Bevezető matematika, 3. gyakorlat

Házi feladatok: Függvények tulajdonságai, ábrázolásuk.

Feladatok

1. Adja meg az x értékek legbővebb halmazát, melyek esetén pozitív lesz az $f(x) = 2 - \sqrt{1 - 3x}$ függvény értéke.

2. Adja meg az x értékek legbővebb halmazát, melyek esetén pozitív lesz az $f(x) = 1 - \frac{2x}{x+3}$ függvény értéke.

3. Az alábbi függvények közül melyik szigorúan monoton csökkenő a]0, 1[nyílt intervallumon?

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) = |\, x + 1 \,|$

4. Az alábbi függvények közül melyik szigorúan monoton növekvő a]0, π[nyílt intervallumon?

$f(x) = 3^{1-x}$, $g(x) = \frac{2}{4+x}$, $h(x) = \ln(\pi x)$

5. Tekintsük az $f(x) = -\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2$ hozzárendelési utasítású függvényt, mely minden valós számon értelmezve van, ahol lehetséges. Melyik az a legbővebb intervallum, ahol a függvény monoton növekvő?

6. Határozza meg az alábbi kifejezés legbővebb értelmezési tartományát: $\log_3\left(\frac{x-7}{x-1}\right)$

7. Mely valós x értékekre értelmezhető az $f(x) = \frac{1}{\log_2\left(\frac{x^2+1}{2}\right)}$ függvény?

8. Melyik állítás igaz az $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ függvényre?

a) Grafikonja szimmetrikus az origóra.
b) Grafikonja szimmerikus az (1,1) pontra.
c) Monoton nő, ha $x > 1$.

9. Egy $f(x) = -2^x + a$ függvény grafikonja átmegy a (2, 3) ponton. Mi lesz a értéke?

10. Hol metszi az y tengelyt az $f(x) = 2^{-(1+x)} - 3$ függvény grafikonja?

11. Mi lesz az $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 2$ függvény inverze?

12. Az alábi függvények közül mely(ek) lesz(nek) páratlan(ok)?

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $h(x) = \frac{1}{x}$

13. Az alábbi függvények közül melyiknek lesz a minimum értéke 2?

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$, $g(x) = -\,|\, x - 1 \,|\, + 2$, $h(x) = x^2 - 6x + 11$

14. Melyik függvény korlátos az f, g és h közül?

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $g(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}$, $h(x) = \sin x$

Eredmények

1. Adja meg az x értékek legbővebb halmazát, melyek esetén pozitív lesz az $f(x) = 2 - \sqrt{1 - 3x}$ függvény értéke.

Megoldás. Feltétel: a négyzetgyök miatt $1 - 3x \geq 0$, azaz $x \leq \frac{1}{3}$. Ekkor

$f(x) = 2 - \sqrt{1 - 3x} > 0 \iff \sqrt{1 - 3x} < 2 \iff 1 - 3x < 4 \iff -3 \leq 3x \iff -1 \leq x$

A feltételt figyelembe véve a megoldás: $-1 < x \leq \frac{1}{3}$.

2. Adja meg az x értékek legbővebb halmazát, melyek esetén pozitív lesz az $f(x) = 1 - \frac{2x}{x+3}$ függvény értéke.

Megoldás. Hozzunk közös nevezőre, ekkor a feltétel: $f(x) = 1 - \frac{2x}{x+3} = \frac{(x+3) - 2x}{x+3} = \frac{3-x}{x+3} > 0$

Egy tört pontosan akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű, azaz mindkettő pozitív vagy mindkettő negatív.

- A számláló pozitív, ha $x < 3$, és negatív, ha $x > 3$.
- A nevező pozitív, ha $x > -3$, és negatív, ha $x < -3$.

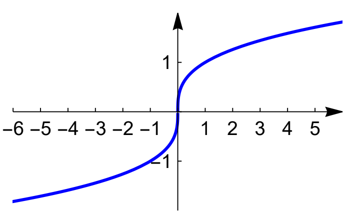
Így a megoldás: $-3 < x < 3$.

3. Az alábbi függvények közül melyik szigorúan monoton csökkenő a $]0,\ 1[$ nyílt intervallumon?

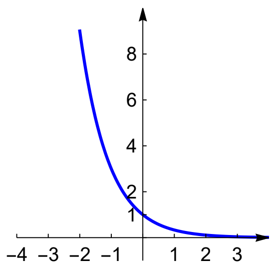
$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) = |x + 1|$

Megoldás. Csak a g. A függvények grafikonja:

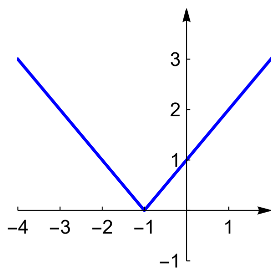
1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$



2) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



3) $h(x) = |x + 1|$

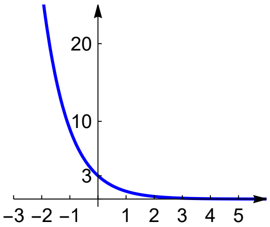
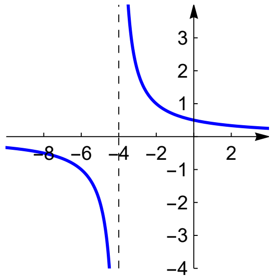
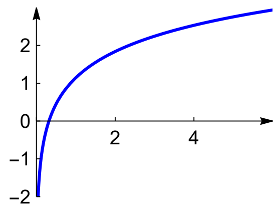


4. Az alábbi függvények közül melyik szigorúan monoton növekvő a $]0,\ \pi[$ nyílt intervallumon?

$f(x) = 3^{1-x}$, $g(x) = \frac{2}{4+x}$, $h(x) = \ln(\pi x)$

Megoldás. Csak a h. A függvények grafikonja:

1) $f(x) = 3^{1-x}$ **2)** $g(x) = \dfrac{2}{4+x}$ **3)** $h(x) = \ln(\pi x)$

5. Tekintsük az $f(x) = -\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2$ hozzárendelési utasítású függvényt, mely minden valós számon értelmezve van, ahol lehetséges. Melyik az a legbővebb intervallum, ahol a függvény monoton növekvő?

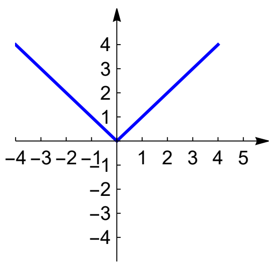
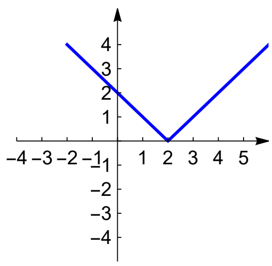
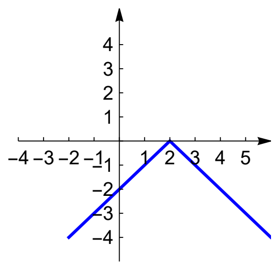
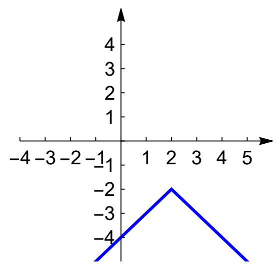
Megoldás. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2 = -\sqrt{(x-2)^2} - 2 = -|x-2| - 2$

A függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonját

- eltoljuk jobbra 2-vel: $x \mapsto |x-2|$,
- tükrözzük az x tengelyre: $x \mapsto -|x-2|$, majd
- eltoljuk lefelé 2-vel: $x \mapsto -|x-2| - 2$.

A legbővebb intervallum, ahol f monoton növekvő: $x \leq 2$.

1) $x \mapsto |x|$ **2)** $x \mapsto |x-2|$ **3)** $x \mapsto -|x-2|$ **4)** $f(x) = -|x-2| - 2$

6. Határozza meg az alábbi kifejezés legbővebb értelmezési tartományát: $\log_3\left(\dfrac{x-7}{x-1}\right)$

Megoldás. Feltétel: A logaritmus argumentuma pozitív, azaz $\dfrac{x-7}{x-1} > 0$. Egy tört pontosan akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű, azaz mindkettő pozitív vagy mindkettő negatív.

- A számláló pozitív, ha $x > 7$, és negatív, ha $x < 7$.
- A nevező pozitív, ha $x > 1$, és negatív, ha $x < 1$.

Így a megoldás: $x < 1$ vagy $x > 7$.

7. Mely valós x értékekre értelmezhető az $f(x) = \dfrac{1}{\log_2\left(\frac{x^2+1}{2}\right)}$ függvény?

Megoldás. Feltételek:

1) a logaritmus argumentuma pozitív: $\dfrac{x^2+1}{2} > 0$, ez mindig eljesül, mivel $x^2 \geq 0$.

2) a nevező nem lehet nulla, azaz a logaritmus argumentuma nem lehet 1:

$$\frac{x^2+1}{2} \neq 1 \iff x^2 \neq 1 \iff x \neq \pm 1$$

Tehát az értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -1$

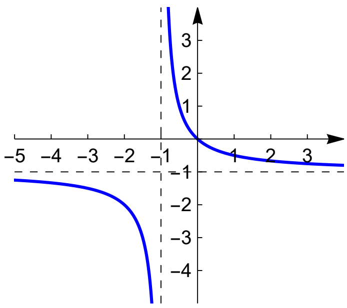
8. Melyik állítás igaz az $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ függvényre?

a) Grafikonja szimmetrikus az origóra.

b) Grafikonja szimmerikus az (1,1) pontra.

c) Monoton nő, ha $x > 1$.

Megoldás. Egyik állítás sem igaz. A függvény grafikonja a $(-1, -1)$ pontra szimmetrikus, és monoton csökken a $(-\infty, -1)$ és $(-1, \infty)$ intervallumokon. Az $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ függvény grafikonja:



9. Egy $f(x) = -2^x + a$ függvény grafikonja átmegy a (2, 3) ponton. Mi lesz a értéke?

Megoldás. Az $y = -2^x + a$ egyenletből $x = 2$, $y = 3$ helyettesítéssel kapjuk az a értékét:

$$3 = -2^2 + a \implies a = 3 + 2^2 = 7$$

10. Hol metszi az y tengelyt az $f(x) = 2^{-(1+x)} - 3$ függvény grafikonja?

Megoldás. Az y-tengelymetszetet $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk: $y = f(0) = 2^{-(1+0)} - 3 = -\frac{5}{2}$

11. Mi lesz az $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 2$ függvény inverze?

Megoldás. A függvény szigorúan monoton, ezért invertálható.

Az $y = \sqrt[3]{x+2} - 2$ kifejezésben x-et és y-t felcserélve, majd y-t kifejezve:

$$x = \sqrt[3]{y+2} - 2 \implies x + 2 = \sqrt[3]{y+2} \implies (x+2)^3 = y + 2 \implies y = (x+2)^3 - 2$$

Az inverz függvény: $f^{-1}(x) = (x+2)^3 - 2$

12. Az alábi függvények közül mely(ek) lesz(nek) páratlan(ok)?

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1},\quad g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\quad h(x) = \frac{1}{x}$$

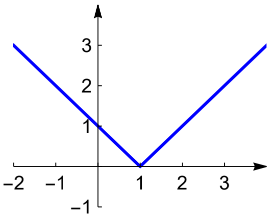
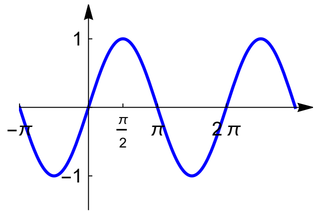
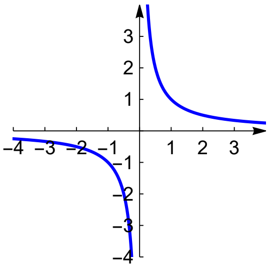
Megoldás. A g és a h (a grafikonjuk tükrös az origóra). Átalakítások:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$ (az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonját 1-gyel jobbra toljuk)

2) $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ (az $x \mapsto \cos x$ függvény grafikonját $\frac{\pi}{2}$-vel jobbra toljuk)

A függvények grafikonja:

1) $f(x) = |x-1|$ **2)** $g(x) = \sin x$ **3)** $h(x) = \dfrac{1}{x}$

13. Az alábbi függvények közül melyiknek lesz a minimum értéke 2?

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2, \quad g(x) = -|x-1| + 2, \quad h(x) = x^2 - 6x + 11$$

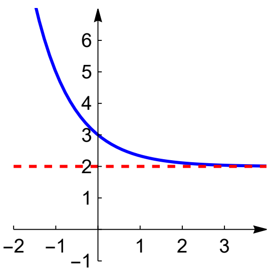
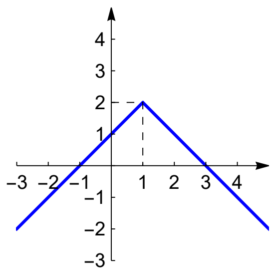
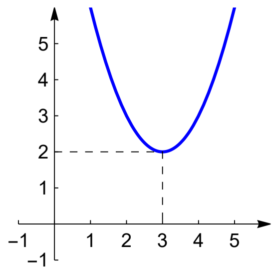
Megoldás. Csak a h. A feladatot algebrai és grafikus úton is megoldhatjuk.

1) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 > 2$, mivel minden x valós szám esetén $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0 \Longrightarrow$ f-nek nincs minimuma

2) $g(x) = -|x-1| + 2 \leq 2$, mivel minden x valós szám esetén $|x-1| \geq 0 \Longrightarrow$ g-nek $x = 1$-nél van maximuma: $g(1) = 2$

3) $h(x) = x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$, mivel minden x valós szám esetén $(x-3)^2 \geq 0 \Longrightarrow$ h-nak $x = 3$-nál van minimuma: $h(3) = 2$

1) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$ **2)** $g(x) = -|x-1| + 2$ **3)** $h(x) = x^2 - 6x + 11$

14. Melyik függvény korlátos az f, g és h közül?

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad g(x) = \frac{x^4-16}{x^2+4}, \quad h(x) = \sin x$$

Megoldás. Csak az f és a h korlátos.

1) Egyrészt $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{0+1} = 1$, mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x^2 \geq 0$, így ha a nevezőben x^2 helyett 0-t írunk, akkor a nevező értékét csökkentjük, így a tört értéke nő. Másrészt látható, hogy a nevező mindig pozitív, így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 < f(x) \leq 1$, tehát f alulról és felülről is korlátos.

2) $g(x) = \dfrac{x^4-16}{x^2+4} = \dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2+4} = x^2 - 4 \Longrightarrow$ g képe felfelé nyíló parabola, így alulról korlátos, de felülről nem

3) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $-1 \leq \sin x \leq 1$, így h alulról és felülről is korlátos.