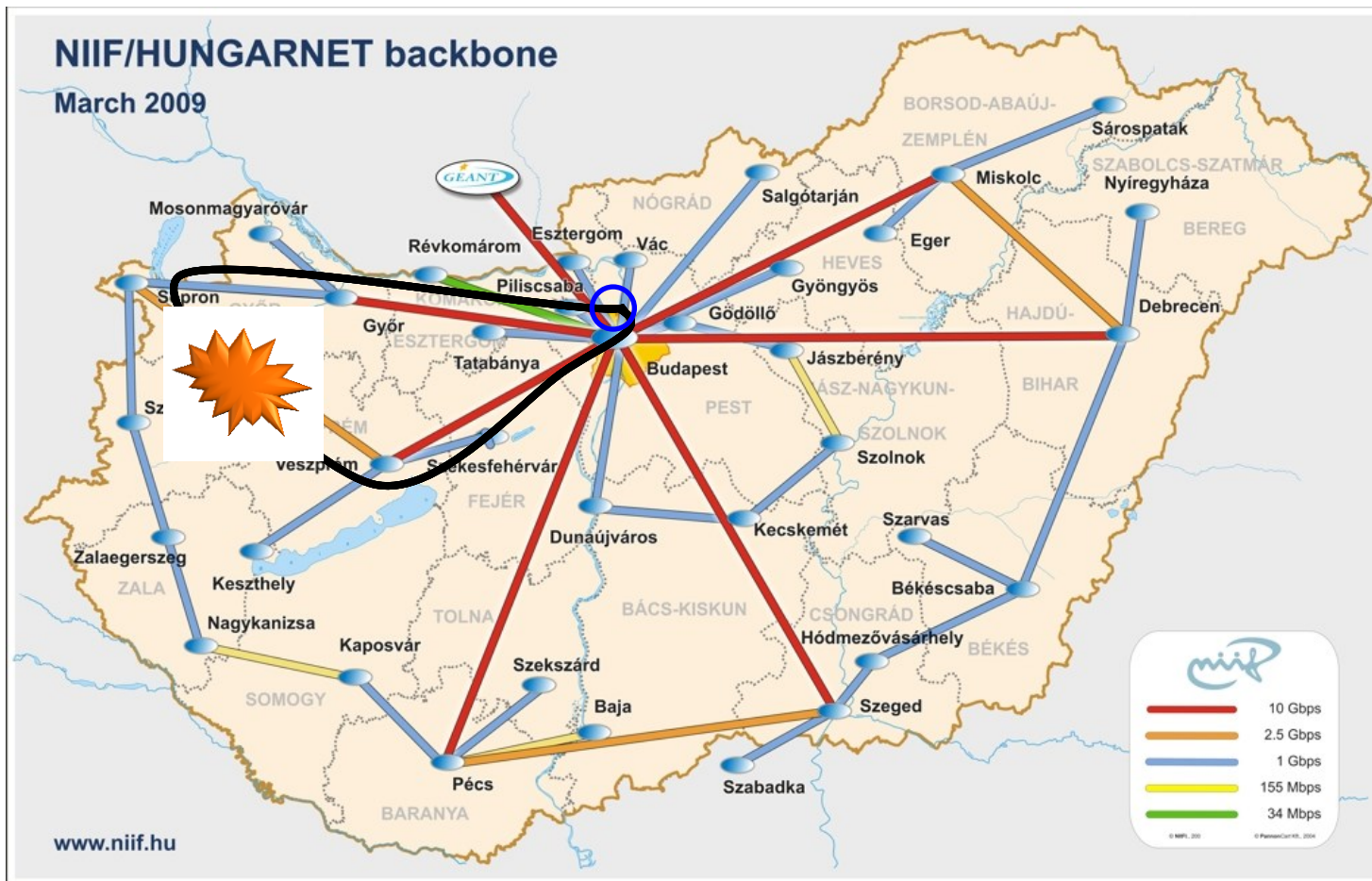
High Speed Networks Laboratory

Rónyai Lajos

BME Algebra Tanszék, MTA SZTAKI

Gyors hibalokalizáció

- Gyors: 50ms alatt
- Új módszer: „compressed sensing”

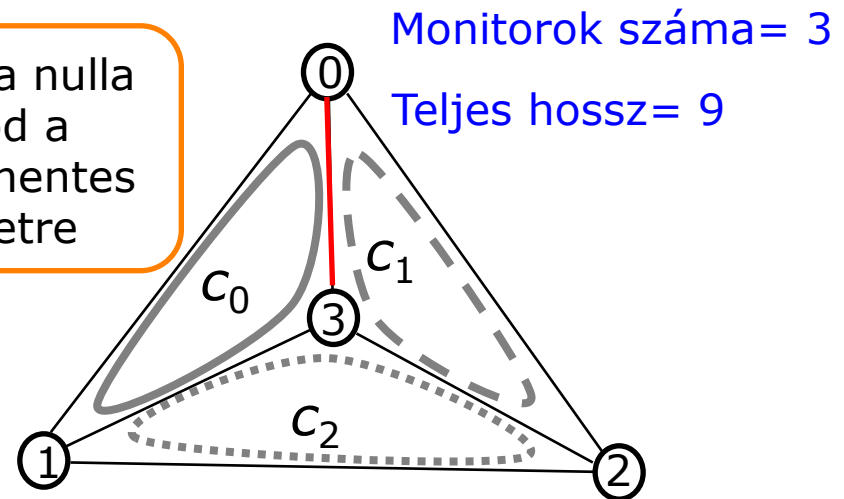


Egyszeres linkhiba-lokalizáció monitorozó körökkel

- Ismert a hálózat topológia
 - $G=(V,E)$ irányítatlan gráf
 - 2-összefüggő

Hibakód tábla	C_2	C_1	C_0
0-1	0	0	1
0-2	0	1	0
0-3	0	1	1
1-2	1	0	0
1-3	1	0	1
2-3	1	1	0

Csupa nulla
kód a
hibamentes
esetre

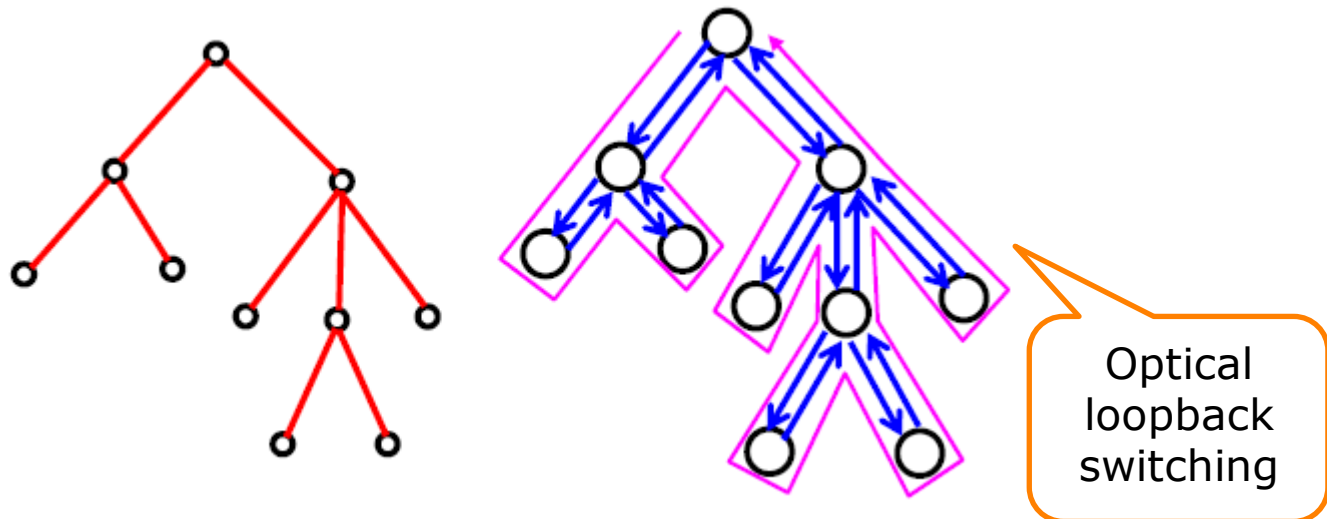


- Költségek:
 - A monitorozó körök száma
 - A teljes hossz
- Cél: egyszeres linkhiba (kábelszakadás) lokalizációja

$$\text{Monitorok száma} \geq \lceil \log_2(\text{élszám} + 1) \rceil$$

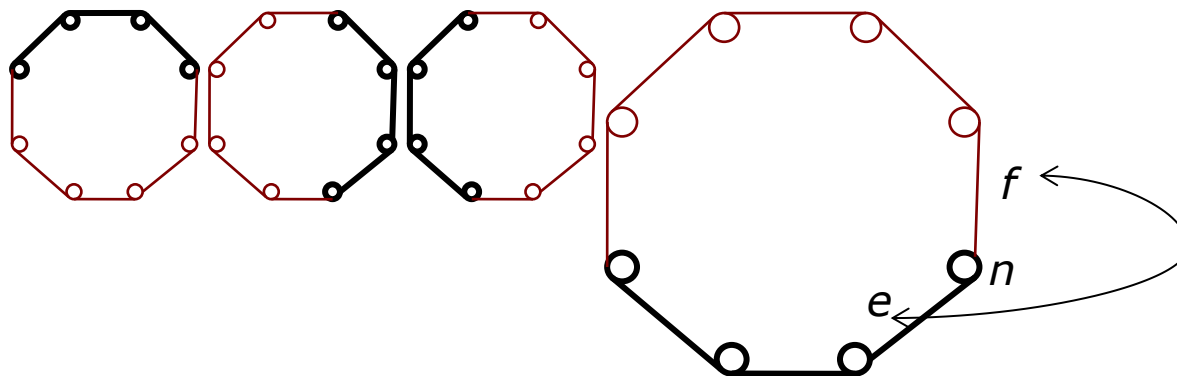
Monitorozás tetszőleges összefüggő gráffal

- A hálózat élei oda-vissza irányítottak
 - Teszt gráf, monitor, monitorozó út, m-út, (b)m-trail
 - Nem kell egy pontból indulniuk a m-utaknak
 - N. Harvey, M. Patrascu, Y. Wen, S. Yekhanin, and V. Chan, "Non-Adaptive Fault Diagnosis for All-Optical Networks via Combinatorial Group Testing on Graphs," in *IEEE INFOCOM, 2007*
[Harvey 2006-ban Machtey-díjat nyert, Patrascu 2008-ban]



Gyűrű topológia

- *Monitorok száma* = $\lceil \text{élszám}/2 \rceil$

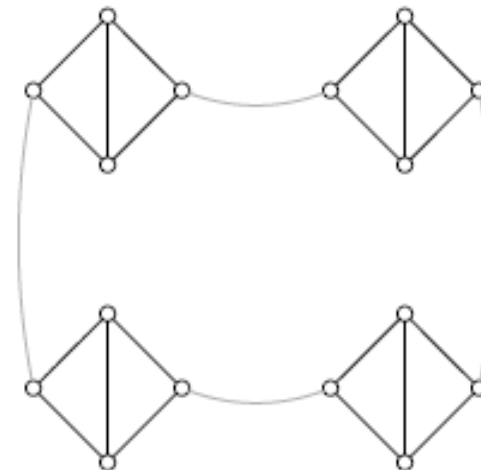
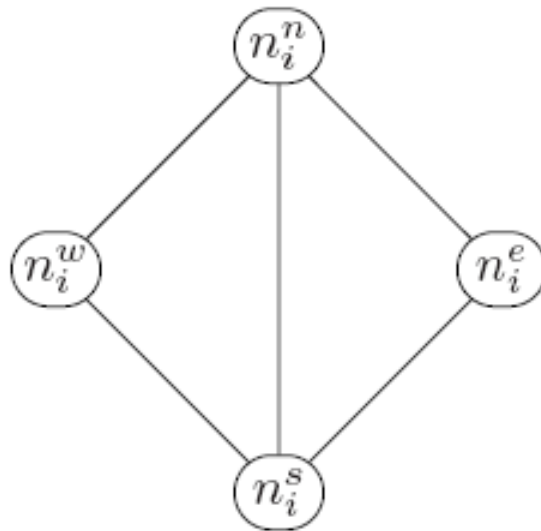


- Az e és f él megkülönböztetéséhez kell egy olyan monitorozó út, ami n -ben végződik.
- Minden monitor egy részgráf, ami két pontban végződik, azaz

$$2 * [\text{monitorok száma}] \geq [\text{pontok száma}]$$

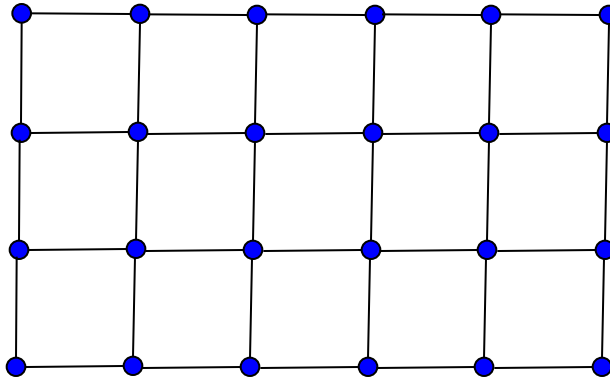
Az ötlet általánosítható

- Fokszám önmagában kevés
 - Csupa harmadfokú pont
 - Monitorok száma lineáris a gráf méretéhez képest



Konstrukció négyzetrácsra

3x5



- Síkba rajzolható
- Legnagyobb fokszáma 4
- Nagy a gráf átmérője

- Korábbi eredmény $n \times n$ négyzetrácsra

$$2 + 6 \lceil \log_2 \sqrt{\frac{|E|}{2}} \rceil \approx 3 \lceil \log_2 |E| \rceil$$

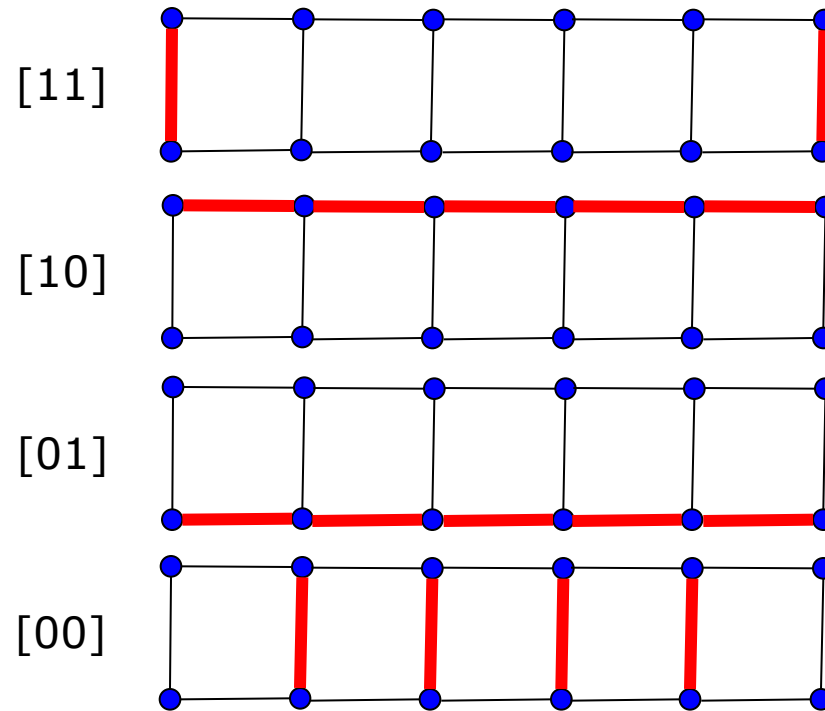
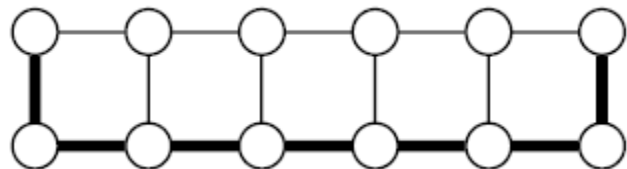
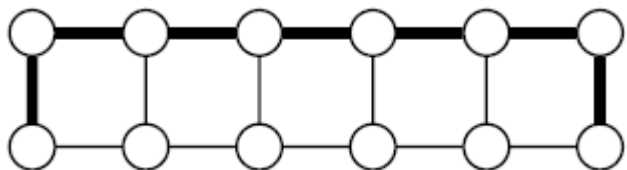
- N. Harvey, M. Patrascu, Y. Wen, S. Yekhanin, and V. Chan, "Non-Adaptive Fault Diagnosis for All-Optical Networks via Combinatorial Group Testing on Graphs," in *IEEE INFOCOM*, 2007
- Közel optimális megoldás

$$3 + \lceil \log_2(\text{élszám}+1) \rceil \geq \text{monitorok száma} \geq \lceil \log_2(\text{élszám}+1) \rceil$$

Konstrukció csokoládé gráfra

$$\lceil 0.42 + \log_2 (|E| + 2) \rceil$$

- Kezdjük két m-úttal



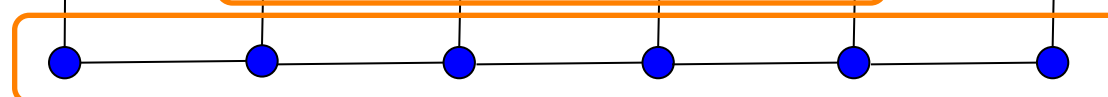
Egyedi kódok



Egyedi kódok

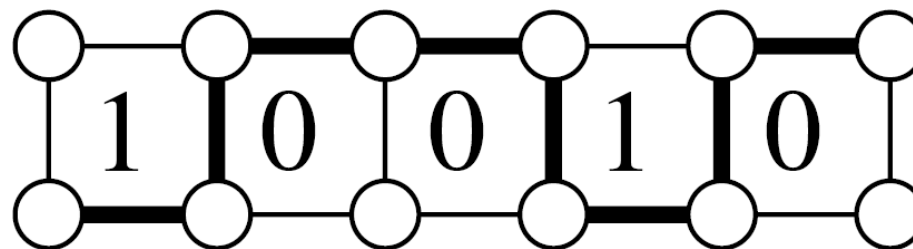
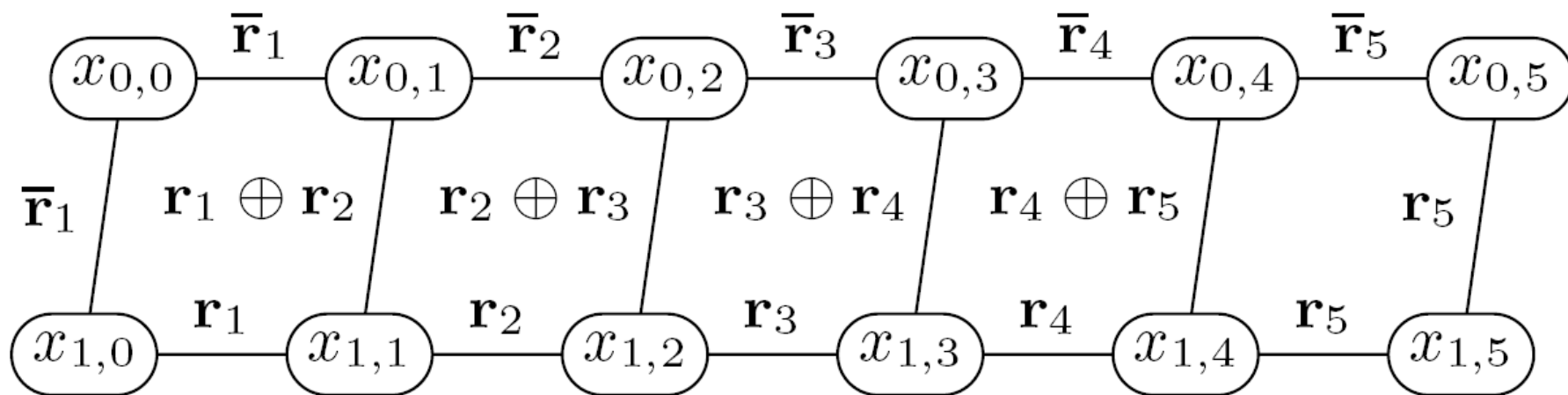


Egyedi kódok



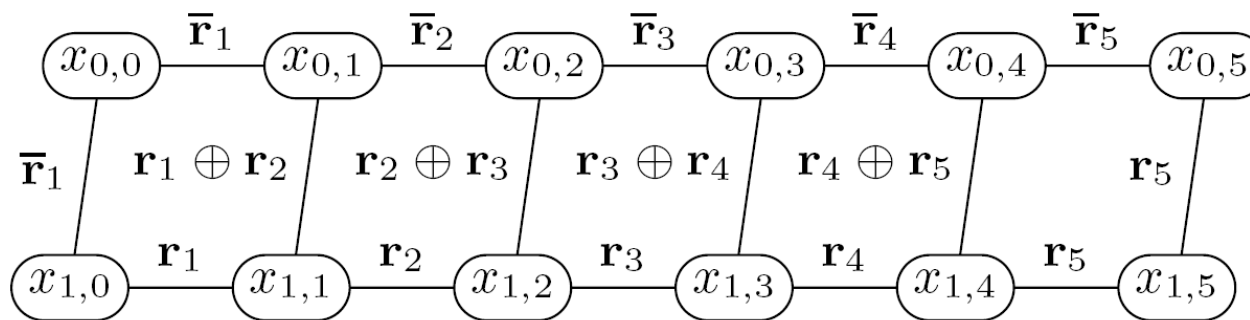
Konstrukció csokoládé gráfra (folyt.)

- n darab b hosszú bitvektort generálunk: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$



Bitvektorok generálása

1. r_i mind különböző legyen
2. $r_i \oplus r_{i+1}$ mind különböző legyen
- (3. r_i és r_n első bitje azonos legyen)



100
 110
010
 011
001
 111
110
 101
011
 100
111
 010
101
 001

- Absztrakt algebra
 - $q=2^b$ elemű Galois testek

Galois testek

- Polinomokkal ábrázoljuk az elemeit
 - b -nél kisebb fokú és F_2 felett
 - Pl. $b=3$ esetén $[1 \ 0 \ 1] \rightarrow 1 + (0x) + 1x^2$
- Kiválasztunk egy irreducibilis polinomot (R), amely foka b F_2 felett
 - F_8 -hoz például $1 + x + x^3$
- A $\oplus$ operátor a két polinom összeadása (modulo R), F_2 felett
 - Ez bitenkénti kizáró VAGY-nak felel meg

$$(1 + x + x^2) + (1 + x^2) = x$$

$$[1 \ 1 \ 1] \oplus [1 \ 0 \ 1] = [0 \ 1 \ 0]$$

- A $*$ operátor két polinom szorzása modulo R , F_2 felett
- Létezik α primitív elem, hogy a hatványai mind különbözőek

$$\alpha = \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-1}$$

A konstrukció ellenőrzése

The nonzero elements of $\mathbb{F}_8$ as binary polynomials modulo $1 + x + x^3$.

Exponential	Polynomial	Code
α^0	1	$r_1 = 100$
α^1	x	$r_2 = 010$
α^2	x^2	$r_3 = 001$
α^3	$x^3 = 1 + x \pmod{1 + x + x^3}$	$r_4 = 110$
α^4	$x + x^2$	$r_5 = 011$
α^5	$x \cdot (x + x^2) = 1 + x + x^2 \pmod{1 + x + x^3}$	$r_6 = 111$
α^6	$x \cdot (1 + x + x^2) = 1 + x^2 \pmod{1 + x + x^3}$	$r_7 = 101$

- Indirekt, ha $i \neq j$

$$\alpha^i \oplus \alpha^{i+1} = \alpha^j \oplus \alpha^{j+1}$$

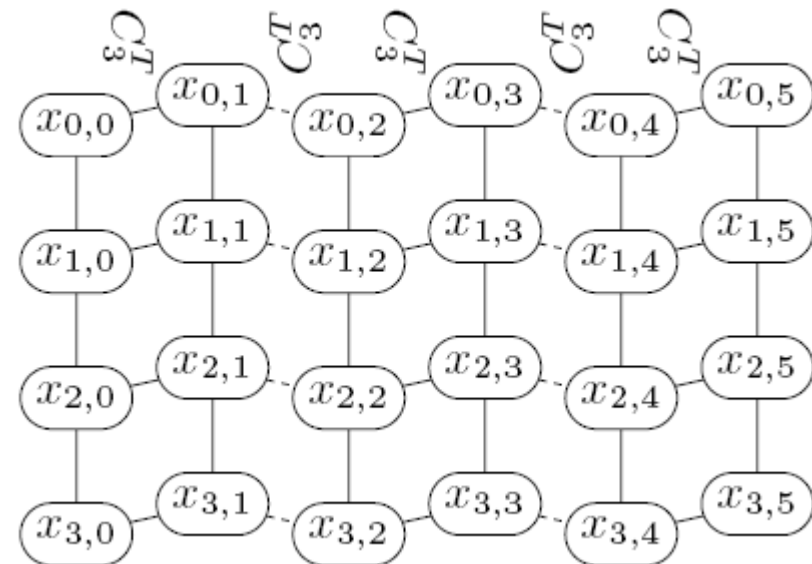
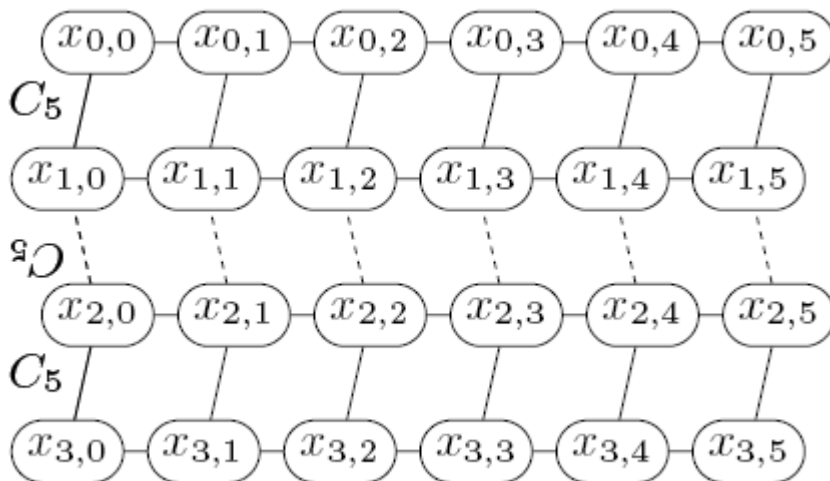
$$\alpha^i(1 \oplus \alpha) = \alpha^j(1 \oplus \alpha)$$

- viszont $1 \oplus \alpha \neq 0$, azaz $\alpha^i = \alpha^j$ ami ellentmondás.

Konstrukció tetszőleges négyzetrácsra

- Csokoládé gráfra generált megoldásokat általánosítjuk
 - A kód első fele az él függőleges értéket adja meg
 - A kód második fele az él vízszintes értéket adja meg

$$3 + \lceil \log_2 (|E| + 1) \rceil$$

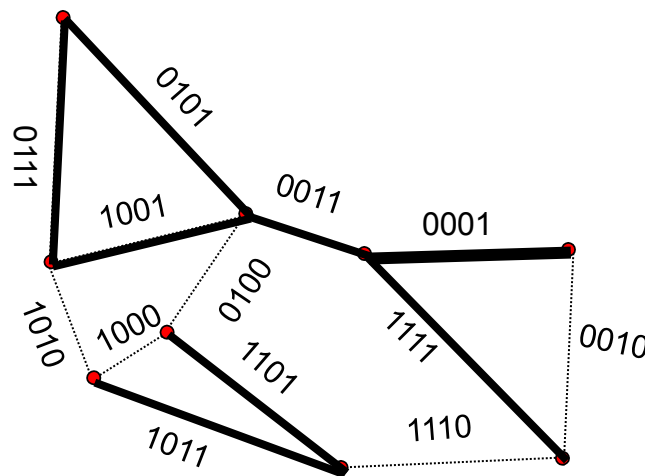


Heurisztikus módszerek

- Körök/utak hozzáadása (vagy bővítése), amíg minden él egyedi kódot kapott
 - S. Ahuja, S. Ramasubramanian, and M. Krunz, "SRLG Failure Localization in All-Optical Networks Using Monitoring Cycles and Paths," in IEEE *INFOCOM*, 2008.
 - Y. Zhao and S. Xu, "A new heuristic for monitoring trail allocation in all-optical WDM networks," in IEEE *GLOBECOM*, 2010.
- Egyedi kódok és élek összerendelése, úgy hogy minden helyiértékben az „1” bitek összefüggő részgráfot alkossanak
 - J. Tapolcai and Pin-Han Ho, et. al. "Failure Localization for Shared Risk Link Groups in All-Optical Mesh Networks using Monitoring Trails", *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 2012.

Új heurisztika alapötlete

- Véletlen sorrendben hozzárendelünk az élekhez (egyedi) bináris kódokat
 - Minden helyiértékre külön-külön vizsgáljuk a problémát
- Kezdjük a legkisebb helyiértékű bittel és megjelöljük azokat az éleket, amelyeknél „1” bit szerepelt az adott helyiértéken
 - Azt szeretnénk, hogy ezek az élek összefüggő részgráfot alkossanak



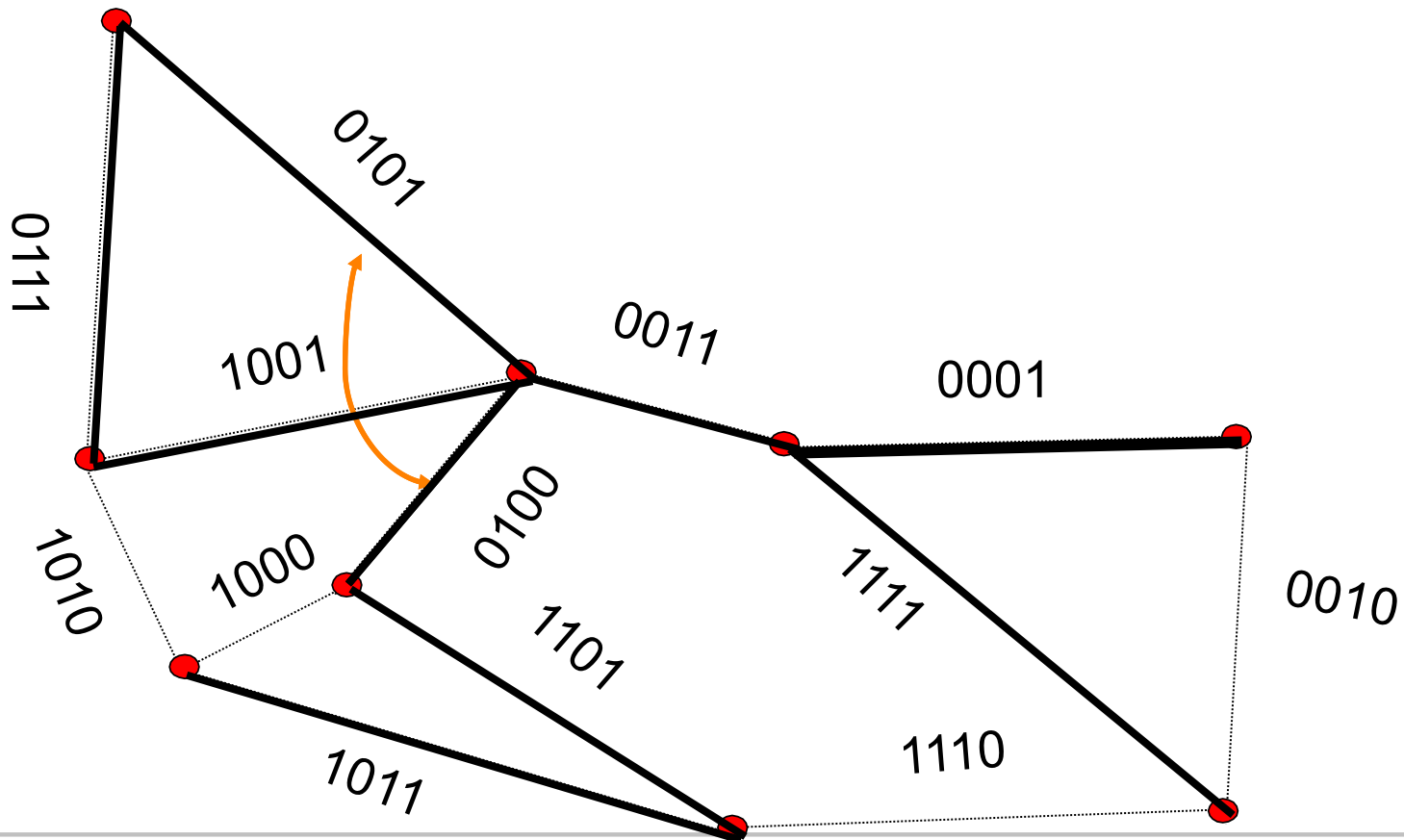
Szabad kódok:

0110

1100

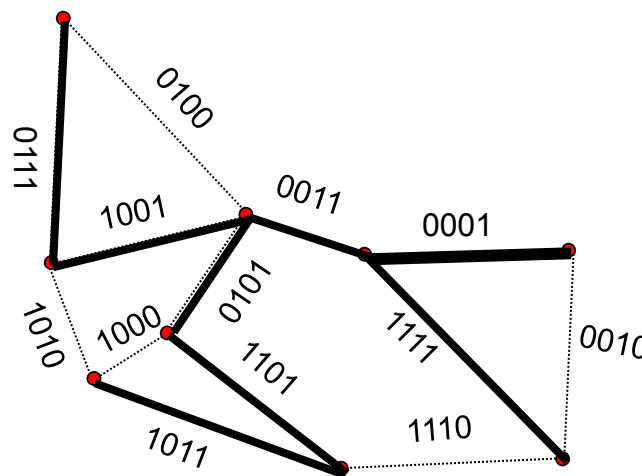
Mohó kódcserek

- Cél: összefüggő legyen az élek azon halmaza, ahol „1” bit található adott helyiértéken



Jó kódcsere gyors keresése

- Ehhez hatékony adatstruktúra kell
 - Minden helyiértékre külön nézzük
 - Két link kódját kicseréljük
 1. Egy linket elveszünk, egy másikat hozzáadunk
 - Egy link kódját egy nem használt kódra cseréljük
 2. Egy linket elveszünk
 3. Egy linket hozzáadunk



Szabad kódok:

0110

1100

Greedy Code Swapping (GCS)

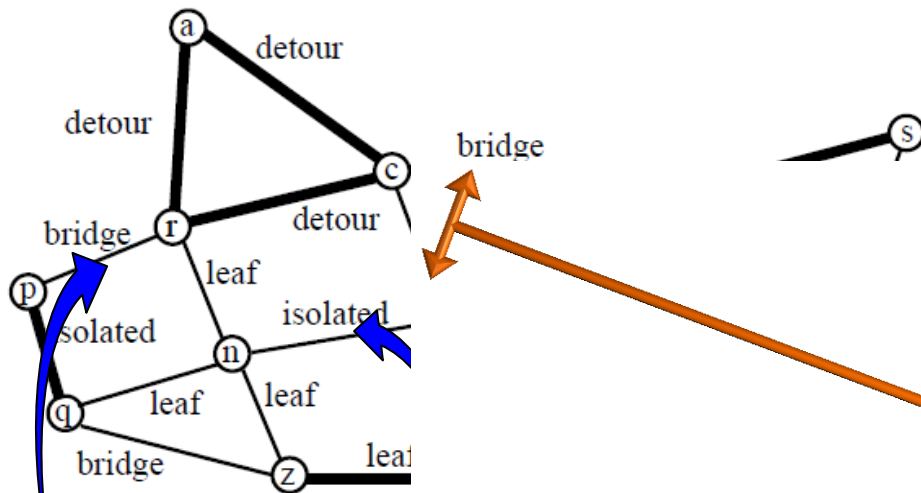
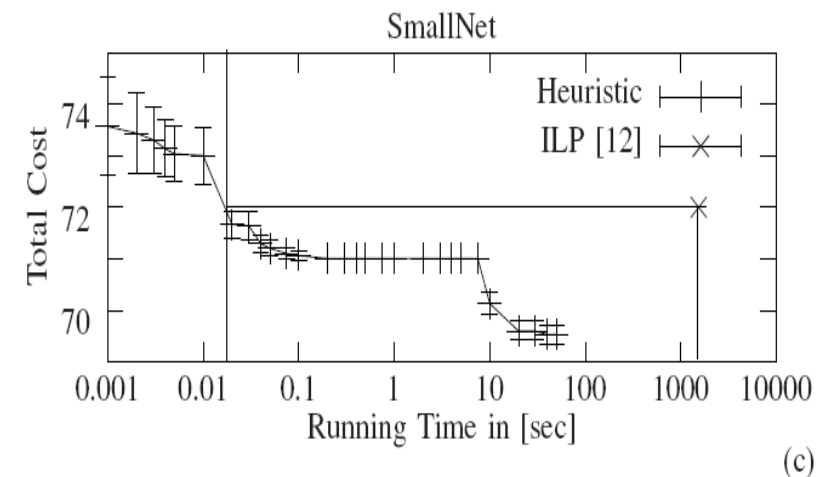
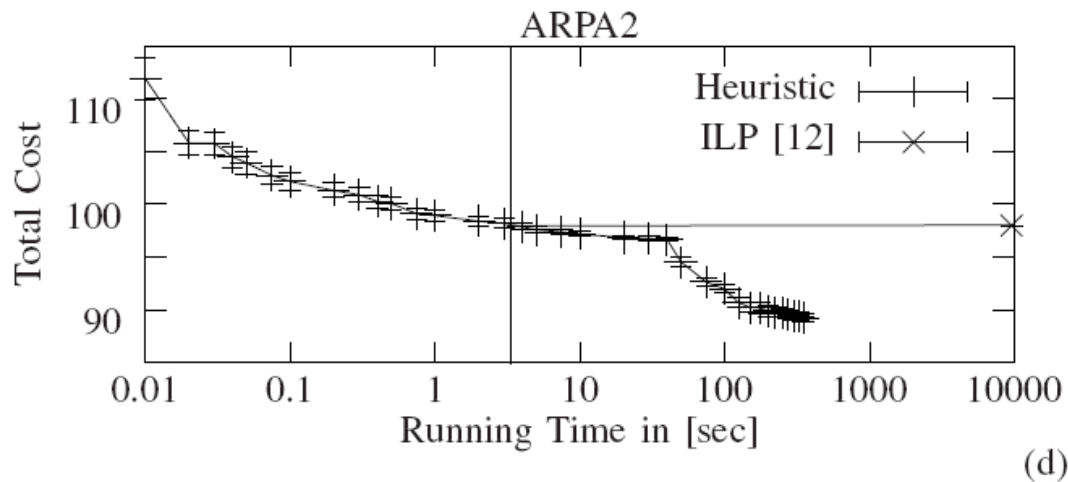
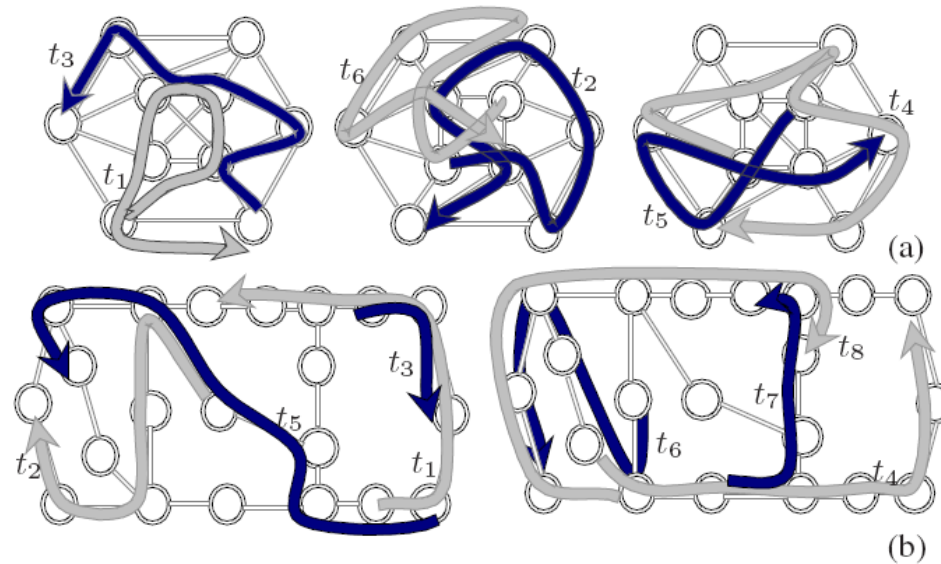


TABLE LOOKUP OF $\text{ADDBIT}(i, e)$

Attribute of e for L_i	# of bm-trails
isolated	increased by 1
leaf	unchanged
bridge	decreased by 1
detour	unchanged

add e	remove f	# of bm-trails
Attrib. of L_i	Attrib. of L_i	
	isolated	unchanged
	if	increased by 1
	edge	increased by 2
	tour	increased by 1
	isolated	decreased by 1 if e and f are not adjacent links, otherwise unchanged .
	if	Either unchanged or increased by 1 , if e is connected to f . See link (r, n) and (r, c) on Fig. 5 as an example.
	edge	increased by 1
	tour	unchanged
bridge	isolated	decreased by 2 if e and f are disjoint, otherwise increased by 1 .
	leaf	Either decreased by 1 , or unchanged if e is adjacent to f . See link (o, w) and (o, s) on Fig. 5 as an example.
	bridge	unchanged
	detour	decreased by 1
Detour	isolated	decreased by 1
	leaf	unchanged
	bridge	Either decreased by 1 or unchanged if e reconnects the detached sub-components. See links (o, u) and (u, w) in Fig. 5 as an example. Appendix provides the method to determine a bridge.
	detour	unchanged

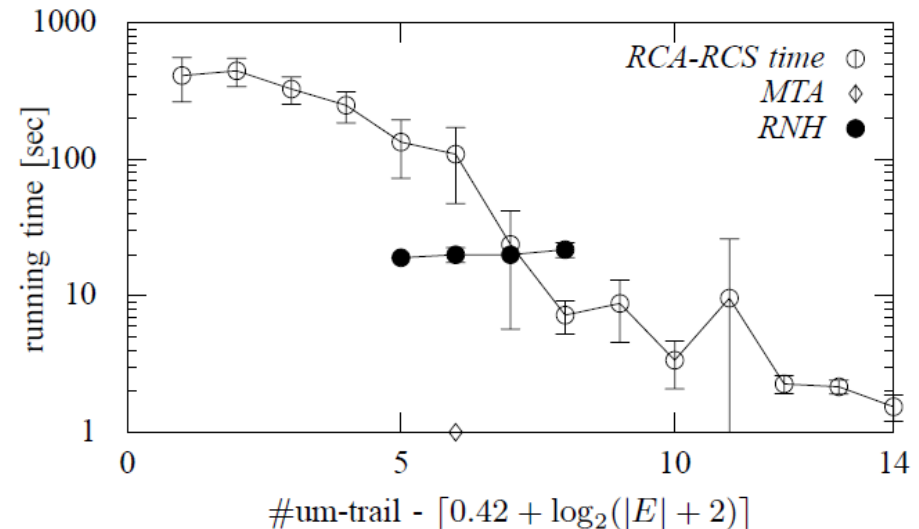
Heurisztika teljesítménye az egészértékű lineáris program megoldásához képest



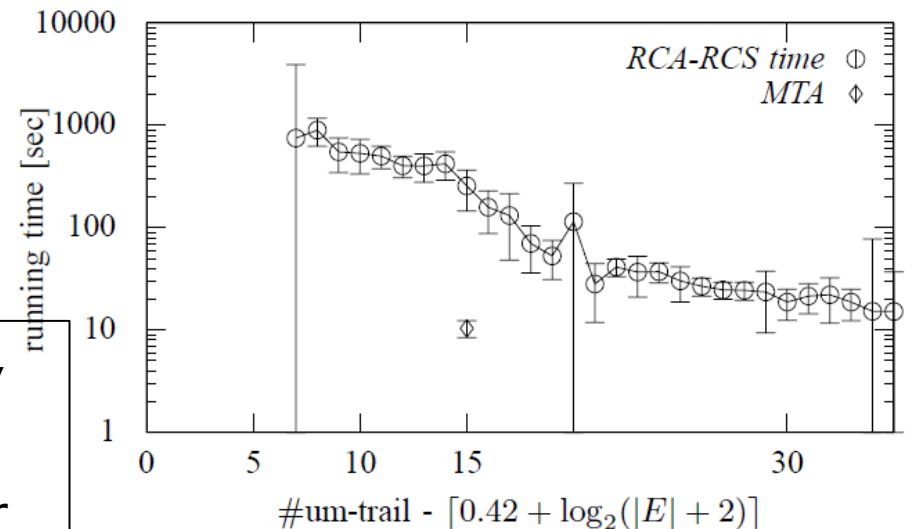
Csokoládé gráf mint benchmark

- Viszonylag ritka gráf
 - A pontok foka 3
- Nagy gráf átmérő
- Hosszú csokoládéra a heurisztikák rosszul teljesítenek

• J. Tapolcai, L. Rónyai, and Pin-Han Ho, "Optimal Solutions for Single Fault Localization in Mesh Topologies", in *IEEE Infocom 2010 Mini-conf*, and extended for *IEEE/ACM Transaction on Communications*



(a) C_{20}

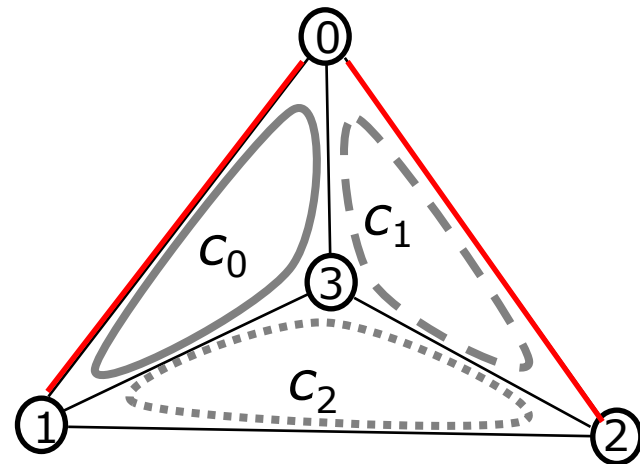


(b) C_{40}

Kéttős hibák

- A kódok bináris-VAGY vektorai is egyediek legyenek
 - Erősen unió-független halmazrendszer
 - Frankl Péter, Füredi Zoltán, Erdős Pál, Ruszinkó Miklós

Hibakód tábla	C_2	C_1	C_0
0-1	0	0	1
0-2	0	1	0
0-3	0	1	1
1-2	1	0	0
1-3	1	0	1
2-3	1	1	0



Többszörös hibák (legfeljebb d elem hibás)

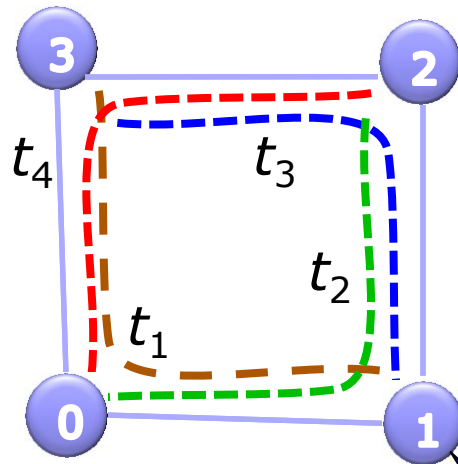
- Nem adaptív kombinatorikus csoporttesztelés
 - 1942 Washington, DC
 - Szifilisztes vérmintákat kerestek
 - Adódott az ötlet, hogy a mintákat összeöntve vizsgálják
 - Annals of Mathematical Statistics
 - Statistical „group test”
 - 1960-70 Rényi Alfréd és Katona O. H. Gyula vizsgálta a problémát kombinatorikus oldalról
 - 1987 F. K. Hwang, és T. Sós Vera determinisztikus konstrukciót adott, amiben a tesztek száma $O(d^2 \log m)$, ahol m az elemek száma
 - 2007 D. Eppstein, M.T. Goodrich, D.S. Hirschberg gyakorlatban is hatékony konstrukciókat adott
 - Superimposed Codes

ELOSZTOTT OPTIKAI HIBALOKALIZÁCIÓ

Elosztott optikai hibalokalizáció

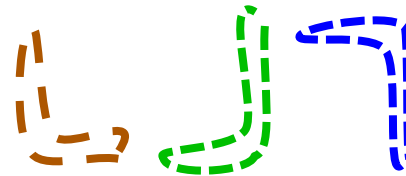
- Hibaüzenetek szétküldése gyenge pontja a rendszernek
 - Sokat lassít a hibalokalizáción
 - (Elektromos) üzenetek továbbítására van szükségünk
- Célunk csak lokális információból hibát lokalizálni
 - A monitorozó út mentén minden pont látja a fényút állapotát
 - Optikai jel „lehallgatása”
 - Az átmenő m-utak állapotai alapján lokalizáljuk a hibát
 - A hálózat minden pontjában
- Egyszerűsítések
 - Oda-vissza irányítotttnak tekintjük a hálózat minden linkjét
 - Csak monitorozó köröket vizsgálunk

Példa



	t_2	t_3	t_4
0-1	1	1	0
1-2	0	1	1
2-3	0	0	1
3-0	1	0	0

Hibakód tábla a 2. pontban



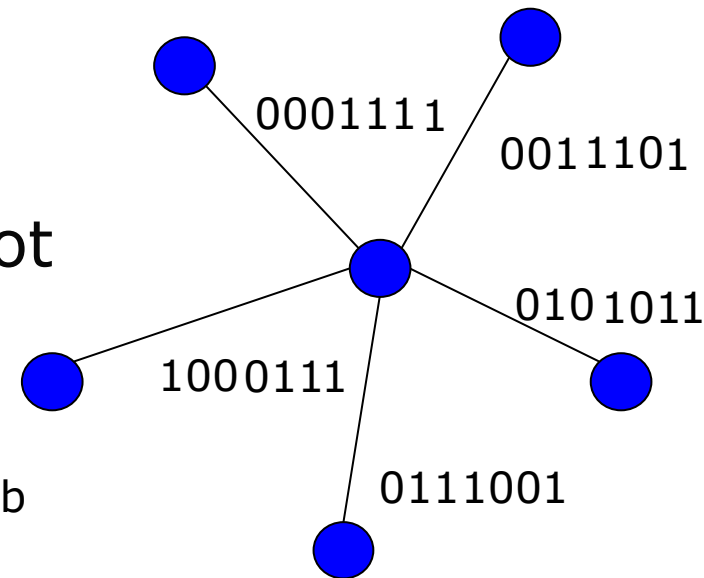
- A monitorozó körök száma kevésbé szempont
 - Főként a teljes hossz számít

	t_1	t_2	t_3
0-1	1	1	0
1-2	0	1	1
2-3	0	0	1
3-0	1	0	0

Hibakód tábla az 1. pontban

Optimális konstrukció csillag gráfra

- Legalább $|V| \lceil \log_2 (|E| + 1) \rceil$
 - Mert a csillag minden egy fokú pontjába legalább $\lceil \log_2 (|E| + 1) \rceil$ monitorozó út vezet
- Konstrukció:
 - Minden élhez $\lceil \log_2 |E| \rceil$ hosszú egyedi bináris kódot rendelünk
 - Majd minden él kódjához hozzáadjuk az inverzét is
 - Végül megtoldunk minden kódot „1” bittel
 - Ez $|V|(\lceil \log_2 (|E|) \rceil + 1)$ teljes hosszt eredményez, ami $|E| = 2^b$ esetén optimális



Alsó korlát sűrű gráfokra

Tétel 1. Elosztott linkhiba monitorozásra képes m -út rendszer teljes hossza legalább

$$2 |E| \left(1 - \frac{1}{|V|} \right)$$

Def: Egyszeres élen csak egy m -út megy át.

Állítás 1. Minden m -út legfeljebb egy darab egyszeres élen mehet keresztül.

Állítás 2. Ha egy m -út átmegy egyszeres élen, akkor feszíti a gráfot (minden pontját tartalmazza).

A gráfban σ szinguláris él van, ekkor

$$\text{Teljes hossz} \geq 2(|E| - \sigma) + \sigma$$

Másfelől

$$\text{Teljes hossz} \geq \sigma(|V| - 1)$$

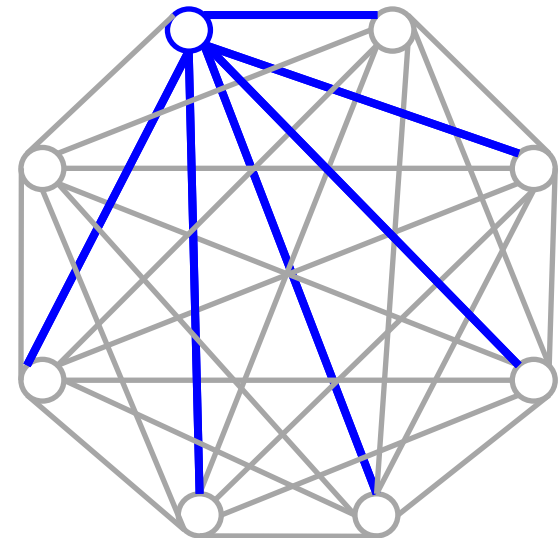
A kettőből következik az állítás

$\sigma \geq \frac{2|E|}{|V|}$ függően
az egyikből vagy
a másiktól
következik

J. Tapolcai and Pin-Han Ho, et. al. "Network-Wide Local Unambiguous Failure Localization (NWL-UFL) via Monitoring Trails", in *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 2012

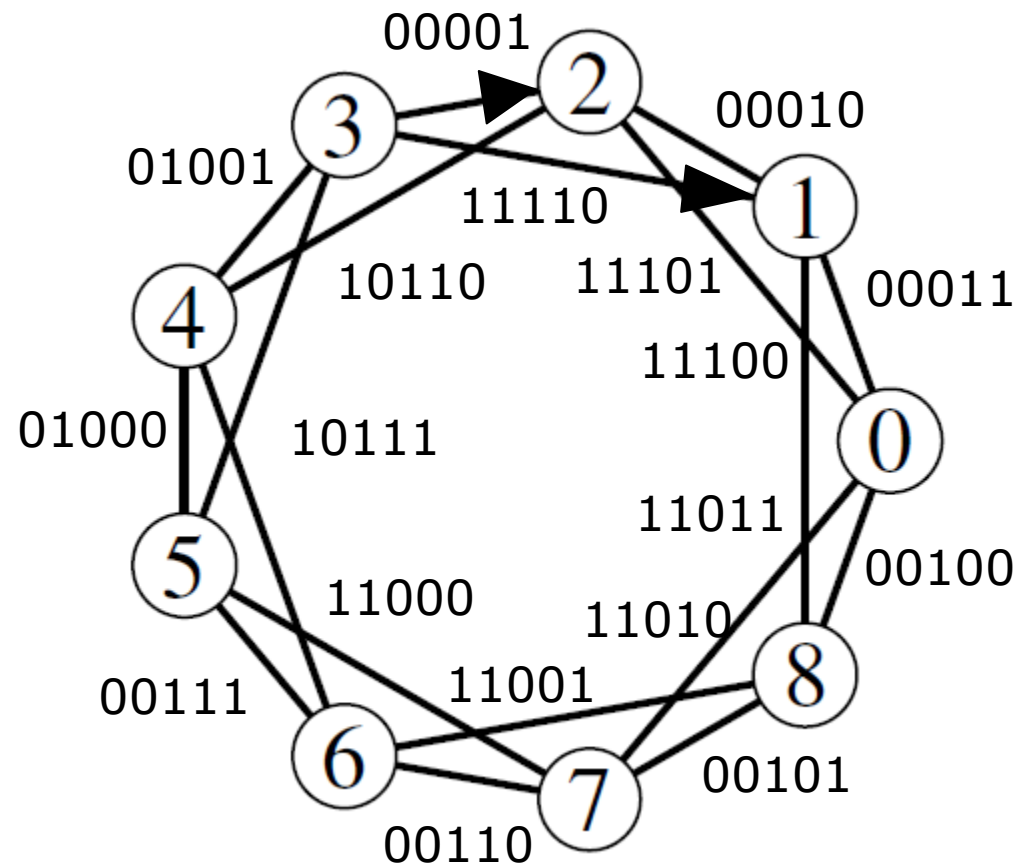
Optimális konstrukció teljes gráfra

- Konstrukció
 - Minden monitorozó út egy csillag más-más középső ponttal
 - Ez $|V|$ darab monitorozó út
 - Picit javítható, ha egy Hamilton kör mentén mindig más csillagból kitörlünk egy élt
 - Így a teljes hossz $(|V|-1)^2$
- Optimális, mert a teljes hossz legalább $2|E| \left(1 - \frac{1}{|V|}\right)$



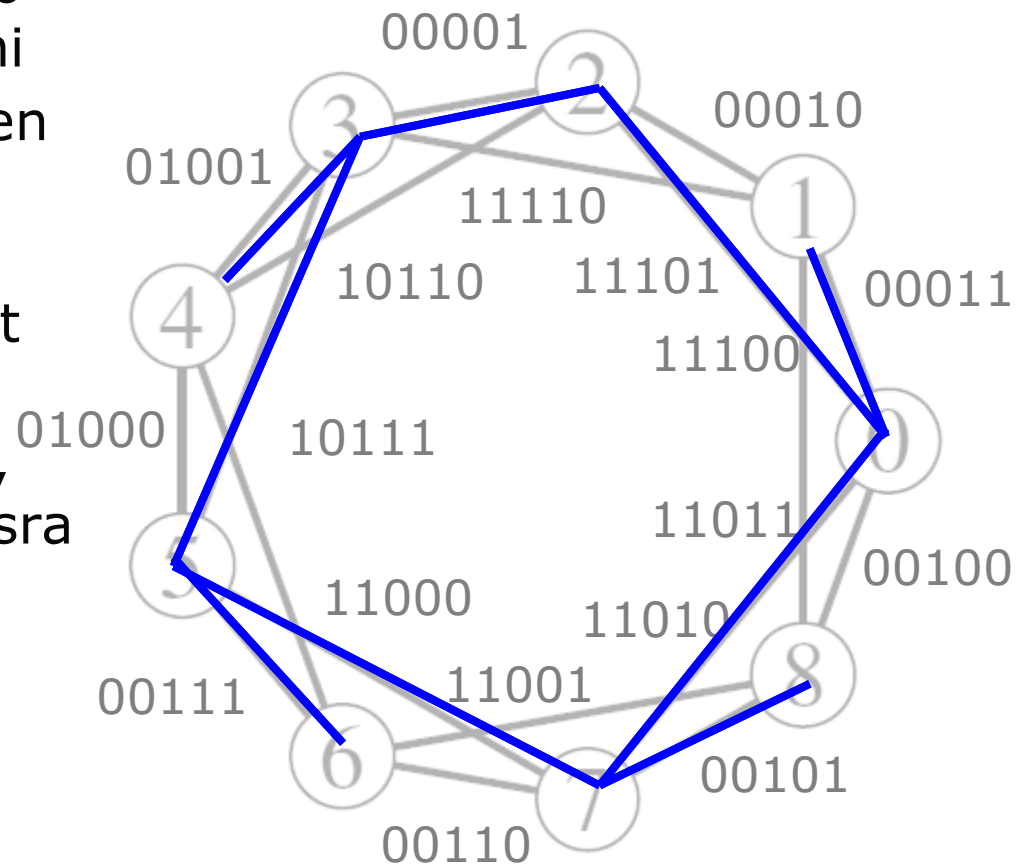
Optimális konstrukció $C_{1,2}$ cirkuláns gráfon

- Az éleket az órajárásának megfelelő irányba megirányítjuk
- Minden pontból két kimenő él fog menni
- $\lceil \log_2 (|E|+1) \rceil$ hosszú egyedi (nem nulla) kódokat rendelünk a $(v, v+1)$ élekhez
 - mindnek 0 legyen az első bitje
- Minden pontból a másik kimenő él ennek bitenkénti inverze
 - Minden m -útban minden pont ki-foka 1



Opt. konstrukció $C_{1,2}$ cirkuláns gráfon (folyt.)

- Minden m -útban minden pont ki-foka 1
- Az órajárásával megegyező irányban körbe lehet menni
- Elvileg lehetne két független kör, de ezt az 11...1 kód kiosztásával orvosolhatjuk
- Azaz minden monitorozó út összefüggő részgráf
- Ami feszíti az egész gráfot, így elosztott hibalokalizálásra is alkalmas
- A teljes hossz
 $|V| \lceil \log_2(|E|+1) \rceil$
- Közel optimális



Összefoglalás

- Hogyan növelhető az Internet megbízhatósága?
 - Gyors hibalokalizáció optikai hálózatban
- Ehhez egy strukturált csoporttesztelési feladatot kell megoldani
 - Gráf kényszerek