Simonovits András:

MAKROÖKONÓMIAI VÁZLAT[1]

MTA, Közgazdaságtudományi Kutató Központ
Budapest, Budaörsi út 45, 1112
e-mail: simonov@econ.core.hu
2012. április

[1] Robert E. Hall–John B. Taylor: Makroökonómia, Bp. KJK 1997. könyv alapján

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

Ezt a jegyzetet a BME alkalmazott matematikus szakos hallgatói számára készítettem. A törzsanyagot Hall–Taylor (1997) könyve alapján írtam. Akinek van pénze, annak érdemes beszereznie magát a könyvet, vagy más makroökonómiai tankönyvet: a frissebb Mankiw (1999)-t vagy Mellár (1998), Meyer–Solt (1999) és Pete (1997) magyarul, és Burda–Wyplosz (1997) angolul. A függelékekben haladottabb matematikai modelleket mutatok be. Aki ezeket részletesebben kívánja tanulmányozni, annak az irodalomjegyzékben megadott források mellett ajánlom saját munkáimat: Simonovits (1998) és (2002).

Ebben a jegyzetben próbálom összefoglalni a legfontosabb tudnivalókat. Tekintettel a hallgatóság matematikai előképzettségére, ahol lehet, képletekkel dolgozom. Figyelembe véve, hogy Magyarországon élünk, igyekszem magyar példákat is hozni.

A szerzők legfontosabb ábráit csatolom és magyar adatokkal egészítem ki.

Saját érdeklődésemet követve röviden vázolom a makroökonómiából kihagyott demográfiát és nyugdíjrendszereket. Mivel világrengető időket élünk, a megfelelő helyeken kitérek a 2008-ban kezdődő világválságra.

Reményeim szerint a jegyzetet a továbbiakban tökéletesítem, ezért is minden megjegyzést szívesen veszek.

Budapest, 2012. január

Simonovits András

I. RÉSZ. A MAKRÓÖKONÓMIA ALAPJAI

A *makroökonómia* a közgazdaságtannak az az ága, amely arra keresi a választ, hogy miért és hogyan nő, ingadozik és változik a gazdaság időről időre. A közgazdaságtan másik ága a *mikroökonómia*, amely az egyéni fogyasztók, vállalatok és a piacok viselkedését tanulmányozza. Ami a mikroökonómiában adott (árak, jövedelmek, foglalkoztatás), az a makroökonómiában megmagyarázandó. Elvileg a makroökonómiának a mikroökonómiára kellene épülnie, ez azonban ma még(?) inkább vágy, mint valóság.

1. A makrogazdaság

1.1. A makrogazdaság teljesítménye

Vessünk először egy pillantást néhány jellegzetes EU-27 ország 2008. évi teljesítményére. Az összehasonlítás figyelembe veszi az egyes országok valutáinak különböző vásárlóerejét.

A. táblázat.

Néhány európai ország egy főre jutó össztermelési mutatója, EU-27=100, 2008.

Ausztria	Görögország	Szlovénia	Magyarország	Lengyelország
123	94	80	64	56

Ez a sorrend változik, például Magyarország sokáig fejlettebb volt, mint Görögország. A makrogazdaságok hosszú távon évi néhány százalékos ütemben nőnek, rövid- és középtávon azonban csökkenhetnek. Például 1929–33 között a Nagy Válság idején az egész világon a *kibocsátás* (GNP=Gross National Product) 10–40%-kal visszaesett, és évek kellettek ahhoz, hogy különböző országokban a termelési mutatók visszatérjenek a korábbi csúcsokhoz. (Hall–Taylor, 1.1. és 1.2. ábra.) Ugyanez történt a volt szocialista országokban az 1990-es években és szerte a fejlett világban 2008 őszétől kezdve. Az egy-két éves visszaeséseket *recesszió*nak nevezzük, ilyenek 2002 körül voltak legutóbb.

1. és 2. ábra

A foglalkoztatottság többé-kevésbé követi a kibocsátás alakulását, azonban a munka termelékenysége folyamatosan nő. (Hall–Taylor, 1.3. ábra.) Például Magyarországon 1999-ben kb. 25%-kal kevesebb dolgozó állított elő ugyanannyit, mint 1989-ben, azaz a *munkatermelékenység* kb. 33%-kal nőtt tíz év alatt, azóta ez a szám jelentősen, kb. 25%-kal tovább nőtt.

3. ábra

A makrogazdaság másik fontos mutatója az *inflációs ütem*, azaz az átlagos árszínvonal évi változási üteme. Az inflációt figyelmen kívül hagyó mutatókat a *nominális*, az inflációval kiigazított mutatókat a *reál* jelzővel nevezzük. (Hall–Taylor, 1.4. ábra.)

4. ábra

Ugyancsak fontos mutató a *kamatláb*, amely a hitel, illetve a kölcsön után fizetett díj. Az inflációt figyelmen kívül hagyó mutató a *nominális kamatláb*, az inflációval kiigazított mutató a *reálkamatláb*. (Hall–Taylor, 1.5. ábra.)

5. ábra

A piacgazdaságokban a *pénz mennyisége* fontos szerepet játszik, szintén nominális és reál változatban.

1.2. A hosszú távú növekedés magyarázata

A gazdaság megértésének első lépése a hosszú távú növekedés megértése. Teljes foglalkoztatottságot feltételezve, hogyan hat a tőke, a munka és a technikai fejlődés a kibocsátásra. Alapfeltevés, hogy az árak hosszú távon *rugalmasak*, és a gazdaság dinamikus *egyensúly*ban van. Az aggregált kereslet (adott viszonyok mellett összegzett kereslet) csak az árszínvonalra hat, a kibocsátást a potenciális GNP adja. (Rövid távon azonban az árak *ragadósak*, ezért a gazdaság rövid távon nincs egyensúlyban.)

1.3. Az ingadozások magyarázata: a teljes modell

A gazdaságot időnként *sokkok* érik: csökken/nő a fogyasztók kereslete, a vállalatok beruházása vagy az állami kiadás, esetleg ugrik a kőolaj ára (pl. 1999-és 15 dolláros mélypontról 2008 nyarán már 140 dollár fölé ugrott, majd a válság hatására 70 dollárra zuhant). Rövid távon az árakat merevnek vesszük, és ebből határozzuk meg a kibocsátást (Keynes, 1936).

1.4. Gondolati áramlatok a mai makroökonómiában

A *klasszikus makroökonómia* a kereslet-kínálat eszközét alkalmazza az egész gazdaságra. Alapvető felismerése, hogy az aggregált keresletet stabilan kell tartani. Az 1970-es évek válsága fölrobbantotta a makroökonómiai egyetértést. A *monetaristák* szerint a pénz mennyiségét a termelékenységet követve stabilan kell növelni, s akkor nincs infláció. Az *újklasszikusok* szerint a véletlen ingadozásoktól és tévedésektől eltekintve a gazdaság mindig egyensúlyban van, ezért az államnak passzívnak kell maradnia. A *keynesi iskola* szerint az ingadozások kilengése ügyes kormányzati politikával tompítható. A mostani válság hatására a hagyományos keynesi nézetek új erőre kaptak. (Az USÁ-ban az *állami* jelző az 50 tagállam valamelyikére vonatkozik, a szövetségi állam helyett *kormányzatot* mondanak.)

2. A gazdasági teljesítmény mérése: kibocsátás és jövedelem

Hogyan mérjük az 1. fejezetben bevezetett változókat?

2.1. A bruttó nemzeti termék (GNP)

Az 1.1. alfejezetben elmondottakat pontosítva, létezik folyóáras (nominális) és állandóáras (reál) GNP. Emellett a GNP-t háromféleképp mérhetjük: kiadás, termelés és jövedelem oldalról.

2.2. A GNP kiadási oldala

Bruttó nemzeti termék = Fogyasztás +Beruházás + Kormányzati kiadások + Nettó export.

Angolul: GNP = Consumption+Investment+Government purchases+Net export. Képletben:

$$Y = C + I + G + X.$$

A *fogyasztás* a háztartások által adott időszakban elköltött jövedelem. Három csoportja van: tartós javak, nem tartós javak és szolgáltatások. A *beruházás* adott időszakban a vállalatoknak építményekre, berendezésekre és készletekre fordított kiadása és a háztartásoknak a lakásépítésre fordított kiadása.

A *tőkeállomány* a korábbi beruházások eredményeképpen létrejött és fennmaradt termelő tőke teljes mennyisége. Ha megbecsüljük a tőkeállomány évi kopását, az *amortizáció*t, akkor a következő összefüggést kapjuk: Tőkeállomány az adott évben=Tőkeállomány az előző évben+Beruházás–Amortizáció. Matematikai jelölésekkel:

$$K_t = K_{t-1} + I_t - A_t.$$

(Valójában sok beruházás több évre elhúzódik, ezért meg kell különböztetni az adott évben indított beruházásokat, az éves beruházási teljesítést és az adott évi üzembe helyezéseket.)

Az *export* áruknak és szolgáltatásoknak külföldre való kivitele. Az *import* áruknak és szolgáltatásoknak külföldről való behozatala. Nettó export az export és az import különbsége, más néven: külkereskedelmi egyenleg.

Általában a GNP-nek kb. 2/3–3/4-e fogyasztás, 1/3–1/4-e beruházás. Az export, illetve az import aránya az ország nyitottságát fejezi ki, de persze ez utóbbi függ az ország méretétől is: minél kisebb egy ország, annál nyitottabbnak kell lennie.

Nézzük a külkereskedelem szerepét. Például az USA 2008. évi (júliustól júniusig számított) külkereskedelmi mérlege negatív, a hiány óriási; 836 milliárd dollár. Mivel az USÁ-nak kb. 300 millió lakosa van, az egy főre jutó hiány majdnem 3000 dollár, a GDP-nek több, mint 6%-a. A fizetési mérleghiány a válság hatására szinte megfeleződött. Magyarországon 2007-ben a fizetési mérleg hiánya szintén hatalmas volt, de a válság hatására szinte eltűnt, a hitelezők nyomására el kellett tűnnie (B. táblázat lejjebb).

2.3. A GNP megközelítése termékoldalról

Ha az egész gazdaság éves teljesítményét akarjuk mérni, nem szabad egyszerűen összeadni a különböző vállalatok bruttó kibocsátását, mert akkor egy dolgot többször számolnánk. Például az autógyártásnál a gumi értékét figyelembe vennénk a nyersgumigyártásban, az abroncsgyártásban, az autógyártásban és az autóeladásban. Ha viszont a nettó kibocsátásokat adjuk össze, akkor mindent csak egyszer számoltunk, s ez az értelmes eljárás.

2.4. A GNP megközelítése jövedelemoldalról

A termelés folyamán hozzáadott értékért az erőforrás tulajdonosok ellenszolgáltatást kapnak, a tőkések profitot és a munkások bért. Ezekből is kiadódik a GNP, más kifejezéssel: *nemzeti jövedelem.* Hasonlóan a beruházás-fogyasztás megoszláshoz, a profit-bér megoszlás is kb. 1/4–3/4.

Megjegyezzük, hogy a GNP-nél talán még gyakrabban alkalmazzák a GDP-t, Gross Domestic Product, bruttó hazai terméket, amely földrajzi, nem tulajdonosi alapon számol. Tehát, ha egy francia vállalatnak van egy német leányvállalata, akkor a német vállalat hozzáadott értéke a német GDP-hez, de a francia GNP-hez tartozik. Burda–Wyplosz (1997, 2.1. táblázata) alapján két szélső példát emelünk ki (1993-as adatok): Írországban a GNP 11%-kal volt kisebb, mint a GDP, ellenben Kuvaitban 18,5%-kal volt több.

2.5. Megtakarítás (S) és beruházás (I)

Zárt és kormányzat nélküli gazdaságban a kiadási és a jövedelmi szemlélet ekvivalenciájából azonnal következik a megtakarítás és a beruházás azonossága: $S = I$. Nyitott és kormányzott gazdaságban bonyolultabb a helyzet. Ennek tisztázására jelöléseket vezetünk be: F =kormányzati transzferek, N =kormányzati adósság kamatai, T =adók, S_{p} =magánmegtakarítás, S_{g} =kormányzati megtakarítás (azaz költségvetési egyenleg), S_{r} =külső megtakarítás. (Érdemes a nevekre utaló indexeket álló, nem pedig dőlt betűvel jelölni.)

A korábban bevezetett jelölésekkel a következő azonosságok írhatók föl:

$$S_{\mathrm{p}} = (Y + F + N - T) - C. \tag{2.1}$$

$$S_{\mathrm{g}} = (T - F - N) - G. \tag{2.2}$$

$$S_{\mathrm{r}} = -X. \tag{2.3}$$

Összeadva a három azonosságot, és összevonva a jobb oldali tagokat, adódik a beruházás:

$$I = S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{g}} + S_{\mathrm{r}} = Y - C - G - X. \tag{2.4}$$

2.6. Fizetési mérleg és az árfolyam

A folyó fizetési mérleg egy ország nettó exportját, a kormányzat ajándékait és kamattörlesztéseit követi nyomon. A *tőkemérleg* a kölcsönfelvételt és a -nyújtást rögzíti. Tanulságos a magyar folyó fizetési mérleget bemutatni, 2008-as hatalmas túlköltekezéssel, és a 2009-es drámai megszorítással, némi kerekítési hibával.

B. táblázat. *Magyarország fizetési mérlege, 2008–2009, mrd euró*

Évek	2008	2009
1. Külkereskedelmi mérleg	0,9	5,5
export	86,6	71,8
import	85,7	66,3
2. Jövedelmek és transzferek	–8,4	–5,3
3. Folyó fizetési mérleg	–7,5	0,2

Egy ország *valutaárfolyam*a egy másik országgal szemben azt fejezi ki, hogy hány hazai pénzegységet kell fizetni a másik ország egységnyi pénzéért. Pl. 2012. februárjában egy USA dollárért kerekítve 230 magyar Ft-ot kellett fizetni. Zavaró, hogy kétféleképpen is mérik az árfolyamot. 1. Amerikában azt mondják, hogy $E_{\$,\mathcal{E}} = 0{,}74\ \mathcal{E}/\$$, s ha ez az érték nő, akkor a *dollár erősödik az euróval szemben.* Európában viszont azt mondják, hogy $E_{\mathcal{E},\$} = 1{,}36\$$, s ha ez az érték csökken, akkor a *az euró gyengül.* Mivel a könyv elsősorban az USÁ-ról szól, általában az 1. eljárást alkalmazzák.

Egy pénz nem attól függően jó, hogy egy egysége sokat ér, hanem hogy az árfolyama a legtöbb országéhoz képest javul. Az árfolyam elsődlegesen a pénz vásárlóértékétől függ, de alakulását más tényezők is befolyásolják (fizetési mérleghiányok, kamatlábkülönbségek, stb).

3. A gazdaság megfigyelése: infláció és foglalkoztatás

3.1. Az infláció mérése

Az *inflációs ráta* az általános árszínvonalnak az egyik időszakról a következő időszakra történő változási sebessége. Például Magyarországon – a háborúk utáni hiperinflációt nem számítva – a csúcstartó 1991-es 35%-hoz képest az inflációs ráta 2006-ban 3% körül alakult, de 2010-ra még 4% volt és ot is marad.

Többféle árindex van: fogyasztói, maginfláció, termelői, GDP-árindex, stb. A mindennapi életben a fogyasztói árindexszel, illetve a magindexszel találkozunk (az utóbbiban kizárjuk az átmenetinek tűnp energia és élelmiszer-árváltozásokat). Az árindex szerkesztésének egyik lehetősége, amikor kiválasztunk egy *fogyasztói kosarat*, azaz $(q_1,\ldots,q_n)$ *volumenvektor*t, amely feltehetőleg jól képviseli a fogyasztást, és megnézzük, hogy ez a kosár mennyiszer kerül többe a tárgyidőszakban (1), mint a bázisidőszakban (0). Ha $(p_1^0,\ldots,p_n^0)$ és $(p_1^1,\ldots,p_n^1)$ a két időszak megfelelő árvektora, akkor az árindex a következő:

$$\pi(q) = \frac{\sum_i p_i^1 q_i}{\sum_i p_i^0 q_i}.$$

Attól függően, hogy a $(q_1,\ldots,q_n)$ volumenvektor a 0. vagy az 1. időszakot jellemzi, nagyobb, vagy kisebb számot kapunk, tehát az árindex eleve nem objektív.

Egy nagyon fontos árindex a *cserearány-változás*, amely azt mutatja meg, hogy két időszak között egy ország exportárai mennyivel nőnek gyorsabban/lassabban, mint az importárai: $T_t = P_X/P_M$. Az 1973-as olajsokkot követően a nem olajtermelő országok (köztük Magyarország is) hatalmas cserearány-veszteségeket szenvedtek el, amelyek gyakran felülmúlták az éves termelésnövekedés mértékét is.

Gyakorlati jelentősége miatt megadjuk a korrekció képletét is:

$$Y_t^* = Y_t + X_t T_t - M_t,$$

ahol Y_t a GDP, Y_t^* a GDI (hazai bruttó jövedelem), X_t exportvolumen és M_t importvolumen. Vintrova (2005, 584. o., 4. táblázat) a következő figyelemre méltó táblázatot közli néhány európai ország kétféle növekedési üteméről.

C. táblázat. *Kétféle éves növekedési ütem néhány országban, 2001–2004*

Ország	GDP-é	GDI-é
Csehország	4,2	3,1
Magyarország	4,1	3,9
Szlovákia	4,0	4,7
Szlovénia	3,7	3,2
Lengyelország	2,6	2,9
EU-25	1,4	1,3

Figyelemre méltó, hogy Csehország esetében a korrekció évi +1,1%, Szlovákia esetén viszont −0,7%.

3.2. Foglalkoztatottság, munkanélküliség és keresetek mutatói

A foglalkoztatottságot a munkaképeskorú lakossághoz kell viszonyítani. Például a szocializmus idején az egészséges és nyugdíjkorhatár alá eső embereknek elvben kötelező volt dolgozniuk, ekkor az aktivitási arány 90% körül mozgott. Jelenleg Magyarországon ez a mutató 65% körül van, a csökkenés nagyjából egyenlően oszlik el a munkanélküliek, a rokkantnyugdíjasok és a munkaerőpiacról visszavonultak között.

A foglalkoztatás mérése nem egyértelmű, és pl. az 1980-as években a brit konzervatív Thatcher-kormány „komoly sikereket ért el" a munkanélküliség visszaszorításában a kategória folyamatos szűkítésével. Eleve problémát okoz a részmunkaidősök kérdése. A Központi Statisztikai Hivatal (KSH) által is követett nemzetközi gyakorlat szerint, ha valaki egy héten akár 1 órát is dolgozott, az már nem munkanélküli.

Egy normális piacgazdaságban szinte mindig van *súrlódásos munkanélküliség*. Ezenkívül ismert a *strukturális munkanélküliség*, amikor a hanyatló iparágak elbocsátott dolgozói sokáig nem találnak maguknak állást. Ha csak súrlódásos munkanélküliség van, akkor *természetes munkanélküliségi rátá*ról beszélünk, amely pár százaléknyi.

Keresetek (bérek és fizetések) képezik a termelési költségek legfontosabb elemét. A *reálkereset* egyenlő a nominális kereset és a fogyasztási árindex hányadosával. 1990–1996 között hazánkban a reálbérek jelentősen csökkentek (kivéve az 1994-es választási évet), 1997 óta folyamatosan emelkedtek 2006-ig, azóta süllyedt, most viszont stagnál.

3.3. A termelékenység

Termelékenység az egységnyi ráfordításra jutó kibocsátás mennyisége. Speciálisan, a *munkatermelékenység* az egységnyi munkaráfordításra jutó kibocsátás mennyisége. A termelékenység átfogóbb mutatószáma a *teljes tényező termelékenység*, amely a munkatermelékenység mellett a tőkehatékonyságot is figyelembe veszi: jele A_t.

Általános nemzetközi tapasztalat, hogy a munka termelékenysége hosszú távon nő. Ezzel szemben a teljes tényező termelékenység pl. a szocialista gazdaságokban nem megfelelő mértékben nőtt, sőt, gyakran csökkent. (Pl. a szovjet mezőgazdaságban az 1970–80-as években a hatalmas beruházások ellenére sem nőtt a termelés, pedig a mezőgazdasági foglalkoztatás aránya viszonylag magas maradt.)

4. A hosszú távú növekedési modell

A hosszú távú növekedési modell nem foglalkozik a potenciális GNP-től való rövid távú eltérésekkel. (Hasonlóan ahhoz, hogy az éghajlat tanulmányozásánál eltekintünk az időjárás-változástól.)

4.1. A gazdasági növekedés meghatározói

A gazdasági növekedés meghatározói: 1. munkaerő, 2. tőkeállomány és 3. technológiai szint. Először szükségünk lesz a *termelési függvény* fogalmára, amely a munka (N) és a tőke (K) függvényében meghatározza a kibocsátást (Y):

$$Y = F(N,K). \tag{4.1}$$

Mikroökonómiából ismertek a termelési függvény tulajdonságai, pl. a csökkenő határhozadék fogalma.

4.2. Egyensúlyi munkapiac és potenciális GNP

Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy egy dolgozó és egy vállalat létezik. A valóságban természetesen ez nem igaz, és ez az aggregálás sok problémát okoz. A *munkakereslet* a vállalatok profitmaximalizálási törekvéseiből határozható meg: legyen P az ár és W a bér, adott tőkeállomány mellett a $PF(N,K) - WN$ függvényt deriválva adódik az optimum szükséges és (konkavitás mellett) elégséges feltétele: $PF_N(N,K) - W = 0$: a munka hozadéka azonos a reálbérrel: $N_{\mathrm{D}}(W)$.

A *munkakínálat* a munkás hasznosságfüggvény-maximalizálásából határozható meg: $U(C,N) \to \max$, feltéve, hogy $PC = WN$. Itt a hasznosságfüggvény a fogyasztásnak növekvő, a foglalkoztatásnak csökkenő függvénye. Nem egyszerű az $N_{\mathrm{S}}(W)$ munkakínálati-függvény felrajzolása, mert a helyettesítési hatás csökkentő, a jövedelmi hatás növelő. A személyi jövedelemadó-kulcs emelése mindazonáltal általában csökkenti a munkakínálatot.

Munkapiaci egyensúlyról beszélünk, ha a munka kereslete és kínálata megegyezik: $N_{\mathrm{D}}(W) = N_{\mathrm{S}}(W)$, az egyensúlyi munkabér W^*, s az egyensúlyi foglalkoztatás $N^* = N_{\mathrm{S}}(W^*)$ és a potenciális GNP:

$$Y^* = F(N^*,K). \tag{4.2}$$

4.3. A gazdasági növekedés egyenlete

A tőke és a munka mennyiségén kívül a technológia is szerepet játszik a kibocsátás alakulásában. A t-edik évben

$$Y_t = A_t N_t^{\beta} K_t^{1-\beta}. \tag{4.3}$$

Idő szerint deriválva az egyenletet, adódik

$$\dot{Y}_t = \dot{A}_t N_t^{\beta} K_t^{1-\beta} + A_t \frac{d}{dt}[N_t^{\beta} K_t^{1-\beta}]. \tag{4.3$'$}$$

Dderiválva a szorzatot, adódik

$$\frac{d}{dt}[N_t^{\beta} K_t^{1-\beta}] = \beta N_t^{\beta-1} \dot{N}_t K_t^{1-\beta} + N_t^{\beta}(1-\beta) K_t^{-\beta} \dot{K}_t.$$

Behelyettesítve (4.3′)-ba:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \beta \frac{\dot{N}_t}{N_t} + (1-\beta)\frac{\dot{K}_t}{K_t}. \tag{4.3$''$}$$

Bevezetve az

$$\eta = \frac{\dot{Y}}{Y}, \quad a = \frac{\dot{A}}{A}, \quad \nu = \frac{\dot{N}}{N}, \quad \kappa = \frac{\dot{K}}{K}$$

és az

$$\eta(t) = a(t) + \beta\nu(t) + (1-\beta)\kappa(t). \tag{4.4}$$

(Az y helyett η-t, k helyett pedig κ-t írunk, mert a későbbiekben még szerepelni fog az $y = Y/N$ és a $k = K/N$.)

Éves vagy negyedéves adatoknál a logaritmikus derivált helyett relatív változás szerepel, ekkor az egyenlet csak közelítően igaz:

$$\eta_t \approx a_t + \beta\nu_t + (1-\beta)\kappa_t, \tag{4.4$'$}$$

ahol

$$\eta = \frac{\Delta Y}{Y}, \quad a = \frac{\Delta A}{A}, \quad \nu = \frac{\Delta N}{N}, \quad \kappa = \frac{\Delta K}{K}.$$

A témáról további ismereteket közöl az A. függelék.

4.4. Növekedésösztönző intézkedések

Egyelőre még nem eléggé ismert, mitől függ a munkatermelékenység növekedése, a tőkeállomány bővülése, ezért nehéz ösztönözni a növekedést. (Hall–Taylor, 4.7. ábra.)

6. és 7. ábra

5. Költségvetési és monetáris politika teljes foglalkoztatottság mellett

Ha több év átlagában elemezzük a gazdaságot, akkor az USÁ-ban 1985–2008 között feltehettük, hogy teljes foglalkoztatás volt, ma már nem (az Európai Unióban – röviden az EU-ban –szintén nem).

5.1. A makrogazdasági politika hatása a kibocsátásra

A *költségvetési (fiskális) politika* definíció szerint a kormányzati vásárlásokat (G), az adókat (T), a transzfereket (F) és a kormányzati adósságok kamatait (N) érinti [(2.2)].

$$S_{\mathrm{g}} = (T - F - N) - G. \tag{5.1}$$

A költségvetési politikát az USÁ-ban az elnök és a kongresszus határozza meg.

A *monetáris politika* a pénzkínálatot szabályozza, az USÁ-ban a központi bank, a Szövetségi Bankrendszer (angolul: Federal Reserve System, Fed) felelős érte. Magyarországon az MNB, az euróövezetben pedig az ECB, az Európai Központi Bank.

A hosszú távú egyensúly modelljében sem a költségvetési, sem a monetáris politika nincs hatással a kibocsátásra, de megváltoztathatja annak szerkezetét.

5.2. A makrogazdasági politika hatása a kibocsátás összetevőire

A 2. fejezetben szereplő felbontást némileg átrendezzük:

$$Y = (C + I + X) + G. \tag{5.2}$$

A zárójelben a nem kormányzati vásárlások állnak, G pedig a kormányzati vásárlásokat jelöli. Mivel G csökkentése nem hat Y-ra, szükségképpen azonos mértékben növeli $C+I+X$-t. Ahhoz, hogy megtudjuk, hogyan oszlik meg a növekedés a három összetevő között, ismernünk kell ezen összetevők kamat(láb)érzékenységét. Definiáljuk a következő függvényeket: $C(r)$, $I(r)$ és $X(r)$. A kamatláb növekedése egyaránt, de különböző mértékben csökkenti a fogyasztást, a beruházást és a nettóexportot.

5.3. Pénzpiac és árszínvonal

Mindenekelőtt a *pénzkereslet*et kell megértenünk. 1. Adott árszínvonal mellett nagyobb kamatláb mellett az emberek kevesebb (nem kamatozó) pénzt akarnak tartani, tehát az $M(r,\,\cdot\,,\cdot)$ függvény csökkenő. 2. Adott árszínvonal mellett nagyobb jövedelem mellett az emberek több (nem kamatozó) pénzt akarnak tartani, tehát az $M(\cdot, Y, \cdot)$ függvény növekvő. 3. Adott kamatláb és adott jövedelem mellett magasabb árszínvonalnál az emberek nagyobb pénzkészletet akarnak tartani: $M(\cdot,\,\cdot\,, P)$ növekvő. A legegyszerűbb specifikáció:

$$M(r, Y, P) = (\mu_Y Y - \mu_r r)P. \tag{5.3}$$

Eltérünk a könyv latin betűs együttható-jelöléseitől, helyette a könnyen memorizálható görög betűs, alsó indexes jelöléseket használjuk, ahol mátrixszerűen a görög betű a függő, az alsó index pedig a független változóra utal.

Egy ország *pénzkínálatát* a központi bank szabályozza. A pénzkínálat és a pénzkereslet egyenlőségét a kamatláb, a jövedelem és az árszínvonal igazodása teremti meg. Például teljes egyensúlyban az árszínvonal a kibocsátáshoz igazodik:

$$M(r^*, Y^*, P) = (\mu_Y Y^* - \mu_r r^*)P. \tag{5.4}$$

5.4. Infláció

Ha a pénz forgási sebessége állandó, akkor hosszú távon az inflációs tényező ($\pi = P/P_{-1}$) egyenlő a pénz növekedési tényezőjének ($\mu = M/M_{-1}$) és a termelés növekedési tényezőjének ($\eta = Y/Y_{-1}$) a hányadosával: $\pi = \mu/\eta$. Tehát az infláció oka, hogy a pénzmennyiség a szükségesnél gyorsabban nő. A laza pénzpolitika egyrészt időlegesen elháríthatja a visszaesést, másrészt a kormányzat számára kézenfekvő adóztatást jelent, ugyanakkor alááshatja a gazdaság alapjait.

5.5. Klasszikus dichotómia (kizárólagos kettősség)

Hosszú távon 1) a reálváltozók közti összefüggések függetlenek a nominális változóktól, és 2) a nominális változók közti összefüggések függetlenek a reálváltozóktól. Rövid távon azonban ez nincs így, mert a pénzbőség időlegesen bővíti a termelést is.

6. Rövid távú ingadozások

Rövid távon a kihasználatlan erőforrások, különösen a munkanélküliség jelenléte módosítja a hosszú távú egyensúlyi tételeket.

6.1. A munkapiaci egyensúlytalanság

Ha munkanélküliség van, azaz a munkakereslet kisebb a munkakínálatnál, és a keresetek egyensúlyi szinten vannak, akkor mind a vállalatoknak, mind a dolgozóknak érdeke a munkamennyiség növelése. A reakció azonban nem azonnali.

6.2. Ellenható erők

Milyen erők térítik el a gazdaságot az egyensúlyi szintjétől? (i) A munkapiac egyensúlytalansága és (ii) az árak ragadóssága.

*Aggregált keresleti függvény*nek nevezzük azt a függvényt, amely adott kibocsátáshoz meghatározza a hozzá tartozó árszínvonalat: $P = P_{\mathrm{D}}(Y)$. Angolul: aggregate demand, azaz AD. Tulajdonképpen itt az inverz keresleti függvényt írtuk föl, de ez gyakori a közgazdaságtanban. Geometriai ábrázolásnál görbéről beszélnek, és változásoknál az AD görbe eltolódásáról. De az is lehet, hogy az árszínvonal változik meg. Mindkettő hatására a kibocsátás változik.

6.3. Aggregált kereslet és a kiadási egyensúly

Ellentétben a hosszú távú növekedési modellel, ahol szekvenciális egyenletekkel dolgoztunk, az aggregált keresleti modellben szimultán egyenleteket kell megoldanunk. Itt a keresletből, a pénzkínálatból és az adott árszínvonalból indulunk ki. Ezután viszont szimultán egyenleteket kell megoldani ahhoz, hogy meghatározzuk a kibocsátást és a kiadási egyensúlyt megteremtő kamatlábat. Ezután a termelési függvényből visszafelé határozzuk meg a foglalkoztatást.

A rövid távra vonatkozó alapfeltevések: (i) az aggregált kereslet határozza meg a kibocsátást, és (ii) az árak rugalmatlanok.

6.4. A jövedelem és a kiadások egyensúlyi pontja

A kiindulópont a jövedelem és a kiadások azonossága. Ismételten:

$$Y = C + I + G + X. \tag{6.1}$$

A *fogyasztási függvény* a fogyasztást a rendelkezésre álló összes jövedelem (Y_{d}) függvényében határozza meg: $C = C(Y_{\mathrm{d}})$. Linearizálva:

$$C = \gamma + \gamma_Y Y_{\mathrm{d}}, \tag{6.2}$$

ahol γ_Y a *fogyasztási hajlandóság.* Ha τ az átlagos adókulcs, akkor $Y_{\mathrm{d}} = (1 - \tau)Y$. Vagyis a rendelkezésre álló jövedelmet kiejtve:

$$C = \gamma + \gamma_Y(1 - \tau)Y, \quad 0 < \gamma_Y, \tau < 1. \tag{6.3}$$

Behelyettesítve (6.3)-at (6.1)-be, az Y jövedelemre egy implicit egyenlet adódik:

$$Y = \gamma + \gamma_Y(1 - \tau)Y + I + G + X. \tag{6.4}$$

Rendezve adódik a jövedelem:

$$Y = \frac{\gamma + I + G + X}{1 - \gamma_Y(1 - \tau)}. \tag{6.5}$$

Általánosan, nem-lineáris fogyasztási függvénynél az implicit függvény tételét lehet alkalmazni.

Mi történik, ha megváltozik a beruházás értéke?

$$\Delta Y = \frac{\Delta I}{1 - \gamma_Y(1-\tau)}. \tag{6.6}$$

Figyeljük meg, hogy a beruházás értékének változására a fogyasztás sokszorozottan változik, a szorzó értékét *multiplikátor*nak nevezik:

$$\mu = \frac{1}{1 - \gamma_Y(1-\tau)}. \tag{6.6'}$$

6.1. példa. Ha $\gamma_Y = 0{,}9$, $\tau = 0{,}3$, akkor $\mu = 1/(1 - 0{,}9 \cdot 0{,}7) = 2{,}7$. Az 1930-as évek válságában erre az egyszerű példára hivatkoztak a közmunkák hívei, hogyan lehet a válságot deficitfinanszírozással leküzdeni.

A matematikailag képzett olvasó fölismerheti, hogy (6.6′) jobb oldalán a végtelen mértani sor összegképlete áll, tehát a multiplikátor kifejezhető végtelen mértani sorként is:

$$\mu = 1 + \gamma_Y(1-\tau) + \cdots + (\gamma_Y(1-\tau))^n + \cdots. \tag{6.6''}$$

Ez azt jelenti, hogy a ΔI többletberuházásból fakadó többletjövedelem az első körben ugyanannyival növeli a jövedelmet, de ez $(\gamma_Y(1-\tau))\Delta I$ többletfogyasztást ad, ugyanannyi többletjövedelmet származtat, ez $(\gamma_Y(1-\tau))^2\Delta I$ többletfogyasztást ad, egészen a végtelenségig.

Ha a nettó export csökkenő függvénye a jövedelemnek, $X = X(Y)$, lineáris közelítésben:

$$X = \xi - \xi_Y Y, \tag{6.7}$$

akkor csökken a multiplikátor:

$$\mu^* = \frac{1}{1 - \gamma_Y(1-\tau) + \xi_Y}. \tag{6.6*}$$

6.2. példa. Módosítás: ha $\xi_Y = 0{,}1$; akkor $\mu^* = 1/(1 - 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}1) = 2{,}1$; jóval kisebb, mint a zárt gazdaságé.

6.1. feladat. Határozza meg a nyitott gazdaság egyensúlyi jövedelmét a (6.1), (6.3) és (6.7) egyenlet által meghatározott gazdaságban.

7. Az IS-LM modell

A 6. fejezetben eltekintettünk a kamatláb hatásától, most visszahozzuk a kamatlábat. Az IS rövidítés, az investment = saving (beruházás = megtakarítás) egyenlőséget, az LM pedig a liquidity = money (likviditás = pénz) egyenlőséget kielégítő pontok halmazára vonatkozik.

7.1. Beruházás és kamatláb

A 6. fejezetben a beruházás kívülről adott nagyságú volt: *egzogén változó*, most a kamatláb segítségével a modellben meghatározott: *endogén* változóvá tesszük.

Legyen a beruházás kereslet a kamatláb csökkenő függvénye: $I = I(r)$. Lineáris közelítéssel:

$$I = \iota - \iota_r r. \tag{7.1}$$

Itt r egy reprezentatív kamatláb, továbbá az infláció hatását már ugyanúgy kiszűrtük, mint a többi változónál.

7.2. Nettó export és kamatláb

A nettó export nemcsak a jövedelemnek, de a kamatlábnak is csökkenő függvénye: $X = X(Y,r)$, lineáris közelítésben:

$$X = \xi - \xi_Y Y - \xi_r r. \tag{7.2}$$

7.3. Az IS és az LM görbe

Összeállt a kép. Behelyettesítve a fogyasztási, a beruházási és a nettó export függvényt a GNP-azonosságba:

$$Y = C(Y) + I(r) + G + X(Y,r) \tag{a}$$

és hozzávéve a pénzegyenletet:

$$M(r,Y,P) = M, \tag{b}$$

két alapegyenletünk van, két ismeretlennel: Y és r. Az implicit függvény tétele szerint, ha adott G_0, M_0 és P_0 esetén az egyenletrendszernek van megoldása: Y_0 és r_0, és ha teljesül egy regularitási feltétel, akkor G_0, M_0 és P_0 közelében tetszőleges G, M és P esetén létezik Y és r megoldás.

Lineáris specifikáció:

$$\begin{aligned}
&(6.1) & Y =& C + I + G + X. \\
&(6.3) & C =& \gamma + \gamma_Y(1-\tau)Y, \quad 0 < \gamma_Y,\tau < 1. \\
&(7.1) & I =& \iota - \iota_r r. \\
&(7.2) & X =& \xi - \xi_Y Y - \xi_r r. \\
&(5.3) & M(r,Y,P) =& (\mu_Y Y - \mu_r r)P.
\end{aligned}$$

Elosztva az (5.3) egyenletet P-vel, adódik a reálpénz-egyenlet, az ún. *LM görbe*:

$$\frac{M(r,Y,P)}{P} = \mu_Y Y - \mu_r r. \tag{7.3}$$

Behelyettesítéssel adódik az *IS görbe*:

$$Y = \gamma + \iota + \xi + (\gamma_Y(1-\tau) - \xi_Y)Y - (\iota_r + \xi_r)r + G, \tag{7.4}$$

illetve a kamatlábat kifejezve:

$$r = \frac{\gamma + \iota + \xi}{\iota_r + \xi_r} - \frac{1 - \gamma_Y(1-\tau) + \xi_Y}{\iota_r + \xi_r} Y + \frac{1}{\iota_r + \xi_r} G. \tag{7.5}$$

Az LM-görbét más alakban is felírjuk:

$$r = \frac{\mu_Y}{\mu_r} Y - \frac{1}{\mu_r} \frac{M}{P}. \tag{7.7}$$

Egyenlővé téve a (7.5) és a (7.7) egyenlet jobb oldalát, megfelelő új jelölések bevezetése után, rendezéssel adódik az egyensúlyi kibocsátás:

$$Y = \eta + \eta_G G + \eta_m \frac{M}{P}. \tag{7.9}$$

Visszahelyettesítve (7.9)-et (7.7)-be, adódik az egyensúlyi kamatláb is.

7.4. Gazdaságpolitika az IS-LM modellben

Most már elemezhetjük a gazdaságpolitika hatását.

Monetáris politika: ha az M névleges pénzmennyiség nő, akkor (7.9) szerint az Y kibocsátás is nő, (7.7) szerint az r kamatláb viszont csökken (sok számolás). Ez az általános, nemlineáris esetben is igaz.

Költségvetési politika: ha a G kormányzati kiadás nő, akkor (7.9) szerint az Y kibocsátás is nő, (7.5)–(7.9) szerint az r kamatláb is nő. Ez az általános, nem-lineáris esetben is igaz. A monetáris és a költségvetési politika értékelésekor ábrákra kell hivatkozni, mert az analitikus levelezetés túlságosan körülményes.

A görbék érintőinek meredekségétől függ a kétféle gazdaságpolitika hatásossága. A költségvetési politika hatásos, ha a kormányzati kiadás egységnyi növelésére a kibocsátás jelentősen nő, s a kamatláb kevéssé változik. A monetáris politika hatásos, ha a reálpénz egységnyi növelésére a kamatláb jelentősen csökken, és a nettó exportot erősen ösztönzi. (Hall–Taylor, 7.11. ábra.)

8. ábra

8. A teljes modell

A hosszú távú növekedési modell (4. fejezet) és az aggregált keresleti függvény (7. fejezet) mellé most bevezetjük az igazodási almodellt, s ezzel teljessé tesszük a modellt.

8.1. Ragadós árak

Míg az árak egy ideig változatlanok maradnak, a kínálati oldal szereplői felmérik, hogyan változnak a keresleti feltételek. A kibocsátást rövid távon a kereslet határozza meg. A munkanélküliséget Okun törvényével határozzuk meg: a GNP 1%-os eltérése a potenciális GNP-től kb. 0,3%-kal téríti el a foglalkoztatottságot a „teljes” foglalkoztatottságtól.

Az aggregált kereslet képlete:

$$Y = \eta + \eta_G G + \eta_m \frac{M}{P}. \tag{7.9}$$

8.2. Árigazodás

A közgazdaságban alapvető szerepet játszanak a *várakozások*. Távirati stílusban szólva: a múlt a jelent a jövőre irányuló várakozásokon keresztül határozza meg (részletesen lásd a B. függeléket).

Tapasztalati tény, hogy minél nagyobb a GNP-rés, annál jobban haladja meg az infláció a várt értéket. Ezt fejezi ki a
várakozásokkal kiegészített Phillips-görbe:

$$\pi = \pi^{\mathrm{e}} + f\frac{Y_{-1} - Y^*}{Y^*}. \tag{8.1}$$

Eredetileg Phillips (1961) várakozások nélkül fogalmazta meg a modellt, s csak Phelps (1967) és Friedman (1968) adták hozzá a várakozásokat, amelyet *adaptív*nak képzeltek, $\pi^{\mathrm{e}} - \pi^{\mathrm{e}}_{-1} = \psi(\pi_{-1} - \pi^{\mathrm{e}}_{-1})$, ahol $0 \le \psi \le 1$. Más alakban:

$$\pi^{\mathrm{e}} = \psi\pi_{-1} + (1-\psi)\pi^{\mathrm{e}}_{-1}. \tag{8.2}$$

Speciális eset a *naiv várakozás*, ahol a várakozás egyenlő a korábbi tényértékkel: $\psi = 1$, azaz $\pi^{\mathrm{e}} = \pi_{-1}$.

Az inflációs szorzó összeköti az egymást követő árszinteket:

$$P = \pi P_{-1}. \tag{8.3}$$

Az 1970-es évektől kezdve egyre jobban elterjedt a *racionális várakozások* feltevése. Determinisztikus környezetünkben ez a racionális várakozások tökéletes előrelátását jelenti: $\pi^{\mathrm{e}} = \pi$. A későbbiekben még foglalkozunk a racionális várakozásokkal is.

8.3. Az aggregált kereslet és az árak együttes igazodása

Az eddigieket egy modellbe egyesítve megkaptuk a teljes modellt. Az előző időszak adott változóiból (8.1) megadja a π inflációs szorzót, s (8.2) a π^{e} inflációs várakozást. E két változót behelyettesítve (8.3)-ba, adódik a P új árszínvonal, majd (7.9)-ből az új kibocsátás: Y.

9. Makrogazdasági politika: első nekifutás

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a gazdaságot ért véletlen zavarok hatását. Két fajta sokkal foglalkozunk: 1) az *aggregált keresleti sokkjá*val és 2) az *ársokk*al. Megvizsgáljuk, hogyan képes a makropolitika a sokkhatásokat ellensúlyozni.

9.1. Sokkok

Az aggregált kereslet külső ok miatt hirtelen változhat, mert a külföldi fogyasztók elpártolnak a hazai termékektől: csökkenő irányba tolódik el a nettó export iránti keresleti függvény; vagy az új hitelkártya miatt tetszőleges reálpénzmennyiség esetén csökken a pénzkereslet, vagyis csökkenő irányba tolja el a pénzkeresleti függvényt.

Az árszínvonal is több okból változhat hirtelen. Például emelkedik a kőolaj ára, emelkednek a bérek vagy a cégek túllőnek a célon az áremelésnél.

9.2. Stabilizációs politika – válasz az aggregált keresleti sokkra

Ha megnő a pénzkereslet, akkor a kormányzat a pénzkínálat azonos értékű növelésével semlegesítheti a hatást. Ha a túlzottan optimista magánberuházók miatt megnő a beruházási igény, a kormányzat a kormányzati kiadások párhuzamos csökkentésével ellensúlyozhatja a kialakuló egyensúlytalanságot.

A Nagy Válság éveiben Keynes (1936) azt javasolta, hogy a magánberuházók pesszimizmusát a kormányzat optimista viselkedésével kell és lehet ellensúlyozni. A monetaristák (M. Friedman) szerint az állami beavatkozás csak tovább ront a helyzeten, helyette kiszámítható pénzpolitikát kell folytatni, s várható termelésnövekedéssel párhuzamosan kell a pénzkínálatot bővíteni.

9.3. Válasz az ársokkra

Tegyük föl, hogy ársokk éri az országot, s ezért passzív kormányzat esetén a kezdeti árszínvonal P_0-ról P_1-re nő, ezzel párhuzamosan a kibocsátás rövid távon Y^*-ról Y_1-re csökken. Hosszú távon az árszint P_0-ra, míg a kibocsátás Y^*-ra tér vissza.

Ha a kormányzat ügyesen növeli a pénzkínálatot, akkor a kibocsátás Y^* közelében marad, de az árszint soha többé nem tér vissza eredeti szintjére.

9.4. A gazdaságpolitika mint hüvelykujjszabály

Eddig a gazdaságpolitikai változókat kívülről meghatározottnak, *egzogén*nek tekintettük, amelyeket szabadon választhat meg a kormányzat. Mostanában azonban utat tör az a felfogás, amely ezeket a változókat is *endogén*nek, egy tágabb modellben meghatározottnak tekinti. Minél merevebb a gazdaságpolitika, annál nagyobb a munkanélküliség és annál kisebb az infláció.

9.5. Inflációcsökkentés

Minél gyorsabban szorítja le a központi bank az inflációs rátát, annál nagyobb az időleges termeléskiesés és munkanélküliség. Például 1980-ban az USÁ-ban a 10% fölötti inflációt úgy törte le a konzervatív politika, hogy szűkítő pénzpolitikával leszorította a termelést, meglódította a munkanélküliséget, 5-ről 10%-ra (Hall–Taylor, 9.12. ábra). Most a válság hatására az amerikai munkanélküliség újra 5-ről 10%-ra ugrott.

9. ábra

Más esetben minél jobban meglepi a kormányzat a magánszektort az inflációval, annál kisebb visszaesést követel a stabilizáció. Például 1995-ben a magyar Bokros-csomag az inflációt 18%-ról 28%-ra növelte, s a beragadt nominálbérek miatt a reálbérek 14%-os zuhanása akadályozta meg a termelés visszaesését, utat nyitva az exportnak. Ma a világválságban, ahol a keresletvisszaesés szinte általános, lehetetlen a belső kereslet megszorítását a nettóexport növelésével ellensúlyozni.

9.6. Monetáris kontra költségvetési politika

*Laza költségvetési politiká*ról beszélünk, ha a kormányzati kiadások vagy transzferek hirtelen nőnek, vagy az adók hirtelen csökkennek. *Szoros költségvetési politika* pedig a laza ellentéte.

*Laza monetáris politiká*ról beszélünk, ha a pénzkínálat hirtelen nő vagy kis nyitott gazdaság esetén a kamatláb alacsony, és az árfolyam gyenge. *Szoros monetáris politika* pedig a laza ellentéte.

Magyarországon 2001 és 2006 között laza költségvetési politikát feszes monetáris politika kísért: magasabb kamatláb, elfojtott infláció és stabil árfolyam. A főáram képviselői szerint ez helyes volt, mert állandóan mutatta a kormányzatnak, milyen felelőtlen költségvetési politikát követ. A kisebbségi vélemény szerint (amelyet én is osztok), bár a fő felelősség a kormányzatoké volt, az ország érdekét jobban szolgálta volna egy lazább monetáris politika: alacsonyabb kamatláb, gyorsabb infláció és folyamatos leértékelés. 2006-tól szigorodott a költségvetési politika, de laza maradt a devizaalapú magánhitelek szabályozása, amelyek a 2008-as válságban megrendültek.

II. RÉSZ. AZ AGGREGÁLT KERESLET MAKROÖKONÓMIAI ALAPJAI

10. A fogyasztási kereslet

A fogyasztás a GNP-nek kb. 2/3–3/4-e, tehát az aggregált keresletnek messze a legfontosabb része.

10.1. A GNP, a fogyasztás és a jövedelem ingadozásai

Hosszú távon a GNP és a fogyasztás hasonló ütemben nőnek, rövid távon azonban a fogyasztás simábban nő, mint a GNP. Hasonló kapcsolat áll fönn a fogyasztás és a jövedelem között. Ez utóbbi kapcsolatot fejezi ki a *keynesi fogyasztási függvény* [(6.2)]. Az USÁ-ban 1952–1989 között a következő fogyasztási függvényt becsülhettük: $C = 0{,}92Y_{\mathrm{d}}$.

10.2. Az egyszerű fogyasztási függvény hiányosságai

Ez a fogyasztási függvény első látásra jól illeszkedik, azonban a hibatag vizsgálatából kiderül, hogy 1965–1982 között a hiba negatív, előtte és utána pozitív volt, méghozzá jelentős kilengésekkel.

Némileg javíthatjuk a becslést, ha megkülönböztetjük a rövid és hosszú távú fogyasztási hajlandóságot, az előbbi meghatározása $\Delta C = \gamma^* \Delta Y_{\mathrm{d}}$, értéke $\gamma^* = 0{,}72$.

Tovább finomítható a kép, ha megkülönböztetjük a nem tartós cikkeket és a szolgáltatásokat egyfelől, és a tartós cikkeket másfelől.

10.3. Az előre tekintő fogyasztáselmélet

A hiba kiküszöbölésére többféle elmélet közül egy elmélet kristályosodott ki: Modigliani *életciklus-elmélet*e (Modigliani–Brumberg 1954). A C. függelékben az életciklus-elmélet folytonos idejű modelljét ismertetjük. Itt megelégszünk a tankönyv leegyszerűsített tárgyalásával.

Legyen A_t, W_t és C_t rendre a t-edik időszak elejének *vagyonállománya*, folyamának nettó munkajövedelme és fogyasztása, $\rho = 1 + r$ a kamattényező. (A vagyonállomány *nettó kategória*, pozitív előjellel szerepel benne a lakás és egyéb eladható tárgyak értéke, a megtakarítások állománya, negatív előjellel szerepelnek a tartozások.) Ekkor a fogyasztó *intertemporális költségvetési korlátja* a következő:

$$A_{t+1} = \rho A_t + W_t - C_t, \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T. \tag{10.3}$$

Figyelemre méltó, hogy a (10.3)-ban szereplő $T+1$ feltétel egyetlenegy feltételbe sűríthető, ha bevezetjük a *(diszkontált) jelenérték* fogalmát, angolul present value, rövidítve: PV. A $\{C_t\}$ sorozat 0 évre vett jelenértéke a ρ kamattényezővel diszkontálva

$$\mathrm{PV}[C] = \sum_{t=0}^{T} C_t \rho^{-t}.$$

Hasonlóan felírható a kereset jelenértéke:

$$\mathrm{PV}[W] = \sum_{t=0}^{T} W_t \rho^{-t}.$$

Adottnak tekintve a vagyonállomány kezdeti és végértékét: A_0-t és A_{T+1}-et, adódik az egyesített feltétel:

$$\mathrm{PV}[W] = \mathrm{PV}[C] + A_{T+1}\rho^{-T-1} - A_0.$$

Ha kiegyenlített a fogyasztás: $C_t \equiv C_0$, akkor – felhasználva a mértani sor összegképletét –, könnyen kiszámítható a fogyasztás értéke:

$$C_0 = \left(\mathrm{PV}[W] - A_{T+1}\rho^{-T-1} + A_0\right) \frac{\rho^{-1}-1}{\rho^{-T-1}-1}.$$

Matematikusoknak érdemes megjegyezniük, hogy a jelenérték módszer ekvivalens a Laplace-transzformációval, vagy a változó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldásánál alkalmazott megoldó szorzók módszerével.

Látható, hogy minél nagyobb a záróvagyon, annál kisebb a fogyasztás.

Természetesen ha az emberek lépést akarnak tartani az általános fejlődéssel, akkor a fogyasztást egyenletesen növelik. Minél nagyobb a fogyasztás növekedési üteme, annál kisebb a kezdőfogyasztás, illetve annál nagyobb a végfogyasztás. (Itt a keresetek dinamikáját rögzítettük!)

Eddig föltettük, hogy a jövedelem-pálya előre ismert. Mi van, ha váratlan meglepetések érik a fogyasztót? Ekkor megfelelő időpontban újra kell számolnia a hátralévő időszak fogyasztási pályáját.

10.4. Mennyire jó az előretekintő elmélet?

Legegyszerűbb számítás szerint

$$C = \gamma_Y Y_{\mathrm{d}} + \gamma_A A. \tag{10.4}$$

Ando–Modigliani (1961) statisztikai becslésükben $\gamma_Y = 0{,}7$ és $a\gamma_A = 0{,}06$ értéket kapták, (10.4) sokkal jobban illeszkedett az adatokhoz, mint az egyszerű keynesi fogyasztási függvény.

Azóta a racionális várakozások figyelembe vételével próbálták finomítani az eredményeket, de nem kaptak igazán jó illeszkedést. Úgy tűnik, hogy sok család egyszerűen nem jut elérhető hitelhez. Az USÁ-ban hitelt tartósan igénybevevőknek a fogyasztói hitelkamatláb 20% körül van, annak ellenére, hogy az infláció már elhanyagolható. Magyarországon stabil 10%-nál lassabb infláció mellett még mindig 20-30% a hitelkamatláb.

10.5. Reálkamatláb, fogyasztás és megtakarítás

Irving Fishert követve érdemes külön elemezni a két-időszakos esetet: $T = 1$, ahol se kezdő, se záróvagyon nincs: $A_0 = 0 = A_2$. A költségvetési feltétel a következő:

$$\rho C_0 + C_1 = \rho W_0 + W_1.$$

A legegyszerűbb hasznosságfüggvény a diszkontált Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény:

$$u(C_0,C_1) = \log C_0 + \beta \log C_1,$$

ahol β egy 0 és 1 közötti valós szám, a *diszkonttényező*. (Figyelem: illogikus módon, minél kisebb a diszkonttényező, annál erősebb a leszámítolás!) Kifejezve C_1-et a költségvetési feltételből és behelyettesítve a hasznosságfüggvénybe, egy egyváltozós függvényt kapunk:

$$U(C_0) = \log C_0 + \beta \log(\rho W_0 + W_1 - \rho C_0).$$

Deriválva a konkáv függvényt és nullává téve a deriváltat, adódik az optimumfeltétel:

$$U'(C_0) = C_0^{-1} + \beta(\rho W_0 + W_1 - \rho C_0)^{-1}(-\rho) = 0.$$

Rendezéssel:

$$C_0 = \frac{W_0 + W_1\rho^{-1}}{1+\beta}, \qquad C_1 = \frac{\beta(\rho W_0 + W_1)}{1+\beta}.$$

Láthatjuk, hogy az első időszak fogyasztása csökkenő, a másodiké pedig növekvő függvénye a ρ kamattényezőnek. A fogyasztás növekedési tényezője viszont egyszerűen $\beta\rho$, amely attól függően nagyobb vagy kisebb, mint 1, hogy a diszkonttényező kisebb-e vagy nagyobb-e, mint a kamattényező. Kifejezve a megtakarítást:

$$S_0 = \frac{\beta\rho W_0 - W_1}{\rho(1+\beta)}.$$

Nyilvánvaló, hogy $S_0 > 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\beta\rho W_0 > W_1$. Több időszakra (valójában folytonos időre) és általánosabb hasznosságfüggvényekre lásd a C. függeléket.

10.1. feladat. a) Legyen a fogyasztó célfüggvénye $\min(C_0, C_1)$. Határozza meg az optimális fogyasztási pályát! b) Mekkora a fiatalkori megtakarítás és mikor pozitív?

10.6. Fogyasztás és az IS görbe

A 7. fejezetben az egyszerű keynesi fogyasztási függvénnyel határoztuk meg az IS-görbét. Mi történik az általánosabb fogyasztási függvényeknél? Ha a fogyasztás függ a kamattényezőtől, akkor lehet meredekebb is és laposabb is az IS görbe, mint eredetileg gondoltuk.

11. A beruházási kereslet

A beruházás az aggregált kereslet leginkább ingadozó összetevője. Három tényezőtől függ: a beruházási kereslettől, a megtakarításkínálattól és a beruházási kínálattól. Most az első tényezőt vizsgáljuk.

11.1. A beruházások ingadozása

A beruházásoknak három összetevője van: 1) üzleti, 2) lakás és 3) készlet. Ebből az utolsó nagyon kicsi, de nagyon hevesen változik, visszaesésnél negatív is lehet.

11.2. A vállalat beruházási döntése

Jorgenson (1961) nyomán tegyük föl, hogy a vállalat a tőkéjét bérli (lízingeli). Belátható, hogy a bérleti költség egyenlő a (reálkamatláb plusz amortizációs ráta) szorozva az új gép árával:

$$r^{\mathrm{K}} = (r + d)P^{\mathrm{K}}. \tag{11.2}$$

11.3. A beruházási függvény

A vállalat *beruházáskeresleti függvénye* azt mutatja, hogy adott nagyságú tervezett kibocsátás és adott tőkebérleti díj esetén a cég mennyi tőkét vásárol.

Legyen a *kívánt tőkeállomány* K^* valamilyen függvénye a fenti adatoknak. Lineáris közelítésben:

$$K^* = \kappa_Y Y. \tag{11.3}$$

Hogyan változik a tényleges tőkeállomány? Ha nincs amortizáció és a beruházás egy időszak alatt valósul meg, akkor

$$I = K - K_{-1}. \tag{11.4}$$

Ha $K^* = K$, akkor

$$I = \kappa_Y(Y - Y_{-1}) \tag{11.8}$$

Ez az egyenlet az *akcelerátor (gyorsító)-hatás*t írja le.

A teljesebb leírás *késleltetések*et is figyelembe vesz. Például nagyon drága lenne minden évben a tényleges tőkeállományt a kívánatos tőkeállomány szintjére emelni, méginkább csökkenteni. Ezért a kívánatos változtatásoknak csupán egy része valósul meg:

$$I = \iota_K(K^* - K_{-1}), \qquad 0 < \iota_K < 1. \tag{11.9}$$

Az aggregált beruházási kereslet a vállalati beruházási függvények eredőjeként jön létre.

11.4. Adók és beruházások

Kihagyva.

11.5. Lakáscélú beruházások

A leglényegesebb különbség az üzleti célú beruházásokhoz képest az, hogy a lakások alig kopnak: a megfelelő amortizációs együtthatók értéke $d_B = 0{,}1$ helyett $d_H = 0{,}02$.

A jelenlegi világgazdasági válság kialakulásában hatalmas szerepet játszott a lakáspiaci buborék keletkezése és kipukkadása, ezért érdemes a lakáscélú beruházásokról külön beszélni. A legnagyobb különbség a gazdaságban a lakásokban mutatkozik meg. Szegényebb emberek örülnek, hogy fedél van a fejük fölött, gazdagabb embereknek nyaralójuk (nyaralóik) vannak, nem is akármilyenek. Más javakkal ellentétben a lakások (földek) értéke nehezen becsülhető meg, ezért az lakásárak gyakran elszakadnak a reális mértéktől. 1990-ben a japán és a brit, 2006-ban az amerikai ingatlanok ára emelkedett az egekbe, hogy aztán a mélybe zuhanjon. A világbajnok balti válságot (a GDP 15–20%-kal esett egy év alatt) is csak a lakáspiac mértéktelen felfutásával, majd szükségszerű összeomlásával magyarázhatjuk.

11.6. Készletberuházások

Több ok miatt van szükség készletre. 1) Eltér a termelés és a fogyasztás időbeli alakulása, különösen a mezőgazdaságban, de a szezonális cikkeknél is. 2) Gyakran célszerűtlen a kis tételekben való beszerzés. 3) Bizonytalanságok áthidalására.

Kétféle készlet van: a késztermékkészlet és a felhasználói készlet. Egy jól működő gazdaságban a késztermékkészlet dominál (a hiánygazdaságokban viszont a felhasználói készlet). Az USÁ-ban a készletállomány a teljes éves kibocsátásnak kb. 20%-ával egyenlő.

11.7. A beruházási függvény és az IS görbe

A beruházási függvény teljesebb leírása módosítja a korábbi képet, nagyobb szerepet juttat a kamatlábnak.

12. Külkereskedelem és valutaárfolyam

Manapság a külkereskedelem egyre fontosabbá válik, még a korábban nagyrészt zárt gazdaságok számára is, mint amilyen az USA volt. Egy olyan kis ország, mint Magyarország számára pedig különösen fontos a külkereskedelem.

12.1. Külkereskedelem és aggregált kereslet

Az USA külkereskedelmi egyenlege (nettó exportja) 1982–2008 között egyre növekvő mértékben negatívvá vált, azóta megfordult az irány. Magyarország külkereskedelmi és fizetési mérlege is évtizedek óta negatív volt, majd a válság hatására a hiány hirtelen eltűnt, a hazai fogyasztás és beruházások visszaestek (lásd 2.2. pont). Természetesen vannak olyan országok, amelyeknek a mérlege pozitív, például Japán, és egyes délkelet ázsiai országok, és néhány nyugat-európai ország.

12.2. Valutaárfolyam

Egy ország valutájának (például az USÁ-énak) egy másik ország, vagy valutaövezet valutájában (például az euróban) kifejezett értéke a *valutaárfolyam* (nevezetesen a dollár márka árfolyama). Például 2000. elején 1 euróért 1,17 dollárt lehetett kapni, majd pár hónap múlva csak 0,83 dollárt, 2010. februárjában viszont 1,36 USD-t a csúcs 1,6 volt. Természetes jelenség szabadon átváltható (konvertibilis) valuták esetén a *tranzitivitás*, azaz ha $E_{A,B}$ az A ország valutaárfolyama B ország pénzében kifejezve, és hasonlóan egy további C országra, akkor teljesül

$$E_{\mathrm{A,C}} = E_{\mathrm{A,B}} E_{\mathrm{B,C}}.$$

A szocialista országoknak nem volt szabadon átváltható valutájuk, ezenkívül több árfolyamuk is volt, például a leginkább piaci Magyarország 1968-ban 60 Ft/dollárral számolt a külgazdaságban és 30 Ft/dollárral számolt az idegenforgalomban. (Már csak emiatt sem lehetett szabad kereskedelem és szabad pénzváltás, hiszen akkor mindenki 30 Ft-os turistadollárral vásárolt volna Nyugaton és 60 Ft-os külkereskedelmi dollárral adott volna el, ameddig csak a Nemzeti Bank valutakészlete bírta volna.)

De az átváltható valuták árfolyama lehet *rögzített* és *lebegő*. 1945–1971 között a fejlett országok árfolyamai hosszú távon rögzítettek voltak (hogy elkerüljék a két világháború közti évek árfolyamháborúit). 1971-től kezdve a valuták általában lebegnek, de 1979-től kezdve a nyugat-európai valutaárfolyamok egy meglehetősen szűk sávban rögzítettek voltak. (Minél tágabb a rögzített árfolyam *sáv*ja, annál közelebb vagyunk a lebegő árfolyamhoz.) Ez azonban nem zárta ki a kétoldalú le- és felértékeléseket. 1999-ben megjelent az *euró*, amely 2001-től az Európai Monetáris Unió (EMU) kizárólagos közös pénze.

A nominális árfolyamnál fontosabb a *reálárfolyam*, amely a nominális árfolyamváltozásból kiszűri az inflációs hatásokat. Például 1999. eleje és 2000. május 12. között között a Ft dollárárfolyama 210-ről 287-re süllyedt, de eközben a forint kb. 14%-kal inflálódott, míg a dollár csak 3%-kal. Ezért a Ft reálárfolyama „csak” $287 \cdot 1{,}03/1{,}14 = 259$ Ft/\$-ra süllyedt. (2008-ban a dollár nemcsak visszatért a 200 Ft körüli nominális árfolyamhoz, hanem időlegesen jelentősen alá került, a két ország inflációs jelentős különbsége ellenére.)

Amerikai képletben: egy index, azaz egy ország termékeinek árindexe külföldi árakban/a külföld termékeinek árindexe külföldi árakban. Képletben:

$$e = \frac{EP}{P^*}. \tag{12.1}$$

Meglepő módon a reálárfolyamok időről időre változnak. Például 2002–2008 között a Ft annak ellenére erősödött a dollárhoz és az euróhoz képest, hogy vásárlóértéke gyorsabban csökkent, mint azoké.

Mivel a legtöbb ország számos más országgal kereskedik, célszerű a *kereskedelmi forgalommal súlyozott árfolyam*ot mérlegelni. Képletben: Egy adott ország esetében legyen az i-edik ország árfolyama E_i és súlya w_i, $\sum_i w_i = 1$, akkor a súlyozott árfolyam képlete

$$E = \prod_i E_i^{w_i}. \tag{12.2}$$

Önmagában annak nincs jelentősége, hogy melyik valuta „drágább”. Például a brit font kb. 3-szor annyit ért, mint a nyugtnémet márka, a márka mégis erősebb volt, mint a font, mert az elmúlt évtizedekben a font/márka árfolyam egyre nőtt, azaz egyre kevesebb márkát kellett adni egy fontért. A külföldi árszint

$$P^* = \prod_i P_i^{w_i}. \tag{12.3}$$

Ekkor az *effektív reálárfolyam* az egyes országokhoz mért reálárfolyamok súlyozott mértani átlaga:

$$e = \frac{EP}{P^*} = \prod_i {e_i}^{w_i}.$$

12.3. A nettó exportot meghatározó tényezők

Első közelítésben a nettó exportot a jövedelem és a reálárfolyam határozza meg: $X = X(Y,e)$ lineáris közelítésben

$$X = \xi - \xi_Y Y + \xi_e e. \tag{12.4}$$

Például az 1992–2000-es időszakban az USA gazdasága nagyon gyorsan nőtt és pl. az 1999–2000. májusáig tartó időszakban az euró nagyon meggyengült a dollárral szemben: 1,17-ről 0,85-re gyengült, s ennek következtében az amerikai nettó export és fizetési mérleghiány hihetetlen mértékben negatívvá vált.

Pihentetőül egy feladat.

12.1. feladat. A külső adósságdinamikát a következő azonosság írja le:

$$D_t = r_t D_{t-1} + M_t - X_t,$$

ahol D_t az évvégi adósságállomány, r_t a kamattényező, M_t az importvolumen, X_t az exportvolumen.

a) Elemezze a dinamikát a következő relatív változókkal és paraméterekkel:

$$d_t = \frac{D_t}{X_t}, \quad m_t = \frac{M_t}{X_t}, \quad X_t = \xi_t X_{t-1}, \quad \rho_t = \frac{r_t}{\xi_t},$$

ahol d_t adósság-export arány, m_t a fedezeti arány, ξ_t az exportvolumen növekedési tényezője és ρ_t relatív kamattényező.

b) Határozza meg az állandó paraméterű rendszer d^o stacionárius állapotát (r_t, ξ_t és m_t állandó)!

c) Számítsuk ki numerikusan a stacionárius állapotot, ha $r = 1{,}01$; $\xi = 1{,}06$ és $m = 1{,}1$.

12.4. Valutaárfolyam és kamatláb

A valutaárfolyam ingadozásai szoros kapcsolatban vannak a kamatlábakkal. Ha a külföldi reálkamatláb nagyobb, mint a hazai, akkor megindul a hazai forrópénz külföldre, ha kisebb, akkor fordított irányú a mozgás. Képletben:

$$e = \varepsilon + \varepsilon_r r. \tag{12.5}$$

Ha (12.5)-öt behelyettesítjük (12.4)-be, adódik

$$X = \xi - \xi_e \varepsilon - \xi_Y Y - \xi_e \varepsilon_r r. \tag{7.2}$$

12.5. Az IS görbe a nyitott gazdaságban

Behelyettesítjük a jövedelemazonosságba a (6.3), a (7.1) és a (12.4) egyenleteket:

$$Y = [\gamma + \gamma_Y(1-\tau)Y] + [\iota - \iota_r r] + G + [\xi - \xi_Y Y - \xi_e e]. \tag{12.6}$$

Rendezve az egyenletet a kamatlábra:

$$r = \frac{\gamma + \iota + \xi}{\iota_r} - \frac{1 - \gamma_Y(1-\tau) + \xi_Y}{\iota_r} Y + \frac{G}{\iota_r} - \frac{\xi_e}{\iota_r} e. \tag{12.7}$$

Behelyettesítve (12.5)-t (12.7)-ba, kiküszöböljük a reálárfolyamot:

$$r = \frac{\gamma + \iota + \xi + \xi_e \varepsilon}{\iota_r + \xi_e \varepsilon_r} - \frac{1 - \gamma_Y(1-\tau) + \iota_Y}{\iota_r + \xi_e \varepsilon_r} Y + \frac{G}{\iota_r + \xi_e \varepsilon_r}. \tag{12.8}$$

A monetáris és a fiskális politika összetett módon hat a külkereskedelmi mérlegre és a valutaárfolyamra. Első közelítésben a megnövekedett kormányzati kiadás egyszerre rontja a költségvetési és a kereskedelmi mérleget (Hall–Taylor, 12.5a. ábra).

10. ábra

12.6. Valutaárfolyam és árszínvonal

Elvben a valutaárfolyam gyengülése emeli a hazai árszintet, azonban olyan nagy piacokon, mint az USA, előfordul, hogy a külföldi termelők inkább a nyereségrátájukat igazítják ki, mintsem hogy elveszítsék export-piacaikat.

12.7. Protekcionizmus és szabadkereskedelem

A *protekcionizmus* a hazai termelés „védelmét" jelenti: kedvez a termelőnek, árt a fogyasztónak. Amennyiben az árak ragadósak, módosul a kép.

12.8. A valutaárfolyamok stabilizációja

Ha a pénzpolitika a valutaárfolyamot akarja stabilizálni, akkor emelni kell a kamatlábat, de ezzel összehúzza a termelést.

12. Függelék: a kamatláb és az árfolyam alakulása racionális várakozások esetén

Egyébként normális körülmények között a hazai kamatláb egyenlő a külföldi kamatláb és a hazai pénz leértékelésének várható rátájának összegével. A *kamatláb-paritás* képlete:

$$r = r^* + \Delta E^{\mathrm{e}}. \tag{12.9}$$

Bár a vásárlóerő-paritás ($E = E^{\mathrm{o}}$) rövid távon nem érvényes, igaz a következő tendencia: minél inkább túlértékelt egy valuta, annál gyorsabban értékelődik le. Képletben:

$$\Delta E^{\mathrm{e}} = \delta(E - E^{\mathrm{o}}), \qquad 0 < \delta < 1. \tag{12.10}$$

A (12.9) és (12.10) összehasonlításából

$$r - r^* = \delta(E - E^{\mathrm{o}}). \tag{12.11}$$

A külföldi kamatláb a külföldi gazdaságpolitika függvénye, ez utóbbi viszont érzékenyen reagál az USA gazdaságpolitikájára. Például ha az USA-kamatláb nő, akkor a külföldi kamatláb is nő, ha nem is egy-az-egyben:

$$r - r^* = \rho_r r - \rho. \tag{12.12}$$

A (12.11) és a (12.12) képletek összekapcsolásával:

$$E = E^{\mathrm{o}} + (\rho_r r - \rho)\delta^{-1}.$$

Itt jegyezzük meg, hogy 2001–2008 között az euró–magyar forint árfolyam viszonylag stabilan a 250-es érték között maradt, miközben a hazai infláció üteme évente legalább 2–3%-kal meghaladta az eurózónáét. Ezt csak irreálisan magas kamatlábbal lehetett elérni, emiatt viszont folyamatosan nagy volt mind a költségvetési, mind a fizetési mérleghiány. 2009 után az árfolyam többször is kilengett, elérte a 320 forintos értéket. A fizetési mérleghiány megszűnt, de ezt a beruházások (és a fogyasztás) erős visszaesése okozta (vö. D. függelék)

13. A költségvetési hiány és az aggregált kereslet

Az elfogadott elmélet szerint normális körülmények között a költségvetési hiány rossz dolog, az állam többet költ, mint amennyi bevétele van. A Nagy Válság idején természetesen ésszerű volt költségvetési hiányt gerjesztve újraéleszteni a gazdaságot, mert nagy volt a multiplikátor-hatás (6.4. pont). 2000 körül az USÁ-ban egy időre költségvetési hiány költségvetési többletbe fordult, de azóta azonban nőtt, és 2009-ben békeidőbeli rekordszintűre: 12%-ra nőtt. Előírás szerint az euró-zónában a GDP 3%-a alatt kellene maradnia a hiánynak, de ezt a mostani válságban nagyon kevés országnak sikerült teljesítenie. Magyarországon a költségvetési hiány példátlan megszorítás után 2008 óta kb. a GDP 4% körül mozog, fékezve a fogyasztást és a beruházást.

13.1. A kormányzati költségvetés

Egy ország költségvetése durván a következő tételekből áll. Az alábbiakban bemutatunk egy 1996-os német költségvetést.

D. táblázat. *Német költségvetés, 1996, GDP %-a*

1. *Bevételek*	Százalékban	2. *Kiadások*	Százalékban
Adók	23,1	Kormányzati fogyasztás	19,8
TB	19,8	Transzferek	24,3
Egyéb	3,4	Bruttó felhalmozás	2,2
Hiány	3,4	Kamat	3,7

Tb=Társadalombiztosítás

Az adóbevételek szerkezetét külön is bemutatjuk.

E. táblázat. *A német adók szerkezete %*

Adófajta	Összes adóban	GDP-ben
Közvetett adó	44,4	10,0
Béradó	31,4	7,1
Beruházási adó	3,2	0,7
Vállalati adó	3,7	0,8
Egyéb	6,2	1,5
Közvetlen adó	55,5	12,5
ÁFA	29,7	6,7
Jövedéki	12,0	2,7
Kereskedelmi	5,8	1,3
Egyéb	8,0	1,8
Összesen	100	22,5

Az amerikai adókról az idézett tankönyv számol be.

13.2. A deficit ingadozása

A gazdasági ciklussal párhuzamosan – fellendülésnél/visszaesésnél – nőnek/csökkennek a bevételek és csökkennek/nőnek a kiadások (Hall–Taylor, 13.3. ábra), mert változik a munkanélküliség, az adóbevétel stb: *automatikus stabilizátorok*.

11. ábra

13.3. A kormányzati deficit hatása

A kormányzat megítélésekor érdemes a *teljes foglalkoztatás melletti deficit*et mérlegelni, amely a *strukturális deficit*et mutatja. (Hall–Taylor, 13.5. ábra)

12. ábra

Célszerű az egyenleg (B_t) és az államadóság (D_t) közötti kapcsolatot matematikailag vizsgálni:

$$D_{t+1} = \rho_t D_t - B_t. \tag{13.2}$$

Vezessük be a GNP-hez viszonyított értékeket: $d = D/Y$ és $b = B/Y$. Tegyük föl, hogy a GDP exponenciálisan nő: $Y_t = Y_0 g^t$ és mind az egyenleg/GDP, mind a kamattényező állandó: $b_t \equiv b_0$, $\rho_t \equiv \rho_0$. Ekkor

$$d_{t+1} = \frac{\rho}{g} d_t - b_0. \tag{13.2$'$}$$

Határozzuk meg a relatív adósság dinamika *fixpontját*:

$$d^{\circ} = \frac{g b_0}{\rho - g}.$$

Könnyen belátható, hogy amennyiben a növekedési tényező kisebb, mint a kamattényező (ezt hívják *dinamikus efficienciá*nak): $g < \rho$, akkor pozitív egyenlegre van szükség ahhoz, hogy az adósság is pozitív legyen. Viszont a rendszer instabil: az egyensúlytól való eltérés ($\hat{d} = d - d^{\mathrm{o}}$) exponenciálisan nő:

$$\hat{d}_{t+1} = \frac{\rho}{g}\hat{d}_t.$$

Nehéz megítélni, mennyire káros az államadósság felduzzadása. Ha jó beruházásokat finanszíroznak belőle, akkor az adósság visszafizethető. Ha könnyelműen fogyasztást finanszíroznak belőle, és magas reálkamatokat kell utána fizetni, akkor káros (Hall–Taylor, 13.7. ábra).

13. és 14. ábra

14. A monetáris rendszer

Minden piacgazdaság monetizált, de még a más típusú gazdaságokban is, mint például a feudális vagy a szocialista gazdaság, nagy szerepet játszott a pénzügyi szféra.

14.1. A monetáris rendszer elemei

A pénz egyszerre *fizetési eszköz* és *elszámolási egység*. A történelem folyamán először árupénz volt, majd az aranypénz, s a 20. századra egyeduralkodóvá vált a belső érték nélküli, kormányzat által kibocsátott és szavatolt *papírpénz*.

A következő pénzfajtákat különböztetjük meg: M_1 = készpénz (CU) *és* csekk (vagy folyó) számlapénz (D_1); $M_2 = M_1$ *és* takarékbetét és befektetési alapok (D_2); $M_3 = M_2$ *és* tranzakcióban részt nem vevő pénz.

14.2. Pénzkínálat – a központi bank szabályozó szerepe

Összevonva a kétféle betétet: $D = D_1 + D_2$, felírható a következő azonosság:

$$M = CU + D. \tag{14.1}$$

A kormány *államkötvényeke*t bocsát ki (B), amelyeket a központi bank, a kereskedelmi bankok és a nem pénzügyi magánszektor (háztartások és vállalatok) elfogad(nak). A kereskedelmi bankok a központi banknál *tartalékoka*t helyeznek el (RE), amelyek a kereskedelmi bankoknál elhelyezett betétek meghatározott arányát el kell érniük. A kereskedelmi bankok közvetítenek a betétesek és a hitelezettek között: *kölcsönhitelek*.

A központi bank az államkötvény-piacon keresztül befolyásolja a *monetáris bázis*t:

$$M_{\mathrm{B}} = CU + RE. \tag{14.2}$$

A monetáris bázis és a pénzkínálat között a következő összefüggések teljesülnek:
Kötelező tartalékok:

$$RE = rD, \tag{14.3}$$

ahol r a *tartalékráta*.

A készpénzkereslet

$$CU = cD. \tag{14.4}$$

A fenti összefüggésekből egyszerűen adódik a *monetáris bázis multiplikátora*:

$$M = \frac{1+c}{r+c} M_{\mathrm{B}}. \tag{14.5}$$

Példa. Ha $r = 0{,}1$ és $c = 0{,}2$, akkor $M = 4M_{\mathrm{B}}$.

Tanulságos a kormány költségvetési egyenlete:

$$G + F + RE - T = \Delta M_{\mathrm{B}} + \Delta B. \tag{14.6}$$

Az egyenlet szerint a költségvetési hiányt a monetáris bázis (M_{B}) növelésével vagy államkötvényekkel lehet fedezni. Ezek szerint a költségvetési politika a kötvény által finanszírozott változtatások a kormányzati kiadásokban és az adókban. A monetáris politika a monetáris bázis növekedése, az államkötvények párhuzamos csökkentésével.

14.3. Pénzkereslet, készpénz és látra szóló pénz

Keynes három pénzkeresleti okot különböztetett meg: *tranzakciós*, *óvatossági* és *spekulatív*.

Ha a csekkszámlánkon pénzt tartunk, akkor az kevesebb kamatot hoz, mintha megtakarítási számlán tartanánk, de esetleg nem kell fizetnünk a csekk-költségekért. Ezt a veszteséget *lehetőségköltség*nek (angolul: opportunity cost) nevezik.

A tranzakciós pénzkeresletet Tobin az egyéb termékek készletezéséhez hasonlította, ahol igyekszünk megtalálni az optimumot a rosszul kamatozó pénzkészlet és a gyakori pénzátutalás között.

A pénzkeresleti függvény a fenti okok eredőjeként alakul.

14.4. Az LM görbe és a központi bank pénzpolitikája

Három cél lehetséges: 1) Az M_1, 2) a kamatláb és 3) a GDP.

14.5. A központi bank és a költségvetés gazdaságpolitikája

kihagyva

14.6. Az IS és az LM görbét érintő sokkok

Attól függően, hogy milyen sokkok érik a gazdaságot, más- és más központi pénzpolitika lehet célszerű.

14.7. Késések a monetáris politika hatásában

Mivel a monetáris politika egy-kétéves késleltetéssel hat a gazdaságra, nagyon kockázatos az aktív használata.

III. RÉSZ. A KIBOCSÁTÁS ÉS AZ ÁRAK MEGHATÁROZÓDÁSÁNAK MAKROÖKONÓMIAI ALAPJAI

15. Munkapiac és ingadozások rugalmas árak mellett

kihagyva

16. A vállalat és a munkapiac merev árak és bérek mellett

Míg a kihagyott 15. fejezetben a könyv szerzői azt az (irreális) elképzelést tanulmányozták, hogy az árak teljesen rugalmasak, most azzal a reális feltevéssel élünk, hogy az árak (és a bérek) ragadósak.

16.1. Rugalmatlan reálárak és reálbérek

A tapasztalat szerint a legfontosabb árnak, a munkabérnek reálértéke rövid távon merev. Ezért a vállalat profitja alig érzékeny a foglalkoztatottságra.

Mikroökonómiából ismert, hogy az ár egyenlő a határköltség és haszonkulcs (μ) szorzatával:

$$P = \mu \mathrm{MC}. \tag{16.6}$$

A határköltséggörbe is lapos, ezért az ár is érzéketlen a változásokra.

16.2. Nominális bér- és ármerevség

Ha az infláció nem túl gyors (évi néhány százalék), akkor rövid távon a feldolgozó ipar számos termékének ára és a dolgozók nominálbére is változatlan: nem érné meg a fáradságot a bérek és az árak állandó változtatgatása. (Természetesen vannak olyan termékek, az ún. tőzsdeáruk: pl. búza, nyersolaj, valuta, részvényárfolyamok, amelyek ára szinte másodpercenként változik.)

16.3. Bérmegállapítás az USÁ-ban

Az USÁ-ban a szervezett dolgozók hagyományosan három évre szóló bérmegállapodásokat kötnek, különböző időpontokban. Ezek a megállapodások az egyes évekre előre elosztják a béremeléseket. Bár viszonylag kicsi a súlyuk (10%), a többi dolgozó megállapodásai is követik őket. Ezért átlapolódnak a béregyezségek, s ezáltal merevvé teszik a nominálbéreket.

16.4. A lépcsőzetes bérmegállapodás egyszerű modellje

Az egyszerűség kedvéért két évre szóló bérmegállapodást modellezünk: a dolgozók fele a páros évek elején, a másik fele a páratlan évek elején kap új bérszerződést (X). Az átlagbér W:

$$W = \frac{X + X_{-1}}{2}, \tag{16.8}$$

ahol a –1 alsó index az előző évet, a +1 alsó index a következő évet jelöli.

A szerződéses bért viszont a két évre várható átlagbér átlagaként állapítják meg, de figyelembe veszik még a munkapiaci helyzetet is:

$$X = \frac{W + W_{+1}}{2} - \frac{c}{2}\left[\hat{U} + \hat{U}_{+1}\right], \tag{16.9}$$

ahol $\hat{U}$ a munkanélküliségi ráta eltérése a természetes értékétől, és c egy pozitív állandó. Helyettesítsük be (16.8)-at (16.9)-be, és rendezzük a kifejezést:

$$X = \frac{X_{-1} + X_1}{2} - c\left[\hat{U} + \hat{U}_{+1}\right]. \tag{16.11}$$

Itt feltettük, hogy jól előrejelezhető a jövő évi (+1 indexű) szerződéses bér értéke: racionális várakozások. Figyeljük meg, hogy a jelen nemcsak a múlttól, de a jövőtől is függ.

16.5. Gazdaságpolitikai következmények

A modell gazdaságpolitikai következményei fontosak. Képzeljük el, hogy már több éve nagy az infláció, és hirtelen meg akarja szüntetni a Fed. Mivel a nagy inflációt már beárazták a 3 évre szóló bérmegállapodások 2/3-ában, csak a munkanélküliség drasztikus növelésével lehet a reálbéreket kordában tartani. Ez óriási termeléskieséssel jár. Ehelyett célszerűbb az inflációt fokozatosan, bár határozottan csökkenteni, és ezt előre bejelenteni, hogy a szerződésekben is figyelembe vehessék az érdekeltek.

17. Aggregált dinamika és árigazodás

Ebben a fejezetben egy olyan modellt elemzünk, amely összekapcsolja az ár- és bérmerevségeket és a racionális várakozásokat.

17.1. A bér-ár mechanizmus teljes folyamata

A 8. fejezetből idézzük a várakozásokkal bővített Phillips-görbét:

$$\pi = f\frac{Y_{-1} - Y^*}{Y^*} + \pi^{\mathrm{e}} + Z, \tag{17.1}$$

ahol $f > 0$ egy állandó, Y^* az egyensúlyi kibocsátás, π és π^{e} a tényleges és a várt inflációs ráta, végül Z az ársokk.

Az első tag azt mutatja, hogy ha rövid távon az előző időszakban kihasználatlan kapacitások voltak: $Y_{-1} < Y^*$, akkor önmagában az infláció üteme negatív lenne. A második tag az inflációs várakozások hatását mutatja, amely a bérmegállapodásokon keresztül hat. A harmadik tag a nyersanyagárak változásának hatását mutatja (pl. az 1973-as és az 1979-es olajárrobbanást).

Racionális várakozásoknál várható értékben $\pi^{\mathrm{e}} = \pi$, a sokk várható értéke 0, tehát $Y_{-1} = Y^*$: az egyensúlyi kibocsátás független az inflációs rátától.

17.2. Az árigazodási modell együtthatóinak változása

A környezet változása miatt változik f is. Két példát hozunk erre: 1) az indexálás elterjedtségét és 2) az üzleti ciklusok hosszát és kilengését.

Ad 1) Az USÁ-ban nemigen kötik össze explicite a béreket az árakkal, azonban egyes nyugat-európai országokban, különösen Olaszországban, hosszú éveken keresztül bérindexálás működött. Ez azonban nem csodaszer, sőt. Magyarországon – helyesen – soha nem volt bérindexálás, viszont a nyugdíjakat 1992–1998 között a bérekhez igazították. Terv szerint 2001-től takarékossági okokból a nyugdíjasok csak a reálkereset-növekedés felét kapták volna meg (E. függelék, különösen az E.3–4. táblázat). Ugyanakkor politikai megfontolásokból a már megállapított nyugdíjak az előírtnál sokkal gyorsabban emelkedtek, különösen a 13. nyugdíj 2002–2006 közti fokozatos bevezetése miatt. A ránk törő világválság nyomán a kormánynak 2009. tavaszán meg kellett szüntetnie a 13. havi nyugdíjat és a már megállapított nyugdíjak reálértéke a továbbiakban lényegében változatlan marad.

Ad 2) Valószínű, hogy a II. világháború után az USÁ-ban rövidebbé és enyhébbekké váltak a ciklusok, ezért csökken az inflációs/deflációs nyomás. Az önelégült közgazdászok a Nagy Mérsékletről beszéltek, míg rájuk nem dőlt a válság.

17.3. A várható infláció modelljei

Az uralkodó elmélet szerint a gazdaság nem kormányzati szereplői átlátnak a kormányzati szándékokon, s lényegében jól becslik előre az inflációt is: racionális várakozások. Ez azonban nem zárja ki azt, hogy rövid távon komoly eltérések legyenek a várakozások és a tények között.

17.4. Az árigazodás és az aggregált kereslet

1995 elején a magyar gazdaság robbanásig túlfűtötté vált, a fizetési mérleg hiánya elérte a GDP 9%-át. Elvileg két stabilizációs lehetőség volt: 1) ortodox (tiszta) és 2) heterodox (kevert). Ad 1) Az ortodox megoldás a kereslet visszaszorításán keresztül növelte volna a munkanélküliséget, s ezáltal lenyomta volna a reálbéreket, a fogyasztást, s megjavította volna a külső versenyképességet. Ad 2) A heterodox megoldás egy hirtelen leértékeléssel az inflációs rátát 18%-ról 29%-ra nyomta föl, ezáltal egy év alatt lenyomta a reálbéreket 15%-kal, s változatlan munkanélküliség és kibocsátás mellett állította helyre az egyensúlyt. 2006–2008 között újból stabilizációra szorult az ország. Az akkori kormány növelte az adókat, s ez csökkentette a reálkereseteket. Utólag úgy tűnik, hogy helyesebb lett volna az adókat és ezzel párhuzamosan az állami újraelosztást, valamint a kiadásokat csökkenteni, vállalva a keresetkülönbségek növekedését és a infrastruktúra stagnálását.

Amerikai példát tükröz a következő két ábra (Hall–Taylor, 17.1-2. ábra).

15. és 16. ábra

17.5. Infláció–kibocsátási hurok az USÁ-ban, az NSZK-ban és az UK-ban

Ha a vízszintes tengelyen a GNP-rést ábrázoljuk, s a függőlegesen az inflációs rátát, akkor jellegzetesen hurkokat kapunk, amelyek az üzleti ciklusokat tükrözik.

IV. RÉSZ. MAKROGAZDASÁGI POLITIKA

18. Megfelelő makropolitika megtervezése és megvalósítása

Általában a gazdaságpolitika az infláció és a munkanélküliség együttes visszaszorítására törekszik, ez országonként különbözőképp valósul meg.

18.1. Általános elvek

Öt elvet mondunk ki.

1. Az emberek várakozásai racionálisak: nem hibátlanok, de torzítatlanok.
2. A makropolitika is a gazdaság része és szabályként kell megadni.
3. A gazdaságpolitikai szabály akkor működik jól, ha a gazdaságirányítás elkötelezett és szavahihető.
4. A gazdaság alapvetően stabil, csak a sokkok időlegesen kitérítik az egyensúlyból.
5. A makropolitikának az a célja, hogy csökkentse a kibocsátásnak, a munkanélküliségnek és az inflációnak az egyensúlytól való eltérésének az időátlagát.

18.2. Eszközök és célok (vö. H. függelék)

Matematikai szabályozáselméletben ismert az állapot- és a szabályozási vektor fogalma. Jelük: x_t és u_t. A (lineáris) szabályozási rendszer az állapotváltozást a szabályozás (lineáris) függvényében írja le:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t,$$

ahol A és B alkalmas méretű mátrix.

A rendszert *szabályozható*nak nevezzük, ha tetszőleges állapotból tetszőleges állapotba véges időszak alatt átvihető: azaz tetszőleges x' és x'' állapotpárhoz létezik olyan u_0,$u_1, \dots$,u_T szabályozási vektorsorozat, amely a rendszert x'-ből x''-be vezeti. Általában a szabályozási változó kisebb dimenziójú, mint az állapotváltozó („hetet egy csapásra”).

A legegyszerűbb esetben $A = I$, azaz $x_{t+1} = x_t + Bu_t$. Ekkor a szabályozhatósághoz (szükséges és) elegendő, hogy B invertálható legyen, ekkor a célbaérés egy időszak alatt megvalósítható: $u_0 = B^{-1}[x'' - x']$.

Gyakran azonban az eszközök nem eléggé függetlenek egymástól, ekkor kompromisszumra kell törekedni.

18.3. Bizonytalanság és időzítés

Minél bizonytalanabbak az ismereteink a gazdaságról, annál óvatosabban kell beavatkoznunk annak működésébe. Ezenkívül az előnyök és a hátrányok a) időbeli és b) egyénenkénti eloszlása sem azonos. Ad a) Mire beért volna a Bokros-csomag, a Horn-kormány régen megbukott (Magyarország, 1998) vagy a hátrányok sokkal később válnak láthatóvá, mint az előnyök (2002-es száznapos program). Ad b) A szenvedők sokkal hangosabban tiltakoznak, mint ahogyan a nyertesek támogatnak (az EU mezőgazdasági politikájának hasznát a lakosság 5%-a (a farmerek) élvezi és 95%-a (a fogyasztók) szenved a tehertől.

18.4. Teljes foglalkoztatottság és az árstabilitás

A jó politika a foglalkoztatottságot és az inflációt együtt optimalizálja, pl. a négyzetes eltérések összegét minimalizálja (Kalman-szűrő).

A munkanélküliség költsége eléggé nyilvánvaló (bár egyes közgazdászok a munkanélküliséget önkéntes pihenésnek tekintik). Az infláció költségei sokkal nehezebben megfoghatók: 1. Minél nagyobb az infláció, annál nagyobb a nominális kamatláb, tehát annál drágább a készpénztartás a takarékbetéthez képest. 2. Tökéletlen indexálásnál torzul az adórendszer. 3. Igazságtalan nyereségek (pl. a hitelfelvevők) és veszteségek (pl. a hitelnyújtók).

18.5. Átváltás az infláció és a munkanélküliség között

A teljes foglalkoztatottság és az árstabilitás a Phillips-görbe miatt általában kizárja egymást [(17.1)]:

$$\pi = f\frac{Y_{-1} - Y^*}{Y^*} + \pi^{\mathrm{e}} + Z. \tag{18.1}$$

Tegyük föl, hogy adott évben egy ársokk éri a gazdaságot. Tegyük föl, hogy a gazdaságpolitika a kibocsátási rést az inflációs ráta meghatározott arányában (g) állítja be:

$$\frac{Y - Y^*}{Y^*} = -g\pi. \tag{18.2}$$

Naiv várakozást: $\pi^e = \pi_{-1}$ mellett, (18.2)-t behelyettesítve (18.1)-be, adódik

$$\pi = (1 - fg)\pi_{-1} + Z. \tag{18.3}$$

Ha $g = 1/f$, akkor az inflációs hatást egy időszak alatt leküzdöttük (lásd a 18.2. alfejezet szabályozhatósági részét), viszont nagyon lecsökkentjük a kibocsátást. Ha g sokkal kisebb, mint $1/f$, akkor az inflációs hatást csak több időszak alatt küzdjük le, viszont alig csökkentjük a kibocsátást.

18.6. Az ársokk kezelésének optimális módja

Az optimum a két véglet között van.

18.7. A gazdaságpolitikai mozgástér bővítése

A következő lehetőségeket soroljuk föl, amelyekkel a kormányzat bővítheti saját mozgásterét: 1. a munkaerőpiac áramvonalasítása, 2. az indexálás fejlesztése, 3. a kormányzati hibák kiküszöbölése, stb.

19. A világgazdaság

A feldolgozott könyv főleg az USÁ-val foglalkozik és 1990 előtt íródott, ezért korlátozott érvényű.

19.1. A nemzetközi pénzügyi és monetáris rendszer

Napjainkban három pénzügyi nagyhatalom működik: az USA, Japán és az EU. 1971 óta az árfolyamok egymás közt szabadon alakulnak: *lebegnek.* Az EU országai 1979-től kezdve egyre inkább összehangolják árfolyamaikat, 1999-től a legfontosabb nyugat-európai országok (Nagy-Britannia kivételével) teljesen rögzített árfolyamot alkalmaznak egymás között, s 2002-től megvalósult a közös pénz, az euró.

2000. január 1-jéig a magyar forint árfolyama egy változó valutakosárhoz volt kötve (legutóbb 30% dollár és 70% euró), aztán 100% euró. 1995 elejéig a forintot időnként leértékelték, majd előre meghatározott mértékben naponta leértékelték: csúszó árfolyam. Először majdnem havi 2%-kal, végül csak havi 0,2%-kal. 2001. májusáig a kormány $\pm 2{,}25\%$ sávon belül tartotta a forint árfolyamát, 2001 és 2008. tavasza között $\pm 15\%$-ra bővítette. Ha kellett, akkor a kormány vagy az MNB beavatkozott. 2008. tavaszától a két sávot eltörölték, a forint árfolyama szabadon lebeg, először 240 Ft/E árfolyamon. Ez a politika féken tartotta az inflációt, viszont nagyon korlátozta az exportot, különösen a hazai vállalatokét. 2008. őszén megingott a bizalom a forint és a környező valuták iránt, 2009. márciusában a forint–euró árfolyam 320-ra gyengült, majd 270 körül stabilizálódott.

Manapság egy nyitott piacgazdaságban a következő három feltételnek kell teljesülnie: 1. A valuta *szabadon átváltható* (konvertibilitás). 2. Szabad tőkemozgás. 3. Szabad termékáramlás.

A szocialista gazdaságban egyik feltétel sem teljesült, így lehetett – úgy-ahogy – elszigetelni a belső gazdaságot a külső gazdaságtól. A II. világháború után először a nyugat-európai gazdaságok sem teljesítették e feltételeket, s azóta is vitatják, hogy ez jó volt-e vagy sem.

A központi bank állampapírokat adott el/vett, hogy befolyásolja a valutaárfolyamot. Ma már inkább a kamatlábak változtatsával befolyásolja a hazai árszínvonalat és a valutaárfolyamot.

A központi bank devizatartalékai eladásaival tudja védeni a hazai árfolyamot. Kérdés, hogy van-e elég tartaléka, hogy megvédje a hazai árfolyamot a spekulánsok támadásától. Például 2008. őszén az MNB-nek csak 17 mrd EUR tartaléka volt, és ez hozzájárult a forint elleni támadás sikeréhez. A devizatartalékokat az IMF+EU segítségével kb. 30 mrd EUR-ra emelték fel. Persze, a kamatláb-különbség miatt ez is költséges dolog, de legalább biztonságot ad.

19.2. A világ pénzügyi rendszerének a története

A modern korszakban 1914-ig minden ország valutájának egysége aranytartalommal volt megadva. Ez automatikusan biztosította a fix árfolyamokat. Az I. világháborúban a hadigazdálkodás nyomán ez a rendszer összeomlott, s az 1920-as években csak pár évig sikerült visszatérni az *aranyvaluta-rendszer*hez. 1945–1971 között dolláralapú valuta-rendszer volt, a domináns ország, az USA vállalta, hogy rögzített arányban (35 dollár/uncia) vált be dollárt aranyra. 1971-re az USA aranytartalékai vészesen csökkentek, s a rendszer megbukott.

19.3. Gazdaságpolitika, árfolyam és infláció

Gazdaságpolitika lebegő árfolyam mellett. Például 1971. óta az USA szabadon alakíthatja monetáris és költségvetési politikáját. 2000 körül az USA gazdasága belsőleg egyensúlyba került: nem volt se infláció, se számottevő munkanélküliség, a növekedés gyors volt. 2002. közepe óta a növekedés ingadozik, és a költségvetési hiány a GDP 4%-ra nőtt. Még a költségvetési többlet idején is folytatódott a hatalmas külső eladósodás, s ez csak azért volt lehetséges, mert sokáig rengeteg külföldi befektetőt vonzott az amerikai tőzsde 2001-ben megszűnt, majd 2008-ig megújuló szárnyalása. Rengeteg nem amerikai egyén tartja megtakarításait dollárban. Nyugat-Európában ellentétes volt a helyzet: nagy a munkanélküliség (10%) és komoly tőkekivitel volt, főleg az USÁ-ba, de Kelet-Európába is.

2008. őszén kipukkadt az amerikai jelzálog-buborék. Emiatt mindenütt összeomlott a tőzsde, és csak a példátlan állami beavatkozás (például az USÁ-ban a költségvetési hiányt 11%-ra kellett emelni) mentette meg a nemzetközi pénzügyi és gazdasági rendszert az összeomlástól.

Magyarországon a 2006–2008-as megszorítás hiába csökkentette hatalmas mértékben a költségvetési hiányt, magas kamat, az erős árfolyam és a bankok laza hitelpolitikája 2008 őszéig lehetővé tette a magyar vállalatok és magyar állampolgárok rohamos eladósodását. Amikor a hitelforrások hirtelen kiszáradtak, 2009-ben a hirtelen reakció és az exportlehetőségek beszűkülése miatt a termelés jelentékenyen (6%-kal) visszesett. 2010-ben már megindult a lassú növekedés.

Gazdaságpolitika rögzített árfolyam mellett. Az EMU-ban minden ország közös monetáris és költségvetési politikát folytat, a szabad tőkeáramlás és a minimális infláció (2%) miatt nem is lehetnek lényeges kamatláb-különbségek sem.

Hosszú távon érvényes a következő egyenlet:

$$P \cdot E = P_{\mathrm{w}}, \tag{19.2}$$

ahol P=hazai árszínvonal, E=valutaárfolyam és P_{w}= nemzetközi árszínvonal.

Rögzített árfolyam esetén olyan pénzpolitikát kell folytatni, hogy teljesüljön (19.2) következő alakja:

$$P = \frac{P_{\mathrm{w}}}{E}. \tag{19.3}$$

Lebegő árfolyam esetén tetszőleges pénzpolitikát folytathat, s ebből határozódik meg az árfolyam úgy, hogy teljesüljön (19.2) következő alakja szerint:

$$E = \frac{P_{\mathrm{w}}}{P}. \tag{19.4}$$

19.4. Nemzetközi gazdaságpolitikai koordináció

Tegyük föl, hogy minden ország megpróbálja optimálisan szabályozni foglalkoztatottságát és inflációját. Mivel az egyes országok gazdaságpolitikája erősen hat a többi ország helyzetére, játékelméleti helyzettel van dolgunk. A két világháború között az egyes országok kevés tekintettel voltak a többi országra, ezt hívják „tedd koldussá a szomszédod" politikának vagy *nem-kooperatív játék*nak, s a következmény ismert. A II. világháború után az egyes országok, különösen az USA, *kooperatív játékot* folytattak, s a Marshall-terv például az amerikai támogatást az egyes nyugat-európai országok kooperációjához kötötte. Ez a kooperáció a közös pénz bevezetésével soha nem látott szintre emelkedett.

Különböző országok valutauniója összehangolt költségvetési politikát feltételez. Mivel azonban az EU-15 tagországok déli tagországai, mindenekelőtt Görögország „titokban” – a statisztikai adatokat meghamisítva – laza költségvetési politikát folytattak, költségvetési hiánya, fizetési mérleghiánya és államadóssága mértéktelenül felduzzadt: a GDP 12%-ra illetve 125%-ra felduzzadt. 2010 tavaszán a görög gazdaságot kellett megmenteni, ősszel az írt. A portugál és a spanyol megoldás még kérdéses.

FÜGGELÉKEK

A. NÖVEKEDÉSI MODELLEK

Jól ismert, hogy a neoklasszikus elmélet 1870 körüli kialakulásától egészen a II. világháborúig nem sok figyelmet szentelt a növekedés kérdéseinek. Harrod (1939) diszkrét idejű modellje mellett Domar (1946) folytonos idejű modellje az első növekedési modellek között foglal helyet. Az imént említett modellek azonban klasszikusak lévén, alig kapcsolódtak a modern közgazdaságtan főáramát képező neoklasszikus közgazdaságtanhoz. Ezért okozott nagy örömöt a főáram híveinek, amikor Solow (1956) megalkotta a neoklasszikus növekedési modellt. Azóta a növekedéselmélet nagy utat tett meg, de mi csak a két úttörő modellosztállyal tudunk foglalkozni ebben az alfejezetben. A témakörből Szakolczai (1963) és (1967) szerkesztésében gazdag válogatás áll a magyar olvasó rendelkezésére. A mostanában kialakuló endogén növekedés elméletéről gazdag ismertetést ad Valentinyi (1995). Mivel az irodalomban általában Hall–Taylortól eltérő jelölést és sorrendet használnak, nem tartom feleslegesnek, hogy a függelékben mi is a szokásos sorrendet kövessük, és $F(N,K)$ helyett $F(K,L)$-et írjunk.

Egy klasszikus növekedési modell

Domar modelljében végső soron három makrováltozó van: termelés (Y), beruházás (I) és fogyasztás (C). A modell egyenletei a következők.
GDP-azonosság

(A.1) $$Y = C + I;$$

Termelésnövelés

(A.2) $$\dot{Y} = AI, \quad A > 0;$$

Fogyasztási függvény

(A.3) $$C = (1 - s)Y, \quad 0 \le s \le 1.$$

Mind A, mind s időben változatlan paraméterek.

A jobb megértés kedvéért ketté bontjuk az (A.2) egyenletet:
Állandó termelés–tőke hányados

(A.2a) $$Y = AK.$$

Azonnali tőkeképződés

$$\dot{K} = I. \tag{A.2b}$$

Valóban, deriválva az (A.2a) egyenletet és behelyettesítve az (A.2b)-be, adódik (A.2).

Most csak egyensúlyi pálya létezik. Egyszerű behelyettesítéssel: $I = sY$, azaz a kibocsátás dinamikáját az alábbi állandó-együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet írja le.
Alap differenciálegyenlet

$$\dot{Y} = AsY. \tag{A.4}$$

Az (A.4) differenciálegyenletet megoldva adódik az

A.1. tétel. *(Domar, 1946.) Az (A.4) differenciálegyenlettel leírt klasszikus növekedési modell pályája exponenciális:*

$$Y(t) = Y_0 e^{\Gamma t}, \tag{A.5}$$

ahol Γ *a növekedési ütem:*

$$\Gamma = As. \tag{A.6}$$

Az életben érvényesülő nagyságrendek érzékeltetésére megemlítjük a következő számhármast.

A.1. példa. Numerikus szemléltetés. $s = 0{,}2$; $A = 0{,}25$; $\Gamma = 0{,}05$.

Megjegyzés. Felfedezése óta a $\Gamma = As$ képletről nagyon sok közgazdasági vita folyt. Tegyük föl, hogy a munkaerő növekedési üteme ν, a termelékenységé η, ekkor teljes foglalkoztatás esetén a $\Gamma = \nu + \eta$ egyenlőségnek teljesülnie kell. Mi biztosítja ezt az egyenlőséget? A klasszikus elmélet szerint ez csak véletlenül teljesül, s semmi sem biztosítja az egyensúly stabilitását. Harrod (1939) kifejezése szerint az egyensúly borotvaélen táncol. Ezt a problémát oldja meg a neoklasszikus megközelítés.

Egy neoklasszikus növekedési modell

A neoklasszikus megközelítés lényege a termelési tényezők közti sima helyettesíthetőséget kimondó feltevésben rejlik. Tegyük föl, hogy a kibocsátás a tőkén kívül a munkától is függ, ahol $L(t) = L_0 e^{\nu t}$. (A műszaki haladástól eltekintünk.) Neoklasszikus – állandó skálahozadékú – termelési függvény szerint tetszőleges K és L kombinációval előállítható valamilyen kibocsátás: $Y = F(K, L)$. Célszerű az *egy főre jutó* kibocsátásra és tőkére áttérni:

$$y = \frac{Y}{L} \qquad \text{és} \qquad k = \frac{K}{L}. \tag{A.7}$$

Ekkor $Y = F(K, L)$ helyett

$$y = f(k) = F(k, 1), \tag{A.8}$$

írható. Feltesszük, hogy

$$\text{(A.9)} \qquad f'(\cdot) \quad \text{csökken, valamint} \quad f'(0)=\infty \quad \text{és} \quad f'(\infty)=0.$$

Megtartva az (A.1), (A.2b), (A.3) összefüggéseket, valamint az állandó megtakarítási hányad feltevését, levezethető a következő
nem-lineáris alap differenciálegyenlet:

$$\text{(A.10)} \qquad \dot{k} = sf(k) - \nu k.$$

Valóban:

$$\left(\frac{\dot{K}}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{I}{Y}\frac{Y}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = sy - \nu k.$$

Kimondható az

A.2. tétel. *(Solow, 1956.) Az (A.10) differenciálegyenletű neoklasszikus növekedési modell egyetlen stacionárius pontját a következő egyenlet határozza meg:*

$$\text{(A.11)} \qquad sf(k^{\mathrm{o}}) = \nu k^{\mathrm{o}}; \quad 0 < k^{\mathrm{o}} < \infty;$$

amely globálisan stabil.

Bizonyítás. (A.10)-be behelyettesítve $\dot{k} = 0$-t, adódik (A.11). A konkavitási feltétel miatt éppen egy ilyen pont létezik, mert (A.9) és a l'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{k\to 0}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

(A.10) szerint $0 < k < k^{\mathrm{o}}$ esetén $\dot{k} > 0$, $k^{\mathrm{o}} < k < \infty$ esetén $\dot{k} < 0$, azaz k mindkét oldalról tart k^{o}-hoz. A bizonyítás szabatossá tehető a Ljapunov-módszer alkalmazásával. ∎

Bemutatjuk a legegyszerűbb termelésifüggvény-családot.

A.2. példa. Cobb–Douglas-féle termelési függvény. $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ esetén $y = Ak^{\alpha}$, azaz $k^{\mathrm{o}} = (sA/\nu)^{1/(1-\alpha)}$.

Az A.2. tétel bizonyításának gondolatmenetét szemlélteti az A.1. ábra az $A = 1$; $\alpha = 0{,}3$; $\nu = 0{,}05$; $s_1 = 0{,}2$ és $s_2 = 0{,}3$ esetben. Vegyük észre, hogy nagyobb beruházási hányadhoz nagyobb egyensúlyi tőkefelszereltség tartozik!

Jellemző, milyen magabiztosan marasztalja el Azariadis a Solow-modellt, mert ez a magatartás nem optimális. Anélkül, hogy elfogadnánk ezt a bírálatot, megemlítjük, hogy a C. alfejezetben visszatérünk az optimális felhalmozás kérdésére. Itt csak utalunk Phelps (1961)-re, amely *intertemporális* optimalizálás nélkül meghatározta az időben állandó, *aranyszabály* szerinti optimális felhalmozási hányadot.

A.3. tétel. *(Phelps, 1961.) Az egy főre jutó maximális stacionárius egyensúlyi fogyasztás olyan tőke/munka arány mellett valósul meg, ahol a határtermelékenység megegyezik a munkaerő növekedési ütemével:*

$$f'(k^{\mathrm{o}}) = \nu. \tag{A.12}$$

Bizonyítás. $C/L = [F(K,L) - \nu K]/L = f(k) - \nu k$. A maximum szükséges feltétele értelmében a k szerinti deriváltnak el kell tűnnie, azaz $f'(k) - \nu = 0$ adódik. ∎

Az A.3. tételt a legegyszerűbb termelésifüggvény-családon szemléltetjük.

A.3. példa. Cobb–Douglas-optimum. $y = Ak^\alpha$ esetén (A.12) az $\alpha Ak^{\alpha-1} = \nu$ egyenletre egyszerűsödik, ahonnan $k^{\mathrm{o}} = (\alpha A/\nu)^{1/(1-\alpha)}$. Az A.2. példával összevetve: $s^{\mathrm{o}} = \alpha$.

Az A.1. ábra adatain szemléltetjük az optimumot: A.2. ábra.

Ha föltesszük, hogy a műszaki haladás *Solow-semleges*, azaz minden évben azonos ütemben nő egy adott tőke–munka párhoz tartozó kibocsátás, $\mathbf{F}[t, K(t), L(t)] = e^{\eta t}F[K(t), L(t)]$, akkor a $\Gamma = \nu + \eta$ jelöléssel a meg nem testesült műszaki haladás is modellezhető. Éppen ez volt Solow másik nagy teljesítménye: (1957).

Végül a 4.3. alfejezet Cobb–Douglas-függvényét általánosítjuk.

$$Y_t = A_t F(N_t, K_t). \tag{A.13}$$

Idő szerint deriválva az egyenletet, adódik

$$\dot{Y}_t = \dot{A}_t F(N_t, K_t) + A_t \dot{F}(N_t, K_t). \tag{A.13$'$}$$

Felhasználva a teljes derivált képletét, adódik

$$\dot{F}(N_t, K_t) = F'_N \dot{N}_t + F'_K \dot{K}_t.$$

Behelyettesítve (A.13$'$)-ba:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{F'_N N_t}{F_t}\frac{\dot{N}_t}{N_t} + \frac{F'_K K_t}{F_t}\frac{\dot{K}_t}{K_t}. \tag{A.13$''$}$$

Bevezetve az

$$\eta = \frac{\dot{Y}}{Y}, \quad a = \frac{\dot{A}}{A}, \quad \nu = \frac{\dot{N}}{N}, \quad \kappa = \frac{\dot{K}}{K}$$

és az

$$1 - \beta = \frac{F'_K K_t}{F_t}, \quad \beta = \frac{F'_N N_t}{F_t}$$

jelöléseket,

$$\eta(t) = a(t) + \beta\nu(t) + (1-\beta)\kappa(t). \tag{A.14}$$

B. VÁRAKOZÁSI DINAMIKÁK

Bevezetés

A közgazdasági modellek egyik megkülönböztető vonása, hogy egyes változók függhetnek más változók jövőre vonatkozó értékétől, a *várakozások*tól. Például a könyvkereskedő e heti beszerzése függ a jövő hétre várt eladásoktól, vagy az idei megtakarításom függ a jövő évre várt kamatlábtól.

Az 1950–60-as évek modelljeiben a naiv (vagy általánosabban: adaptív) várakozások szerepeltek, ahol a várakozás a korábbi ténytől (és a korábbi várakozástól) függött. Például a kereskedő fölteszi, hogy a jövő héten is ugyanannyi könyvet akarnak vásárolni, mint ezen a héten. Másik példa: a jelzálog kölcsönző bankárok minden évben úgy határozzák meg a törlesztést, hogy fölteszik, a kamatláb a hátralévő időre változatlan.

Ez a feltevés sok kritikát kapott (Lucas), s egyre inkább a *racionális várakozás*ok feltevése lép a helyére. Ekkor adott információs halmaz esetén a döntéshozó várakozása megegyezik a modellből levezethető várható értékkel. Speciálisan, determinisztikus esetben a *racionális várakozás* megegyezik magával a tényleges értékkel: *tökéletes előrelátás.*

Esetenként tényleg jobb a racionális várakozás, mint a naiv várakozás. Más esetekben azonban fordított a helyzet. Sőt az is előfordul, hogy az állandósult állapotokon kívül szinte értelmezhetetlen a racionális várakozás.

Grandmont (1998) és Simonovits (1999) nyomán egy absztrakt dinamikus rendszert vizsgálunk, amelyet a várakozások hajtanak.

Az idő jele ismét $t = 0, 1, 2, \ldots$, a rendszer skalár állapota a t-edik időszakban x_t, ${}_tx_\tau$ a t időszakban képzett $\tau(> t)$ időpontra vonatkozó várakozást jelöli.

A modell dinamikája a következő:

$$g(x_{t-1}, x_t, {}_tx_{t+1}) = 0. \tag{B.1}$$

Most konkretizáljuk a két speciális esetet, a racionális várakozásokat és a naiv várakozásokat.

Racionális várakozások
A várt állapot megegyezik a *megfelelő* időszak modellbeli tényleges értékével:

$${}_tx_{t+1} = x_{t+1}. \tag{B.2}$$

Naiv várakozások
A várt állapot megegyezik a *jelenlegi* tényleges értékkel:

$${}_tx_{t+1} = x_t. \tag{B.3}$$

Közös leírás:

$${}_tx_{t+1} = x_{t+d}, \qquad d = 0; 1. \tag{B.4}$$

Lokális stabilitás

Jelölje x^{o} az állandósult állapotot. Könnyen belátható, hogy minden állandósult állapot független a várakozások típusától. Mostantól feltesszük, hogy legalább egy állandósult állapot létezik.

Linearizáljuk (B.1)-et x^{o} körül. Legyen a g függvény x_{t+i} szerinti parciális deriváltja az x^{o} pontban γ_i, $i = -1,\ 0,\ 1$. Legyen $\hat{x}_t = x_t - x^{\mathrm{o}}$. Ekkor az x^{o} pont körüli lokális g_d-dinamikát a következő lineáris differenciarendszer írja le:

$$\gamma_{-1}\hat{x}_{t-1} + \gamma_0\hat{x}_t + \gamma_1\hat{x}_{t+d} = 0. \tag{B.5}$$

Bevezetve az $\alpha_{i+1} = \gamma_i$ jelöléseket, megszabadulunk a negatív indexektől:

$$\alpha_0\hat{x}_{t-1} + \alpha_1\hat{x}_t + \alpha_2\hat{x}_{t+d} = 0. \tag{B.5$'$}$$

Normalizálás: $\alpha_2 = 1$. Jelölés: $\beta = \alpha_1 + 1 \neq 0$.

Ekkor fölírhatjuk a két rendszer karakterisztikus egyenletét: $p_0(\lambda) = \alpha_0 + \beta\lambda$ és $p_1(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \lambda^2$.

Igaz a

B.1. tétel. *a) A naiv várakozások stabilitási feltételei:*

$$-1 < \lambda = -\alpha_0/\beta < 1,$$

azaz a stabilitás ekvivalens az

$$|\alpha_0| < |\alpha_1 + 1|$$

feltétellel.

b) A racionális várakozások stabilitási feltételei:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + 1 > 0, \quad \alpha_0 - \alpha_1 + 1 > 0 \qquad \text{és} \qquad \alpha_0 < 1.$$

B.1. feladat. Igazoljuk a b) pontot!

A B.1. ábra illusztrálja a helyzetet az (α_0, α_1)-síkban. A függőlegesen és vízszintesen csíkozott terület a paraméter-síkban rendre a racionális, illetve a naiv várakozások stabilitását jelöli. Közös részük az egyidejű stabilitást jelöli.

Rátérve a nyeregpont-stabilitás feltételére: $p_1(1) < 0 < p_1(-1)$ vagy $p_1(-1) < 0 < p_1(1)$, azaz $|\alpha_1| > |\alpha_0 + 1|$. Ekkor λ_2-vel jelölve a stabil gyököt, a ${}_0\hat{x}_1 = \lambda_2\hat{x}_0$ választással a robbanó irány eltűnik.

Mi történik azonban akkor, ha mindkét gyök instabil? Ekkor még a meglehetősen törékeny megoldás is lehetetlenné válik, és nem marad más kiút az instabilitásból, minthogy egyszerűen az állandósult állapotra szorítjuk a dinamikát. Ez a közgazdaságilag indokolatlan megkülönböztetés a kétfajta instabilitás között viszont aláássa a korlátozás hitelét (lásd még Molnár–Simonovits, 1996).

Kitérőként áttekintjük a másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek elméletét. Kezdjük a kezdetiérték-feladattal!

$$\ddot{x} = \alpha\dot{x} + \beta x,$$

ahol x_0 és $\dot{x}_0$ adott. Próbálgatással kideríthető, hogy az $e^{\lambda t}$ alakú megoldások akkor és csak akkor elégítik ki a fenti differenciálegyenletet, ha λ kielégíti az ún. *karakterisztikus egyenletet*:

$$\lambda^2 = \alpha\lambda + \beta x,$$

Három eset van: a) mindkét λ valós és különböző, b) mindkét λ valós és azonos, b) mindkét λ komplex (és különböző), Ennek megfelelően az általános megoldás

a)

$$x(t) = \xi_1 e^{\lambda_1 t} + \xi_2 e^{\lambda_2 t}$$

b)

$$x(t) = \xi_1 e^{\lambda t} + \xi_2 t e^{\lambda t}$$

c) $x(t) = Ae^{rt}\cos(\omega t + \delta)$, ahol $r = \mathbf{Re}\lambda_{1,2}$. A kezdeti feltételekből a paraméterértékek megállapíthatók.

Hasonló a helyzet a peremfeladatnál, ahol x_0 és x_T adott, $0 < T$ esetén.

C. VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS ÉS OPTIMÁLIS MEGTAKARÍTÁSI PÁLYA

Ebben a függelékben az optimális görbéket vizsgáló variációszámítást és klasszikus alkalmazását, az optimális megtakarítási pályát vizsgáljuk.

Variációszámítás

A variációszámítás olyan optimalizálási feladatokkal foglalkozik, ahol nem néhány változót, hanem egy függvényt kell meghatározni (Kósa, 1973; Simonovits, 1998, 9–10. fejezet).

Legyen $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény és legyen

$$I[x] = \int_0^T f[t, x(t), \dot{x}(t)]\, dt$$

a függvényhez tartozó *funkcionál*, amelynek valamilyen szélsőértékét, például maximumát keressük. Adott a kezdeti és a végállapot: x_0 és x_T. Klasszikus eredmény

C.1. tétel. *(Euler–Lagrange, 1744–1755.) Ha az I funkcionál a megengedett x függvényen szélsőértéket vesz föl, akkor a függvénynek ki kell elégítenie a következő, ún. Euler–Lagrange-differenciálegyenlet-rendszert:*

$$f'_x(t, x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} f'_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}),$$

ahol f'_x és $f'_{\dot{x}}$ az f függvény parciális deriváltjai.

Megjegyzés. Ez az optimumfeltétel szükséges, de általában nem elégséges. Az f függvény konkavitása elegendő a maximumhoz, de enyhébb feltevések is léteznek.

Két bizonyításvázlat.

a) Heurisztikus. Osszuk föl a $[0, T]$ intervallumot k egyenlő részre: $h = T/k$ egy részintervallum hossza. Helyettesítsük folytonos változóinkat és egyenletünket diszkrét megfelelőikkel. Legyen $t_i = ih$, $x(t_i) = x_i$, $\dot{x}(t_i) = (x_{i+1} - x_i)/h$, $f(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i)) = f(ih, x_i, (x_{i+1} - x_i)/h)$. Ekkor az integrált közelítő téglányösszeg a következő:

$$I_k = \sum_{i=0}^{k-1} hf(ih, x_i, (x_{i+1} - x_i)/h).$$

Fölírjuk az x_i szerinti parciális deriváltat, majd nullává tesszük őt, $i = 0, \ldots, k-1$:

$$h\frac{\partial}{\partial x}f(ih, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{h}) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}f(ih, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{h}) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}f((i-1)h, x_{i-1}, \frac{x_i - x_{i-1}}{h}) = 0.$$

Az egyenletet elosztjuk h-val, és k-val tartunk a végtelenhez, azaz h-val 0-hoz. Visszatérve folytonos függvényeinkhez, és kimerevítve egy $t = i(k)/k$ pontot, a második és a harmadik tag tart $-f'_{\dot{x}}$ derivált t szerinti deriváltjához: adódik az Euler–Lagrange-egyenlet. Zsenialitása ellenére a levezetés sántít: nincs bizonyítva, hogy a határátmenet jogos. ∎

b) Lagrange szabatos bizonyításának alapgondolata jól ismert a tankönyvekből (például Kósa, 1970, 29–31. o.), itt csak dióhéjban vázoljuk. A globális optimum lokálisan is optimum. Tehát, ha csak egy tetszőleges, de rögzített t pont kis környezetében „variáljuk” az optimális pályát egy a valós számmal paraméterezett görbesereggel, akkor az $I(a)$ egyváltozós függvénynek belső szélsőértéke van, tehát $I'(0) = 0$. Ebből számolással adódik az Euler–Lagrange differenciálegyenlet. ∎

C.1. példa. Két pont között a legrövidebb út az egyenes! a) Elemi geometriai módszerrel belátható, hogy két pont között a legrövidebb „út” az egyenes. b) Legyen a két pont $(0,0)$ és $(1,1)$. Analitikus alakban a célfüggvény

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\, dt,$$

Szabványos megoldás: kihasználva, hogy az alapfüggvény hiányos, az Euler–Lagrange differenciálegyenlet könnyen megoldható: $f_{\dot{x}}(t, \dot{x}) = c$, azaz $\dot{x}/\sqrt{1 + \dot{x}^2} = c$, ezért $\dot{x} = k$, azaz $x \equiv 0$.

C.1. feladat. a) Oldja meg a $\int_0^2 [4x^2 + \dot{x}^2]\, dt \to \min$ variációszámítási feladatot az $x(0) = 1$, $x(2) = 0$ határfeltételekkel!

b) Honnan tudja, hogy lokális minimumot kapott?

Optimális megtakarítási pálya

A közgazdaságtan egyik központi kérdése: hogyan képes egy fogyasztó az életpályája egészén viszonylag egyenletes fogyasztást biztosítani változó keresetek mellett? Például hogyan képesek a keresettel nem rendelkező időskorúak pénzügyileg önállóan élni?

Most a folytonos idejű feladatot tárgyaljuk, ezúttal a variációszámítás alkalmazásával. Tegyük föl (Kamien–Schwartz, 1981, 25–27. o.), hogy a fogyasztó T évig él, ahol T egy tetszőleges pozitív valós szám, amelynek értéke már születéskor pontosan ismert.

Legyen a t pillanatban a fogyasztó munkajövedelme $W(t)$, tőkéje $A(t)$, amely után az r kamatláb szerint $rA(t)$ tőkejövedelmet kap. A t időpontbeli fogyasztás $C(t)$, amely kielégíti a következő mérlegegyenletet.
Folyó költségvetési feltétel

$$C(t) + \dot{A}(t) = rA(t) + W(t). \tag{C.1}$$

Legyen u egy $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, $u[C(t)]$ a $C(t)$ fogyasztás *pillanatnyi hasznossága.* A $[0,T]$ időszakra terjedő maximalizálandó összhasznosságról feltesszük, hogy a $\beta \geq 0$ *leszámítolási rátá*val leszámítolt $e^{-\beta t}u[C(t)]$ *függvény idő szerinti integrálja*:

$$I[C] = \int_0^T e^{-\beta t} u[C(t)]\, dt. \tag{C.2}$$

Gyakran szükségünk lesz a Neumann–Morgenstern-várható hasznosságnál alkalmazott *abszolút és a relatív kockázatkerülési együtthatóra*:

$$a = \frac{-u''}{u'} \qquad \text{és} \qquad \zeta = aC. \tag{C.3}$$

Talán nem felesleges utalni arra, hogy mi a kockázat szerepe az elnevezésben. A relatív kockázatkerülési együttható durván szólva azt mutatja, hogy a fogyasztó vagyonához képest mennyit hajlandó fizetni, hogy egy kis kockázatot elkerüljön. Esetünkben arról van szó, hogy a fogyasztó mennyivel hajlandó az életpálya-fogyasztását csökkenteni, hogy a fogyasztásingadozásokat elkerülje. Az u hasznosságfüggvény konkavitása miatt $a, \zeta > 0$.

C.2. példa. Állandó abszolút (CARA=constant absolute risk aversion) és relatív (CRRA=constant relative risk aversion) kockázatkerülési együtthatójú hasznosságfüggvények:

(C.4)	$u(C) = a^{-1}e^{-aC}$:			CARA,
(C.5a)	$u(C) = \sigma^{-1}C^{\sigma}$,	ha	$\sigma \neq 0$:	CRRA;
(C.5b)	$u(C) = \log C$,	ha	$\sigma = 0$:	Cobb-Douglas.

A (C.5) hasznosságfüggvény esetén a relatív kockázatkerülési együttható a fogyasztástól függetlenül $1 - \sigma$.

Behelyettesítve $I[C]$-be a (C.1) mérlegegyenletet, egy közönséges variációszámítási feladathoz jutunk:

$$I[A] = \int_0^T e^{-\beta t} u[rA(t) + W(t) - \dot{A}(t)]\, dt, \tag{C.6}$$

amelyhez a következő peremértékeket csatoljuk:

$$A(0) = A_0 \qquad \text{és} \qquad A(T) = A_T. \tag{C.7}$$

Adott mind az induló, mind a záró tőkeállomány. Alternatív megfogalmazásnál a záró tőkeállomány szabaddá tehető és alkalmas függvénye hozzáadható a (C.6) célfüggvényhez.

Szükségünk lesz még a következő jelölésekre.
Az $e^{\xi t}$ *függvény* $[0,T]$*-n vett integrálja*:

$$J(\xi) = \frac{e^{\xi T} - 1}{\xi}, \qquad \text{ha} \qquad \xi \neq 0; \qquad J(0) = T; \tag{C.8}$$

az életkereset jelenértéke:

$$\mathbf{W} = \int_0^T e^{-rt} W(t)\, dt, \tag{C.9}$$

és a különbségi kamatláb: $\delta = r - \beta$. Feltesszük, hogy az életkereset elegendően nagy ahhoz, hogy tőkefelhalmozás mellett fogyasztásra is jusson belőle:

$$\mathbf{W} > e^{-rT} A_T - A_0. \tag{C.10}$$

(C.10) triviálisan teljesül, ha $r = 0$, $A_T < A_0$ és $W(t) > 0$.
Kimondjuk az életciklus-elmélet alaptételét.

C.2. tétel. *a) Az optimális fogyasztás (relatív) növekedési üteme a különbségi kamatláb és a relatív kockázatkerülési együttható hányadosa:*

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\delta}{\zeta}. \tag{C.11}$$

b) Állandó relatív kockázatkerülési együttható esetén az optimális fogyasztás kezdőértéke

$$C_0 = \frac{A_0 - e^{-rT} A_T + \mathbf{W}}{J(\delta/\zeta - r)}. \tag{C.12}$$

Megjegyzés. A modern irodalomban Modigliani és Brumberg (1954) *életciklus*-modelljükben vizsgált először hasonló feladatot, diszkrét idő, nulla kamat és diszkontláb mellett.

Bizonyítás. *a)* Fölírva a feladat Euler–Lagrange-differenciálegyenletét, a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{d}{dt}\left[-e^{-\beta t} u'(C)\right] = e^{-\beta t} u'(C) r. \tag{C.13}$$

Deriváljuk a bal oldali szorzatot: $\beta e^{-\beta t} u'(C) - e^{-\beta t} u''(C)\dot{C}$, majd használjuk fel a (C.3) jelöléseket: a (C.11) optimalitási feltételt kapjuk. Általában ζ függ C-től, s az adódó differenciálegyenletet nem tudjuk zárt alakban megoldani.

b) Fölhasználva a (C.5) CRRA-feltevést, integrálhatjuk a $\dot{C}/C = \delta/\zeta$ differenciálegyenletet: $C(t) = C_0 e^{\delta t/\zeta}$, ahol $\delta = r - \beta$.

Visszahelyettesítve a mérlegegyenletbe: $\dot{A} - rA = W - C_0 e^{\delta t/\zeta}$.

A megoldó szorzók módszerét alkalmazva, a legutolsó egyenletet beszorozzuk e^{-rt}-vel, hogy egy függvény deriváltját kapjuk a bal oldalon:

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{-rt}A\Big] = e^{-rt}(\dot{A} - rA) = We^{-rt} - C_0 e^{(\delta/\zeta - r)t}.$$

Integráljuk az új egyenlet mindkét oldalát a $[0,T]$ szakaszon és vegyük figyelembe $\mathbf{W}$ jelentését: $e^{-rT}A_T - A_0 = \mathbf{W} - C_0 J(\delta/\zeta - r)$, ahonnan (C.12) egyszerűen adódik. ∎

C.2. feladat. Számoljuk végig a C. függeléket a következő speciális esetben: $u(C) = \log C$, $w(t) = 1$, ha $L \le t \le R$ és 0 egyébként, $0 \le L < R \le D$, $r = \beta/2$.

Megjegyzés. Minden eleganciája ellenére ez a feladat keveset mond a valódi fogyasztó viselkedéséről: a) eltekint a megtakarítás folyamatos halasztásától, b) a hitelfelvétel korlátjaitól és c) a hosszú távú trend követésétől. Kicsit részletesebben: a) a fogyasztó minden nap hajlamos másnapra halasztani a takarékosságot; b) a fogyasztónak sokkal nagyobb kamatlábat kell fizetni a hitelért, mint amekkorát a megtakarításért kap; c) a fogyasztó szeretne „lépést tartani a korral", és nem abszolút, hanem relatív fogyasztási pályáját optimalizálja.

D. ÚT A VÁLSÁGHOZ: 2000–2012

Ebben a függelékben néhány idősort közlünk a válsághoz vezető sajátos magyar útról.

Látható, hogy 2001–2006 között a felhasznált GDP viszonylag gyorsan és egyenletesen nőtt, aztán stagnált, majd esett. A háztartások fogyasztása 2002-2006 között túl gyorsan nőtt, majd kifulladt, sőt esett. A beruházások hasonlóan változtak. A fizetési mérleg hiánya (szorosan kapcsolódva a felhasznált és a megtermelt GDP különbségéhez) 2008-ig magas maradt, egyre inkább a magánfogyasztás finanszírozása miatt. A költségvetési hiány 2006-tól kezdve csökkent, mert a külső környezet rákényszerítette a kormányzatot a takarékoskodásra. Az utolsó oszlopban az inflációs rátát látjuk: tendenciájában csökkenő, de a gyakran bekövetkező megszorításokat az infláció felpörgetésével (2004, 2007) érte el a szocialista–liberális koalíció. Az MNB ezzel indokolja, miért állapít meg olyan magas kamatlábakat. „Így mulat egy magyar úr!"

D.1. táblázat *Makroökonómiai indexek, 2001–2011, %*

Év	Felhasz-nált GDP	Magán-	Köz-	Beru-házás	Folyó fizetési mérleg	Költség-vetési egyenleg	Inflációs ráta
		f o g y a s z t á s					
		1990 = 100			a GDP %-ban		
2001	119,5	104,5	110,0	140,6	–6,0	–4,0	9,2
2002	126,9	115,0	115,8	155,3	–7,0	–8,9	5,3
2003	134,5	124,4	120,5	158,5	–8,0	–7,2	4,7
2004	140,5	128.3	120,2	171,1	–8,6	–6,4	6,8
2005	141,5	132,7	120,1	180,8	–7,5	–7,8	3,6
2006	143,5	135,4	125,8	175,0	–7,6	–9,3	3,9
2007	141,7	133,1	120,5	177,9	–7,3	–5,1	8,0
2008	142,8	133,9	120,6	183,1	–8,7	–3,7	6,1
2009	127,4	124,8	123,2	168,4	0,2	–4,5	4,2
2010	126,0	122,1	122,5	159,0	1,1	–4,3	4,0
2011		123,7	121,3	155,8	1,9	3,5*	4,9

KSH-2010.

A következő táblázat költségvetési bontásban, a GDP százalékában ábrázolja a 2007–2012-es pályákat. Figyelem: az szja progresszivitásának fokozatos eltüntetése miatt az szja/GDP-hányad jelentősen csökkent: 2009: 7,4%, 2010: 6,5% és 2011: 4,9%.

D.2. táblázat. *Állami költségvetés bontott idősora, 2007–2012*

Kategóriák	2007	2008	2009	2010	2011[b]	2012[b]
Bevétel	**45,6**	**45,5**	**46,9**	**45,2**	**52,0**	**45,6**
Adóbevétel	*26,3*	*26,3*	*26,6*	*25,4*	*22,6*	*25.0*
áfa	7,9	7,6	8,4	8,6	7,7	9,1
jövedéki stb.	8,0	8,0	8,2	8,3	8,2	8,8
szja	7,3	7,7	7,4	6,5	4,9	5,2
tb	13,9	13,8	13,3	12,1	13,1	13,0
Kiadások	**50,6**	**49,2**	**51,4**	**49,5**	**48,5**	**49,2**
Állami bérek	11,7	11,6	11,5	10,9	10,4	10,1
Áruk és szolg.	6,8	7,2	7,8	7,8	7,3	7,4
Kamat	4,1	4,1	4,6	4,2	4,0	4,2
Nyugdíjak és eü	13,7	14,3	14,8	14,3	14,3	13,7
Kormány. egyenleg	–5,1	–3,7	–4,5	–4,3	–3,5	–3,5
Elsődleges egyenleg	–1,2	0	–0,2	–0.5	7,0	0,5
Államadósság	67,0	72,9	79,7	81,3	77,7	75,7

Megjegyzések. IMF (2011, Hungary Article IV Report, 3. táblázat.) a) 2012-es előrejelzése, b) Egyszeri bevételek a magánnyugdíj-rendszer államosítása miatt.

Végül a magyar külső adósság dinamikáját leíró táblázatot mutatjuk be, némileg takarékosan.

D.3. táblázat.

Magyarország évvégi külső adósságának dinamikája: 2006–2013, GDP%

Kategóriák	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Külső adósság	96,8	104,6	116,8	149,9	141,7	140,6	136,7
Hatások							
Fizetési mérleghiány	4,2	3,5	1,9	–5,3	–6,1	–8,3	–8,9
Nominálkamatláb	3,5	3,8	5,4	5,5	5,0	6,4	6,6
Reál GDP növekedés	–3,4	–0,1	–0,9	9,2	–1,8	–1,8	–0,4
Ár és árfolyam	1,5	–8,5	–5,3	6,3	–6,3	...	
Maradék	5,5	4,5	12,3	18,2	2,9	3,2	1,9
Br. finanszírozási igény	31,9	31,3	33,6	37,8	39,5	42,4	41,3
Makroindexek							
GDP növ. ütem (%)	3,9	0,1	0,9	–6,8	1,3	1,3	0,6
GDP deflátor EUR (%)	–2,9	10,9	5,3	–7,3	5,0	–0,8	2,4
Nom. külső kamatláb (%)	4,1	4,3	5,5	4,0	3,5	4,6	4,8

Megjegyzések. 1. Az IMF i.m. Appendix Table 2 alapján. 2. A 2011-2012-es adatok becslések. 3. A fizetési mérleghiány a kamatok nélkül értendő. 4. A maradék hatásban beleértendő a devizatartalékok változása

Röviden szólunk a legfontosabb összefüggésekről. A *bruttó* külső adósághányad 2009-ben az akkori GDP 33%-ával nőtt. Ebből a maradék hatások önmagukban 18,2%-ot tettek ki, amely nagyjából megegyezik a devizatartalékok növelésével, ez bruttó adósságmutató! E fizetési mérleghiány drasztikus csökkentése éppen csak, hogy ellensúlyozta a nominális kamatkiadások hatását. A GDP közel 7%-os zsugorodása több, mint 9%-kal emelte az adósághányadost. Végül az ár és árfolyam hatások hatása 6% volt. Más években azért nem volt ilyen súlyos a helyzet, például 2010-ben az ár és árfolyam hatások előjelet váltottak, és ez csökkentette az adósághányadost.

E. NÉPESEDÉSI MODELLEK

A közgazdaságtanban fontos szerepet játszanak a népesedési modellek, különösen a következő függelékben vizsgált nyugdíjrendszerek szempontjából.

Ebben a fejezetben bevezetjük a stacionárius, illetve stabil népesség fogalmát, majd körvonalazzuk a valóságban érvényesülő népesedési folyamatokat. Kovacsicsné szerk. (1996) magyarul és Hinde (1998) angolul jó áttekintést ad a demográfiai kérdésekről, Hablicsek (1999) pedig a magyar fejleményeket tekinti át. Az egyszerűség kedvéért általában továbbra is egynemű népességet tanulmányozunk, és csak a nyugdíjrendszer makroökonómiája szempontjából érdekes kérdéseket érintjük.

Stacionárius vagy stabil népesség

Mindenekelőtt vezessük be a következő valószínűség-számítási fogalmakat! Legyen q_i annak a valószínűsége, hogy egy személy i éves korában, év végén hal meg: $q_i \geq 0$ és $\sum_{i=0}^{D} q_i = 1$. Szükségünk lesz annak a valószínűségére, hogy valaki megéri az i-edik születésnapját; *túlélési valószínűség*: $l_i = \sum_{j=i}^{D} q_j$. Az irodalomban gyakran szerepel a *feltételes halálozási valószínűség*: $q_i/l_i \geq 0$, illetve *feltételes túlélési valószínűség*: $l_i/l_{i-1} > 0$. Végül bevezetjük az *i éves korban várható hátralévő élettartam*ot:

$$E_i = \frac{\sum_{j=i}^{D} q_j(j-i+1)}{l_i}. \tag{E.1}$$

Amikor a születéskor várható élettartamra gondolunk, és annak növekedéséről beszélünk, nem szabad a 20. században folyamatosan és jelentősen csökkenő gyermekhalandóságról elfeledkezni.

Az 1997-es magyar adatokat az E.1. ábra szemlélteti. Szokásos a férfi és a női adatokat a vízszintes tengely ellentétes oldalára helyezni, s függőlegesen felállítani. Például a két görbe az életkor függvényében mutatja annak a valószínűségét, hogy az adott kort a férfiak, illetve a nők túlélik.

E.1. ábra

Ha a túlélési valószínűségi görbe alatti területet nem vízszintesen fekvő, hanem függőlegesen álló téglákból adjuk össze, akkor (E.1)-ből adódik

$$E_i = \frac{\sum_{j=i}^{D} l_j}{l_i}.$$

Most már bevezethetjük az úgynevezett *stacionárius* és *stabil népesség* fogalmát. Az előbbiben az egyes korosztályok létszáma, az utóbbiban az egyes korosztályok létszámaránya időben állandó.

Jelölje $n_{k,t}$ a k évesek létszámát a t-edik naptári évben. Tegyük föl, hogy az újszülöttek száma évente $\nu - 1$ ütemben nő, a korspecifikus halálozási arány időben változatlan: q_k annak a valószínűsége, hogy valaki éppen k éves korában hal meg.

Ekkor definíció szerint adódik két egyenlet.

Születésszám

$$n_{0,t} = \nu n_{0,t-1}, \tag{E.2}$$

Korosztály-létszám

$$n_{k,t} = l_k n_{0,t-k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, D. \tag{E.3}$$

Behelyettesítve (E.2)-őt (E.3)-ba:

$$n_{k,t} = l_k \nu^{-k} n_{0,t}, \qquad k = 1, 2, \ldots, D. \tag{E.4}$$

Stacionárius népességben $\nu = 1$, a stabilban ν tetszőleges.

Az (E.2)–(E.4) összefüggésekből levezethető az

E.1. tétel. *Stabil népesség. a) Minden k-ra a k évesek létszáma a születésszám ν növekedési tényezője szerint nő: $n_{k,t} = \nu n_{k,t-1}$. b) Minél nagyobb a születési szám növekedési üteme, annál nagyobb a fiatalok aránya a népességben.*

Megjegyzés. Minél nagyobbak az időskori túlélési valószínűségek, annál nagyobb az idősebbek aránya a népességben.

Az E.2. ábrán az egynemű fél korfára három változatot mutatunk be: az újszülöttek létszáma a) változatlan, b) nő, illetve c) csökken, a két utóbbi esetben évi 1%-kal. Jól látható, hogy növekvő népesség esetén a korosztályoknak az újszülöttek korosztályához viszonyított *relatív létszáma* két okból is csökken az életkorral: a születettek száma időben visszafelé menve egyre kisebb volt, másrészt egyre kevesebb marad életben a korosztályból. A csökkenő népesség esetén még érdekesebb a helyzet: először jelentősen nő, majd később csökken a korosztályok relatív létszáma.

E.2. ábra

Mi szabja meg a születések számát és azok növekedési ütemét? A most bevezetendő születési egyenlet azt tételezi föl, hogy a különböző életkorú emberek (nők) különböző számú gyermeket (lányt) akarnak/tudnak világra hozni:

$$n_{0,t} = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k n_{k,t}, \tag{E.5}$$

ahol f_k az egy k éves korú személyre (nőre) jutó pozitív (lány)születések száma, K_1, K_2 pedig a *szülőképességi kor minimuma* és *maximuma*: $0 < K_1 \le K_2$. Stabil népesség esetén a születésszám növekedési ütemét a születési $\{f_k\}$ és túlélési $\{l_k\}$ együtthatók meghatározzák. A KSH (1996, 75. o.) 12–13. táblázata adatokat tartalmaz az itt szereplő mutatókról.

E.2. tétel. *Stabil népesség esetén a születésszám növekedési tényezője a következő K_2-edfokú polinom egyetlen pozitív gyöke:*

$$\sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \nu^{-k} = 1. \tag{E.6}$$

Ez a gyök akkor és csak akkor nagyobb 1-nél, ha az egy főre (nőre) jutó (lány)szülések száma nagyobb, mint 1:

$$\sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k > 1.$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be az (E.5) születési egyenletbe az (E.4) egyenletet:

$$n_{0,t} = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k n_{0,t} \nu^{-k},$$

ahonnan egyszerűsítéssel adódik (E.6). Mivel az (E.6) egyenlet bal oldala csökkenő függvénye ν-nek, legfeljebb egy pozitív gyök lehetséges. Mivel a bal oldal nullában vett határértéke végtelen, a végtelenben vett határértéke pedig 0, mindig létezik egy pozitív gyök: ν. A gyök pontosan akkor nagyobb, mint 1, ha az (E.6) bal oldali kifejezésének értéke $\nu = 1$-ben nagyobb, mint 1. ∎

E.1. feladat. Tekintsünk egy 3-nemzedékes népességet, amelynek tagjai egyaránt a 3. időszak végén halnak meg és csak a középső nemzedék tagjai szülnek. Legyen a népesség egy időszakra vonatkozó növekedési együtthatója ν. a) Írjuk fel a népesség korosztályi dinamikáját, ha K_t, M_t és P_t jelöli a gyerekek, a dolgozók és a nyugdíjasok számát.

b) Legyen a *teljes függőségi hányados* $\alpha_t = (K_t + P_t)/M_t$. Igazoljuk, hogy e mutató értéke független t-től, és a népességszám csökkenő függvénye, ha a népesség csökken.

Az (E.5) születési egyenlet azonban átmenetileg instabil népességnél is hasznos. Erre mutat a

E.3. tétel. *(Lotka–Sharpe, 1911.) Állandó termékenységi és halálozási együtthatók esetén, feltéve, hogy legalább két szomszédos termékeny korosztály létezik, a tényleges népességi arányok és a népesség növekedési üteme a megfelelő stabil népesség mutatóinál stabilizálódnak.*

Megjegyzés. A bizonyítás visszavezethető a Markov-láncok ergodicitására (Rényi, 1966). ∎

Bizonyításvázlat. Helyettesítsük be (E.3)-at (E.5)-be, s adódik a

$$n_{0,t} = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k n_{0,t-k}, \tag{E.7}$$

a K_2-edrendű lineáris skalár differenciaegyenlet, $n_{0,-K_2}, \ldots, n_{0,-1}$ kezdőértékekkel.

A lineáris differenciaegyenletekről tudjuk, hogy az alapmegoldások $\xi\lambda^t$ alakúak, amelyek kielégítik (E.7)-et:

$$\xi\lambda^t = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \xi \lambda^{t-k}.$$

Egyszerűsítve $\xi\lambda^t$-nel, adódik a karakterisztikus egyenlet:

$$1 = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \lambda^{-k}.$$

Az E.2. tétel szerint az egyenletnek egyetlenegy pozitív gyök van: $\lambda_1 = \nu > 0$.

Indirekt bizonyítással adódik, hogy ha $f_i > 0$ és $K_1 < K_2$, akkor a többi λ_j gyök abszolút értékben kisebb mint ν, azaz a megoldás relatíve stabil. Valóban, indirekt feltevés szerint létezzék egy másik, nem pozitív λ sajátérték, amelynek abszolút értéke legalább ν: $|\lambda| \geq \nu$. Behelyettesítve a sajátérték-egyenletbe, és alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$1 = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k |\lambda|^{-k} < \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k |\nu|^{-k} = 1$$

ellentmondás. Ha megengednénk, hogy mindenki egy időszakban szüljön: $K_1 = K_2$, vagy hogy bizonyos időszakokban senki se szüljön, akkor állításunkban aszimptotikus stabilitás helyett csak (Ljapunov) stabilitást kapnánk. ∎

A stabil népesség fogalmára épül a *születéskor várható életkor* fogalma is. Tegyük föl, hogy a jelenleg tapasztalható korspecifikus termékenységi és halálozási együtthatók változatlanok maradnak a belátható jövőben. Számítsuk ki a megfelelő stabil népességi arányokat és a halálozási kor várható értékét (LEXP=life expectancy):

$$E_0 = \mathrm{LEXP} = \sum_{k=0}^{D} q_k(k+1) = \sum_{k=0}^{D} l_k.$$

Adott évben a tényleges népességben az adott évben meghaltak várható életkora lehet kisebb is, nagyobb is, mint a fenti érték, attól függően, hogy a tényleges népesség fiatalabb-e vagy idősebb-e, mint a stabil népesség.

E.1. feladat. Háromnemzedékes modellel dolgozva ($D = 2$) tegyük föl, hogy csak a második nemzedék szülőképes ($f_0 = f_2 = 0$) és $f_1 = 2$. a) Határozzuk meg a népesség egyensúlyi növekedési tényezőjét! b) Tegyük föl, hogy mindenki maximális korig él, és határozzuk meg a népesség stabil koreloszlását a 0-adik időszakban, 1-nek véve az idősek számát. c) Tegyük föl, hogy a népesség eredetileg növekedett, de a $t = 2$ időszaktól kezdve a termékenységi együttható 1-re, illetve d) az eredeti érték reciprokára csökken. Írjuk le táblázatban néhány időszak koreloszlását mindkét esetben, és számítsuk ki az össznépességét $\nu = 2$-re!

Most már megmagyarázhatjuk az 1978 körül elkezdett egygyermekes kínai családpolitikát: egy olyan népességben, amelyben évtizedeken keresztül gyorsan nőtt a születések száma, a lányok nemzedéke akár kétszer annyi nőből is állhat, mint az anyáké. Ha hatásosan akarják a népesség létszámát korlátozni, akkor időlegesen a korábbinál kisebb létszámú korosztályokat kell létrehozni.

Valóságos népességek

Persze a valóságos népességek nem stabilak: változik a születésszám, mert változnak a termékenységi fajlagosok, de változnak a halálozási mutatók is.

Mindenekelőtt bemutatjuk a magyar népesség adatait.

Az E.3. ábra a tényleges magyar születési és csecsemőhalálozási számokat szemlélteti 1911–1995 között (KSH, 1996, 1. táblázat, 65. o.) és az előrejelzett számokat 2050-ig (Hablicsek, 1999, 405. o.) a jelenlegi országhatárok között. Figyelemre méltó, hogy milyen magas értékről indult a születésszám és a csecsemőhalálozás, és milyen kis értékre csökkent mindkettő.

E.3. ábra

A halálozási idősorokat mellőzve, az E.4. ábra a népességszám alakulását mutatja be ugyanezen időszakra. Figyeljük meg, hogy a két világháborútól és az 1956–1957-es kivándorlástól eltekintve, milyen gyorsan nőtt a népességszám, majd 1980-tól kezdve milyen viharosan csökkent, illetve fog csökkenni a népességszám (KSH, 1996, 4. táblázat, 43. o. és Hablicsek, 1999, 405. o.).

E.4. ábra

Az E.5. ábra a gyermekeknek (0–19 év közöttiek) és az időskorúaknak (64 éves és idősebb) a teljes népességen belüli tényleges és előrebecsült arányát szemlélteti 1910 és 2050 között (KSH, 1996, 5. táblázat, 44–45. o. és Hablicsek, 1999, 405. o.). Természetesen az életben maguk a korhatárok is változnak az időben, ezzel azonban nem foglalkozunk.

E.5. ábra

A nemzetközi előrejelzésekből nyújt ízelítőt az E.1. táblázat.

E.1. táblázat. *Népességöregedés: időskori függőségi hányadosok, %*

Ország	1995	2010	2030	2050
Chile	18,3	24,4	40,9	56,3
Egyesült Államok	30,3	34,6	52,8	52,9
Hollandia	30,6	40,3	70,7	85,3
Nagy-Britannia	38,0	42,3	62,1	72,3
Németország	36,2	46,5	82,5	101,7
Svájc	33,4	44,5	78,3	89,1

Forrás: Börsch-Supan (2001a, 8. o.), 5. táblázat. A 60 évnél idősebbek létszámának aránya a 20–59 évesekéhez képest.

Megjegyezzük, hogy a halandósági fajlagosok csökkenése részlegesen képes megakadályozni a népességszámnak a termékenységi együtthatók csökkenéséből fakadó fogyását, de előbb-utóbb a második hatás válik dominánssá.

Végül utalunk a *nemzetközi migráció*ra, amely alaposan megváltoztathatja egy ország népesedési – s ezáltal nyugdíjrendszere – viszonyait: a célországét javítja, és a küldő országét rontja (Börsch–Supan et al., 2002).

F. NYUGDÍJRENDSZEREK

A fejlett társadalmak öregedésével a nyugdíjkérdés egyre fontosabbá válik. A nyugdíjrendszert két szinten lehet vizsgálni: egyéni és makroszinten (részletesen Simonovits, 2002).

Egyéni szint

Tegyük föl, hogy a dolgozó $L = 0$ éves korában kezd el dolgozni, i évesen w_i a *teljes keresete*. $R+1$ évesen megy nyugdíjba, és D évesen hal meg. Az i-edik év betöltésének *valószínűsége* l_i, $i = 1, 2, \ldots, D$.

Egy *tőkésített rendszer* – gyakran korfüggő – b_j életjáradékot fizet j-éves tagjainak, akik keresetükből folyamatosan – életbiztosítás vétele mellett – tőkét halmoztak föl egyéni számlájukon – az életjáradék forrásaként, $j = R+1, \ldots, D$. Kötelező rendszer esetén a nyugdíjjárulékot általában *kulcs*ként, tehát a kereset arányában adják meg, legalábbis bizonyos korlátok között: jele τ_w. Általában feltesszük, hogy e járulékkulcs időben állandó. Legyen r a reálkamat-tényező.

F.1. tétel. *A tőkésített rendszer paraméterei közt fönnáll a következő összefüggés:*

$$\tau_w \sum_{i=L}^{R} l_i w_i r^{-i} = \sum_{j=R+1}^{D} l_j b_j r^{-j}. \tag{F.1}$$

Bizonyítás. Az egész életpályára vonatkozó nyugdíjbefizetés és -kifizetés várható jelenértékének egyenlőség. ∎

Az életjáradékot szokás az utolsó évi nettókereset (u_R) arányában kifejezni, ahol a személyi jövedelemadótól eltekintünk:

$$b_{R+1} = \hat{\beta}_u u_R, \qquad \text{ahol} \qquad u_R = w_R(1-\tau_w)$$

és $\hat{\beta}_u$ az *egyéni életjáradék nettó zárókereseti helyettesítési értéke.*

F.1. táblázat. *Járulékkulcs a keresetnövekedés és a kamatláb függvényében, %*

	reálkereset növekedési ütem 100($\Omega - 1$)	
	0	2
reálkamatláb 100($r - 1$)		
0	16,7	22,3
2	9,8	14,1
5	4,0	6,3

A legegyszerűbb esetre összpontosítjuk figyelmünket, amikor a járadék reálértéke állandó, 40 évi járulékfizetés és 20 évi járadék áll szembe egymással. Szemléltetéshez föltesszük, hogy az egyéni zárókereseti helyettesítési arány 40%, és a járulékkulcsot a különféle kamatláb és bérnövekedési ütemre határozzuk meg: $w_i = w_0\Omega^i$. (F.1)-et alkalmazva, adódik az F.1. táblázat.

Figyeljük meg, milyen érzékenyek a járulékkulcsok a kamatlábra és a bérnövekedés ütemére (valamint az itt kihagyott aktív és passzív szakasz hosszának az arányára).

A 20. század közepén (a Nagy Válság és a II. világháború pusztítása miatt) csődbe mentek a tőkésített nyugdíjrendszerek, és helyükre léptek a *felosztó-kirovó nyugdíj*rendszerek. Ezekben rendszerekben az egyének kötelezően részt vesznek, és nem saját nyugdíjukra takarékoskodnak előre, hanem az éppen nyugdíjasok járadékát fizetik ki. Egy társadalmi szerződésről van szó, amely a mindenkori fiatalok kötelességévé teszi a mindenkori öregekről való gondoskodást. A legtöbb országban a teljes kereset és a nettó kereset közé feleslegesen beékelődik a *bruttó kereset*, amely a munkavállalói járulékkal (kulcsa: $\tau_{2,v}$ nagyobb a nettó keresetnél: $u = v(1-\tau_{2,v})$, és a munkáltatói járulékkal (kulcsa: $\tau_{1,v}$ kisebb a teljes keresetnél: $w = v(1+\tau_{1,v})$. Itt az egyén olyan *kezdőnyugdíj*ra számíthat, amely a befizetéseknek, illetve – állandó járulékkulcs esetén – a bruttó kereseteknek valamilyen növekvő (esetleg nem-csökkenő) függvénye. (Azért, hogy ne kelljen külön jelölni a naptári éveket, e kereseteket és a nyugdíjakat az illető születésétől számítjuk, akárcsak korábban):

$$b_{R+1} = h(v_L, \ldots, v_R)$$

S attól kezdve egészen a haláláig az egyénnek meghatározott szabályok szerint változik a nyugdíja, általában az előző évi nyugdíja függvényében:

$$b_{j+1} = H(b_j), \qquad j = R+1,\ \ldots,\ D-1.$$

Látszólag teljes szabadsággal állapíthatók meg a h és a H függvények. Hamarosan azonban látni fogjuk, hogy makroszinten egy tiszta felosztó-kirovó rendszerben minden időszakban a befizetéseknek és a kifizetéseknek egyensúlyban kell lenniük.

A tőkésített rendszerhez legközelebb a *keresetarányos rendszer* áll, amely Németországban működik. Legyen $g = \mathbf{v}_i/\mathbf{v}_{i-1}$ az átlag-reálkeresetek növekedési tényezője. Ekkor a kezdeti nyugdíj

$$b_{R+1}^{(1)} = \alpha_2 \sum_{i=L}^{R} v_i g^{R-i},$$

ahol α_2/τ egy skalár szorzó, amely a $\tau \sum_{i=L}^{R} v_i g^{R-i}$ értékű felhalmozott *eszmei nyugdíjtőkét* b_{R+1} nagyságú életjáradékra váltja át.

A másik véglet az *állandó összegű nyugdíj*, amely független a korábbi kereseti pályától; $b_{R+1}^{(2)}$, ilyen rendszer működik Hollandiában.

A legtöbb kezdőnyugdíj (amerikai, magyar, a brit stb.) a két véglet közé esik, sematikusan a következőképp jellemezhető:

$$\alpha b_{R+1}^{(1)} + (1-\alpha) b_{R+1}^{(2)},$$

ahol α egy 0 és 1 közti valós szám.

Németországban a korábban megállapított nyugdíjakat a keresetekkel párhuzamosan növelik:

$$b_{j+1}^{1} = b_j g, \qquad j = R+1,\ \ldots,\ D-1,$$

az azonos összegűben és más rendszerben is a nyugdíj független a nyugdíjas korától:

$$b_{j+1}^{2} = b_j, \qquad j = R+1,\ \ldots,\ D-1,$$

Közbülső megoldást alkalmaznak néhány országban:

$$b_{j+1} = b_j g^{\theta}, \qquad j = R+1,\ \ldots,\ D-1,$$

ahol θ egy 0 és 1 közti valós szám, például Svájcban korábban és Magyarországon 2000–2009 között 1/2 volt, azóta nálunk is 0-ra csökkent.

Makroszint

A tőkésített rendszer makroökonómiájáról szinte nincs mit mondani. Ha eltekintünk az élettartam-kockázattól (az életjáradékosítástól), akkor ez a nyugdíjrendszer semmiben sem különbözik a hagyományos megtakarításoktól. Inkább a tiszta felosztó-kirovó makroökonómiáját elemezzük, egyelőre egy adott időpontra szorítkozva. Tiszta felosztó-kirovó rendszer esetén a dolgozók nyugdíjjárulékainak összege megegyezik a nyugdíjak összegével. Definíció szerint teljesül a következő azonosság: nyugdíjasok száma · átlagnyugdíj = járulékkulcs · dolgozók száma · átlagkereset. Bevezetve a dolgozók számát: M, a nyugdíjasok számát: P, az átlagnyugdíjat: $\mathbf{b}$ (és felidézve a $\mathbf{v}$ átlagkeresetet), adódik a képlet:

$$P\mathbf{b} = \tau_v M\mathbf{v}.$$

Rendezzük át az azonosságot:

$$\tau_v = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{v}}\frac{P}{M}.$$

Az új azonosság első tényezőjét már ismerjük, s átlagos helyettesítési aránynak nevezzük: $\beta_v = \mathbf{b}/\mathbf{v}$. A második tényezőt is elnevezzük: *(rendszer)függőségi hányados*=nyugdíjasok száma/dolgozók száma. Jele: $\pi = P/M$. Tehát beláttuk a következő tételt.

F.2. tétel. *Egy tiszta felosztó-kirovó rendszerben a járulékkulcs egyenlő az átlagos helyettesítési arány és a rendszerfüggőségi hányados szorzatával:*

$$\tau_v = \beta_{\mathbf{v}}\pi. \tag{F.2}$$

Egy normális nyugdíjrendszerben például $\beta_{\mathbf{v}} = 0{,}6$ és $\pi = 0{,}5$; tehát $\tau_v = 0{,}3$. Minél nagyobb a nyugdíjak relatív színvonala, és minél több nyugdíjas jut egy dolgozóra, annál nagyobb járulékkulcsra van szükség. Ezt az egyszerű dolgot nagyon sok ember képtelen megérteni, és nagyobb nyugdíjat, kisebb járulékot és alacsonyabb nyugdíjkorhatárt követel vagy ígér.

A továbbiakban az (F.2) azonosság jobb oldalának második tényezőjét tovább vizsgáljuk. Figyelembe vesszük, hogy a dolgozók és a nyugdíjasok száma egyaránt függ a lakosság demográfiai szerkezetétől, a foglalkoztatási és a nyugdíjazási helyzettől. Bevezetjük a *részvételi hányad*ot, amely a dolgozók (M) és a dolgozókorúak létszámának (M^*) az aránya: $\mu = M/M^*$; a *jogosultsági hányad*ot, amely a nyugdíjasok (P) és a nyugdíjaskorúak létszámának (P^*) az aránya: $\zeta = P/P^*$; és a *demográfiai (időskori) függőségi hányados*t, amely a nyugdíjkorúak és a dolgozókorúak létszámának az aránya: $\pi^* = P^*/M^*$. Ezek segítségével részletesebben is fölírható a mutatónk:

$$\frac{P}{M} = \frac{P}{P^*}\frac{P^*}{M^*}\frac{M^*}{M},$$

azaz felhasználva jelöléseinket, adódik a

F.3. tétel. *Egy tisztán felosztó-kirovó rendszerben a rendszerfüggőségi hányados egyenlő a jogosultsági hányad és a demográfiai függőségi hányados szorzatának és a részvételi hányadnak az arányával:*

$$\pi = \frac{\zeta}{\mu}\pi^*.$$

Szóban: Minél több nyugdíjaskorú jut egy dolgozókorúra, minél kisebb a dolgozók aránya a dolgozókorúakhoz képest, és minél nagyobb a nyugdíjasok aránya a nyugdíjaskorúakhoz képest, annál nagyobb a rendszerfüggőségi hányados.

A további elemzéshez vezessük be a következő mutatókat! *Egy dolgozóra jutó GDP*: $y = Y/M$, *bruttóbér-hatékonyság*: $\eta_{\mathbf{v}} = y/\mathbf{v}$. A hagyományos elemzésben a nyugdíjkiadások GDP-hányada kiemelkedő szerepet játszik. Az előzőhöz hasonló módon kifejezhető a *nyugdíjkiadás aránya a GDP-ben*, ha felbontjuk a

$$\frac{P\mathbf{b}}{M\mathbf{y}}$$

szorzatot:

F.4. tétel. *A nyugdíjkiadás GDP-hányada egyenlő a rendszerfüggőségi hányad és az átlagos helyettesítési arány szorzatának és a bérhatékonyságnak a hányadosával:*

$$\frac{B}{Y} = \frac{\pi\beta_v}{\eta_{\mathbf{v}}}.$$

Az F.2. táblázat a magyar gazdaság nettó kereseti adatain szemlélteti a fentieket.

F.2. táblázat. *Nyugdíjak a magyar gazdaságban 1970–1996, %*

	Nyugdíj kiadási	Jogosult-sági	Függő-ségi	Nettó helyette-sítési	Részvé-tel	Nettó bérha-tékonyság
	h á	n y	a	d o	s	
Év	B/Y	ζ	π	$\beta_{\mathbf{u}}$	μ	$\eta_{\mathbf{u}}$
1970	3,5	66,7	38,7	37,5	91,2	305,1
1975	5,0	82,1	37,3	45,4	87,8	315,1
1980	6,9	93,0	38,2	54,7	87,3	320,1
1985	7,9	100,0	40,4	61,2	86,9	358,7
1990	8,8	109,9	41,8	66,2	86,4	398,4
1994	10,0	115,6	41,1	59,5	65,8	430,2
1996	8,9	119,2	40,7	58,9	64,0	504,5

Vegyük észre, milyen látványosan nőtt a nettó keresethez viszonyított nyugdíj 1970 és 1990 között: 37,5%-ról 66,2%-ra. Vegyük figyelembe azonban a táblázat utolsó oszlopát, ahonnan leolvasható, milyen mértékben maradt el az átlagkereset az átlagtermeléstől.

Az F.3. táblázat a nettó keresetek és nyugdíjak időbeli alakulását mutatja az átmenet során. Látható, hogy a nyugdíjak gyakran még a kereseteknél is jobban csökkentek vagy lassabban nőttek.

F.3. táblázat. *Nettó keresetek és nyugdíjak reálértékben, Magyarország, 1989=100*

Év	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Kereset	96,6	89,8	89,1	85,0	91,2	80,3	76,2	80,3	83,0	86,0	87,3
Nyugdíj	93,0	86,8	84,7	81,6	85,7	77,2	70,3	71,0	75,5	78,8	79,8

Év	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Kereset	91,9	104,7	114,3	113,1	120,2	123,9	118,2	119,0	121,2	124,1	
Nyugdíj	84,4	92,7	100,7	104,0	110,5	114,5	112,0	114,0			

Az F.5. tétel megmutatja, hogy minden felosztó-kirovó rendszer megfeleltethető egy hasonló tőkésített rendszernek.

F.5. tétel. *(Aaron, 1966.) Stabil népesség és állandó foglalkoztatási, valamint nyugdíjjogosultsági hányad esetén, ha az életkor-specifikus keresetek és a nyugdíjak azonos és állandó ütemben nőnek, akkor a felosztó-kirovó rendszer belső kamattényezője egyenlő az aggregált reálkereset növekedési tényezőjével, azaz a népesség és az átlag reálkereset növekedési tényezőjének szorzatával:* $\rho = \nu g$.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a teljes foglalkoztatás megvalósul és minden nyugdíjaskorú egy nyugdíjat kap, s más nem kap nyugdíjat. Jelölje v_i az i éves dolgozó keresetét az i-edik évben, és b_j a j éves nyugdíjas nyugdíját a j-edik évben. Legyen 1 a 0-adik évben született korosztály létszáma. Ekkor a 0-adik évben k évesek száma $l_k\nu^{-k}$. A 0-adik évben i évesek keresete $v_i g^{-i}$ és a j évesek nyugdíja $b_j g^{-j}$. Tehát a 0-adik év keresztmetszeti feltétele

$$\tau_v \sum_{i=L}^{R} l_i \nu^{-i} v_i g^{-i} = \sum_{j=R+1}^{D} l_j \nu^{-j} b_j g^{-j}. \tag{F.3}$$

(F.1) és (F.3) összehasonlításából adódik a tétel. ∎

Érdekes megnézni néhány adatot a tételben szereplő mennyiségekről.

F.4. táblázat. *Átlagos reálütemek és -hozamok: 1953–1995, %*

Ország	Németország	Japán	Nagy-Britannia	Egyesült Államok
Bérnövekedési ütem	4,8	5,2	3,6	1,0
(variancia)	11,8	37,7	8,8	6,0
Állampapírhozam	3,9	3,8	1,0	2,3
(variancia)	1,3	5,4	9,3	8,2
Tőkepiaci hozam	10,1	10,8	10,8	9,8
(variancia)		több	száz	

Forrás: Holzmann (1998, 13. o. 8. lbj.) idézi Thompson (1998) Függelék A. táblázatát.

Az explicit államadósság mellett érdekes lehet még a nyugdíjígéretekben megtestesülő *implicit államadósság* is. Ezt mutatja Holzmann (1998) alapján egy rövidített, F.5. táblázat:

F.5. táblázat. *Nyugdíjadósság és államadósság néhány OECD országra, GDP %*

Ország	Bruttó nyugdíj-adósság (BNYA)	Nyugdíj kiadás (NYK)	Eszmei visszafizetési idő (BNYA/NYK)	Állam-adósság	Összevont
Németország	216	9,0	24,0	40	256
Olaszország	242	10,6	24,4	101	343
Nagy-Britannia	139	6,6	21,1	35	174
Egyesült Államok	112	5,1	22,0	55	167

Forrás: Holzmann (1998, 5. o.) 2. táblázat.

A 2. oszlopból láthatjuk, hogyan szóródik a bruttó nyugdíjadósság/GDP hányados négy fontos ország esetében 100–200 között. (A felsorolt négy országból csak egyben (az Egyesült Államokban) kisebb a nettó adósság, mint a bruttó mutató, de ott jelentősen: 89%.) A 3. oszlop az éves nyugdíjkiadás/GDP hányadost mutatja be (vö. 8. fejezet), amely a kontinentális Nyugat-Európa és az angolszász országok közti hatalmas különbséget tükrözi: 10 és 5%. Érdekes, mennyivel stabilabb a 4. oszlopban szereplő a nyugdíjadósság/nyugdíjkiadás hányados: 21–25 között mozog. Ezt *eszmei visszafizetési idő*nek is tekinthetjük, ti. hogyha nem keletkeznének új ígéretek, akkor ennyi évre lenne szükség a régi ígéretek teljesítésére. Érdemes figyelembe venni a GDP-hez viszonyított hagyományos államadósságot is (5. oszlop), amely országonként szintén nagyon ingadozik: az angol 35%-tól az olasz 100%-ig. Végül ha összeadjuk az 1. és az 5. oszlop adatait, a 6. oszlopban megkapjuk a teljes bruttó adósságot. Itt is az angolszász országok szerepelnek jól, és a kontinentális országok rosszul.

F.1. feladat. Mérlegeljünk egy stacionárius népességű stacionárius gazdaságot, ahol a népesség és a termelékenység növekedési üteme állandó, az egyének nulla évesen kezdenek el dolgozni, adott w_j bérpálya szerint, $R+1$ évesen mennek nyugdíjba, és $D+1$ évesen halnak meg! Tegyük föl, hogy a $t=0$ évben bevezetnek egy felosztó-kirovó rendszert b_j járadékpályával és τ járulékkulccsal! Tegyük föl, hogy az érett rendszer egyensúlyban van. Határozzuk meg az első $D+1$ évjárat belső megtérülési rátáját!

G. JÖVEDELEMELOSZTÁS

Éppen az általános egyensúlyelméletre támaszkodva, a közgazdászok nagyon gyakran megelégednek a fennálló jövedelemeloszlási helyzettel: mindenki annyi jövedelemhez jut, amennyit érdemel. Ugyanezen elmélet szerint ugyanakkor a jövedelemeloszlás alkalmas méretű és egyösszegű megváltoztatásával minden optimális elosztás egyensúlyi helyzetté tehető.

Empíria

Kezdjük az empirikus ismertetést is egy példával!

G.1. példa. Legtöbb esetben a piaci kereslet és kínálat nem csak az összjövedelemtől, hanem a jövedelemeloszlástól is függ. Például szegény országok nagy mennyiségben fogyasztanak luxusjavakat, miközben a lakosság nagy része éhezik. ∎

Definíciók. 1. *Lorenz-görbe* $y(x)$ $(0 \le x \le 1)$ azt mutatja, hogy a lakosság legszegényebb x hányada a nemzeti jövedelem $y(x)$ részét fogyasztja el. (Teljesen egyenlő jövedelemeloszlásnál $y(x)=x$!) Definíció szerint $y(x)$ növekvő és $y(x) \le x$.

2. A jövedelemeloszlás *Gini-együtthatója* az $x-y(x)$ függvény átlaga szorozva 2-vel:

$$G_E = 1 - 2\int_0^1 y(x)\,dx. \tag{G.1}$$

G.1. tétel. *Minden család jövedelme munka- és tőkejövedelemre bontható:*

$$Y = Y_{\mathrm{L}} + Y_{\mathrm{K}}, \qquad Y_{\mathrm{L}} = wL \qquad \text{és} \qquad Y_{\mathrm{K}} = vK. \tag{G.2}$$

G.2. példa. Az 1970-es években az USA-ban a Gini-együttható =0,43 volt; s ebből 0,17 a munkabérek szóródásából származott. Azóta jelentősen nőtt az egyenlőtlenség. ∎

Most két táblázatot mutatunk be egy fejlett ország, Nagy-Britannia 1982–83-as jövedelem- és vagyoneloszlásáról. (Az újabb tankönyvek már nemigen foglakoznak ilyen „idejét múlt” kérdésekkel.)

G.1. táblázat. *Adózás előtti személyi jövedelemeloszlás, UK, 1982*

Jövedelem szerinti csökkenő sorrend %	Jövedelem-arány
0– 1	6,0
1–10	22,3
10–50	49,2
50–	22,7

Megjegyzés: Az adatok Begg, 282. o.-ról származnak.

Az adófizetők leggazdagabb 1%-ának jövedelme az összjövedelem 6%-a (1. sor), a legszegényebb 50%-é 22,7% (4. sor). Természetesen az adót nem fizető szegények a táblázatban egyáltalán nem szerepelnek.

G.2. táblázat. *Százalékos vagyoneloszlás, UK, 1983.*

A vagyon részesedése, mely a leggazdagabbaké	Piaci vagyon	Piaci és nyugdíj vagyon
1	20	12
2	27	16
5	40	25
10	54	35
25	78	59
50	96	82

Megjegyzés: Az adatok Begg, 282. o.-ról származnak.

A G.2. táblázat a vagyonosak egyre növekvő táborának vagyonrészesedését mutatja be két formában: a második figyelembe veszi a várható nyugdíjjárandóságot, az első nem.

Szolgáljon pihentetőül a

G.1. feladat. a) Amerikai ismerőseink legnagyobb része legalább évi 120 ezer dollárt keres, miközben az átlagkereset 40 ezer dollár körül lehet. b) Elvileg egy ország lakosságának maximálisan hányadrésze kereshet legalább annyit, mint az átlagkereset háromszorosa? c) Mi lehet a tényleges érték?

Kormányzati döntéseknek kétféle jövedelemeloszlási hatásuk van: 1. közvetlen és 2. közvetett. A közvetlen hatások megint kettéágaznak: a) piac-irányultságú programok (munkaerőjavítás) és b) adózás-támogatási programok (jövedelemadó és jövedelemkiegészítés).

Végül egy olyan táblázatot mutatunk be, amely az 1992-es adatok alapján nemzetközileg hasonlítja össze a jövedelemeloszlást.

G.3. táblázat. *Jövedelemeloszlás az USA átlagában, 1992 körül*

Ország	Egy főre jutó	Alsó decilis	Felső decilis	Felső/Alsó decilis
USA	100	36	208	5,78
Svájc	91	52	168	3,23
Japán	84	39	161	4,13
Németország	76	41	131	3,20
Svédország	69	39	110	2,82
Nagy Britannia	67	29	138	4,76

Megjegyzés: Az adatok Freeman (2000), 27. o.-ról származnak.

Tehát ha az USÁ-ban az egy főre jutó jövedelem 100, akkor a legszegényebb 10%-é csak 36, míg a leggazdagabb 10%-é viszont 208, hányadosuk 5,78. A többi ország adatai is az USA átlagában vannak kifejezve. Figyelemre méltó, hogy csak a legszegényebb fejlett ország, Nagy-Britannia szegényei maradnak el abszolút értelemben az USA szegényeitől, s még az éppen válság sújtotta, a Nagy-Britanniánál átlagosan alig gazdagabb Svédország szegényei is gazdagabbak az USA szegényeinél.

Az USA Census Bureau más oldalról világítja meg a helyzetet: az USÁ-ban az 1970-es évek átlagához képest 2004-re a legszegényebb 20% reáljövedelme mindössze 12%-kal nőtt, míg a leggazdagabb 20%-é 56%-kal. (Az USA csodálói erre azt válaszolják, hogy a legszegényebbek főleg a Latin-Amerikából bevándorló szegényekből kerülnek ki, akiknek a korábbi reáljövedelmükhöz képest ez is nagy növekedést takar. Ez csak részben igaz, például a bevándorlók között gazdagok is vannak!)

Elmélet

A jövedelemeloszlást viszonylag jól közelíti az ún. analitikus *Pareto-eloszlás.* Sűrűségfüggvény:

$$f(w) = \sigma w_m^\sigma w^{-1-\sigma} \qquad \text{ha} \qquad w > w_m,$$

ahol $\sigma > 1$ az eloszlás kitevője, és w_m a minimálbér.

Az eloszlásfüggvény alakja

$$F(w) = \int_{w_m}^{w} f(\omega)\, d\omega = 1 - w_m^\sigma w^{-\sigma} \qquad \text{ha} \qquad w \ge w_m.$$

Innen $F(w_m) = 0$ és $F(\infty) = 1$, valamint a várható érték:

$$\mathbf{E}w = \int_{w_m}^{\infty} w f(w)\, dw = \frac{\sigma w_m}{\sigma - 1}.$$

Ha egységnyinek választjuk a várható értéket, akkor a minimálbér

$$w_m = \frac{\sigma - 1}{\sigma}.$$

Gyakorlatban $\sigma = 2$ jó közelítés, ekkor $w_m = 1/2$. Ekkor azonban az eloszlás varianciája még végtelen, alatta azonban már véges:

$$\mathbf{E}w^2 = \frac{\sigma w_m^2}{\sigma - 2} = \frac{(\sigma - 1)^2}{\sigma(\sigma - 2)} \qquad \text{ha} \qquad \sigma > 2.$$

Végül megadjuk az eloszlás legfontosabb értékeit, hozzávéve a Lorenz-görbét. Felhívjuk a figyelmet, hogy a dolgozók fele az átlagbér 71%-a alatt keres, keresetük tömege csupán az összkereset negyede. Az érem másik oldal: az átlagbér háromszorosa fölött csupán a dolgozók 3%-a keres, de övék az összkereset 12,5%-a.

G.4. *Pareto-valószínűségek és a Lorenz-értékek*

Kereseti határ $\bar{w}$	Valószínűség $F(\bar{w})$	Lorenz-érték $\mathbf{E}(\bar{w})$
0,707	0,500	0,250
1,0	0,750	0,500
1,5	0,889	0,667
2,0	0,938	0,750
2,5	0,960	0,800
3,0	0,972	0,833
4,0	0,984	0,875

Megjegyzés. $\sigma = 2$.

Optimális adóztatás adókerülés mellett

Ebben az alfejezetben az optimális adóztatást vizsgáljuk adókerülés mellett.

Adott időszakban egy dolgozó teljes keresete w, amelyből v nagyságot vall be, hogy θv jövedelemadót fizssen be. Az adóztatás kizárólagos célja a jövedelemkülönbségek tompítása, s ezt egységes ε járadékkal oldja meg a kormányzat.

Tegyük fel, hogy a dolgozót valamilyen adómorál jellemzi: m. Feltesszük, hogy létezik egy $v(w, m, \theta)$ bevallási függvény, amely növekszik a keresetben és a morálban, de csökken az adókulcsban.

Tegyük föl, hogy a (w, m) jellemzők valószínűségi eloszlása F: $F(W, P) = \mathbf{P}(w < W, p < P)$, Ekkor $\bar{v} = \mathbf{E}v$ a dolgozók átlagos bevallása. Az adórendszer kiegyensúlyozottsága miatt $\varepsilon = \theta\bar{v} = T(\theta)$, ahol $T(\theta)$ az ún. Laffer-görbe. Ezt akarja a kormányzat maximalizálni θ_L kulccsal.

Mivel $T(0) = 0$ és $T'(\theta) = \mathbf{E}v + \theta\mathbf{E}v'_\theta > 0$, ezért $\theta_L > 0$. Elvben lehetséges, hogy $\bar{v}(1) > 0$, sőt, $\theta_L = 1$.

G.2. feladat. Tegyük fel, hogy a bevallási függvény $v(w, m, \theta) = w(m - \theta)$. a) Határozzuk meg, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie ahhoz, hogy $0 < v < w$ teljesüljön! b) Mekkora az optimális adókulcs? c) Hányszorosára kellene a kereseteket csökkenteni az optimális adórendszerben ahhoz, hogy a szuboptimális θ-kulcsú adórendszerben az adóbevétel ne csökkenjen?

A mikroökonómiailag megalapozott modellt Simonovits (2010) tárgyalja.

H. DISZKRÉT IDEJŰ DINAMIKA

Elméleti matematikában gyakran háttérbe szorul a diszkét idejű dinamika, pedig mind a numerikus analízisban, mind a közgazdaságtanban fontos szerepet játszik. A diszkrét idő előnyei: nem kell bizonyítani a megoldás létezését, könnyű programozni a megoldást, és alkalmas az időbeli késleltetések figyelembe vételére. Természetesen hátrányai is vannak: nem lehet folytonos vonallal szemléltetni a pályákat, s a megoldások „vadul” viselkednek. Röviden összefoglaljuk az eredményeket.

Lineáris differenciaegyenletek

Elsőrendű lineáris inhomogén differenciaegyenlet-rendszerről beszélünk, ha

(H.1) $$x_{t+1} = Mx_t + w, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{és} \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Kezdetiérték-feladat esetén az x_0 kezdeti érték is adva van.

Az általános megoldáshoz szükségünk lesz a rendszer fixpontjára. (H.1)-ből a következő implicit egyenlet adódik a fixpontra:

(H.1°) $$x^{\mathrm{o}} = Mx^{\mathrm{o}} + w.$$

($H.1^{\mathrm{o}}$) általában (de nem mindig) megoldható. A fixpont létezése és egyértelműsége triviális:

H.1. tétel. *A (H.1) lineáris rendszernek pontosan egy fixpontja van, ha M-nek az 1 nem sajátértéke. Képlete:*

(H.2) $$x^{\mathrm{o}} = (I - M)^{-1}w.$$

A lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldásából ismert az inhomogén és homogén egyenlet megoldásának kapcsolata. Most ezt a fajta kapcsolatot aknázzuk ki a differenciaegyenlet-rendszer esetén.

Vezessük be az

(H.3) $$\hat{x}_t = x_t - x^{\mathrm{o}}$$

*eltérés*vektort, és vonjuk ki (H.1)-ből (H.1°)-t:

(H.$\hat{4}$) $$\hat{x}_{t+1} = M\hat{x}_t.$$

Szóban: az eltérésvektorok kielégítik azt a homogén rendszert, amely az inhomogén (H.1) rendszerből az additív állandó elhagyásával keletkezik. (H.$\hat{4}$) sorozatos behelyettesítésével adódik

(H.$\hat{5}$) $$\hat{x}_t = M\hat{x}_{t-1} = M^2\hat{x}_{t-2} = \cdots = M^t\hat{x}_0.$$

Visszaírva az eredeti változókat: $x_t = x^{\mathrm{o}} + M^t(x_0 - x^{\mathrm{o}})$.

A továbbiakban a homogén rendszerrel foglalkozunk, és rövidség kedvéért elhagyjuk a kalapot (azt is mondhatjuk, hogy $w = 0$.) A hivatkozások kedvéért új alakjában újra fölírjuk a (H.$\hat{3}$)-(H.$\hat{4}$) egyenletpárt:

$$x_{t+1} = Mx_t, \tag{H.4}$$

$$x_t = M^t x_0. \tag{H.5}$$

Lineáris algebrából azonban ismert, hogy M sajátértékei és sajátvektorai segítségével M^t egyszerűen fölírható. A dinamikus rendszerek elemzésénél a transzformáció sajátértékeinek és sajátvektorainak jelentőségét éppen az adja, hogy a transzformáció hatványozásánál az előbbiek úgy viselkednek, mintha skalárok volnának, az utóbbiak pedig helyben maradnak. Pontosabban:

$$M^t s = \lambda^t s, \qquad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{H.6}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy létezik n darab lineárisan független sajátvektor, azaz egy *sajátbázis*:

$$P(\lambda_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n; \tag{H.7}$$

$$Ms_j = \lambda_j s_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{H.8}$$

Ekkor bármely x_0 kezdeti vektor felírható a sajátvektorok segítségével:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j s_j. \tag{H.9}$$

Fölhasználva (H.5)–(H.6)-ot, (H.8)–(H.9) a következő összefüggést adja:

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j^t s_j, \qquad t = 1, 2, \dots \tag{H.10}$$

Igaz a

H.2. tétel. *Ha M-nek létezik egy sajátbázisa, akkor a sajátvektorok segítségével a kezdeti állapotot fölírhatjuk (H.9) alakban, és a sajátértékeket is igénybe véve a t-edik állapot fölírható (H.10) alakban.*

H.1. feladat. Írja föl a H.2. tételt alsó-trianguláris mátrix esetén, amikor $m_{ij} = 0$ minden $j > i$ esetén!

A számos stabilitásfogalom közül a rövidség kedvéért csak a *lokálisan aszimptotikus stabilitással* foglalkozunk, ahol a fixpont megfelelő környezetéből induló bármely pálya aszimptotikusan tart a fixponthoz: $\lim_{t\to\infty} x_t = x^{\mathrm{o}}$, esetünkben 0-hoz.

Lineáris esetben viszonylag egyszerű a stabilitás elégséges feltétele, és lokális helyett globális stabilitás áll.

H.3. tétel. *A diszkrét idejű (H.1) lineáris rendszer akkor és csak akkor stabil, ha az M mátrix spektrálsugara kisebb mint 1:*

$$\rho(M) < 1.$$

Bizonyítás. a) Tegyük föl, hogy létezik sajátbázis. Ekkor (H.10) szerint x_t akkor és csak akkor tart nullához, ha minden sajátérték-hatvány nullához tart, azaz minden sajátérték abszolút értékben kisebb, mint 1. b) Az általános esetben ugyanezt az eredményt kapjuk. ∎

A differenciaegyenletek elméletében kiemelkedően fontosak a kétváltozós rendszerek. Ezért az állandó-együtthatós kétváltozós (síkbeli) lineáris rendszereket külön megvizsgáljuk: $n = 2$, különös tekintettel az oszcillációkra (ciklusra).

Szükségünk lesz a rendszer másodfokú karakterisztikus polinomjára, melynek gyökei meghatározzák a rendszer kvalitatív viselkedését:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \omega\lambda + \vartheta,$$

ahol

$$\omega = \operatorname{tr} M = m_{11} + m_{22} \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}.$$

Oszcillációról beszélünk, ha az eltérésváltozók minden időbeli korlátozáson túl időnként előjelet váltanak. Két alesete van:

a) *Elfajult oszcilláció* áll fönn, amikor egy átmeneti időszak után mindkét változó minden időszakban előjelet vált.

b) *Szabályos oszcilláció* áll fönn, amikor a két változó előjelváltása nem mindig egyidejű.

Szimmetria miatt feltehető, hogy $|\lambda_2| \le |\lambda_1|$:

H.4. tétel. *Tipikusan a következő sajátérték párosítások alapján osztályozzuk a síkbeli lineáris rendszereket;*

a) a domináns sajátérték pozitív, $|\lambda_2| < \lambda_1$: oszcillációmentes;

b) a domináns sajátérték negatív, $|\lambda_2| < -\lambda_1$: elfajultan oszcilláló;

c) komplex sajátértékek, $|\mathbf{Re}\lambda_1| < |\lambda_1|$: szabályos oszcilláció.

A lineáris differenciálegyenletekhez hasonlóan a komplex gyökök esetén a konjugáltak miatt a számolás végén kiesnek a képzetes mennyiségek.

Állandó-együtthatós *n-edrendű* lineáris skalár differenciaegyenletről beszélünk, ha a y_t mellett y_{t-n} a legkorábbi érték az egyenletben:

$$y_t = \sum_{k=1}^{n} a_k y_{t-k}, \qquad a_n \neq 0.$$

Az ilyen egyenletek egyszerű transzformációval visszavezethetők n-dimenziós elsőrendű egyenletekre, de közvetlenül is megoldhatók (Euler, kb. 1740). Az $y_t = \lambda^t$ alapmegoldással kísérletezve, a karakterisztikus egyenlet közvetlenül

$$\lambda^t = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{t-k}, \qquad a_n \neq 0,$$

illetve λ^{t-n}-nel osztás után

$$\lambda^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}.$$

Tipikusan a gyökök különböznek, ezt a továbbiakban feltesszük.

H.5. tétel. *Az n-edrendű állandó együtthatós lineáris differencia-egyenlet általános megoldása*

$$y_t = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \lambda_k^t,$$

ahol η_k állandók skalárok, amelyeket az $y_0, \ldots, y_{n-1}$ kezdeti feltételek egyértelműen meghatároznak.

Ezt szemlélteti az

H.1. példa. Fibonacci-számok (1202). „Egy gazdának van egy pár nyula. Tegyük föl, hogy ez a pár nyúl minden hónapban egy újabb pár nyulat fiadzik, amelyek mindegyike kéthónapos korától szintén havonta egy pár nyúlnak ad életet. A kérdés az, hogy az egymás után következő hónapokban hány pár nyula lesz a gazdának" (Simonyi, 1981, 122. o.). Könnyű belátni, hogy a választ a következő rekurzió adja: $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$, $F_0 = 1$ és $F_1 = 1$. A rendszer karakterisztikus egyenlete (más szóval: a sorozat generátorfüggvénye, de Moivre, 1724): $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, a sajátértékek: $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. A megoldás $F_t = \xi_1 \lambda_1^t + \xi_2 \lambda_2^t$ alakú. A kezdeti feltételekből ξ_1 és ξ_2 meghatározható: $F_0 = \xi_1 + \xi_2 = 1$ és $F_1 = \xi_1 \lambda_1 + \xi_2 \lambda_2 = 1$. $\xi_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/10$.

Nemlineáris differenciaegyenletek

A nemlineáris differenciálegyenletek elmélete sokkal bonyolultabb, mint a lineárisaké, ezért ebben a bevezető jegyzetben csak mesélni fogok, olykor hivatkozva a differenciálegyenletek elméletére.

Kezdjük az autonóm nemlineáris elsőrendű differenciaegyenlet-rendszer felírásával:

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \quad \text{adott.} \tag{H.11}$$

A vizsgálatot megkönnyíti, ha a rendszernek van *fixpontja*:

$$x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}}). \tag{H.12}$$

Ellentétben a lineáris rendszerekkel, a nemlineáris rendszerben nincs egyszerű megoldási eljárás.

Ljapunovtól származik az az elgondolás, hogy ellentétben a lineáris rendszerekről szóló eredményekkel, anélkül is vizsgálható a stabilitás, hogy a megoldást meg tudnánk (vagy meg kellene) határozni, *kvalitatív elmélet*. Csupán olyan pozitív függvényre van szükség, amellyel mérve a távolságot a fixponttól, a függvény csökken. Szabatosan megfogalmazva: egy folytonos $V : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ függvényt *Ljapunov-függvény*nek nevezünk az f függvényre nézve, ha

(i) a V függvény a fixpontban nulla, különben pozitív:

$$V(x^{\mathrm{o}}) = 0 \qquad \text{és} \qquad V(x) > 0 \quad (x \neq x^{\mathrm{o}});$$

és

(ii) lényegében minden $(x, f(x))$ állapotpárban V csökken:

$$V[f(x)] < V(x) \qquad \text{kivéve, ha} \qquad x = x^{\mathrm{o}}.$$

H.6. tétel. *(Ljapunov, 1893.) Ha létezik egy Ljapunov-függvény a dinamikára nézve, akkor a fixpont globálisan stabil.*

Megjegyzés. A végesdimenziós euklideszi térre specializált Banach-féle fixponttétel is hasonló jellegű.

Az alfejezet hátralévő részében alapvető szerepet játszik a legegyszerűbb nemlineáris függvény.

H.2. példa. Logisztikus egyenlet: Legyen $n = 1$ és

$$f(x) = ax(1-x), \quad 0 < x < 1 \qquad \text{, és} \qquad 0 \le a \le 4.$$

Működőképesség: $0 \le f(x) \le f(1/2) = a/4 < 1 \Leftrightarrow 0 \le a \le 4$. Fixpont: $x^o = 1 - 1/a$. Lokális stabilitás: $|f'(x^o)| < 1$. Mivel $f'(x) = a(1-2x)$ és $f'(x^o) = 2 - a$; a stabilitási tartomány: $1 < a < 3$. (A triviális $x^o = 0$ fixpont instabil: $f'(0) = a > 1$.)

Rátérünk a ciklusokra.

Definíció. Legyen P egy 1-nél nagyobb természetes szám. Egy $x_1, x_2, \ldots, x_P$ vektorsorozatot az f rendszer *P-periódusú ciklus*ának nevezzük, ha az x_1-ből induló pálya $x_2, \ldots, x_P$-n keresztül visszatér x_1-be.

Nemcsak a fixpont, de a ciklus is lehet stabil.

Definíció. Egy $x_1, \ldots, x_P$ ciklust az f rendszer *P-periódusú lokális határciklus*ának nevezünk, ha az x_1 közelében induló pályák rásimulnak a ciklusra. Képletben:

$$\text{Ha} \qquad y_1 \approx x_1, \qquad \text{akkor} \qquad \lim_{k\to\infty} y_{kP+Q} = x_Q, \tag{H.13}$$

ahol k és Q egészek, $1 \le Q \le P$.

Globális határciklus esetén *majdnem* tetszőleges induló állapotból induló pályától megköveteljük a konvergenciát. Lehetnek azonban kivételes induló állapotok, például egy instabil fixpont, amelyből nyilván nem mozdul ki a rendszer.

A fixpont és a ciklus közti hasonlóságot az f függvény *iteráltjai*nak segítségével érthetjük meg, amelyeket rekurzióval definiálunk:

$$f^1(x) = f(x), \quad f^2(x) = f(f(x)), \ldots, f^t(x) = f(f^{t-1}(x)).$$

Megjegyezzük, hogy $x_t = f^t(x_0)$.

H.7. tétel. *Ciklus és fixpont. a) A (H.11) rendszernek az $x_1, x_2, \ldots, x_P$ sorozat akkor és csak akkor P-periódusú ciklusa, ha a*

$$z_t = f^P(z_{t-1})$$

P-iterált rendszernek x_Q a Q-adik nem triviális fixpontja:

$$x_Q = f^P(x_Q) \ne f(x_Q), \qquad Q = 1, \ldots, P.$$

b) Az a) ciklus akkor és csak akkor lokálisan stabil (határciklus), ha a megfelelő fixpontok stabilak, azaz, ha a megfelelő mátrix stabil:

$$\rho[\mathbf{D}f(x_P) \cdots \mathbf{D}f(x_1)] < 1. \tag{H.14}$$

A következő példában egy 2-határciklust határozunk meg.

H.3. példa. Iterált logisztikus egyenlet. 2-határciklus: A H.4. tétel alapján

$$f^2(x) = af(x)[1 - f(x)] = a^2x(1-x)(1-ax+ax^2), \quad 0 < x < 1.$$

2-ciklus: $x_i = f^2(x_i)$, $i = 1,2$ és $x_i \neq x^o$. A kapott $a^3x^3 - 2a^3x^2 + a^2(1+a)x - a^2 = 0$ harmadfokú egyenletet elosztva $a(x - x^o)$ elsőfokú gyöktényezővel, egy másodfokú egyenlethez jutunk: $a^2x^2 - a(a+1)x + (a+1) = 0$, melynek két valós gyöke van:

$$x_{1,2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a},$$

mindkettő 0 és 1 közé esik, ha $3 < a < 4$.

Stabilitás: (H.14) szerint $f^{2'}(x_i) = f'(x_1)f'(x_2) = -a^2 + 2a + 4$, stabilitási tartomány: $|f^{2'}(x_i)| < 1$, azaz $3 < a < 1 + \sqrt{6}$.

Most olyan nemlineáris rendszereket fogunk tanulmányozni, amelyek se nem stabilak, se nem ciklikusak, se nem kvázi-ciklikusak, hanem kaotikusak.

Természetesnek tűnhet, hogy a dinamikus rendszer pályája alig változik, ha a kezdőérték kicsit változik. Ezen alapul a Laplace-féle determinizmus: ha ismerjük a rendszer kezdőállapotát és mozgásegyenletét, akkor tetszőleges múltbeli vagy jövőbeli pillanatra meghatározható a rendszer állapota. Ennek egyik legsikeresebb példája az volt, amikor Leverrier (és Adams) számításai alapján a csillagászok 1846-ban fölfedezték a Neptunt. A (H.11) dinamikus rendszerről azt mondjuk, hogy az x_0 pontban *érzéketlen a kezdőértékre*, ha a) a pálya korlátos és b) közelről induló pályák mindig közel maradnak egymáshoz. Képletben: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta_\varepsilon > 0$, hogy ha $||x_0 - y_0|| < \delta_\varepsilon$, akkor $||x_t - y_t|| < \varepsilon$, $t = 1, 2, \ldots$.

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy egy korlátos lineáris rendszer minden pontjában érzéketlen a kezdőértékre. Valóban, az a) feltétel miatt csak olyan rendszereket kell tekintenünk, melyeknek a sajátértékei abszolút értékben nem nagyobbak, mint 1 [(H.10)]. Emiatt az eltérések tetszőleges kicsinek tarthatók.

2. Ha nem tennénk föl a korlátosságot, akkor számos lineáris rendszer nem lenne a kezdőértékekre érzéketlen. Valóban, legyen $x_{t+1} = 2x_t$. Ekkor kis δ esetén az $x_0 = \delta$ és a 0 kezdőérték nagyon közel van egymáshoz, de a belőlük induló $2^t\delta$ és 0 pályák egyre messzebb kerülnek egymástól. Ebben semmi meglepő nincsen, s a továbbiakban nem foglalkozunk nem korlátos rendszerekkel.

3. Emlékeztetőül: még olyan jól viselkedő nemlineáris rendszer is érzékeny néhány kezdőállapotra, amelynek globális határciklusa van; az instabil fixpontból induló pálya a fixpontban marad, de akármilyen szűk környezetéből induló összes többi pálya a határciklushoz tart: a H.3. példa.

Eddig kizárólag klasszikus fogalmakkal foglalkoztunk, amelyeknek önmagukban semmi közük sincs a káoszhoz. Most rátérünk az alfejezet központi fogalomcsoportjára.

Egy dinamikus rendszert *valóban kaotikus*nak nevezünk, ha pozitív valószínűséggel a pálya érzékenyen függ a kezdőértéktől.

Korábbi megfigyelésünk szerint csak nemlineáris függvényeknél találkozhatunk káosszal.

Egy valóban kaotikus rendszer legalábbis egy pozitív mértékű kezdőállapot-halmazon rosszul viselkedik. Ez azt jelenti, hogy a rendszerre pozitív valószínűséggel *nem* érvényes a laplace-i determinizmus. Az elv annak ellenére nem érvényes, hogy nagyon egyszerű, kis-szabadságfokú rendszerről van szó. Ezt a körülményt még 1900 előtt Poincaré fölismerte az ún. háromtest probléma kapcsán, de ez több évtizedig elsikkadt.

H.8. tétel. *Legyen f egy egycsúcsú és sima függvény, amely az $I = [c, d]$ valós intervallumot önmagára képezi le. Tegyük föl, hogy a függvénynek van 3-ciklusa, azaz egy olyan c pontja, amelyre*

$$f(c) \neq f^2(c) \neq f^3(c) = c.$$

a) (Sárkovszkij, 1964.) Ekkor bármely, 1-nél nagyobb természetes P számra a rendszernek van P-ciklusa.
b) (Li és Yorke, 1975). Ekkor a rendszer topologikusan kaotikus.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás meglehetősen hosszadalmas, de nem igényel mély eszközöket. Meglepő, hogy a tételt nem fedezték föl jóval korábban.
2. Könnyen belátható, hogy számos függvénynek van 3-ciklusa (például a logisztikus egyenlet $a = 3{,}84$ esetén), de nagyon meglepő, hogy minden P-re van P-ciklusa. Képzeljünk el egy olyan $\{x_{1,P}, x_{2,P}, \ldots, x_{P,P}\}_{P=2}^{\infty}$ kettős sorozatot a $(0, 1)$ intervallumban, amelyre $f : x_{1,P} \to x_{2,P} \to \ldots \to x_{P,P} \to x_{1,P}$, $P = 2, 3, \ldots$.

Egy közgazdasági ciklusmodell

Hicks (1950) ciklusmodellje az egyik legérdekesebb és leghasznosabb modell. Módszertani szempontból az adja az érdekességét, hogy mindössze két független változóval képes a gazdaság ciklusait modellezni. Makroökonómiában megszokott módon változatlanáras értékekkel dolgozunk. Legyen Y_t a *termelés* (GDP), I_t a *nettó beruházás* és C_t a *fogyasztás* volumene a t-edik időszakban. A készletfelhalmozást belefoglaljuk a beruházásba (tulajdonképpen felhalmozásra gondolunk), s zárt gazdaságot feltételezünk. Először a lineáris változatot mutatjuk be, majd vázoljuk a nemlineáris módosítást is.

Zárt gazdaságban a három változó között egy azonosság áll fenn: termelés =beruházás+fogyasztás, azaz teljesül a
GDP azonosság

$$Y_t = I_t + C_t. \tag{H.15}$$

J. M. Clark 1917-ben vezette be a *beruházási akcelerátor*t, amely szerint minden időszakban a beruházás arányos az előző időszak termelésváltozásával. A szóban forgó egyenletet Hicks (1950)-ben kiegészítette az *autonóm beruházás*sal.
Lineáris beruházási függvény

$$I_t = I_t^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{H.16}$$

Keynes (1936) óta a fogyasztást gyakran az előző időszaki jövedelem (azaz termelés) lineáris függvényeként írják le, amelyet még egy autonóm taggal módosítanak.
Lineáris fogyasztási függvény

$$C_t = C_t^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}, \tag{H.17}$$

ahol γ a *fogyasztási határhajlandóság*, $0 < \gamma < 1$; és $1/(1-\gamma)$ a híres *multiplikátor*.

Adott I^{A} és C^{A} pálya, adott β és γ együttható, valamint adott Y_{-1}, Y_{-2} kezdeti érték mellett az I, C és Y pálya egyértelműen meg van határozva.

Három egyenletünk van, három változóval. Érdemes azonban megszabadulni a nélkülözhető változóktól és a nélkülözhető egyenletektől. Két lehetőségünk van, hogy a szokatlan alakú egyenletrendszert szokásos alakra hozzuk: visszavezetni a) két elsőrendű többváltozós differenciaegyenletre, vagy b) egy másodrendű egyváltozós differenciaegyenletre. A másodikat választva, helyettesítsük be (H.16)-ot és (H.17)-et (H.15)-be, s rendezéssel eljutunk egy másodrendű, egyváltozós *alapegyenletrendszer*hez:

$$Y_t = I^{\mathrm{A}} + C^{\mathrm{A}} + (\beta+\gamma)Y_{t-1} - \beta Y_{t-2}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{H.18}$$

ahol Y_{-2} és Y_{-1} adott kezdeti értékek. Az Y_t *alapváltozó* dinamikájának ismeretében a többi változó (I_t és C_t) dinamikája egyszerűen kiszámítható a (H.16) és a (H.17) egyenletből.

Két tételt mondunk ki: egyet a egyensúlyra, egyet a stabilitásra és oszcillációra.

H.9. tétel. *(Hicks, 1950.) Az elemi hicksi rendszer Y^{o} egyensúlya létezik és egyértelmű:*

$$Y^{\mathrm{o}} = \frac{I^{\mathrm{A}} + C^{\mathrm{A}}}{1-\gamma}. \tag{H.19}$$

H.10. tétel. *(Hicks, 1950.) a) A rendszer akkor és csak akkor oszcillál, ha*

$$\gamma < 2\sqrt{\beta} - \beta. \tag{H.20}$$

b) A rendszer akkor és csak akkor stabil, ha

$$\beta < 1. \tag{H.21}$$

Megjegyzés. Valóságos körülmények között éves modellben $\beta \approx 0{,}5$ és $\gamma \approx 0{,}75$. Tehát oszcilláció és stabilitás empirikusan összeférhetetlen. A determinisztikus lineáris modell helyett vagy determinisztikus nemlineáris modellt kell vizsgálni vagy sztochasztikus lineáris modellt.

H.1–H.4. ábra

Ez a modell azonban csak speciális esetben ad szigorú ciklust, és a kilengés nagyságát a kezdeti feltételek határozzák meg. Ez közgazdasági szempontból elfogadhatatlan. Helyette egyszerűen Hicks nemlineárissá tette a lineáris rendszert. Ha a beruházás negatív lenne, akkor helyette 0-ra módosul az érték. Ha a fogyasztás olyan nagy lenne, hogy a már meghatározott beruházással együtt a keletkező kibocsátás felülmúlná a teljes foglalkoztatás adta potenciális GDP-t, akkor a fogyasztást annyival vissza kell vágni, hogy a módosított kibocsátás egyenlővé váljon a potenciális GDP-vel.

Ekkor határciklusokat kapunk.

FELADATMEGOLDÁSOK

10.1. feladat. a) Ekkor az optimumban a két fogyasztás megegyezik: $C_0 = C_1$. Behelyettesítve:

$$\rho C_0 + C_0 = \rho W_0 + W_1, \qquad \text{azaz} \qquad C_0 = \frac{\rho W_0 + W_1}{\rho + 1}.$$

b)

$$S_0 = W_0 - C_0 = \frac{\rho W_0 + W_0 - \rho W_0 - W_1}{\rho + 1} = \frac{W_0 - W_1}{\rho + 1} > 0$$

akkor és csak akkor, ha $W_0 > W_1$.

12.1. feladat. a) Osszuk el az azonosság két oldalát $X_t = \xi_t X_{t-1}$-gyel:

$$\frac{D_t}{X_t} = r_t \frac{D_{t-1}}{\xi_t X_{t-1}} + \frac{M_t}{X_t} - 1 = \frac{r_t}{\xi_t} \frac{D_{t-1}}{X_{t-1}} + \frac{M_t}{X_t} - 1.$$

Felhasználva jelöléseinket:

$$d_t = \rho_t d_{t-1} + m_t - 1.$$

b)

$$d^{\mathrm{o}} = \rho d^{\mathrm{o}} + m - 1, \qquad \text{azaz} \qquad d^{\mathrm{o}} = \frac{m-1}{1-\rho}.$$

c) $m = 1{,}1$; $\rho = r/\xi = 1{,}01/1{,}06$ miatt $d^{\mathrm{o}} = 0{,}1/(1 - 0{,}953) = 2{,}1$.

B.1. feladat. A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések szerint $\lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha_1$ és $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha_2$. Komplex gyökök esetén $p(1) > 0$ és $p(-1) > 0$, valamint a két gyök konjugáltsága miatt $p(0) = |\lambda|^2$, s ez az stabilitás miatt kisebb mint 1. Valós gyökök esetén $- -1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, stb.

C.1. feladat. a) $f(t,x,\dot{x}) = 4x^2 + \dot{x}^2$. Euler–Lagrange d.e. bal oldala: $f'_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 2\dot{x}$. Idő szerint deriválva: $2\ddot{x}$. Jobb oldala: $f'_x(t,x,\dot{x}) = 4 \cdot 2x$, innen $\ddot{x} = 4x$. Sajátértékek: $\lambda_{1,2} = \pm 2$, általános megoldás: $x(t) = \xi_1 e^{2t} + \xi_2 e^{-2t}$. Kezdeti feltételek: $\xi_1 + \xi_2$ és $x(2) = \xi_1 e^4 + \xi_2 e^{-4}$, stb.

b) Mert konvex célfüggvény esetén minimum adódik.

E.1. feladat. a) Definíció szerint $M_t = \nu P_t$, és $K_t = \nu M_t = \nu^2 P_t$. Legyen $P_0 = 1$, ekkor $P_t = \nu^t$, $M_t = \nu^{t+1}$ és $K_t = \nu^{t+2}$. Tehát az arányok $\nu^2 : \nu : 1$.

b)

$$\alpha_t = \frac{K_t + P_t}{M_t} = \frac{\nu^{t+2} + \nu^t}{\nu^{t+1}} = \nu + \frac{1}{\nu}.$$

Deriválva ν szerint:

$$\alpha'(\nu) = 1 - \frac{1}{\nu^2} < 0, \qquad \text{ha} \qquad \nu < 1.$$

E.2. feladat. a) $l_1 f_1 \nu^{-1} = 1$ azaz $\nu = l_1 f_1$.

b)–d)

E.2. táblázat. *A demográfiai átmenet sémája*

Időszak	Gyermekek s	Dolgozók z	Idősek á	Teljes népesség a	függőségi arány
b) $f_1 = 2$					
0	4	2	1	7	2,5
1	8	4	2	14	2,5
c) vagy $f_1' = 1$					
2	8	8	4	20	3
3	8	8	8	24	2
d) vagy $f_1'' = 1/2$					
2	4	8	4	16	1
3	2	4	8	14	2,5

F.1. feladat. Mérlegeljük a megfelelően módosított egyenletet:

$$\tau_v \sum_{i=R-t+1}^{R} l_i \rho_t^{-i} = b \sum_{j=R+1}^{D} l_j \rho_t^{-j}, \qquad t = 1, \ldots, R, \tag{F.3*}$$

ahol

$$\tau_v \sum_{i=0}^{R} l_i (\nu r)^{-i} = b \sum_{j=R+1}^{D} l_j (\nu r)^{-j}, \tag{F.3**}$$

G.1. feladat. a) Nem ismerjük az egyszerű embereket. b) A Markov-féle egyenlőtlenség szerint ha w egy pozitív valószínűségi változó $\bar{w}$ átlaggal, akkor akármilyen 1-nél nagyobb pozitív λ-ra igaz, hogy $\mathbf{P}(w \geq \lambda \bar{w}) < 1/\lambda$. $\lambda = 3$-ra $1/3$ a felső korlát. c) A valóságban 5-10%.

G.2. feladat. a) $0 \leq m - \theta \leq 1$. $0 \leq \theta \leq 1$

b) $T(\theta) = \theta \mathbf{E} v = \theta(m - \theta)$ maximális, ha $\theta_L = m/2$ és $T(\theta_L) = m^2/4$.

c) $T(\theta) = \omega T(\theta_L)$ értelmében $\theta(m - \theta) = \omega m^2/4$, azaz

$$\omega = \frac{4\theta(m - \theta)}{m^2}.$$

H.1. feladat. Ekkor $\lambda_j = m_j j$ és $s_j = e_j$, ahol e_j a j-edik egységvektor.

IRODALOM

AARON, H. J. (1966): „The Social Insurance Paradox", *Canadian Journal of Economics and Political Science 32*, 371–374. o.

BALL, L.–MANKIW, N. G.–ROMER, D. (1988): „The New Keynesian Economics and the Neutrality of Money", *Brookings Papers on Economic Activity: 1*, 1–65.

AUERBACH, A. J.–HERRMANN, H. szerk. (2002): *Ageing, Financial Markets and Monetary Policy*, Berlin, Springer.

BÖRSCH-SUPAN, A. (2001a): „Six Countries – And No Pension Syystem Alike", *Börsch-Supan–Miegel, szerk.*, 1–12. o.

BÖRSCH-SUPAN, A.–LUDWIG, A.–WINTER, J. (2002): „Aging, Pension Reform, and Capital Flows", *Auerbach–Herrmann, szerk.*, 55–83. o.

BÖRSCH-SUPAN, A.–MIEGEL, M., szerk. (2001): *Pension Reform in Six Countries*, Berlin, Springer.

BURDA, M.–WYPLOSZ, CH. (1997): *Macroeconomics: a European text*, II. kiadás, Oxford, Oxford University Press.

DOMAR, E. E. (1946): „Tőkenövekedés, műszaki haladás és növekedés", magyarul *Szakolczai, szerk. (1963)*, 137–168. o.

ECONOMIST, (2005): „The missing rungs in the ladder", júl. 16-22, 16. o.

FREEMAN, R. B. (2000): „The US Economic Model at Y2K: Lodestar for Advanced Capitalism?", *NBER 7757*, http://www.nber.org/papers/w7757.

GRANDMONT, J.-M. (1998): „Expectations Formation and Stability of Large Socioeconomic Systems", *Econometrica 66*, 741–781. o.

HABLICSEK, L. (1999): „Öregedés és népességcsökkenés: demográfiai forgatókönyvek 1997–2050", *Demográfia 42*, 390–413. o.

HARROD, R. (1939): „Egy esszé a dinamikus elméletről", magyarul *Szakolczai, szerk. (1963)*, 169–192. o.

HINDE, A. (1998): *Demographic Methods*, London, Arnold.

HOLZMANN, R. (1998) „Financing the Transition to Multi-pillar [Systems]", HDNSP for Social Protection Discussion Series.

KAMIEN, M. I.–SCHWARTZ, N. L. (1981): *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Amszterdam, North-Holland, 2. kiadás, 1991.

KOVACSICSNÉ, K., szerk., (1996): *Demográfia*, Budapest, KSH.

KURIHARA, K. K., szerk. (1954): *Post-Keynesian Economics*, New Brunswick, Rutgers University Press.

LOTKA, A. J.–SHARPE, F. R. (1911): „A Problem in Age Distribution", *Philosophical Magazine 21*, 435–438. o.

LUCAS, R. E. (1972): „Expectations and the Neutrality of Money", *Journal of Economic Theory, 4* 1103–124.

LUCAS, R. E. (1973): „Some International Evidence on Output–Inflation Trade-offs", *American Economic Review, 63*, 326–334.

MANKIW, N. G. (1997): *Makroökonómia*, Bp. Osiris, 1999, 3. kiadás.

MELLÁR, T. (1998): *Makroökonómia,* Budapest, Aula.

MEYER, D.–SOLT, K. (1998): *Makroökonómia,* Budapest, Aula.

MODIGLIANI, F.–BRUMBERG, R. (1954): „Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data", *Kurihara, szerk.*, 388–436. o.

MOLNÁR, GY.–SIMONOVITS, A. (1996): „Várakozások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok realista modellcsaládjában", *Közgazdasági Szemle 43*, 863–890. o.

NICHOLSON, W. (1978): *Microeconomic Theory*, 2nd ed. Hinsdale, IL, The Dryden Press.

PETE, P. (1997): *Monetáris makroökonómia*, Budapest, Osiris.
PHELPS, E. (1961): „A felhalmozás aranyszabálya: Tanmese”, magyarul *Szakolczai, szerk. (1967)*, 266–275. o.
RÉNYI, A. (1966): *Valószínűségszámítás*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
RÉTI, J. (1997): „A nyugdíjkiadások alakulása és a nyugdíjrendszer változása a kilencvenes években”, *kézirat*, Budapest, Nyugdíjbiztosítási Önkormányzat.
ROMER, D. (1996): *Advanced Macroeconomics*, New York, McGraw Hill.
SIMONOVITS, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban,* Budapest, KJK.
SIMONOVITS, A. (1999): „A racionális és a naiv várakozások stabilitásának összehasonlítása", *Közgazdasági Szemle 46* 689–700. o.
SIMONOVITS, A. (2002): „Bevezetés a nyugdíjmodellezésbe”, Budapest, Typotex.
SIMONOVITS, A. (2010): „Adómorál és adórendszer”, *Közgazdasági Szemle 56* !!
SOLOW, R. (1956): „A Contribution to the Theory of Economic Growth”, *Quarterly Journal of Economics 70*, 65–94. o.
SOLOW, R. (1957): „A technikai változás és az aggregált termelési függvény”, magyarul *Szakolczai, szerk. (1967)*, 122–140. o.
SZAKOLCZAI, GY., szerk. (1963): *A gazdasági fejlődés feltételei*, Budapest, KJK.
SZAKOLCZAI, GY., szerk. (1967): *A gazdasági növekedés feltételei*, Budapest, KJK.
THOMPSON, L. (1998): *Older and Wiser: The Economics of Public Pension*, Washington D. C., The Urban Institute Press.
VALENTINYI, Á. (1995): „Az endogén növekedéselmélet: Áttekintés”, *Közgazdasági Szemle 42*, 582–594. o.
VINTROVA, R. (2005): „What GDP Indicators do not Tell You”, *Czech Journal of Economics and Finance 55*, 578–594.