Képletgyűjtemény

Fontosabb képletek a középiskolai matematikaanyagból. https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf
Összeállította: Nagy Ilona

Műveletek törtekkel

Összeadás: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ Kivonás: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

Szorzás: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ Osztás: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

Nevezetes azonosságok

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

A hatványozás és gyökvonás azonosságai

Egész kitevőjű hatványok ($n\in\mathbb{Z}^+$):

- Ha $a\in\mathbb{R}$: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ tényező}}$, $a^1=a$
- Ha $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$, $a^0=1$

Racionális kitevőjű hatványok ($a,b\in\mathbb{R}_0^+$; $k,n\in\mathbb{Z}^+$; $k\geq 2$):

- $\sqrt[k]{a}=b \iff a=b^k$
- $a^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{a}$, $a^{\frac{n}{k}}=\sqrt[k]{a^n}$, $a^{-\frac{n}{k}}=\frac{1}{\sqrt[k]{a^n}}$ $(a>0)$

Megjegyzés: Ha $k=2n+1$ ($n\in\mathbb{Z}^+$), akkor $a<0$ esetén is értelmezhető $\sqrt[k]{a}$.

A hatványozás azonosságai ($a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $x,y\in\mathbb{Z}$; vagy $a,b\in\mathbb{R}^+$; $x,y\in\mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{R}$):

1. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
3. $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$
4. $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$

A gyökvonás azonosságai ($a,b\in\mathbb{R}_0^+$; $k,m,n\in\mathbb{Z}^+$; $k,m\geq 2$):

1. $\sqrt[k]{a\cdot b}=\sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{b}$
2. $\sqrt[k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$ $(b\neq 0)$
3. $\sqrt[k]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[k\cdot m]{a}$
4. $(\sqrt[k]{a})^n=\sqrt[k]{a^n}=a^{\frac{n}{k}}$

A logaritmus azonosságai

Definíció: $\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b \quad (a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ c \in \mathbb{R})$

Következmény:

- $\log_a (a^c) = c, \quad a^{\log_a b} = b$
- $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = \log_a (a^{-1}) = -1$

Azonosságok $(a, b, x, y \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \in \mathbb{R})$:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a (x^c) = c \cdot \log_a x$
4. $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Néhány következmény:

- $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$
- $\log_{\frac{1}{a}} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a \left(\frac{1}{a}\right)} = -\log_a b$
- $\log_a \left(\dfrac{1}{b}\right) = \log_a (b^{-1}) = -\log_a b$
- $\log_{\frac{1}{a}} \left(\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{\log_a \left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a \left(\frac{1}{a}\right)} = \dfrac{-\log_a b}{-1} = \log_a b$

Természetes alapú logaritmus: $\ln x = \log_e x$, ahol $e \approx 2.7182818...$ az Euler-féle szám.

10-es alapú logaritmus: $\lg x = \log_{10} x$.

Számtani sorozatok

Definíció:	$a_n = a_{n-1} + d \qquad$ (d: differencia vagy különbség)
Az n-edik tag:	$a_n = a_1 + (n-1)d$
Az első n tag összege:	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$
Számtaniközép-tulajdonság:	$a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \qquad (n > k)$

Mértani sorozatok

Definíció:	$a_n = a_{n-1} \cdot q \qquad$ (q: kvóciens vagy hányados)
Az n-edik tag:	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Az első n tag összege:	$S_n = n \cdot a_1$, ha $q = 1$; $\qquad S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, ha $q \neq 1$
Mértaniközép-tulajdonság:	$\lvert a_n \rvert = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}} \qquad (n > k)$

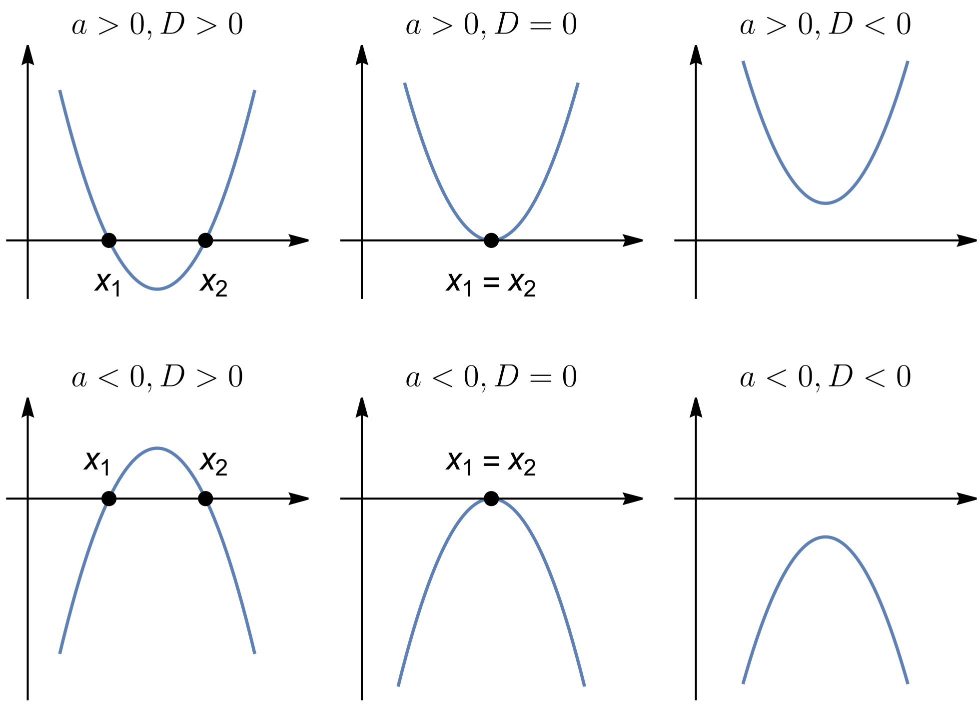
Másodfokú egyenlet

Kanonikus alak:	$ax^2 + bx + c = 0$, ahol $a \neq 0$
Megoldóképlet:	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Diszkrimináns:	$D = b^2 - 4ac$
Gyöktényezős alak:	$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

A gyökök száma:

$D > 0 \implies$ két különböző valós gyök
$D = 0 \implies$ egy (kétszeres) valós gyök
$D < 0 \implies$ nincs valós gyök (két komplex gyök)

Az $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ függvény grafikonja az a főegyüttható és a D diszkrimináns előjelétől függően:



Gyökök és együtthatók közötti összefüggések:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) \implies x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Szélsőérték meghatározása teljes négyzetté alakítással:

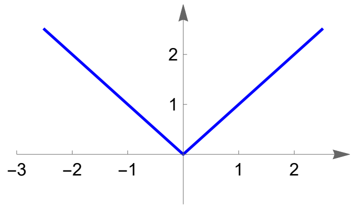
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$\implies f$-nek szélsőértéke van az $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ helyen, ami $a > 0$ esetén minimum, $a < 0$ esetén maximum.

Abszolútérték-függvény

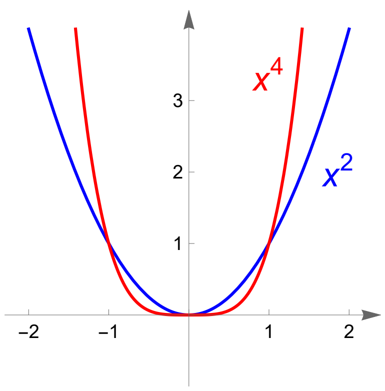
$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = |x|$

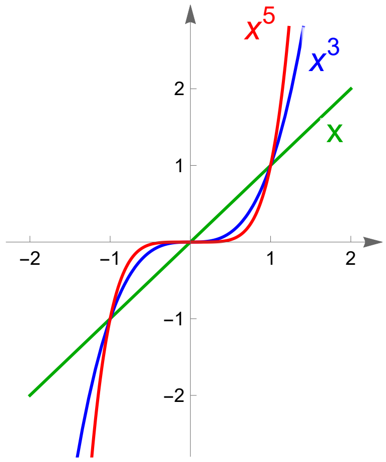


Hatványfüggvények

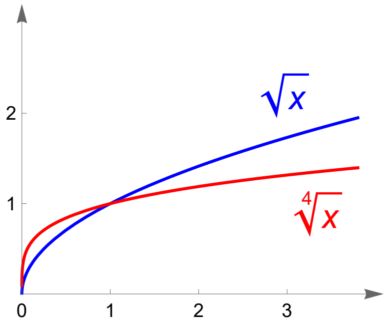
$f(x) = x^n, n = 2, 4, 6, \ldots$
$D_f = \mathbb{R},\ R_f = [0, \infty)$



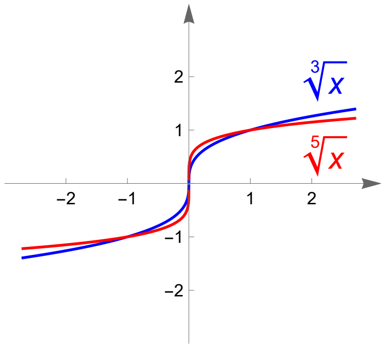
$f(x) = x^n, n = 1, 3, 5, \ldots$
$D_f = R_f = \mathbb{R}$



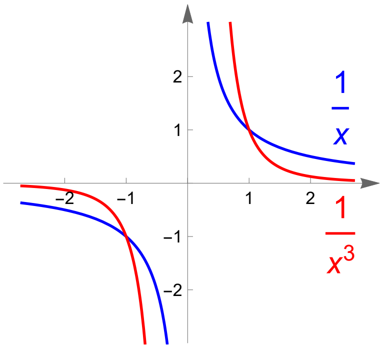
$f(x) = x^{\frac{1}{n}}, n = 2, 4, 6, \ldots$
$D_f = R_f = [0, \infty)$



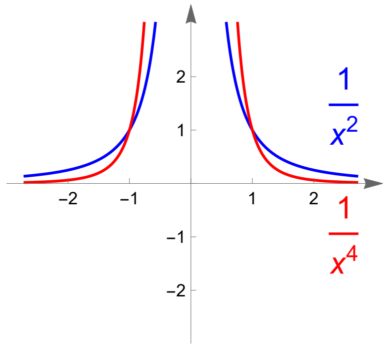
$f(x) = x^{\frac{1}{n}}, n = 3, 5, 7, \ldots$
$D_f = R_f = \mathbb{R}$



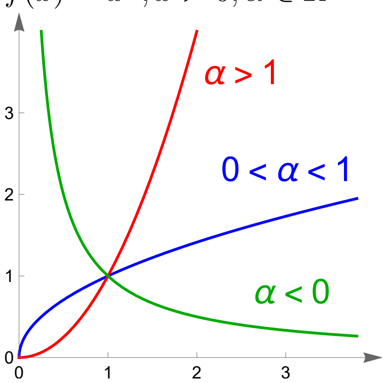
$f(x) = x^{-n}, n = 1, 3, 5, \ldots$
$D_f = R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f(x) = x^{-n}, n = 2, 4, 6, \ldots$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ R_f = (0, \infty)$



$f(x) = x^{\alpha}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

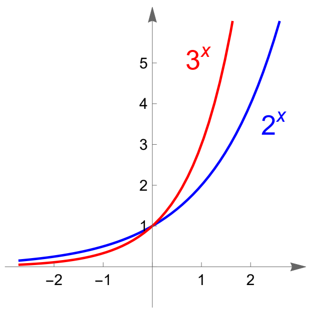


Páros függvény pl. $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$.

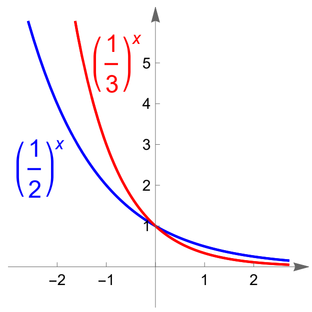
Páratlan függvény pl. $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^5$,
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[5]{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.

Exponenciális és logaritmusfüggvények

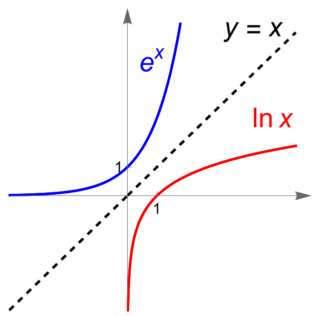
$f(x) = a^x \ \ (a > 1)$
$D_f = \mathbb{R},\ R_f = \mathbb{R}^+$



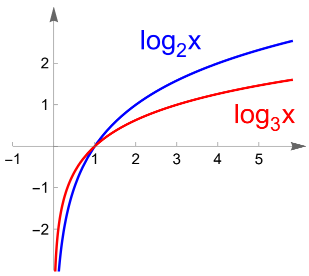
$f(x) = a^x \ \ (0 < a < 1)$
$D_f = \mathbb{R},\ R_f = \mathbb{R}^+$



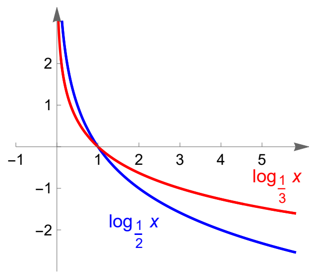
$f(x) = e^x$ és $f^{-1}(x) = \ln x$



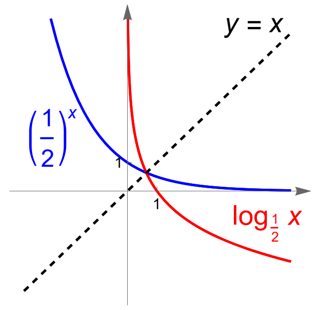
$f(x) = \log_a x \ \ (a > 1)$
$D_f = \mathbb{R}^+,\ R_f = \mathbb{R}$



$f(x) = \log_a x \ \ (0 < a < 1)$
$D_f = \mathbb{R}^+,\ R_f = \mathbb{R}$

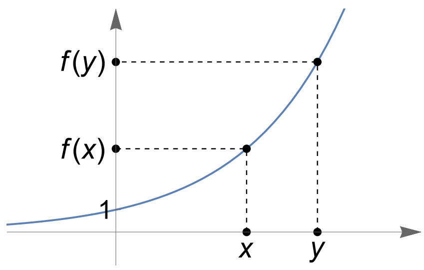


$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ és $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

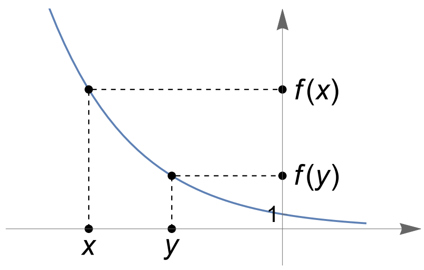


Exponenciális és logaritmusos egyenlőtlenségek

$f(x) = a^x \ \ (a > 1)$

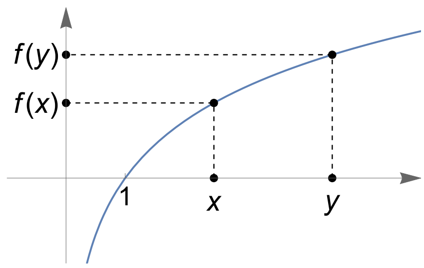


$f(x) = a^x \ \ (0 < a < 1)$

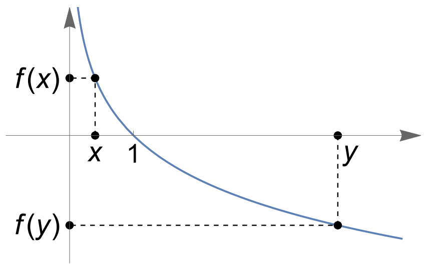


Ha $a > 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton növő, így $\quad x < y \iff a^x < a^y$.
Ha $0 < a < 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton csökkenő, így $\quad x < y \iff a^x > a^y$.

$f(x) = \log_a x \ \ (a > 1)$



$f(x) = \log_a x \ \ (0 < a < 1)$



Ha $a > 1$, akkor $f(x) = \log_a x$ szig. mon. növő, így $\quad 0 < x < y \iff \log_a x < \log_a y$.
Ha $0 < a < 1$, akkor $f(x) = \log_a x$ szig. mon. csökkenő, így $\quad 0 < x < y \iff \log_a x > \log_a y$.

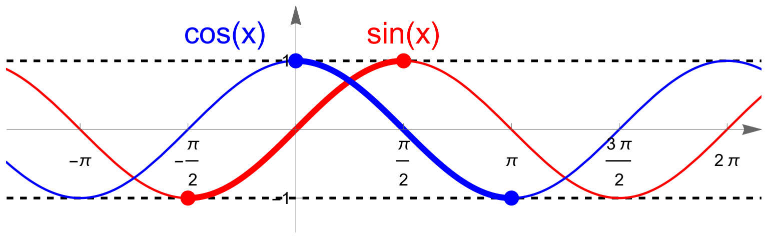
Trigonometrikus függvények és inverzeik

- Az $f(x) = \sin x$ függvény szigorúan monoton a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon
  $\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze

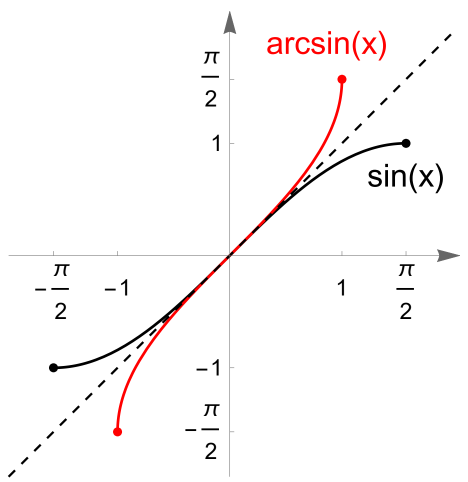
  Az arkusz szinusz függvény: $\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$; $D_{\arcsin} = [-1, 1]$, $R_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

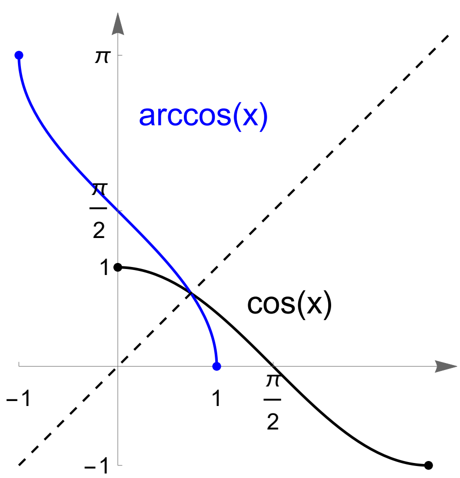
- Az $f(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton a $[0, \pi]$ intervallumon
  $\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze

  Az arkusz koszinusz függvény: $\arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$; $D_{\arccos} = [-1, 1]$, $R_{\arccos} = [0, \pi]$



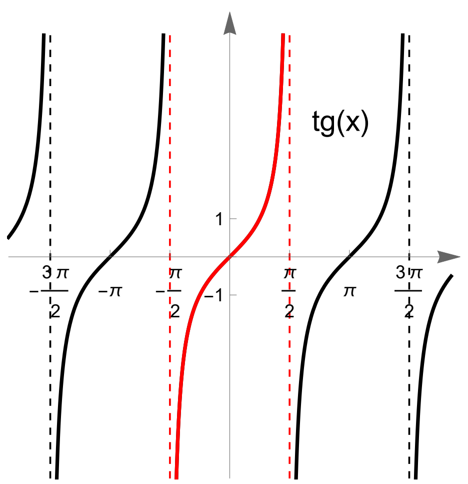
- $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

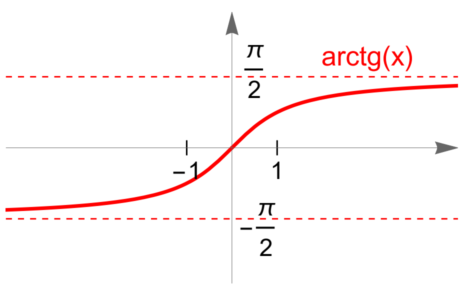




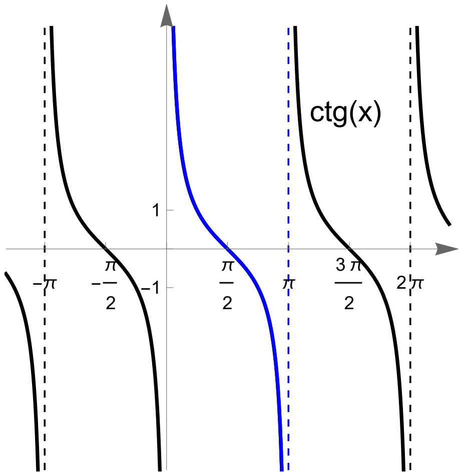
- Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ függvény szigorúan monoton a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon $\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze

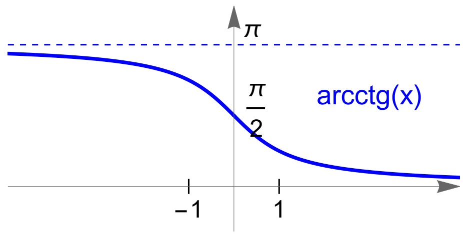
  Az arkusz tangens függvény: $\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}$; $D_{\operatorname{arctg}} = \mathbb{R}$, $R_{\operatorname{arctg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$





- Az $f(x) = \operatorname{ctg} x \;\; (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$ függvény szigorúan monoton a $(0, \pi)$ intervallumon $\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze
  Az arkusz kotangens függvény: $\operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}$; $D_{\operatorname{arcctg}} = \mathbb{R}$, $R_{\operatorname{arcctg}} = (0, \pi)$





Függvények néhány tulajdonsága

- Az f függvény $\begin{cases} \textbf{alulról korlátos,} \\ \textbf{felülről korlátos,} \end{cases}$ ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $\begin{cases} f(x) \geq K, \\ f(x) \leq K, \end{cases}$ ha $x \in D_f$.

- Az f függvény **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq K$, ha $x \in D_f$. Példa: $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \arcsin x$, $x \mapsto \arccos x$, $x \mapsto \operatorname{arctg} x$, $x \mapsto \operatorname{arcctg} x$.

- Az f függvény $\begin{cases} \textbf{monoton nő,} \\ \textbf{szigorúan monoton nő,} \\ \textbf{monoton csökken,} \\ \textbf{szigorúan monoton csökken,} \end{cases}$ ha $x < y \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ f(x) < f(y) \\ f(x) \geq f(y) \\ f(x) > f(y) \end{cases}$
  $(x, y \in D_f)$.
  Példa: Szig. mon. növő: $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \log_2 x$, $x \mapsto \arcsin x$, $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.
  Szig. mon. csökkenő: $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \mapsto \arccos x$, $x \mapsto \operatorname{arcctg} x$.

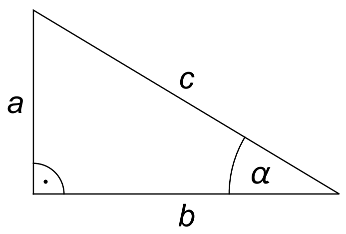
- Az f függvény **páros**, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(x) = f(-x)$, azaz grafikonja tükrös az y tengelyre. Példa: $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$, $x \mapsto \cos x$.

- Az f függvény **páratlan**, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$, azaz grafikonja tükrös az origóra. Példa: $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $x \mapsto \arcsin x$, $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.

- Az f függvény **periodikus** $p > 0$ periódussal, ha minden $x \in D_f$ esetén $x + p \in D_f$ és $f(x + p) = f(x)$. Példa: $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ periódusa 2π; $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ periódusa π.

Trigonometria

Hegyesszögek szögfüggvényei



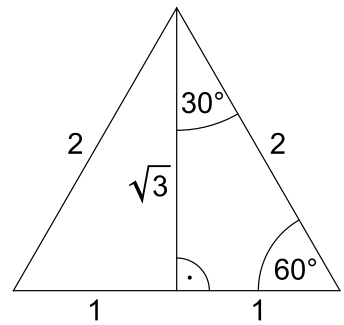
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei

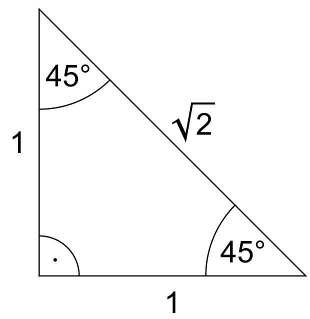


$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

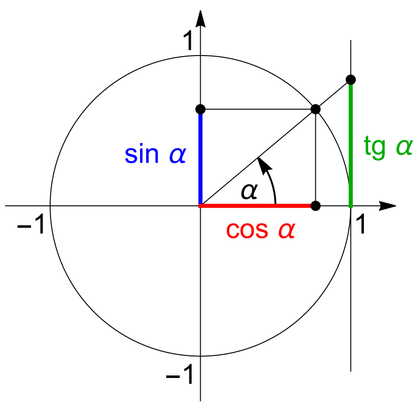
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

Forgásszögek szögfüggvényei



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

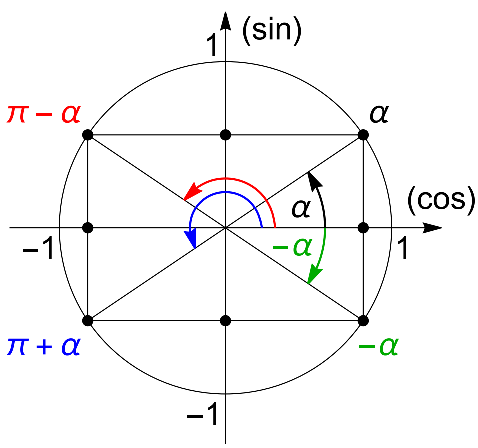
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ ha } \cos\alpha \neq 0; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ ha } \sin\alpha \neq 0$$

Minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + k\cdot 2\pi), \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\cdot\pi),$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + k\cdot 2\pi), \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k\cdot\pi).$$

Az egységkörön lévő pontok 1. és 2. koordinátájának összehasonlításával néhány azonosság ($\alpha \in \mathbb{R}$):



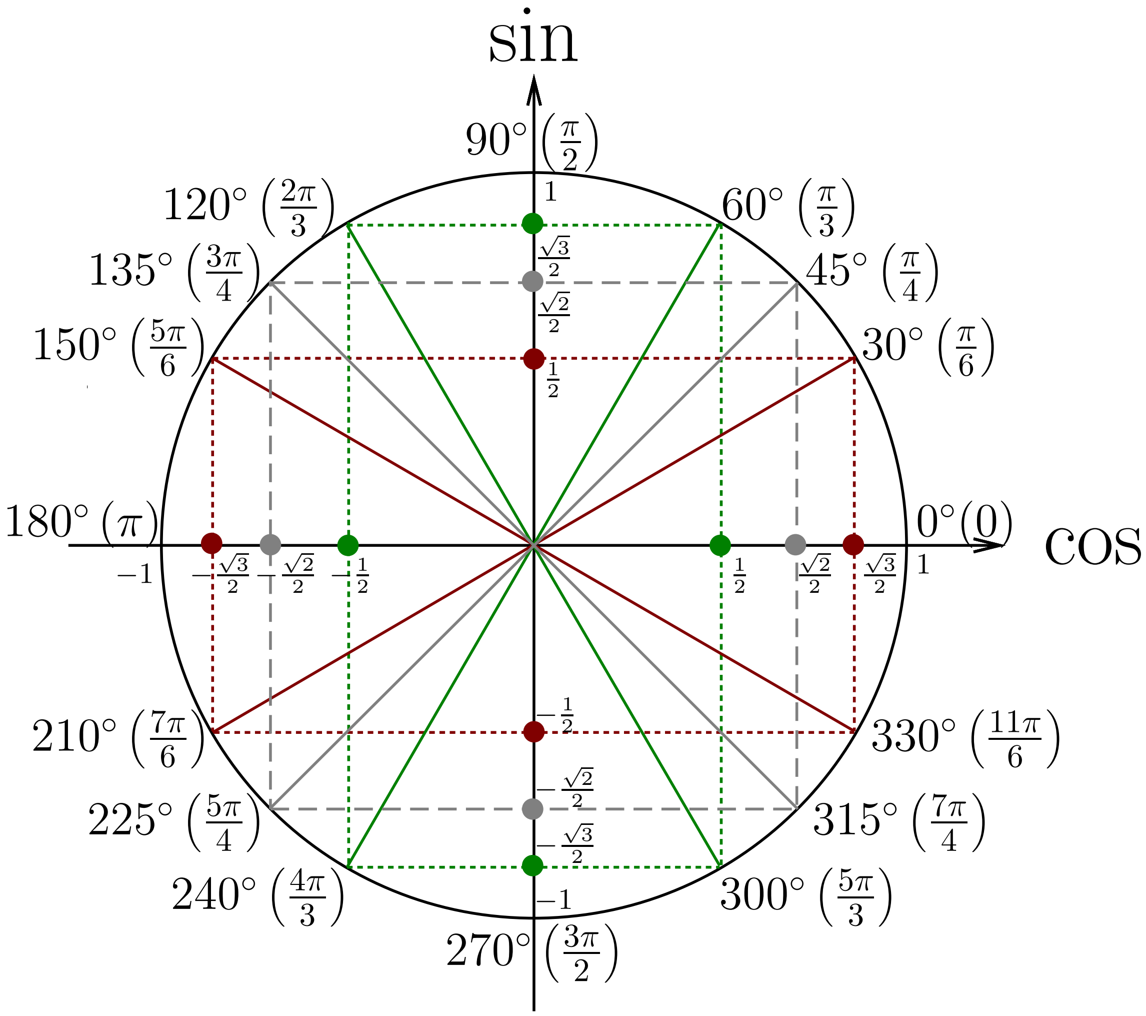
$$\cos\alpha = \cos(-\alpha) \implies \text{a koszinuszfüggvény páros}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \implies \text{a szinuszfüggvény páratlan}$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$



Trigonometrikus egyenletek megoldása

1. $\sin x = a \implies x_1 = \arcsin a + k \cdot 2\pi, \qquad x_2 = \pi - \arcsin a + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
2. $\cos x = b \implies x_{1,2} = \pm \arccos b + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
3. $\operatorname{tg} x = c \implies x = \operatorname{arctg} c + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$
4. $\operatorname{ctg} x = d \implies x = \operatorname{arcctg} d + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Fontosabb trigonometrikus azonosságok

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{array}\right\} \implies \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

Koordinátageometria

Vektorok

Az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ vektor hossza: $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Vektorok összege, számszorosa: $\underline{a} + \underline{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$c \cdot \underline{a} = c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2) \quad (c \in \mathbb{R})$

Legyen $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$, közbezárt szögük γ $(0° \leq \gamma \leq 180°)$.

Skláris szorzatuk: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$

Koordinátákkal: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

A közbezárt szög koszinusza: $\cos\gamma = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

Vektorok merőlegessége: $\underline{a} \perp \underline{b} \iff \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

Vektorok párhuzamossága: $\underline{a} \parallel \underline{b} \iff \underline{a} = c \cdot \underline{b}$ valamely $c \in \mathbb{R}$ számra

Példák: $(a_1, a_2) \perp (-a_2, a_1)$, $(a_1, a_2) \perp (a_2, -a_1)$, $(4, -6) \perp (3, 2)$, $(4, -6) \parallel (2, -3)$

Az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ pontok távolsága:

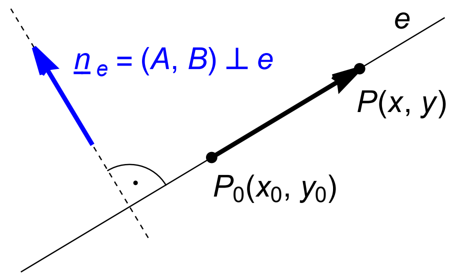
$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Az egyenes egyenletei

1. Az e egyenes normálvektoros egyenlete, ha adott egy $P_0(x_0, y_0)$ pontja és egy $\underline{n}_e = (A, B)$ normálvektora $(\underline{n}_e \neq \underline{0})$:

$$Ax + By = Ax_0 + By_0$$

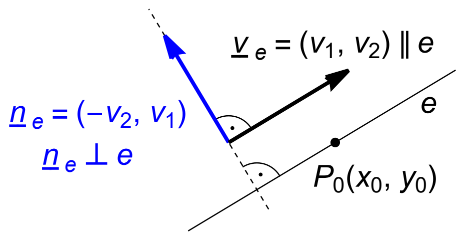
Ugyanis: $P(x, y) \in e$
$\iff \overrightarrow{P_0P} \perp \underline{n}_e \iff \overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n}_e = 0$
$\iff (x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) = 0$
$\iff A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
$\iff Ax + By = Ax_0 + By_0$



2. Az e egyenes irányvektoros egyenlete, ha adott egy $P_0(x_0, y_0)$ pontja és egy $\underline{v}_e = (v_1, v_2)$ irányvektora $(\underline{v}_e \neq \underline{0})$:

$$v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0$$

Ugyanis: $\underline{v}_e = (v_1, v_2) \perp (v_2, -v_1) = \underline{n}_e$
(vagy $\underline{v}_e = (v_1, v_2) \perp (-v_2, v_1) = \underline{n}_e$),
így visszavezethető az 1. esetre.

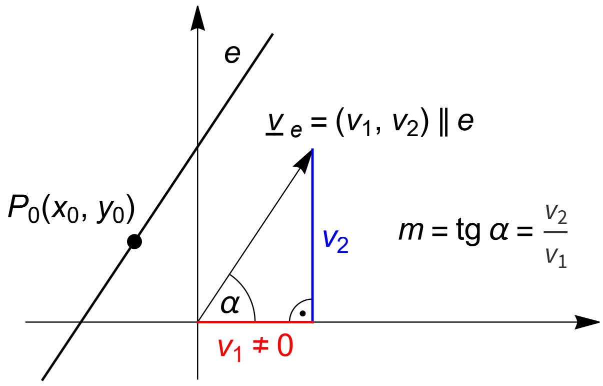


3. Ha az e egyenes átmegy az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ ponton, akkor egy irányvektora $\underline{v}_e = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, egy normálvektora $\underline{n}_e = (b_2 - a_2, -(b_1 - a_1))$, így egyenlete visszavezethető az 1. esetre.

4. Az e egyenes iránytényezős egyenlete, ha adott egy $P_0(x_0, y_0)$ pontja és az m meredeksége:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ugyanis: ha az egyenes egy irányvektora $\underline{v}_e = (v_1, v_2)$, ahol $v_1 \neq 0$, akkor az egyenes meredeksége $m = \frac{v_2}{v_1}$, így visszavezethető a 2. esetre.

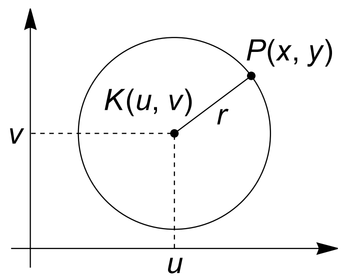


5. A fenti egyenletet átrendezve: $y = mx + b$, ahol $m = \text{tg}\,\alpha$ $(0^\circ \leq \alpha < 90^\circ)$ az egyenes meredeksége, b az y-tengelymetszet. Ha az egyenes párhuzamos az y tengellyel $(\alpha = 90^\circ)$, akkor egyenlete $x = a$ alakú.

A kör egyenlete

A $K(u, v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$



Pont és egyenes távolsága

Az $Ax + By + C = 0$ egyenletű e egyenes normálegyenlete (Hesse-féle normálalak):

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

A $P(x_0, y_0)$ pont távolsága az $Ax + By + C = 0$ egyenletű e egyenestől:

$$d(P, e) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

.

Kombinatorika

Faktoriális: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad (n \in \mathbb{Z}^+), \qquad 0! = 1$

Binomiális együtthatók: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ismétlés nélküli permutáció

- n különböző elemet sorba rendezünk
- a sorbarendezések száma: $n!$

Ismétléses permutáció

- n elem között s különböző fordul elő úgy, hogy ezekből rendre $k_1, k_2, \ldots, k_s$ darab van, melyek egymás között megkülönböztethetetlenek ($k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$)
- a sorbarendezések száma: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$

Ismétlés nélküli variáció

- n különböző elem közül <u>visszatevés nélkül</u> kiválasztunk k darabot ($k \leq n$), a <u>sorrend számít</u> (egy elem legfeljebb egyszer fordulhat elő)
- a kiválasztások száma: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ismétléses variáció

- n különböző elem közül <u>visszatevéssel</u> kiválasztunk k darabot, a <u>sorrend számít</u> (egy elem többször is előfordulhat)
- a kiválasztások száma: n^k

Ismétlés nélküli kombináció

- n különböző elem közül <u>visszatevés nélkül</u> kiválasztunk k darabot ($k \leq n$), a <u>sorrend nem számít</u> (egy elem legfeljebb egyszer fordulhat elő)
- a kiválasztások száma: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ismétléses kombináció

- n különböző elem közül <u>visszatevéssel</u> kiválasztunk k darabot, a <u>sorrend nem számít</u> (egy elem többször is előfordulhat)
- a kiválasztások száma: $\binom{n+k-1}{k}$