Simonovits András: BME, Matematikai Intézet

BEVEZETÉS A JÁTÉKELMÉLETBE: VÁZLAT

MTA Közgazdaságtudományi Kutatóközpont
Budapest, Budaörsi út 45, 1112
e-mail: simonov@econ.core.hu
2007. május 6.

ELŐSZÓ

A *játékelmélet* olyan helyzetekkel foglalkozik, amelyekben legalább két döntéshozó (például egyén, család, vállalat, intézmény, ország, stb.) próbálja saját hasznosságfüggvényét maximalizálni. A nehézséget az okozza, hogy minden szereplő hasznosságfüggvénye függ legalább egy másik szereplő döntésétől is, és a szereplők döntésüket egymástól függetlenül hozzák. A *játék* jelző első látásra társasági játékokra (például a sakk, póker, stb.) utal, de Neumannt követve olyankor is játékelméletről beszélünk, amikor gazdasági, katonai vagy biológiai alkalmazásra gondolunk.

Születésekor, a Neumann–Morgenstern (1944, 1947) monográfia megjelenésekor a játékelméletet a társadalomtudomány csodafegyverének tekintették. Az 1950–60-as években azonban még az elméleti közgazdászok zömének is a játékelmélet matematikai játékszernek tűnt. Hosszú vajúdás után, az 1970-es évektől kezdve a játékelmélet kezdi beváltani a tőle vártakat: az árverések elméletétől kezdve az oligopolelméletig szinte mindenütt terjed a használata. Ezt a sikert mutatja, hogy 1994-ben a közgazdasági Nobel-díjat a játékelmélet három úttörőjének, a magyar származású Harsányi Jánosnak, az amerikai John Nash-nek és a német Reinhard Seltennek adták.

Ez a jegyzet egy vázlatos, de igényes játékelméleti bevezetést tartalmaz, amelyet a BME matematikus hallgatóinak tartok. Arra törekedtem, hogy csupán a lehető legszükségesebb fogalmakat és tételeket ismertessem, és teljes bizonyítások helyett beértem vázlattal vagy utalással.

Elemi bevezetést nyújt Filep (1985). Jegyzetem nem-kooperatív játékokról szóló részeihez hasonló nehézségű és hosszúságú Tirole (1988, 11. fejezet) és Varian (1992, 15. fejezet). Szintén bevezető jellegű, de sokkal több anyagot tartalmaz Rasmusen (1989) és Gibbons (1992). Műszaki alkalmazásokat is nyújt Szidarovszky–Molnár (1986). Figyelemre méltó Gömöri (2001) monográfiája az információ gazdaságtanáról.

Sokkal teljesebb matematikai tárgyalást ad magyarul Szép–Forgó (1974) és ennek korszerűsített angol nyelvű változata (Forgó et al., 1999). Hasonlóan mélyebbek és teljesebbek Osborne–Rubinstein (1994) „kurzusa” és Mas-Colell et al. (1995) játékelmélettel foglalkozó egyes fejezetei. Osborne–Rubinstein pontos történeti utalásokat is ad, egyes tételek évszámát is tőle veszem át, az itthon elérhetetlen források megadása nélkül. Külön ajánlom az Olvasónak Mérő (1996) népszerűsítő könyvét.

A csillaggal jelölt pontok nehezebbek, első olvasáskor kihagyhatók.

Köszönetnyilvánítás. Ezúton fejezem ki hálámat Forgó Ferencnek, Gömöri Andrásnak és Tasnádi Attilának (BKÁE), valamint a BME matematikai hallgatóinak a jegyzet korábbi változataihoz fűzött értékes megjegyzéseikért. Természetesen az esetleges hibákért a felsoroltakat semmilyen felelősség nem terheli.

TARTALOMJEGYZÉK

I. RÉSZ. STATIKUS NEM-KOOPERATÍV JÁTÉKOK

A jegyzet zömében (I. és II. részben) a *nem-kooperatív játékok*kal foglalkozunk, ahol a játékosok nem tehetnek a játék megkezdése előtt olyan ígéreteket, amelyeket be lehetne tartatni a játék folyamán. Ez nem jelenti azt, hogy esetleg ne kooperálnának, de ezt önkéntesen kell tenniük.

Speciálisan ebben a részben a *statikus* játékokkal foglalkozunk, ahol a játékosok egymástól függetlenül a játék elején meghozzák az összes döntésüket. Mivel a játékosok többlépcsős döntéseket, azaz stratégiákat is mérlegelnek, ezért sokkal gazdagabb a statikus játékok világa, mint első látásra gondolnánk.

Az 1. pontban néhány bevezető példát mutatunk be, amelyen szemléltethetők az alapvető kérdések. A 2. pont a nem-kooperatív játékelmélet alapfogalmait ismerteti. A 3. pont az elméletben központi szerepet játszó Nash-egyensúlyt vezeti be. A 4. pont a néhány vállalatból álló oligopol piacra alkalmazza az elméletet. Az 5. pontban a kétszemélyes nullaösszegű játékokat elemezzük, amelyek logikai és történeti szempontból is úttörő szerepet játszottak. A 6. pontban az evolúciós játékelméletet körvonalazzuk, amely a darwini kiválogatódás elve alapján próbálja megújítani a játékelméletet. A 7. pont a bayesi játékokról szól, ahol az egyes játékosok nem ismerik a többi játékos jellemzőit, csak azok eloszlásfüggvényét.

1. BEVEZETŐ PÉLDÁK

Az 1. pontban néhány bevezető példát mutatunk be, amelyen szemléltethetők a nem-kooperatív játékelmélet alapvető kérdései. Az itt adott meghatározások szükségképpen vázlatosak. Az egyszerűség kedvéért ebben a pontban két játékosra szorítkozunk. Legyen S_1 és S_2 két véges halmaz: a két játékos *stratégiá*inak halmaza; melyek általános elemei s_1 és s_2: a két játékos stratégiái. (Döntés helyett stratégiáról írunk, mert többlépéses döntéseket is megengedünk.) A két játékos egymástól függetlenül dönt (nem kooperál), s hasznuk (hasznosságuk, profitjuk, nyereségük, nyereményük, kifizetésük) rendre $u_1(s_1,s_2)$ és $u_2(s_1,s_2)$ valós szám. Mindkét játékos saját hasznosságfüggvényét akarja maximalizálni, de a maximum függ a másik játékos stratégiájától is. Föltesszük, hogy mindkét játékos mindent tud a másik lehetőségeiről és érdekeiről, csupán konkrét stratégiáját nem ismeri előre. Neumann–Morgenstern (1944) foglalkozott először rendszeresen ilyen játékelméleti feladatokkal, bár Neumann első játékelméleti cikke 1928-ból származik.

1.1. példa. A fogolydilemma (Raiffa, 1951). Az amerikai rendőrség letartóztat két gyanúsítottat, akik feltehetőleg együtt követtek el egy bűnt, de nincs rá elegendő bizonyíték. A két foglyot elkülönítik egymástól, és elkezdik őket vallatni. Amerikai szokás szerint, ha valamelyik gyanúsított vall (és a másik nem), akkor az „éneklő” enyhébb büntetést kap, esetleg szabadlábra kerül, sőt jutalmat is kap. A nyeremény-pár az 1. egyedüli közreműködése esetén (3, –3), a 2.-é esetén (–3, 3). Ha mindkettő tagad (kooperál), akkor szabadlábra kerülnek, jutalom nélkül, nyereménypár: (2, 2). Ha mindkettő „köp”, akkor mindketten börtönbe kerülnek, de mindketten jutalmat is kapnak, nyereménypár: (–2, –2).

Érdemes a fenti adatokat az ún. *kifizetési mátrix*ba rendezni:

1.1. táblázat. *Fogolydilemma*

1. bűnöző \ 2. bűnöző	Köp	Tagad
Köp	(–2, –2)	(3, –3)
Tagad	(–3, 3)	(2, 2)

Mi lesz a játék egyensúlya? Erre általában nehéz válaszolni, de ebben a speciális esetben nincs probléma. Valóban, akármit lép a másik játékos, az egyik játékos mindig jobban jár, ha köp, mint ha tagad: a köpés *dominálja* a tagadást: pl. az 1. játékos szempontjából, ha 2. köp, az 1. tagadása rosszabb a köpésénél ($-3<-2$); ha 2. tagad, az 1. tagadása ismét rosszabb a köpésénél ($2<3$). Az már más kérdés, hogy a (köp, köp) egyensúly kettőjüknek együttesen nem optimális, hiszen mindkét játékos veszít ahhoz képest, mint ha mindkettő tagadna. ∎

Példánk végére érve, megjegyezzük, hogy a játékelmélet művelői szeretik ilyen frivol példákon megfogalmazni a problémákat, de azért vannak fontos alkalmazások is.

Gondoljunk az OPEC-re, s az egyszerűség kedvéért legyen az egyik játékos Szaud-Arábia, a másik pedig a többi tagország. Két stratégiapár van: együttműködnek a termelés visszafogásában (s akkor magas olajárat érhetnek el) vagy sem. Az igazi OPEC-optimum az lenne, ha mindkét fél visszafogná a termelését. Mivel nem bíznak meg egymásban, mindkét fél abban reménykedik, hogy a másik visszafogja a termelését és ő pedig kihasználja az így adódó kedvező lehetőségeket. A valódi helyzet jóval bonyolultabb, de az elmélet mégis ad valamilyen magyarázatot a tényleges folyamatokra.

Következő példánkban egyik játékosnak sincs domináns stratégiája, ezért most nehezebb egyensúlyt találni.

1.2. példa. A nemek harca. A Fiú és a Lány szeret együtt lenni, de a Fiú inkább meccsre menne, a Lány inkább moziba. A kifizetési mátrixpár most a következő:

1.2. táblázat. *Nemek harca*

Fiú \ Lány	meccs	mozi
meccs	(3, 2)	(1, 1)
mozi	(1, 1)	(2, 3)

Valóban, a Fiú számára „a meccs” stratégia jobb, mint a „mozi”, ha a lány is meccsre megy ($3>1$), de rosszabb, ha a lány moziba megy ($1<2$). A Lány számára éppen fordítva. Vegyük észre azonban, hogy a (meccs, meccs) stratégiapárnak a következő vonzó tulajdonsága van: mindkét játékos számára optimális a számára kiosztott stratégia, ha a másik játékos is a párban szereplő stratégiát választja. (Ezt a stratégiapárt fogjuk Nash-egyensúlynak nevezni.) Valóban, ha a lány meccsre megy, akkor a fiú számára is a meccs optimális ($3>1$); és ha a fiú meccsre megy, akkor a lány számára is a meccs az optimális választás ($2>1$).

Hasonló érveléssel belátható, hogy a (meccs, meccs) pár mellett a (mozi, mozi) pár is Nash-egyensúly. Felvetődik a kérdés: A résztvevők melyiket válasszák a két egyensúly közül? Hogyan koordinálja a szerelmespár a választást? (Hogy ne a lány menjen a meccsre és a fiú a moziba!) ∎

Még nehezebb a helyzet a következő példában, ahol még Nash-egyensúly sem létezik, legalábbis közönséges értelemben nem.

1.3. példa. Forintpárosítás. Két játékos egyidejűleg elhelyez 1–1 Ft-ot Fejre vagy Írásra. Ha azonost választanak, az 1. nyer; ha különbözőt, akkor a 2., mindkétszer 1 Ft-ot.

1.3. táblázat. *Forintpárosítás*

2. („oszlop") játékos 1. („sor") játékos	Fej	Írás
Fej	(1, –1)	(–1, 1)
Írás	(–1, 1)	(1, –1)

∎

1700 körül keletkezett elképzeléseket újra felfedezve, Boreltől és Neumann Jánostól származik az ötlet, hogy az eddigi *tiszta* stratégiák mellé *kevert* stratégiákat kell bevezetni, ahol a stratégia választása a véletlenen alapszik. Ekkor az ellenfél nem tudja kiismerni a játékos döntését. A Nash-egyensúly a kevert stratégiákra is definiálható és létezése igazolható.

1.3. példa. (Folytatás.) Könnyen belátható, hogy a Forintpárosításban egyensúlyi megoldás, ha mindkét játékos egymástól függetlenül 1/2–1/2 valószínűséggel választja a Fejet vagy az Írást. Valóban, legyen rendre ξ és η a két játékos F választásának a valószínűsége. Ekkor az 1. játékos várható nyeresége a négy elemi esemény nyereségének a várható értéke, azaz $u_1(\xi,\eta) = \xi\eta - \xi(1-\eta) - (1-\xi)\eta + (1-\xi)(1-\eta)$. Deriválva ξ-szerint és 0-vá téve a deriváltat, adódik: $\eta^* = 1/2$. Itt vált u_1 ξ-szerinti deriváltja pozitívból negatívba, tehát u_1-nek lokális és globális maximuma van. Hasonlóan $\xi^* = 1/2$.

Azaz mindkét játékos földobja a saját pénzét, és ahogy esik, úgy puffan. Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 0. Ha azonban az 1. játékos eltér e szabálytól, pl. $\xi > 1/2$, akkor a 2. játékos ezt kihasználhatja, s mindig I-t tesz: $\eta = 0$, tehát az érmék különbözőségének valószínűsége 1/2 fölé kerül, s a 2. játékos nyer. ∎

Mielőtt tovább mennénk, három feladatot tűzünk ki megoldásra.

1.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az 1.2. példában, a *nemek harcában* a Fiú (2/3, 1/3) és a Lány (1/3, 2/3) kevert stratégiája az egyetlen valódi kevert Nash-egyensúly.

1.2. feladat. „Gyáva nyúl." Két személy a következő életveszélyes játékkal szórakozik. Egy keskeny híd két oldaláról indulnak egymással szembe – és sokan nézik őket.

Két döntés lehetséges: Kitérni vagy Hajtani. Ha mindkettő Hajt, akkor egymásnak ütköznek a hídon, a „nyereségpár” (–3, –3). Ha mindkettő Kitér, akkor leégnek a nézők előtt: a „nyereségpár” (1, 1). Ha az első Kitér, s a második Hajt, akkor az 1. pofára esik, a második sikert arat: a „nyereségpár” (0, 2), és hasonlóan a szimmetrikus esetben (2, 0).

a) Van-e a játéknak tiszta Nash-egyensúlya?

b) Határozzuk meg a játék kevert Nash-egyensúlyát!

c) Mi a valószínűsége, hogy a kevert Nash-egyensúlyban a versenyzők életben maradnak?

d) Melyik egyensúly adja a legnagyobb hasznot az 1. játékosnak?

Egy játék *szimmetrikus*, ha azonos a stratégiák halmaza és a két játékos kifizetési mátrixa egymás tükörképe. Figyeljük meg, hogy a felsorolt játékok közül szimmetrikus *a fogolydilemma* (1.1. példa), *a gyáva nyúl* (1.2. feladat). Azt várnánk, hogy az egyensúlyi stratégiák is azonosak, ez azonban általánosan nem igaz (lásd 1.2. feladat, de a 3.5. tételt).

1.3. feladat. Koordinációs játék. Szimmetrikus játékban elegendő az 1. játékos nyereségmátrixát feltüntetni.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lássuk be, hogy két szigorú tiszta Nash-egyensúly létezik és egy kevert szimmetrikus Nash-egyensúly!

Eddig olyan játékokat mutattunk be, ahol a játékosok egyszer és egy időben lépnek. Most olyan játékra hozunk példát, ahol a két játékos egymást követve lép.

1.4. példa. Ragadozó játék. Egy piacot egy bentlévő (I=incumbent) vállalat monopolizál, de egy másik vállalat (E=entrant) próbál belépni. Ha E belép, akkor I kétféleképpen válaszolhat: vagy *alkalmazkodhat* a belépőhöz, visszafogva kibocsátását, hogy megőrizhesse a piaci árat; vagy felveheti a harcot a belépővel: *ragadozó magatartást tanúsít*, leengedi az árat, hogy elriassza vagy kiszorítsa a belépőt. A játék stratégiai alakja (amelyet eddig elemeztünk), a következő:

1.4. táblázat. *Ragadozó játék*

	Bentlevő vállalat (I)	harcol	alkalmazkodik
Belépő vállalat (E)	ki	(0, 2)	(0, 2)
	be	(–3, –1)	(2, 1)

A stratégiai alak elemzése két Nash-egyensúlyt ad: (E kint marad; I harcol, ha E belép) és (E belép; I alkalmazkodik, ha E belép). Szinte ránézésre látható, hogy az első egyensúly elfogadhatatlan (E kint marad, de I mégis arra készül, hogy E belép) és nem is hiteles I fenyegetése, hogy harcol (nyeresége –1), míg alkalmazkodásnál a nyereség 1. ∎

A dinamikus leírást az ún. *extenzív alak* adja, amelyben az egymás utáni lépéseket egy fa írja le.

(1.1. ábra)

Rátérünk a részletesebb tárgyalásra.

2. ALAPFOGALMAK

A bevezetés után ismertetjük a nem-kooperatív játékok alapfogalmait.

Nem-kooperatív játékok

Legyen $n > 1$ természetes szám a játékosok száma, és képviselje $i = 1, \ldots, n$ az egyes játékosokat (Mas-Colell et al. (1995, 8. fejezet és matematikai függelék)). Legyen S_i absztrakt halmaz az i-edik játékos *stratégiá*inak halmaza; általános eleme $s_i \in S_i$ a játékos tetszőleges *stratégiája.* A játékosok egymástól függetlenül választják stratégiájukat, azaz döntenek (nem kooperálnak), s az i-edik játékos haszna $u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ valós szám. Minden játékos saját hasznosságfüggvényét akarja maximalizálni, de a maximum függ a többiek stratégiájától is. Föltesszük, hogy mindegyik játékos mindent tud a többiek lehetőségeiről és érdekeiről, csupán konkrét stratégiájukat nem ismeri előre. Legyen $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ a *stratégia-együttesek halmaza.*

Az 1.3. példában már találkozunk a kevert stratégiával. Most általánosítsuk e fogalmat! Tegyük föl, hogy mindegyik S_i stratégiahalmaz véges: m_i!

Definíció. Véges játékok esetén *kevert stratégiá*ról beszélünk, ha az i-edik játékos a megfelelő σ_i véges-dimenziós valószínűségeloszlás szerint választja ki S_i adott elemét, egy *tiszta statégiá*t, és az egyes játékosok egymástól teljesen függetlenül döntenek. A kevert stratégiák alkalmazásával létre jövő bővített stratégiahalmazt $\Delta(S_i)$ jelöli. Ekkor az i-edik játékosnak az $(s_1, \ldots, s_n)$ tiszta stratégia-együttes melletti $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ haszon helyére *várható haszna* lép, amely az egyes σ_i valószínűségvektorok n-lineáris függvénye (itt használtuk föl a Függelékben tárgyalt *várható hasznosságfüggvény*t):

$$u_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} u_i(s)\sigma_1(s_1) \cdots \sigma_n(s_n).$$

Megjegyzések. 1. Természetesen *elfajult* valószínűségeloszlásnál, ahol 1 valószínűséggel egy tiszta stratégiát választunk, elfajult kevert stratégiát kapunk. Ezért a tiszta stratégiák halmaza része a kevertekének: $S_i \subseteq \Delta(S_i)$.

2. Végtelen játékokra is lehet definiálni a kevert stratégiát, de általában erre nincs szükség. (Ebben a jegyzetben egy kivétellel találkozunk majd: a 3.1. példában.)

3. Ha nagyon precízek akarnánk lenni, akkor a várható hasznosságfüggvényt másként jelölnénk, mint az eredetit, azonban erre nincs szükség.

Az 1. pontban több példát is mutattunk kevert stratégiák alkalmazására. Most gyakorlatként felírjuk a legegyszerűbb nem triviális játékot – általános hasznosságokkal.

2.1. példa. Két játékos két-két stratégiával. Fölírjuk a játék hasznossági mátrixpárját.

2.1. táblázat. *Általános 2×2 tábla*

1. játékos	2. játékos	s_2^1	s_2^2
s_1^1		(u_1^{11},u_2^{11})	(u_1^{12},u_2^{12})
s_1^2		(u_1^{21},u_2^{21})	(u_1^{22},u_2^{22})

Domináns és dominált stratégiák

Már a legelső bevezető példánál láttuk, milyen fontos a domináns stratégiák fogalma. Most módszeresebben megvizsgáljuk e fogalmat.

Először a tiszta stratégiákra szorítkozunk. A rövidség kedvéért bevezetünk egy némileg pongyola jelölést: az $m = \sum_i m_i$-dimenziós $s = (s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ hipervektorból az i-edik komponens elhagyásával keletkező $m_{-i} = (m - m_i)$-dimenziós vektort $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1} \ldots, s_n)$ jelöli.

Definíció. Egy (i) játékos egy $(s_i^* \in S_i)$ stratégiáját *szigorúan domináns*nak nevezzük, ha bármely más $(s_i \in S_i,\ s_i \neq s_i^*)$ stratégiánál nyereségesebb, függetlenül attól, hogy mit lép a többi játékos. Képletben:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_{-i} \in S_{-i}\text{–re.}$$

Természetesnek tűnik, hogy ha minden játékosnak van szigorúan domináns stratégiája, és ezt tudják egymásról, akkor minden játékos a szigorúan domináns stratégiáját játssza.

Némileg általánosabb a következő fogalom:

Definíció. Egy (i) játékos egy $(s_i^* \in S_i)$ stratégiáját *gyengén domináns*nak nevezzük, ha legalább olyan nyereséges, mint bármely más $(s_i \in S_i)$ stratégia, függetlenül attól, hogy mit lép a többi játékos; és legalább egy esetben nyereségesebb is. Képletben:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_{-i} \in S_{-i}\text{–re}$$

és

$$u_i(s_i^*, s'_{-i}) > u_i(s_i, s'_{-i}) \qquad \text{alkalmas} \qquad s'_{-i} \in S_{-i}\text{–re.}$$

Kevésbé természetes, hogy ha minden játékosnak van gyengén domináns stratégiája, és ezt tudják egymásról, akkor minden játékos a gyengén domináns stratégiáját játssza (lásd később a 2.2. példát).

Az 1.2. példánál láttuk, hogy már a legegyszerűbb esetben sem létezik sem szigorúan, sem gyengén domináns stratégia. Próbálkozzunk meg az ellenkező oldalról!

Definíció. Egy (i) játékos egy $(s_i \in S_i)$ stratégiáját *szigorúan dominált*nak nevezzük, ha van egy másik stratégiája (s'_i), amely mindig nyereségesebb az előzőnél, függetlenül attól, hogy a többi fél mit lép:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_{-i} \in S_{-i}\text{–re.}$$

Kissé általánosabb a következő fogalom:

Definíció. Egy (i) játékos egy ($s_i \in S_i$) stratégiáját *gyengén domináltnak* nevezzük, ha van egy másik (s_i') stratégiája, amely legalább olyan nyereséges, mint az előző, függetlenül attól, hogy a többi fél mit lép; és legalább egy esetben nyereségesebb is.

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_{-i} \in S_{-i}\text{–re}$$

és

$$u_i(s_i', s'_{-i}) > u_i(s_i, s'_{-i}) \qquad \text{alkalmas} \qquad s'_{-i} \in S_{-i}\text{–re.}$$

Ha van domináns stratégia, akkor minden más stratégia dominált.
Két feladat következik.

2.1. feladat. Milyen egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük a 2.1. példában ahhoz, hogy a (felső, bal) döntéspáros szigorúan domináns legyen?

2.2. feladat. Furcsa osztozkodás. A következő osztozkodási játékot mérlegeljük. 100 Ft-ot kell elosztani két fél között kerek Ft-okban. A két játékos egyszerre és egymástól függetlenül dönt és jelenti be igényét a bírónak. Ha az igények összege nagyobb, mint 100 Ft, akkor egyik fél sem kap semmit. Ha az igények összege legfeljebb 100 Ft, akkor mindkét fél megkapja azt, amit kért, s az esetleges maradékot a bíró jótékonysági célra fordítja, s ez közömbös a játékosok számára.
a) Mik e játékban a szigorúan dominált stratégiák?
b) Mik e játékban a gyengén dominált stratégiák?
c) Mutassuk meg, hogy nincs domináns stratégia!

Általában feltehetjük, hogy a játékosok nem játszanak szigorúan dominált stratégiákat. Sőt, érdemes a játékban egymás után, *iteratívan* kiküszöbölni a szigorúan dominált stratégiákat. Belátható, hogy a végeredmény független a kiküszöbölés sorrendjétől. A maradék játék már jóval kisebb és áttekinthetőbb, szélső esetben egyetlen egy stratégia-együttesből áll. Az iteratív kiküszöbölés nemcsak azt jelenti, hogy az egyes játékosok racionálisak, hanem azt is, hogy ezt tudják egymásról, egészen a végtelenségig.
Bonyolultabb a helyzet a gyengén dominált stratégiákkal.

2.2. példa. Gyengén dominált stratégiák. Tekintsünk egy kétszemélyes játékot, ahol az 1. játékosnak 3, a 2.-nek 2 lehetősége van.

2.2. táblázat. *Gyengén dominált stratégiák*

1. játékos \ 2. játékos	Left (bal)	Right (jobb)
Up (fent)	(5, 1)	(4, 0)
Middle (középen)	(6, 0)	(3, 1)
Down (lent)	(6, 4)	(4, 4)

Ebben a játékban az 1. játékosnak két gyengén dominált stratégiája van: U és M, mindkettőt gyengén dominálja D.
Ellentétben a szigorúan dominált stratégiával, egy gyengén dominált stratégiát nem lehet csak úgy kiküszöbölni. Valóban, ha az 1. játékos *biztosan tudná*, hogy a 2. játékos L-t lép, akkor az 1. játékos tényleg racionálisan választhatná M-t is, hiszen ebben az

esetben ugyanannyit hoz a konyhára, mint D. Ha azonban akármilyen kicsi, de pozitív valószínűsége van annak, hogy a 2. játékos R-t lépi, akkor az 1. játékos racionálisan *nem* választhatja M-t. ∎

A domináns és domináns stratégia fogalma kevert stratégiákra is kiterjeszthető.

3. NASH-EGYENSÚLY

Ebben a pontban a nem-kooperatív játékelmélet központi fogalmával, a Nash-egyensúllyal foglalkozunk, amely akkor is létezhet, ha egy játéknak nincs domináns stratégia-együttese (lásd 1.2. példa).

A fogalom

Tekintsünk egy n-szereplős nem-kooperatív játékot.

Definíció. Felfedezője tiszteletére azt mondjuk, hogy a játékosok $(s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$ stratégia-együttese *Nash-egyensúly*t alkot, ha semelyik játékosnak sem érdemes egyoldalúan eltérnie az egyensúlyi stratégia-együttesben szereplő saját stratégiájától.

A Nash-egyensúly egyszerűen megfogalmazható korábbi jelölésünkkel:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \ge u_i(s_i, s_{-i}^*) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_i \in S_i\text{–re}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

A jobb megértés kedvéért érdemes bevezetni a legjobb válasz fogalmát.

Definíció. Az $\bar{s}_i \in S_i$ stratégia az i-edik játékos egy *legjobb válasza* a többi játékos valamilyen $s_{-i} \in S_{-i}$ stratégia-együttesére, ha $s_{-i} \in S_{-i}$ esetén $\bar{s}_i$ maximalizálja az i-edik játékos hasznát:

$$u_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \ge u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_i \in S_i\text{–re}.$$

Az i-edik játékos *legjobb válaszainak halmazá*t $b_i(s_{-i}) \subseteq S_i$ stratégia-részhalmaz jelöli:

$$u_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \ge u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_i \in S_i\text{–re}, \qquad \bar{s}_i \in b_i(s_{-i}).$$

Megjegyzések. 1. Nyilvánvaló, hogy a Nash-egyensúly azt jelenti, hogy minden játékos stratégiája (nem feltétlenül egyértelmű) legjobb válasz a többiek egyensúlyi stratégiájára:

$$s_i^* \in b_i(s_{-i}^*), \qquad i = 1, \dots, n.$$

2. Érdemes megemlíteni a Nash-egyensúly következő értelmezését: tegyük föl, hogy az i-edik játékos azt *várja*, hogy a többiek s_{-i}^{e} stratégiát játsszák és eszerint a várakozás szerint maximalizálja a hasznát. Ha minden játékos várakozása helyes, azaz a *várakozások racionálisak*: $s_{-i}^{\mathrm{e}} = s_{-i}$, $i = 1, \dots, n$, akkor Nash-egyensúly valósul meg.

3. Néha megkülönböztetik a gyenge és az erős Nash-egyensúlyt: az előbbiben egyenlőséget is megengedünk, az utóbbiban szigorú egyenlőtlenség áll. Mi általában a „gyenge” fogalommal dolgozunk.

A következő példa folytonos stratégiahalmazon szemlélteti a Nash-egyensúlyt.

3.1. példa. Telephely-választás. Hotelling (1929) a következő elhelyezkedési feladatot elemezte. Tegyük föl, hogy 1 km hosszú strandon a strandolók egyenletesen oszlanak el. Két fagylaltos kínálja azonos áron azonos minőségű portékáját, és minden strandoló ahhoz a fagylaltoshoz megy, aki közelebb van hozzá. A fagylaltosok a forgalmukat akarják maximalizálni. Képviselje a strandot a [0, 1] intervallum. Ha az 1. fagylaltos x_1-ben áll, és a 2. fagylaltos $x_2 \geq x_1$-ben áll, akkor $x^* = (x_1 + x_2)/2$ a fagylaltosok közti felezőpont. Az 1. fagylaltoshoz mennek a $(0,x^*)$ szakasz strandolói, és a 2.-hez az $(x^*,1)$ szakaszé.

a) A fagylaltosok Nash-egyensúlyban a strand közepén helyezkednek el. (Ha $x_1 < x_2$, akkor az 1.-nek érdemes jobbra húzódnia, a 2.-nek pedig balra: tehát Nash-egyensúlyban $x_1 = x_2$. Ha $x_1 = x_2 < 1/2$, akkor az 1.-nek érdemes jobbra húzódnia, ellentmondva az $x_2 \geq x_1$ feltevésnek. Nash-egyensúly: mindkét fagylaltos középen áll.)

b) A társadalmi optimum az (1/4, 3/4) felállás lenne, mert ekkor a fogyasztó által megteendő átlagos távolság 1/8, ellentétben az egyensúlyi 1/4-del.

c) Belátható, hogy három fagylaltos esetén nincs tiszta, de van kevert Nash-egyensúly. ∎

3.2. példa. Medián szavazó. Nagyon találó a 3.1. példa politológiai átértelmezése. Tegyük föl, hogy a választók preferenciái (pl. az adókulcs nagyságáról) a [0, 1] intervallumon egyenletesen oszlanak meg. Két párt van, amelynek programja a [0, 1] intervallum egy-egy pontja. A Nash-egyensúlyban mindkét párt a középen elhelyezkedő szavazó kegyeiért esedezik. ∎

Visszatérünk a korábbi feladatainkhoz.

3.1. feladat. (A 2.1. feladat folytatása.) a) Ha a 2.1. feladatban a (felső, bal) döntéspáros Nash-egyensúly, akkor milyen egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük?

b) Ha a (felső, bal) döntéspáros domináns, akkor Nash-egyensúly-e?

c) Mi annak a feltétele, hogy a (felső, bal) Nash-stratégia az 1. játékosnak többet fizessen, mint a játék *minimax értéke*: $v_1 = \min_j \max_i u_1^{i,j}$?

3.2. feladat. (A 2.2. feladat folytatása.) Mi(k) a 2.2. feladat játékának Nash-stratégiája(i)?

Megjegyzés. A Nash-egyensúly fogalmának egyik gyengesége, hogy egy játéknak sok egyensúlya is lehet, kifizetési értékük különböző (pl. a *Nemek harcá*ban) és nincs egyszerű mód a közös egyensúly megtalálására. Még az is megeshet, hogy a különböző játékosok a különböző egyensúlyi stratégiák megfelelő komponensét választva nem egyensúlyi helyzetbe kerülnek.

Távirati stílusban utalunk a Nash-egyensúly értelmezésére.

(i) Ha egy játéknak egyetlen egy logikus kimenetele létezik, akkor az a játéknak Nash-egyensúlya.

(ii) Több Nash-egyensúlyból a játékon kívüli szempontok is kiválaszthatják az egyensúlyt: *gyűjtópont*. Például futballmeccs általában szerdán és szombaton van.

(iii) Nash-egyensúly mint betartható megállapodás.

(iv) Nash-egyensúly mint stabil társadalmi szokás.

Létezés

Láttuk már az 1. pontban, hogy nem minden játékban van Nash-egyensúly. Milyen feltételek elégségesek ahhoz, hogy legalább egy Nash-egyensúly létezzék?

A válaszhoz bevezetjük a következő fogalmakat és segédtételeket.

A közgazdaságtani egyensúlyelméletben általában és a játékelméletben speciálisan alapvető szerepet játszanak a fixpont-tételek (Hegedűs–Zalai, 1978 és Zalai, 1989, 6. fejezet Függeléke).

3.1. segédtétel. *(Brouwer-féle fixpont-tétel, 1913.) Legyen q egy természetes szám. Ha $K \subseteq \mathbf{R}^q$ kompakt és konvex halmaz, és $f : K \to K$ folytonos függvény, akkor az f függvénynek létezik legalább egy fixpontja: $x^* = f(x^*)$.*

A maximalizálandó függvények vizsgálatakor gyakran hasznos a következő

Definíció. Egy $f : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$ függvényt *kvázikonkáv*nak nevezünk, ha egy $X \subseteq \mathbf{R}^q$ konvex halmazon van értelmezve és ha minden $\{x \in X : f(x) > t\}$ *felső szinthalmaz*a konvex, ahol t tetszőleges valós szám.

Akárcsak a konkáv függvényeknél, a kvázikonkáv függvényeknél is igaz, hogy a rájuk vonatkozó maximumfeladatoknál a lokális maximum egyben globális is. Természetesen egy konkáv függvény kvázikonkáv. A kvázikonkáv függvények valóban általánosítják a konkáv függvényeket abból a szempontból, hogy az előbbieknek bármely monoton transzformáltja is kvázikonkáv, míg az utóbbiaknál a transzformált lehet nem konkáv is.

Mivel a maximum nagyon gyakran nem egyértelmű, szükségünk van a halmazértékű függvényekre.

Definíciók. 1. *Leképezés*nek nevezünk két absztrakt halmaz, X és Y közötti $f : X \to Y$ hozzárendelést, amely minden $x \in X$ ponthoz egy $f(x) \subseteq Y$ halmazt rendel. (Ha $f(x)$ minden esetben pont, akkor függvényről beszélhetünk.)

2. A folytonos függvény egyik lehetséges általánosításaként egy leképezést *felülről félig folytonos*nak nevezünk, ha bármely olyan $\{x^m\} \subseteq X$ sorozatra, amely konvergál $x \in X$-hez, és amelynél $y^m \in f(x^m) \subseteq Y$, $\{y^m\}$ konvergál $y \in Y$-hoz, akkor $y \in f(x)$ teljesül. Kompakt X tér esetén ez azt jelenti, hogy az $[x, f(x)]$ gráf zárt halmaz.

Könnyen belátható a

3.2. segédtétel. *Legyen Y és V egy véges-dimenziós euklideszi tér kompakt és konvex részhalmaza, és legyen a $g : Y \times V \to \mathbf{R}$ függvény folytonos az (y,v) szerint és kvázikonkáv az y szerint. Rendelje a h leképezés minden $v \in V$-hez a maximumot adó pontok halmazát Y-ban. Ekkor a h leképezés nem-üres, felülről félig folytonos és konvex értékű.*

A folytonos függvényekre vonatkozó Brouwer-féle fixpont-tételt (a 3.1. segédtételt) általánosítja leképezésekre a

3.3. segédtétel. *(Kakutani fixpont-tétele, 1941.) Ha X egy véges-dimenziós euklideszi tér nem-üres, konvex és kompakt halmaza; ha f az X-nek egy önmagára való, felülről félig folytonos leképezése, amely minden $x \in X$-hez nem-üres konvex halmazt rendel, akkor f-nek létezik fixpontja: $x^* \in f(x^*)$.*

A most felsorolt fogalmak és segédtételek szinte sugallják a nem-kooperatív játékelmélet alaptételét:

3.1. tétel. *(Nikaido–Isoda, 1955.) Egy n-személyes játéknak létezik legalább egy Nash-egyensúlya, ha teljesülnek a következő feltételek: a) az S_i stratégiahalmaz egy véges-dimenziós euklideszi tér nem-üres, konvex és kompakt halmaza;*

b) Az i-edik játékos $u_i(s_1,\dots,s_i,\dots,s_n)$ hasznosságfüggvénye folytonos minden változójában és kvázikonkáv s_i-ben, $i = 1,\dots, n$.

Bizonyítás. A 3.2. segédtétel szerint minden játékosra a legjobb-válasz leképezés nem-üres, konvex értékű és felülről félig folyonos. Definiáljuk a következő leképezést: $b(s_1,\dots,s_n) = b_1(s_{-1}) \times \cdots \times b_n(s_{-n})$. Ez a leképezés az egyéni b_i leképezések Descartes-szorzata, a nem-üres, konvex és kompakt S halmazt önmagára képezi le és szintén felülről félig folyonos. Kakutani fixpont-tételének minden feltétele teljesül, azaz létezik olyan $s^* \in S$ stratégia-együttes, amely legjobb válasz önmagára: $s^* \in b(s^*)$. ∎

Mivel a 3.1. tétel a Kakutani-féle fixpont-tétel nélkül is igazolható (pl. Szép–Forgó (1974)), érdekes a

3.3. feladat. Bizonyítsuk be a 3.1. tétel segítségével a Brouwer-féle fixpont-tételt!

Kevert stratégiák

Véges játékoknál általában nem létezik (tiszta) Nash-egyensúly (1.3. példa). Már Borel is látta, de Neumann bizonyította be, hogy már a nullaösszegű „mátrixjátékok”nál (lásd 5. pont) ún. *kevert stratégiák*ra van szükség ahhoz, hogy az ellenfelek ne ismerhessék ki egymást. Ekkor viszont mindig van Nash-egyensúly.

Valóban, a 3.1. tételnek viszonylag egyszerű következménye a

3.2. tétel. *(Nash, 1951.) Ha az n-személyes játék eredeti S_i stratégiahalmazai végesek, akkor a keveréssel létrejövő $\Delta(S_i)$ halmazok szorzatán definiált játéknak van legalább egy kevert Nash-egyensúlya (σ^*):*

$$u_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*) \ge u_i(\sigma_i,\sigma_{-i}^*) \qquad \text{tetszőleges} \qquad \sigma_i \in \Delta(S_i)\text{−re}, \qquad i = 1,\dots, n.$$

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy Nash egyik bizonyítása olyan általános volt, hogy nyugodtan kimondhatta volna a 3.1. tételt is.

Most rámutatunk a kevert stratégiák egy érdekes tulajdonságára.

3.3. tétel. *Legyen σ egy kevert stratégia-együttes, és legyen $S_i^+(\sigma) \subseteq S_i$ azoknak a tiszta stratégiáknak a halmaza, amelyeket az i-edik játékos pozitív valószínűséggel játszik ebben az együttesben. A σ^* stratégia-együttes akkor és csak akkor alkot Nash-egyensúlyt, ha minden játékosnak maximális hasznot adnak a pozitív valószínűséggel játszott tiszta stratégiák, azaz minden i-re*

$$u_i(s_i,\sigma_{-i}^*) = u_i(s_i',\sigma_{-i}^*) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_i,s_i' \in S_i^+(\sigma^*)\text{−ra},$$

és

$$u_i(s_i,\sigma_{-i}^*) \ge u_i(s_i',\sigma_{-i}^*) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_i \in S_i^+(\sigma^*)\text{−ra}, \quad s_i' \notin S_i^+(\sigma^*)\text{−ra}.$$

Megjegyzések. 1. Ezek alapján a következőképp érvelhetnénk: minek bíbelődjék egy játékos azzal, hogy optimálisan válassza meg a Nash-egyensúlybeli kevert stratégiáját, amikor bármelyik tiszta stratégia ugyanazt a hasznot adja neki. De ez csak látszat: az egyensúlyban mindenkinek egyensúlyi stratégiát kell játszania!

2. Ugyanakkor ez a tulajdonság jól használható a Nash-egyensúly kiszámításánál, lásd pl. az 1.2. feladatot.

Bizonyítás. Indirekt. Teljesüljön

$$u_i(s_i,\sigma^*_{-i}) < u_i(s'_i,\sigma^*_{-i}) \qquad \text{alkalmas} \qquad s_i \in S_i^+\text{–re}, \quad s'_i \notin S_i^+\text{–re}.$$

Ha kicseréljük s_i-t s'_i-re, akkor nő az i-edik játékos haszna, tehát σ^* nem volt Nash-egyensúly. ∎

Figyelemre méltó, hogy a 3.1. tétel speciális esetének, a 3.2. tételnek az igazolásához elegendő a Brouwer-féle fixpont-tétel (3.1. segédtétel):

3.4. feladat.* Jelölje x_+ az x valós szám pozitív részét: ha $x > 0$, akkor $x_+ = x$, egyébként nulla. A véges $S_i = \{s_i^j\}_{j=1}^{m_i}$ stratégiahalmazok szorzatának $\Delta(S) = \times_{i=1}^n \Delta(S_i)$ kevert bővítésén megadunk egy f függvényt, amely a halmazt önmagába képezi le: $\sigma \in \Delta(S)$ esetén,

$$g_i^j(\sigma) = [u_i(s_i^j,\sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i,\sigma_{-i})]_+, \qquad f_i^j(\sigma) = \frac{\sigma_i^j + g_i^j(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)}, \qquad f = (f_i^j).$$

Igazolja, hogy a) a játék minden Nash-egyensúlya az f függvény fixpontja, és b) származtassa a 3.2. tételt a Brouwer-féle fixpont tétel segítségével! (Ezt az utat követte Nash 1951-es doktori értekezésében).

A 2.2. példában említettük, hogy a gyengén dominált stratégiák kizárása nem igazán megnyugtató. Vegyük a következő példát:

3.3. példa. Olyan Nash-egyensúly, amelynek mindkét stratégiája gyengén dominált.

3.1. táblázat. *Gyengén dominált stratégiák képezhetnek Nash-egyensúlyt*

2. játékos / 1. játékos	L	R
U	(1, 1)	(0, –3)
D	(–3, 0)	(0, 0)

Valóban, (D,R) gyenge Nash-egyensúly, de az 1. játékosnak gyengén előnyösebb az U stratégia, s a 2. játékosnak gyengén előnyösebb az L stratégia. Természetesen (U,L) is Nash-egyensúly, amely mindkét játékosnak előnyösebb, mint (D,R). ∎

Hogyan lehetne megszabadulni ezektől az alsóbbrendű egyensúlyoktól? Erre vonatkozik Selten (1975) javaslata, amelyet csak elnagyoltan ismertetünk. Tekintsük a véges elemű S_i stratégiahalmazok kevert bővítését: $\Delta(S_i)$-t, $i = 1, \ldots, n$; és tekintsük a hozzátartozó játékot: Γ_N-et. Perturbáljuk a játékot a következőppen; megköveteljük, hogy minden stratégiát legalább $\varepsilon_i(s_i) > 0$ valószínűséggel játsszanak: $\Gamma_N(\varepsilon)$. (Magyarázat: *remeg a játékosok keze*, és olyan stratégiát is játszanak, amelyet nem is akarnak.) *Remegő-kéz tökéletes*nek nevezünk egy Nash-egyensúlyt, ha létezik a perturbált játékoknak egy olyan $\{\Gamma_N(\varepsilon^k)\}$ sorozata, amely aszimptotikusan tart Γ_N-hez, és amelynek van olyan $\{\sigma(\varepsilon^k)\}$ Nash-egyensúly-sorozata, amely tart Γ_N Nash-egyensúlyához. Ez a *finomítás* kizárja a gyengén dominált stratégiákat a Nash-egyensúlyok összetevői közül, pl. a 3.3. példa alsóbbrendű Nash-egyensúlyát is.

Egyértelműség*

Az egyensúly létezése nagyon hasznos, de gyakran szeretnénk, ha az egyensúly egyértelmű is lenne. Erre szolgál a következő fogalom és tétel (Forgó et al. 1999, 4. fejezet).

Legyen X egy teljes metrikus tér, ahol ρ a metrika. Egy $f : X \to X$ metrikus térbeli függvényt *kontrakció*nak nevezünk, ha a képpontok távolsága határozottan kisebb, mint a tárgypontoké: Van olyan 0 és 1 közötti λ valós szám, $(0 < \lambda < 1)$ amelyre $\rho(f(x'),f(x'')) < \lambda\rho(x',x'')$, $x' \neq x''$. A kontrakciós tételhez hasonlóan adódik

3.4. tétel. *Ha egy játékban a legjobb-válasz függvények együttese kontrakció, akkor a játéknak legfeljebb egy Nash-egyensúlya létezik.*

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy most feltesszük, hogy a legjobb válasz nem leképezés, hanem függvény!

Bizonyítás. Indirekt. Legyen két különböző egyensúlyi pont: $s^* \neq s'$ és $s^* = b(s^*)$ és $s' = b(s')$. $0 < \rho(s^*,s') = \rho(b(s^*),b(s')) < \lambda\rho(s^*,s')$, ellentmondás. ∎

Kétszemélyes szimmetrikus játékok

Már a bevezető példáinkban is láttunk kétszemélyes szimmetrikus játékokat, és a továbbiakban is többször fogunk találkozni velük, pl. a 6. pont evolúciós játékelméletében.

Definíciók. 1. Egy kétszemélyes játékot *szimmetrikus*nak nevezzük, ha a játékosok stratégiahalmaza azonos: $S_1 = S_2$; és hasznosságfüggvényük szimmetrikus egymásra: $u_1(s_1,s_2) \equiv u_2(s_2,s_1)$.

2. Egy Nash-egyensúlyt *szimmetrikus*nak nevezünk, ha a két játékos egyensúlyi stratégiája azonos: $s_1^* = s_2^*$.

Azt már az 1.2. (Gyáva nyúl) feladatban láttuk, hogy van olyan szimmetrikus játék, ahol semelyik tiszta stratégiájú Nash-egyensúly nem szimmetrikus. (Természetesen, ha (s_1^*,s_2^*) Nash-egyensúly, akkor (s_2^*,s_1^*) is az.) Ugyanakkor az eddig talált kevert stratégiájú Nash-egyensúlyok szimmetrikusak voltak. Mi a helyzet általában? A kérdésre választ ad a

3.5. tétel. *A 3.1. tétel feltételei mellett minden szimmetrikus játéknak van legalább egy szimmetrikus Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás. Bármely kétszemélyes játéknál a $b_1(s_2)$ legjobb-válasz leképezés a játék szimmetriája miatt az S_1 halmazt önmagára képezi le, tehát a b_1 leképezésnek van fixpontja: $s_1^* \in b_1(s_1^*)$, ugyanígy b_2-re. ∎

4. OLIGOPÓLIUM

A hagyományos közgazdaságelmélet kizárólag a monopóliumot és a tökéletes versenyt tanulmányozta. A valóságban nagyon gyakori viszont, hogy néhány vállalat alkotja a piacot: ez az ún. *oligopol piac.* Ilyen volt például a sokáig zárt amerikai autópiac a híres hármassal: a General Motors, a Ford és a Chrysler. Ebben a pontban ezt az esetet vizsgáljuk, amely kiváló alkalmazása a Nash-egyensúlynak.

Duopólium

Az ipari szervezetek (industrial organizations) elméletében az első lépés a valóság pontosabb leírása felé a két vállalatból álló piac vizsgálata volt. Figyelemre méltó, hogy az úttörő Cournot (1838) két vállalat esetében szinte megelőlegezte Nash egyensúlyfogalmát.

Definíció. *Cournot-duopólium*ról beszélünk, ha két vállalat verseng egymással és az i-edik vállalat felteszi, hogy a $j \neq i$-edik vállalat kibocsátása q_j, s ennek megfelelően úgy választja meg $q_i(q_j)$ kibocsátását, hogy adott q_j mellett a $\pi_i(q_i(q_j),q_j)$ profitja maximális legyen. Belső maximumnál:

(4.1) $$\pi_{i,q_i}(q_i,q_j) = 0, \qquad i = 1,\, 2.$$

Cournot-egyensúly esetén a két feltételezés összhangban van egymással:

(4.2) $$q_i^* = q_i(q_j^*) \qquad i = 1,\, 2.$$

4.1. tétel. *a) Megfelelő technikai feltételek mellett létezik a Cournot-egyensúly.*

b) A Cournot-duopolár nagyobb, mint a versenyár; és kisebb, mint a monopolár, tehát a megfelelő duopol-kibocsátás kisebb, mint a verseny-kibocsátás; és nagyobb, mint a monopol-kibocsátás.

Az elmondottakat a következő két feladat szemlélteti a legegyszerűbb esetben.

4.1. feladat. a) Lineáris keresleti függvény és különböző lineáris költségfüggvényű két vállalat esetén határozzuk meg a Cournot-egyensúlyt! b) Mikor igaz, hogy a legjobb-válasz függvény kontrakció?

4.2. feladat. Kvadratikus keresleti függvény ($p = 1 - (q_1 + q_2)^2$) és azonos nulla költségfüggvényű két vállalat esetén határozzuk meg a Cournot-egyensúly termelését és profitját!

Tirole (1989) 5. fejezetében kulcsszerepet játszik az ún. Bertrand-paradoxon. Már Bertrand (1883) kétségbe vonta Cournot modelljének a helyességét, nevezetesen azt, hogy a termelők nem az árakról, hanem a volumenekről döntenek. Szerinte a termelők az árakról döntenek, és a fogyasztók az alacsonyabb árú termelőt részesítik előnyben. Jelölje c a két vállalat közös termelési egységköltségét. Tehát az i-edik vállalat terméke iránti kereslet

$$D_i(p_i,p_j) = \begin{cases} D(p_i) & \text{ha } p_i < p_j; \\ D(p_i)/2 & \text{ha } p_i = p_j; \\ 0 & \text{ha } p_i > p_j; \end{cases}$$

profitja pedig $\pi_i(p_i,p_j) = (p_i - c)D_i(p_i,p_j)$.

4.2. tétel. *(Bertrand-paradoxon, Tirole, 1989, 209–212. o.) A Nash-egyensúlyban mindkét vállalat a versenyző egyensúlyt választja, ahol az ár egyenlő az egységköltséggel:* $p_1 = p_2 = c$*.*

Bizonyítás. Bármely c-nél nagyobb árral próbálkozzék az egyik vállalat, a másik aláígérhetne és ezzel egyoldalúan pozitív profithoz jutna. ∎

Miért paradox a Bertrand-tétel? 1. Azt állítja, hogy a piaci versenyzői egyensúly már két vállalat esetén is megvalósul. 2. Nem magyarázza meg, hogy miért akarnak egyáltalán a vállalatok termelni, ha nincsen nyereségük.

A Bertrand-paradoxon magyarázata a következő (Edgeworth, 1897):

1. Nyitva hagyja, hogy mi történik akkor, ha semelyik vállalat sem képes egyedül kielégíteni a teljes keresletet: kapacitáskorlát. 2. Az elemzés elhanyagolja az időbeli reakciókat. 3. Az elemzés elsiklik a termékek közti különbségek fölött.

A Bertrand-paradoxon minden hibája ellenére érdekes, mert élesen rávilágít arra az esetre, amikor kisszámú termelő késhegyig menő harcot vív egymással. Ezt szemlélteti a

4.3. feladat. Mi történik, ha a 3.1. példában tárgyalt elhelyezkedési feladatban az eladók különböző árakat kérnek, és a fogyasztó közlekedési költsége arányos a távolsággal?

Oligopólium

A duopólium természetes általánosítása az oligopólium.

Definíció. *Oligopólium*ról beszélünk, ha a piacon jelenlévő vállalatok száma nagyobb, mint 1, de olyan kicsi, hogy nem lehet elhanyagolni az egyes szereplők döntései közti kölcsönhatásokat.

Jelenleg nincs általánosan elfogadott elmélet. Szemléltetésül a következő példát tanulmányozzuk.

4.1. példa. Szimmetrikus oligopol piac. A piacon n egyforma vállalat tevékenykedik, egységköltségük egyaránt c. A piac keresleti függvénye lineáris: $Q(p) = a - bp$, ahol $Q = \sum_i q_i$. Föltesszük, hogy $a > bc$, azaz $p = c$ minimumárhoz tartozó kereslet pozitív. A Cournot-megoldás általánosításából adódik a *Nash-egyensúly*, ahol minden i-re adottnak véve a többi vállalat döntését, az i-edik vállalat optimuma a Nash-egyensúlybeli érték. Képletben: alkalmazva a $q = (q_i, q_{-i})$ fölbontást, legyen az i-edik vállalat profitfüggvénye $\pi_i(q_i, q_{-i})$. Ekkor a q^* vektor Nash-egyensúly, ha minden i-re és minden q_i-re

$$\pi_i(q_i^*, q_{-i}^*) \geq \pi_i(q_i, q_{-i}^*).$$

Esetünkben Nash-egyensúlyban az egyes vállalatok kibocsátása azonos, és a $Q^*(n) = nq_1^*(n)$ összkibocsátás, valamint az ár rendre

$$Q^*(n) = \frac{n(a-bc)}{n+1} \qquad \text{és} \qquad p^*(n) = \frac{a+nbc}{(n+1)b}. \tag{4.3}$$

Érdemes kiszámítani az egy vállalatra jutó profitot és az összprofitot:

$$\pi_1^*(n) = (p^*(n) - c)q_1^*(n) = \frac{a-bc}{(n+1)^2 b} \qquad \text{és} \qquad \Pi^*(n) = n\pi_1^*(n) = \frac{n(a-bc)}{(n+1)^2 b}.$$

Két határeset létezik:
a) monopólium: $Q_M^* = (a - bc)/2$ és $p_M^* = (a + bc)/2b$;
b) tökéletes verseny: $Q_C^* = a - bc$ és $p_C^* = c$. ∎

Összefoglalva: A példa esetén a versenyző vállalatok számának növekedésével a kínálat nő (tökéletes versenynél éppen kétszer akkora, mint a monopóliumnál); az ár pedig csökken (tökéletes versenynél megegyezik a határköltséggel).

Végül egy meglepő feladat, amely rávilágít a Cournot-modell egyik gyengeségére.

4.4. feladat. (Salant et al., 1983.) Lássuk be, hogy ha egy n-szereplős piacon az 1. vállalat kettéosztja önmagát, akkor a haszna jelentősen nő, de a többieké annyira csökken, hogy a termelők összhaszna is csökken!

5. KÉTSZEMÉLYES NULLAÖSSZEGŰ JÁTÉKOK

A játékelmélet első igazi eredménye Neumann (1928) cikke volt, amely a kevert stratégia segítségével a kétszemélyes nullaösszegű mátrixjátékokra bebizonyította legalább egy minimax egyensúlyi stratégia létezését. Az egyensúlyt sokszemélyes játékra általánosító Nash-dolgozat azonban fokozatosan háttérbe szorította a kezdeti elméletet. Manapság a közgazdászok számára írt anyagok már szinte nem is foglalkoznak a kétszemélyes nullaösszegű mátrixjátékokkal, pedig ez a speciális eset továbbra is hasznos példa (Szép–Forgó, 1974, 4. fejezet).

A minimax-tétel

A 3. pontban bevezetett fogalmakat nem ismételjük meg, kivéve a Nash-egyensúlyét. Kétszemélyes játéknál

$$u_1(s_1^*,s_2^*) \geq u_1(s_1,s_2^*) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_1 \in S_1\text{–re} \tag{5.1}$$

és

$$u_2(s_1^*,s_2^*) \geq u_2(s_1^*,s_2) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_2 \in S_2\text{–re.} \tag{5.2}$$

Új viszont a következő

Definíció. *Nullaösszegű* játékról beszélünk, ha a két játékos hasznosságának összege azonosan nulla:

$$u_1(s_1,s_2) + u_2(s_1,s_2) \equiv 0.$$

Ilyen játék például a sakk, ha a győzelem 1 pontot, a vereség –1 pontot és a döntetlen 0 pontot ér (itt a szokásos pontokat 2-vel megszorozzuk és 1-et levonunk).

A továbbiakban az 1. játékos hasznosságfüggvényéből elhagyjuk az indexet: u, és a 2. játékos hasznosságfüggvényét $-u$-val jelöljük.

Írjuk át a Nash-egyensúly definícióját az új jelölésünkkel:

$$u(s_1^*,s_2^*) \geq u(s_1,s_2^*) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_1 \in S_1\text{–re} \tag{5.1'}$$

és

(5.2′) $$-u(s_1^*,s_2^*) \geq -u(s_1^*,s_2) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_2 \in S_2\text{−re.}$$

(5.2′)-t –1-gyel beszorozva, egyesíthető a két egyenlőtlenség:

(5.3) $$u(s_1,s_2^*) \leq u(s_1^*,s_2^*) \leq u(s_1^*,s_2) \quad \text{minden} \quad s_1 \in S_1\text{−re}, \quad s_2 \in S_2\text{−re.}$$

Tehát a kétszemélyes nullaösszegű játék bármely Nash-egyensúlyi pontja *nyeregpont*: az 1. változó szerint maximum, a második szerint pedig minimum.

Belátjuk a következő tételt:

5.1. tétel. *(Neumann, 1928.) Ha teljesül a minimax-feltétel:*

(5.4) $$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1,s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1,s_2),$$

akkor a játéknak van Nash-egyensúlya, és a játék értéke az (5.4) egyenlőség két oldalán álló kifejezés közös értéke: v.

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan s_1^* stratégiát, amelyre teljesül

(5.5) $$\min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*,s_2) = v,$$

és egy olyan s_2^* stratégiát, amelyre teljesül

(5.6) $$\max_{s_1 \in S_1} u(s_1,s_2^*) = v.$$

Rendre behelyettesítve (5.5)–(5.6)-ba s_2^*-ot és s_1^*-ot, adódik a következő egyenlőtlenségpár:

$$u(s_1^*,s_2^*) \leq v \leq u(s_1^*,s_2^*),$$

azaz $u(s_1^*,s_2^*) = v$. Visszahelyettesítve (5.5) minimumfeltételbe és (5.6) maximumfeltételbe, adódik (5.3). ∎

5.1. feladat. Megfordítás. Mutassuk meg, hogy – bizonyos regularitási feltételek mellett – a 5.1. tétel megfordítása is igaz.

A következő két példa és egy feladat a legegyszerűbb eseteket tárgyalja.

5.1. példa. Az 1.3. (forintpárosítási) példában a tiszta stratégiák terében nem érvényes a minimax tétel: $\max\min u = -1$ és $\min\max u = 1$. ∎

5.2. példa. Papír, Olló, Kő. Két játékos játssza a következő bugyuta játékot. Egyszerre választanak a három lehetőség közül: P, O, K. Az Olló vágja a Papírt, a Kő csorbítja az Ollót és a Papír letakarja a Követ, azaz ezekben az esetekben az elsőnek említett stratégia nyer 1 dollárt a másodiknak említett ellen. Más stratégiapárok esetén mindkét játékos nyereménye nulla. Nyilvánvaló, hogy ez egy szimmetrikus játék, és mindkét játékos egyetlen Nash-stratégiája (1/3, 1/3, 1/3) kevert stratégia. ∎

5.2. feladat. Támadás és védelem. Az 1. ország két ponton támadhatja meg a 2. országot: A-ban és B-ben. Mivel mindkét országnak csak egy harci egysége van, a támadás előtt egymástól függetlenül el kell dönteniük, hogy mit támadnak, illetve mit védenek. A két objektum értéke mindkét fél részére rendre v_A és v_B, $v_A > v_B$. A támadó pontosan akkor győz, ha a megtámadott objektum nincs védve. Írjuk föl a háborút egy kétszemélyes nullaösszegű játékként és számítsuk ki a Nash-egyensúlyt!

A következő tétel azt mutatja, hogy nullaösszegű játéknál a több egyensúly létezéséből fakadó nehézség magától megoldódik.

5.2. tétel. *Ha egy kétszemélyes nullaösszegű játékban két különböző egyensúly létezik: (s_1^*,s_2^*), (s_1^o,s_2^o), akkor játékértékük azonos, és a belőlük képzett (s_1^*,s_2^o) és (s_1^o,s_2^*) „vegyes páros" mindegyike egyensúly.*

Bizonyítás. Behelyettesítve (5.3)-ba $s_1 = s_1^o$-t és $s_2 = s_2^o$-t:

$$u(s_1^o,s_2^*) \le u(s_1^*,s_2^*) \le u(s_1^*,s_2^o).$$

„Szimmetria" miatt igaz a következő egyenlőtlenség is:

$$u(s_1^*,s_2^o) \le u(s_1^o,s_2^o) \le u(s_1^o,s_2^*).$$

A két egyenlőtlenséget összehasonlítva, mindenütt egyenlőség adódik. ∎

5.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a kétszemélyes nullaösszegű játékban (s_1^*,s_2^*) Nash-egyensúly és v a játék értéke, akkor $u(s_1,s_2^*) = v$-ből még nem következik, hogy s_1 egy Nash-egyensúly komponense!

Visszatérünk a 3. pontban tanulmányozott szimmetrikus játékokhoz. Eddig csak azt tudtuk, hogy létezik szimmetrikus egyensúly (vö. 3.5. tétel). A nullaösszegű játékoknál élesíthető ez az eredmény.

5.3. tétel. *Kétszemélyes szimmetrikus nullaösszegű játékban*
a) a játék értéke nulla: $v = 0$;
b) a két játékos egyensúlyi stratégiahalmazai azonosak: $E_1 = E_2$.

Bizonyítás. a) A szimmetrikusság és a nullaösszegűség feltevése szerint $u(s,s) = -u(s,s)$, tehát $u(s,s) = 0$. Indirekt bizonyítunk: ha $v = u(s_1^*,s_2^*) > 0$, akkor (5.3) második egyenlőtlensége szerint $0 < u(s_1^*,s_2^*) \le u(s_1^*,s_1^*) = 0$, ellentmondás. A negatív érték hasonló ellentmondáshoz vezet.

b) Legyen (s_1^*,s_2^*) egy Nash-egyensúly. A szimmetria értelmében (s_2^*,s_1^*) is egyensúly. 5.2. tétel alapján adódik a második állítás is. ∎

Mátrixjátékok

Tegyük föl, hogy az S_1 és S_2 kiinduló stratégiahalmaz véges:

$$S_1 = \{s_1^h\}_{h=1}^m \qquad \text{és} \qquad S_2 = \{s_2^j\}_{j=1}^q;$$

és kevert stratégiákat alkalmazásával $\Delta(S_1)$ és $\Delta(S_2)$ stratégiahalmaz jön létre. Ebben az esetben *mátrixjáték*okról beszélünk, és élesíthetők az eredményeink. Ekkor u_{hj}-vel jelöljük az 1. játékos *nyereségét* az $(s_1^h,s_2^j) = (h,j)$ tiszta stratégiapárnál. Legyen $U = (u_{hj})$ az 1. játékos *nyereségmátrixa* és $x = (x_1,\ldots,x_h,\ldots,x_m)$, ill. $y = (y_1,\ldots,y_j,\ldots,y_q)$ az 1., ill. a 2. játékos *keverési vektor*a, (nem-negatív és 1 összegű vektorok). Ekkor az 1. játékos *várható nyereség*e

$$u(x,y) = xUy = \sum_h \sum_j x_h u_{hj} y_j.$$

A Nash-tétel (3.2. tétel) speciális eseteként adódik az

5.4. tétel. *Neumann (1928.) Minden mátrixjátékban létezik legalább egy Nash-egyensúly.*

Megjegyzések. 1. Ez volt az első komoly játékelméleti eredmény, s innen számítjuk a játékelmélet kezdetét. Neumann fixpont-tételes bizonyítását később sokan egyszerűsítették.

2. Valójában Neumann nemcsak a mátrixjátékokra, hanem a 3.1. tételben szereplő általános hasznosságfüggvényű és stratégiai halmazokra mondta ki a tételét.

Szimmetrikus mátrixjátékoknál könnyen belátható, hogy a nyereségmátrix antiszimmetrikus: $U = -U^{\mathbf{T}}$, avagy $u_{hj} = -u_{jh}$.

Szükségünk lesz az összegző vektor jelölésére (a dimenziót nem jelöljük): $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$.

Minden mátrixjátékot szimmetrikussá tehetünk a következő módon:

5.5. tétel. *Ha U egy $m \times q$-es mátrix, akkor legyen*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & U & -\mathbf{1} \\ -U^{\mathbf{T}} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^{\mathbf{T}} & -\mathbf{1}^{\mathbf{T}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $(m+q+1)$-edrendű négyzetes antiszimmetrikus mátrix egy szimmetrikus játékot definiál, amelynek szimmetrikus egyensúlyi megoldásában az első m komponense a sor-játékos, második q komponense az oszlop-játékos optimális kevert stratégiájának az elemei, és utolsó komponense a játék értéke.

Bizonyítás. Legyen a szimmetrikus játék egy szimmetrikus Nash-egyensúlya $z = (u,w,\lambda)$. Ekkor a szimmetrizált nyeregpont-feltétel szerint $Pz \le 0$, azaz

$$Uw \le \lambda\mathbf{1}, \qquad uU \ge \lambda\mathbf{1}, \qquad \mathbf{1}u - \mathbf{1}w \le 0.$$

Belátható, hogy $0 < \lambda < 1$, $\mathbf{1}u = \mathbf{1}w > 0$ és

$$\alpha = (1-\lambda)/2, \qquad x^* = u/\alpha, \qquad y^* = w/\alpha, \qquad v = \lambda/\alpha$$

jelöléssel adódik az eredeti játék nyeregpont-feltétele:

$$Uy^* \le v\mathbf{1} \qquad \text{és} \qquad x^*U \ge v\mathbf{1}.$$

∎

Most megmutatjuk, hogyan lehet visszavezetni a szimmetrikus játékok megoldását a *lineáris programozás*, rövidítve LP feladat megoldására. (Ez azért is érdekes, mert ekkor a Nash-egyensúly létezését a nagyon mély fixpont-tételek nélkül bizonyítjuk.)

Kitérő az LP feladatra

Tekintsük a következő *primál* LP feladatot: $x \ge 0$ a q-dimenziós termelési vektor, b az m-dimenziós erőforrás-vektor, c pedig a q-dimenziós nyereségvektor. Az $m \times q$-dimenziós U mátrix írja le, hogy x termelésvektornak Ux az erőforrás-igénye, s ez legfeljebb akkora lehet, mint az erőforrás kínálata. (E lineáris összefüggés miatt beszélünk lineáris programozásról.) A cél: cx össznyereség maximalizálása a fenti feltételek mellett.

Nagyon gyakran fölvetődik a primál feladat *duálisa*: Milyen m-dimenziós $y \ge 0$ árvektor méri helyesen az erőforrások értékét, azaz mennyivel nő az optimális össznyereség, ha az i-edik erőforrás mennyiségét egységnyivel növeljük? Átfogalmazva: mennyit kérhet a régi termelő egy új termelőtől az erőforrásaiért, hogy mindkettőnek megérje az üzlet? A régi termelő minden tevékenysége minden egységéért legalább a korábbi egységnyi nyereséget szeretné elérni: $yU \ge c$, az új termelő pedig minimalizálni akarja az yb erőforrás-költséget!

Táblázatos formában is felírjuk a primál–duál feladatot:

Primál	$x \ge 0$	Duál	$y \ge 0$
	$Ux \le b$		$yU \ge c$
	$cx \to \max.$		$yb \to \min.$

5.1. segédtétel. *Ha a primál és a duál LP feladatnak van megengedett megoldása: $x^* \ge 0$ és $y^* \ge 0$, akkor a primál feladat célfüggvény-értéke legfeljebb akkora, mint a duális feladaté:*

$$cx^* \le y^*b.$$

Bizonyítás. Szorozzuk be a primálfeladat feltételét balról y^*-nal, a duálfeladatét jobbról x^*-szel: $cx^* \le y^*Ux^* \le y^*b$. ∎

5.2. segédtétel. *Ha a primál és a duál LP feladatnak van olyan megengedett megoldása: $x^* \ge 0$ és $y^* \ge 0$, amelyre a két célfüggvény-érték azonos, akkor mindkét megoldás optimális.*

Megjegyzések. 1. A segédtétel rokon az 5.1. tétellel.

2. Belátható, hogyha a primálfeladatnak van optimális megoldása, akkor a duálfeladatnak szintén van.

Bizonyítás. Az 5.1. segédtétel egyenlőtlenségébe helyettesítsünk be egy tetszőleges x megengedett megoldást és a kitüntetett y^* megoldást és vegyük figyelembe az 5.2. segédtétel feltételét: $cx \le y^*b = cx^*$. Ebből látható, hogy x^* tényleg maximumot ad. Hasonlóan igazolható az állítás második fele. ∎

Alkalmazás

Szerkesszük meg a programozási feladat paramétereiből a következő antiszimmetrikus mátrixot:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & U & -b \\ -U^{\mathbf{T}} & 0 & c \\ b^{\mathbf{T}} & -c^{\mathbf{T}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

A P szimmetrikus mátrixjátéknak van szimmetrikus Nash-egyensúlya, ennek egyik összetevőjét jelölje $z = (r,s,\lambda)$. Kimondjuk a következő tételt:

5.6. tétel. *Ha a (5.7)-beli szimmetrikus P mátrixjáték értéke pozitív:* $\lambda > 0$, *akkor* $x = s/\lambda$ *a primál, és* $y = r/\lambda$ *a duál LP feladat optimális megoldása.*

Bizonyítás. Az (5.3) nyeregpont-feltétel egyik fele szerint $Pz \leq 0$. Elvégezve a behelyettesítéseket:

$$Ux \leq b, \qquad -U^{\mathbf{T}}y \leq -c, \qquad by - cx \leq 0.$$

A harmadik egyenlőtlenséget összevetve az 5.1. segédtétel $by \geq cx$ egyenlőtlenségével, azt kapjuk, hogy $by = cx$, s ez az 5.2. segédtétel és a hezzáfűzött 2. megjegyzés szerint az optimalitás szükséges és elégséges feltétele. ∎

5.4. feladat. Még egy megfordítás. Bizonyítsuk be az 5.6. tétel megfordítását: ha egy LP feladatnak van megoldása, akkor az (5.7)-ben hozzárendelt szimmetrikus P mátrixjátéknak van olyan szimmetrikus Nash-megoldása, amelynek az utolsó összetevője pozitív.

6. EVOLÚCIÓS JÁTÉKELMÉLET

Az evolúciós játékelmélet biológiai eredetű: kezdeményezői (pl. Maynard Smith, 1974) a játékelmélet eszközeivel próbálták meg modellezni a darwini kiválogatódást. Később a kulturális és gazdasági evolúcióra is kiterjesztették az elméletet. Általános tárgyalást ad Weibull (1995) és (Larry) Samuelson (1995).

Szimmmetrikus játékokról

Mivel az evolúciós játékok elmélete szimmetrikus játékokra épül, célszerű osztályozni a 2×2-es szimmetrikus játékokat. Eltekintve a kivételes esetektől, ahol két nyeremény azonos, lényegében három fajtával találkozunk. Induljunk ki az általános esetből:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

Vonjuk ki u_{21}-et az 1. oszlopból és u_{12}-t a 2.-ból, s ekkor *normalizálva* a játékot, az

$$U' = \begin{pmatrix} u_{11} - u_{21} & 0 \\ 0 & u_{22} - u_{12} \end{pmatrix}$$

ekvivalens mátrixot kapjuk. Új jelölést bevezetve,

$$U' = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Ha a síkban ábrázoljuk az (u_1,u_2) pontot, akkor az előjelpároknak megfelelően beszélhetünk NW (északnyugat), NE (északkelet), SW (délnyugat) és SE (délkelet) kategóriákról.

Az NW-játékoknál ($u_1 < 0 < u_2$) a 2. stratégia szigorúan dominálja az 1. stratégiát. Ide tartozik a fogolydilemma (1.1. példa): $u_1 = -5$ és $u_2 = 5$.

Az NE-játékoknál ($u_1,u_2 > 0$) két tiszta szigorú Nash-egyensúly van és egy kevert szimmetrikus egyensúly: $\xi_1 = u_2/(u_1 + u_2)$. Ide tartozik a koordinációs játék (1.3. feladat).

Az SW-játékoknál ($u_1,u_2 < 0$) nincs dominált stratégia, de mindkét tiszta stratégiára a másik a legjobb válasz. Tehát két aszimmetrikus tiszta Nash-egyensúly létezik és megint egy szimmetrikus kevert Nash-egyensúly: $\xi_1 = u_2/(u_1 + u_2)$. Ide tartozik a Gyáva nyúl és a 6.1. példában tárgyalandó Héja–Galamb játék.

Az SE-játékok az NW játékok tükörképei, csak a két stratégiát kell átjelölni.

Evolúciósan stabil stratégiák

Legyen m egy természetes szám, $m > 1$. Tekintsünk egy általános szimmetrikus $m \times m$-es mátrixjátékot: Új jelöléseket használva: $S = \{e_1, \dots ,e_m\}$ a tiszta stratégiák halmaza (elhagytuk az 1-es indexet és s_i helyett az m-dimenziós e_i egységvektorok jelölik a tiszta stratégiákat!), $u(e_i,e_j)$ valós szám az 1. játékos nyereménye az (e_i,e_j) stratégiapár esetén. Értelemszerűen a 2. játékos nyereményét az $u(e_j,e_i)$ függvény adja. Tekintsünk egy σ (véges-dimenziós) valószínűségeloszlást/kevert stratégiát az S halmazon, jelölje röviden $\sigma_i = \sigma(e_i)$ az e_i stratégia valószínűségét, és legyen $\Delta(S)$ a véges eloszlások/kevert stratégiák halmaza. Ekkor a nyereményfüggvény kiterjeszthető $(\Delta(S))^2$-re:

$$u(\sigma,\sigma') = \sum_i \sum_j u(e_i,e_j)\sigma_i\sigma'_j, \qquad \sigma,\sigma' \in \Delta(S).$$

Elérkeztünk az evolúciós játékelmélet központi fogalmához.

Definíció. Egy kétszemélyes szimmetrikus mátrixjátékban egy $\sigma^* \in \Delta(S)$ stratégiát *evolúciósan stabil*nak nevezünk (ESS=evolutionary stable strategy), ha bármely más (*mutáns*) $\sigma \in \Delta(S)$, $\sigma \neq \sigma^*$ stratégiát megfelelően kis mértékben hozzákeverve, az ES stratégia nyereménye a kevert környezetben nagyobb, mint a mutánsé. Képletben: van olyan $\bar{\varepsilon} > 0$ valós szám, hogy tetszőleges $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ esetén

$$u(\sigma^*,\varepsilon\sigma + (1 - \varepsilon)\sigma^*) > u(\sigma,\varepsilon\sigma + (1 - \varepsilon)\sigma^*).$$

Itt csak röviden említjük meg, hogy a meghatározás mögött az az elképzelés húzódik meg, hogy egy nagyszámú népességben a játékosok σ_i hányada játszik e_i stratégiát, és két játékos független valószínűséggel találkozik, továbbá nincs különbség, hogy melyik az 1. és melyik a 2. játékos.

6.1. példa. Héják és Galambok (vö. 1.2. feladat). Egy adott fajon belüli találkozáskor kétfajta stratégia játszható: a harcias (Héja) és a szelíd (Galamb). Találkozáskor a részvevők nem tudják, milyen stratégiát választ a másik. Ha két egyed találkozik, akkor nyereségük a stratégia-együttestől a következőképpen függ:

6.1. táblázat. *Héják és Galambok*

1. játékos	2. játékos	Héja	Galamb
Héja		(–25, –25)	(50, 0)
Galamb		(0, 50)	(15, 15)

Tegyük föl, hogy a héják aránya a népességben $\xi > 0$, a galamboké $1 - \xi > 0$. Kérdés: melyik állapotban *stabil evolúciósan* a népesség, azaz milyen kezdeti népességarányt lehet egy kicsit kitéríteni úgy, hogy az arány visszatérjen?

A Héja várható nyeresége $u_{\mathrm{H}} = -25\xi + 50(1 - \xi) = 50 - 75\xi$.

A Galamb várható nyeresége $u_{\mathrm{G}} = 0 + 15(1 - \xi) = 15 - 15\xi$.

Egyensúlyban a két nyereség egyenlő (lásd a 3.3. tételhez fűzött 2. megjegyzést): $u_{\mathrm{H}} = u_{\mathrm{G}}$: $\xi^* = 7/12$.

Ha $\xi < \xi^*$, akkor $u_{\mathrm{H}} > u_{\mathrm{G}}$, tehát a Héják jobban szaporodnak, mint a Galambok; ha $\xi > \xi^*$, akkor $u_{\mathrm{H}} < u_{\mathrm{G}}$, tehát a Héják rosszabbul szaporodnak, mint a Galambok. Tehát a $(\xi^*, 1 - \xi^*)$ pár az evolúciósan stabil egyensúly. ∎

Megjegyzés. Aszimmetrikus játékokat is kellene vizsgálni, hiszen egyes gazdasági alkalmazásoknál nem mindegy, hogy például valaki eladó vagy vevő. Ennek ellenére mi a szimmetrikus játékokra szorítkozunk ebben a pontban.

Érdemes megemlíteni egy ekvivalens meghatározást.

Definíció. Egy $\sigma^* \in \Delta(S)$ stratégiát *evolúciósan stabil*nak nevezünk, ha bármely más (*mutáns*) $\sigma \in \Delta(S)$, $\sigma \neq \sigma^*$ stratégiával összevetve, az ESS–ESS találkozás nyereménye a) vagy nagyobb, mint ha a mutánssal találkozna, b) vagy ha egyenlő, akkor az ESS–mutáns találkozó haszna nagyobb, mint ha a mutáns önmagával játszana. Képletben:

(a) $$u(\sigma^*,\sigma^*) \geq u(\sigma,\sigma^*);$$

(b) $$\text{ha} \quad u(\sigma^*,\sigma^*) = u(\sigma,\sigma^*), \quad \text{akkor} \quad u(\sigma^*,\sigma) > u(\sigma,\sigma).$$

Megjegyzés. A második definíciónak az az előnye, hogy világossá teszi, hogy az ESS a) a Nash-egyensúly és b) egy stabilitási követelmény kombinációja.

6.1. tétel. *Ha σ^* ES stratégia, akkor a (σ^*,σ^*) pár Nash-egyensúlyt alkot, amely izolált a szimmetrikus Nash-egyensúlyok halmazában. Ha (σ^*,σ^*) szigorú Nash-egyensúly, akkor σ^* ES stratégia.*

Az első állítást – az izoláltság nélkül – már a második definíció taglalásánál láttuk. A második állítás szintén a második definícióból következik, a második eset ugyanis a szigorúság miatt elesik.

Azt tudjuk, hogy Nash-egyensúly általános feltételek mellett létezik. Mi a helyzet az ESS létezésével? Kezdjük a következő megállapítással.

6.2. tétel. *Egy 2×2-es szimmetrikus mátrixjátékban tegyük fel, hogy $u(e_1,e_1) \neq u(e_2,e_1)$ és $u(e_1,e_2) \neq u(e_2,e_2)$. Ekkor a játéknak van ES stratégiája.*

Baj van azonban már a 3×3-as játékoknál.

6.2. példa. Amikor nem létezik ESS:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egyetlen Nash-egyensúly van: $\sigma^* = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$. Kiszámolható, hogy minden stratégia legjobb válasz σ^*-ra. Az e_1 stratégiára teljesül $u(e_1,e_1) = u(\sigma^*,e_1)$, tehát (b) értelmében σ^* nem ESS. (Igaz, itt gond van a Nash-egyensúllyal is, hiszen nem szigorú!) ∎

Dinamika

Most az evolúciós játékok dinamikáját fogjuk vizsgálni. Nagyon hasznos a *replikátor dinamika* fogalma: Legyen $N_i(t)$ az e_i tiszta stratégiát játszó játékosok száma a t időpont(szak)ban, és $N(t)$ az összes játékos száma. Ekkor az e_i tiszta stratégiát játszó játékosok aránya a t időpont(szak)ban $x_i(t) = N_i(t)/N(t)$ és $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ az arányok vektora. Diszkrét idejű dinamika esetében logikus a következő feltételezés: minden időszakban csak egy nemzedék él. Az i-edik típus utódainak száma az x állapotban a típus $x_i(t)$ létszámával és az $u(i,x) > 0$ nyereménnyel arányos. Legyen az átlag nyeremény $\bar{u}(x) = \sum_i x_i u(i,x)$. Ekkor a dinamika differenciaegyenlete a következő:

$$x_i(t+1) = x_i(t)\frac{u(i,x(t))}{\bar{u}(x(t))}, \qquad i = 1\ ,\dots,\ n.$$

(Egyszerű számolással adódik, hogy $\sum_i x_i(t+1) = \sum_i x_i(t) = 1$.) A változást hangsúlyozza a következő alak:

$$x_i(t+1) - x_i(t) = x_i(t)\frac{u(i,x(t)) - \bar{u}(x(t))}{\bar{u}(x(t))}, \qquad i = 1\ ,\dots,\ n.$$

Ebből határátmenetben adódik a folytonos idejű változat:

$$\dot{x}_i = x_i\frac{u(i,x) - \bar{u}(x)}{\bar{u}(x)}, \qquad i = 1\ ,\dots,\ n.$$

Megváltoztatva az időskálát, egyszerűsíthető a differenciálegyenlet-rendszerünk:

$$\dot{x}_i = x_i(u(i,x) - \bar{u}(x)).$$

Mi lesz az egyensúly? A rövidség kedvéért az utolsó egyenletrendszerre szorítkozunk. A differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy megfelelő technikai feltevések esetén (amelyek most teljesülnek), adott x_0 kezdeti feltétel mellett egyetlen egy megoldás létezik.

Definíciók. 1. Az $x^* \in X$ állapotot az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet *stacionárius állapotá*nak nevezzük, ha $f(x^*) = 0$.

2. Az $x^* \in X$ stacionárius állapotot *(Ljapunov) stabil*nak nevezzük, ha tetszőleges $V \subset \mathbf{R}^n$ környezetéhez található olyan $U \subset V$ környezet, hogy amennyiben $x_0 \in U$, akkor $x(t) \in V$ minden pozitív t-re.

3. Az $x^* \in X$ stabil stacionárius állapotot *aszimptotikusan stabil*nak nevezzük, ha van olyan W környezete, hogy amennyiben $x_0 \in W$, akkor $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Megjegyzés. A stacionárius pontot szokás még nyugvópontnak, fixpontnak, egyensúlyi helyzetnek nevezni.

Nyilvánvaló a

6.3. tétel. *Ha (x^*,x^*) a G játéknak egy Nash-egyensúlya, akkor x^* a replikátor dinamika stacionárius állapota.*

Megjegyzés. Belátható, hogy a fordított állítás általában nem igaz. Például ha $x_{i,0} = 1$ valamilyen i-re, akkor $x_{i,t} \equiv 1$, (az i-nél jobb stratégiákat senki sem játssza) tehát $x = e_i$ stacionárius állapot, holott általában nem része semmilyen Nash-egyensúlynak.

Bizonyítás. A Nash-egyensúly definíciójából következik, hogy vagy $x_i^* = 0$ vagy $x_i^* > 0$ és $u(i,x^*) = \max_j u(j,x^*)$ (3.3. tétel), tehát $u(i,x^*) - \bar{u}(x^*) = 0$. ∎

Érdemes megvizsgálni a stabil állapot és a Nash-egyensúly kapcsolatát, hiszen itt bekerülhetnek a korábban kizárt stratégiák.

6.4. tétel. *Ha x^* a replikátor dinamika stabil állapota, akkor (x^*,x^*) a G játéknak egy Nash-egyensúlya.*

Megjegyzés. Belátható, hogy a fordított állítás általában nem igaz, amint azt a következő feladat mutatja.

6.1. feladat. Instabil Nash-egyensúly. Bizonyítsuk be, hogy a koordinációs játék (1.3. feladat) következő alakjának van olyan Nash-egyensúlya, amely a replikátor dinamikának nem stabil állapota:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. Igaz, az ellenpéldában szereplő Nash-egyensúly nem eléggé „robusztus”, de ismert olyan példa is instabil Nash-egyensúlyra, amely robusztus.

Mégis igaz a

6.5. tétel. *Ha x^* a replikátor dinamika aszimptotikusan stabil állapota, akkor (x^*,x^*) a G játéknak egy remegő-kéz tökéletes és izolált Nash-egyensúlya.*

Megjegyzés. A megfordítás ismét nem igaz, de létezik valamilyen kapcsolat az ESS és az aszimptotikus stabilitás között.

6.6. tétel. *a) Minden ES stratégia aszimptotikusan stabil. b) Bármely* 2×2*-es játékban a fordított állítás is igaz: minden aszimptotikusan stabil állapot ES stratégia.*

Következzen egy újabb példa.

6.3. példa. Egy 3×3-as szimmetrikus játék, amikor egy aszimptotikusan stabil állapot nem ESS.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egyetlen szimmetrikus Nash-egyensúly van: $\sigma^* = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$, amely tökéletes, izolált és aszimptotikusan stabil. Belátható azonban, hogy nem ESS, hiszen $u^* = 2/3$ és $\sigma = (0,\ 1/2,\ 1/2)$ esetén $u(\sigma,\sigma^*) = 2/3$, de $u(\sigma,\sigma) = 5/4 > u(\sigma^*,\sigma) = 7/6$. ∎

7. BAYESI JÁTÉKOK

A következő vicc szolgáljon szemléltetésül. Kovácsot elmegyógyintézetbe zárják, mert azt hiszi, hogy egér, s fél a macskáktól. Meggyógyítják, majd kieresztik a kórházból. A kórház kapujában váratlanul találkozik egy macskával és földbe gyökerezik a lába. A kísérő orvos rárivall: „De hiszen tudja, hogy maga nem egér!" Mire Kovács azt válaszolja: „Én tudom, de vajon a macska tudja-e?"

Komolyra fordítva a szót: olyan helyzetet vizsgálunk, ahol egyes játékosok nem ismerik más játékosok hasznosságfüggvényét vagy stratégiahalmazát. Először az általános modellt ismertetjük, majd egy közgazdasági alkalmazást mutatunk be.

A keret

Harsányi (1967/68) alkotta meg a hiányos információs játékok modelljét az ún. bayesi egyensúly alapján. Tegyük föl, hogy az i-edik játékos típusát egy $t_i \in \mathbf{R}^{m_i}$ vektor jellemzi. Mindenki számára ismert a jellemzők – itt az egyszerűség kedvéért véges – együttes eloszlása, és minden játékos ismeri saját típusát. Tehát az i-edik játékos a saját típusára vonatkozó peremeloszlás szerint számol, amikor olyan s_i stratégiát választ (ez most már lehet kevert stratégia is), amely Nash-értelemben maximalizálja nyeresége feltételes várható értékét:

$$\sum p(t_{-i}|t_i) u_i(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(\langle t_{-i}\rangle)) \geq \sum p(t_{-i}|t_i) u_i(s_i(t_i), s_{-i}^*(\langle t_{-i}\rangle)), \quad i = 1, \dots, n,$$

$s(\langle x\rangle)$ egy olyan vektor-vektor függvényt jelöl, ahol a k-adik függő vektor csak a k-adik független vektortól függ.

A 3.1–3.2. tétel alapján belátható a

7.1. tétel. *Ha minden játékos típusának eloszlása véges, és minden rögzített típusra teljesülnek a 3.1. vagy a 3.2. tétel feltételei, akkor a bayesi Nash-egyensúly létezik.*

Megjegyzések. 1. Végtelen eloszlás esetén is megfogalmazható a feladat, de akkor mértékelméleti eszközökre van szükség.

2. A 3.3. tételhez hasonlóan a tiszta stratégiákra épülő bayesi Nash-egyensúlyban minden játékosnak a legjobb választ kell adnia ellenfelei bármelyik típuskombinációjára, amelyekkel pozitív valószínűséggel találkozhat.

Példát hozunk bayesi egyensúlyra.

7.1. példa. Az 1. típusa ismert, a 2.-é 1/2–1/2 valószínűséggel lehet t_2 és t_2'. 1. léphet föl (Up) és le (Down), 2. léphet balra (Left) vagy jobbra (Right). A kifizetési mátrix most a következő:

7.1. táblázat. *Bayes-i stratégiák*

	Típus	t_2		t_2'	
	2. játékos	L	R	L	R
1. játékos					
	U	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
	D	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Vegyük észre, hogy 1. nyereménye csupán attól függ, hogy mit választ (ő és) 2., de független 2. típusától. Mindkét típusú 2.-nek van domináns stratégiája: a t_2 típus L-et választja, a t_2' típus R-et. Ezért a helyzet olyan, mintha 1. ellenfele egyforma valószínűséggel játszaná L-et és R-et. Ezért 1. nyeresége U esetén (3+2)/2=2,5; D esetén (0+4)/2=2, azaz $s_1^* = U$. ∎

A bayesi megoldás tetszetős, de korántsem problémátlan: Ugyanis minden stratégia-együtteshez található olyan hitrendszer, amely mellett a stratégia-együttes Nash-egyensúly.

Most visszatérünk a 4. pontbeli duopóliumhoz.

7.1. feladat. Bayesi duopólium. Tegyük föl, hogy két vállalat egy piacon duopóliumot alkot. Ha a két vállalat kibocsátása q_1 és q_2, akkor a piaci kereslet-ár függvény $p(q_1 + q_2) = 1 - q_1 - q_2$. Mindkettő egységköltsége (c), egymástól független véletlen változó: 1/2–1/2 valószínűséggel $\underline{c}$, $\bar{c}$. Mindkét vállalat ismeri a saját költségét, de a másik vállalat költségének csak az eloszlását ismeri.

a) Mi a profitmaximalizáló vállalatok bayesi Nash-egyensúlya?

b) Milyen matematikai feltételeknek kell teljesülniük, hogy az eredmény közgazdaságilag értelmes legyen?

Az árverés bayesi modelljei

Az árveréseket először Vickrey (1961) modellezte, mintegy megelőlegezve Harsányi bayes-i egyensúlyi fogalmát. Ismertetésünk forrása Tirole (1988, 11. fejezet) és Szatmári (1996). Egy értékes tárgyat (kép, olajmező, stb.) n számú licitáló (játékos) akar megszerezni az eladótól. Egyedisége miatt is a tárgy valódi értékét jobban ismerik a licitálók, mint az eladó, ezért célszerű árverésen értékesíteni a tárgyat. Itt mindenki egy ajánlatot tehet – *lepecsételt borítékban.* (Másképp vizsgálandó a jólismert angol árverés, ahol egy kikáltó vezeti az árverést – ez már a II. részbe tartozó dinamikus játék.) Tegyük föl, hogy az i-edik licitáló v_i-re (valós számra) *értékeli* a tárgyat, és ennek függvényében b_i (valós szám) ajánlatot nyújt be, $i = 1, 2, \ldots, n$. A határidő lejárta után az eladó kinyitja a borítékokat, és annak adja el a tárgyat, aki a legjobb ajánlatot tette és az ajánlat a vételi ár. (Mindjárt látni fogjuk, hogy nem ez az egyetlen lehetőség, és nem is ez a legjobb választás.) Kérdés: hogyan célszerű az ajánlatokat tenni, hogy utólag ne bánják meg a licitálók ajánlatukat? Feltesszük, hogy az értékelések valószínűségi értelemben függetlenek egymástól, valamint a haszon az értékelés és az ajánlat különbsége: $u_i = v_i - b_i$.

Ha a játékosok ismernék egymás értékeléseit, akkor az volna a célszerű, ha a legtöbbre értékelő licitáló (mondjuk az 1.) a második legtöbbre értékelő licitáló (mondjuk a 2.) értékelésénél egy egészen kicsivel (0) nagyobb ajánlatot tesz: $b_1 = v_2 + 0$. Valóban, ekkor az 1. licitáló nyeresége $u_1 = v_1 - v_2 > 0$, s a többié nulla.

7.2. feladat. (Vickrey, 1961.) Lássuk be, hogyha a közismert szabályt módosítjuk, és a legjobb ajánlatot tevő játékosnak a második legjobb ajánlatot kell kifizetnie, akkor az igazmondás a nyerő stratégia még akkor is, ha a játékosok nem ismerik egymás értékeléseit!

Viszont itt éppen az a probléma, hogy a licitálók nem ismerik egymás értékeléseit, és a győztesnek az ajánlatát kell kifizetnie. Ha most mindenki őszinte, akkor a győztes megátkozza magát, hogy túl sokat fizetett a tárgyért. Ezért engedjük meg, hogy bárki visszafogja magát, és saját értékelésénél kevesebbet ajánljon. Harsányi megoldását követve tegyük föl, hogy adott az értékelések n-vektorának egy együttes folytonos valószínűség-eloszlása, s ezt minden licitáló ismeri, sőt azt is tudja, hogy a másik tudja, stb. Ekkor az i-edik licitáló várható nyeresége $u_i(b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n) = P(b_i > b_j,\ j \neq i)(v_i - b_i)$, ahol $P(b_i > b_j,\ j \neq i)$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az i-edik ajánlat a legnagyobb. Vegyük észre, hogy minden licitáló várható nyeresége függ az összes többi licitáló ajánlatától is, ez a játék. Ugyanakkor a bayesi várható nyereségek már teljes információn alapulnak, ahol a hagyományos Nash-egyensúly alkalmazható. Eszerint az egyensúlyi ajánlatok (b_i^*, b_{-i}^*) vektora olyan, hogy ha az i-edik licitáló egyoldalúan eltérne tőle, akkor rosszul járna:

$$u_i(b_i^*, b_{-i}^*) > u_i(b_i, b_{-i}^*), \qquad b_i \neq b_i^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy az egyes értékelések egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0, 1]$ intervallumon. A szimmetria miatt tegyük föl, hogy mindegyik licitáló viselkedését azonos $b = B(v)$ értékelés-ajánlat függvény írja le. Mivel $B(v)$ növekvő függvény, van inverze: $v = V(b)$. Ekkor kiszámolható, hogy $P(b_i > b_j,\ j \neq i) = v_i^{n-1} = V(b_i)^{n-1}$, azaz, $u_i(b_i, b_{-i}) = V(b_i)^{n-1}(v_i - b_i)$. Elhagyva az indexet, ekkor $u(b) = V(b)^{n-1}(v - b)$, amelyet b szerint deriválva adódik a maximumfeltétel:

$$u'(b) = (n-1)V(b)^{n-2}V'(b)(v - b) - V(b)^{n-1} = 0.$$

Végül $v = V(b)$-t behelyettesítve a maximumfeltételbe $(n-1)V'(b)[V(b) - b] = V(b)$ adódik. A differenciálegyenletet megoldva megkapjuk az egyensúlyi függvényt: $V(b) = bn/(n-1)$. Visszatérve az eredeti függvényhez: $b = B(v) = v(n-1)/n$, azaz $b_i = v_i(n-1)/n$.

Összegezve:

7.2. tétel. *Tegyük föl, hogy az egyes értékelések egymástól teljesen független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a* $[0, 1]$ *intervallumon. Ekkor* n *licitáló esetén a bayesi Nash-egyensúlyban az egyéni ajánlatok az egyéni értékelések* $(n-1)/n$*-szeresei.*

Megjegyzés. Természetesen minden ajánlat kisebb, mint a megfelelő értékelés, de a részvevők számának növelésével az egyes ajánlatok gyorsan tartanak az igazi értékelésekhez.

7.3. feladat. Két vevő ($i = 1, 2$) licitál egy tárgyra zárt borítékos módszerrel. A tárgy értékelése v_i, a licit b_i. Az nyer, aki többet ajánl. Határozzuk meg a bayesi Nash egyensúlyi értékelés-ajánlat függvényt, ha az értékelések eloszlása egymástól független és azonos: $F(v) = v^\alpha$, $\alpha > 0$.

II. RÉSZ. DINAMIKUS NEMKOOPERATÍV JÁTÉKOK

Eddig eltekintettünk attól a körülménytől, hogy a játékosok általában nem egyszerre lépnek, és egy játékos későbbi lépése függhet egy másik játékos korábbi és megfigyelt lépésétől. A dinamikus nemkooperatív játékoknál fel kell tüntetni a lépések sorrendjét. A 8. pontban az ún. extenzív alakot ismertetjük. A 9. pontban az ismételt játékokat elemezzük. A 10. pont a bayesi elképzelések dinamikus racionalitását körvonalazza. A 11. pontban a játékelmélet és a lélektan kapcsolatát vázoljuk.

8. JÁTÉKOK EXTENZÍV ALAKJA

A dinamikus nemkooperatív játékoknál fel kell tüntetni a lépések sorrendjét. Főleg tökéletes információjú játékokat tanulmányozunk, ahol minden játékos minden lépésben megfigyeli az összes addigi lépést (és emlékszik is rájuk) (Kuhn, 1953 és modern tankönyvi feldolgozás: Mas-Colell et al., 1995, 9. fejezet).

Extenzív alak

Az ún. *extenzív alak* teljes leírása nagyon bonyolult. Először megelégszünk egy intuitív leírással.

Tegyük föl, hogy a játékot a gráfelméletből ismert véges irányított *fa* írja le. A fának van egy gyökere (ahol a játék kezdődik), és minden pontjához a gyökérből pontosan egy úton lehet eljutni. A gráf minden pontján meg van határozva, hogy melyik játékos lép és milyen lépéseket tehet. A fa minden végpontján egy n-elemű vektor megszabja, hogy az egyes játékosok mennyit nyertek. (Ha a fa végtelen lenne, akkor nem biztos, hogy lennének végpontjai.)

Most már megpróbálkozunk a pontos meghatározással.

Definíció. (Mas-Colell et al., 1995, 227. o.)

(i) Adott a *csomópontok* véges halmaza: $\mathcal{X}$, a *lehetséges döntések véges halmaza*: $\mathcal{A}$, és a *játékosok halmaza*: $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

(ii) Az x_0 *gyöker*et leszámítva minden x csomópontnak egyetlen egy *előd*je van: $p(x)$ és nulla, egy vagy több (közvetlen) *utód*ja: $s(x)$. Az utód nélküli pontok a *végpontok*, halmazuk: T, a többiek a *döntési pontok*.

(iii) Egy $\alpha : \mathcal{X} \setminus \{x_0\} \to \mathcal{A}$ *döntési függvény* minden, a gyökértől különböző ponthoz egy döntést rendel úgy, hogy ha egy pontnak legalább két különböző utódja van, akkor a hozzájuk tartozó döntések is különbözők. Minden csomópontban adott a lehetséges döntések halmaza: $c(x) = \{a \in \mathcal{A} : \ a = \alpha(x'), \ x' \in s(x)\}$.

(iv) Adva van az *információs halmazok együttese*: $\mathcal{H}$, és egy $H(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$ függvény, amely minden x döntési ponthoz egy $H(x) \in \mathcal{H}$ információs halmazt rendel. Megköveteljük, hogy azonos információs halmazhoz tartozó döntési pontokon ugyanazokat a döntéseket hozhassák a játékosok. Ezért a H információs halmazon elérhető választások halmaza $C(H) = \{a \in \mathcal{A} : a \in c(x) \text{ alkalmas } x \in H\text{–ra}\}$.

(v) Egy $\iota : \mathcal{H} \to \{0, 1, 2, \dots, n\}$ függvény minden információs halmazhoz hozzárendeli azt a játékost (vagy a Természetet, 0 indexszel), aki azon a döntési ponton lép. Az i-edik játékos információs halmaza $\mathcal{H}_i = \{H \in \mathcal{H} : i = \iota(H)\}$.

(vi) Egy $\rho : \mathcal{H}_0 \times \mathcal{A} \to [0,1]$ függvény valószínűségeket rendel azokhoz az információs halmazokhoz, ahol a Természet dönt, és kielégíti a következő feltételeket: $\rho(H,a) = 0$, ha $a \notin C(H)$ és $\sum_{a \in C(H)} \rho(H,a) = 1$, ha $H \in \mathcal{H}_0$.

(vii) A hasznosságfüggvények $u = (u_1, \ldots, u_n)$ együttese minden elérhető végponthoz n hasznosságot rendel: $u_i : T \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

8.1. példa. Egyidejű forintpárosítás. Az 1.3. példában leírt forintpárosítási játékban az volt a különlegesség, hogy döntéshozatalkor egyik játékos sem tudta, hogy mit tett a másik. Ennek a játéknak a döntésfáját mutatja a 8.1. ábra, feltéve, hogy az 1. játékos lép először, és a 2. játékos másodszor, de a 2. játékos nem látja, mit lépett az 1. játékos. Az x_2 és az x_3 pont egy információs halmazban fekszik, ezért egy kerek sarkú téglalap tartalmazza őket a 8.1. ábrán. ∎

(8.1. ábra)

Módosítjuk e játékot.

8.2. példa. Egymás utáni forintpárosítás. Tegyük föl, hogy az 1. játékos lép először, és a 2. játékos másodszor, és a 2. játékos látja, mit lépett az 1. játékos. Ekkor egyszerűbb a játék és a fája is. Az x_2 és az x_3 pont *nem* egy információs halmazban fekszik, ezért hiányzik a 8.1. ábráról ismert, tartalmazó kerek sarkú téglalap. ∎

(8.2. ábra)

E két példa sugallja a következő meghatározást.

Definíció. Egy extenzív alakban adott játékot *tökéletes (vagy perfekt) információjúnak* nevezünk, ha minden információs halmaz egyetlen egy döntési pontot tartalmaz, azaz a játékosok mindig tudják, hogy előzőleg mi történt. (Az egyidejű forintpárosítás nem ilyen játék, az egymás utáni ilyen.)

Világos, hogy a játékfán a végpontoktól a kezdőpontig visszafelé haladva, ha lépésenként optimalizálunk, akkor a stratégiákat is optimalizáljuk: *megfordított irányú indukció*. Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt.

8.1. tétel. *(Kuhn, 1953.) Minden tökéletes információjú véges játéknak van tiszta stratégiájú Nash-egyensúlya, amely a megfordított irányú indukcióval is meghatározható. Ha semelyik játékosnak sincs ugyanakkora haszna semelyik két végpontban, akkor egyetlen egy Nash-egyensúly létezik.*

Megjegyzés. Hagyományosan Zermelo (1913) cikkét tekintik az első játékelméleti cikknek. Nemrég derült csak ki, hogy mennyire fontos szerepet játszott az elmélet továbbfejlesztésében Kőnig és Kalmár 1928 körül írt német nyelvű cikkei (vö. Schwalbe–Walker, 2001).

Intellektuálisan az egyik legizgalmasabb játék a sakk.

8.3. példa. Sakk. A sakkban két játékos (a világos és a sötét) játszik egymás ellen. Meghatározott szabályok szerint léphetnek felváltva, s az győz, aki a másiknak mattot ad. Döntetlen a játék, ha vagy az egyik fél nem tud lépni, pedig a királya nincs sakkban; vagy egy helyzet háromszor megismétlődik. Tökéletes információjú véges játékról van szó, de olyan bonyolultról, hogy „eddig még” senki sem tudta meghatározni a győztes stratégiát. ∎

Kevésbé intellektuálisak és nagymértékben szerencsétől függnek a kártyajátékok.

8.4. példa. Kanaszta. Francia kártyával játssza két vagy három személy. Egyszer is lehet játszani, de igazán az ismétlés az érdekes (lásd 9.4. példa később). A lapokat csak bizonyos sorozatokba (pl. legalább 3 db király) rendezve lehet lerakni, de csak akkor, ha az először lerakott lapok pontértéke elér egy küszöböt. Aztán még ki lehet egészíteni a csomagokat. A(z alap)játék akkor ér véget, ha valaki lerakja az összes lapját. A kézben maradó lapok pontértékét levonják. Nem tökéletes információjú játék, mert a játékosok nem ismerik egymás kézben lévő lapjait. ∎

Részjáték-tökéletes Nash-egyensúly

Térjünk vissza a bevezető példák közt említett 1.4. példára (a ragadozó viselkedésről). Mint már említettük, ebben a példában szerepel egy hiteltelen fenyegetést tartalmazó Nash-egyensúly. A továbbiakban ezt akarjuk kiküszöbölni – megköveteljük a *szekvenciális racionalitás elvé*nek teljesülését: minden játékos stratégiája a játékfa minden pontjában optimális (Selten, 1975). Például a bentlevő vállalat „harcolni, ha a kintlevő vállalat belép” stratégiája nem ilyen, hiszen ekkor a nyereség –1, egyébként pedig 1 lenne.

Szabatos meghatározást ad a következő

Definíció. Egy extenzív alakú játék *részjátéka* az eredeti játéknak egy olyan része, amely

(i) egy olyan információs halmazban kezdődik, amely egy csomópontból áll, és tartalmazza e csomópont összes közvetlen és közvetett utódját, és más csomópontot nem tartalmaz;

(ii) ha az x döntési pont része a részjátéknak, akkor a $H(x)$ információs halmaz bármely x' pontja is része (azaz nincsenek törött információs halmazok).

Például a ragadozó játékban két részjáték van: az eredeti játék és a bentlévő vállalat egyszemélyes végjátéka.

A következőkben kizárjuk azokat a Nash-egyensúlyokat, amelyek a részjátékra megszorítva nem Nash-egyensúlyok. Ezt fejezi ki a következő

Definíció. Egy $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ stratégia-együttes egy extenzív alakú játéknak a *részjáték-tökéletes Nash-egyensúly*a, ha az adott játék bármely részjátékára megszorítva Nash-egyensúlyt képez.

8.5. példa. (Az 1.4. példa folytatása.) A ragadozó játékban talált két Nash-egyensúly közül a második részjáték-tökéletes, az első nem. ∎

Figyelemre méltó, hogy a tökéletes információjú véges játékoknál a részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyok halmaza azonos a fordított irányú indukcióval kapott Nash-egyensúlyok halmazával. Ezért igaz a

8.2. tétel. *Minden tökéletes információjú véges játéknak van tiszta stratégiájú részjáték-tökéletes Nash-egyensúlya. Ha semelyik játékosnak sincs ugyanakkora haszna semelyik két végpontban, akkor egyetlen egy részjáték-tökéletes Nash-egyensúly létezik.*

Megjegyzés*. Nem tökéletes információjú véges játékoknál is alkalmazható a fordított irányú indukció – igaz, általánosítva – a részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyok megkeresésére. A lépések a következők:

1. Indulj el a játékfa végéről, és határozd meg a Nash-egyensúlyokat a *végső részjátékok*ra (amelyeknek nincs valódi részjátéka).

2. Válassz ki egy Nash-egyensúlyt minden végső részjátékból és alkosd meg azt a redukált extenzív alakú játékot, ahol a szóban forgó részjátékok helyére azokat a hasznokat írjuk, amelyeket az egyensúlyi stratégiák adnak ezen részjátékokban.

3. Ismételd meg az 1. és 2. lépéseket a redukált játékra, egészen addig, ameddig a játék minden lépése meghatározódik.

A következő példa jól szemlélteti az „én azt gondolom, hogy ő azt gondolja, stb.” gondolatláncot.

8.6. példa. (vö. Osborne–Rubinstein, 1994, 71. o.) Hűtlen asszonyok. Egy faluban vannak hűtlen asszonyok. Minden férfi tudja minden nőről/feleségről, hogy az illető hűséges-e vagy sem, kivéve a saját feleségét. Egy nap a bíró kidobolja, hogy a faluban vannak hűtlen asszonyok, akiket a férjeknek el kell űzniük a faluból, anélkül hogy más férfiaktól érdeklődnének saját feleségükről. A bíró azt is bejelenti, hogy amíg a parancsát nem teljesítik, minden nap kidobolja a hírt. Hét nap után a hűtlen asszonyokat kiűzték a faluból. Mi történt?

Ha n hűtlen asszony van, számozzuk őket is, férjüket is 1-től n-ig. A k-adik férj eleve tudta, hogy az $1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ sorszámú feleség hűtlen; és hogy az n-nél nagyobb sorszámú asszonyok hűségesek, de nem tudta, hogy a saját felesége hűséges-e. A többi az (n-nél nagyobb sorszámú) férj tudta, hogy az 1, $\ldots$, n sorszámú feleség hűtlen, a többi nem, s a sajátját illetően bizonytalan volt.

Ha csak egy hűtlen asszony van, azaz $n = 1$, akkor a hírből a megcsalt férj azonnal rájön, hogy a felesége a hűtlen, tehát aznap elzavarja a feleségét, és másnap már a bíró a rendről számol be.

Ha két hűtlen asszony van, mondjuk 1. és 2., akkor az 1. férj eleve csak azt tudta, hogy a 2. feleség hűtlen, a többi nem, a 2. férj csak azt tudta, hogy az 1. feleség hűtlen, a többi nem, de saját feleségéről egyik sem tudott semmit sem. Várnak egy napot – azzal a feltételezéssel, hogy csak egy hűtlen asszony van – ekkor azonban az előző pont szerint már az első nap után elűzi a másik férj a feleségét. Mivel ez nem történt meg, a 2. napon mindketten elűzték feleségüket.

És így tovább n hűtlen asszonyig, amikoris a megcsalt férjek kezdetben nem tudják, hogy $n-1$ vagy n hűtlen asszony van. Indukciós feltevésként azt teszik föl, hogy $n-1$ hűtlen asszony van. Várnak $n-1$ napig. Ha a feleségük hűséges lenne, akkor a többi $n-1$ megcsalt férj rájönne, hogy mi a helyzet. Mivel nem jönnek rá, a bizonytalan férjek is megbizonyodnak, hogy őket is megcsalták, tehát a következő nap már elzavarják a feleségüket. ∎

Stackelberg-duopólium

A 4. pontban már foglalkoztunk a Cournot-féle duopóliummal, amelyben a két játékos egyszerre lép. Most dinamizáljuk a játékot és feltételezzük, hogy az egyik vállalat előbb lép, mint a másik.

*Stackelberg-duopólium*nál a két vállalat szerepe nem szimmetrikus, pl. az 1. vállalat a Vezető, a 2. vállalat pedig a Követő. A Vezető ismeri a Követő stratégiáját, s így választja meg saját kibocsátását. Pontosabban: Először 2. meghatározza saját, paraméteres $q_2(q_1)$ optimumát a (4.1) feltételből. Ezt ismeri 1. is, s ennek nyomán meghatározza saját – nem paraméteres – optimumát (4.1) módosításából:

$$\pi_{1,q_1}(q_1^{\mathrm{S}}, q_2(q_1^{\mathrm{S}})) = 0. \tag{8.1}$$

Végül 2. kiszámíthatja tényleges döntését:

$$q_2 = q_2(q_1^{\mathrm{S}}). \tag{8.2}$$

8.3. tétel. *(Stackelberg, 1934). a) Megfelelő technikai feltételek mellett a Stackelberg-duopólium egyensúlyi megoldása is létezik.*

b) Stackelberg-duopolár nagyobb, mint a versenyár; és kisebb, mint a monopolár, tehát a megfelelő duopol-kibocsátás kisebb, mint a verseny-kibocsátás; és nagyobb, mint a monopol-kibocsátás.

Megjegyzés. A Stackelberg-modellben kívülről kell megállapítani, hogy ki a Vezető, és ki a Követő. Ha mindkét vállalat azt feltételezi, hogy a másik vállalat a Vezető, akkor visszajutunk a Cournot-modellhez. Ha mindkét vállalat azt feltételezi, hogy a másik vállalat a Követő, akkor a tökéletes versenyre jellemző helyzet következik be.

8.1. feladat. Lineáris keresleti függvény és különböző lineáris költségfüggvényű két vállalat esetén határozzuk meg a Stackelberg-egyensúlyt!

Két türelmetlen alkudozó

A tökéletes információjú véges játékok szemléltetésére bemutatjuk a két türelmetlen alkudozó modelljét egy példán és egy feladaton.

8.7. példa. Türelmetlen alkudozók. Tegyük föl, hogy két játékosnak, A-nak és B-nek meg kell osztozni 1 \$-on. Előre megállapodnak, hogy naponta csak 1 ajánlat tehető, és legfeljebb 3 napig alkudoznak: az első és a harmadik nap A, második nap B tesz ajánlatot. Az ajánlatot vagy elfogadja a másik fél, vagy elutasítja. Ha 3 napon belül nincs megegyezés, akkor egyik fél sem kap semmit. Közömbösség esetén a játékos elfogadja az ajánlatot. Minden nap egy cent az A játékos számára α-szorosát, a B játékos számára β-szorosát éri az előző napinak, ahol $0 < \alpha,\beta < 1$. Ha a játékosok teljesen racionálisak, akkor az optimális osztozkodásnál az A játékos megtart magának $1 - \beta(1 - \alpha)$-t, és felajánl $\beta(1 - \alpha)$-t B-nek az 1. napon.

Ismét visszafelé kell megoldani a feladatot. A 3. napon már nincs választása a B játékosnak, bármit el kell fogadnia, amit A ajánl: 0-t is. De a 2.-ról a 3. napra annak értéke, amit A megtarthat magának, lecsökken α-szorosára. Tehát elegendő, ha a 2. nap

B α-t ajánl A-nak, tehát $1-\alpha$-t megtart magának. De nemcsak ezt tudja A, hanem azt is, hogyha a $\beta(1-\alpha)$-t pénzösszeget az 1. napon ajánlja föl B számára, akkor ez B számára ugyanannyit ér, mint a 2. napi eredmény. Tehát az A játékos megtart magának $1-\beta(1-\alpha)$-t, és felajánl $\beta(1-\alpha)$-t B-nek az 1. napon, és ezt B el is fogadja. ∎

8.2. feladat. Türelmetlen alkudozók. Oldjuk meg a 8.6. példát tetszőleges időszakra! Mi történik, ha az időtáv a végtelenhez tart?

Az információ gazdaságtana

A játékelmélettől némileg függetlenül fejlődött, de nagyon fontos alkalmazási terület az *információ gazdaságtana*, ahol a szereplők tevékenységétől is függ, hogy mi ismert és mi nem. Olyan jól ismert jelenségekkel foglalkozik ez az elmélet, mint az *aszimmetrikus információ*, a *kontraszelekció* és az *erkölcsi kockázat*. Magyar nyelven e témáról jó áttekintést nyújt Vincze (1991), szintén magyar nyelven elérhető alapcikkek a következők: Arrow (1973).

A következőkben a legegyszerűbb modellt ismertetem – Spence (1973) nyomán, aki Akerloffal és Stiglitz-cel együtt 2001-ben közgazdasági Nobel-díjat kapott az információgazdaságtan továbbfejlesztéséért. A *jelzési* modellekről lesz szó, ahol az egyetemi oklevél megszerzése nemcsak tanulási tevékenység, hanem információs jelzés.

A népességen belül kétféle ember létezik, mégpedig azonos arányban: (i) a tehetségtelen, akinek a munkába állás utáni termelékenysége 1 egység; ill. (ii) a tehetséges, akinek a munkába állás utáni termelékenysége 2 egység lesz, függetlenül attól, hogy járt-e egyetemre vagy sem. Mindenki tudja magáról, hogy tehetséges-e vagy sem, de az alkalmazó semmit sem tud a alkalmazottakról (aszimmetrikus információ).

Tegyük föl, hogy mindenki elvégezheti az egyetemet, s a diplomásak 2, a diploma nélküliek 1 egység bért kapnak. Az egyetemi vizsgák letétele vizsgánként a tehetségtelen diáktól c_1, a tehetségestől $c_2 < c_1$ ráfordítást követel. Ha e a vizsgák száma, akkor c_1e, ill. c_2e a vizsgaráfordítás. Föltesszük, hogy mind a foglalkoztatás, mind a ráfordítás egész életre vonatkozik. Ekkor a vizsgarendszer szűrőként, rostaként működik, ha a tehetségeseknek érdemes elvégezniük az egyetemet, a tehetségteleneknek pedig nem: $1-c_1e < 0 < 1-c_2e$, azaz $1/c_1 < e < 1/c_2$. Szükségünk lesz a következő meghatározásra:

Definíció. Egy elosztást *Pareto-optimális*nak nevezünk, ha *nem* létezik egy olyan másik elosztás, amely szintén megvalósítható, amelyben senki sem jár rosszabbul és legalább egy szereplő jobban jár, mint a szóban forgó elosztásban.

Kimondható a

8.4. tétel. *(Spence, 1973.) a) Ha nincs egyetemi oktatás, akkor minden alkalmazott egységesen 1,5 bért kap. Ez nem hatékony, mert a tehetségtelen többet, a tehetséges pedig kevesebbet kap, mint amennyi a határtermelékenysége. b) Ha van oktatás, és a szűrő működik, akkor mindenki a határtermelékenységének megfelelő bért kapja. Ez az elosztás azonban nem Pareto-optimális, mert ha a tehetségtelenek bevallanák, hogy tehetségtelenek, akkor az oktatást megszüntethetnék, és a tehetségesek jóléte anélkül nőne, hogy a tehetségteleneké csökkene.*

9. ISMÉTELT JÁTÉKOK

Különleges átmenet az egyidejű és egymás utáni lépések között az az eset, amikor egyazon statikus játékot véges vagy végtelenszer megismételnek. Ekkor a statikus játék t-edik lejátszása, a „kör” után minden játékos azonnal megfigyelheti a többi játékos legfrissebb lépését, és emlékszik a korábbi stratégiákra is: $h^t = (s^0, \ldots, s^t)$ a játékosok közös emlékezete a t-edik időszakban. A következő kör stratégiája függ az emlékezettől: $s_{t+1} = v_{t+1}(h^t)$. (Forgó et al., 1999, 12. fejezet.)

Mivel a végtelenszer ismételt játékok elmélete egyszerűbb, mint a végesé, vele kezdjük a tárgyalást.

Végtelenszer ismételt játékok

Mi történik, ha végtelen sokszor megismétlődik a játék? Ahhoz, hogy a hasznok összege konvergens legyen, nemcsak célszerű, de szinte elengedhetetlen leszámítolni az egyes időszakok hasznait vagy időátlagot képezni, $\beta < 1$ mellett.

A teljes egyéni hasznok a körönkénti hasznok diszkontált összege:

$$u_i(h^\infty) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(s^t),$$

ahol az i-edik játékos leszámítolási tényezője β_i, 0 és 1 közötti valós szám, 1-et kizárva.

Ha azt hisszük, hogy a végtelen most is jó közelítése a nagy végesnek, akkor tévedünk. A végtelenszer ismételt játékoknak sok olyan részjáték-tökéletes Nash-egyensúlya is van, amely a véges sokszor ismételt játékoknál gyakran hiányzik. Ezekre az a jellemző, hogy a fogolydilemmában megismert kooperatív stratégiához hasonlítanak. Először a játékosok megpróbálják ezeket játszani, és csak büntetésként, ha valamelyik mohó játékos elhajlik, akkor térnek vissza az eredeti Nash-egyensúlyhoz (vö. 3.1.c feladat).

9.1. tétel. *(Forgó et al., 1999, 12.2. tétel) Legyen egy alapjáték Nash-egyensúlya s^* és legyen $\bar{s}$ egy másik stratégia, amely minden játékosnak határozottan jobb, mint s^*: $u_i(\bar{s}) > u_i(s^*)$, $i = 1, \ldots, n$. Az $(\bar{s}, s^*)$ feltételes büntető stratégia a végtelenszer ismételt játék Nash-egyensúlya, ha a leszámítolási tényezők elég nagyok:*

$$\beta_i \geq \frac{u_i^{\mathrm{B}} - u_i(\bar{s})}{u_i^{\mathrm{B}} - u_i(s^*)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ahol $u_i^{\mathrm{B}} = u_i(b_i(\bar{s}_{-i}), \bar{s}_{-i})$ az i-edik játékosnak az $\bar{s}_{-i}$ stratégiára adott legjobb válaszának az időszaki haszna.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy mindenki a feltételes büntető stratégiát játssza. Például 0-adik és a $(t-1)$-edik időszak között $\bar{s}$-t, majd a t-edik időben az i-edik játékos eltér, tehát a $(t+1)$-edik időszaktól kezdve mindenki visszatér a Nash-stratégiához. Ekkor az i-edik játékos nem kaphat összességében többet, mint

$$(1 + \beta_i + \cdots + \beta_i^{t-1}) u_i(\bar{s}) + \beta_i^t u_i^{\mathrm{B}} + (\beta_i^{t+1} + \cdots) u_i(s^*)$$
$$= \frac{1 - \beta_i^t}{1 - \beta_i} u_i(\bar{s}) + \beta_i^t u_i^{\mathrm{B}} + \frac{\beta_i^{t+1}}{1 - \beta_i} u_i(s^*).$$

Hasonlítsuk össze ezt a kifejezést azzal, amit akkor kapunk, ha a játékosok végig a kooperatív stratégiát játsszák. Azt kérdezzük, hogy az utóbbi hozama: $u_i(\bar{s})/(1-\beta_i)$ mikor nagyobb, mint a fenti kifejezés. $t=1$-re adódik a feltétel, $t>1$-re méginkább. ∎

9.1. feladat. Végtelen sokszor ismételt fogolydilemma. Mekkora a legkisebb leszámítolási tényező, amelynél már érdemes kooperálni?

Érdemes bevezetni a következő meghatározást.

Definíció. Tegyük föl, hogy a megmaradó $n-1$ játékos összefog az i-edik játékos ellen, és a keletkező kétszemélyes nullaösszegű játékban az i-edik játékos nyeresége v_i: $v_i = \min_{s_{-i}\in S_{-i}} \max_{s_i\in S_i} u_i(s_{-i},s_i)$. Ekkor minden olyan stratégiát, amely az i-edik játékosnak v_i-nél nagyobb nyereséget hoz, *egyénileg racionális stratégiá*nak nevezünk.

Bizonyos feltételek mellett belátható a 9.2. tétel élesítése is:

9.2. tétel. *Tekintsünk egy tetszőleges egyénileg racionális hasznosságvektort. Ha elég nagy a közös leszámítolási tényező, akkor ez a hasznosságvektor megvalósítható, mint a végtelenszer ismételt játék Nash-egyensúlyi haszna.*

Megjegyzés. Ez az ún. „nép-tételek” lényege, amelyeknek az eredete-szerzősége a homályba vész, akárcsak a népdaloké.

Véges sokszor ismételt játékok

A véges sokszor ismételt játék nem különösebben érdekes abban a speciális esetben, ha minden Nash-egyensúlyban minden játékos hasznossága a minimax haszon, mint pl. a fogolydilemmában (vö. 3.1.c feladat). Ekkor igaz a

9.3. tétel. *Ha az alapjátéknak egyetlen egy tiszta Nash-egyensúlya van, és az minimax, akkor az ismételt játéknak is egyetlen egy részjáték-tökéletes Nash-egyensúlya van, nevezetesen az alapjáték Nash-egyensúlyának az ismétlése.*

Bizonyítás. Megfordított irányú indukcióval. ∎

A korábban bemutatott játékok ismétlését tekintjük.

9.1. példa. (Az 1.1. példa ismétlése.) Tegyük föl, hogy a fogolydilemmát véges sokszor játsszák le. Az ismételt játék egyetlen részjáték-tökéletes Nash-egyensúlya a (köpni, köpni) pár ismételt alkalmazása. ∎

9.2. példa. (A 8.4. példa folytatása.) Kanaszta-sorozat. Valójában az egyszeri játékot megismételjük, az egyéni résznyeremények összeadódnak. Mégsem ismételt játékkal állunk szemben, mert az alapjátékok annyiban változnak, hogy a felhalmozott nyereségek növekedésével (csökkenésével) nő (csökken) a küszöb, amely alatt nem lehet elkezdeni a kártyák lerakását. A sorozat-játéknak akkor van vége, ha az egyik játékos nyereménye eléri vagy meghaladja a győzelemhez szükséges értéket. Figyelemre méltó, hogy a játék hossza nincs előre rögzítve, sőt az is elképzelhető, hogy a sorozat-játék végtelen sokáig folytatódik. ∎

Érdekesebb az az eset, amikor elég hosszú játék esetén a játékosok kitörhetnek az egyszeri játék rossz egyensúlyainak ismétléséből.

9.4. tétel. *Tegyük föl, hogy az alapjátéknak egyetlen egy Nash-egyensúlya van: s^*, és tegyük föl, hogy ez az egyensúly egyénileg racionális. Ekkor bármilyen $\hat{s}$ stratégia-együttes és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan T^* egész szám, hogy $T > T^*$ esetén a T-szer megismételt játéknak van olyan Nash-egyensúlya, amelyben az i-edik játékos haszna $u_i(\hat{s})$-tól kevesebb, mint $\varepsilon > 0$-nal tér el.*

Bizonyításvázlat. A végtelen sokszor ismételt játékot csonkoljuk.

Megjegyzés. Az ismételt játék „jó" Nash-egyensúlya nem lehet részjáték tökéletes, ha az alapjátéknak csak egyetlen egy Nash-egyensúlya van. A „jó" Nash-egyensúly viszont részjáték-tökéletes, ha az alapjátéknak legalább két Nash-egyensúlya van, és további feltevések is teljesülnek.

9.3. példa. Az üzletlánc paradoxona. (Az 1.4. példa folytatása. Selten, 1978.) Tegyük föl, hogy a ragadozó játékot n különböző helyen, egymás után játsszák le. A számos Nash-egyensúly között egyetlen egy részjáték-tökéletes Nash-egyensúly van: (alkalmazkodj, ..., alkalmazkodj). Elég nagy lánc esetén azonban, ha az elején sokszor harcol a bent levő vállalat, lehetséges, hogy a később belépni szándékozók elállnak szándékuktól, és kint maradnak. (Folyt. köv. a 10. pont végén.) ∎

A nagy halháború

Ebben az alpontban a dinamikus programozás egyik játékelméleti alkalmazását mutatjuk be Levhari–Mirman (1980) alapján (magyarul Simonovits, 1998, 8.4. alfejezet). A kiindulás Nagy-Britannia és Izland „tőkehalháborúja". A viszály tétje az volt, hogy mennyi halat foghatnak ki évente a brit halászok az izlandi vizekben, hogy az izlandi halászoknak is, no meg az utókornak is maradjon zsákmány. Míg az 1950-es években az állomány 2,5 millió tonna és az évi fogás 250 ezer tonna volt, 1995 körül e két érték 600 és 150 ezer tonnára süllyedt.

Rátérünk a modell ismertetésére. Legyen k_t a halállomány mértéke a t-edik időszak elején. Ha nem volnának halászok, akkor a halállomány a biológiai törvények szerint nőne:

$$k_{t+1} = k_t^{\alpha}, \qquad \text{ahol} \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{9.1}$$

Nyilvánvaló, hogy a biológiai egyensúlyi halállomány $k^{\mathrm{o}} = 1$ (a számszerű mérték normálás kérdése). Ha a tényleges halállomány az egyensúlyinál nagyobb/kisebb, akkor az új állomány is ilyen, de az előzőhöz képest az csökkent/nő, azaz az egyensúly felé mozog.

Két ország is halászik azonban e vizeken, indexük $i = 1, 2$. A t-edik időszakban az i-edik ország $c_{i,t}$ mennyiséget fog ki. Ekkor (9.1) értelemszerűen módosul:

$$k_{t+1} = (k_t - c_{1,t} - c_{2,t})^{\alpha}. \tag{9.2}$$

Mindkét országnak Cobb–Douglas időszaki hasznosságfüggvénye van, β_i leszámítolási tényezővel, T időtávval.

$$U_i = \sum_{t=0}^{T} \beta_i^t \log c_{i,t}, \qquad i = 1, 2.$$

Az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy mindkét ország adottnak veszi a másik ország stratégiáját, azaz Cournot–Nash-stratégiát játszik. Formálisan: ha az i-edik ország a másik, j-edik ország $\{c_{j,t}\}$ fogyasztási pályáját adottnak veszi, akkor a (9.2) feltétel mellett optimalizálhatja az U_i hasznosságfüggvényét. Ha van olyan $\{c_{1,t}\}$ és $\{c_{2,t}\}$ sorozat, amelynek mindkét tagja optimális a másikra nézve, akkor *Cournot–Nash-optimum*ról beszélünk.

Mielőtt megadjuk a T időtávú megoldást, a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\Psi_i = \alpha\beta_i, \quad S_{i,T} = \sum_{t=0}^{T} \Psi_i^t.$$

9.4. tétel. *(Levhari–Mirman, 1980.) T időtáv esetén az t-edik időszak optimális Cournot–Nash-politikája*

$$c_{i,t}^* = \frac{\Psi_j S_{i,T-1-t}}{S_{1,T-t}S_{2,T-t}} k_t^*, \qquad i = 1,\, 2, \quad j \neq i, \tag{9.3}$$

ahol a fogások és az állomány közti öszefüggést (9.2) adja.

Bizonyítás. T-szerinti teljes indukcióval. ∎

Eredményünk egyszerűsödik, ha végtelen horizontra térünk át.

9.5. tétel. *(Levhari–Mirman, 1980.) Végtelen időtáv esetén az optimális Cournot–Nash-fogáspolitika független az időtől:*

$$c_{i,t}^* = \frac{\Psi_j(1-\Psi_i)}{\Psi_1 + \Psi_2 - \Psi_1\Psi_2} k_t^*, \qquad i = 1,\, 2, \quad j \neq i, \tag{9.4}$$

míg a halállomány aszimptotikus egyensúlyi értéke

$$k^* = \Big(\frac{1}{\Psi_1} + \frac{1}{\Psi_2} - 1\Big)^{\alpha/(\alpha-1)}. \tag{9.5}$$

Bizonyítás. (9.3) aszimptotikus értéke (9.4). Ekkor a halállomány t-edik időszaki értéke is könnyen kiszámítható:

$$k_t = \Big[\frac{\alpha\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2 - \alpha\beta_1\beta_2}\Big]^{R_t} k_0^{\alpha t}, \qquad i = 1,\, 2.$$

Határértékben adódik (9.5). ∎

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy minél gyengébb a leszámítolás (azaz minél nagyobb a leszámítolási tényező), annál nagyobb az egyensúlyi halállomány.

9.2. feladat. Ellenőrizzük a számításokat!

9.3. feladat.* a) Oldjuk meg a feladatot, ha a két ország összefog, optimálisan és egyenlő mértékben ($c_{1,t} = c_{2,t} = c_t$) és egyenlő türelemmel ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) halászik! b)

Mutassuk meg, hogy ebben az esetben adott halállományból kevesebbet fognak ki, de az egyensúlyi halállomány ($k^o > k^*$) annyival nagyobb, mint a versengő esetben, hogy az egyensúlyi fogás ($c^o > c^*$) mégis nagyobb!

9.4. példa. A halháború numerikus szemléltetése. Legyen $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 0{,}95$. Ekkor $k^* = 0{,}29$; $c^* = 0{,}103$ és $k^o = 0{,}45$; $c^o = 0{,}124$. A merítési hányados (c_i/k) állandósult értéke rendre 0,355 és 0,275. A dinamika szemléltetésére legyen $k_0 = 0{,}5k^*$. A kooperációs és a harcos pályákat a 9.1. ábrán szemléltetjük. Érdekes, hogy az első néhány időszakban a harcos pálya fogása felülmúlja a kooperációsét. ∎

(9.1. ábra)

10.* ELKÉPZELÉSEK ÉS SZEKVENCIÁLIS RACIONALITÁS

A részjáték-tökéletesség gyakran hasznos a hamis egyensúlyok kiszűrésében, de vannak olyan esetek, amikor más rostákra van szükség (Mas-Colell et al. (1995, 9. fejezet)).

10.1. példa. Módosított ragadozó. A 8.5. példát módosítsuk úgy, hogy kétféle belépés forduljon elő, de a bentlévő vállalat ne tudja, hogy melyik aleset következik be. Az első alesetben $(u_{\mathrm{E}},u_{\mathrm{I}}) = (3,\ 0)$, a második alesetben $(u_{\mathrm{E}},u_{\mathrm{I}}) = (2,\ 1)$. Belátható, hogy most is két Nash-egyensúly létezik, s az első megint nem hiteles. A második: (első belépés, alkalmazkodás). De most nem alkalmazható a részjáték-tökéletesség fogalma szűrőként, mert nincs valódi részjáték. ∎

(10.1. ábra)

Segítségül hívjuk a bayesi Nash-egyensúly dinamikus változatát.

Definíció. Egy extenzív alakú játékban egy *elképzelésrendszer* egy olyan μ valószínűségeloszlás, amely a döntési pontokon van meghatározva, és minden információhalmazra a valószínűségek összege 1.

A szekvenciális racionalitás meghatározásához célszerű a következő jelölést bevezetni: $\mathbf{E}(u_i|H,\mu,\sigma_i,\sigma_{-i})$ az i-edik játékos várható haszna a H információs halmazon, ha elképzeléseit a H különböző pontjain μ írja le, feltéve, hogy az ő stratégiája σ_i, a többieké σ_{-i}.

Definíció. Egy extenzív alakú játékban a $\sigma^* = (\sigma_1^*,\dots,\sigma_n^*)$ stratégia-együttes *szekvenciálisan racionális* a H információs halmazon a μ elképzelésrendszer mellett, ha $\iota(H)$-val jelölve a H-n lépő játékos indexét, $\mathbf{E}(u_{\iota(H)}|H,\mu,\sigma_{\iota(H)},\sigma^*_{-\iota(H)})$ a $\sigma_{\iota(H)}$ szerinti maximumát $\sigma^*_{\iota(H)}$-ban veszi föl. Ha ez minden H információs halmazra teljesül, akkor σ^* stratégia-együttest *szekvenciálisan racionális*nak nevezzük, adott μ elképzelésrendszer esetén.

E két definíció segítségével már meghatározhatjuk a gyenge tökéletes bayesi egyensúlyt: (i) adott elképzelésrendszer mellett a stratégiáknak szekvenciálisan racionálisnak kell lenniük és (ii) ahol csak lehetséges, az elképzeléseknek konzisztenseknek kell lenniük a stratégiákkal. (Vö. a Nash-egyensúly 3. pontbeli definíciója utáni, a racionális várakozásokról szóló 2. megjegyzéssel.) A nehézséget az okozza, hogy bizonyos kevert stratégiáknál nem minden döntésnek adunk pozitív valószínűséget. Ezt küszöböli ki a teljesen kevert stratégia, ahol minden döntésnek pozitív valószínűséget adunk. Ebben az esetben a konzisztencia a *Bayes-szabály*ra egyszerűsödik: annak valószínűsége, hogy egy játékos a H információs halmazának egy x csomópontjára jut a σ stratégia alkalmazásakor, a következő:

$$P(x|H,\sigma) = \frac{P(x|\sigma)}{\sum_{x' \in H} P(x'|\sigma)}.$$

10.1. példa. (Folytatás.) Ha a belépő vállalat 1/4 valószínűséggel kint marad, 1/2 valószínűséggel az 1. módon lép be, és 1/4 valószínűséggel a 2. módon lép be, akkor a bentlevő vállalat információs halmazára 3/4 valószínűséggel kerül. Ezen belül 2/3 és 1/3 a két ág feltételes valószínűsége. ∎

Következhet a

Definíció. A (σ,μ) stratégia-együttest és elképzelésrendszert *gyenge tökéletes bayesi egyensúly*nak nevezzük, ha teljesül a következő két feltétel:

(i) A σ stratégia-együttes szekvenciálisan racionális a μ elképzelésrendszerre nézve.

(ii) A μ elképzelésrendszert a Bayes-szabály segítségével számították ki a σ stratégia-együttesre nézve:

$$\mu(x) = \frac{P(x|\sigma)}{P(H|\sigma)}, \qquad \text{feltéve, hogy} \qquad P(H|\sigma) > 0.$$

A gyenge tökéletes bayesi egyensúly és a Nash-egyensúly közti kapcsolatot fogalmazza meg a

10.1. tétel. *Egy extenzív alakú játékban egy σ stratégia-együttes akkor és csak akkor Nash-egyensúly, ha létezik egy olyan μ elképzelésrendszer, amelyre*

(i) a σ stratégia-együttes szekvenciálisan racionális a μ elképzelésrendszerre nézve, amely pozitív valószínűségű információs halmazokon van adva;

(ii) és a μ elképzelésrendszert a Bayes-szabály segítségével számították ki a σ stratégia-együttesre nézve.

Megjegyzés. Nash-egyensúlynál csak az egyensúlyi pályára követeljük meg a szekvenciális racionalitást, a bayesi egyensúlynál mindenütt.

10.1. példa. (Újabb folytatás.) A (kint maradni; harcolni, ha a másik belép) Nash-egyensúly nem lehet része semmilyen gyenge tökéletes bayesi egyensúlynak. ∎

Ebben és számos más példában viszonylag könnyű meghatározni a gyenge tökéletes bayesi egyensúlyt, mert egyes játékosok optimális stratégiája független saját elképzeléseiktől és ellenfeleik későbbi lépéseitől. A következő példa nem ilyen.

10.2. példa.* (Mas-Colell et al., 1995, 9.C.3. példa és 9.C.3. ábra.) Módosítsuk a 10.1. példát!

(10.2. ábra)

Egy olyan fixpontot keresünk, amelynél az elképzelés által származtatott viselkedés konzisztens az elképzeléssel.

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy $\gamma > 0$ és legyen σ_F annak valószínűsége, hogy az I vállalat harcol az E belépése esetén, és μ_1 az I vállalat feltételes vélekedése, hogy az 1. típusú belépés következett be, és legyen rendre σ_0,σ_1,σ_2 annak valószínűsége, hogy az E vállalat a kintmaradást, az 1., illetve a 2. típusú belépést választja. Az I vállalat pontosan akkor veszi föl a harcot pozitív valószínűséggel, ha $-1 \geq -2\mu_1 + 1(1-\mu_1)$, azaz ha $\mu_1 \geq 2/3$. Ha $\mu_1 > 2/3$, akkor az I vállalatnak biztosan harcolnia kell, azaz az E vállalatnak a 2. típusú belépést kell választania, azaz a bayesi elv azt követelné, hogy $\mu_1 = 0$, ellentmondás.

Hasonlóan igazolható, hogy a $\mu_1 < 2/3$ esetben a biztosan alkalmazkodó E vállalattal szemben I-nek érdemes az 1. típusú belépést választania, azaz $\mu_1 = 1$, ellentmondás.

Marad $\mu_1 = 2/3$, amikoris az E vállalatnak randomizálnia kell a kétféle belépés között 2:1 arányban. Az I vállalatnak olyan valószínűséggel kell harcolnia, hogy E közömbös legyen a két típus között: $-1\sigma_F + 3(1-\sigma_F) = \gamma\sigma_F + 2(1-\sigma_F)$, azaz $\sigma_F = 1/(\gamma+2)$. Ez pozitív hasznot hoz E-nek, tehát be kell lépnie: $(\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2) = (0,\ 2/3,\ 1/3)$, stb. ∎

Akárcsak a 3. pont gyenge domináns Nash-egyensúlyainál, most is érdemes megszűrni a gyenge tökéletes bayesi egyensúlyokat, s akkor a gyenge jelzőt is elhagyhatjuk. Egyik lehetőség a remegő kéz elvének (3.3. példa utáni rész) alkalmazása, ahol (i) a σ stratégia-együttest egy teljesen keverő $\{\sigma^k\}$ stratégia-együttes sorozattal közelítjük, (ii) s a származtatott $\{\mu^k\}$ elképzelésrendszer sorozatnak konvergálnia kell μ-höz. A kapott egyensúlyt *szekvenciális egyensúly*nak is nevezik.

10.2. tétel. *Egy extenzív alakú játék bármely (σ,μ) szekvenciális egyensúlyában az egyensúlyi stratégia-együttes a játéknak részjáték-tökéletes Nash-egyensúlya.*

Ilyen és más finomítások egy sereg illetéktelen Nash-egyensúlyt kiszűrnek, de furcsa módon, még maradnak más, szintén nem odavaló Nash-egyensúlyok.

Visszatérünk az üzletlánc-paradoxonhoz.

10.3. példa. Az üzletlánc paradoxonának megoldása. (A 9.3. példa folytatása. Selten, 1978; Osborne–Rubinstein, 1994, 12.3.2. szakasz.) Tegyük föl, hogy a ragadozó játékot n különböző helyen, egymás után lejátsszák. Az üzletlánc boltjai kis valószínűséggel lehetnek agresszívek is, és akkor olyan hasznosságfüggvényük van, hogy érdemes harcolniuk. A potenciális belépőknek számolniuk kell ezzel a lehetőséggel is, ezért csak a játék végéhez eléggé közel kerülve próbálnak meg belépni. ∎

Lássunk most egy nevezetes történelmi példát a hiteltelennek vélt fenyegetés beváltására, a reputáció kiépítésére!

10.4. példa. Megérte-e Nagy-Britanniának a Falkland-szigeteket visszafoglalni? 1982-ben Argentína katonai erővel elfoglalta a Nagy-Britanniához tartozó Falkland-szigeteket. Argentína feltehetően úgy számolt, hogy Nagy-Britanniának nem éri majd meg bosszút állni. Nem ez történt: Thatcher asszony kormánya visszavágott, és a sziget értékét messze meghaladó áron visszafoglalta a szigeteket. Valószínűleg az egyszeri kifizetési mátrixba bele kellett volna vennünk további tényezőket: Thatcher újjáválasztási esélyeinek ugrásszerű megjavulását, Kína elrettentését Hong Kong elfoglalásától, stb. ∎

11. JÁTÉKELMÉLET ÉS LÉLEKTAN

Ebben a pontban Mérő (1996) népszerűsítő könyve alapján először bemutatunk néhány olyan játékot, ahol a hagyományos elmélet nem működik, majd olyan játékokat mutatunk be, ahol bonyodalmak lépnek fel.

11.1. példa. Dollárárverés. (Shubik, 1971.) Az asztalra ki van téve egy 1 dolláros. Két játékos felváltva licitálhat, lépésenként legalább 1 centet és legfeljebb 10 centet emelve a téten. Az nyer, aki a legtöbbet ígéri, de az utolsó előtti licitet is ki kell fizetnie az utolsó előtti licitálónak.

Nem szabványos játék, de jól jellemzi a konfliktusok fokozatos kiterjedését (eszkalációját). Az a játék furcsasága, hogy az $(x-1,x)$ ajánlatpár után következhet az $(x,x+1)$ pár, hiszen az utolsó licitáló költsége csak 2 c-tel nő és nyereménye 0-ról 1 \$-ra nő. Ugyanakkor a két játékos összköltsége $(2x+1)$ c, azaz (49 c, 50 c) után a teljes költség több, mint 1 \$, tehát társasági szinten irracionálissá válik a részvétel. Ennek ellenére gyakran csak a készpénz hiánya vet véget a játéknak. ∎

11.2. példa. „Kicsi a rakás, nagyot kíván”. Adva van egy nyereményhatár, mondjuk 1 millió \$, és széles körben meghirdetik a részvételi lehetőséget. Ha n részvevő van, akkor a nyereménye $1/n$ millió \$, amit egyetlen egy – sorshúzás útján kiválasztott – részvevő kap meg.

A hagyományos játékokban a részvevők számának növekedésekor csak a győzelem valószínűsége csökken fordított arányosság szerint, de a játék összege fix (vagy akár nő is, mint a lottónál). Itt minél nagyobb a tolongás, annál jobban elolvad a nyeremény. ∎

11.3. példa. (vö. 2.2. feladat.) Tisztességes osztozkodás. 100 Ft-ot kell elosztani két fél között. Az 1. játékos Ft-ban egész értékű ajánlatot tesz a 2. játékosnak, aki vagy elfogadja az ajánlatot és akkor hozzájut a pénzhez, vagy elutasítja, és akkor egyik játékos sem kap semmit sem. Egy racionális játékos 1 Ft-tal is beérné (az is több, mint 0), de a kísérletekben 30–40 Ft-nál kevesebbel nem szokás beérni. ∎

11.4. példa. Hogyan befolyásolja a megfogalmazás (a „csomagolás”) a játékot? Induljunk ki a fogolydilemma következő változatából:

11.1. táblázat. *Fogolydilemma*

2. játékos / 1. játékos	Együttműködik	Verseng
Együttműködik	(3, 3)	(1, 4)
Verseng	(4, 1)	(2, 2)

Ismert, hogy az egyensúlyi megoldás a (Versengés, Versengés).
Fogalmazzuk át a feladatot a következőképpen:

11.2. táblázat. *Átfogalmazott fogolydilemma*

	Magadnak	Másiknak
Együttműködik	1	2
Verseng	2	0

Ha az *együttműködés* gombot nyomod meg, akkor magadnak 1-et adsz, a másiknak 2-t; ha a *verseng* gombot nyomod meg, akkor magadnak 2-t adsz, a másiknak 0-át. Belátható, hogy az eredő az előző táblázatban leírt nyereménypárok táblázata. Ennek ellenére ezt a játékot a kísérletekben sokkal kooperatívabban játsszák, mint az eredetit, mert nyilvánvaló benne, hogy csak a másiktól jöhet az igazi nyereség. ∎

A következő példában egy olyan helyzetet tanulmányozunk, ahol a játékosoknak ott is a részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyt kell játszaniuk, ahová el sem jutnak.

11.5. példa. A százlábú (Rosenthal, 1981). Két játékos van, akik felváltva lépnek: „állj” vagy „folytasd”. Kiindulásként mindkettőnek 1–1 eFt van az asztalán. Amelyik játékos „folytasd”-ot mond, az köteles 1 eFt-ot átadni a másik játékosnak, aki kap még 1 eFt-ot külső forrásból. A játék 100 lépés után mindenképpen véget ér. Belátható, hogy a részjáték-tökéletes Nash-egyensúly az „állj” stratégia, tehát mindkét játékos beéri 1–1 eFt-tal, lemondva a lánc végén elnyerhető 100–100 eFt-ról. Itt is érdemes a remegő kéz elvére támaszkodni, hogy elkerüljük a rossz egyensúlyt. ∎

A következő példa az igazmondásra ösztönzésről szól.

11.6. példa. Salamoni ítélet (Biblia). Két asszony egyszerre szült egy helyen. Az egyiknek azonnal meghalt a gyereke, és magáénak követelte a másikét. Külső szemlélő utólag már nem tudta megállapítani, hogy valójában kié a gyerek. Salamon izraeli király (i.e. 1000. körül) a következő cseles ítéletet hozta: „kettévágom a gyereket és mindketten megkapják a gyerek felét”. Az igazi anya rögtön lemondott a gyerekről (neki a gyerek élete a legfontosabb), s ebből Salamon megtudta, hogy ki az igazi anya. ∎

A következő példa a függetlenül hozott döntések összehangolásáról szól.

11.7. példa. Férjek és feleségek (vö. Shakespeare: Makrancos hölgy). A brit TV-ben nagy sikerrel játszottak a következő játékot. Több házaspárt behívnak, elkülönítik a férjeket és a feleségeket. Egy sor kérdést tesznek föl nekik. Minél több válasz egyezik egy házaspárnál, annál nagyobb a siker. Hogy ne állapodhassanak meg a párok előre az i-edik kérdésre adandó válaszról, a kérdéseket eltérő sorrendben adják föl. Mi az optimális stratégia? Például a férj azt válaszolja, amit gondol, és a feleség igazodik a férje ízléséhez. ∎

A következő példa egy szokatlan, de elgondolkodtató játékot ismertet.

11.8. példa. Az egyszám-játék. A játéknak sok részvevője van. Mindenkinek gondolnia kell egy természetes számot, amelyet beküld a játékvezetőhöz. Az nyer, aki a legkisebb olyan számot gondolta, amelyet más nem gondolt. Ha $2n + 1$ részvevő van, akik közül pesszimális esetben éppen ketten gondolják az 1-et, a 2-t,..., n-et, akkor $n + 1$ lesz a nyerőszám. Minden más esetben kisebb a nyerőszám. A Mérő-féle Füles-pályázaton több mint 8 000 részvevő indult, több mint 2000 számot küldtek be és a legkisebb egyedi szám a 120 volt. (Az evolúciós játékok elmélete segít a megoldásban.) ∎

A következő példa egy izgalmas kísérletről számol be, amely azt vizsgálta: kialakulhat-e kooperáció egy olyan világban, ahol mindenki önző?

11.9. példa. Stratégiák kísérleti versenye a fogolydilemma ismételt lejátszásánál. Axelrod 1979-ben versenyre hívott fel sok ismert tudóst. Minden részvevőnek be kellett küldenie egy számítógépes programmal leírt stratégiát, amelytől a maximális nyereményt remélheti egy körversenyben, ahol a fogolydilemmát sok menetben lejátsszák, de a részvevők előre nem ismerik a játék hosszát. A beérkező 14 program közül Rapoport szerezte a legtöbb pontot a *Tit for Tat* nevű stratégiájával. Mindössze két sorból állt a program: 1. Az első lépésben kooperál. 2. Ezután azt lépi, amit a partnere az előző lépésben lépett. Axelrod két vonást fedezett fel a sikeres programok között: barátságosságot és megbocsátást.

Miután széles körben közölte a verseny eredményeit, Axelrod 1982-ben egy második versenyt is kiírt. Ezúttal sokkal több részvevő indult, de ismét csak Rapoport nyert, ugyanazzal a programmal. Most Axelrod három újabb jegyet is fölfedezett a sikeres programok között: provokálhatóságot, reakcióképességet és kiismerhetőséget. Érdekes, hogy Rapoport programja mind az öt tulajdonságot maximálisan tartalmazta, és utólag megállapítható, hogy ez volt ismételt sikerének a kulcsa. ∎

III. RÉSZ. KOOPERATÍV JÁTÉKOKRÓL

Eddig föltettük, hogy a játékosok nem tehetnek olyan ígéreteket, amelyeket be is kell tartaniuk. Most föltesszük, hogy tehetnek ilyen ígéreteket, sőt tetszőleges ígéreteket tehetnek, amelyeket be is tartanak. Ezt a sajátosságot fejezi ki a kooperatív jelző, s az a tény, hogy a játékosok koalíciókat alkotnak. Ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy a játékosok érdekei azonosak, lásd pl. a költségelosztást.

Ebben a részben három kérdéssel foglalkozunk. A 12. pont a kooperatív játék karakterisztikus függvényes megfogalmazását vázolja, feltéve, hogy koalíciók által elérhető eredmény egy skalár érték, amely a tagok között elosztható. A 13. pont a játék magvát tanulmányozza, azaz olyan elosztásokat, amelyek minden koalíciónak legalább annyit adnak, mint amennyi a koalíció értéke. A 14. pont a Shapley-értékről szól, amely a tisztességes elosztások axiomatikus megfogalmazása.

12. KARAKTERISZTIKUS FÜGGVÉNY

Egy *kooperatív játék*ot a következő fogalmakkal határozunk meg. $N = \{1, \ldots, n\}$ a *játékosok halmaza*, amelynek egy tetszőleges S részhalmazát közkeletű szóval *koalíció*nak nevezzük: $S \subseteq N$. Legyen $\mathcal{S}$ a részhalmazok, azaz a lehetséges koalíciók halmaza. Az N alaphalmazt *teljes koalíció*nak nevezzük.

A kooperatív játékok tanulmányozására a karakterisztikus függvény szolgál. (Nem tévesztendő össze a valószínűségszámítási névtársával.)

Definíció. Egy $v : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ függvényt a kooperatív játék *karakterisztikus függvény*ének nevezünk, ha minden S részhalmazon megadja *koalíció értéké*t: $v(S)$. Az üres halmazon nulla az értéke: $v(\emptyset) = 0$. A játék jele (N,v). A $v(S)$ értéket a koalíció képes tagjai között felosztani.

Gyakran föltesszük, hogy a játék *szuperadditív*, azaz két diszjunkt koalíció együttvéve legalább annyit ér, mint külön-külön összesen:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \qquad \text{ha} \qquad S \cap T = \emptyset.$$

Már korábban említettük, hogy feltevésünk szerint a játék során keletkező skalár értékű eredményt tetszőleges mértékben eloszthatjuk (az átadható hasznosság angol megfelelőjének, a transferable utility-nak rövidítése: TU). Ebből következik a

Definíció. Egy n-dimenziós $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vektort *elosztás*nak nevezünk, ha (i) a teljes koalíció tagjai együttesen a játék értékét kapják:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N);$$

és

(ii) minden játékos az elosztás szerint legalább annyit kap, mint amennyi a saját értéke:

$$x_i \geq v(\{i\}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Természetes követelményt fogalmaz meg a következő

Definíció. Egy játékot *monoton*nak nevezünk, ha egy nagyobb koalíció legalább annyit ér, mint egy kisebb:

$$\text{ha} \qquad S \subseteq T \subseteq N, \qquad \text{akkor} \qquad v(S) \le v(T).$$

12.1. feladat. Mutassunk egy monoton játékot, amely nem szuperadditív!

A neoklasszikus közgazdaságtanhoz hasonlóan fontos a határelemzés. Ezt tükrözi a következő

Definíció. Az i-edik játékos *határhozzájárulásá*t az S koalíció értékéhez a következő kifejezés adja:

$$d_i(S) = v(S) - v(S\backslash\{i\}), \qquad \text{ha} \qquad i \in S.$$

Ha a játék szuperadditív, akkor a határhozzájárulás legalább akkora, mint a játékos értéke: $d_i(S) \ge v(\{i\})$ – a minimális hozzájárulás.

A matematikában a skalár-skalár függvény konvexitását az érintő meredekségének a növekedésével fejezik ki. Erre rímel a következő

Definíció. Egy játékot *konvex*nek nevezünk, ha karakterisztikus függvényének első differenciája monoton. Képletben:

$$\text{ha} \qquad S \subseteq T \subseteq N, \qquad \text{akkor} \qquad d_i(S) \le d_i(T) \qquad \text{minden} \qquad i \in N-\text{re}.$$

A kooperatív játékelméletben a karakterisztikus függvény konvexitása hasonló dolgot fejez ki, mint a közgazdaságtanban a növekvő hozadék.

A játék konvexitását fogalmazza át a

12.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy (N,v) kooperatív játék akkor és csak akkor konvex, ha bármely $S,T \subseteq N$ halmazpárra teljesül, hogy

$$v(S) + v(T) \le v(S \cap T) + v(S \cup T)!$$

Speciálisan, ha egy (N,v) játék konvex, akkor szuperadditív.

Érdekes esetben a teljes koalíció együtt többet ér el, mint külön-külön összesen: $v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$.

A következő definíció az egyetértést általánosítja – szélső esetben akár a diktatúráig.

Definíció. Egy (N,v) kooperatív játékot *általánosított egyetértés-játék*nak nevezünk, ha létezik egy olyan kitüntetett $S \subseteq N$ nem üres részhalmaz, amelyre igaz, hogy ha $S \subseteq T$, akkor $v(T) = v(S)$ és egyébként $v(T) = 0$.

Most egy-egy politológiai és közgazdaságtani példát mutatunk kooperatív játékokra.

12.1. példa. Parlamenti játék. Tegyük föl, hogy a parlamentben n számú pártnak van képviselője, s az i-edik párt súlya $\alpha_i > 0$. Természetesen $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Az egyszerűség kedvéért *győztes koalíció*knak nevezzük azokat a pártegyütteseket, amelyeknek az együttes parlamenti súlya nagyobb, mint 1/2. Képletben: $S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} \alpha_i > 1/2$. Ennek a játéknak a karakterisztikus függvénye is egyszerű: $v(S) = 1$ győztes koalíciókra, 0 egyébként. ∎

12.2. példa. Walrasi egyensúly. (Zalai, 1989, 6. fejezet.) Egy cseregazdaságban n háztartás van: $i = 1, \ldots, n$ és m áru: $j = 1, \ldots, m$. A csere előtt az i-edik háztartásnak $\omega_i = (\omega_{i1}, \ldots, \omega_{im})$ *készletvektora* volt, és a csere után x_i az *elosztásvektora*. Az (x,ω) piaci csere *lehetséges*, ha minden áruból az összkészlet egyenlő az összelosztással: $\sum_i \omega_i = \sum_i x_i$. Az i-edik háztartás számára egy x_i elosztásvektor értékét az $u_i(x_i)$ hasznosságfüggvénye mutatja. Feltesszük, hogy a hasznosságok – mintha pénzösszegek lennének – veszteség nélkül átadhatók. Egy $S \subseteq N$ koalíció értéke a koalícióban részvevő háztartások hasznosságainak maximális összege, amelyet önerőre támaszkodva el tudnak érni:

$$v(S) = \max_{(x_i)} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(x_i) : \sum_{i \in S} \omega_i = \sum_{i \in S} x_i . \right\}$$

Egy cseregazdaság egy lehetséges elosztását *walrasi egyensúly*nak nevezzük, ha van egy m-dimenziós pozitív elemű árvektor: $p > 0$, amely az i-edik háztartás számára megszabja a *költségvetési korlát*ot: $px_i = p\omega_i$, amely mellett a háztartás maximalizálja a hasznosságfüggvényét, $i = 1, \ldots, n$. Bizonyos feltételek mellett létezik legalább egy walrasi egyensúly, és a bizonyításban a Nash-egyensúly létezésének igazolásánál használt fixpont-tételek szerepelnek. Belátható még, hogy minden walrasi egyensúly Pareto-optimális (első jóléti tétel). ∎

13. A JÁTÉK MAGVA

Ebben a pontban a kooperatív játékelmélet egyik központi fogalmát, a játék magvát körvonalazzuk és mutatunk egy közgazdasági alkalmazást is.

Absztrakt játék magva

Kezdjük a következő meghatározáspárral.

Definíciók. 1. Egy n-dimenziós $x = (x_1, \ldots, x_n)$ elosztásvektort *hatékony*nak nevezünk, ha bármely valódi koalíció tagjai az elosztás szerint legalább annyit kapnak, mint amennyi a koalíció értéke:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \qquad \text{ha} \qquad S \subset N.$$

2. A hatékony elosztások halmazát a játék *magvá*nak nevezzük.

Egy játék magva, amelyet $C(v)$-vel jelölünk, zárt konvex halmaz, amely lehet üres. A játék magva hasonló szerepet játszik a kooperatív játékok elméletében, mint a Nash–egyensúlyok halmaza a nemkooperatív játékok elméletében: ha egy elosztás nem eleme a magnak, akkor legalább egy koalíciónak érdemes megakadályozni a szóban forgó elosztás megvalósulását.

Két példát mutatunk be.

13.1. példa. Egy kétszemélyes játék magva. A v karakterisztikus függvény esetén a játék magva azoknak az (x_1,x_2) síkvektoroknak a halmaza, amelyekre fennáll $x_1 + x_2 = v(\{1, 2\})$ és $x_1 \geq v(\{1\})$, $x_2 \geq v(\{2\})$. ∎

13.2. példa. Egy magnélküli játék. Tegyük föl, hogy egy hárompárti parlamentben nincs olyan párt, amelynek egyedüli többsége lenne, de bármely két pártnak többsége van. Ekkor a parlamenti játéknak nincs magva. Valóban, írjuk föl a hatékonysági követelményeket:

$$x_1 + x_2 \geq 1, \qquad x_2 + x_3 \geq 1, \qquad x_3 + x_1 \geq 1, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Adjuk össze a kéttagú koalíciókra vonatkozó feltételeket: bal oldalon kétszer kapjuk meg az egyes pártok súlyainak összegét, s ez egyenlő 2-vel, jobb oldalon a teljes koalició értéke miatt viszont 3-at kapunk, s ez ellentmondás. ∎

A következő definíciósor és feladat az eddig bevezetett fogalmakat szemlélteti.

Definíciók. Egy játékot *egyszerű*nek nevezünk, ha bármely S koalícióra $v(S)$ vagy 0 vagy 1. Egy S koalíciót *győztes*nek nevezünk, ha $v(S) = 1$, természetesen $v(N) = 1$. Egy játékost, aki minden győztes koalíciónak tagja, *vétójátékos*nak nevezünk.

13.1. feladat. Egyszerű játékok és vétójátékosok. Igazoljuk, hogy a) ha nincs vétójátékos, akkor üres a játék magva! b) Mutassuk meg, hogy ha van(nak) vétójátékos(ok), akkor a mag azokból a lehetséges elosztásokból áll, amelyek a többi játékosnak semmit sem adnak!

Mi az általános feltétele annak, hogy egy játék magva ne legyen üres?

Létezik egy fogalom, amely bonyolult, de használható szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy a játék magva ne legyen üres.

Definíciók. 1. Legyen $\mathcal{S}$ a koalíciók halmaza, $S \in N$, s legyen 1_S az S halmaz *indikátorváltozója*:

$$(1_S)_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in S; \\ 0, & \text{ha } i \notin S. \end{cases}$$

2. A $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{S}} \in [0, 1]$ számok együttesét *kiegyensúlyozott súlyrendszer*nek nevezzük, ha minden i-re teljesül

$$\sum_{S\in\mathcal{S}} \lambda_S 1_S = 1_N. \tag{13.1}$$

3. Az (N,v) játékot *kiegyensúlyozott*nak nevezzük, ha minden kiegyensúlyozott súlyrendszerre teljesül, hogy

$$\sum_{S\in\mathcal{S}} \lambda_S v(S) \leq v(N). \tag{13.2}$$

A definíció értelmezése: minden játékosnak egységnyi ideje van, amelyből λ_S időt az S koalícióban tölt.

13.1. tétel. *(Bondareva, 1963 és Shapley, 1967). A játéknak akkor és csak akkor van nem üres magva, ha kiegyensúlyozott, azaz (13.2) teljesül.*

Bizonyítás. a) Tegyük föl, hogy a játéknak van nem üres magva. Legyen x egy kifizetés a magból és legyen $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{S}} \in [0,\, 1]$ egy kiegyensúlyozott súlyrendszer. Ekkor (13.1) felhasználásával

$$\sum_{S\in\mathcal{S}} \lambda_S v(S) \le \sum_{S\in\mathcal{S}} \lambda_S x(S) = x(N) \sum_{S\ni i} \lambda_S = x(N) = v(N),$$

azaz (13.2) áll. b) Tegyük föl, hogy a játék kiegyensúlyozott: (13.2) áll. Ekkor a konvex kúpok elválasztó hipersíkjának létezéséből következik az eredmény (Osborne–Rubinstein, 1994, 263. o.). ∎

13.2. feladat.* (Osborne–Rubinstein, 1994, 263.2. gyakorlat.) Legyen $N = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$. Tekintsük a következő játékot:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } S = N; \\ 3/4, & \text{ha } S = \{1,\, 2\},\{1,\, 3\},\{1,\, 4\},\{2,\, 3,\, 4\}; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy a játék magva üres, mert van olyan kiegyensúlyozott súlyrendszer, amely a középső sortól különböző összes koalícióra 0!

13.2. tétel. *Ha egy játék konvex, akkor a magva nem üres.*

A bizonyítást a következő pontra halasztjuk, mert szükség lesz egy másik fogalomra is.

A piaci játék magva

Az általános egyensúlyelméletben eléggé általános feltételek mellett megmutatható, hogy a mag nem üres (ezt Osborne–Rubinstein (1994, 264–265. o.) a 13.1. tétel segítségével bizonyítja), és ha minden szereplő kellően kis súlyú, akkor a mag és a walrasi egyensúlyi elosztások halmaza közel van egymáshoz (Edgeworth, 1881; Mas-Colell et al., 1995, 18.B. alfejezet). Itt a legegyszerűbb esetet körvonalazzuk (Osborne–Rubinstein, 1994, 272. o.).

13.3. tétel. *A piaci játék magva minden walrasi elosztást tartalmaz.*

Bizonyítás. Hasonlít az első jóléti tétel bizonyításához. Legyen $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ egy walrasi elosztás és p az egyensúlyi árvektor. Indirekt bizonyítunk: van egy olyan $S \subseteq N$ részhalmaz és egy olyan $\{x_i\}_{i\in S}$ elosztásvektor-együttes, amelyre $x(S) = x_i^*(S)$ és $u_i(x_i) > u_i(x_i^*)$. A walrasi egyensúly definíciója és egyenlőtlenségünk miatt $px_i > px_i^*$ minden $i \in S$-re, tehát $\sum_{i\in S} px_i > \sum_{i\in S} px_i^*$, ellentmondás a fenti egyenlőséggel. ∎

A tétel megfordítása természetesen nem igaz, hiszen a legegyszerűbb esetet ($m = n = 2$) ábrázoló Edgeworth-dobozban az egyezség-görbe minden elosztása benne van a magban. A helyes állítás közelítő tartalmazást állít, ha sok kicsi háztartás van.

Debreu–Scarf (1963) fogalmazták meg a modellt: legyen h a háztartások egyik típusa, $h = 1, \dots,\, q$; és sokszorozzuk meg e típusokat r-szer: $n = qr$ a háztartások száma és (h,k) a h-adik típusú k-adik háztartás indexe. Belátható a

13.1. segédtétel. *Ha a qrm-dimenziós elosztásvektor eleme a piaci játék magvának, akkor az azonos típusú háztartások azonos mennyiségeket fogyasztanak.*

Bizonyos speciális esetben a 13.1. segédtétel leegyszerűsödik.

13.3. feladat. Bizonyítsuk be közvetlenül, hogy egy olyan cseregazdaságban, ahol a hasznosságfüggvények folytonosak és szigorúan kvázikonkávok, minden walrasi elosztásra teljesül, hogy azonos típusú fogyasztók azonos elosztásban részesülnek!

Ez a segédtétel lehetővé teszi, hogy qrm-dimenziós vektorok helyett qm-dimenziós vektorokat tekintsünk, amelyeket *típuselosztás*nak nevezünk, jele: $x^* = (x_1^*, \dots, x_q^*)$. Legyen C_r az r-szeresen sokszorosított piac magvának a típusa. Könnyen belátható, hogy $C_{r+1} \subseteq C_r$. Kérdés: mi történik C_r-rel, ha r tart a végtelenhez?

13.4.* tétel. *(Debreu–Scarf, 1963.) Ha az $x^* = (x_1^*, \dots, x_q^*)$ típuselosztás minden r-re mag-tulajdonságú, azaz $x^* = (x_1^*, \dots, x_q^*) \in C_r$, akkor x^* egy walrasi egyensúlyi elosztás.*

Bizonyításvázlat. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden fogyasztó számára hasznosabb a kezdeti készlete, mint bármilyen olyan elosztás, amelynek van nulla eleme. Ekkor a mag belső pontokból áll.

Indirekt bizonyítunk. Feltesszük, hogy van olyan $x = (x_1, \dots, x_q)$ megengedett típuselosztás, amely mag-tulajdonságú, de nem walrasi egyensúlyi elosztás. Feltehetjük, hogy ez az elosztás Pareto-optimális és minden eleme pozitív. A második jóléti tétel értelmében megfelelő transzferekkel walrasi egyensúllyá tehető. Azaz van olyan m-dimenziós árvektor: p, amely mellett pl. az 1. típusú fogyasztók pozitív transzfereket kapnak. Ekkor belátható, hogy elég nagy r-re a többi típusú fogyasztónak érdemes szövetkeznie $r-1$ számú 1. típusú fogyasztóval, stb. ∎

14. SHAPLEY-ÉRTÉK

A most bevezetendő Shapley-érték bizonyos szempontból előnyösebb mint a mag, mert mindig létezik és egyértelmű.

Absztrakt játékok

A Shapley-érték egy olyan függvény, amely a karakterisztikus függvényeket leképezi az elosztások terébe; jele:

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v)), \qquad \text{ahol} \qquad \varphi_1(v) + \cdots + \varphi_n(v) = v(N).$$

Jellegzetessége, hogy nem egyetlen játékra definiáljuk, hanem játékok egész halmazára, e halmaz jele: $J(N)$. A következő axiómák teljesülését követeljük meg.

Definíció. Két játékost, i-t és j-t a v játékban *felcserélhető*nek nevezünk, ha határhozzájárulásuk azonos: $d_i(S) = d_j(S)$ minden olyan $S \subseteq N$-re, amelyre $i,j \in S$.

A1. Szimmetria. Ha i és j a v játékban felcserélhető, akkor a két játékos Shapley-értéke is egyenlő:

$$\varphi_i(v) = \varphi_j(v).$$

A2. Egyszerű játékos. Ha valamelyik i-edik játékos minden koalícióba belépve csak minimálisan – $v(\{i\})$-vel – növeli a koalíció értékét, akkor a Shapley-értéke is minimális. Képletben: Ha minden $S \subseteq N$-re, amelyre $i \in S$, teljesül $d_i(S) = v(\{i\})$, akkor $\varphi_i(v) = v(\{i\})$.

A3. Additivitás. Ha u és v két tetszőleges játék $J(N)$-ben, akkor az összegjáték értéke a játékértékek összege:

$$\varphi_i(u+v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Belátható, hogy a három axiómának egyetlen egy értékfüggvény tesz eleget.

14.1. tétel. *(Shapley, 1953.) A $J(N)$ függvények terén az A1–A3. axiómának egyetlen egy φ függvény tesz eleget, nevezetesen az egyes játékosok egyéni határhozzájárulásának az átlaga (várható értéke):*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} d_i(S).$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a határhozzájárulások súlyai binomiális együtthatók reciprokai, melyek annak valószínűségét mutatják, hogy az S koalícióba az i-edik játékos utolsónak lép be.

Bizonyításvázlat. Azt, hogy a képletben adott érték eleget tesz a három axiómának, könnyű belátni. Az igazi nehézséget az egyértelműség igazolása okozza (Osborne–Rubinstein, 1994, 293–294. o.).

A főbb lépések a következők:

a) Belátjuk, hogy minden $(N,v) \in J(N)$ játék előállítható a 12. pont végén bevezetett v_S egyetértés-játékok – amelynek karakterisztikus függvénye csak S-t tartalmazó koalíciókra nem nulla – egyértelmű lineáris kombinációjaként:

$$v = \sum_{S \subseteq N} \lambda_S v_S,$$

mert a v_S játékok algebrai bázist alkotnak. (A generátorrendszer elemszáma $2^{|N|-1}$, ezért elég a lineáris függetlenséget igazolni: indirekt, van olyan T koalíció, amelyre $0 = \sum_{S \subseteq N} \beta_S v_S$ és $\beta_T \neq 0$. Válasszuk a legnagyobb elemszámú ilyen koalíciót. Ekkor a maximumtulajdonság miatt bármely $S \supset T$-re $\beta_S = 0$, az egyetértési tulajdonság miatt bármely $S \not\supseteq T$-re $v_S(T) = 0$, tehát az összeg jobb oldala $\beta_T = 0$, ellentmondás.)

A szimmetria és az egyszerűség miatt bármely pozitív α-ra $\varphi(\alpha v_T) = \alpha/|T|$, ha $i \in T$, és 0 egyébként. A lineáris kombinációban a pozitív és negatív együtthatós tagokat szétválasztva az additivitás miatt adódik a képlet. ∎

Először a legegyszerűbb két esetet mutatjuk be.

14.1. példa. Kétszemélyes játék Shapley-értéke:

$$\varphi_1(v) = \frac{v(\{1\}) + v(\{1,\,2\}) - v(\{2\})}{2}, \qquad \varphi_2(v) = \frac{v(\{2\}) + v(\{1,\,2\}) - v(\{1\})}{2}.$$

∎

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a Shapley-érték a kooperációból fakadó előnyöket egyenlően osztja el, ezért is nevezik ezt az értéket *tisztességes*nek:

$$\varphi_i(v) - v(\{i\}) = \frac{v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})}{2}, \qquad i = 1, 2.$$

14.1. feladat. Számítsuk ki a háromszemélyes játék Shapley-értékét, feltéve, hogy az egyszemélyes koalíciók karakterisztikus értéke 0, és a teljes játéké 1 !

Most három példát mutatunk arra, hogy ha a három axiómából csak kettő teljesül, akkor a Shapley-értéktől különböző értékek is vannak.

14.2. példa. Olyan érték, amely kielégíti az A2 (egyszerű játékos) és az A3 (additivitás) axiómát, de nem elégíti ki az A1 (szimmetria) axiómát. Az átlagos határhozzájárulás kiszámításánál csak azokat a sorrendeket vesszük figyelembe, amelyek az 1. játékossal kezdődnek. ∎

14.3. példa. Olyan érték, amely kielégíti az A1 (szimmetria) és az A3 (additivitás) axiómát, de nem elégíti ki az A2 (egyszerű játékos) axiómát. Minden játékos a játék átlagértékét kapja. ∎

14.4. példa. Olyan érték, amely kielégíti az A1 (szimmetria) és az A2 (egyszerű játékos) axiómát, de nem elégíti ki az A3 (additivitás) axiómát. Az egyszerű játékosok megkapják az értéküket, és a többi játékos megkapja a maradék koalíció értékének az átlagát. ∎

Parlamenti játékok

Ebben az alpontban a Shapley-érték politikatudományi alkalmazását szemléltetjük példákon és feladatokon.

14.5. példa. A mérleg nyelve. Az egykori NSZK parlamentjében lényegében két nagypárt volt (baloldal, jobboldal), közel 50 %-os súllyal és egy kis párt (közép), alig érve el az 5 %-os alsó küszöböt: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2 - \varepsilon$ és $\alpha_3 = 2\varepsilon$. Szimmetria okokból következik, hogy mindhárom Shapley-érték azonos, azaz 1/3. Összhangban a Shapley-értékkel, e törpepárt adta az alkancellárt, aki egyben külügyminiszter is volt, és gyakran a gazdasági minisztert is. ∎

14.6. példa. Erőviszonyok az 1990-ben választott magyar parlamentben (Gyetván, 1994). A Shapley-értéket most nemcsak az egyszerű, hanem a minősített (2/3-os) többségre is kiszámítjuk.

14.1. táblázat. *Helyek és értékek*

Párt	Helyek százalékban	Egyszerű többség	Kétharmados értéke
MDF	42,7	56,2	57,6
SZDSZ	24,4	11,2	24,3
FKGP	11,4	11,2	7,6
MSZP	8,5	11,2	7,6
FIDESZ	5,7	4,5	2,6
KDNP	5,5	2,9	2,6
Függetlenek	1,8	2,9	0,9

14.2. feladat. Kiegyensúlyozatlan kesztyűpiac. Határozzuk meg a következő játék magvát és Shapley-értékét! $n = 3$, $v(\{1, 2, 3\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 1$ és $v(S) = 0$ egyébként. Az 1. és a 2. játékosnak van egy-egy bal kesztyűje, a 3.-nak pedig egy jobb kesztyűje.

14.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 12. pont végén bevezetett általánosított egyetértés-játékban a Shapley-érték $v(S)$-t egyenlően osztja el a kitüntetett koalíció tagjai között, és nullát ad a többi játékosnak!

A következő tétel a 13.2. tétel élesítése.

14.2. tétel. *(Mas-Colell et al., 1995, 18.AA.1. állítás.) Ha egy (N,v) kooperatív játék konvex, akkor a Shapley-érték eleme a játék magvának.*

Bizonyításvázlat. Vezessük be a következő jelölést a Shapley-érték $S \subseteq N$-részhalmazra való leszűkítésére: $\varphi(S,v)$. Elég igazolni, hogy ha $i \in S \subseteq T$, akkor $\varphi_i(S,v) \leq \varphi_i(T,v)$. ∎

Költségmegosztás

*Költségmegosztás*ról beszélünk, ha bizonyos közösen felmerülő költségeket méltányos és ésszerű módon akarunk felosztani a részvevők között (Forgó et al., 1999, 20. fejezet). A Shapley-érték az egyik kézenfekvő lehetőség a költségmegosztásra (Shubik, 1962). Nyilvánvaló, hogy most $v(S)$ annak az összköltsége, hogy pontosan az S koalíció igényeit elégítik ki. Például a Bős–Nagymaros Vizilépcsőnél a támogatók és az ellenzők sokat vitatkoztak azon, hogy az ikerlétesítmény mennyiben szolgál energetikai, közlekedési, illetve vízgazdálkodási célokat. Az egymást követő magyar kormányok önkényesen váltogatva az arányokat, döntöttek először az építésről, majd a nagymarosi körgát lebontásáról, sőt még az újraépítés is felvetődött.

14.4. feladat. Költségmegosztás. Az A falu 1, a B falu további 2 km-re fekszik a forrástól, ahonnan csőrendszeren akarják a vizet a falvakba vezetni. Egy km vezeték építési költsége 1 mFt. Hogyan osszák el (Shapley-módjára) az építési költségeket a két falu között?

Külön elméleti érdekesség, hogy bizonyos alkalmazások (pl. egy egyetemi telefonközpont költségeinek lebontása tanszékek között) folytonos változókat igényelnek. Ilyenkor a Shapley-érték helyére az *Aumann–Shapley-árak* lépnek (pl. Billera et al. (1978), magyarul: Simonovits (1980)).

Jelentősen általánosítjuk a feladatot. Egy vállalat n árut termel, x_i volumenben, $i = 1, 2, \dots, n$, $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$ összköltséggel. $F(x)$ a nemnegatív ortánson értelmezett, nemcsökkenő és skalárértékű sima függvény. Modellünkben az (egység)árak függhetnek a volumenvektortól: $p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x))$. *Költségmegosztás*ról beszélünk, ha fogyasztói kiadások összege megegyezik az összköltséggel: $p(x) \cdot x = \sum_{i=1}^n p_i(x) x_i = F(x)$.

Természetesen a nehézséget az jelenti, hogy a költségfüggvény általában *nem* additív. Ha additív lenne, azaz $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n F_i(x_i)$ teljesülne, akkor $p_i(x_i) = F_i(x_i)/x_i$ megadná a költségmegosztó árakat.

A közgazdaságelméletből ismert egy másik megoldás is, az alkalmazhatósághoz azonban nagyon megszorító feltevést kell tennünk: a költségfüggvény *elsőfokú homogén*, azaz minden x-re és minden μ-re fennáll

$$F(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \mu F(x_1, \dots, x_n).$$

Mindenekelőtt ismertetem az elsőfokú homogén függvényekre vonatkozó nevezetes tételt.

Euler tétele: *Ha az $F(x_1, \dots, x_n)$ függvény elsőfokú homogén függvény, akkor*

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) x_i.$$

Bizonyítás. Deriváljuk a definíció mindkét oldalát μ szerint. A teljes deriválás szabálya szerint

$$\frac{d}{d\mu} F(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mu x) x_i = F(x_1, \dots, x_n).$$

Behelyettesítve $\mu = 1$-et, adódik az állítás. ∎

Ebben az esetben a közgazdaságtanban központi szerepet játszó, ún. *határköltség*vektor, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ alkalmas költségmegosztó árrendszerként.

Az általános esethez azonban további gondolatokra van szükség. A Shapley-értéknél alkalmazott eljárást követve, axiomatikus felépítést választunk, és egyszerre minden F összköltségfüggvényre és $\bar{x}$ volumenvektorra hozzárendelünk egy $p(F, \bar{x})$ árvektort.

A következő axiómákat kívánjuk meg e hozzárendeléstől.

1. *Mértékegységfüggetlenség.* Térjünk át az eredeti mértékegységekről egy olyanra, ahol az i-edik termék új egysége a régi λ_i-szerese: $\lambda_i > 0$, és az érték a régi μ-szerese. Például ha kg helyett tonnában, és Ft helyett fillérben számolunk, akkor a Ft/kg ár helyetti fillér/tonna ár $100/1000 = 1/10$ szeres lesz. Jelölje $\langle \lambda \rangle$ a λ_i-elemekből álló diagonális mátrixot. Ekkor azonosságként teljesül

$$G(x) \equiv \mu^{-1} F(\langle \lambda \rangle x).$$

Ezzel összhangban megköveteljük a következő azonosságot:

$$p(G,\bar{x}) \equiv \mu^{-1}\langle\lambda^{-1}\rangle p(F,\langle\lambda\rangle\bar{x}).$$

2. *Additivitás.* Tegyük föl, hogy az F költségfüggvény két költségfüggvény, G és H összege: $F(x) \equiv G(x) + H(x)$. Ekkor az árvektor a két összetevő költségfüggvényhez tartozó árvektor összege: $p(F,\bar{x}) \equiv p(G,\bar{x}) + p(H,\bar{x})$.

3. *Nemnegativitás.* Az árvektor nemnegatív: $p(F,\bar{x}) \geq 0$.

4. *Nulla költség–nulla ár.* Tegyük föl, hogy az i-edik árú termelésének volumene nem hat az összköltségre: létezik olyan $G(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$, amelyre

$$F(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n) \equiv G(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n).$$

Ekkor az i-edik áru ára azonosan nulla: $p_i(F,\bar{x}) \equiv 0$.

5. *Homogenitás.* Költség szempontból azonos termékek árai azonosak. Tegyük föl, hogy a i-edik termék y_i és z_i volumenű altermékre bontható, de a teljes költségfüggvény csak az összegüktől függ:

$$G(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,z_i,x_{i+1},\dots,x_n) \equiv F(x_1,\dots,x_{i-1},y_i + z_i,x_{i+1},\dots,x_n).$$

Ekkor a két altermék ára is azonos: $p_{i,y}(G,\bar{x}) \equiv p_{i,z}(G,\bar{x}) = p_i(F,\bar{x})$.

Végül a költségmegosztási feltétel.

6. *Költségmegosztás*: $p(x) \cdot x = \sum_{i=1}^n p_i(x)x_i = F(x)$.

Számos, gyakorlatban alkalmazott árazási mechanizmus nem elégíti ki a fenti hat követelmény egyikét-másikát. Például a határköltségár általában nem tesz eleget a költségmegosztásnak, az átlagköltségár sérti a szimmetriát vagy a nulla költség–nulla ár követelményt. A repülőjegyek árazásában használt APEX-mechanizmus sérti a szimmetria és az additivitási követelményt.

Látni fogjuk, hogy a határ- és az átlagár sajátos kombinációja eleget tesz mind a hat követelménynek. Ezt a költségmegosztó árrendszert AS (Aumann–Shapley)-árvektornak nevezzük, és képlete

$$p(F,\bar{x}) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(t\bar{x})\,dt.$$

14.3. tétel. *Az AS-árvektor eleget tesz az 1–6. követelményeknek.*

Bizonyítás. Az 1–5. követelmény következik abból, hogy a határköltségár is eleget tesz e követelményeknek. A 6. követelmény belátásához a Newton–Leibniz-formulát és a teljes derivált képletét alkalmazzuk:

$$F(\bar{x}) = F(\bar{x}) - F(0) = \int_0^1 \frac{dF}{dt}(t\bar{x})\,dt = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(t\bar{x})\,dt.$$

∎

Sokkal nehezebb azonban belátni a 14.3. tétel megfordítását.

14.4. tétel. *Csak az AS-ár eleget tesz az 1–6. követelményeknek.*

Érdekes valószínűségszámítási háttér adható az AS-árnak. Tegyük föl, hogy az $\bar{x}$ kereslet részletekben valósul meg. Például legyen m egy természetes szám, és bontsuk föl $\bar{x}_i$-t m egyenlő részre. Képzeljük azt, hogy a keresletek egymásután, véletlenszerűen érkeznek, és minden rendelésnél az új rendelés által okozott többletköltséget kell kifizetni. Legyen az i-edik termék egységára a várható érték. A nagy számok törvénye szerint a legtöbb esetben a rendelések úgy oszlanak el, hogy a többletköltségek a 0 és az $\bar{x}$ pontot összekötő átló körül helyezkednek el, és a várható érték az AS-ár.

A szakasz végén megemlítek még egy kutatási irányt, amely megindítása szintén Aumann nevéhez fűződik. Az atommentes játékok és a versenygazdaság kapcsolatáról szóló Aumann (1964) cikk volt az első, amely a kontinuum számosságú fogyasztóból álló modellben igazolta, hogy a versenygazdaságban az egyensúly és a játék magva egybeesik, s ezzel elegánsabbá tette Debreu–Scarf (1963) cikkét. Erre épült az atommentes játékok értékének elmélete, amelynek említett alkalmazása a költségmegosztás.

FÜGGELÉK: DÖNTÉS KOCKÁZAT MELLETT

A kockázat melletti döntés elmélete alapvető szerepet játszik a játékelméletben. Ezért ebben a függelékben röviden vázoljuk ezt az elméletet, és bemutatjuk egy alkalmazását. Teljesebb leírást ad Varian (1992, 11. fejezet) és Mas-Colell et al. (1995, 6. fejezet).

A Neumann–Morgenstern-féle hasznosságfüggvény

Föltesszük, hogy adott egy preferenciarendezés, amely nemcsak biztos díjakon, hanem bizonytalan kimenetelű kockázatos dolgokon, szemléletesen a lottók halmazán (jele L) is értelmezve van. A fogyasztó p valószínűséggel x-et, $1-p$ valószínűséggel y-t kap, szimbolikusan: $p \circ x + (1-p) \circ y$. A díj lehet pénz, áru, sőt lottó. Föltesszük, hogy 1) az 1 valószínűségű nyeremény azonosítható a biztossal, 2) a díjak felsorolási rendje közömbös, és 3) a fogyasztó számára közömbös a valószínűségek „csomagolása”, azaz

$$q \circ (p \circ x + (1-p) \circ y) + (1-q) \circ y \sim (qp) \circ x + (1-qp) \circ y.$$

A többesélyes lottó visszavezethető a kétesélyes lottóra. Lássuk pl. a háromesélyes lottó visszavezetését:

$$p \circ x + q \circ y + (1-p-q) \circ z \sim (p+q) \circ \left(\frac{p}{p+q} \circ x + \frac{q}{p+q} \circ y \right) + (1-p-q) \circ z.$$

Preferenciarendezések helyett gyakran egyszerűbb hasznosságfüggvényekkel dolgozni, különösen akkor, ha a hasznosságfüggvény egyszerű. Ezt az igényt elégíti ki a várható hasznosságon alapuló Neumann–Morgenstern-féle hasznosságfüggvény, amely a preferenciarendezéseket speciálisan reprezentálja.

CÉLOK:

(i) Monotonitás a preferenciarendezés és az u hasznosságfüggvény között:

$$\text{Ha } x \succeq y, \qquad \text{akkor} \qquad u(x) \geq u(y).$$

(ii) (Várható hasznosság). A kombináció hasznossága a hasznosságok kombinációja:

$$u(p \circ x + (1-p) \circ y) = pu(x) + (1-p)u(y).$$

(iii) A hasznosságfüggvény lényegében egyértelmű. Azaz, ha egy u hasznosságfüggvény mellett van egy másik U hasznosságfüggvény, akkor U pozitív lineáris függvénye u-nak:

$$U(x) \equiv \alpha u(x) + \beta, \qquad \beta > 0.$$

Kiegészítő axiómák:

C1. Zártság. Azoknak a p valószínűségeknek a halmaza, amelyekre $p \circ x + (1-p) \circ y \succeq z$, zárt. Ugyanaz $p \circ x + (1-p) \circ y \preceq z$-re.

C2. Függetlenség. Ha két díj között a fogyasztó közömbös, akkor egy harmadik díj azonos valószínűségű hozzákeverése után is fönnmarad a közömbösség:

$$\text{Ha } x \sim y, \qquad \text{akkor} \qquad p \circ x + (1-p) \circ z \sim p \circ y + (1-p) \circ z.$$

Megjegyzés. A zártsági axióma technikai jellegű. A függetlenségi axióma viszont a szóban forgó elmélet sarkköve, és következik (i)–(ii)-ből. Valóban, (ii) esetén $u(x) = u(y)$ ekvivalens $u(p \circ x + (1-p) \circ z) = pu(y) + u((1-p) \circ z)$ egyenlőséggel, tehát a reprezentáció miatt C2 teljesül. Ilyen axiómával nem találkozunk a hagyományos mikroökonómiai fogyasztáselméletben: két közönséges fogyasztási jószághalmaz közti választás határozottan függ egy harmadik jószág jelenlététől: pl. teljes benzinhiány esetén nem sokra megyünk az autóval. Nagy feltűnést keltett, amikor Allais (1953) kísérleti példát mutatott arra, amikor nem teljesül a C2. axióma.

F.1. példa. (Allais-paradox, 1953.) Három pénzdíj létezik – millió dollárokban megadva 2,5; 0,5 és 0. Négy lottót mérlegelünk: $x_1 = (0;\ 1;\ 0)$, $x_1' = (0{,}1;\ 0{,}89;\ 0{,}01)$ $x_2 = (0;\ 0{,}11;\ 0{,}89)$, $x_2' = (0{,}1;\ 0;\ 0{,}90)$. Körülbelül az emberek fele x_1-et előnyben részesíti x_1'-sal szemben, de x_2'-t részesíti előnyben x_2-vel szemben. Ez ellentmond a C2. axiómának, mert $x_k' = x_k + (0{,}1;\ -0{,}11;\ 0{,}01)$, $k = 1,\ 2$. ∎

Végül még egy technikai jellegű axióma.

C3. L-ben van legjobb és legrosszabb díj: b és w. Azaz minden $x \in L$-re $b \succeq x \succeq w$.

Most már kimondjuk az alaptételt.

F.1. tétel. *(Neumann–Morgenstern, 1947.) Az axiómák teljesülése esetén létezik és lényegében egyértelműen meghatározott az NM-hasznosságfüggvény.*

Bizonyításvázlat. Normálás: $u(w) = 0$ és $u(b) = 1$. Konstrukció: Legyen $b \succeq z \succeq w$, ekkor C1. szerint létezik pontosan egy olyan p_z valószínűség, amelyre $p_z \circ b + (1 - p_z) \circ w \sim z$. Ekkor (ii) folytán $u(z) = p_z u(b) + (1 - p_z)u(w) = p_z$. Számolással ellenőrizhető, hogy a szerkesztett hasznosságfüggvény kielégíti a várható hasznosság (ii) feltételét és az (i) monotonitást (F.1. feladat).

Az egyértelműség a következőképpen igazolható: Legyen egy másik hasznosságfüggvény U, ahol $U(b) = \gamma > U(w) = \beta$. A várható hasznosságfüggvény tulajdonságát alkalmazva a fenti kombinációra és rendezve: $U(z) = p_z U(b) + (1 - p_z)U(w) = u(z)\gamma + (1 - u(z))\beta$, azaz $\alpha = \gamma - \beta$ esetén igaz a (iii) azonosság. ∎

F.1. feladat. Ellenőrizzük számolással, hogy a bizonyításban megszerkesztett hasznosságfüggvény kielégíti a várható hasznosság feltételét és monoton!

Megjegyzések. 1. A várható hasznosság tétele elsősorban nagyon kényelmes elemzési eszköz. Másodsorban megkövetelhető, hogy okos elemzők úgy rendezzék a bizonytalan lehetőségeket, hogy a választások kielégítsék az axiómákat.

2. A bizonyítás nagyon hasonlít a Debreu-féle tétel bizonyításához, amely általános rendezések hasznosságfüggvényel történő reprezentálhatóságáról szól (Zalai, 1989, 5. fejezet Függeléke). A jelen tétel azonban 1947-ből származik, Debreu-é pedig 1954-ből!

F.2. példa. Nagyon jó dolog autóval a hegyekbe menni, nagyon rossz dolog autóbalesetben meghalni. Elméletünk szerint létezik olyan kicsi pozitív baleseti valószínűség, amelynél közömbösek vagyunk a következő két lottó között: hegyek között autózva, autóbalesetben meghalunk, ill. otthon maradunk és TV-t nézünk. ∎

Kockázatkedvelés vagy kockázatkerülés

Az NM-féle hasznosságfüggvény nem ekvivalens a pénzben kifejezett nyereséggel, hiszen nem a várható pénzre, hanem a várható hasznosságra vonatkozik az additivitás.

F.3. példa. A lottójátékos alkalmanként 100 Ft-os biztos kiadással jut hozzá egy olyan szelvényhez, amelynek várható értéke kb. 30 Ft. Viszont a kis valószínűségű nyeremény olyan nagy, hogy hetente több millió, többé-kevésbé racionális egyén vesz lottót. ∎

Definíció. Egy *személyt kockázatkedvelőnek/kockázatkerülőnek* nevezünk, ha elutasít/előnyben részesít egy biztos pénzdíjat egy olyan lottóval szemben, amelynek a matematikai várható értéke azonos vele:

$$pu(x) + (1-p)u(y) > u(p \circ x + (1-p) \circ y): \qquad \textit{kockázatkedvelő,}$$

$$pu(x) + (1-p)u(y) < u(p \circ x + (1-p) \circ y): \qquad \textit{kockázatkerülő.}$$

A továbbiakban kockázatkerülő egyénekkel foglalkozunk, hiszen a normális esetekben ez fontosabb, mint a másik.

F.2. tétel. *Egy döntéshozó akkor és csak akkor kockázatkerülő, ha az u hasznosságfüggvény szigorúan konkáv ($u'' < 0$).*

Bizonyítás. Szigorúan konkáv u függvények egyik tulajdonsága (a Jensen-egyenlőtlenség) szerint két különböző $x \neq y$ pontot összekötő húr végig a függvénygörbe alatt helyezkedik el: tetszőleges $0 < p < 1$ esetén

$$pu(x) + (1-p)u(y) < u(px + (1-p)y).$$

∎

Történetileg az első (logaritmikus) hasznosságfüggvény a következő feladatban jelent meg:

F.4. példa. A szentpétervári paradoxon (Daniel Bernoulli, 1735). Fej-vagy-írást játszunk addig, amíg először nem nyerünk. Az n-edik lépésben 2^n a tét. A várható pénznyereség 1, de a várható tőkeigény végtelen. Ha a hasznosságfüggvény konkáv és korlátos, akkor a játék értéke véges. ∎

Definíció. (Arrow és Pratt.) Ha w a fogyasztó gazdagsága, akkor a *kockázatkerülés abszolút* és *relatív együtthatója* rendre

$$a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \qquad \text{és} \qquad r(w) = wa(w).$$

A következőkben bebizonyítjuk, hogy $a(w)$ valóban az abszolút kockázattal kapcsolatos, (angolul: Absolute Risk Aversion, rövidítése ARA). Tegyük föl, hogy az u hasznosságfüggvényű w gazdagságú fogyasztó egy p valószínűségű x nyereményért a $1-p$ valószínűségű $y(x)$ maximális veszteséget hajlandó elviselni.

F.3. tétel. *a) A veszteség/nyeremény arány a nulla határértéknél egyenlő a nyerési-valószínűség/vesztési-valószínűség arányával:*

$$y'(0) = \frac{p}{1-p}.$$

b) Adott nyerési-valószínűség esetén a maximális veszteség második deriváltja arányos a Arrow–Pratt-féle abszolút kockázatkerülési együtthatóval:

$$y''(0) = \frac{p}{(1-p)^2}a(w).$$

Bizonyítás. a) A közömbösségi feltétel szerint

$$pu(w+x) + (1-p)u(w-y(x)) = u(w).$$

Differenciáljuk az azonosságot x szerint:

$$pu'(w+x) - (1-p)u'(w-y(x))y'(x) = 0.$$

Lokálisan vizsgálódva ($x = 0$) adódik az első arányosság.

b) Mégegyszer differenciáljuk az azonosságot x-szerint és $x = 0$-t véve:

$$pu''(w) + (1-p)u''(w)y'(0)^2 - (1-p)u'(w)y''(0) = 0.$$

Behelyettesítve az $y'(0)$-ra kapott képletet, adódik

$$y''(0) = -\frac{pu''(w)}{(1-p)^2u'(w)}.$$

∎

Példák következnek állandó kockázatkerülési együtthatós hasznosságfüggvényre.

F.5. példa. Állandó abszolút kockázatkerülési együtthatós (CARA) hasznosságfüggvény: $u(w) = Ae^{-\sigma w}$. ∎

F.6. példa. Állandó relatív kockázatkerülési együtthatós (CRRA) hasznosságfüggvény: $u(w) = A\sigma^{-1}w^{\sigma}$, ha $\sigma < 1$, $\sigma \neq 0$ és $u(w) = A\log w$, ha $\sigma = 0$. (Ha $u(w)$-t nem szoroznánk be σ^{-1}-gyel (vagy σ-val), akkor $\sigma < 0$-nál $u(w)$ csökkenő fügvény volna!) ∎

Megjegyzés. Ha nincs kockázatvállalás ($\sigma = r(w) = -\infty$), akkor megszűnik az additivitás, eltűnnek a valószínűségek és $u(x,y) = \min(x,y)$.

Biztosítás

Talán a biztosítás a legegyszerűbb példa a kockázatkerülésre. Biztosítási modellünkben egy ügyfél eredeti jövedelme w, amelyet a p valószínűségű baleset $w-c < w$-re csökkent. Mivel az ügyfél hasznosságfüggvénye $W(w,w-c) = pU(w-c) + (1-p)U(w)$, és U *konkáv*, az ügyfélnek érdemes a balesetmentes jövedelmét csökkentenie, hogy baleset esetén megmaradó jövedelmét növelje. A biztosító közömbös a kockázattal szemben, számára csak az fontos, hogy ne veszítsen az üzleten (tökéletes verseny és nulla költség). A b biztosítási díj ellenében a balesetet szenvedő ügyfél k összegű kártérítést kap, így a biztosított fél feltételes jövedelme $w-b$ és $w-c-b+k$. Az ügyfél optimalizál: olyan k-t választ, amelynél $W(w-b,w-c-b+k)$ maximális. Biztosítási díj: $b = pk$.

*Teljes biztosítás*ról beszélünk, ha $k = c$.

F.4. tétel. *Teljes biztosításnál a biztosított biztosan megkapja a biztosításnélküli jövedelmének várható értékét, jóléti vesztesége minimális.*

Bizonyítás. A Jensen-egyenlőtlenség értelmében $W(w-b,w-c+(1-p)k) = pU(w-c+(1-p)k)+(1-p)U(w-pk) \le U[p(w-c+(1-p)k)+(1-p)(w-pk)] = U(w-pc)$, ahol a W minimumhelye $w-c+(1-p)k = w-pk$, azaz $k^{o} = c$.

Megjegyzések. 1. A valóságban a biztosításnak van költsége (d), sőt u normálprofitot is kell hoznia, ezért az általános esetben $b = pk$ helyett $b = (pk+d)(1+u)$ áll.

2. Nagyon gazdag embernek vagy intézménynek (államnak) nem érdemes biztosítást kötnie viszonylag kis károkra (például az osztrák államnak a Burgra, a Hungarocamionnak a járműveire), mert a biztosító haszna nagyobb lenne, mint a kockázati veszteség.

3. A biztosítás ténye és a kártérítés összege növelheti a baleset valószínűségét (p növekvő függvénye k-nak), ezért a probléma bonyolultabb: célszerű lehet csak részleges biztosítást nyújtani, $k < c$. Ezzel a kérdéssel az információgazdaságtan foglalkozik (vö. a 7. pont vége).

Kritika

Allais követve, több kutató rámutatott olyan esetekre, amikor a Neumann–Morgenstern-axiómák nem teljesülnek. Ezen irányzat leghatásosabb képviselőjét, Kahnemann-t (megosztott) közgazdasági Nobel-díjjal jutalmazták 2002-ben. Legnevezetesebb cikke Kahnemann–Tversky (1979), Kahnemann szerzőtársa, Tversky már korábban elhunyt.) Magyar nyelven jó összefoglalást ad Eső–Lóránth (1993) és Hámori (2003).

HIVATKOZÁSOK

ALLAIS, M. (1953): „Le comportement de l'homme rationnel devant le risqu, critique des postulates et axiomes de l'école Americain", *Econometrica 21* 503–546.

ARROW, K. J. (1970): *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Chicago, Markham.

ARROW, K. J. (1973) „Az egyetemi oktatás rostáló szerepe", *Arrow: Egyensúly és döntés. Válogatott tanulmányok*, Bp, KJK, 1979, 213–232.

AUMANN, R.–SHAPLEY, L. S. (1973): *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, Princeton University Press.

BERTRAND, J. (1883): „Théorie Mathématique de la Richesse Social", *Journal des Savants* 499–508.

BILLERA, L. J.–HEATH, D. C.–RAANAN, J. (1978): „Internal Telephone Billing Rates – A Novel Approach of Non-Atomic Game Theory", *Operations Research 26* 956–965.

BONDAREVA, O. N. (1963): „A lineáris programozás néhány alkalmazása a kooperatív játékok elméletére", *Problemi Kibernyetiki 10* 119–139.

COURNOT, A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, angolul: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, New York, Macmillan, 1897.

DEBREU, G.–SCARF, H. (1963): „A Limit Theorem on the Core of an Economy", *International Economic Review 4* 235–246.

EDGEWORTH, F. (1881): *Mathematical Physics*, London, Kegan.

EDGEWORTH, F. (1897): „La Teoria Pura di Monopolio", *Giornale degli Economisti 40* 13–31, angolul: „The Pure Theory of Monopoly", Edgeworth, ed. *Papers Relating to Political Economy, 1*, London, Macmillan, 1925.

ESŐ, P.–LÓRÁNTH, GY. (1993) „A racionálitás közgazdasági értelmezéséről: I. rész: Jól viselkednek-e a preferenciák?" *Közgazdasági Szemle 40* 311–324.

FILEP, L. (1985): *Játékelmélet*, Bp. Tankönyvkiadó.

FORGÓ, F.–PINTÉR, M.–SIMONOVITS, A.–SOLYMOSI, T. (2005): Játékelmélet. http://www.uni-corvinus.hu/ pmiklos/Works/PDF/forgo_jatekelmelet.pdf

FORGÓ, F.–SZÉP, J.–SZIDAROVSZKY, F. (1999): *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications*, Dortrecht, Kluwer Academic Publisher.

GIBBONS, R. (1992): *Bevezetés a játékelméletbe,* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2004.

GÖMÖRI, A. (2001): *Információ és interakció*, Bp. Typotex.

GYETVÁN, F. (1994) „Játékelméleti megközelítése a hatalmi erők értékelésére a magyar parlamentben", *Szigma 25* 77–86.

HARSANYI, J. (1967–68): „Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players", *Management Science 14*, 159–182, 320–334 és 486–502.

HÁMORI, B. (2003): „Kísérletek és kilátások Daniel Kahnemann..." *Közgazdasági Szemle 50*, 779–799.

HEGEDŰS, M.–ZALAI, E. (1978): *Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben*, Bp. KJK.

HOTELLING, H. (1929): „Stability of Competition", *Economic Journal 39* 41–57.

KAHNEMANN, D.–TVERSKY, A. (1979): „Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk", *Econometrica 47* 263–291.

KUHN, H. W. (1953): „Extensive Games and the Problem of Information", *Kuhn–Tucker, eds.* 193–216.

KUHN, H. W.–TUCKER, A. eds. (1953): Contributions to the Theory of Games, Vol. II. *Annals of Mathematical Studies 28* Princeton, Princeton University Press.

LEVHARI, D.–MIRMAN, L. J. (1980): „The Great Fish War: An Example using a Dynamic Cournot-Nash Solution", *The Bell Journal of Economics 11* 322–334.

MAYNARD SMITH, J. (1974) „The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflict”, *Journal of Theoretical Biology 47* 209–221.

MAS-COLELL, A.–WHINSTON, M. D.–GREEN, J. R. (1995): *Microeconomic Theory*, New York, Oxford University Press.

MÉRŐ, L. (1996): *Mindenki másképp egyforma*, Bp. Tericum.

NASH, J. (1951): „Non-Cooperative Games”, *Annals of Mathematics 54* 289–295.

NEUMANN, J. (1928): „A társasjátékok elméletéhez,” magyarul: *Neumann (1965)*, 121–156.

NEUMANN, J. (1965): *Válogatott előadások és tanulmányok*, Bp., KJK, 1965.

NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. (1944): *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.

NIKAIDO, H.–ISODA, K. (1955): „Note on Noncooperative Convex Games”, *Pacific Journal of Mathematics 5* 807–815.

OSBORNE, M. J.–RUBINSTEIN, A. (1994): *A Course in Game Theory*, Cambridge, MA, MIT Press.

RASMUSEN, E. (1989): *Games and Information: An Introduction to Game Theory*, Oxford, Blackwell.

ROSENTHAL, R. W. (1981): „Games of Perfect Information, Predatory Prices and the Chain-Store Paradox”, *Journal of Economic Theory 45* 1-32.

RUBINSTEIN, A. (1982): „Perfect Equilibrium in a Bargaining Model”, *Econometrica 50* 97–110.

SALANT, S.–SWITZER, S.–REYNOLDS, R. (1983): „Losses from Horizontal Mergers: The Effects of an Exogenous Change in Industry Structure on Cournot–Nash Equilibrium”, *Quarterly Journal of Equilibrium 98* 185–199.

SAMUELSON, L. (1997): „Evolutionary Game Theory and Equilibrium Selection”, Cambridge MA, MIT Press.

SCHWALBE, U.–WALKER, P. (2001): „Zermelo and the Early History of Game Theory” *Games and Economic Behavior 34* 123–137.

SELTEN, R. (1975): „Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games”, *International Journal of Game Theory 4* 25–55.

SELTEN, R. (1978): „The Chain Store Paradox”, *Theory and Decision 9* 127–159.

SHAPLEY, L, S. (1953): „A Value for n-Person Games”, *Kuhn–Tucker, eds.*, 307–317.

SHAPLEY, L, S. (1967): „On Balanced Sets and Cores”, *Naval Research Logistic Quarterly 14* 453–460.

SHUBIK, M. (1962) „Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing”, *Management Science 8* 325–343.

SIMONOVITS, A. (1980): „A költségmegosztás elméletéről”, *Szigma 13* 153–169.

SIMONOVITS, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Bp. KJK.

SPENCE, A. M. (1973): „Job Market Signalling”, *Quarterly Journal of Economics 77* 355–374.

SZATMÁRI. A. (1996): „Aukciók, avagy a képbe kerül, ha a Louvre a képbe kerül?”, *Közgazdasági Szemle 43* 303–314.

SZÉP, J.– FORGÓ, F. (1974): *Bevezetés a játékelméletbe*, Budapest, KJK.

SZIDAROVSZKY, F.–MOLNÁR, S. (1986): *Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal*, Bp., Műszaki Kiadó.

TIROLE, J. (1988): *The Theory of Industrial Organization*, Cambridge, MA, MIT Press.

VARIAN, H. (1992): *Microeconomic Analysis*, New York, Norton, 3. kiadás.

VICKREY, W. (1961): „Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders”, *Journal of Finance 16* 8–37.

VINCZE, J. (1991) „Fejezetek az információ közgazdaságtanából: I. A morális kockázat, II. A kontraszelekció, III. Morális kockázat és kontraszelekció az időben”, *Közgazdasági Szemle 37* 134–152, 289–306 és 435–445.

WEIBULL, J. W. (1995): *Evolutionary Game Theory,* Cambridge MA, MIT Press.

ZALAI, E. (1989): *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Bp. KJK.

FELADATMEGOLDÁSOK

1.1. feladat. Lásd 1.2. feladat megoldását.

1.2. feladat. a) A (H,H) pár nem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára –3, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz K-t választja, akkor hozama 0-ra nő. A (K,K) pár sem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára 1, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz H-t választja, akkor hozama 2-re nő. Viszont a (H,K) és a (K,H) pár mindegyike Nash-egyensúly. Pl. ha (K,H)-tól az 1. játékos eltérne, akkor hozama 0-ról –3-ra csökkenne; ha a 2. játékos térne el, akkor pedig annak hozama 2-ről 1-re esne.

b) Tegyük föl, hogy az 1. a Hajt stratégiát ξ, a Kitér stratégiát $1-\xi$ valószínűséggel választja; a 2. pedig η, ill. $1-\eta$ valószínűséggel. Ekkor

$$u_1(\xi,\eta) = \xi\eta\cdot(-3) + \xi(1-\eta)\cdot 2 + (1-\xi)\eta\cdot 0 + (1-\xi)(1-\eta)\cdot 1 = -4\xi\eta + \xi - \eta + 1.$$

Deriválva ξ szerint: $u_{1,\xi} = -4\eta + 1$, $\eta^* = 1/4$-nél 0, tehát ott u_1-nek lokális és globális maximuma van. Szimmetria miatt $\xi^* = 1/4$-ben u_2-nek lokális és globális maximuma van.

c) Csak akkor van halál, ha mindkét játékos egymástól függetlenül H-t játszik, ennek valószínűsége $\xi^*\eta^* = 1/16$. Az életben maradásé tehát $15/16$.

d) $u_1(H,K) = 2$, $u_1(K,H) = 0$ és $16u_1(\xi^*,\eta^*) = -3 + 3\cdot 2 + 0 + 3\cdot 3\cdot 1$, azaz $u_1(\xi^*,\eta^*) = 12/16 = 3/4$.

1.3. feladat. Triviális. A kevert stratégia (1/3, 2/3), vö. 1.2. feladat.

2.1. feladat. Az 1. játékos haszna az s_1^1 döntés esetén nagyobb, mint az s_1^2 döntés esetén – ha a 2. játékos döntése s_2^1, akkor $u_1^{11} > u_1^{21}$; ha a 2. játékos döntése s_2^2, akkor $u_1^{12} > u_1^{22}$.

A 2. játékos haszna az s_2^1 döntés esetén nagyobb, mint az s_2^2 döntés esetén – ha az 1. játékos döntése s_1^1, akkor $u_2^{11} > u_2^{12}$; ha az 1. játékos döntése s_1^2, akkor $u_2^{21} > u_2^{22}$.

2.2. feladat. Ha akármelyik játékos többet kér, mint 100, akkor 100-ra csökkentve az igényt nem jár rosszabbul. Tegyük tehát föl, hogy mindkét igény 0 és 100 között van, megengedve a szélső értékeket.

a) Az 1. játékosnak *nincs szigorúan dominált* stratégiája, mert ha a 2. játékos 100-at kér, akkor az 1. 0-t kap, függetlenül attól, hogy mit lépett. Ugyanúgy a 2.-re.

b) Ha az 1. játékos 0-t kér, azt „gyengén dominálja” az 1 Ft-os kérelem, mert az alternatív esetben az 1. játékos csak az ellenfél 100-as igényénél kapna 0-t, egyébként 1-et kap. Szimmetria miatt ugyanez igaz a 100-as igényre. A többi eset nem gyengén dominált, mert az x igény ($x = 1, \dots, 99$) szigorúan a legjobb válasz a 2. játékos $100-x$ igényére.

c) Ha van domináns stratégia, akkor minden más stratégia dominált.

3.1. feladat. a) Az 1. játékos haszna az s_1^1 döntés esetén nagyobb, mint az s_1^2 döntés esetén, amikor a 2. játékos döntése s_2^1: $u_1^{11} > u_1^{21}$.

A 2. játékos haszna az s_2^1 döntés esetén nagyobb, mint az s_2^2 döntés esetén, amikor az 1. játékos döntése s_1^1: $u_2^{11} > u_2^{12}$.

b) Igen, mert a 2.1. feladat négy feltétele közül csak kettőnek kell teljesülnie: vö. a).

c) $v_1 = \min_j \max_i u_1^{ij} = \min_j\{u_1^{11}, \max\{u_1^{12}, u_1^{22}\}\}$, azaz $u_1^{11} > u_1^{12}, u_1^{22}$.

3.2. feladat. Nash-egyensúly: $(x{,}100-x)$, $x = 0, 1, \ldots, 99, 100$, mert x és $100-x$ egymásra a legjobb válaszok. Közvetlenül: ha rögzítjük a 2. játékos igényét: $100 - x$, akkor az 1. játékos x-nél többet kérve 0-t kap, x-nél kevesebbet kérve x-nél kevesebbet kap, tehát rosszul jár, s ugyanúgy a 2.-re. (Figyelem: gyengén dominált stratégiapár is lehet Nash-egyensúly, bár csak elfajult egyensúly.)

3.3. feladat. Legyen a kétszemélyes játék a következő: $S_1 = S_2 = S$, $u_1(x{,}y) = -|x - f(y)|$, $u_2(x{,}y) = -|x - y|$. Létezik a Nash-egyensúly: $(x^*{,}y^*)$. A 2. játékosnál a legjobb válasz $y = x$, az 1. játékosnál $x = f(y)$.

3.4. feladat.* a) $f_i^j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{m_i} f_i^j = 1$. Ha σ a függvény fixpontja, akkor rendezéssel $g_i^j = \sigma_i^j \sum_k g_i^k$. Ha σ nem volna Nash egyensúly, akkor alkalmas i-re $\sum_k g_i^k(\sigma) > 0$ lenne, azaz $\sigma_i^j > 0$ és $g_i^j > 0$, azaz $u_i(s_i^j{,}\sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i{,}\sigma_{-i})$ ekvivalens lenne, de ez ellentmondana $u_i(\sigma_i{,}\sigma_{-i}) = \sum_j u_i(s_i^j{,}\sigma_{-i})\sigma_i^j$-nek.

b) Az f függvény az S kompakt és konvex halmazon folytonos, az S szimplexet önmagába képezi le, és a Brouwer-féle fixpont-tétel értelmében van fixpontja: $\sigma^{\mathrm{o}} = f(\sigma^{\mathrm{o}})$.

4.1. feladat. a) Cournot-egyensúly. Az 1. játékos nyeresége $\pi_1(q_1{,}q_2) = (1 - c_1 - q_1 - q_2)q_1$. Deriválva q_1 szerint és nullává téve a deriváltat: $\pi_{1,q_1}(q_1{,}q_2) = 1 - c_1 - q_2 - 2q_1 = 0$, rendezve: $2q_1 + q_2 = 1 - c_1$. Szimmetria miatt: $q_1 + 2q_2 = 1 - c_2$. Megoldva az egyenletrendszert:

$$q_1^* = \frac{1 - 2c_1 + c_2}{3} \qquad \text{és} \qquad q_2^* = \frac{1 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

A feladat közgazdaságilag csak akkor értelmes, ha mindkét vállalat kibocsátása pozitív: $2c_1 - c_2 < 1$ és $2c_2 - c_1 < 1$. Szimmetrikus esetben $c_1 = c_2 < 1$.

b) A

$$q_1' = \frac{1 - c_1 - q_2}{2} \qquad \text{és} \qquad q_2' = \frac{1 - c_2 - q_1}{2}$$

legjobb-válasz függvény kontrakció, $\lambda > 1/2$-del.

4.2. feladat. Az 1. játékos nyeresége $\pi_1(q_1{,}q_2) = (1 - (q_1 + q_2)^2)q_1$. Deriválva q_1 szerint és nullává téve a deriváltat: $\pi_{1,q_1}(q_1{,}q_2) = 0$. Bevezetve a $Q = q_1 + q_2$ jelölést és rendezve: $-2Qq_1 + 1 - Q^2 = 0$. Szimmetria miatt: $-2Qq_2 + 1 - Q^2 = 0$. Megoldva az egyenletrendszert: $q_1 = q_2$, $Q = 2q$, tehát $-4q^2 + 1 - 4q^2 = 0$, azaz $q_1^* = q_2^* = 1/\sqrt{8}$.

4.3. feladat. Legyen p_1 és p_2 az x_1-ben és x_2-ban elhelyezkedő eladó által szabott ár és ϑ a fajlagos közlekedési költség. Az x-ben tartózkodó vevő költsége $p_1 + \vartheta|x - x_1|$, illetve $p_2 + \vartheta|x - x_2|$ lenne, aszerint hogy melyik eladóhoz megy. Mivel optimalizál, a kisebb költségű helyre megy. A közömbös vevő helyét a $p_1 + \vartheta|x^* - x_1| = p_2 + \vartheta|x^* - x_2|$ egyenlet határozza meg, feltéve, hogy $x^* \in [0, 1]$. Az $x = 0$-ban levő vevő akkor vásárol a közelebbi eladótól, ha $p_1 + \vartheta x_1 < p_2 + \vartheta x_2$, azaz $p_1 - p_2 < \vartheta(x_2 - x_1)$. Szimmetria miatt az $x = 1$-ben levő vevő akkor vásárol a közelebbi eladótól, ha $p_1 + \vartheta(1 - x_1) > p_2 + \vartheta(1 - x_2)$, azaz $p_2 - p_1 < \vartheta(x_2 - x_1)$.

Tehát a közömbös vevő a két fagylaltos között helyezkedik el:

$$x^* = \frac{p_2 - p_1 + \vartheta(x_2 - x_1)}{2\vartheta}.$$

Ennek figyelembevételével kiszámítható a két eladó haszna és attól kezdve a Bertrand-modell alkalmazandó. Az árak

$$p_1 = \frac{(2 + x_1 + x_2)\vartheta}{3} \qquad \text{és} \qquad p_2 = \frac{(4 - x_1 - x_2)\vartheta}{3}.$$

Érdekes, hogy ez az elemzés csak lokálisan érvényes, és ha a két fagylaltos közel van egymáshoz, akkor nincs tiszta Nash-egyensúly (Rasmusen, 1989).

4.4. feladat. A 4.1. példa szerint $2\pi_1^*(n) > \pi_1^*(n+1)$, ha $n > 2$ és egyenlőség áll, ha $n = 2$

5.1. feladat. Tetszőleges korlátos és folytonos függvényre igaz, hogy

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1,s_2) \leq \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1,s_2).$$

A tulajdonképpeni feladat az ellentétes irányú egyenlőtlenség igazolása.

(5.3) értelmében

$$\min_{s_2} u(s_1^*,s_2) \geq u(s_1^*,s_2^*) \geq u(s_1,s_2^*).$$

Vegyük a kifejezések maximumát s_1 szerint:

$$\max_{s_1} \min_{s_2} u(s_1^*,s_2) \geq \max_{s_1} u(s_1,s_2^*),$$

ahol a második kifejezés nyilvánvalóan legalább akkora, mint $\min_{s_2} \max_{s_1} u(s_1,s_2)$, azaz igazoltuk az ellenkező irányú egyenlőtlenséget is.

5.2. feladat. Legyen ξ és η annak a valószínűsége, hogy az 1., illetve a 2. ország A-ba küldi a harci egységét. Ekkor $u(\xi,\eta) = v_A\xi(1-\eta) + v_B(1-\xi)\eta$ az 1. ország hasznosságfüggvénye. $u(\xi,\eta) = v_A\xi - [v_A\xi + v_B(1-\xi)]\eta$ miatt az η szerinti szélsőérték akkor lép fel, ha $v_A\xi + v_B(1-\xi) = 0$, azaz $\xi^* = v_B/(v_A+v_B)$. Szimmetria okokból $\eta^* = v_A/(v_A+v_B)$. Tehát a támadónak a kisebb értékű objektumot nagyobb valószínűséggel érdemes támadnia, a védelemnek viszont kisebb valószínűséggel érdemes védenie.

5.3. feladat. Legyen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor az (1, 1) stratégiapár Nash-egyensúly, a játék (egyik) értéke 1. A (2, 1) stratégiapár viszont nem Nash-egyensúly, hiszen a 2. játékosnak érdemes ekkor a 2. stratégiáját választani, hiszen ekkor –1 helyett 0-t nyer.

5.4. feladat. Legyen az LP feladat primál megoldása x, a duál megoldása pedig y. Legyen $\lambda = 1/(\mathbf{1}x + \mathbf{1}y + 1)$, $s = \lambda x$ és $r = \lambda y$. Ekkor a $z = (s,r,\lambda)$ vektor kielégíti $Pz \leq 0$ feltételt.

6.1. feladat. Valóban, (e_2,e_2) Nash-egyensúly, de bármely olyan kezdőértékre, amelyre $x_{1,0} > 0$, $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 1$. ∎

7.1. feladat. a) Az 1. vállalat nyeresége $\pi_1(q_1,q_2) = (1-c_1-q_1-q_2)q_1$. Mivel a 2. vállalat kibocsátása lineárisan szerepel a profitfüggvényben, a várható profit a várható kibocsátástól, $\mathbf{E}q_2 = (\underline{q}_2 + \bar{q}_2)/2$-től, függ. Adottnak véve a 2. vállalat döntésének várható értékét, $\mathbf{E}\pi_1(q_1,q_2) = (1 - c_1 - \mathbf{E}q_2)q_1 - q_1^2$. Deriválva q_1 szerint és nullává téve a deriváltat: $\mathbf{E}\pi_{1,q_1}(q_1,q_2) = 1 - c_1 - \mathbf{E}q_2 - 2q_1 = 0$, rendezve: $q_1(c_1) = (1 - c_1 - \mathbf{E}q_2)/2$. Várható értéket véve c_1 szerint: $\mathbf{E}q_1 = (1 - \mathbf{E}c - \mathbf{E}q_2)/2$, rendezve: $2\mathbf{E}q_1 + \mathbf{E}q_2 = 1 - \mathbf{E}c$. Szimmetria miatt: $\mathbf{E}q_1 + 2\mathbf{E}q_2 = 1 - \mathbf{E}c$. Megoldva az egyenletrendszert: $\mathbf{E}q_1 = \mathbf{E}q_2 = (1 - \mathbf{E}c)/3$. Visszahelyettesítve:

$$q_1(c_1) = \frac{1 - c_1 - \frac{1-\mathbf{E}c}{3}}{2} = \frac{2 - 3c_1 + \mathbf{E}c}{6}.$$

Ugyanez $q_2(c_2)$-re.

b) A közgazdasági feladatnak csak akkor van értelme, ha az ár, a kibocsátások és a profitok egyaránt pozitívak. A maximális profitok pozitívak, ha az ár pozitív. Az ár akkor és csak akkor pozitív (megfelelően kicsi pozitív kibocsátásokra), ha $\bar{c} < 1$. Pozitív árak esetén a kibocsátások is pozitívak.

7.2. feladat. Elegendő a két legtöbbet ígérő játékost vizsgálni. $v_1 > v_2$, b_1, b_2. Ha $b_1 \geq b_2$, akkor $u_1 = v_1 - b_2$ és $u_2 = 0$. Ha $b_1 < b_2$, akkor $u_2 = v_2 - b_1$ és $u_1 = 0$. Egyik játékosnak sem érdemes fölülígérnie, mert szaván fogják, és veszteséggel rajta ragadhat az áru. Egyik játékosnak sem érdemes aláígérni, hiszen a győztesnek is csak a második legnagyobb ajánlatot kell kifizetnie, viszont az aláígérőtől „elhappolhatják" a tárgyat.

7.3. feladat. A 7.2. tétel bizonyításától két ponton térünk el: egyrészt a játékosok száma csupán 2, másrészt az értékek eloszlása nem egyenletes, hanem $F(v) = v^\alpha$. Követve és módosítva az ottani érvelést: $P(b_1 > b_2) = F(v_1)^\alpha = F(V(b_1))$, azaz, $u_1(b_1,b_2) = F(V(b_1))(v_1 - b_1)$. Elhagyva az indexet, ekkor $u(b) = F(V(b))(v - b)$, amelyet b szerint deriválva adódik a maximumfeltétel:

$$u'(b) = F'(V(b))V'(b)(v - b) - F(V(b)).$$

Végül $v = V(b)$-t behelyettesítve a maximumfeltételbe

$$F'(V(b))V'(b)(V(b) - b) = F(V(b)).$$

Felhasználva, hogy $F'(v) = \alpha v^{\alpha-1}$, adódik, hogy

$$\alpha V'(b)(V(b) - b) = V(b).$$

A differenciálegyenletet megoldva megkapjuk az egyensúlyi függvényt: $V(b) = 1 + 1/\alpha b$

8.1. feladat. Stackelberg-egyensúly. A követő vállalat reakciófüggvényét már a Cournot-egyensúlynál (4.1. feladat) meghatároztuk: $q_2 = (1 - c_2 - q_1)/2$. Behelyettesítve $\pi_1(q_1,q_2) = (1 - c_1 - q_1 - q_2)q_1$-be a reakciófüggvényt: $\pi_1(q_1,q_2(q_1)) = (1 - q_1 + c_2 - 2c_1)q_1/2$. Maximumnál a szorzat két tényezője egyenlő:

$$q_1^{\mathrm{S}} = \frac{1 - 2c_1 + c_2}{2}, \qquad \text{tehát} \qquad q_2^{\mathrm{S}} = \frac{1 + 2c_1 - 3c_2}{4}.$$

A feladat közgazdaságilag csak akkor értelmes, ha mindkét vállalat kibocsátása pozitív: $2c_1 - c_2 < 1$ és $3c_2 - 2c_1 < 1$. Szimmetrikus esetben $c_1 = c_2 < 1$.

8.2. feladat. Visszafelé kell megoldani a feladatot. Legyen $T = 2K$ páros szám az alku időtávja. Legyen rendre x_t és $1 - x_t$ a t-edik időszakban az 1. és a 2. játékos megajánlott része. A 8.6. példa logikáját követve $t = 2k$-edik páros időszakban az 1. játékos tesz ajánlatot: x_t. Az előző, $t - 1 = 2k - 1$-edik időszakban a 2. játékosnak elegendő, ha csak αx_t-t ajánl, tehát magának megtartana $1 - \alpha x_t$-et. Az ezt megelőző, $t - 2 = 2k - 2$-edik időszakban az 1. játékosnak elegendő, ha csak $\beta(1 - \alpha x_t)$-t ajánl a 2. játékosnak, tehát magának megtartana $1 - \beta(1 - \alpha x_t)$-et. Tehát $y_k = x_{2k}$ jelöléssel, $y_{k-1} = 1 - \beta(1 - \alpha y_k) = 1 - \beta + \alpha\beta y_k$. Elsőrendű lineáris differenciaegyenletet kaptunk, amelynek fixpontja $y^o = (1 - \beta)/(1 - \alpha\beta)$. Az $\hat{y}_k = y_k - y^o$ eltérésváltozó bevezetésével $\hat{y}_{k-1} = \alpha\beta\hat{y}_k$ homogén egyenletet kapjuk, amely egyszerű mértani sorozat: $\hat{y}_0 = (\alpha\beta)^K \hat{y}_{2K}$, azaz jelölve az időtávot is: $y_0(2K) = y^o + (\alpha\beta)^K(1 - y^o)$.

Végtelen időszakra térve $y_0(\infty) = y^o$. Belátható, hogy más megoldás nincs (Rubinstein, 1982).

9.1. feladat. A 9.2. tételben $u_i(s^*) = -2$, $u_i(\bar{s}) = 2$ és $u_i^B = 3$. Behelyettesítve: $\beta_i \geq (3 - 2)/(3 - (-2)) = 1/5$.

12.1. feladat. $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 2/3$ és $v(\{1, 2\})$=1.

12.2. feladat. Átrendezve: Igazolandó

$$v(S) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T) - v(T).$$

Legyen $\{i_1, \ldots, i_p\} = S \cap (N \backslash T)$. Ekkor $\{i_1, \ldots, i_p\} = (S \cup T) \cap T$. Felírva a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát a határhozzájárulások teleszkópösszegeként, és alkalmazva a játék konvexitásának eredeti értelmezését, adódik az állítás.

13.1. feladat. b) Legyen W a vétójátékosok halmaza, és $V = N \backslash W$. Tegyük föl, hogy a játéknak nem üres a magva, pl. az x elosztás eleme. Írjuk föl a hatékony elosztás definícióját W-re: $x(W) \geq 1$. Mivel $v(N) = 1$ és a függvény szuperadditív, $x(V) = 0$. a) Ha W üres, akkor $V = N$, ellentmondás a $x(N) \geq v(N)$ követelménnyel.

13.2. feladat.

13.3. feladat. Indirekt. Tegyük föl, hogy az 1. és a 2. fogyasztónak mind a kezdőkészlete, mind a hasznosságfüggvénye azonos: $\omega_1 = \omega_2$ és $u_1 \equiv u_2$, de az optimális elosztása különböző: $x_1^* \neq x_2^*$. Módosítsuk az elosztásokat: $x_1 = x_2 = (x_1^* + x_2^*)/2$. A költségvetési feltétel változatlan marad és a konkavitás miatt az új hasznosságok szigorúan nagyobbak, mint a régiek.

14.1. feladat.

$$\varphi_1(v) = \frac{v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) - 2v(\{2, 3\}) + 2}{3}, \qquad \text{stb.}$$

14.2. feladat. A mag (0, 0, 1), a Shapley-érték pedig (1/6, 1/6, 2/3).

14.3. feladat. Számítsuk ki a határhozzájárulásokat egy tetszőleges $T \subseteq N$ részhalmazra. A játék szerkezete miatt $d_i(T) = v(T) - v(T \backslash \{i\})$ általában nulla, kivéve, amikor 1–0=1 alak lép fel, ha $S \backslash T = \{i\}$. Ez $|S|$-féleképpen teljesülhet, tehát $\varphi_i(v) = 1/|S|$ és 0 egyébként.

14.4. feladat. Kétszemélyes játék Shapley-értéke $v(\{A\}) = 1$, $v(\{B\}) = v(\{A, B\}) = 3$ mellett

$$\varphi_A(v) = \frac{v(\{A\}) + v(\{A, B\}) - v(\{B\})}{2} = \frac{1+3-3}{2} = \frac{1}{2}$$

és

$$\varphi_B(v) = \frac{v(\{B\}) + v(\{A, B\}) - v(\{A\})}{2} = \frac{3+3-1}{2} = \frac{5}{2}.$$

∎

F.1. feladat. a) Legyen $z = p \circ x + (1-p) \circ y$. Legyen p_x és p_y olyan valószínűség, amelyre $u(x) = p_x$ és $u(y) = p_y$, azaz $p_x \circ b + (1-p_x) \circ w \sim x$ és $p_y \circ b + (1-p_y) \circ w \sim y$. A kombinálási szabály szerint $z \sim p(p_x \circ b + (1-p_x) \circ w) + (1-p)(p_y \circ b + (1-p_y) \circ w) = (pp_x + (1-p)p_y) \circ b + (p(1-p_x) + (1-p)(1-p_y)) \circ w$. „Visszaírva”: $u(z) = pp_x + (1-p)p_y = pu(x) + (1-p)u(y)$.

b) Legyen $x \succeq y$. Ahhoz hasonlóan, amit az F.1. tétel bizonyításában láttuk, igazolható, hogy létezik olyan $0 < p \leq 1$, amelyre $y \sim p \circ x + (1-p) \circ w$, azaz $u(y) = pu(x) \leq u(x)$.