Bevezető matematika, 1. zárthelyi dolgozat, A csoport

2022. október 11. kedd

Munkaidő: 50 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: ________________________ Neptun-kód: ________________ Csoport: _________

1.:______ 2.:______ 3.:______ 4.:______ 5.:______ Összpontszám:______

Feladatok

1. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-1\right):\frac{2b^2+2ab}{a^2-b^2}$$

2. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[8]{x}}{x^{-1}\cdot\sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt{x^3}}}$

3. (5+5 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5(9)}$ **b)** $\sqrt{16^{1+\log_2(3)}}$

4. (10 pont) Kismókus és nagymókus egy kupac mogyorót rak el télire. Kismókus ezt a kupacot 60 perc alatt, nagymókus 20 perc alatt rakná el. Együtt hány perc alatt végeznek egy *háromszor ekkora* kupaccal?

5. (10 pont) Adja meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x)=\lg\left(x^2-5x+6\right)$$

Bevezető matematika, 1. zárthelyi dolgozat, B csoport

2022. október 11. kedd

Munkaidő: 50 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: ________________________ Neptun-kód: ________________ Csoport: _________

1.:______ 2.:______ 3.:______ 4.:______ 5.:______ Összpontszám:______

Feladatok

1. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}-1\right):\frac{2\,x\,y-2\,y^2}{x^2-y^2}$$

2. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\dfrac{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt{a^5}}\cdot a^{-2}}$

3. (5+5 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\sqrt{9^{2+\log_3(5)}}$ **b)** $\left(\dfrac{7}{\sqrt{7}}\right)^{\log_7(16)}$

4. (10 pont) Kismókus és nagymókus egy kupac mogyorót rak el télire. Kismókus ezt a kupacot 100 perc alatt, nagymókus 25 perc alatt rakná el. Együtt hány perc alatt végeznek egy *kétszer ekkora* kupaccal?

5. (10 pont) Adja meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x)=\lg\left(x^2+4\,x-5\right)$$

Megoldások, A csoport

1. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-1\right):\frac{2\,b^2+2\,a\,b}{a^2-b^2}$$

Megoldás:

$$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-1\right):\frac{2\,b^2+2\,a\,b}{a^2-b^2}=\frac{a(a+b)-b(a-b)-(a-b)\,(a+b)}{(a-b)\,(a+b)}:\frac{2\,b(a+b)}{a^2-b^2}= \textbf{(3+1p)}$$

$$=\frac{a^2+a\,b-a\,b+b^2-\left(a^2-b^2\right)}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{2\,b(a+b)}= \textbf{(2+1p)} \quad =\frac{2\,b^2}{2\,b(a+b)}=\frac{b}{a+b} \quad \textbf{(3p)}$$

2. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[8]{x}}{x^{-1}\cdot\sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt{x^3}}}$

Megoldás: $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[8]{x}}{x^{-1}\cdot\sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt{x^3}}}=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[8]{x}}{x^{-1}\cdot\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{x^3}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{8}}}{x^{-1}\cdot x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{3}{8}}}=$ **(5p)**

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}}{x^{-1+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}}}= \textbf{(2p)} \quad =\frac{x^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{1}{8}}}=x^{\frac{4}{8}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x} \quad \textbf{(3p)}$$

3. (5+5 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5(9)}$ **b)** $\sqrt{16^{1+\log_2(3)}}$

Megoldás:

a) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5(9)}=\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5(9)}=\left((5)^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5(9)}=5^{\frac{1}{2}\log_5(9)}=5^{\log_5\left(9^{\frac{1}{2}}\right)}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$ **(5p)**

b) $\sqrt{16^{1+\log_2(3)}}=\sqrt{16\cdot 16^{\log_2(3)}}=\sqrt{16}\;\sqrt{\left(2^4\right)^{\log_2(3)}}=4\cdot\sqrt{2^{4\log_2(3)}}=4\cdot\sqrt{2^{\log_2\left(3^4\right)}}=$

$=4\cdot\sqrt{3^4}=4\cdot 3^2=36$ **(5p)**

Vagy: $\sqrt{16^{1+\log_2(3)}}=\left(\sqrt{16}\right)^{1+\log_2(3)}=4^{1+\log_2(3)}=4\cdot\left(2^2\right)^{\log_2(3)}=4\cdot 2^{\log_2\left(3^2\right)}=4\cdot 3^2=36$

4. (10 pont)

Kismókus és nagymókus egy kupac mogyorót rak el télire. Kismókus ezt a kupacot 60 perc alatt, nagymókus 20 perc alatt rakná el. Együtt hány perc alatt végeznek egy *háromszor ekkora* kupaccal?

Megoldás:

Kismókus: 60 perc alatt 1 kupacot rak el $\Longrightarrow$ 1 perc alatt $\frac{1}{60}$ kupacot rak el

Nagymókus: 20 perc 1 kupacot rak el $\Longrightarrow$ 1 perc alatt $\frac{1}{20}$ kupacot rak el **(3p)**

Kismókus és nagymókus együtt:

1 perc alatt $\frac{1}{60}+\frac{1}{20}$ kupacot raknak el

x perc alatt 1 kupacot raknak el **(2p)**

$\Longrightarrow$ egyenes arányosság alapján $\frac{1}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{20}$ **(2p)** $\Longrightarrow x=15$ perc

A válasz: egy háromszor ekkora kupaccal $3\cdot 15=45$ perc alatt végeznek. **(3p)**

5. (10 pont) Adja meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x)=\lg\left(x^2-5x+6\right)$$

Megoldás:

Értelmezési tartomány: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)>0 \iff x<2$ vagy $x>3$ **(5p)**

Zérushelyek: $x^2-5x+6=1 \iff x^2-5x+5=0 \iff x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ **(5p)**

Megoldások, B csoport

1. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}-1\right):\frac{2xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

Megoldás:

$$\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}-1\right):\frac{2xy-2y^2}{x^2-y^2}=\frac{x(x-y)-y(x+y)-(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}:\frac{2y(x-y)}{x^2-y^2}= \textbf{(3+1p)}$$

$$=\frac{x^2-xy-xy-y^2-\left(x^2-y^2\right)}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{2y(x-y)}= \textbf{(2+1p)} \quad =\frac{-2xy}{2y(x-y)}=\frac{-x}{x-y}=\frac{x}{y-x} \quad \textbf{(3p)}$$

2. (10 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\dfrac{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt{a^5}}\cdot a^{-2}}$

Megoldás: $\dfrac{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt{a^5}}\cdot a^{-2}}=\dfrac{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}\cdot a^{-2}}=\dfrac{a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{-2}}=$ **(5p)**

$$=\frac{a^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}}{a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{6}-2}}= \textbf{(2p)} \quad =\frac{a^{\frac{4}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{3}{6}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a} \quad \textbf{(3p)}$$

3. (5+5 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\sqrt{9^{2+\log_3(5)}}$ **b)** $\left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^{\log_7(16)}$

Megoldás:

a) $\sqrt{9^{2+\log_3(5)}} = \sqrt{9^2 \cdot 9^{\log_3(5)}} = \sqrt{9^2}\ \sqrt{(3^2)^{\log_3(5)}} = 9 \cdot \sqrt{3^{2\log_3(5)}} = 9 \cdot \sqrt{3^{\log_3(5^2)}} =$

$= 9 \cdot \sqrt{5^2} = 9 \cdot 5 = 45$ **(5p)**

Vagy: $\sqrt{9^{2+\log_3(5)}} = \left(\sqrt{9}\right)^{2+\log_3(5)} = 3^{2+\log_3(5)} = 9 \cdot 3^{\log_3(5)} = 9 \cdot 5 = 45$

b) $\left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^{\log_7(16)} = \left(\sqrt{7}\right)^{\log_7(16)} = \left((7)^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_7(16)} = 7^{\frac{1}{2}\log_7(9)} = 7^{\log_7\left(16^{\frac{1}{2}}\right)} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ **(5p)**

4. (10 pont)
Kismókus és nagymókus egy kupac mogyorót rak el télire. Kismókus ezt a kupacot 100 perc alatt, nagymókus 25 perc alatt rakná el. Együtt hány perc alatt végeznek egy *kétszer ekkora* kupaccal?

Megoldás:

Kismókus: 100 perc alatt 1 kupacot rak el $\Longrightarrow$ 1 perc alatt $\frac{1}{100}$ kupacot rak el

Nagymókus: 25 perc 1 kupacot rak el $\Longrightarrow$ 1 perc alatt $\frac{1}{25}$ kupacot rak el **(3p)**

Kismókus és nagymókus együtt:
1 perc alatt $\frac{1}{100} + \frac{1}{25}$ kupacot raknak el
x perc alatt 1 kupacot raknak el **(2p)**

$\Longrightarrow$ egyenes arányosság alapján $\frac{1}{x} = \frac{1}{100} + \frac{1}{25}$ **(2p)** $\Longrightarrow$ $x = 20$ perc
A válasz: egy kétszer ekkora kupaccal $2 \cdot 20 = 40$ perc alatt végeznek. **(3p)**

5. (10 pont) Adja meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x) = \lg\left(x^2 + 4x - 5\right)$$

Megoldás:
Értelmezési tartomány: $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5) > 0 \iff x < -5$ vagy $x > 1$ **(5p)**

Zérushelyek: $x^2 + 4x - 5 = 1 \iff x^2 + 4x - 6 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} = -2 \pm \sqrt{10}$ **(5p)**