Bevezető matematika, 4. gyakorlat

Házi feladatok: Másodfokú egyenletek, törtes egyenlőtlenségek

Feladatok

Másodfokú egyenletek

1. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb, illetve legkisebb értékét:

a) $f(x) = 2x^2 - 6x - 5$ **b)** $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

c) $f(x) = -4x^2 + 2x + 7$ **d)** $f(x) = -6x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = 5x^2 - 20x - 3$ **f)** $f(x) = -2x^2 - 20x - 35$

2. Milyen p valós paraméter esetén van az alábbi egyenletnek egy valós megoldása?

a) $x^2 - 2px + p = 0$ **b)** $x^2 - px + p + 3 = 0$

c) $x^2 + px - 2 = 0$ **d)** $px^2 + 4x + p - 3 = 0$

3. Milyen p valós paraméter esetén nincs valós megoldása az alábbi egyenletnek?

a) $x^2 + px - p - 2 = 0$ **b)** $x^2 + px + 2p - 3 = 0$

c) $x^2 + (p+2)x - p + 1 = 0$ **d)** $x^2 - 2px + 3p^2 + 1 = 0$

4. Milyen p valós paraméter esetén van az alábbi egyenletnek két különböző valós megoldása?

a) $x^2 - (p+3)x - 3p + 7 = 0$ **b)** $x^2 + (p+5)x - 2p + 2 = 0$

c) $x^2 + (p-2)x - 1 = 0$ **d)** $px^2 + (p+8)x - 1 = 0$

5. Legyen x_1 és x_2 a $px^2 - 2x + p + 1 = 0$ egyenlet két valós gyöke ($p \neq 0$). Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a gyökökre az alábbi összefüggések teljesüljenek?

a) $x_1 + x_2 = 2$ **b)** $x_1 x_2 = 3$ **c)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2$ **d)** ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 4$

Törtes egyenlőtlenségek

6. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $\frac{x-6}{2x+4} > 1$ **b)** $\frac{5x+1}{7-x} \leq -3$ **c)** $\frac{x-3}{2-x} - 5 \geq \frac{4}{x-2}$ **d)** $\frac{x+4}{5-x} < \frac{1}{2}$

7. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós smoky halmazán:

a) $x - 6 + \frac{3}{x-2} \geq 0$ **b)** $x - 3 - \frac{2x}{x-2} < 0$ **c)** $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} \geq 0$ **d)** $\frac{x^2 - 16}{x^2 - x - 2} \leq 0$

e) $\frac{x+3}{x+1} > \frac{x+1}{x}$ **f)** $\frac{x+2}{x} < \frac{x}{x-1}$ **g)** $2 - \frac{1}{x-1} > \frac{2}{x}$ **h)** $\frac{2}{x+1} \geq 1 - \frac{1}{x-1}$

Eredmények

1. a) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{2}$, így f-nek minimuma van $x = \frac{3}{2}$-nél, és a minimum értéke $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{2}$.

b) $f(x) = 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$, így f-nek minimuma van $x = -\frac{4}{3}$-nál, és a minimum értéke $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{14}{3}$.

c) $f(x) = -4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{29}{4}$, így f-nek maximuma van $x = \frac{1}{4}$-nél, és a maximum értéke $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{29}{4}$.

d) $f(x) = -6\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{7}{6}$, így f-nek maximuma van $x = -\frac{1}{6}$-nál, és a maximum értéke $f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$.

e) $f(x) = 5\,(x - 2)^2 - 23$, így f-nek minimuma van $x = 2$-nél, és a minimum értéke $f(2) = -23$.

f) $f(x) = -2\,(x + 5)^2 + 15$, így f-nek maximuma van $x = -5$-nél, és a maximum értéke $f(-5) = 15$.

2. a) A $D = 4\,p^2 - 4\,p = 4\,p(p - 1) = 0$ egyenletből $p = 0$ vagy $p = 1$ esetén lesz egy (kétszeres) valós gyök.

b) A $D = p^2 - 4\,p - 12 = (p + 2)\,(p - 6) = 0$ egyenletből $p = -2$ vagy $p = 6$ esetén lesz egy (kétszeres) valós gyök.

c) Az egyenlet diszkriminánsa $D = p^2 + 8$, ami minden p valós szám esetén pozitív. Így $D = 0$ nem teljesülhet, tehát a p paraméter értéke nem adható meg úgy, hogy egy valós megoldás legyen (minden p-re két valós megoldás van).

d) Az egyenlet elsőfokú, ha $p = 0$, ekkor a valós gyök $x = \frac{3}{4}$. Az egyenlet másodfokú, ha $p \neq 0$, ekkor a $D = -4\left(p^2 - 3\,p - 4\right) = (p + 1)\,(p - 4) = 0$ egyenletből $p = -1$ vagy $p = 4$ esetén lesz egy (kétszeres) valós gyök. A megoldás tehát $p = 0$ vagy $p = -1$ vagy $p = 4$.

3. a) Az egyenlet diszkriminánsát felírva, majd teljes négyzetté alakítva, $D = p^2 + 4\,p + 8 = (p + 2)^2 + 4$, ami minden p valós szám esetén pozitív. Így $D < 0$ nem teljesülhet, tehát a p paraméter értéke nem adható meg úgy, hogy ne legyen valós megoldás (minden p-re két valós megoldás van).

b) A $D = p^2 - 8\,p + 12 = (p - 2)\,(p - 6) < 0$ egyenlőtlenségből $2 < p < 6$ esetén nem lesz valós gyök.

c) A $D = p^2 + 8\,p = p(p + 8) < 0$ egyenlőtlenségből $-8 < p < 0$ esetén nem lesz valós gyök.

d) A $D = -8\,p^2 - 4 < 0$ egyenlőtlenség minden p valós számra teljesül, így tetszőleges p valós paraméter esetén az egyenletnek nincs valós gyöke.

4. a) A $D = p^2 + 18\,p - 19 = (p - 1)\,(p + 19) > 0$ egyenlőtlenségből $p < -19$ vagy $p > 1$ esetén lesz két különböző valós gyök.

b) A $D = p^2 + 18\,p + 17 = (p + 1)\,(p + 17) > 0$ egyenlőtlenségből $p < -17$ vagy $p > -1$ esetén lesz két különböző valós gyök.

c) Az egyenlet diszkriminánsát felírva, majd teljes négyzetté alakítva, $D = p^2 - 4\,p + 8 = (p - 2)^2 + 4$, ami minden p valós szám esetén pozitív, így tetszőleges p valós paraméter esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

d) Az egyenlet $p = 0$ esetén elsőfokú, melynek egyetlen valós gyöke van. Az egyenlet $p \neq 0$ esetén másodfokú, így a $D = p^2 + 20\,p + 64 = (p + 4)\,(p + 16) > 0$ egyenlőtlenségből $p < -16$ vagy $p > -4$. A feladat megoldása tehát $p < -16$ vagy $-4 < p < 0$ vagy $p > 0$.

5. Az egyenlet együtthatói: $a = p$, $b = -2$, $c = p + 1$. Így a gyökök és együtthatók közti összefüggések felhasználásával:

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2}{p} = 2 \implies p = 1$

b) $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{p+1}{p} = 3 \implies p = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c} = \frac{2}{p+1} = -2 \implies p = -2$

d) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \left(\frac{2}{p}\right)^2 - 2 \cdot \frac{p+1}{p} = 4$

$\implies 3 p^2 + p - 2 = 0 \implies p = -1$ vagy $p = \frac{2}{3}$

6. a) $-10 < x < -2$ **b)** $x \le -11$ vagy $x > 7$ **c)** $\frac{3}{2} \le x < 2$ **d)** $x < -1$ vagy $x > 5$

7. a) $2 < x \le 3$ vagy $x \ge 5$ **b)** $x < 1$ vagy $2 < x < 6$

c) $x < -3$ vagy $1 \le x \le 2$ vagy $x > 3$ **d)** $-4 \le x < -1$ vagy $2 < x \le 4$

e) $-1 < x < 0$ vagy $x > 1$ **f)** $x < 0$ vagy $1 < x < 2$

g) $x < 0$ vagy $\frac{1}{2} < x < 1$ vagy $x > 2$ **h)** $-1 < x \le 0$ vagy $1 < x \le 3$