

Bevezető matematika, 1. zárthelyi dolgozat, **A** csoport

2022. október 10. hétfő

Munkaidő: 50 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: _____ Neptun-kód: _____ Csoport: _____

1.: _____ 2.: _____ 3.: _____ 4.: _____ 5.: _____ Összpontszám: _____

Feladatok

1. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{3ab}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{ab}{a^2+2ab+b^2}$$

2. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\sqrt{\frac{x}{x^{-7} \cdot \sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{x}{\sqrt[6]{x^{11}}}$

3. (5+5 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $2^{\frac{\log_4(9) - \log_{\frac{1}{2}}(5)}{2}}$

b) $\log_9(3) - \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}(8)$

4. (10 pont) Egy városi parkban 10 000 darab poloska van. Az első esőzésben elpusztul a populáció 50%-a, a második esőzésben elpusztul az életben maradtak 60%-a, a harmadik esőzésben a még élők 80%-a. Ezután egy ötnapos száraz időszak érkezik, és a populáció a megmaradtak számának tízszeresére növekszik. Hány poloska van a parkban az ötödik nap végén?

5. Adja meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x) = \lg(3 - \sqrt{x-10})$$

Bevezető matematika, 1. zárthelyi dolgozat, **B** csoport

2022. október 10. hétfő

Munkaidő: 50 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: _____ Neptun-kód: _____ Csoport: _____

1.: _____ 2.: _____ 3.: _____ 4.: _____ 5.: _____ Összpontszám: _____

Feladatok

1. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{xy}{x^2 - 2xy + y^2} : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{3xy}{x^2 - y^2} - \frac{x-y}{x+y} \right)$$

2. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\sqrt{\frac{a^5}{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-3}} \cdot \frac{a}{\sqrt[8]{a^5}}}$

3. (5+5 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

$$\mathbf{a)} \log_4(2) + \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}}(27) \quad \mathbf{b)} 3^{-\log_{\frac{1}{3}}(7) + \log_9(16)}$$

4. (10 pont) Egy városi parkban 20 000 darab poloska van. Az első esőzésben elpusztul a populáció 40%-a, a második esőzésben elpusztul az életben maradtak 50%-a, a harmadik esőzésben a még élők 80%-a. Ezután egy ötnapos száraz időszak érkezik, és a populáció a megmaradtak számának tízszeresére növekszik. Hány poloska van a parkban az ötödik nap végén?

5. (10 pont) Adja meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x) = \lg(5 - \sqrt{x+4})$$

Megoldások, A csoport

1. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{3ab}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a^2+2ab+b^2}$$

Megoldás: $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{3ab}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a^2+2ab+b^2} = \frac{(a+b)^2 - 3ab - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} : \frac{ab}{(a+b)^2} = \mathbf{(3+1p)}$

$$= \frac{(a^2+2ab+b^2) - 3ab - (a^2-2ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a+b)^2}{ab} = \mathbf{(2+1p)} = \frac{ab}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{a+b}{a-b} \mathbf{(3p)}$$

2. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\sqrt{\frac{x}{x^{-7} \cdot \sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{x}{\sqrt[6]{x^{11}}}$$

Megoldás: $\sqrt{\frac{x}{x^{-7} \cdot \sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{x}{\sqrt[6]{x^{11}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^{-7}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{x}{\sqrt[6]{x^{11}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{7}{2}} \cdot x^{\frac{7}{6}}} \cdot \frac{x}{x^{\frac{11}{6}}} \mathbf{(5p)} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{x^{-\frac{7}{2}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}}} = \mathbf{(2p)}$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}} = x^2 \mathbf{(3p)}$$

3. (5+5 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $2^{\frac{\log_4(9) - \log_2(5)}{2}}$ b) $\log_9(3) - \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}(8)$

Megoldás:

a) $2^{\frac{\log_4(9) - \log_2(5)}{2}} = 2^{\log_4(9)} \cdot 2^{-\frac{\log_2(5)}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_4(9)} \cdot (2^{-1})^{\frac{\log_2(5)}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \log_4(9)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log_2(5)}{2}} = 4^{\log_4(9^{\frac{1}{2}})} \cdot 5 = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 15 \mathbf{(5p)}$

b) $\log_9(3) - \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}(8) = \frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{2}}\left(8^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{2}}(2) = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} \mathbf{(5p)}$

4. (10 pont) Egy városi parkban 10 000 darab poloska van. Az első esőzésben elpusztul a populáció 50%-a, a második esőzésben elpusztul az életben maradtak 60%-a, a harmadik esőzésben a még élők 80%-a. Ezután egy ötnapos száraz időszak érkezik, és a populáció a megmaradtak számának tízszeresére növekszik. Hány poloska van a parkban az ötödik nap végén?

Megoldás: Az első, második és harmadik esőzés után a populációnak rendre 50%-a, 40%-a és 20%-a marad életben. **(2p)** Az esőzések és a száraz időszak utáni egyedszám: $10\,000 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 10$ **(6p)**
 $= 4000$ **(2p)**

5. Adja meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit: $f(x) = \lg(3 - \sqrt{x-10})$

Megoldás:

Értelmezési tartomány: $x - 10 \geq 0$ és $3 - \sqrt{x-10} > 0 \iff 10 \leq x < 19$ **(5p)**

Zérushely: $3 - \sqrt{x-10} = 1 \iff x = 14$ **(5p)**

Megoldások, B csoport

1. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{xy}{x^2 - 2xy + y^2} : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{3xy}{x^2 - y^2} - \frac{x-y}{x+y} \right)$$

Megoldás: $\frac{xy}{x^2 - 2xy + y^2} : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{3xy}{x^2 - y^2} - \frac{x-y}{x+y} \right) = \frac{xy}{(x-y)^2} : \frac{(x+y)^2 - 3xy - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \mathbf{(1+3p)}$

$$= \frac{xy}{(x-y)^2} \cdot \frac{(x-y)(x+y)}{(x^2 + 2xy + y^2) - 3xy - (x^2 - 2xy + y^2)} = \mathbf{(1+2p)} = \frac{xy}{(x-y)^2} \cdot \frac{(x-y)(x+y)}{xy} = \frac{x+y}{x-y} \mathbf{(3p)}$$

2. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\sqrt{\frac{a^5}{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-3}}} \cdot \frac{a}{\sqrt[8]{a^5}}$$

Megoldás: $\sqrt{\frac{a^5}{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-3}}} \cdot \frac{a}{\sqrt[8]{a^5}} = \frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a^{-3}}}} \cdot \frac{a}{\sqrt[8]{a^5}} = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{8} \cdot a^{-\frac{3}{2}}}} \cdot \frac{a}{a^{\frac{5}{8}}} = \mathbf{(5p)}$

$$= \frac{a^{\frac{5}{2}+1}}{a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{2}+\frac{5}{8}}} = \mathbf{(2p)} = \frac{a^{\frac{7}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{7}{2}-(-\frac{1}{2})} = a^4 \mathbf{(3p)}$$

3. (5+5 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\log_4(2) + \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}}(27)$ **b)** $3^{\frac{-\log_1(7) + \log_9(16)}{3}}$

Megoldás: a) $\log_4(2) + \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}}(27) = \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}}\left(27^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}}(3) = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2} \mathbf{(5p)}$

b) $3^{\frac{-\log_1(7) + \log_9(16)}{3}} = 3^{\frac{-\log_1(7)}{3}} \cdot 3^{\frac{\log_9(16)}{3}} = (3^{-1})^{\frac{\log_1(7)}{3}} \cdot \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\log_9(16)}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\log_1(7)}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{2} \log_9(16)} = 7 \cdot 9^{\log_9(16^{\frac{1}{2}})} = 7 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 28$

(5p)

4. (10 pont) Egy városi parkban 20 000 darab poloska van. Az első esőzésben elpusztul a populáció 40%-a, a második esőzésben elpusztul az életben maradtak 50%-a, a harmadik esőzésben a még élők 80%-a. Ezután egy ötnapos száraz időszak érkezik, és a populáció a megmaradtak számának tízszeresére növekszik. Hány poloska van a parkban az ötödik nap végén?

Megoldás: Az első, második és harmadik esőzés után a populációnak rendre 60%-a, 50%-a és 20%-a marad életben. **(2p)** Az esőzések és a száraz időszak utáni egyedszám: $20\,000 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.2 \cdot 10$ **(6p)**
 $= 12\,000$ **(2p)**

5. (10 pont) Adja meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x) = \lg(5 - \sqrt{x+4})$$

Megoldás: Értelmezési tartomány: $x+4 \geq 0$ és $5 - \sqrt{x+4} > 0 \iff -4 \leq x < 21$ **(5p)**

Zérushely: $5 - \sqrt{x+4} = 1 \iff x = 12$ **(5p)**