



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Farkas Miklós

MATEMATIKA
VII. kötet
KOMPLEX FÜGGVÉNYEK

Írta:
Dux Erik

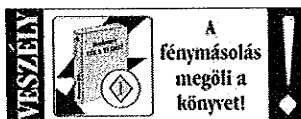


Műegyetemi Kiadó, 2010

(Hetedik utánnymás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040759**



A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 6,7 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

MŰEGYETEMI NYOMDA

Munkaszám: 7155/2010

AZ OLVASÓHOZ

Ez a jegyzet a Matematika c. jegyzetsorozat VII. kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

- I. kötet. A matematika alapjai
- II. kötet. Egyváltozós valós függvények
- III. kötet. Lineáris algebra
- IV. kötet. Végtelen sorok
- V. kötet. Többváltozós valós függvények
- VI. kötet. Differenciálgeometria és vektoranalízis
- VII. kötet. Komplex függvények
- VIII. kötet. Differenciál egyenletek

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza. A jegyzet azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztratív példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. (A levelező hallgatók számára külön utmutató csatlakozik a sorozathoz.) A sorozatot a Matematika Példatár kötetei egészítik ki, amelyekben az olvasó nagy számu kidolgozott és kidolgozatlan példát és feladatot talál.

A kötet fejezetekre, a fejezetek pontokra vannak osztva, de a pontok számozása a fejezetektől függetlenül, folyamatosan történt. Az egyes pontokon belül külön-külön számozzuk a definíciókat, tételeket (segédteteleket, következményeket), példákat, formulákat, ill. ábrákat. A példák részben a nehéz fogalmakat, tételeket világítják meg, részben "ellenpéldák" és nagyrészt az elméleti anyag szerves részét képezik. A hivatkozások egy kötetben belül az idézett definíció, tétel stb. számának megadásával, más kötet esetében, ezen kívül a hivatkozott kötet számának megadásával történik (mindkét esetben a fejezet megadása nélkül). Tehát pl. az I. Kötetben a "1. 13.2 Tétel" hivatkozás az I. Kötet 13. pont 2. tételét jelenti; a II. Kötetben ugyanerre a tételre úgy hivatkozunk: "I. I. Kötet, 13.2 Tétel". A bizonyítások végét pont és felkiáltójel jelzi: .!

Az Irodalomjegyzék elsősorban az anyag iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánlott művek és nem az eredmények eredeti forrásainak címelt tartalmazza. Az Irodalomjegyzékben felsorolt művekre szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk.

Bp. 1975. március

A szerkesztő

TARTALOMJEGYZÉK

Első fejezet.	Határérték és folytonosság	7
	1. A komplex számsík	7
	2. Komplex tagu sorozatok és sorok	10
	3. Polytomos függvények	17
Második fejezet.	Differenciálható komplex függvények	27
	4. Komplex függvény differenciálhatósága és differenciálhányadosa	27
	5. Konformis leképezések	34
	6. Elemi függvények	38
	7. Komplex függvény vonalintegrálja	42
Harmadik fejezet.	Analitikus függvények	49
	8. Cauchy tétele	49
	9. Komplex hatványsorok	55
	10. Szinguláris helyek osztályozása	61
	Laurent-sorok	
	Irodalomjegyzék	71
	Tárgymutató	72

HATÁRÉRTÉK ÉS FOLYTONOSSÁG

1. A komplex számsík

A III. Kötet Második fejezetéből ismert a komplex szám fogalma (III. Kötet, (5.19)), ill. a komplex számhalmaznak az ún. Gauss-féle számsík pontjaira történő egy-egyértelmű leképezése (I. III. Kötet, 5.1 ábra).

1.1 Definíció. Az M halmazt komplex eleműnek nevezzük, ha elemei komplex számok, vagyis ha $z \in M$, akkor $z = x + iy$, ahol $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ és i a képzetes egység (I. III. Kötet, 5.18).

Az M komplex elemű halmaznak valós szám is eleme lehet, hiszen bármely x valós szám tekinthető egy $z = x + 0i$ alakú "elfajult" komplex számnak. $M \subset \mathbb{C}$, vagyis M részhalmaza az összes komplex szám $\mathbb{C}$ halmazának, (lásd III. Kötet, 5.1 Definíció). Az M halmaz egyértelműen szemléltethető a Gauss-féle számsík egy pontthalmazával, esetleg az egész számsíkkal.

1.2 Definíció. A komplex elemű M halmazt korlátnak nevezzük, ha az elemek abszolút értékeiből (III. Kötet, 5.4 Definíció) álló nemnegatív számhalmaz felülről korlátnak.
(Geometriailag: ha az M halmaznak megfelelő pontthalmaz minden pontja lefedhető a Gauss-féle számsíkra helyezett, elég nagy sugaru és origó középpontú körrel.)

1.1 Tétel. Korlátnak komplex elemű M halmaz elemeinek valós részéből $[\operatorname{Re} z]$, ill. képzetes részéből $[\operatorname{Im} z]$ álló valós számhalmazok (lásd III. Kötet, (5.21)) is korlátnak.

Bizonyítás. A $|\operatorname{Re} z| \leq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = |z|$, ill.

$|\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = |z|$ egyenlőtlenségekből közvetlenül adódik.

1.2 Tétel. Ha egy komplex elemű M halmaz elemeinek valós részéből és képzetes részéből álló halmazok mindegyike korlátnak, akkor M is korlátnak.

Bizonyítás. Az $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ egyenlőtlenségből közvetlenül adódik.

Az 1.1, ill. 1.2 Tételek szemléletes geometriai tartalma: minden koordinátasíkbeli ponthalmaz, amely lefedhető origó középpontú körrel, lefedhető koordináta tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalappal, ill. fordítva, az ilyen téglalappal lefedhető ponthalmaz letakarható körlappal.

1.3 Definíció. A z_0 komplex szám $\rho > 0$ sugaru $K_{z_0, \rho}$ környezete mindazon z komplexszámok halmaza, melyeknek z_0 -tól való eltérése (különbségük abszolút értékével mérve) kisebb ρ -nál. $K_{z_0, \rho} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$

Ez geometriailag a komplex számsík azon pontjainak halmazát jelenti, amelyek egy z_0 középpontú és ρ sugarú kör belsőjében helyezkednek el. A fenti "köralaku" környezeten kívül szokásos a $z_0 = x_0 + i y_0$ komplex szám "téglalap alaku" (speciálisan négyzet alaku) környezetét is értelmezni: $K_{z_0, a, b} = \{z : |\operatorname{Re} z - x_0| < a, |\operatorname{Im} z - y_0| < b\}$, ahol $a > 0$ és $b > 0$. Szemlélet alapján is könnyen belátható, hogy minden kör alaku környezet tartalmaz megfelelő méretű téglalap alaku környezetet ($a^2 + b^2 \leq \rho^2$), ill. minden téglalap alaku környezet tartalmaz kör alaku környezetet ($\rho \leq \min(a, b)$).

1.4 Definíció. A z_0 komplex számot az M halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha tetszőleges kicsiny $\rho > 0$ mellett is a $K_{z_0, \rho}$ környezet az M halmaz végtelen sok elemét tartalmazza.

1.1 Példa. A $|z| < 1$ egyenlőtlenséggel jellemzett halmaznak minden eleme torlódási pont, torlódási pontjai ezenkívül az $|z| = 1$ egyenlőséggel jellemzett pontok is. E példa is mutatja, hogy a torlódási pont nem feltétlenül eleme a halmaznak.

1.3 Tétel. Ha a $z_0 = x_0 + i y_0$ komplex szám torlódási pontja M -nek, akkor x_0 torlódási pontja a $\{\operatorname{Re} z : z \in M\}$, vagy y_0 torlódási pontja az $\{\operatorname{Im} z : z \in M\}$ valós számhalmaznak.

Bizonyítás. Az 1.4 Definícióból, ill. az azt megelőző megjegyzésből következik, hogy tetszőleges kicsiny pozitív a és b érték mellett végtelen sok olyan z eleme van az M halmaznak, amely bele esik z_0 téglalap alaku

környezetébe, $K_{z_0, a, b}$ -be. Ez azonban azt jelenti, hogy $|\operatorname{Re} z - x_0| < a$, vagy $|\operatorname{Im} z - y_0| < b$, végtelen sok $z \in M$ -re

1.4 Tétel. (Weierstrass tétel.) A végtelen sok elemet tartalmazó és korlátos M halmaznak van legalább egy torlódási pontja.

Bizonyítás. Az 1.1 Tételből következik, hogy az M halmaz elemeinek valós részeit, ill. képzetes részeit tartalmazó halmazok (M_x , ill. M_y) is korlátosak. E halmazok közül legalább az egyik végtelen sok különböző elemet tartalmaz. A valós számhalmazokra bizonyított analóg tételből következik, hogy pl. az M_x halmaznak van legalább egy torlódási pontja (x_t).

Azaz tetszőleges $\varrho > 0$ -hoz létezik az M -nek egy olyan végtelen részhalmaza $M' \subset M$, hogy annak minden $z \in M'$ elemére igaz

$$x_t - \varrho < \operatorname{Re} z < x_t + \varrho.$$

M' elemeinek képzetes része is korlátos halmaz (hiszen korlátos halmaz részhalmaza); amennyiben ez is végtelen elemű halmaz, úgy az előbb idézett tétel értelmében van legalább egy torlódási pontja, y_t . Ha e képzetes részekből álló halmaz csak véges sok különböző y értéket tartalmaz, akkor ezen y értékek közül legalább az egyik az M' végtelen sok elemének képzetes része, ezt is jelöljük y_t -vel.

Nyilván az így definiálható $x_t + i \cdot y_t$ alakú komplex szám tetszőleges ϱ oldalú "négyzet alakú", ill. ϱ sugarú "kör alakú" környezetébe végtelen sok eleme esik az eredeti M halmaznak, ami a tétel bizonyítását jelenti.!

1.5 Definíció. Az M komplex elemű halmazt zártnak nevezzük, ha tartalmazza minden torlódási pontját.

1.6 Definíció. z_0 -t akkor mondjuk az M halmaz belső pontjának, ha van egy olyan környezete, amely részhalmaza M -nek ($K_{z_0} \subset M$). Az M halmaz komplementerének (lásd I. Kötet, Első fejezet) belső pontját az M halmaz külső pontjának nevezzük. A z_1 szám határpontja az M halmaznak (függetlenül attól, hogy z_1 eleme-e a halmaznak vagy sem), ha tetszőlegesen kicsi környezete tartalmazza mind az M halmaznak, mind az M komplementerjének elemét.

Az M komplex elemű halmazt nyíltnak nevezzük, ha komplementere zárt.

1.7 Definíció. A komplex számok nyílt és összefüggő (lásd V. Kötet, 1.2 Definíciót) M halmazát tartománynak nevezzük.

1.8 Definíció. A tartományt egyszeresen összefüggőnek nevezzük, ha tartalmazza minden benne haladó egyszerű zárt görbe által határolt tartományt is.

1.2 Példa. Az $1 < |z| < 2$ egyenlőtlenséggel jellemzett körgyűrű a komplex sík egy (nem egyszeresen összefüggő) tartománya.

1.9 Definíció. Egy függvényt (lásd I. Kötet, Első fejezet) akkor mondunk komplex változónak (v. röviden komplexnek), ha mind az értelmezési tartománya, mind az értékkészlete komplex elemű halmaz. Elfajult a komplex függvény, ha e halmazok egyike csak valós számokat (elfajult komplex számokat) tartalmaz. A komplex változós függvény független változóját leggyakrabban z -vel ($z = x + i y$) függő változóját w -vel ($w = u + i v$) jelöljük, a közöttük fennálló explicit függvénykapcsolat jele, a valós analógiának megfelelően $w = f(z)$, $w = g(z)$ stb.

1.3 Példa. Komplex függvény pl. $f(z) = z^2$, amely bármely számhoz a négyzetét rendeli függvényértékül, vagy $g(z) = \frac{1}{z}$, mely minden számhoz a reciprokát rendeli. Az előbbi értelmezési tartománya Z , az utóbbié $Z \setminus \{0 + 0i\}$. Elfajult komplex függvényre példa a komplex számok abszolút értéke ($r = |z|$), valós, ill. képzetes része ($x = \operatorname{Re} z$, ill. $y = \operatorname{Im} z$). Az e példákban szereplő függvények mindegyikének Z volt az értelmezési tartománya, míg értékkészletük az első esetben a nemnegatív valós számok halmaza, a második, ill. harmadik példánál R . További példa a $w = \cos t + i \sin t$ alakú függvény kapcsolat, ahol $t \in R$. Itt a független változók fajulnak el valóssá, az értékkészlet a komplex számsík origó középpontu, egységsugarú körének pontjaival szemléltethető geometriailag.

2. Komplex tagú sorozatok és sorok

2.1 Definíció. A $T \rightarrow Z$ függvényt (amely tehát a természetes számok halmazát a komplex számok halmazába képezi le) végtelen komplex számsorozatnak nevezzük.

A végtelen komplex számsorozat tehát egy speciális esete az elfajult komplex függvénynek; itt az értelmezési tartomány a valós számok halmazának T részhalmaza. A végtelen komplex sorozat jelölése analóg az I. Kötet, Negyedik fejezetében definiált (valós) végtelen sorozat jelölésével.

2.1 Példa. Végtelen komplex számsorozatok:

$$1+i, (1+i)^2, \dots, (1+i)^n, \dots, \text{ azaz } z_n = (1+i)^n, n \in \mathbb{T}. \quad (2.1)$$

$$(\cos 2\pi + i \sin 2\pi), \dots, \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right), \dots,$$

$$\text{azaz } z_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

$$(\cos \pi + i \sin \pi), \dots, \frac{1}{n} (\cos n\pi + i \sin n\pi), \dots,$$

$$\text{azaz } z_n = \frac{1}{n} (\cos n\pi + i \sin n\pi), n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

2.2 Definíció. A végtelen komplex számsorozatot akkor nevezzük korlá-
tosnak, ha a tagjainak abszolút értékéből képzett számso-
rozat $(|z_n|, n \in \mathbb{T})$ korlátos. (Lásd I. Kötet, Negyedik
fejezet).

2.1 Tétel. A $z_n, n \in \mathbb{T}$ végtelen komplex számsorozat korlátosságának
szükséges és elégséges feltétele az, hogy a sorozat tagjainak
valós részéből és képzetes részéből képzett két valós számso-
rozat $(x_n = \operatorname{Re} z_n, n \in \mathbb{T}, \text{ ill. } y_n = \operatorname{Im} z_n, n \in \mathbb{T})$ mindegyike
korlátos legyen.

Bizonyítás. A Tétel közvetlen következménye az 1.1 és 1.2 Tételnek. |

Megjegyzés. (2.2) és (2.3) korlátos sorozatok, míg (2.1) nem korlá-
tos.

2.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy a $z_n, n \in \mathbb{T}$ végtelen komplex szám-
sorozatnak határértéke a h komplex szám $(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = h)$,
ha h -nak minden $\varepsilon > 0$ -hoz tartozó környezete $(K_{h,\varepsilon})$
véges sok kivételes elemtől eltekintve a sorozat minden
elemét tartalmazza. (A kivételes elemek száma ε -nak
monoton csökkenő függvénye.) Vagyis minden $\varepsilon > 0$ -hoz
tartozik $N \in \mathbb{T}$, hogy minden $n \geq N$ -re $|z_n - h| < \varepsilon$.

Geometriailag ez a definíció azt jelenti, hogy a komplex számsík akármilyen
kis ε sugarú és h középpontú körlapja véges számú pont kivételével lefe-
di a számsorozat tagjainak megfelelő pontokat.

A komplex végtelen sorozatok határértékére vonatkozó további definíció az I. Kötet, 15.1 Definíció analógiájára fogalmazható meg.

2.4 Definíció. Azt mondjuk, hogy a z_n , $n \in T$ végtelen komplex számsorozat konvergens, ha van $h \in \mathbb{Z}$ határértéke. Minden nem konvergens sorozatot divergens komplex számsorozatnak nevezünk.

2.2 Tétel. Ha a p_n , $n \in T$ és a q_n , $n \in T$ végtelen komplex számsorozatok konvergens, akkor összegük (különbségük) is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \pm q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$$

Bizonyítás. Az I. Kötet, 15.3 Tételének bizonyításával analóg!

2.3 Tétel. Ha a p_n , $n \in T$ végtelen komplex számsorozat konvergens, akkor cp_n , $n \in T$ is konvergens, ahol $c \in \mathbb{Z}$, és igaz, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cp_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

Bizonyítás. Az I. Kötet 15.3 Tétéle bizonyításával analóg!

2.4 Tétel. Ha a p_n , $n \in T$ és a q_n , $n \in T$ végtelen komplex számsorozatok konvergens, akkor szorzatuk is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$$

Bizonyítás. Az I. Kötet 15.5 Tétéle bizonyításával analóg!

2.5 Tétel. Ha a p_n , $n \in T$ és a $q_n \neq 0$, $n \in T$ végtelen komplex számsorozatok konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \neq 0$, akkor hányadosuk is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} q_n}$$

Bizonyítás. Az I. Kötet, 15.6 Tétéle bizonyításával analóg!

2.5 Definíció. Egy $z_n = x_n + i y_n$, $n \in T$ végtelen komplex számsorozat konjugált sorozatának nevezzük az elemek konjugáltjaiból képezett sorozatot:

$$\bar{z}_n = x_n - i y_n, n \in T.$$

2.6 Tétel. Ha a z_n , $n \in T$ végtelen komplex számsorozat konvergens és határértéke h , akkor konjugált sorozata is konvergens és határértéke az eredeti sorozat határértékének konjugáltja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n = \bar{h}$$

Bizonyítás. A $|\bar{z}_n - \bar{h}| = |z_n - h|$ egyenlőség közvetlenül következik abból, hogy a konjugálás és kivonás művelete felcserélhető, ill. abból, hogy egy komplex számnak és konjugáltjának abszolút értéke egyenlő.

$$\bar{z}_n - \bar{h} = \overline{(z_n - h)} \Rightarrow |\bar{z}_n - \bar{h}| = |\overline{z_n - h}| = |z_n - h|$$

Ez az egyenlőség pedig lényegében a tétellel egyenértékű, hiszen feltevésünk értelmében tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N \in T$, hogy minden $n \geq N$ -re $|z_n - h| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $|\bar{z}_n - \bar{h}| < \varepsilon$.

A tétel és bizonyítás geometriailag közvetlenül is szemléltethető. A konjugált sorozat előállítását a megfelelő pontsorozatnak a valós tengelyre történő tükrözését jelenti, ha tehát az eredeti sorozat tagjai (véges számú kivételtől eltekintve) lefedhetők egy h középpontú és ε sugarú körleppal, úgy a tükrözpontok sorozata (ugyanannyi kivételes ponttól eltekintve) lefedhető a körleppal tükröképével.

2.7 Tétel. Egy $z_n = x_n + i y_n$, $n \in T$ végtelen komplex számsorozat konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele a $\operatorname{Re} z_n = x_n$, $n \in T$ és az $\operatorname{Im} z_n = y_n$, $n \in T$ valós számsorozatok konvergenciája. Amennyiben $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = h$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k$, ill. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ell$, úgy érvényesek a $\operatorname{Re} h = k$, ill. $\operatorname{Im} h = \ell$ egyenlőségek is.

Bizonyítás. Először a feltétel szükségességét bizonyítjuk, vagyis azt, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = h$ -ből következik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \operatorname{Re} h = k,$$

ill.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \operatorname{Im} h = \ell$$

Ez pedig azonnal következik a

$$\operatorname{Re} z_n = x_n = \frac{z_n + \bar{z}_n}{2},$$

ill.

$$\operatorname{Im} z_n = y_n = \frac{z_n - \bar{z}_n}{2i}$$

azonosságokból, valamint a 2.2, 2.3 és 2.6 Tételekből.

A feltétel elégségességének bizonyításához feltételezett

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ell$$

határértékek létezéséből a 2.2 és a 2.3 Tétel alapján következik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + i y_n) = k + i \ell$$

egyenlőség, ami pedig azonos a bizonyítandó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = h$$

állításal.!

2.8 Tétel. Ha $z_n = x_n + i y_n$, $n \in T$ végtelen komplex számsorozat konvergens és határértéke h , akkor a tagok abszolút értékeiből képzett nemnegatív valós számsorozat is konvergens és határértéke $|h|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |h|.$$

Bizonyítás. Első lépésként a $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|^2 = |h|^2$ összefüggést igazoljuk,

amihez elegendő az $|z_n|^2 = z_n \cdot \bar{z}_n$ (ill. $h \cdot \bar{h} = |h|^2$, azonosságokra és a 2.6 valamint a 2.4 Tételre hivatkoznunk. Tekintettel az $y = \sqrt{x}$ valós függvény folytonosságára a $|z_n|^2 \rightarrow |h|^2$ -ből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |h|$$

A 2.8 Tétel általában nem fordítható meg, vagyis $|z_n|$, $n \in T$ konvergenciájából általában nem következik a z_n , $n \in T$ sorozat konvergenciája. Ennek belátásához elegendő a $z_n = \cos n + i \sin n$, $n \in T$ sorozatra hivatkoznunk. Az első mondatban ismételten hangsúlyozott "általában" arra utal, hogy van kivételes eset is; nevezetesen: $|z_n| \rightarrow 0$ -ből következik a z_n , $n \in T$ sorozat zérushoz konvergálása. (Lásd 2.3 Definíció, $h=0$ esetre.)

2.6 Definíció. Az olyan végtelen numerikus sort (IV. Kötet), amelynek tagjai komplex számok, végtelen komplex számsornak nevezzük.

E sorok részletösszegeit ugyanugy értelmezzük, mint ahogy azt a valós végtelen számsorok esetében tettük. A végtelen számsor konvergenciája komplex tagok esetében is ekvivalens a részletösszegek sorozatának konvergenciájával és a konvergens sor összege komplex tagok esetében is megegyezik a részletösszegek sorozatának határértékével. A nem konvergens végtelen sort komplex tagok esetében is divergens sornak nevezzük.

2.9. Tétel. A $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + i y_n)$ végtelen komplex számsor

akkor és csak akkor konvergens, ha a sor tagjainak valós részből, ill. képzetes részéből előállított két végtelen valós

számsor $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \text{ ill. } \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right)$ konvergens; az összeg valós,

ill. képzetes részére érvényesek az alábbi egyenlőségek:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \text{ ill.}$$

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Bizonyítás. Az állítás a 2.7 Tétel közvetlen következménye, ha figyelembe vesszük, hogy bármely részletösszeg valós, ill. képzetes része a tagok valós részeinek, ill. képzetes részeinek az összege.!

2.10 Tétel. A $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ végtelen komplex számsor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy a $z_n, n \in T$ sorozat konvergáljon a zérushoz.

Bizonyítás. Az állítás a valós végtelen numerikus sorokra kimondott analóg tételnek és a 2.9 Tételnek közvetlen következménye.!

2.11 Tétel. Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ végtelen komplex számsorok konvergenssek, továbbá λ és μ tetszőleges komplex állandók, úgy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda z_n + \mu w_n)$$

komplex számsor is konvergens és összegére igaz az alábbi egyenlőség:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda z_n + \mu w_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Bizonyítás. Az állítás a valós végtelen numerikus sorokra kimondott analóg tételnek és a 2.9 Tételnek közvetlen következménye.!

2.7 Definíció. A $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ alaku végtelen komplex számsort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ nemnegatív valós számsor konvergens.

2.12 Tétel. Minden abszolút konvergens végtelen komplex számsor konvergens.

Bizonyítás. Az $|z_n| \geq |\operatorname{Re} z_n| = |x_n|$, ill. $|z_n| \geq |\operatorname{Im} z_n| = |y_n|$ egyenlőtlenségekből közvetlenül következik, hogy a 2.9 Tétel kimondása kapcsán

definiált $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, ill. $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sorok abszolút konvergensek, vagyis

(a 2.12 Tétel valós sorokra bizonyított analógja értelmében) konvergens. Ez pedig a 2.9 Tétel értelmében az állítás bizonyítását jelenti.!

A 2.12 Tétel nem fordítható meg, vagyis $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergenciájából nem következik a $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ sor konvergenciája, azaz léteznek olyan konvergens komplex számsorok, amelyek nem abszolút konvergens. E megjegyzésben megfogalmazott állítás igazolásához elegendő a IV. Kötetben definiált feltételesen konvergens sorokra hivatkoznunk, amelyeket ott ugyan valós numerikus sorokként definiáltunk, de mint ilyenek tekinthetők (elfajult) komplex számsoroknak is.

2.2 Példa. A $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$ alakú végtelen sor

("komplex kvóciensű" geometriai sor) konvergens (sőt abszolút konvergens) ha $|z| < 1$, divergens ha $|z| \geq 1$. Az állítás első fele a 2.12 Tétel következménye, míg a második része a 2.10 Tételből következik. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{ha } |z| < 1$$

egyenlőség igazolása a valós geometriai sor összegképletének levezetésénél alkalmazott gondolatmenet megismétlésével adódik (lásd IV. Kötet, 1.1 Példa).

3. Folytonos függvények

Az $f(z)$ komplex függvény

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

alakját kanonikusnak nevezzük. Itt u , ill. v a függő változó valós, ill. képzetes része x -nek és y -nak a független változó valós és képzetes részének ($x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$) függvénye. Tehát minden komplex függvény ekvivalens egy $u(x, y)$; $v(x, y)$ kétváltozós valós függvényekből álló függvényrendszerrel.

3.1 Példa. Az $f(z) = z^2$ komplex függvény kanonikus alakja

$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2i xy$, vagyis e függvénnyel az alábbi függvényrendszer ekvivalens:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

3.2 Példa. Az $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ kétváltozós függvény rendszer

is definiál egy komplex függvényt, melynek kanonikus alakja:

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Ezt kissé átalakítva:

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

3.1 Definíció. Legyen z_0 az $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, (DCZ) komplex függvény értelmezési tartományának torlódási pontja; azt mondjuk, hogy az $f(z)$ függvény határértéke e z_0 helyen a H komplex szám,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = H, \quad (f(z) \rightarrow H, \text{ ha } z \rightarrow z_0),$$

ha bármilyen kicsiny pozitív szám is ε , tartozik hozzá egy olyan alkalmas $\rho(\varepsilon) > 0$ szám, hogy minden olyan z -re, amelyre $z \in (K_{z_0, \rho(\varepsilon)} \setminus \{z_0\}) \cap D$ $|f(z) - H| < \varepsilon$

3.1 Tétel. (Cauchy-féle kritérium.) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny szám, z_0 pedig a 3.1 Definícióban megadott tulajdonsággal rendelkező komplex szám. A $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (véges) határérték lé-

tezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található egy $\rho(\varepsilon) > 0$ szám, úgy, hogy minden $z', z'' \in (K_{z_0, \rho(\varepsilon)} \setminus \{z_0\}) \cap D$ esetében

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

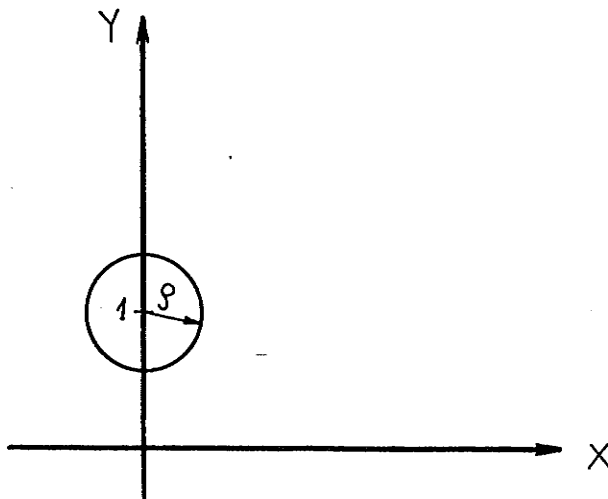
Bizonyítás. L. a II. Kötet, 4.3 Tétel bizonyítását.!

3.3 Példa. Vizsgáljuk, hogy a $w = \frac{1}{z}$ függvénynek van-e határértéke az i helyen? E helynek van olyan ϱ sugaru környezete ($\varrho < 1$), amelyben a függvény értelmezve van, és azt állítjuk, hogy

$\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z} = -i$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra az

$$\left| \frac{1}{z} - (-i) \right| = \left| \frac{1}{z} + i \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenségről kell kimutatnunk, hogy az i hely alkalmas környezetébe eső minden z -re teljesül.



3.1 ábra

A fenti egyenlőtlenséget átrendezve adódik, hogy $|1 + iz| < \varepsilon |z|$, vagyis $|1 - y + ix| < \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2}$, vagyis négyzetre emelve $x^2 + (y-1)^2 < \varepsilon^2 (x^2 + y^2)$. Legyen $0 < \varrho < \min(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$. Ekkor, ha az (x, y) pont az i pont ϱ sugaru $K_{i, \varrho}$ környezetébe esik, vagyis ha $x^2 + (y-1)^2 < \varrho^2$, akkor az origótól való távolságának négyzete $x^2 + y^2 > (1 - \varrho)^2 > \frac{1}{4}$, ahol felhasználtuk azt, hogy $1 - \varrho > \frac{1}{2}$. Mivel $\varrho < \frac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$x^2 + (y-1)^2 < \varrho^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2 (x^2 + y^2),$$

ami a bizonyítandó egyenlőtlenséggel ekvivalens.

3.4 Példa. Vizsgáljuk, hogy az $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ függvénynek van-e határértéke

a 0 helyen? E helynek minden környezetében értelmezve van a függvény kivéve magát a 0 helyet. Be fogjuk látni, hogy a függvénynek nincs határértéke a 0 helyen, hiszen

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{r [\cos \varphi + i \sin \varphi]}{r [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi.$$

A $\varphi = \text{konstans}$, origón átmenő egyenesek mentén, tehát a függvény állandó. Minthogy az origó tetszőleges kicsiny környezetébe esik pl.

$\varphi = 0$ és $\varphi = \frac{\pi}{4}$ arcusu pont, így felveszi a függvény az 1, ill. i értéket; ez kizárja a határérték létezését (3.1 Tétel).

3.2 Tétel. Legyen $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = H$ és $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = G$, akkor összegüknek,

szorzatuknak és hányadosuknak is van határértéke a $z = z_0$

helyen, feltéve, hogy a legutóbbi esetben a nevezőben álló függvény a z_0 hely egy környezetében 0-tól különbözik és a határértéke sem 0.

Érvényesek az alábbi egyenlőségek:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = H + G$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = HG$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{H}{G}; \quad G \neq 0;$$

$$g(z) \neq 0, \quad z \in K_{z_0} \setminus \{z_0\}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás gondolatmenete lényegében azonos a valós egyváltozós függvényekre, ill. a (valós és komplex) sorozatokra kimondott analóg tételek bizonyításának gondolatmenetével (lásd pl. 2.2 - 2.5 Tételeket).!

3.3 Tétel. Legyen $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = H$. Akkor az $f(z)$ függvény konjugáltjának

$\overline{f(z)}$ -nek is van határértéke a $z = z_0$ helyen is

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{H}.$$

Bizonyítás. Lényegében megegyezik a komplex sorozatokra kimondott analóg tétel a 2.6 Tétel bizonyításával.!

3.4 Tétel. Egy $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ komplexváltozós függvénynek a $z_0 = x_0 + i y_0$ helyen akkor és csak akkor van véges határértéke, ha az $u = u(x, y)$ és $v = v(x, y)$ kétváltozós függvényeknek véges határértéke van az (x_0, y_0) helyen

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = U \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = V,$$

és érvényesek az alábbi egyenlőségek:

$$\operatorname{Re} \left[\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right] = U$$

$$\operatorname{Im} \left[\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right] = V.$$

Bizonyítás. Lényegében megegyezik a komplex sorozatokra megfogalmazott és a fentivel sok tekintetben analóg 2.7 Tétel bizonyításával.!

3.2 Definíció. Az $f(z)$ komplex függvényt egy z_0 helyen folytonosnak mondjuk, ha

- a) értelmezve van e helyen,
- b) van véges határértéke mikor $z \rightarrow z_0$
- c) e határérték megegyezik a helyettesítési értékkel.

Egy tartományon folytonos a komplex függvény, ha a tartomány minden pontjában folytonos.

3.5 Tétel. Ha az $f(z)$ és $g(z)$ függvények folytonosak a $z = z_0$ helyen, akkor összegük $[f(z) + g(z)]$, szorzatuk $[f(z) \cdot g(z)]$ és a $g(z_0) \neq 0$ esetben hányadosuk $\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]$ is folytonos a $z = z_0$ helyen.

Bizonyítás. Lényegében megegyezik a folytonos valós függvényekre megfogalmazott analóg tételek (II. Kötet, 6.3, 6.4 és 6.5 tételek) bizonyításával.!

3.6 Tétel. Ha az $f(z)$ komplex függvény folytonos egy z_0 helyen, akkor e függvény konjugáltja $\overline{f(z)}$ is folytonos e z_0 helyen.

Bizonyítás. Az állítás közvetlen következménye a 3.2 Definíciónak és a 3.3 Tételnek.!

3.7 Tétel. Egy $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ komplex függvény akkor és csak akkor folytonos $z_0 = x_0 + i y_0$ helyen, ha az $u(x, y)$ és $v(x, y)$ kétváltozós függvények folytonosak az (x_0, y_0) helyen.

Bizonyítás. Az állítás közvetlen következménye a 3.2 Definíciónak és a 3.4 Tételnek.!

3.8 Tétel. Ha a $h(z)$ és $f(z)$ komplex függvények olyanok, hogy f értékkészlete részhalmaza h értelmezési tartományának, továbbá f folytonos a z_0 helyen, és h folytonos az $f(z_0)$ helyen, akkor a

$$(h \circ f)(z) = h[f(z)]$$

összetett függvény is folytonos a z_0 helyen.

Bizonyítás. A II. Kötet 6.6 Tételének bizonyításával analóg módon történik.!

3.9 Tétel. Ha az $f(z)$ komplex függvény folytonos a z_0 helyen, akkor az $|f(z)|$ valósértékű komplex függvény is folytonos a z_0 helyen.

Bizonyítás. A 3.6 Tételből következik, hogy $\overline{f(z)}$ is folytonos a z_0 helyen.

Figyelembe véve az $|f(z)| = \sqrt{f(z) \cdot \overline{f(z)}}$ azonosságot továbbá a 3.8 Tételt, állításunkat bebizonyítottuk.!

3.10 Tétel. Ha az $f(z)$ komplex függvény folytonos a z sík egy korlátos és zárt ponthalmazán, akkor a függvény abszolút értéke e halmazon korlátos, sőt felveszi legkisebb és legnagyobb értékét is.

Bizonyítás. Az $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$ valós kétváltozós függvény folytonossága a 3.9 Tétel következménye. A korlátos és zárt halmazon folytonos többváltozós függvényekre érvényes Weierstrass tételek (V. Kötet, 4.6 és 4.7 Tételek) következménye a bizonyítandó állítás.!

3.5 Példa. A $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ alakú komplex függvény (komplex polinom,

ahol az $a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ számok tetszőleges komplex konstansok) mindenütt folytonos, hiszen mind a valós, mind a képzetes része valós együtthatós kétváltozós polinom, tehát folytonos függvény. Legyen $R > 0$ és tekintsük $|p(z)|$ -t azon z -kre, amelyekre $|z| \leq R$. A 3.10 Tétel értelmében lesz legalább egy olyan z_0 helye a körlemeznek, amelyre

$\left| \sum_{k=0}^n a_k z_0^k \right|$ a minimuma, ill. legalább egy olyan z_1 helye a körlemez-

nek, amelyre $\left| \sum_{k=0}^n a_k z_1^k \right|$ a maximuma a $\left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right|$ függvénynek az $|z| \leq R$ halmazon.

A minimum helyek halmaza (amely nem üres halmaz) függ R -től. Könnyen beláthatjuk azonban, hogy ha R elég nagy akkor e halmaz elemeinek száma nem változik R növekedésével, vagyis a z -sík origó középpontú és elég nagy R sugarú körlapja lefedi $|p(z)|$ összes minimumait. Ugyanis, mivel

$$|p(z)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| = |z|^n \left| \sum_{k=0}^n a_k z^{k-n} \right| \rightarrow \infty,$$

$$\text{ha } |z| \rightarrow \infty,$$

ezért $|p(z)|$ tetszőleges nagy számnál nagyobb értéket vesz fel, az elég nagy R sugarú körön kívül. Ez azt jelenti, hogy $|p(z)|$ minimum helyei e körlapon vannak.

3.11 Tétel. (Az algebra alaptétele). Legyen $p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($a_n \neq 0$)

pontosan n -edfoku polinom ($n \geq 1$), úgy létezik legalább egy

olyan z_0 hely (a polinom gyöke), amelyre $\sum_{k=0}^n a_k z_0^k = 0$.

(E tétel lehetséges átfogalmazásait és következményeit a III. Kötet 7. pontja tartalmazza.)

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy a 3.11 Tétel nem igaz, majd e feltevés alapján ellentmondásra fogunk jutni, ami a feltevésünk helytelenségét, tehát a bizonyítandó tétel helyességét igazolja.

Az indirekt feltevés értelmében $p_n(0) \neq 0$.

Legyen $R > 0$ olyan pozitív szám, hogy $|p_n(z)| > |p_n(0)| > 0$, ha $|z| \geq R$. A 3.5 Példa végén mondottakból következik, hogy ilyen R létezik. Az $|p_n(z)|$ függvényről tudjuk, hogy van olyan z_0 hely ($|z_0| < R$), ahol minimumát felveszi (lásd 3.5 Példa és az azt követő megjegyzés) és ez a minimális érték indirekt feltételünknek megfelelően pozitív szám. Azaz $\min_{z \in \mathbb{C}} |p_n(z)| = |p_n(z_0)| = a > 0$. Rendezzük át a

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \text{ polinomot } z - z_0 \text{ hatványai szerint: } p_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k (z - z_0)^k.$$

Könnyen belátható, hogy $b_n = a_n \neq 0$ és $b_0 = p_n(z_0)$, tehát $|b_0| = a > 0$.

Ha $p_n(z)$ -t részletesen kiírjuk, adódik, hogy

$$p_n(z) = a_n (z - z_0)^n + b_{n-1} (z - z_0)^{n-1} + \dots + b_s (z - z_0)^s + b_0, \quad (3.1)$$

ahol s az a legkisebb pozitív egész kitevő, amelyhez tartozó $(z - z_0)^s$ hatvány együtthatója 0-tól különbözik ($b_s \neq 0$). Tehát $1 \leq s \leq n - 1$.

(Megjegyzés: az $s = n$ eset ellentmond a feltevésünknek, mert a

$p_n(z) = a_n (z - z_0)^n + b_0$ alakú komplex polinomnak vannak gyökei, és pedig a

$$z = z_0 + \sqrt[n]{-\frac{b_0}{a_n}} \text{ alakú komplex számok.)}$$

Feltevésünk értelmében $|p_n(z)| \geq |p_n(z_0)| = |b_0| = a > 0$. Válaszszuk most speciálisan a z független változót úgy, hogy a $z - z_0$ szám

arcusa: $\varphi = \frac{\arccos b_0 + \pi - \arccos b_s}{s}$ legyen. Ezzel elérjük azt, hogy

$\arccos b_s (z - z_0)^s = \arccos b_s + s\varphi = \arccos b_0 + \pi$, vagyis azt, hogy a (3.1) alakú polinom utolsó két tagjának arcusa π -vel különbözvén összegük abszolút értéke a tagok abszolút értékének megfelelő sorrendben képzett különbségével egyenlő.

Jelöljük $|z - z_0|$ -t r -rel, amelyet kicsiny, pozitív változónak kívánunk egyelőre tekinteni.

E jelölések segítségével (3.1) a következőképpen alakul

$$\begin{aligned} p_n(z) &= a_n r^n [\cos n\varphi + i \sin n\varphi] + b_{n-1} r^{n-1} [\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi] + \\ &+ \dots + b_{s+1} r^{s+1} [\cos(s+1)\varphi + i \sin(s+1)\varphi] + b_s r^s [\cos s\varphi + i \sin s\varphi] + b_0 \\ |p_n(z)| &\leq r^{s+1} \left| a_n r^{n-s-1} [\cos n\varphi + i \sin n\varphi] + b_{n-1} r^{n-s-2} [\cos(n-1)\varphi + \right. \\ &+ i \sin(n-1)\varphi] + \dots + b_{s+1} [\cos(s+1)\varphi + i \sin(s+1)\varphi] \left. \right| + \\ &+ \left| b_s r^s [\cos s\varphi + i \sin s\varphi] + b_0 \right| = r^{s+1} \left| a_n r^{n-s-1} e^{in\varphi} + \right. \\ &+ b_{n-1} r^{n-s-2} e^{i(n-1)\varphi} + \dots + b_{s+1} e^{i(s+1)\varphi} \left. \right| + |b_0| - |b_s| r^s, \quad (3.2) \end{aligned}$$

ahol r elég kicsiny ahhoz, hogy $|b_0| - |b_s| r^s > 0$ legyen.

Ha $r \rightarrow 0$ (a rögzített φ mellett), úgy a (3.2) egyenlőtlenség jobb oldalának első tagja erősebben $[(s+1)$ -ed rendben] tart 0-hoz mint $|b_s| r^s$, tehát van olyan r_0 , amelyre az

$$\begin{aligned} r_0^{s+1} \left| a_n r_0^{n-s-1} e^{in\varphi} + b_{n-1} r_0^{n-s-2} e^{i(n-1)\varphi} + \right. \\ \left. + \dots + b_{s+1} e^{i(s+1)\varphi} \right| < \frac{1}{2} |b_s| r_0^s \end{aligned}$$

Legyen most $z_1 = z_0 + r_0 [\cos \varphi + i \sin \varphi]$, akkor (3.2) értelmében

$$|p_n(z_1)| < \frac{1}{2} |b_s| r_0^s + |b_0| - |b_s| r_0^s = |b_0| - \frac{1}{2} |b_s| r_0^s < |b_0|,$$

vagyis találtunk z_1 helyet úgy, hogy $|p_n(z_1)|$ kisebb egy az $|b_0|$ -nál is kisebb számnál; ez pedig ellentmond a kiinduló feltevésünknek, amely szerint $|p_n(z)| \geq |b_0|$

Ezzel a kiinduló feltevés helytelenségét és így az algebra alaptételét bebizonyítottuk. !

DIFFERENCIÁLHATÓ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK

4. Komplex függvény differenciálhatósága és differenciálhányadosa

4.1 Definíció. Legyen az $f(z)$ komplex függvény a z_0 hely egy környezetében értelmezve, akkor definiálható a Δz független változónak $g(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ komplex függvénye, amelyet az $f(z)$ függvény z_0 helyhez tartozó különbségi hányadosának, vagy differenciahányadosának nevezünk.

A 4.1 Definícióban szereplő $g(\Delta z)$ függvény a $\Delta z = 0$ helyen nincs értelmezve.

4.2 Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f(z)$ függvény a $z = z_0$ helyen differenciálható, ha a 4.1 Definícióban szereplő $g(\Delta z)$ függvénynek van határértéke, mikor $\Delta z \rightarrow 0$ -hoz, és ezt a határértéket nevezzük az $f(z)$ függvény differenciálhányadosának a z_0 helyen

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} g(\Delta z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \\ &= \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = f'(z_0) \end{aligned}$$

4.3 Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f(z)$ függvény a $z = z_0$ helyen differenciálható, ha a $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ "függvény növekmény" mint Δz függvénye értelmezve van, ha $|\Delta z|$ elég kicsi, és előállítható egy lineáris függvény (főrész) és egy "mellékrész" összegeként, pontosabban

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \underbrace{A \cdot \Delta z}_{\text{főrész}} + \underbrace{\varepsilon(\Delta z) \cdot \Delta z}_{\text{mellék rész}},$$

ahol A egy Δz -től független komplex szám és $\varepsilon(\Delta z)$ egy olyan komplex függvény, amelyre igaz, hogy
 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$.

Az így definiált A számot nevezzük az $f(z)$ komplex függvény z_0 helyhez tartozó differenciálhányadosának:

$$A = f'(z_0) = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$$

4.1 Tétel. A 4.2 és 4.3 Definíciók ekvivalensek, azaz ha az f függvény a 4.2 Definíció értelmében differenciálható, akkor a 4.3 Definíció értelmében is differenciálható és fordítva; a két definícióban értelmezett differenciálhányadosok is megegyeznek.

Bizonyítás. Megegyezik a II. Kötet, 11.1 Tételének bizonyításával.!

4.1 Példa. A $w = z^2$ függvény tetszőleges z_0 helyen differenciálható és a differenciálhányadosa $2z_0$, mert e függvény növekménye

$$\Delta w = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2 = \underbrace{2z_0 \Delta z}_A + \underbrace{(\Delta z)^2}_{\varepsilon(\Delta z) \cdot \Delta z}$$

alakú és így a 4.3 Definíció alapján állításunk bizonyított.

4.2 Példa. A $w = \bar{z}$ függvény egyetlen z_0 helyen sem differenciálható.

Ennek bizonyítása érdekében tekintsük a függvény 4.1-ben definiált differenciálhányadosát

$$g(\Delta z) = \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \frac{\bar{z}_0 + \overline{\Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

amelynek a 3.4 Példa szerint $\Delta z \rightarrow 0$ esetén nincs határértéke.

Megjegyzés. A $w = \bar{z}$ függvény mindenütt folytonos; ez az állítás a 3.6 Tétellel közvetlen következménye.

4.2 Tétel. Ha az f függvény a z_0 helyen differenciálható, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás. Megegyezik a II. Kötet, 11.2 Tételének bizonyításával.

Megjegyzés. A 4.2 Tétel megfordítása nem érvényes. Lásd 4.2 Példa.

A komplex függvények differenciálszámítása sok vonatkozásban analóg a valós függvények differenciálszámításával; a II. Kötet 12. pontjában kimondott 12.1 ... 12.5 Tételek, ill. a 12.1 ... 12.4 Példákban megfogalmazott állítások és azok ott megadott bizonyításai érvényben maradnak komplex függvényekre is.

4.3 Tétel. Az f függvény akkor és csak akkor differenciálható a z_0 helyen, ha az $u = \operatorname{Re} f$, ill. az $v = \operatorname{Im} f$ kétváltozós függvények a megfelelő (x_0, y_0) helyen totálisan differenciálhatóak és az e helyhez tartozó parciális deriváltak kielégítik a

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \end{aligned} \quad (4.1)$$

egyenlőségeket, az ún. Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenleteket.

Bizonyítás. Bevezetve a következő jelöléseket:

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) \quad z_0 = x_0 + i y_0, \quad \Delta z = \Delta x + i \Delta y,$$

$$A = p + i q, \quad \varepsilon(\Delta z) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

a differenciálhatóság 4.3 Definíciója úgy alakul, hogy igaz az

$$\begin{aligned} & [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0)] = \\ & = (p + i q) (\Delta x + i \Delta y) + [\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)] [\Delta x + i \Delta y] \end{aligned} \quad (4.2)$$

egyenlőség, ahol a p és q számok függetlenek Δx -től és Δy -től és az $\xi_1(\Delta x, \Delta y)$, ill. $\xi_2(\Delta x, \Delta y)$ kétváltozós függvények 0 -hoz tartanak, amikor $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ -hoz. A (4.2) egyenlőségben a bal- és a jobb oldal való, ill. képzetes részeit egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) &= \\ &= p \cdot \Delta x - q \Delta y + \xi_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x - \xi_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) &= \\ &= q \Delta x + p \Delta y + \xi_2(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \xi_1(\Delta x, \Delta y) \Delta y \end{aligned} \quad (4.4)$$

A (4.3) és (4.4) egyenlőségek azt jelentik, hogy az u és v kétváltozós függvények totálisan differenciálhatók és a p , ill. q számok:

$$p = u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0),$$

ill.

$$q = -u'_y(x_0, y_0) = v'_x(x_0, y_0)$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a tételben kimondott feltételek az f függvény differenciálhatóságának szükséges feltételei. Könnyen belátható, hogy ezen feltételek elégségesek is. Az u és v függvények totális differenciálhatóságából és a Cauchy-Riemann egyenletekből következnek

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = p \Delta x - q \Delta y + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y$$

és

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = q \Delta x + p \Delta y + \xi_3 \Delta x + \xi_4 \Delta y,$$

ahol $p = u'_x = v'_y$, $q = -u'_y = v'_x$ és $\xi_k \rightarrow 0$, ha $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$,

$k = 1, 2, 3, 4$. Szorozzuk meg a második egyenletet i -vel és adjuk hozzá az elsőhöz:

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (p + iq)(\Delta x + i \Delta y) + (\xi_1 + i \xi_3) \Delta x + (\xi_2 + i \xi_4) \Delta y.$$

Osszuk el az utóbbi egyenletet $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ -nal:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = p + iq + (\xi_1 + i \xi_3) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\xi_2 + i \xi_4) \frac{\Delta y}{\Delta z}$$

Mivel $\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1$, $\left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1$ és $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\xi_1 + i \xi_3) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\xi_2 + i \xi_4) = 0$,
 azt kapjuk, hogy létezik f deriváltja, ul.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = p + iq . !$$

4.4 Következmény. Ha az $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ függvény a z sík egy pontthalmazán differenciálható, akkor a deriváltfüggvénye (a differenciálhányadosa, mint z függvénye):

$$\begin{aligned} f'(z) &= u'_x(x, y) + i v'_x(x, y) = u'_x(x, y) - i u'_y(x, y) = \\ &= v'_y(x, y) + i v'_x(x, y) = v'_y(x, y) - i u'_y(x, y) \end{aligned}$$

A magasabbrendű deriváltakat valamint a (többször) folytonosan differenciálhatóság fogalmát a valós függvények analóg fogalmainak megfelelően definiáljuk. Pl. ha $f'(z)$ deriválható, akkor ennek deriváltját nevezzük az f függvény második deriváltjainak és jelöljük f'' -el. Amennyiben az f'' függvény folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer folytonosan differenciálható.

4.4 Definíció. Egy T tartományon analitikusnak nevezzük az $f(z)$ függvényt, ha T minden pontjában differenciálható.

4.5 Definíció. Egy kétszer folytonosan differenciálható $g(x, y)$ kétváltozós függvényt harmonikus függvénynek nevezünk, ha kielégíti a $g''_{xx} + g''_{yy} = 0$ alakú ún. Laplace féle parciális differenciálegyenletet.

4.5 Tétel. Ha az $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ függvény a T tartományon legalább kétszer folytonosan differenciálható, akkor mind a valós, mind a képzetes része harmonikus függvény.
 Vagyis

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

és

$$v''_{xx} + v''_{yy} = 0$$

Bizonyítás. A (4.1) Cauchy-Riemann egyenletek ismételt differenciálása után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= v''_{yx}, & \text{ill.} & & v''_{xx} &= -u''_{yx} \\ u''_{yy} &= -v''_{xy} & & & v''_{yy} &= u''_{xy} \end{aligned}$$

Ezen egyenlőségek összeadása után megkapjuk a bizonyítandó egyenlőségeket, ha figyelembe vesszük, hogy a vegyes másodrendű parciális deriváltak mind az u , mind a v függvény esetében függetlenek a differenciálás sorrendjétől (lásd V. Kötet, 7.2 Tétel).

4.6 Definíció. Az $u(x, y)$ és $v(x, y)$ kétváltozós harmonikus függvényeket egymás harmonikus társainak nevezzük, ha létezik olyan $f(z)$ analitikus függvény, hogy $\operatorname{Re}[f(z)] = u$ és $\operatorname{Im}[f(z)] = v$.

4.7 Definíció. Legyen $\underline{p}(x, y) = p_1(x, y)\underline{i} + p_2(x, y)\underline{j}$ az egyszeresen összefüggő D tartományon folytonosan differenciálható síkbeli vektormező; az $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ kétszer folytonosan differenciálható függvényt a D tartományon $\underline{p}$ komplex potenciáljának nevezzük, ha

$$\operatorname{grad} u(x, y) = \underline{p}(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

vagyis

$$u'_x = p_1, \quad u'_y = p_2, \quad \text{ill.}$$

$$\underline{p} = u'_x \underline{i} + u'_y \underline{j}.$$

4.8 Definíció. A $\underline{w} = w_1(x, y)\underline{i} + w_2(x, y)\underline{j}$ kétdimenziós vektormezőt és a $w = w_1(x, y) + i w_2(x, y)$ komplex függvényt egymással kölcsönösen ekvivalensnek nevezzük.

4.6 Tétel. A komplex potenciállal rendelkező $\underline{p}$ kétdimenziós vektormező örvény- és forrásmentes, azaz mind a rotációja, mind a divergenciája 0.

Bizonyítás. Az örvénymentesség a $\operatorname{rot} \underline{p} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \underline{0}$ azonosságból közvetlenül következik. A forrásmentesség igazolása érdekében tekintsük $\operatorname{div} \underline{p}$ -t:

$$\operatorname{div} \underline{p} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0 ,$$

mivel a 4.5 Tétel és a 4.7 Definíció szerint az $u(x,y)$ függvény harmonikus. |

4.7 Tétel. Az $f(z)=u+iv$ komplex potenciállal rendelkező $\underline{p}(x,y)$ kétdimenziós vektormezővel ekvivalens $p(z)$ komplex függvényt a következő alakokban is felírhatjuk:

$$p = \overline{f'(z)} ,$$

ill. bevezetve a $\underline{q}(x,y) = \operatorname{grad} v(x,y)$ kétdimenziós vektormezőt, illetve az ezzel ekvivalens $q(z)$ komplex függvényt

$$p = -i \ q .$$

Bizonyítás. A 4.5 Definíciót, a (4.1) Cauchy-Riemann egyenleteket és a 4.4 Következményt figyelembe véve adódik, hogy

$$p = u'_x(x,y) - i \cdot v'_x(x,y) = \overline{f'(z)}$$

Az állítás második részének bizonyításához vizsgáljuk a $\operatorname{grad} v$ -vel ekvivalens $q(z)$ komplex függvény i -szeresét:

$$-iq(z) = v'_y(x,y) - iv'_x(x,y) = u'_x(x,y) - i v'_x(x,y) = \overline{f'(z)} = p . |$$

4.8 Tétel. Ha a folytonosan differenciálható $\underline{p}$ kétdimenziós vektortér egy egyszeresen összefüggő tartományban örvény- és forrásmentes, akkor van $f(z)$ komplex potenciálja, azaz a $\underline{p}$ -vel ekvivalens p komplex függvény előállítható $p = \overline{f'(z)}$ alakban.

Bizonyítás. Tekintsük a $\underline{p} = X(x,y)\underline{i} + Y(x,y)\underline{j}$ vektormezőt, amelyről tudjuk, hogy $-\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$, ill. azt, hogy $\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$. Vizsgáljuk egyidejűleg az ugyancsak kétszer differenciálható $\underline{q} = -Y(x,y)\underline{i} + X(x,y)\underline{j}$ segédvektormezőt. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ez is örvény- és forrásmentes, hiszen

$$|\operatorname{rot} \underline{q}| = \left| -\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} \right| = |\operatorname{div} \underline{p}| = 0 ,$$

ill.

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = -\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Minthogy p és q is rotációmentes vektorterek, előállíthatók egy-egy skalárpotenciál gradienseként, azaz

$$p = \operatorname{grad} u = u'_x(x, y)\underline{i} + u'_y(x, y)\underline{j}$$

és

$$q = \operatorname{grad} v = v'_x(x, y)\underline{i} + v'_y(x, y)\underline{j}$$

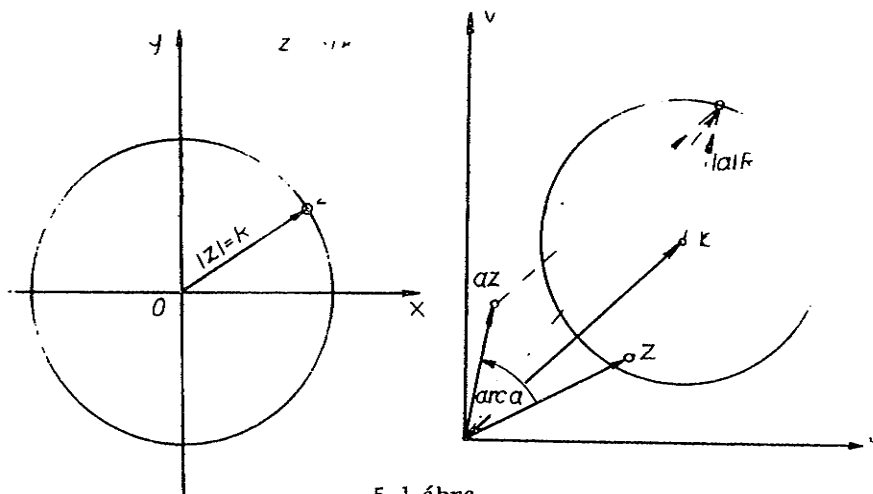
Figyelembe véve az $X = u'_x = v'_y$, ill. az $Y = u'_y = -v'_x$ egyenlőségeket, ill. az azokban szereplő kétváltozós függvényekre vonatkozó feltételeinket követve, hogy az $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ komplex függvény analitikus és p kétdimenziós vektormező komplex potenciálja!

5. Konformis leképezések

Az egyváltozós valós függvény szemléltetése a koordináta síkban a függvény grafikonjának (I. Kötet, 3.2 Definíció) megfelelő ponthalmaz megadásával történik. Ez a ponthalmaz a legfontosabb esetekben síkgörbe. A komplex függvény analóg módon történő "szemléltetése" csak négydimenziós euklideszi térben lenne lehetséges.

Egy komplex függvény egy speciális kétdimenziós vektor-vektor függvénynek tekinthető, amely a független változó sík $\{z \text{ sík}\}$ bizonyos (az értelmezési tartományba eső helyvektoraihoz, ill. ezek végpontjaihoz hozzárendeli a függő változó síkjának $\{w \text{ sík}\}$ meghatározott helyvektorait, ill. ezek végpontjait. Minden komplex függvény ekvivalens egy síkhalmazzal (a z síkba eső értelmezési tartománynak) egy másik síkban levő síkhalmazzal (a w síkba eső értékkészletre) történő leképezésével. Akkor mondjuk, hogy szemléltettük az $f(z)$ függvény által létrehozott leképezést, ha a z síkon ábrázolva megadjuk az értelmezési tartomány bizonyos részhalmazait (pl. görbéit, görbeseregeit) és a w síkon azokat az alakzatokat, amelyeknek a leképezés e részhalmazokat megfelelteti.

5.1 Példa. A $w = az + b$ alakú elsőfoku komplex polinom ($a \neq 0$, b tetszőleges komplex konstansok) a z sík origó középpontú, R sugaru köreinek seregét átviszi a w sík b középpontú és $|a| \cdot R$ sugaru köreibé. E függvény a z sík tetszőleges egyenesét egyenesbe, tetszőleges körét pedig körbe viszi át.



5.1 ábra

5.2 Példa. A z^2 függvény a z sík origó középcentű, R sugarú $\text{Im } z = y \geq 0$ félkörrel a w sík ugyancsak origó középcentű köreibe viszi át; ez az állítás közvetlenül belátható, ha mind a független, mind a függő változót trigonometrikus alakban írjuk fel. Ugyanez a függvény a z sík origóból kiinduló, m iránytangensű ($m \neq \pm 1$) egyenesait a w sík ugyan- csak az origóból kiinduló $\frac{2m}{1-m^2}$ iránytangensű félegyeneséibe, ill. az $y = x$ és $y = -x$ egyeneseket a $v = \text{Im } w$ tengely pozitív, ill. alsó felébe viszi át. A 3.2 Példából tudjuk ui., hogy a z^2 függvény az

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{függvényrendszerrel ekvivalens.}$$

$$v = 2xy$$

Legyen most $y = mx$; ennek megfelelően

$$u = x^2(1 - m^2)$$

$$v = x^2 2m,$$

ez pedig valóban az $[u, v]$ sík megadott iránytangensű félegyenesének paraméteres egyenletrendszere. A z^2 függvény által létesített leképezés nem egy-egyértelmű, mert a z_0 és a $-z_0$ pontokhoz ugyanazt a képpontot rendeli.

5.3 Példa. Az $\frac{1}{z}$ függvény a z sík $[r, \varphi]$ polárkoordinátájú pontjait

($r \neq 0$) a w sík $[\frac{1}{r}, \varphi]$ polárkoordinátájú pontjaiba képezi le; ha egy síkon ábrázoljuk az összetartozó pontpárokat, akkor az origó középpontú egységsugarú kör kerületi pontjait önmagukba viszi át a leképezés. A kör belső pontjai körön kívüli pontokba, ill. a körön kívüli pontok a kör belső pontjaiba mennek át oly módon, hogy az összetartozó pontpárt (a "tárgy"- és "képpontokat") összekötő egyenes átmegy a kör középpontján és az összetartozó pontok középponttól mért távolságainak szorzata 1. Az elemi geometriában az ilyen leképezést az egységkörre történő invertálásnak nevezzük. Most a komplex függvénytan eszközeivel mutatjuk meg, hogy ez az inverzió kört, körbe vagy egyenesbe, egyenest pedig szintén körbe vagy egyenesbe visz át. A továbbiakban a leképezést ismét a komplex függvénytanban szokásos módon, két számsíkon szemléltetjük. Mivel

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2},$$

ezért a függvény az $u = \frac{x}{x^2+y^2}, v = \frac{y}{x^2+y^2}$ függvényrendszerrel ekvivalens.

Minthogy a $w = \frac{1}{z}$ leképezés inverz leképezése $z = \frac{1}{w}$, a fenti függvényrendszer inverz függvényrendszere

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, y = \frac{v}{u^2+v^2}.$$

A z sík minden körének és egyenesének egyenlete $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$ alakban írható, ahol A, B, C, D valós paraméterek (egyenestől $A = 0$). A fenti egyenlettel jellemzett ponthalmaz képét (az inverz függvényrendszer figyelembevételével) a

$$A \frac{(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2} + \frac{Bu + Cv}{u^2+v^2} + D = 0,$$

vagyis

$$D(u^2+v^2) + Bu + Cv + A = 0$$

egyenlet jellemzi az $[u, v]$ síkon; ez pedig $D \neq 0$ esetben kör, $D = 0$ esetben egyenes, vagyis ha a tárgysíkon felvett alakzat (kör vagy egyenes) nem tartalmazza az origót, akkor a képalakzat kör, ha tartalmazza az origót

(vagyis azt az egyetlen pontot, amely nincs benne az $\frac{1}{z}$ függvény értelmezési tartományában), akkor az alakzat képe egyenes. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a leképezés az origót a "végtelen távoli pontra" viszi át.

5.4 Példa. A $w = \frac{a z + b}{c z + d}$ alaku komplex függvény, (ahol a, b, c és d komplex

konstansok, amelyek az $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ feltételtől eltekintve tetszőlegesen),

az ún. lineáris törtfüggvény által létesített leképezés is körbe vagy egyenesbe viszi a tárgysík egyeneseit és köreit. Ez az állítás a

$w = \frac{A}{z}$ függvényre ($a = 0, b = A, c = 1, d = 0$) az 5.3 Példában közölt gondolatmenet megismétlésével igazolható. Az általános esetben pedig az

$$\frac{a z + b}{c z + d} = \frac{-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

azonosságból, az $\frac{A}{z}$ függvényre vonatkozó előbbi megjegyzésből, valamint az 5.1 Példából következik.

5.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az f komplex függvény által létesített leképezés az értelmezési tartomány z_0 pontjában szögtartó, ha az egymást z_0 -ban metsző görbék (érintőinek) irányított hajlásszögét nem változtatja meg.

5.2 Definíció. Az olyan leképezést, nevezzük kicsiben aránytartó leképezésnek, amelynél igaz a

$$\lim_{\substack{P \rightarrow R \\ Q \rightarrow R}} \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} = \lim_{\substack{P' \rightarrow R' \\ Q' \rightarrow R'}} \frac{\overline{P'R'}}{\overline{Q'R'}}$$

egyenlőség, ahol R a tárgysík egy rögzített, P és Q annak két változó pontja, R', P' és Q' pedig e pontok képei a képsíkon.

5.3 Definíció. A szögtartó és kicsiben aránytartó leképezést könformis leképezésnek nevezzük.

5.1 Tétel. Legyen az $f(z)$ komplex függvény a z_0 helyen differenciálható és $f'(z_0) \neq 0$, akkor a függvény által z_0 létesített leképezés a z_0 helyen konformis.

Bizonyítás. A szögtartás bizonyítása érdekében, elsőként azt fogjuk igazolni, hogy f a z_0 ponton áthaladó sima síkgörbét, a w sík egy olyan a $w_0 = f(z_0)$ ponton áthaladó sima görbéjébe viszi át, amelynek a w_0 helyhez tartozó érintője a tárgygörbe megfelelő érintőjéhez képest egy a görbe megválasztásától független φ szöggel fordul el. Jelölje z a tárgygörbe egy változó és z_0 -tól különböző pontját, w pedig a kép görbe megfelelő pontját. $\arg(z - z_0)$ jelenti a tárgygörbe egyik szelőjének irányszögét, $\arg(w - w_0)$ pedig a kép görbe megfelelő szelőjének az irányszögét. E két irányszög különbsége:

$$\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0) = \arg \frac{w - w_0}{z - z_0} \rightarrow \arg [f'(z_0)] = \varphi,$$

ha $z \rightarrow z_0$.

Az előbbiekből következik, hogy ha a z_0 pontban két egymást metsző differenciálható görbe képeit vizsgáljuk, úgy ezek mindegyikének érintőit ugyanazon szöggel forgatta el a leképezés, tehát az érintők hajlásszöge valóban változatlan.

Az

$$\left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| \rightarrow |f'(z_0)| \neq 0,$$

ha $z \rightarrow z_0$ összefüggés pedig igazolja, hogy a leképezés az 5.2 Definíció értelmében kicsiben aránytartó!

6. Elemi függvények

6.1 Definíció. A komplex változós exponenciális függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

vagyis

$$e^z = e^x [\cos y + i \sin y], \quad z \in \mathbb{C}.$$

6.1 Tétel. Az e^z függvény az egész számsíkon differenciálható és deriváltja e^z .

Bizonyítás. Az $u(x, y) = e^x \cos y$ és a $v(x, y) = e^x \sin y$ az egész síkon totálisan differenciálhatóak, és elsőrendű parciális deriváltjaik

$(u'_x = e^x \cos y, u'_y = -e^x \sin y, v'_x = e^x \sin y, v'_y = e^x \cos y)$ kielégítik a (4.1) Cauchy-Riemann egyenleteket. Így a 4.3 Tétel alapján bebizonyítottuk, hogy a függvény mindenütt differenciálható. A 4.4 Következményből pedig adódik, hogy

$$(e^z)' = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z . 1$$

6.2 Tétel. Az e^z komplex változós exponenciális függvény kielégíti az $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ függvényegyenletet.

Bizonyítás. A $e^{z_1} = e^{x_1} [\cos y_1 + i \sin y_1]$ és $e^{z_2} = e^{x_2} [\cos y_2 + i \sin y_2]$ trigonometrikus alakban adott komplex számokat összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1+x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + \\ &+ i (\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] = \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)] = e^{z_1+z_2} . 1 \end{aligned}$$

Miután az e^z komplex függvényt értelmeztük, könnyű a hiperbolikus függvények értelmezése is a valós eset analógiájára (lásd II. Kötet, 19.1 és 19.2 Definíció). Definíció szerint

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} ; \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} , z \in \mathbb{C} . \quad (6.1)$$

A III. Kötet, 6.2 Definíciójában szereplő $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ összefüggés (Euler-formula) speciális esete a 6.1 Definíciónak. Szokás e formula alábbi átrendezett alakjait is Euler-féle relációknak nevezni:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \operatorname{ch} i\varphi \quad (6.2)$$

és

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = -i \operatorname{sh} i\varphi \quad (6.3)$$

Ezen relációk az $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, illetve $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ azonosságokból közvetlenül adódnak.

6.3 Tétel. A komplex változós exponenciális függvény periodikus, periódusa $2\pi i$; azaz

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Bizonyítás. A 6.1 Definícióból egyszerű behelyettesítéssel közvetlenül adódik.!

Az előző tételből látható, hogy az e^z függvény által létesített leképezés nem egy-egyértelmű, inverz leképezés (inverz függvény) csak bizonyos megszorításokkal értelmezhető.

6.2 Definíció. Az e^z függvény

$$S = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

tartományra vonatkozó leszűkítésének inverz függvényét logaritmus függvénynek nevezzük és $\ln z$ -vel jelöljük.

6.4 Tétel. Az $\ln z = \ln(x+iy) = \ln[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]$ függvény valós része:

$$u = \ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

képzetes része:

$$v = \varphi = \arctg \frac{y}{x} \\ [-\pi < \varphi \leq \pi]$$

Bizonyítás. $e^{\ln z} = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = e^u [\cos v + i \sin v] = z = r [\cos \varphi + i \sin \varphi]$. Ebből $e^u = r$, ill. $u = \ln r$ és $v = \varphi$, ahol $(-\pi < v \leq \pi)$.!

6.3 Definíció.

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C},$$

ahonnan

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

következik (vö. (6.2)).

6.4 Definíció.

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C},$$

ahonnan

$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

következik (vö. (6.3)).

6.5 Tétel. A $\cos z$ függvény az egész számsíkon differenciálható és deriváltja $\sin z$.

Bizonyítás. $u = \operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \operatorname{ch} y$ és $v = \operatorname{Im}(\cos z) = -\sin x \operatorname{sh} y$ mindenütt totálisan differenciálható függvények és parciális deriváltak, $u'_x = -\sin x \operatorname{ch} y$; $u'_y = \cos x \operatorname{sh} y$; $v'_x = -\cos x \operatorname{sh} y$; $v'_y = -\sin x \operatorname{ch} y$ kielégítik a (4.1) Cauchy-Riemann egyenleteket, így a 4.3 Tételből következik, hogy e függvény mindenütt differenciálható. A 4.4 Következményből pedig adódik, hogy

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= -\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y = \\ &= -[\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y] = -\sin z. \end{aligned}$$

6.6 Tétel. A $\sin z$ függvény az egész számsíkon differenciálható és deriváltja $\cos z$.

Bizonyítás. A 6.8 Tétel bizonyításával analóg módon elvégezhető.!

6.7 Tétel. A $\cos z$ függvény kielégíti a $\cos(-z) = \cos z$ függvényegyenletet.

Bizonyítás. $\cos(-z) = \cos(-x-iy) = \cos(-x) \operatorname{ch}(-y) - i \sin(-x) \operatorname{sh}(-y) =$
 $= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y = \cos z.!$

6.8 Tétel. A $\sin z$ függvény kielégíti a $\sin(-z) = -\sin z$ függvényegyenletet.

Bizonyítás. $\sin(-z) = \sin(-x-iy) = \sin(-x) \cdot \operatorname{ch}(-y) + i \cos(-x) \operatorname{sh}(-y) =$
 $= -[\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y] = -\sin z.$

7. Komplex függvény vonalintegrálja

Az egyváltozós valós függvény határozott integráljának egyik lehetséges általánosításaként értelmezni fogjuk a komplex függvény görbementi integrálját. A fogalom sok vonatkozásban hasonló lesz a kétdimenziós vektor-vektor függvények vonalintegráljának fogalmához (lásd VI. Kötet), sőt kiszámítását is vissza tudjuk vezetni két alkalmasan definiált síkbeli vektor-vektor függvény görbementi integráljának kiszámítására.

7.1 Definíció. A rektifikálható (mérhető ívű) és irányított G görbedarab legyen benne az $f(z)$ függvény értelmezési tartományában; a $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$ pontok (un. osztópontok) legyenek a G görbén, G irányításának megfelelő sorrendben, $z_0 = \alpha$ és $z_n = \beta$ jelentsék a görbedarab kezdő, ill. végpontját (ez utóbbiak nem feltétlenül különböznek, a görbe lehet zárt is). A $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k, \dots, \zeta_n$ pontok legyenek a görbe további pontjai és pedig oly módon elhelyezve, hogy ζ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) arra a görberészre illeszkedjék, amelyet a z_{k-1} és z_k osztópontok határolnak. Akkor a

$$\sum_{k=0}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k+1})$$

összeget nevezzük az $f(z)$ függvénynek az adott G görbére vonatkozó és annak a $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ osztópontokkal jellemzett felosztásához tartozó egyik integrálközelítő összegnek. (Ugyanahhoz a függvényhez, görbéhez és felosztáshoz természetesen végtelen sok más integrálközelítő összeg is tartozhat, hiszen végtelen sok szabadsági fokunk van az előírt tulajdonságú ζ_k számok megválasztásában).

7.2 Definíció. A $\max_k |z_k - z_{k-1}|$ pozitív számot nevezzük egy felosztás finomságának; az olyan integrálközelítő összegekből álló sorozatot, amelynél a felosztás finomsága zérushoz konvergál, nevezzük az integrálközelítő összegek egy minden határon túl finomodó sorozatának.

7.3 Definíció. Ha az integrálközelítő összegek bármely minden határon túl finomodó sorozata ugyanahhoz a véges komplex számhoz, A -hoz konvergál, akkor azt mondjuk, hogy az $f(z)$ függvény az adott C görbén integrálható és ezt a határértéket nevezzük a függvénynek az adott görbére vonatkozó vonalegintegráljának, jelben

$$\int_G f(z) dz = A.$$

Ha a G görbe zárt, akkor az $f(z)$ függvény G -re vonatkozó vonalegintegrálját a következőképpen jelöljük:

$$\oint_G f(z) dz.$$

7.1 Tétel. Ha $f(z)$ integrálható a G görbén, akkor $cf(z)$ is integrálható a görbén (c tetszőleges komplex konstans) és igaz, hogy

$$\int_G c f(z) dz = c \int_G f(z) dz.$$

Bizonyítás. A II. Kötet 23.4 Tételének bizonyításával analóg módon történik.!

7.2 Tétel. Ha az $f(z)$ és $g(z)$ függvények integrálhatók a G görbén, akkor az $f(z) + g(z)$ függvény is integrálható a görbén és igaz, hogy

$$\int_G [f(z) + g(z)] dz = \int_G f(z) dz + \int_G g(z) dz.$$

Bizonyítás. A II. Kötet 23.4 Tételének bizonyításával analóg módon történik.!

7.3 Tétel. Ha $-G$ jelöli az ellenkezőképpen irányított G görbét, akkor

az $\int_G f(z)dz$ létezéséből következik, hogy

$$\int_{-G} f(z)dz = - \int_G f(z)dz .$$

Bizonyítás. A tétel annak a következménye, hogy a G görbe bármely felosztásához tartozó integrálközelítő összeg a $-G$ görbe megfelelő felosztásához tartozó integrálközelítő összegnek (-1) -szerese!

7.4 Tétel. Ha a G görbedarab hossza L , és $|f(z)| \leq M$, ha $z \in G$, akkor igaz, hogy

$$\left| \int_G f(z)dz \right| \leq L \cdot M$$

Bizonyítás. Elegendő azt kimutatnunk, hogy LM a téglányösszegek abszolút értékének felső korlátja:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |z_k - z_{k-1}| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq M L . !$$

7.4 Definíció. Hozzárendelünk minden $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ komplex függvényhez kettő kétdimenziós vektor-vektor függvényt az ún. segéd-vektormezőket az alábbi módon:

$$\underline{R}(\underline{r}) = u(x, y)\underline{i} - v(x, y)\underline{j} ,$$

$$\underline{I}(\underline{r}) = v(x, y)\underline{i} + u(x, y)\underline{j} .$$

7.5 Tétel. Az $f(z)$ függvény akkor és csak akkor integrálható a G görbén, ha segédvektormezőinek létezik e görbére vonatkozó vonalintegrálja, és a 7.4 Definíció jelöléseivel

$$\int_G f(z)dz = \int_G \underline{R}(\underline{r})d\underline{r} + i \int_G \underline{I}(\underline{r})d\underline{r} .$$

Bizonyítás. Egy adott felosztáshoz tartozó integrálközelítő összegek a bal- és jobb oldalon megegyeznek, figyelembe véve, hogy $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$;

$$z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k \text{ és } f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k), \text{ illetve a}$$

$$\underline{\zeta}_k = \xi_k \underline{i} + \eta_k \underline{j} \text{ jelöléssel } \underline{R}(\underline{\zeta}_k) = u(\xi_k, \eta_k) \underline{i} - v(\xi_k, \eta_k) \underline{j},$$

$$\underline{I}(\underline{\zeta}_k) = v(\xi_k, \eta_k) \underline{i} + u(\xi_k, \eta_k) \underline{j} \text{ és } \Delta \underline{r}_k = \Delta x_k \underline{i} + \Delta y_k \underline{j}. !$$

A 7.5 Tételből következik, hogy folytonos komplex függvénynek létezik vonalintegrálja a rektifikálható G görbe mentén. Folytonos komplex függvényhez rendelt segédvektormezőkugyanis szintén folytonosak, így létezik a görbementi vonalintegráljuk.

7.6 Tétel. Legyen a reguláris G görbe az $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, paraméteres egyenletrendszerrel adva; vezessük be a $z(t) = x(t) + i y(t)$ jelölést; ezzel a G görbe "komplex egyenlete": $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$; legyen továbbá $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i \dot{y}(t)$; ha az $f(z)$ komplex függvény G -n folytonos, akkor

$$\int_G f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt, \quad (7.1)$$

ahol a jobb oldal egyszerű határozott integrálokból épül fel a következőképpen

$$\int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [f(z(t)) \dot{z}(t)] dt +$$

$$+ i \int_a^b \operatorname{Im} [f(z(t)) \dot{z}(t)] dt.$$

Bizonyítás. A 7.5 Tétel és a VI. Kötet, 13.1 Tétel egyszerű következménye. !

7.1 Példa. Legyen $f(z) = \bar{z}$ és G görbe a z sík $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$ egyenletű ellipszise, pozitív forgási irányban körüljárva. Meghatározzuk az $\oint_G f(z) dz$ integrált. Figyelembe véve, hogy $f(z) = \bar{z} = x - iy$, a függvényhez hozzárendelt segédvektormezők (lásd 7.4 Definíció)

$$\underline{R}(\underline{r}) = x \underline{i} + y \underline{j},$$

$$\underline{I}(\underline{r}) = -y \underline{i} + x \underline{j},$$

és a G görbe paraméteres egyenletrendszere $x = a \cos t$, $y = b \sin t$,
ill. $\underline{r} = a \cos t \underline{i} + b \sin t \underline{j}$ ahol $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\oint_G \underline{R}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{R}[\underline{r}(t)] \dot{\underline{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} \underline{r}(t) \dot{\underline{r}}(t) dt = \frac{1}{2} [\underline{r}^2(t)]_0^{2\pi} = 0$$

$$\oint_G \underline{I}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{I}[\underline{r}(t)] \dot{\underline{r}}(t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [-b \sin t \underline{i} + a \cos t \underline{j}] [-a \sin t \underline{i} + b \cos t \underline{j}] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} ab [\sin^2 t + \cos^2 t] dt = ab 2\pi = 2 T_{\text{ellipszis}}.$$

Tehát

$$\oint_G \bar{z} dz = 2 i \pi ab = 2 i \cdot T_{\text{ellipszis}}.$$

7.2 Példa. Legyen $f(z) = \frac{1}{z^n}$, ahol $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ és G legyen a
 z sík origó középpontu pozitív irányítású R sugaru köre. Meghatározzuk
az $\oint_G \frac{1}{z^n} dz$ integrál értékét. G paraméteres egyenlete

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

komplex egyenlete

$$z = z(t) = R [\cos t + i \sin t] = R e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\dot{z} = i R e^{it}$$

$$f(z(t)) = \frac{1}{R^n e^{int}}$$

$$f[z(t)] \dot{z}(t) = \frac{i}{R^{n-1}} \cdot e^{i(1-n)t} =$$

$$= \frac{i}{R^{n-1}} [\cos(n-1)t - i \sin(n-1)t] =$$

$$= \frac{1}{R^{n-1}} \sin(n-1)t + \frac{i}{R^{n-1}} \cos(n-1)t \, dt$$

$$\oint_G \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \sin(n-1)t \, dt + \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cos(n-1)t \, dt =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & \text{ha } n = 1 \\ 0 & \text{ha } n = 0, -1, +2, +3, +4, \dots \end{cases}$$

ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK

8. Cauchy tétele

A 4.4 Definícióban értelmeztük függvény analiticitását egy tartományon (nyílt és összefüggő ponthalmazon). Megjegyezzük, hogy a komplex sík egy pontjában analitikusnak nevezzük a függvényt, ha van a pontnak olyan környezete, amelyben analitikus. Nevezik az analitikus függvényeket reguláris függvényeknek, ill. holomorf függvényeknek is. Ebben a fejezetben az analitikus függvények legfontosabb tulajdonságaival foglalkozunk.

8.1 Tétel. (Cauchy-tétel. A komplex függvénytan főtétele.) Ha az $f(z)$ függvény a T egyszeresen összefüggő tartományban analitikus és G a T belsejében haladó zárt rektifikálható görbe, akkor

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Az alábbi bizonyítás során feltételezzük, hogy az u'_x , u'_y , v'_x és v'_y kétváltozós függvények folytonosan differenciálhatók a T tartományon. A feltételekből következik, hogy az $f(z)$ függvényhez hozzárendelt segédvektormezők (lásd 7.4 Definíció) rotációja zérus,

$$\text{rot } \underline{R}(\underline{r}) = [-v'_x - u'_y] \underline{k} = \underline{0}$$

$$\text{rot } \underline{I}(\underline{r}) = [u'_x - v'_y] \underline{k} = \underline{0},$$

mert teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek. Ebből viszont következik (lásd VI. Kötet, 15.5 Tétel), hogy a segédvektormezők potenciálosak, illetve az, hogy a segédvektormezők zárt görbe mentén vett integrálja zérus. Állításunk most már a 7.5 Tételből következik.!

Megjegyezzük, hogy a tétel a bizonyítás elején tett kiegészítő feltevés nélkül is igaz. Eredeti formájában azonban bizonyítása lényegesen nehezebb (lásd [4]).

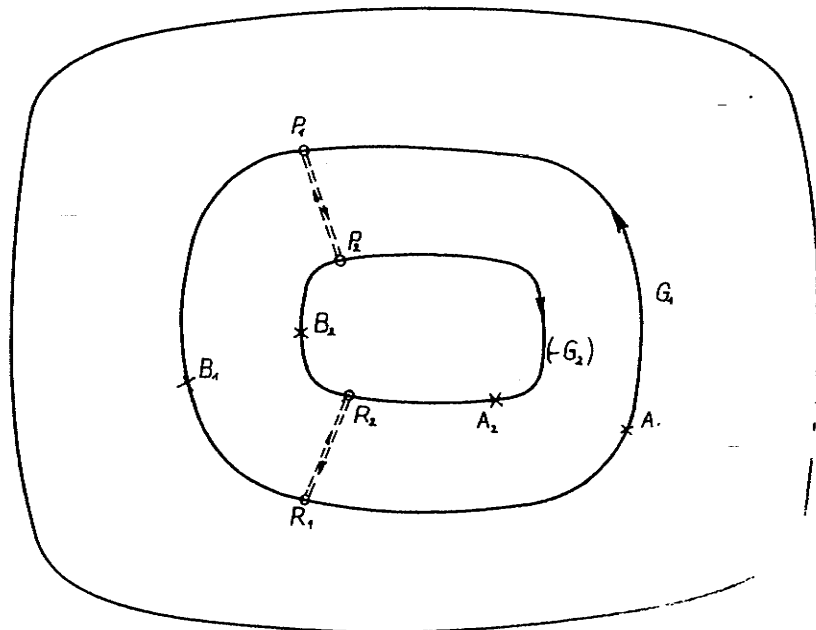
8.2 Tétel. Az egyszeresen összefüggő T tartományban analitikus függvény T -ben haladó görbék menti integrálja kizárólag a görbe kezdő és végpontjától függ.

Bizonyítás. Legyen G_1 és G_2 két különböző és irányított görbe, amelyek mindegyike a z sík A pontjában kezdődik és B pontjában végződik. A G_1 és $-G_2$ görbedarabok egyesítése egy a belsejével együtt a T tartományba tartozó zárt görbe. Így a 7.3 és 8.1 Tételekből következik az állítás. $\square$

8.3 Tétel. Legyen G_1 és G_2 két egyszerű (önmagát nem metsző) zárt görbe, G_2 legyen benne a G_1 által határolt tartományban és a két görbén valamint a közéjük eső gyűrű-szerű tartományban legyen $f(z)$ analitikus, akkor igaz, hogy

$$\oint_{G_1} f(z) dz = \oint_{G_2} f(z) dz ,$$

ha mindkét zárt görbe azonos irányítású.



8.1 ábra

Bizonyítás. Vegyünk fel egy-egy pontpárt a G_1 , ill. $(-G_2)$ görbén (a P_1 és R_1 , ill. a P_2 és R_2 pontokat) és kössük össze P_1 -et P_2 -vel, ill. R_1 -et R_2 -vel a gyűrűszerű tartományban haladó rektifikálható görbékkel. Az $L_1 : P_1 P_2 A_2 R_2 R_1 A_1 P_1$, ill. az $L_2 : P_1 B_1 R_1 R_2 B_2 P_2 P_1$ zárt görbékre (lásd 8.1 ábra) teljesülnek a 8.1 Tétel feltételei, így igaz, hogy

$$\oint_{L_1} f(z)dz = \oint_{L_2} f(z)dz = 0,$$

és természetesen

$$\oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz = 0.$$

Azonban (lásd 8.1 ábra)

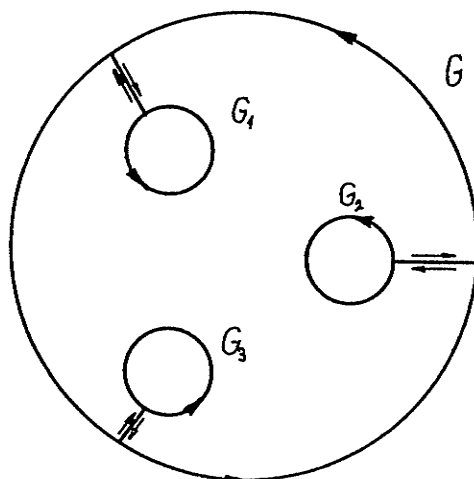
$$\begin{aligned} \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz &= \oint_{G_1} f(z)dz + \oint_{-G_2} f(z)dz + \\ &+ \int_{P_1}^{P_2} f(z)dz + \int_{P_2}^{P_1} f(z)dz + \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} f(z)dz + \int_{R_2}^{R_1} f(z)dz, \end{aligned}$$

ahol az utolsó négy tag összege zérus. Ezek szerint

$$\oint_{G_1} f(z)dz + \oint_{-G_2} f(z)dz = 0,$$

ahonnan a 7.3 Tétel alapján állításunk következik.!

A most kimondott 8.3 Tétel és bizonyítása közvetlenül kiterjeszthető arra az esetre, ha a G egyszerű zárt görbe belsejében több egyszerű zárt görbe $G_1, G_2, \dots, G_n$ van oly módon, hogy az általuk határolt zárt pont-halmazoknak páronként nincs közös pontja és az $f(z)$ analitikus mindegyik



8.2 ábra

görbén és azon a többszörösen összefüggő tartományon, amely úgy jön létre, hogy G belsejéből elhagyjuk a G_k görbék belsejét ($u = 1, 2, \dots, n$). Ebben az esetben

$$\int_G f(z)dz = \int_{G_1} f(z)dz + \int_{G_2} f(z)dz + \dots + \int_{G_n} f(z)dz$$

feltéve, hogy mindegyik görbén azonos befutási értelemben integrálunk.

8.1 Definíció. Ha a T tartományon analitikus $f(z)$ függvényhez található egy olyan $F(z)$ ugyanezen a tartományon analitikus függvény, amelyre igaz, hogy

$$F'(z) = f(z), \quad z \in T,$$

ugy ezt az $F(z)$ függvényt f primitív függvényének nevezzük.

8.4 Tétel. Az egyszeresen összefüggő T tartományon analitikus $f(z)$ függvénynek mindig van primitív függvénye.

Bizonyítás. Tekintsük az $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ alakú integrált, ahol z_0 a T tar-

tomány egy rögzített, z pedig egy változó pontja. Ez a 8.2 Tétel értelmében definiál egy $F(z)$ függvényt, amelyről kimutatjuk, hogy minden $z \in T$ -re differenciálható és deriváltja $f(z)$. Állítsuk elő F differenciáhányadosának és a feltételezett differenciáhányadosnak a különbségét

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta,$$

innen a 7.5 Tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \end{aligned}$$

Kihasználva, hogy a differenciálható $f(z)$ függvény folytonos és ezért a jobb oldal zérushoz tart, midőn $h \rightarrow 0$, kapjuk:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z).$$

8.5 Tétel. Legyen $f(z)$ analitikus egy T tartomány minden z_0 -tól különböző pontjában, és a z_0 -nak létezzen egy olyan környezete, amelyben a függvény korlátos; ekkor minden olyan egyszerű, zárt, rektifikálható és z_0 -on át nem haladó G görbére, amely belsejével együtt T -ben fekszik,

$$\oint_G f(z) dz = 0.$$

Bizonyítás. A 8.3 Tételből következik, hogy $\oint_G f(z)dz = \oint_{k_r} f(z)dz$, ahol

k_r egy z_0 középpontu G belsejébe eső, r sugaru kör. Ez az egyenlőség r -től függetlenül igaz feltéve, hogy r egy pozitív korlátnál kisebb. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. A 7.4 Tétel felhasználásával

$$\left| \oint_G f(z)dz \right| = \left| \oint_{k_r} f(z)dz \right| \leq 2\pi r \max_{k_r} |f(z)| < \varepsilon,$$

ha r elég kicsi, mert $|f(z)|$ a z_0 pont környezetében korlátos.!

8.6 Tétel. (Cauchy-féle integrálformula.) Legyen $f(z)$ analitikus a T tartományban, akkor minden olyan pozitív értelemben befutott egyszerű zárt G görbére, amely belsejével együtt benne van T -ben és amely a z pontot belsejében tartalmazza igaz, hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Bizonyítás. Igaz, hogy

$$\oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_G \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \int_G \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi$$

A jobb oldal első tagja a 8.5 Tétel értelmében 0, hiszen $g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$

a $\xi = z$ hely kivételével T -ben mindenütt analitikus és a hely környezetében korlátos, hiszen $g(\xi) \rightarrow f'(z)$ ha $\xi \rightarrow z$ -hez. Tehát

$$\oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \oint_G \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Legyen k egy z középpontu elég kis sugaru körvonal. A 8.3 Tételt és a 7.2 Példa eredményét felhasználva

$$\oint_G \frac{d\xi}{\xi - z} = \oint_k \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i,$$

ahonnan állításunk adódik.!

9. Komplex hatványsorok

A valós függvénysorozatok és függvénysorok analógiájára definiálhatók a komplex függvénysorozatok és függvénysorok (vö. IV. Kötet, Második fejezet), ill. ezek konvergenciájának (IV. Kötet, 4.1 Definíció) abszolút és egyenletes konvergenciájának (IV. kötet, 4.2 Definíció) fogalma.

9.1 Tétel. Véges sok egyenletesen konvergens és közös konvergenciatartománnyal rendelkező komplex függvénysor összege is egyenletesen konvergens és az összegsor összegfüggvénye a megfelelő összegfüggvények összegével egyenlő.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 4.2 Tétel bizonyításával analóg módon az olvasóra bizzuk.!

9.2 Tétel. Folytonos komplex függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye is folytonos.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 4.3 Tétel bizonyításával analóg módon történik.!

9.3 Tétel. Folytonos komplex függvények egyenletesen konvergens sorának összegfüggvénye is folytonos.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 4.4 Tétel bizonyításával analóg módon történik.!

9.4 Tétel. (Weierstrass-kritérium.) Ha $|f_n(z)| \leq c_n$, $z \in T$, és a

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ pozitív tagu, numerikus sor konvergens, akkor a

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ a T tartományon abszolút és egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 4.5 Tétel bizonyításával analóg módon történik.!

9.5 Tétel. Egyenletesen konvergens és egy tartományon analitikus függvénysor tagonkénti integrálásával nyert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^z f_n(z) dz$$

alku függvénysor is egyenletesen konvergens és összegfügg-

vénye az eredeti összegfüggvény $\int_a^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz$ integráljával egyenlő.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 5.4 Tétel bizonyításával analóg módon történik.

Az analicitást ki kell kötnünk, ahhoz, hogy az $\int_a^z f_n(z) dz$ integrálok az utól függetlenül létezzenek.!

9.6 Tétel. Ha az $f_n(z)$ függvények analitikusak egy tartományon, a belőlük képzett $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ függvénysor konvergens, és a deriváltakból képzett $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z)$ függvénysor egyenletesen konvergens, úgy az eredeti sor összegfüggvénye is analitikus és deriváltja $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z)$.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 5.2 Tétel bizonyításával analóg módon történik.!

9.1 Definíció. A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ alku függvénysort, ahol c_n komplex konstans ($n = 0, 1, 2, \dots$), komplex hatványsornak nevezzük.

A $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$ alku függvénysort, ahol d_n és z_0 komplex konstansok ($n = 0, 1, 2, \dots$), tágabb értelemben vett komplex hatványsornak nevezzük.

9.7 Segédteétel. Ha egy hatványsor egy $z_0 \neq 0$ helyen konvergens, akkor minden olyan z helyen abszolút konvergens, amelyre $|z| < |z_0|$.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 6.1 Segédteételének bizonyításával analóg módon történik.!

9.8 Segédteétel. Ha egy hatványsor egy z_1 helyen divergens, akkor minden olyan z helyen divergens, amelyre $|z_1| > |z|$.

Bizonyítás. Az előző Segédteétel egyszerű következménye.!

9.9 Tétel. Komplex hatványsor konvergenciatartományára a következő három egymást kizáró, lehetséges eset egyike érvényes:

- a) $z = 0$ abszolút konvergens, $z \neq 0$ esetben divergens; a konvergenciatartomány egyetlen pont, a z sík origója;
- b) van $r > 0$ szám, (az ún. konvergenciasugár), hogy $|z| < r$ esetén abszolút konvergens, $|z| > r$ esetén divergens; a konvergenciatartomány a z síkon az origó középpontu r sugaru körlemez belseje. A határpontok egy rész-halmaza is hozzátartozhat a konvergenciatartományhoz;
- c) minden z -re abszolút konvergens; a konvergenciatartomány az egész z sík.

Az a), ill. c) esetekben azt mondjuk, hogy a konvergenciasugár 0, ill. ∞ .

Bizonyítás. A IV. Kötet, 6.3 Tételének bizonyításával analóg módon történik.!

9.10. Tétel. A $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n$ tágabb értelemben vett komplex hatványsor konvergenciatartománya egy z_0 középpontu körlemez, melynek sugara az előbbi értelemben 0 ill. ∞ is lehet.

Bizonyítás. A tágabb értelemben vett hatványsor a független változó síkján egy z_0 síkvektorral történő eltolással származtatható egy komplex hatványsorból.!

9.11 Tétel. (Cauchy-Hadamard-tétel.) A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hatványsor konvergenciasugara

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Bizonyítás. A IV. Kötet, 6.4 Tételének bizonyításával analóg.!

9.12 Tétel. Legyen a hatványsor konvergencia sugara $r > 0$, és legyen $0 < \varrho < r$, akkor a hatványsor az $|z| < \varrho$ tartományon egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 6.5 Tételének bizonyításával analóg módon történik.!

9.13 Tétel. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciatartomány minden belső pontjában végtelen sokszor differenciálható és az n -edik deriváltat ($n = 1, 2, \dots$) a hatványsor n -szeres tagonkénti deriválásával lehet kiszámítani.

Bizonyítás. A IV. Kötet, 6.7 Tételének bizonyításával analóg módon történik.!

9.14 Tétel. Legyen a hatványsor konvergenciasugara $r > 0$, és legyen $0 < \rho < r$, akkor a hatványsor az $|z| < \rho$ tartományon tagonként integrálható.

Bizonyítás. Az állítás közvetlenül következik a 9.5 és 9.12 Tételből.!

9.15 Tétel. Legyen a hatványsor konvergencia sugara $r > 0$ és összegfüggvénye $f(z)$, akkor a hatványsor c_n együtthatóira ($n=0, 1, 2, \dots$) igaz a $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ egyenlőség. Analóg összefüggés érvényes a tágabb értelemben vett hatványsor összegfüggvénye $g(z)$ és a d_n együtthatók között

$$d_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Bizonyítás. Az állítás a 9.13 Tétel közvetlen következménye.!

9.2 Definíció. Legyen az $f(z)$ függvény a $z = 0$ helyen, (ill. $g(z)$ függvény az adott z_0 helyen) akárhányszor differenciálható, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ hatványsort, (illetve a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$ alakú tágabb értelemben vett hatványsort) az $f(z)$ függvény Taylor-sorának (ill. $g(z)$ függvény tágabb értelemben vett Taylor-sorának) nevezzük.

9.1 Példa. Az $f(z) = \frac{1}{1-z}$ függvény Taylor sora $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergens az

$|z| < 1$ körön és itt előállítja az $\frac{1}{1-z}$ függvényt. Ezen állítás helyessége közvetlenül adódik a 2.2 Példából és a 9.15 Tételből.

9.16 Tétel. Legyen $f(z)$ egy, a z_0 középpontu $r > 0$ sugaru G kört a belsejében tartalmazó T tartományon analitikus, akkor előállítható egy, e körben konvergens, tágabb értelemben vett hatványsor összegeként.

Bizonyítás. Minden e körön belüli z -re igaz a 8.6 Tétel értelmében, hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (9.1)$$

Egyszerű átalakítással adódik, hogy

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \quad (9.2)$$

Figyelembe véve, hogy $|\xi - z_0| = r$ és $|z - z_0| < r$ adódik, hogy

$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$, így a 9.1 Példa analógiájára érvényes az alábbi sorbafejtés:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^2} + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} + \dots \right] \quad (9.3)$$

A (9.1) összefüggés (9.3) figyelembevételével úgy módosul, hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^2} + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} + \dots \right] d\xi \quad (9.4)$$

(9.4) jobb oldalát a 9.14 Tétel értelmében tagonként integrálva adódik, hogy

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \right] (z - z_0) + \\
&+ \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^3} d\xi \right] (z - z_0)^2 + \dots \\
&\dots + \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n + \dots
\end{aligned}$$

Vagyis

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k, \quad \text{ha } |z - z_0| < r,$$

ahol

$$d_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = f(z_0)$$

és

$$d_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \quad (k=1, 2, \dots) \dots$$

9.17 Tétel. (Általánosított Cauchy-féle integrálképlet.) Ha az $f(z)$ függvény egy a z_0 -t tartalmazó T tartományon analitikus (és L egy a belsejével együtt a tartományba eső és z_0 -t körülvevő egyszerű zárt görbe), akkor a z_0 helyen akárhányszor differenciálható és igaz, hogy

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$$

($k=0, 1, 2, \dots$)

Bizonyítás. Az állítás közvetlenül következik a 8.3, a 9.13, a 9.15 és a 9.16 Tételből.

9.2 Példa. A 6. pontban definiált e^z , $\cos z$ és $\sin z$ függvények Taylor sora, az egész számsíkon konvergens és előállítja minden z helyen a sort generáló függvényt:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

10. Szinguláris helyek osztályozása

Laurent-sorok

10.1 Definíció. Ha $f(z)$ a z_0 hely egy környezetében z_0 kivételével mindenütt differenciálható, akkor ezt a z_0 -t izolált szinguláris helynek nevezzük. Az izolált szinguláris helyekre az alábbi három egymást kizáró, lehetséges eset egyike érvényes:

- a) a szingularitás megszüntethető, azaz a z_0 helyhez úgy rendelhető hozzá w_0 függvényérték (akár az értelmezési tartomány z_0 ponttal történő bővítése után, akár a z_0 -hoz eredetileg hozzárendelt függvényérték w_0 -ra történő változtatásával), hogy az így módosított függvény a z_0 helyen analitikus lesz;
- b) a szinguláris hely pólus, ha ott a szingularitás nem szüntethető meg, de van pozitív egész k , hogy a $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$, $z \neq z_0$ függvénynek már megszüntethető a szingularitása, egy alkalmas $w_0 = g(z_0) \neq 0$ függvényérték hozzárendelésével. A fenti tulajdonsággal rendelkező k pozitív egész számot nevezzük a pólus rendjének;

c) minden olyan z_0 szinguláris helyet, amely sem az a) sem a b) osztályba nem sorolható, lényeges szinguláris helynek nevezünk.

10.1 Példa. Az $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z \neq 0$ függvénynek a 0 helyen megszüntethető szakadása van, mert az $f(0) = 1$ hozzárendeléssel a függvény az egész számsíkon analitikussá lesz.

10.2 Példa. Az $\frac{1}{(z-i)^3}$ függvénynek a $z_0 = i$ helyen harmadrendű pólusa van.

10.3 Példa. Az $e^{\frac{1}{z}}$ függvénynek $z_0 = 0$ lényeges szinguláris helye.

10.1 Tétel. Legyen az $f(z)$ függvény analitikus a z_0 pont körüli (k_1, k_2) körgyűrűben, $(k_1, k_2) = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, ahol r a k_1 kör, R pedig a k_2 kör sugara, akkor e körgyűrű tetszőleges z pontjára érvényes az

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

alakú ún. Laurent-féle sorfejtés, ahol az együtthatókat az

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

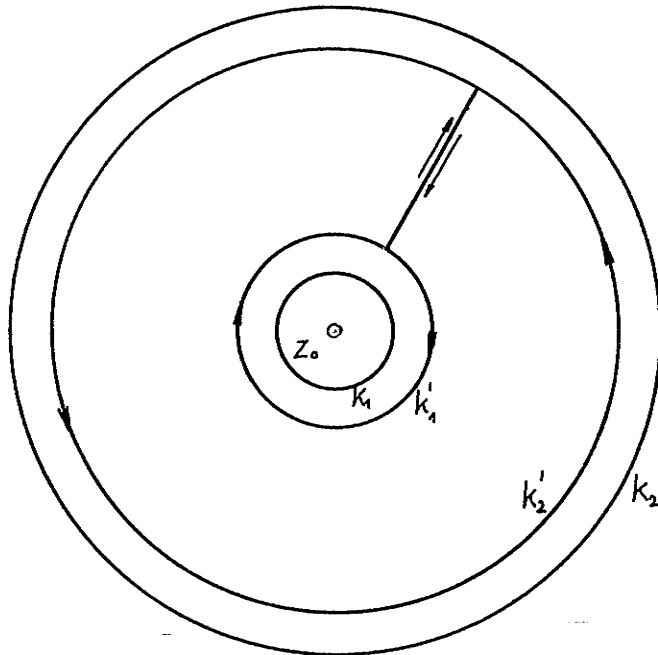
$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Integrálképletek szolgáltatják; az integrálképletekben szereplő G a körgyűrűben haladó tetszőleges egyszerű zárt görbe, amely a z_0 pontot pozitív értelemben megkerüli.

Ha a k_1 kör a z_0 pontra zsugorodik ($r = 0$), akkor a z_0 szinguláris hely körüli Laurent sort kapjuk; ezt a speciális esetet alkalmazzuk leggyakrabban.

Bizonyítás. Legyen a k_1 , ill. a k_2 ugyancsak z_0 középpontu r' , ill. R' sugaru kör olyan, hogy az általuk jellemzett (k'_1, k'_2) gyűrűtartomány

benne legyen a (k_1, k_2) körgyűrűben és ugyancsak tartalmazza a z pontot, azaz $r < r' < |z - z_0| < R' < R$. Jelölje C a (k'_1, k'_2) körgyűrű föl-metszése útján előálló egyszeresen összefüggő tartomány (lásd 10.1 ábra)



10.1 ábra

határoló görbáját, vagyis C a megfelelően irányított k'_1 és k'_2 körökből, valamint a kétféleképpen irányított metszőszakaszból áll. Mivel az f függvény a C által határolt tartományban és magán C -n is analitikus, a Cauchy féle integrálformula (8.6 Tétel) értelmében

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{k'_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{k'_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \end{aligned} \quad (10.1)$$

ahol figyelembe vettük azt is, hogy mint C része a k'_1 kör negatív irányításu. Vezessük be az

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{k'_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

és az

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{k'_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (10.2)$$

jelöléseket. Az $f_1(z)$ és az $f_2(z)$ függvényt sorba fejtjük. Az $f_2(z)$ függvény sorba fejtésénél lényegében megismételhetjük a 9.16 Tétel bizonyításánál alkalmazott módszert, hiszen

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}},$$

ahol $|z - z_0| < R'$, mert z benne van a (k'_1, k'_2) körgyűrűben, és $|\xi - z_0| = R'$, tehát

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

Vagyis

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in (k'_1, k'_2),$$

ahol

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{k'_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi. \quad (10.3)$$

Ez az a_n együttható azonban most nem szükségszerűen egyenlő

$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ -sal, mint a Taylor-sor esetén, hiszen a z_0 középpontban most semmit sem követeltünk meg a függvénytől.

Az $f_1(z)$ függvény sorba fejtése érdekében tekintsük a következő átalakításokat:

$$-\frac{f(\xi)}{\xi-z} = \frac{f(\xi)}{z-z_0-(\xi-z_0)} = \frac{f(\xi)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}. \quad (10.4)$$

Ha ξ a k'_1 kör változó kerületi pontja, z_0 a kör középpontja és z a (k'_1, k'_2) körgyűrű tetszőleges belső pontja, akkor $|\xi-z_0| = r' < |z-z_0|$,

vagyis $\left| \frac{\xi-z_0}{z-z_0} \right| < 1$, amiből következik az alábbi geometriai sorba fejtés

$$-\frac{f(\xi)}{\xi-z} = \frac{f(\xi)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}} = \frac{f(\xi)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \quad (10.5)$$

Tekintettel arra, hogy a (10.5) jobb oldalán levő, geometriai sor a k'_1 kör egy elég kis környezetében egyenletesen konvergens, a 9.5 Tétel értelmében igaz, hogy

$$-\oint_{k'_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint_{k'_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^n} d\xi \cdot (z-z_0)^{-(n+1)} \right]$$

Az $m=n+1$ indexcserével

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{k'_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} (z-z_0)^{-m},$$

ahol

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{k'_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-m+1}} d\xi. \quad (10.6)$$

$m = 1, 2, \dots$

A (10.3) és (10.6) formulákban az integráljelek alatt álló függvények a teljes (k'_1, k'_2) körgyűrűben analitikusak és így az együtthatók nem változnak,

ha az integrációs utat a G görbére módosítjuk. Ezzel az (10.1) és (10.2) összefüggéseket is figyelembe véve, bebizonyítottuk a 10.2 Tételt.!

10.2 Tétel. Az $f(z)$ analitikus függvény z_0 izolált szinguláris helye akkor és csak akkor megszüntethető szingularitás, ha a z_0 hely körüli Laurent sor valamennyi negatív indexű együtthatója zérus.

Bizonyítás. A feltétel elégséges, mert az $f(z_0) = a_0$ hozzárendeléssel a szingularitás megszűnt, így a függvény a z_0 helyen is analitikus. A feltétel szükséges mivel egy z_0 körüli elég kis sugarú k körre

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-m+1}} d\xi = 0, \quad (m=1, 2, \dots)$$

a 8.5 Tétel értelmében.!

10.3 Tétel. Az $f(z)$ analitikus függvény z_0 izolált szinguláris helye akkor és csak akkor k -ad rendű pólus, ha a z_0 hely körüli Laurent sorban $a_{-k} \neq 0$ és $a_{-m} = 0$, ha $m > k$.

Bizonyítás. A feltétel elégséges, mert ha

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

alaku, akkor a $g(z) = (z-z_0)^k f(z)$, $z \neq z_0$ függvénynek a $g(z_0) = a_{-k}$ hozzárendeléssel megszüntethető a szingularitása, és k_1 a legkisebb természetes szám, amelyre ez az állítás igaz.

A feltétel szükséges is, mert ha z_0 k -ad rendű pólus, akkor a

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) (z-z_0)^k$ határérték létezik és nem zérus. Ha f Laurent-sorában

$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$, $m > k$, alaku tagok is előfordulnának, akkor e határérték nem létezne.

Ha viszont fennállna $a_{-k} = 0$ is, akkor e határérték zérus lenne.!

10.4 Tétel. Az $f(z)$ analitikus függvény z_0 izolált szinguláris helye akkor és csak akkor lényeges szinguláris hely, ha a z_0 körüli Laurent sornak végtelen sok zérustól különböző negatív indexű együtthatója van.

Bizonyítás. Az állítás közvetlen következménye a 10.1 Definíciónak és a 10.3 Tételeknek.

10.2 Definíció. Legyen $f(z)$ -nek z_0 izolált szinguláris helye. A z_0 körüli Laurent sor a_{-1} együtthatóját (vagyis az

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z) dz \text{ integrált, ahol } G \text{ egy olyan egyszerű po-}$$

zitiv értelemben befutott zárt görbe, amely belsejével együtt az egyetlen z_0 pontot kivéve hozzátartozik $f(z)$ analiticitási tartományához) az $f(z)$ függvény z_0 -hoz tartozó reziduumának nevezzük.

$$\text{Res}(z_0) = \text{Res}[f(z); z_0] = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z) dz .$$

10.5 Tétel. (Reziduum-tétel.) Legyen az $f(z)$ függvény analitikus a pozitív irányítású egyszerű zárt L görbén és belsejében, kivéve a véges sok $z_0, z_1, \dots, z_s$ izolált szinguláris pontot; ekkor igaz, hogy

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(z_0) + \text{Res}(z_1) + \dots + \text{Res}(z_s)] .$$

Bizonyítás. Vegyük körül a szinguláris helyeket elég kis $k_0, k_1, \dots, k_s$ körökkel oly módon, hogy e körök mindegyike L belsejében halad és páronként nincs közös pontjuk. A 8.3 Tételt követő megjegyzésből következik, hogy

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{k_0} f(z) dz + \oint_{k_1} f(z) dz + \dots + \oint_{k_s} f(z) dz .$$

Tekintettel arra, hogy a k_j kör belsejében z_j az egyetlen izolált szinguláris hely

$$\oint_{K_j} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z_j), \quad (j=0, 1, 2, \dots, s)$$

amivel a reziduum tételt bebizonyítottuk. |

A reziduum tételt eredménnyel alkalmazhatjuk határozott integrálok kiszámításában, főként olyankor amikor egyszerűen tudjuk kiszámítani az egyes szinguláris helyekhez tartozó reziduumokat. Így pl. érvényes a

10.6 Tétel. Legyen $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, ahol a h és g függvények z_0 környezetében analitikusak és teljesül a $g(z_0) = 0$ és $g'(z_0) \neq 0$ egyenlőség;

$$\operatorname{Res}[f(z); z_0] = \operatorname{Res}\left[\frac{h(z)}{g(z)}; z_0\right] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Bizonyítás. A

$$(z - z_0)f(z) = (z - z_0) \frac{h(z)}{g(z)} = (z - z_0) \frac{h(z)}{g(z) - g(z_0)} = \frac{h(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}$$

azonosságból látszik, hogy a $\varphi(z) = (z - z_0)f(z)$ függvénynek a z_0 helyen megszüntethető szingularitása van; a $\varphi(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$ hozzárendeléssel

a φ függvény a z_0 helyen analitikus vagyis igaz, hogy

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(z_0) + \frac{\varphi'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{\varphi''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots \\ &+ \dots + \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$, adódik $f(z)$ alábbi z_0 körüli

Laurent sora

$$f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{z - z_0} + \varphi'(z_0) + \frac{\varphi''(z_0)}{2!} (z - z_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1} + \dots$$

ahonnan közvetlenül leolvasható, hogy

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \varphi'(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \cdot 1$$

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Matematika példatár (szerkesztette Monostory I.) VII. Kötet, Tankönyvkiadó, 1972.
- [2] Szász P.: A differenciál- és integrálszámítás elemei II. Kötet, Közoktatásiügyi Kiadóvállalat, 1951.
- [3] Fuksz, B.A., Sabat, V.B.: Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk, Tankönyvkiadó, 1953.
- [4] Szőkefalvi-Nagy B.: Komplex függvénytan (egységes jegyzet), Tankönyvkiadó, 1970.
- [5] Műszaki Matematika (szerkesztette Gáspár Gy.) VI. Kötet, (Komplex függvénytan), Tankönyvkiadó, 1969.

Tárgymutató

- algebra alaptétele 24
- általánosított Cauchy-féle integrálképlet 60
- analitikus függvény 31, 49
- belső pont 9
- Cauchy-féle integrálformula 54
- Cauchy-Hadamard-tétel 57
- Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek 29
- Cauchy-tétel 49
- differenciálhányados 27
- egyszeresen összefüggő tartomány 10
- Euler-féle reláció 39
- exponenciális függvény 38
- harmonikus függvény 31
- harmonikus társ 32
- határérték 11, 18
- határpont 9
- hatvány sor 55
 - — konvergencia sugara 57
- integrálhatóság 43
- invertálás egységkörre 36
- izolált szinguláris hely 61
- kicsiben aránytartó leképezés 37
- komplementer halmaz 9.
- komplex függvény 10
 - — differenciálhatósága 27
 - — folytonossága 21
 - — kanonikus alakja 17
 - — vonalintegrálja 42
- komplex függvénytan főtétele 49
- komplex potenciál 32

komplex számsorozat 10
 — — konjugált sorozata 13
 — — konvergenciája 12
 konformis leképezés 34, 37
 korlátos 7, 11
 környezet 8
 külső pont 9

 Laplace-féle parciális differenciálegyenlet 31
 Laurent-sor 61
 lényeges szinguláris hely 62
 lineáris törtfüggvény 37
 logaritmus függvény 40

 megszüntethető szinguláritás 61

 nyílt halmaz 9

 pólus 61
 pólus rendje 61
 primitív függvény 52

 reziduüm 67
 reziduüm tétel 67

 szinguláris hely 61
 szögtartó leképezés 37

 tartomány 10
 Taylor sor 58
 torlódási pont 8

 végtelen komplex számsor 15
 — — — abszolút konvergenciája 16
 — — — feltételes konvergenciája 17
 Weierstrass tétel 9.

 zárt halmaz 9

