



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Farkas Miklós

MATEMATIKA
II. kötet
EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

Írta:
Farkas Miklós - Fritz Józsefné - Kiss Ernőné



Műegyetemi Kiadó, 2007

(Tizenhatodik utánnymás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040797**



A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 22,4 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 6491/07

AZ OLVASÓHOZ

Ez a jegyzet a Matematika c. jegyzetsorozat II. kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

- I. kötet. A matematika alapjai
- II. kötet. Egyváltozós valós függvények
- III. kötet. Lineáris algebra
- IV. kötet. Végtelen sorok
- V. kötet. Többváltozós valós függvények
- VI. kötet. Differenciálgeometria és vektoranalízis
- VII. kötet. Komplex függvények
- VIII. kötet. Differenciálegyenletek

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza. A jegyzet azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztratív példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot, lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. (A levelező hallgatók számára külön útmutató csatlakozik a sorozathoz). A sorozatot a Matematika Példatár kötetel egészítik ki, amelyekben az olvasó nagy számu kidolgozott és kidolgozatlan példát és feladatot talál.

A kötet fejezetekre, a fejezetek pontokra vannak osztva, de a pontok számozása a fejezetektől függetlenül, folyamatosan történt. Az egyes pontokon belül külön-külön számozzuk a definíciókat, tételeket (segéditételeket, következményeket), példákat, formulákat, ill. ábrákat. A példák részben a néhez fogalmakat, tételeket világítják meg, részben "ellenpéldák" és nagyrészt az elméleti anyag szerves részét képezik. A hivatkozások egy kötetben belül az idézett definíció, tétel stb. számának megadásával, más kötet esetében, ezen kívül a hivatkozott kötet számának megadásával történik (mindkét esetben a fejezet megadása nélkül). Tehát pl. az I. Kötetben a "1. 13.2 Tétel" hivatkozás az I. Kötet 13. pont 2. tételét jelenti; a II. Kötetben ugyanerre a tételre úgy hivatkozunk; "1. I. Kötet, 13.2 Tétel". A bizonyítások végét pont és felkiáltójel jelzi: .!

Az Irodalomjegyzék elsősorban az anyag iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánlott művek és nem az eredmények eredeti forrásainak címeit tartalmazza. Az irodalomjegyzékben felsorolt művekre szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk.

Bp. 1971. március

A szerkesztő

TARTALOMJEGYZÉK

Első fejezet

Határérték és folytonosság	7
1. Egyváltozós valós függvények elemi tulajdonságai	7
2. Racionális egész- és törtfüggvények	15
3. Trigonometrikus függvények	21
4. Függvény határértéke	29
5. Határértékszámítás	38
6. Folytonos függvények	42
7. Intervallumban folytonos függvények tulajdonságai	47
8. Implicit alakban adott függvények, Algebrai függvények ..	54
9. Az inverz függvény, Arcus függvények	57
10. Az exponenciális és logaritmus függvény	63

Második fejezet

Differenciálható függvények	71
11. Függvény differenciálhatósága	71
12. Differenciálszámítás	77
13. Függvények differenciálása	82
14. A deriváltfüggvény, Magasabbrendű deriváltak	89
15. Középértéktételek	93
16. A Bernoulli-L' Hospital-szabály	100
17. Függvényvizsgálat	106
18. Görbék érintkezése	120
19. Hiperbolikus és area függvények	125
20. Paraméteresen és polárkoordinátákban adott görbék	134
21. Egyenletek gyökeinek közelítő meghatározása	144

Harmadik fejezet

Integrálszámítás	155
22. Függvény integrálhatósága	155
23. A határozott integrál	173
24. Síktartomány területe	183
25. Riemann szerint integrálható függvényosztályok	192
26. Az integrálszámítás középérték tételei	196

27. Függvény primitív függvénye	201
28. Newton-Leibniz formula	204
29. Integrálok kiszámítása	208
30. Improprius integrálok	221
31. Geometria és mechanikai alkalmazások	229
32. Numerikus integrálás	243
IRODALOMJEGYZÉK	251
TÁRGYMUTATÓ	252

HATÁRÉRTÉK ÉS FOLYTONOSSÁG

1. Egyváltozós valós függvények elemi tulajdonságai

Az f függvényt (I. I. Kötet, 2. pont) egyváltozós valós függvénynek nevezzük, ha D_f értelmezési tartománya a valós számok R halmazának (I. I. Kötet, Harmadik fejezet) részhalmaza, értékhalmaza pedig R , vagyis ha

$$f : D_f \rightarrow R, \text{ ahol } D_f \subset R. \quad (1.1)$$

Nagy számban lehetne sorolni azokat a műszaki, fizikai stb. jelenségeket, melyek leírása egyváltozós valós függvénnyel történhet. Ilyenek például a következők. Valamely test hőmérséklete, mint az idő függvénye. Adott tömegű állandó hőmérsékleten tartott gáz nyomása, mint térfogatának függvénye. Egy mozgó test által megtett út, mint az idő függvénye. Adott keresztmetszetű homogén fajsúlyú acélból készült csődarab súlya, mint hosszának függvénye, és így tovább. Az egyváltozós valós függvények jelentősége azonban nem csak abban van, hogy közvetlenül alkalmazhatók fontos műszaki jelenségek leírására, hanem abban is, hogy a velük kapcsolatban bevezetésre kerülő fogalmak, tulajdonságok nagy része különösebb nehézség nélkül átvihető, általánosítható általánosabb függvényekre, olyan függvényekre, melyek értelmezési tartománya, ill. értékhalmaza az R halmaznál bonyolultabb, általánosabb halmaz.

Ebben a kötetben szinte kizárólag egyváltozós valós függvények fordulnak elő, ezért ezeket a továbbiakban röviden függvényeknek fogjuk nevezni. A függvényt a hagyományos szokásoknak megfelelően, legtöbbször azzal a "formulával" adjuk meg, melynek segítségével az értelmezési tartomány minden eleméhez meg tudjuk határozni annak képét az értékkészletben. Ezek szerint, elsősorban konkrétan megadott függvények esetében, beszélni fogunk az $f(x)$ (formulával megadott) függvényről anélkül, hogy külön explicit megadnánk értelmezési tartományát (az értékhalmoz mindig R). Az értelmezési tartomány ebben az esetben mindig azon számok halmaza, melyekhez az $f(x)$ formula egyértelműen hozzárendel egy valós számot, ha az előbbi számot az $f(x)$ formulában szereplő x "független változó" helyébe helyettesítjük.

1.1 Példa. Az $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ függvény értelmezési tartománya

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Vagyis ez a kifejezés, hogy " $\frac{1}{1-x^2}$ függvény" a követ-

kező helyett áll:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ ahol } f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Természetesen előfordulhat, hogy a függvényt értelmezési tartományának különböző részhalmazain különböző formulák "értelmezik".

1.2 Példa. Az

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \in [0, +\infty, \\ \sqrt{-x}, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

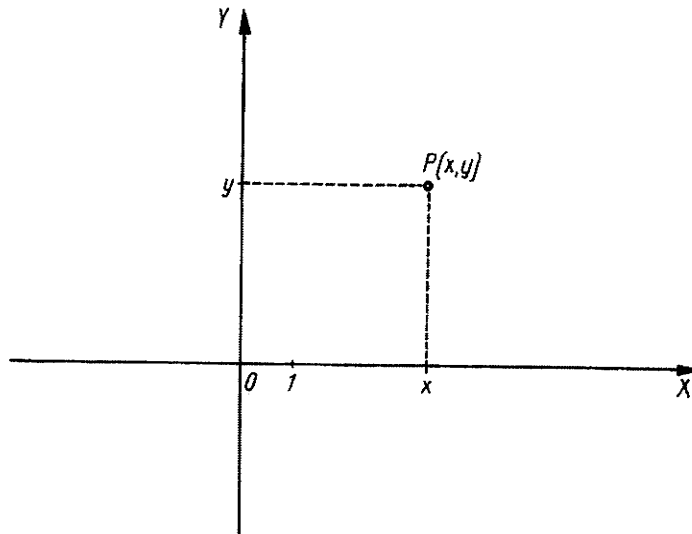
függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, de a számegyenes "negatív felén" más formula értelmezi, mint a "pozitív felén". Megjegyezzük, hogy minden $x > 0$ számra $\sqrt{x}$ -en x pozitív négyzetgyökét értjük, az x szám negatív négyzetgyökét $-\sqrt{x}$ -szel jelöljük.

A függvények tanulmányozását megkönnyíti grafikonjuk (1. I. kötet 3.2 Definíció) geometriai ábrázolása. Az $\mathbb{R}$ halmaznak önmagával vett direkt szorzata

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

az (x, y) rendezett valós számpárok halmaza. Ezt a halmazt leggyezerűbben az elemi geometriából ismert síkon szemléltethetjük, ha ezen egy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert vezetünk be. Kiválasztunk két egymással merőleges egyenest, ezeket az egyeneseket a számegyenes egy-egy példányának tekintjük, mindkét egyenesen az egyenesek metszéspontját feleltetjük meg a 0 valós számnak és egyenlő hosszegységet választunk. A két egyenes metszéspontját a koordináta-rendszer origójának, az egyik egyenest x-tengelynek, a másikat y-tengelynek nevezzük. Az (x, y) rendezett számpárnak a sík azon P pontját feleltetjük meg, melynek az x-tengelyre vetett vetülete az x valós számnak, az y-tengelyre vetett vetülete pedig az y valós számnak megfelelő pont. x -et és y -t a P pont koordinátáinak, mégpedig x -et P abszcisszájának, y -t pedig P ordinátájának nevezzük. A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer bevezetésével egy-egyértelmű megfeleltetést létesítettünk az $\mathbb{R}^2$ halmaz és a sík között.

A sík $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontjának távolsága



1.1 ábra

$$\overline{P_1 P_2} = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

Ha az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) rendezett párok távolságát (1.2)-vel definiáljuk, az R^2 halmaz "kétdimenziós metrikus térré" válik (lásd V. kötet, 1. pont). Az (1.1) függvény grafikonja,

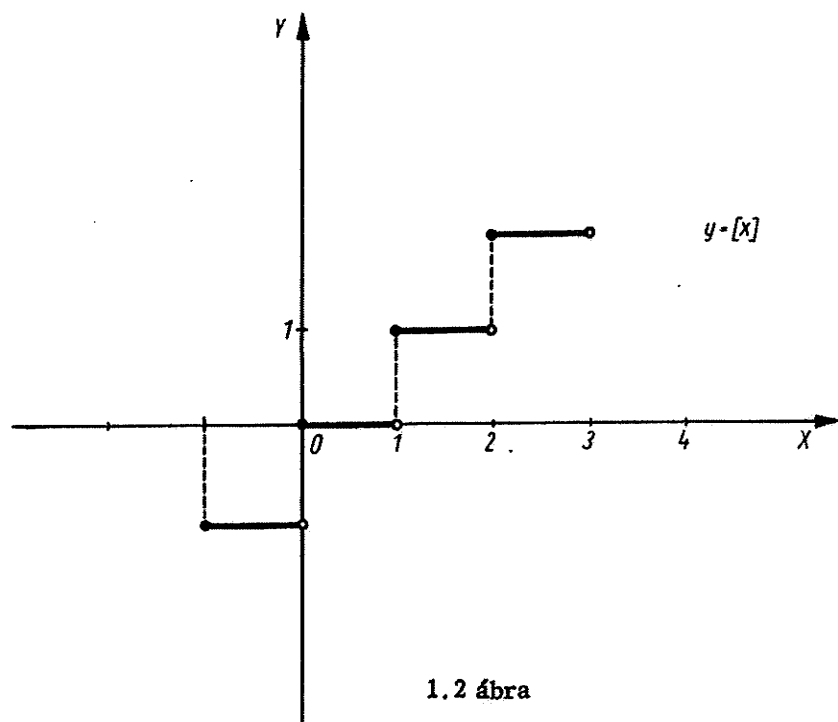
$$G = \{ (x, f(x)) : x \in D_f \} \subset R^2 \quad (1.3)$$

sik egy görbéjének felel meg. E görbe azon pontok "mértani helye", melynek abszcisszája $x \in D_f$ és ordinátája $y = f(x)$. Ennek a görbének az egyenlete tehát

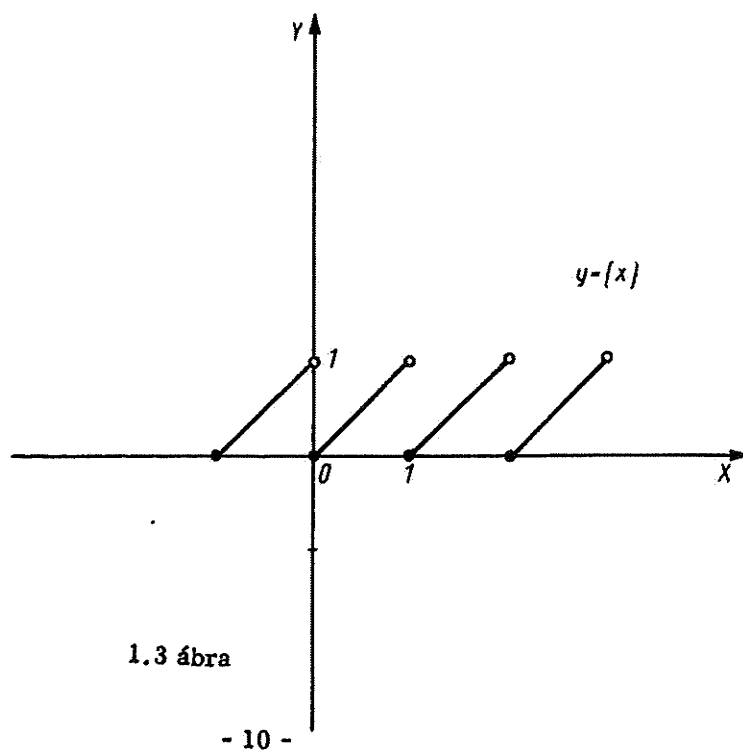
$$y = f(x), \quad x \in D_f. \quad (1.4)$$

A szokásoknak megfelelően a sik (1.4) egyenletű görbéjét is az (1.1) függvény grafikonjának fogjuk nevezni.

1.3 Példa. $f(x) = 2x$, $f : R \rightarrow R$, $D_f = R$ és az értékkészlet is R .



1.2 ábra



1.3 ábra

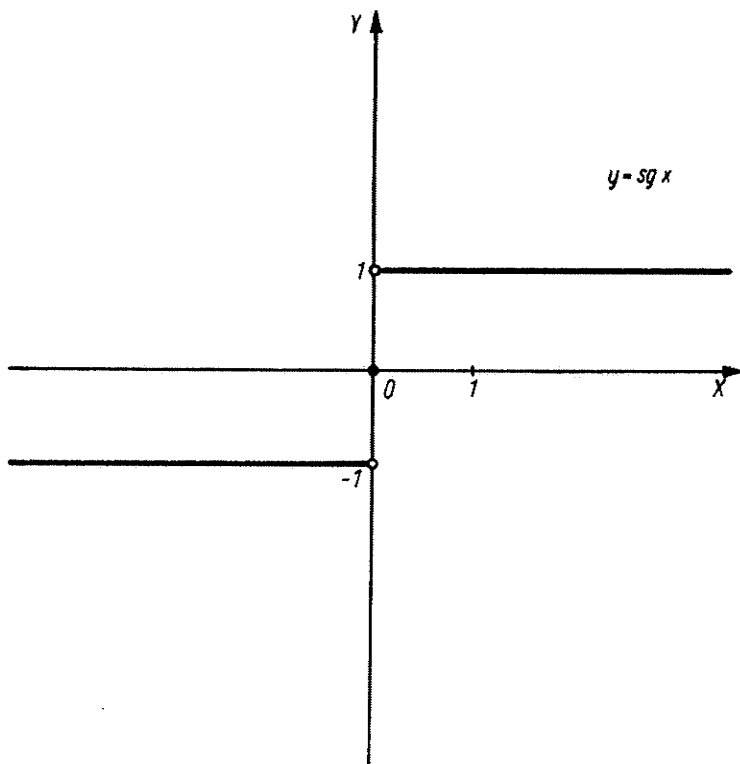
1.4 Példa. $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $D_f = \mathbb{R}$ és az értékkészlet
 $Y = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

1.5 Példa. $f(x) = [x]$, (olv. x egész része (entier x)), ahol $[x] = k$, ha
 $k \leq x < k+1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ vagyis $[x]$ az x -nél nem nagyobb legna-
gyobb egész számot jelenti. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R}$, az értékkészlet
 $Y = \{+k : k \in \mathbb{Z}\}$.

1.6 Példa. $f(x) = \{x\}$ (olv.: x törtrésze), ahol $\{x\} = x - [x]$. $D_f = \mathbb{R}$,
az értékkészlet

$$Y = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y < 1\}.$$

1.7 Példa. $f(x) = \operatorname{sg} x$, olyan függvény, melynél a hozzárendelési mód D_f
különböző részhalmazain különböző formulákkal adott:



1.4 ábra

$$\operatorname{sg} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$, az értékkészlet $Y = \{-1, 0, 1\}$.

1.8 Példa. Dirichlet-függvény.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$, az értékkészlet $Y = \{0, 1\}$.

1.1 Definíció. Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ és $D = D_f \cap D_g$; a $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ha $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, minden $x \in D$ -re, az f és g függvények összegének nevezzük és $\varphi = f + g$ -vel jelöljük.

1.2 Definíció. Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ és $D = D_f \cap D_g$; a $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ha $\psi(x) = f(x) \cdot g(x)$, minden $x \in D$ -re, az f és g függvények szorzatának nevezzük és $\psi = f \cdot g$ -vel jelöljük.

1.3 Definíció. Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \{x \in D_g : g(x) \neq 0\}$, és $D = A \cap D_f$; a $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ha $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, minden $x \in D$ -re, az f és g függvények hányadosának nevezzük és $h = \frac{f}{g}$ -vel jelöljük.

1.4 Definíció. Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; az f függvényt monoton növekedőnek (nem csökkenőnek) nevezzük, ha minden $x_1 \in D$ és $x_2 \in D$ -re $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Az f függvényt monoton csökkenőnek (nem növekvőnek) nevezzük, ha minden $x_1 \in D$ és $x_2 \in D$ -re

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Ha az előbbi implikációkban a függvényértékek egyenlőségét nem engedjük meg, akkor a függvény szigorúan monoton növekedő, ill. szigorúan monoton csökkenő.

Beszélhetünk monotonitásról az értelmezési tartomány részhalmazán is. Ebben az esetben a fenti definíció a függvénynek a szóban forgó részhalmazra való leszűkítésére (l. I. Kötet 2.4 Definíció) vonatkozik. Pl. az $f(x) = \operatorname{sg} x$ monoton növekedő függvény; az $f(x) = x^2$ függvény leszűkítése a $(0, +\infty)$ intervallumra szigorúan monoton növekvő függvény.

1.5 Definíció. Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; az f függvényt korláatosnak nevezzük, ha értékkészlete korlátos számhalmaz, vagyis ha van olyan $M \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq M$, minden $x \in D$ -re.

Korlátos függvény grafikonja az (x, y) sík $-M < y < M$ egyenlőtlenségekkel jellemzett sávjában fekszik. Pl. az $f(x) = \operatorname{sg} x$ és a Dirichlet függvény korlátosak.

1.6 Definíció. Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; az f függvényt párosnak nevezzük, ha $x \in D \Rightarrow -x \in D$ és $f(-x) = f(x)$, minden $x \in D$ -re. Az f függvényt páratlannak nevezzük, ha $x \in D \Rightarrow -x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$, minden $x \in D$ -re.

Páros függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, páratlan függvény grafikonja szimmetrikus az origóra. Pl. az $f(x) = x^2$ és az $f(x) = |x|$ páros függvények; az $f(x) = \operatorname{sg} x$ és az $f(x) = 2x$ páratlan függvények.

Könnnyen beláthatók az alábbi állítások:

- | | |
|---|-------|
| Két páros függvény összege páros. | (1.5) |
| Két páratlan függvény összege páratlan. | (1.6) |
| Két páros függvény szorzata páros. | (1.7) |
| Egy páros és egy páratlan függvény szorzata páratlan. | (1.8) |
| Két páratlan függvény szorzata páros. | (1.9) |

Pl. igazoljuk (1.9)-et. A feltevés szerint $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ páratlanok; legyen $D = D_f \cap D_g$, ha $x \in D$, akkor $x \in D_f$ és $x \in D_g$, de innen $-x \in D_f$ és $-x \in D_g$, vagyis $-x \in D$ következik, továbbá $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, minden $x \in D$ -re.!

1.7 Definíció. Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; az f függvényt periodikusnak nevezzük, ha van $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, hogy minden $x \in D$ -re $x - \ell \in D$, $x + \ell \in D$ és $f(x + \ell) = f(x)$. Az ℓ számot f (egyik) periódusának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha ℓ periódus, akkor ℓ -nek minden egész számú többszöröse (pl. $-\ell$) is periódus, továbbá, ha ℓ_1 és ℓ_2 két periódus, akkor ezek összege és különbsége is az.

1.1 Tétel. Ha f periódikus függvény, akkor vagy van f -nek tetszőlegesen kicsiny pozitív periódusa, vagy pedig f pozitív periódusai között van egy legkisebb periódus τ ; az utóbbi esetben f minden periódusa τ egész számú többszöröse.

Bizonyítás. f pozitív periódusainak halmaza minden esetre alulról korlátos. Ha f -nek nincs tetszőlegesen kis számnál kisebb pozitív periódusa, akkor f pozitív periódusainak infimuma (I. I. Kötet, 10.3 Definíció) $\tau > 0$. Megmutatjuk, hogy τ periódus. Tételezzük fel, hogy τ nem periódus, akkor van ℓ_1 és ℓ_2 periódus, melyekre

$$\tau < \ell_1 < \ell_2 < 2\tau.$$

Ekkor azonban $0 < \ell_2 - \ell_1 < \tau$, vagyis lenne τ -nál kisebb pozitív periódus t.i. $\ell_2 - \ell_1$, ami ellentmondás. Legyen ℓ egy tetszőleges periódus és

$n = \left[\frac{\ell}{\tau} \right]$, (I. 1.5 Példa), akkor $n \leq \frac{\ell}{\tau} < n+1$, vagyis $n\tau \leq \ell < (n+1)\tau$, ahonnan $0 \leq \ell - n\tau < \tau$ következik. $\ell - n\tau$ azonban maga is periódus, mivel két periódus különbsége. Mivel τ -nál kisebb pozitív periódus nincs, $\ell - n\tau = 0$, vagyis $\ell = n\tau$, ahol n egész szám.

Az f periódikus függvény legkisebb pozitív periódusát (ha ez létezik) nevezzük általában f periódusának.

Periodikus függvény grafikonja ℓ hosszúságú intervallumonként ismétlődik.

Pl. az $f(x) = \{x\}$ függvény (I. 1.6 Példa) periódikus, $\ell = 1$. A Dirichlet függvény (I. 1.8 Példa) periódikus, periódus minden ℓ racionális szám.

1.8 Definíció. Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; azt mondjuk, hogy az f függvénynek $x_0 \in D$ -ben lokális maximuma (lokális minimuma) van, ha van olyan K_{x_0} környezet, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$), minden $x \in K_{x_0} \cap D$ -re.

Pl. az $f(x) = x^2$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen lokális minimuma van; az $f(x) = \{x\}$ függvénynek minden egész helyen lokális minimuma van.

1.9 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban abszolút maximuma (abszolút minimuma) van, ha minden $x \in D$ -re $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Pl. Az $f(x) = x^2$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen abszolút minimuma van.

2. Racionális egész - és törtfüggvények

Az f függvényt racionális egész függvénynek, vagy polinomnak nevezzük, ha az $f(x)$ formula az x független változónak racionális egész kifejezése, azaz $f(x)$ kiszámítható úgy, hogy x -en csak összeadást, kivonást, szorzást kell végezni.

A polinom azonos átalakítások után mindig felírható ún. kanonikus alakban:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

ahol $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Az $n \in \mathbb{N}$ számot a polinom fokszámának nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor $p(x)$ pontosan n -edfoku polinom, ha a_n -ról ezt nem tudjuk, akkor $p(x)$ legfeljebb n -edfoku polinom. Ha a $p(x)$ polinom minden együtthatója 0, akkor zéruspolinomnak nevezzük.

Polinom értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Polinomokra érvényes az ismert osztási algoritmus:

2.1 Tétel. Legyen $p_n(x)$, ill. $p_m(x)$ pontosan n -edfoku, ill. pontosan m -edfoku polinom és $n \geq m$; található egy és csakis egy olyan $q(x)$, $r(x)$ polinompár, melyre $p_n(x) = q(x) \cdot p_m(x) + r(x)$, ahol $q(x)$ pontosan $(n-m)$ -edfoku és $r(x)$ legfeljebb $(m-1)$ -ed foku polinom. A $q(x)$ polinomot hányadosnak, az $r(x)$ polinomot maradéknak nevezzük.

Speciális esetben, ha $m = 1$ és $p_1(x) = x - x_0$ elsőfoku polinom, akkor r 0-adfoku polinom q $(n-1)$ -edfoku polinom és

$$p_n(x) \equiv q_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + r.$$

2.2 Következmény. Ha a $p_n(x)$ polinomot az $(x - x_0)$ "binommal" osztjuk, akkor a maradék egyenlő a $p_n(x)$ polinomnak az $x = x_0$ helyen vett helyettesítési értékével: $p_n(x_0) = r$.

2.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy x_0 a $p(x)$ polinom gyöke (zérushelye), ha $p(x_0) = 0$.

Ha x_0 gyöke a $p(x)$ polinomnak, akkor az $(x - x_0)$ első foku polinomot a $p(x)$ polinom x_0 -hoz tartozó gyöktényezőjének nevezzük.

2.3 Tétel. (Bézout tétele) Az n -edfoku $p_n(x)$ polinomnak x_0 akkor és csak akkor gyöke, ha $p_n(x)$ felírható a következőképpen:

$$p_n(x) \equiv (x-x_0)q_{n-1}(x), \quad (2.1)$$

ahol $q_{n-1}(x)$ $(n-1)$ -edfoku polinom.

Bizonyítás. A feltétel elégséges: ha $p_n(x) \equiv (x-x_0)q_{n-1}(x)$, akkor x_0 -at behelyettesítve $p(x_0) = 0$ adódik. A feltétel szükséges: tegyük fel, hogy $p_n(x_0) = 0$. A 2.1 Tétel alapján $p_n(x) \equiv q_{n-1}(x) \cdot (x-x_0) + r$, ahol r legfeljebb 0-afoku polinom és $p_n(x_0) = r = 0$, de akkor $p_n(x) \equiv (x-x_0) \cdot q(x)$.

Legyen x_0 a $p_n(x)$ n -edfoku polinomnak gyöke, akkor a Bézout-tétel alapján (2.1) fennáll. Legyen x_1 a $q_{n-1}(x)$ $(n-1)$ -edfoku polinomnak gyöke, akkor a tételt $q_{n-1}(x)$ -re alkalmazva:
 $p_n(x) \equiv (x-x_0)(x-x_1)q_{n-2}(x)$, ahol $q_{n-2}(x)$ $(n-2)$ -edfoku polinom. Az eljárást tovább folytatva végül azt kapjuk, hogy

$$p_n(x) \equiv (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_k) \cdot q(x), \quad (2.2)$$

ahol $q(x)$ $(n-(k+1))$ -edfoku polinom már nem bontható gyöktényezőkre.

2.4 Következmény. Pontosan n -edfoku polinomnak $(n = 1, 2, \dots)$ legfeljebb n valós gyöke van.

Ha a $p_n(x)$ polinom (2.2) gyöktényezőzés felbontásában ugyanaz a tényező többször is szerepel, úgy többszörös gyökről beszélünk. Ebben az esetben $p_n(x)$ gyöktényezőzés felbontása így írható:

$$p_n(x) \equiv (x-x_1)^{\alpha_1} \cdot (x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_\ell)^{\alpha_\ell} \cdot q(x), \quad (2.3)$$

ahol $x_1, x_2, \dots, x_\ell$ mind különbözőek,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell \leq n \text{ és } q(x)$$

$(n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell))$ fokszámu polinom, melynek már nincs (valós) gyöke.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a $p_n(x)$ polinomnak x_1 α_1 -szeres, x_2 α_2 -szeres, ..., x_ℓ α_ℓ -szeres gyöke. Az $\alpha_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$) számot az x_i gyök multiplicitásának (többszörösségének) nevezzük.

2.5 Tétel. Ha két legfeljebb n -edfoku polinom $p(x)$ és $q(x)$ $(n+1)$ különböző x értékre megegyezik, akkor a két polinom azonos: $p(x) \equiv q(x)$.

Bizonyítás. Mivel $p(x) - q(x)$ legfeljebb n -edfoku polinom és a feltevés szerint $n+1$ különböző gyöke van a 2.4 Következmény alapján, fokszáma legfeljebb 0 lehet. $p(x) - q(x)$ tehát azonosan állandó, miután azonban e különbség $n+1$ számú helyen zérus $p(x) \equiv q(x)$!

2.6 Tétel. Két legfeljebb n -edfoku polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$

$\dots + a_1 x + a_0$ és $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ akkor és csak akkor azonosan egyenlő, ha megfelelő együtthatók megegyeznek, azaz $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

Bizonyítás. A feltétel elégséges: ha $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ -re a $p(x)$ és $q(x)$ polinomok értékei is megegyeznek, mivel a két kifejezés teljesen azonos egymással.

A feltétel szükséges. Tegyük fel, hogy $p(x) = q(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re. Képezzük a két polinom különbségét: $r(x) = p(x) - q(x) =$

$$= (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0 \text{ minden}$$

$x \in \mathbb{R}$ -re. Vagyis $r(x)$ olyan polinom, melynek minden $x \in \mathbb{R}$ gyöke. A 2.4 Következmény szerint ez csak a zéruspolinom lehet, azaz $r(x)$ minden együtthatója 0, vagyis a $p(x)$ és $q(x)$ polinomok megfelelő együtthatói megegyeznek!

A gyakorlatban sokszor fordul elő, hogy egész együtthatós polinomnak racionális gyökeket keressük, (amennyiben van ilyen gyök). Erre vonatkozik a

2.7 Tétel. Az egész együtthatós $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

$a_n \neq 0$, $n \geq 1$ polinomnak csak olyan $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$ és u, v relatív prímek) racionális szám lehet gyöke, melyre teljesül az, hogy u az a_0 -nak, v pedig az a_n -nek osztója.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\frac{u}{v}$ gyöke $p(x)$ -nek:

$$a_n \left(\frac{u}{v}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{u}{v}\right) + a_0 = 0,$$

v^n -rel szorozva:

$$a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} \cdot v + \dots + a_1 u \cdot v^{n-1} + a_0 v^n = 0$$

innen

$$a_n u^n = -v \left[a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u v^{n-2} + a_0 v^{n-1} \right], \quad (2.4)$$

illetve

$$a_0 v^n = -u \left[a_n u^{n-1} + a_{n-1} u^{n-2} \cdot v + \dots + a_1 v^{n-1} \right] \quad (2.5)$$

Mivel az együtthatók, valamint u és v egészek, ezért (2.4) és (2.5) mindkét oldalán egész számok állnak, így tehát v osztója $a_n u^n$ -nek és u osztója $a_0 v^n$ -nek. A feltevés szerint u és v relatív primek, ezért az előbbiből következik, hogy a v szám a_n -nek, u pedig a_0 -nak osztója!

2.8 Következmény. Ha egy egész együtthatós polinomnak van egész gyöke, akkor az az állandó tag osztója.

A gyakorlatban sokszor felmerül az a probléma, hogy valamely folyamatot leíró bonyolult függvényt egy olyan könnyebben kezelhető függvénnyel (polinommal) lenne célszerű helyettesíteni, amely jól megközelíti a függvényt. Vagy más esetben táblázattal adott függvénynél felvetődik az a kérdés, hogy ez a függvény helyettesíthető-e egy olyan polinommal, amely az adott helyeken az adott értékeket veszi fel. Olyan feladattal is találkozunk, hogy valamely függvénynek a rendelkezésre álló táblázatait ki akarjuk bővíteni, pl. két ismert hely között szeretnénk valahol meghatározni a függvény értékét. Ilyen és hasonló feladatok megoldására szolgálnak az ún. interpolációs módszerek.

Polinomokkal történő interpolációval kapcsolatban az alapvető kérdés az: van-e bizonyos fokszámú nem magasabb fokú polinom, mely meghatározott számú helyen előírt értékeket vesz fel. Erre a kérdésre (és egyben a feladat egyértelmű megoldhatóságának kérdésére) válaszol a következő

2.9 Tétel. Ha $(n+1)$ számu $(x_0; y_0); (x_1, y_1), \dots, (x_n; y_n)$ $x_i \neq x_k, i \neq k$ pont adott az (x, y) -síkban, akkor van egy és csak egy legfeljebb n -edfoku $L_n(x)$ polinom, melyre igaz, hogy $L_n(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Az $L_n(x)$ polinomot Lagrange-féle interpolációs polinomnak nevezzük.

Bizonyítás. Létezik ilyen polinom. Megkonstruáljuk az $L_n(x)$ polinomot. Legyen

$$p_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n$.

A $p_k(x)$ polinom n -ed foku és az x_k helyen 1, az x_i $i = 0, 1, \dots, n, i \neq k$ helyeken 0 értéket vesz fel.

A keresett polinom:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot p_k(x) .$$

Ez a polinom legfeljebb n -edfoku és $L_n(x_k) = y_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$. Csak egy ilyen polinom van. Tegyük fel, hogy az $L_n(x)$ polinomon kívül létezik egy másik polinom, amely a feltételeknek eleget tesz, de ekkor a 2.5 Tétel alapján ez utóbbi azonosan megegyezik $L_n(x)$ -szel.!

Két racionális egész függvény hányadosát racionális törtfüggvénynek nevezzük. A racionális törtfüggvény azonos átalakításokkal mindig felírható két kanonikus alakban adott polinom hányadosaként:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Értelmezési tartománya mindazon $x \in \mathbb{R}$ -ek halmaza, melyekre a nevező nem zérus.

2.1 Példa. $f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, páratlan, a $(-\infty, 0)$, ill. a $(0, +\infty)$ intervallumon monoton csökkenő, nem korlátos, grafikonja egyenlőszáru hiperbola.

Az ismert osztási algoritmus segítségével minden racionális törtfüggvény felírható egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegeként, amelyben a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál (1. 2.1 Tétel).

2.6 Tétel. Legyen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ adott racionális törtfüggvény, ahol $P(x)$ n -edfoku, $Q(x)$ m -edfoku polinom, $n < m$ és $Q(x)$ gyöktényezős alakja:

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \cdot (x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_\ell)^{\alpha_\ell} (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots \\ \dots (x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_k = m, \text{ ahol az}$$

$(x^2 + p_i x + q_i)^{\beta_i}$ $i = 1, 2, \dots, k$ tényezőknek nincs valós gyöke (1. III. kötet, 7. pont). Léteznek olyan A_{ij} , $i = 1, 2, \dots, \ell$, rögzített i mellett $j = 1, 2, \dots, \alpha_i$, B_{ij} és C_{ij} , $i = 1, 2, \dots, k$, rögzített i mellett $j = 1, 2, \dots, \beta_i$ állandók, hogy fennáll a következő azonosság:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_{1, \alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{1, 2}}{(x-x_1)^2} + \frac{A_{1, 1}}{x-x_1} + \dots \\ \dots \\ + \frac{A_{\ell, \alpha_\ell}}{(x-x_\ell)^{\alpha_\ell}} + \dots + \frac{A_{\ell, 2}}{(x-x_\ell)^2} + \frac{A_{\ell, 1}}{x-x_\ell} + \\ + \frac{B_{1, \beta_1} x + C_{1, \beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_{1, 2} x + C_{1, 2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \frac{B_{1, 1} x + C_{1, 1}}{x^2+p_1x+q_1} + \\ \dots \\ + \frac{B_{k, \beta_k} x + C_{k, \beta_k}}{(x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k}} + \dots + \frac{B_{k, 2} x + C_{k, 2}}{(x^2+p_kx+q_k)^2} + \frac{B_{k, 1} x + C_{k, 1}}{x^2+p_kx+q_k}.$$

A felbontásban szereplő $\frac{A}{(x-x_k)^\alpha}$ és $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta}$ alakú törteket részlet-

törteknek (parciális törteknek nevezzük). A tétel tehát azt mondja ki, hogy minden racionális törtfüggvény részlettörtek összegére bontható. A tételt nem bizonyítjuk (l. [4] 450-453. o.)

3. Trigonometrikus függvények.

A trigonometrikus függvényeket geometriai úton fogjuk értelmezni.

Ismeretes, hogy két közös pontból kiinduló félegyenest szöget alkot. A két félegyenest a szög szárainak nevezzük. A szög mérésére fokmértéket, vagy ivmértéket alkalmazhatunk. A továbbiakban a szögnek az ivmértékben (radiánban) mért mérőszámát fogjuk használni.

Jelöljünk ki egy 0 kezdőpontú félegyenest, ezt nevezzük nyugvó szárnak és vizsgáljuk azokat a kezdőpont körüli forgásokat, amelyek ezt a félegyenest egy másik helyzetbe, az un. mozgó szárba viszik át. Végtelen sok ilyen forgás van. Minden forgáshoz egy valós szám rendelhető, t.i. a szög mértéke (t). Ily módon forgásszöget értelmeztünk. A forgásszög pozitív, vagy negatív aszerint, hogy az elforgatás pozitív, vagy negatív irányban történt. Két forgásszög akkor egyenlő, ha előjeles mértékeik megegyeznek. Ha két forgásszög mértéke 2π egész számú többszörösében különbözik, akkor (nyugvó és) mozgó szárunk azonos.

Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben az origó középpontú egységsugarú kört. A forgásszög csúcsa legyen az origóban és a nyugvószár essék egybe a pozitív x tengellyel. A mozgó szár az egységsugarú kört a $P(x; y)$ pontban metszi. A P pont koordinátái a forgásszög függvényei.

3.1 Definíció. A P pont első (x) koordinátáját a t forgásszög cosinusának, második (y) koordinátáját a t forgásszög sinusának nevezzük:

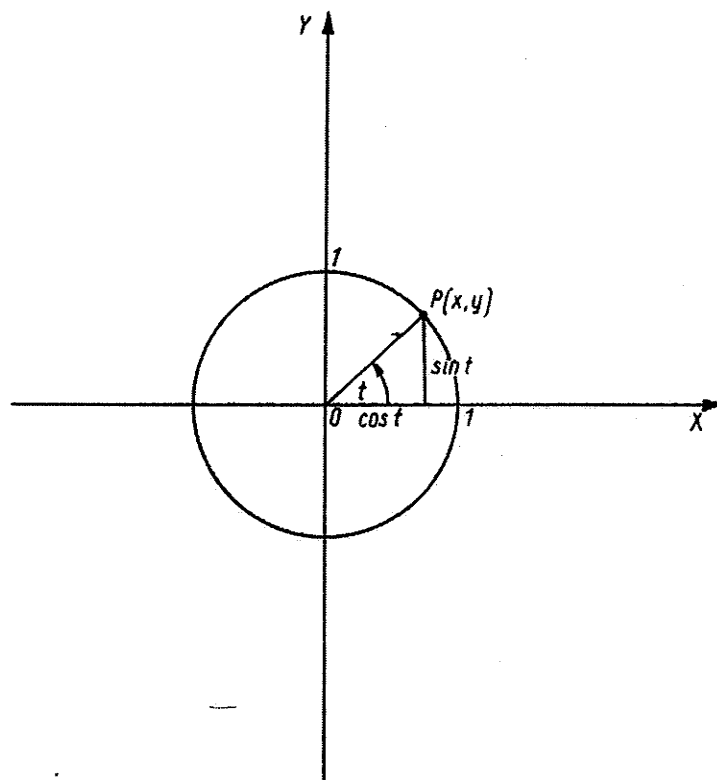
$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Az ily módon értelmezett sinus és cosinus függvény a valós számok halmazát leképezi a valós számok halmazába: $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mindkét függvény értékkészlete: $[-1; 1]$.

A leggyakrabban előforduló trigonometrikus függvények elemi tulajdonságai és grafikonja:

A $\sin x$ függvény értelmezési tartománya $D = (-\infty; +\infty)$, a függvény korlátos, 2π szerint periodikus, páratlan, zérushelyei $x = \pm k\pi$, $k \in \mathbb{T}$.

A $\cos x$ függvény értelmezési tartománya $D = (-\infty; +\infty)$, a függ-



3.1 ábra

vény korlátos, 2π szerint periodikus, páros, zérushelyei
 $x = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{T}$.

A tangens függvény definíció szerint:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in D, \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm (2k+1) \frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{T} \right\},$$

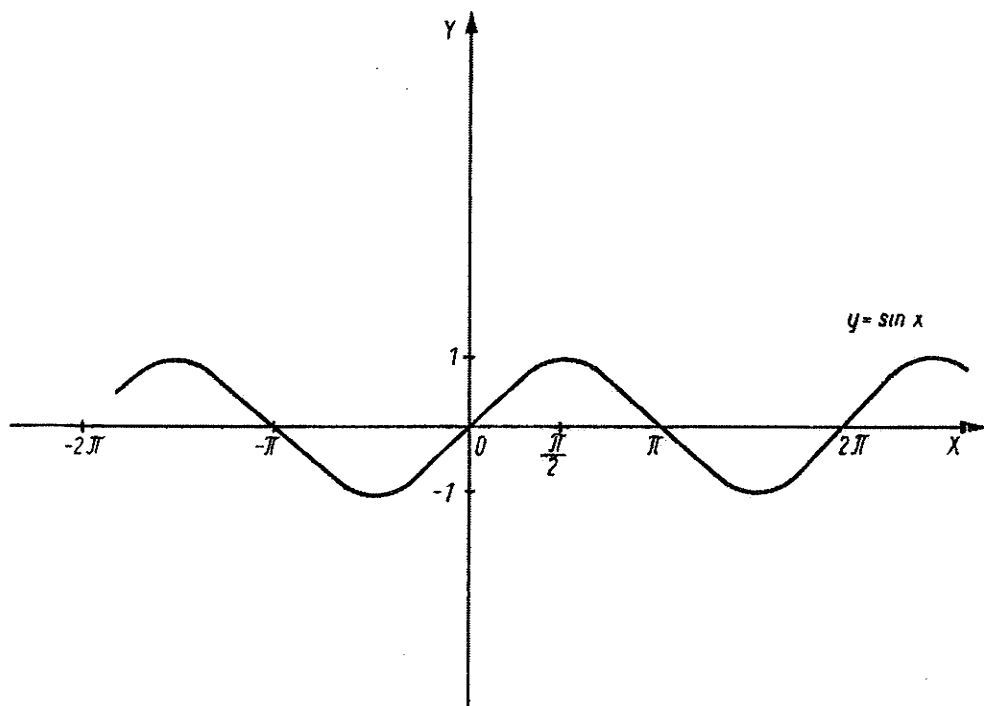
π szerint periodikus, páratlan függvény.

A cotangens függvény definíció szerint

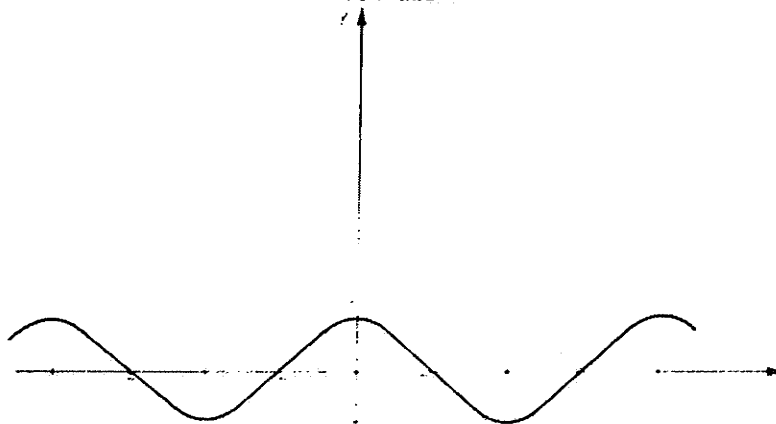
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in D, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{ \pm k\pi ; k \in \mathbb{T} \},$$

π szerint periodikus páratlan függvény.

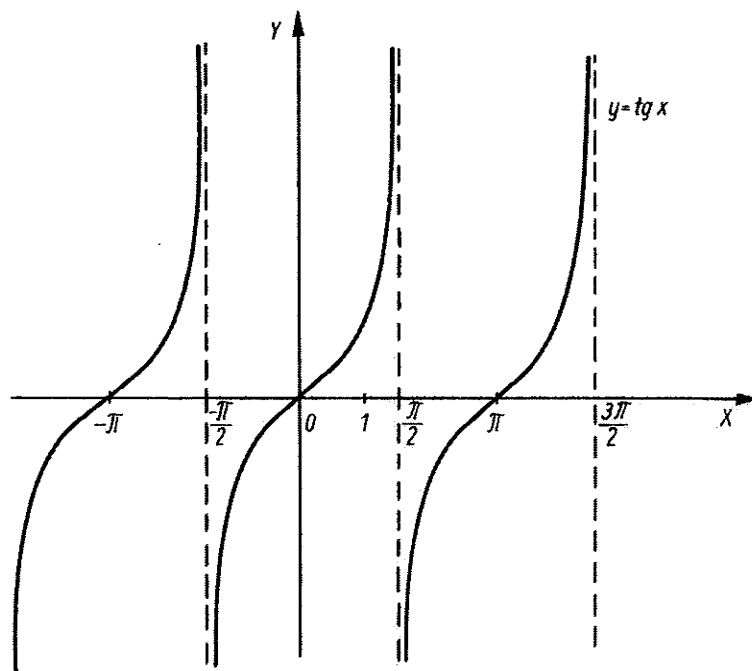
Érvényesek a következő, leggyakrabban előforduló trigonometrikus azonosságok:



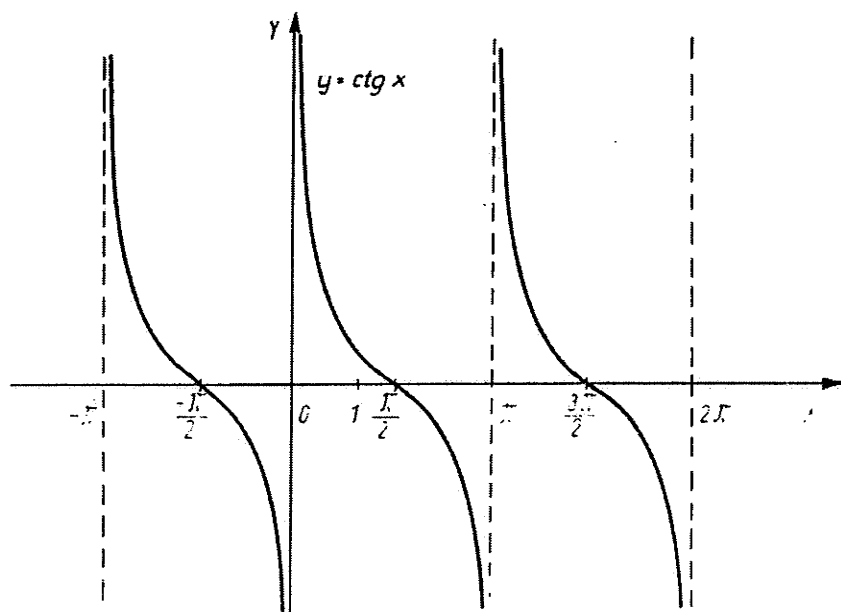
3.2 ábra



3.3 ábra



3.4 ábra



3.5 ábra

$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1, \text{ (az értelmzésből adódik),} \quad (3.1)$$

$$\sin(x \pm y) \equiv \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (3.2)$$

$$\cos(x \pm y) \equiv \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (3.3)$$

$$\sin 2x \equiv 2 \sin x \cdot \cos x \quad (3.4)$$

$$\cos 2x \equiv \cos^2 x - \sin^2 x \quad (3.5)$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) \equiv \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad (3.6)$$

$$\sin^2 x \equiv \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (3.7)$$

$$\cos^2 x \equiv \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (3.8)$$

$$\sin x \cdot \cos y \equiv \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \quad (3.9)$$

$$\cos x \cdot \cos y \equiv \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \quad (3.10)$$

$$\sin x \cdot \sin y \equiv \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \quad (3.11)$$

$$\sin x + \sin y \equiv 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \quad (3.12)$$

$$\cos x + \cos y \equiv 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \quad (3.13)$$

$$\cos x - \cos y \equiv -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \quad (3.14)$$

$$\sin x - \sin y \equiv 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \quad (3.15)$$

$$\sin x \equiv \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad (3.16)$$

$$\cos x \equiv \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad (3.17)$$

(3.2)-t és (3.3)-at az olvasó előző tanulmányaiból ismeri. (3.12) például a következőképpen igazolható. Legyen

$x = \alpha + \beta$ és $y = \alpha - \beta$, akkor (3.2) -t alkalmazva

$$\sin(\alpha + \beta) \equiv \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

A két azonosság mindkét oldalát összeadva adódik

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta,$$

visszatérve az x, y változókra éppen (3.12)-t kapjuk!
(3.16) igazolása. Felhasználjuk (3.4)-et és (3.5)-öt

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos^2 \frac{x}{2} \text{ -el}$$

való egyszerűsítés után (3.16) adódik.!

A trigonometrikus függvényeknek igen fontos alkalmazása van a technikában. Gépek, mechanikai rendszerek működése általában az időben szabályosan ismétlődő mozgásokkal kapcsolatos (dugattyuk, hajtókarok stb. mozgása). Az ilyen mozgások jellegzetes tulajdonsága, hogy az alkatrészek egyes pontjainak kitérése az időnek periodikus függvénye, e pontok periodikus rezgőmozgást (lengést) végeznek. A rezgőmozgás legegyszerűbb formái azok, amelyek sinus, ill. cosinus függvényekkel leírhatók.

3.2 Definíció. Az $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, ill. $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ függvény által leírható rezgést lineáris harmonikus rezgésnek nevezzük; y a kitérést, $t \in \mathbb{R}$ az időt jelenti. Az $A \geq 0$ állandó (a legnagyobb kitérés) a rezgés amplitudója, az ω állandó a körfrekvencia (a 2π mp alatt végzett rezgések száma) az $(\omega t + \varphi)$ a rezgés fázisa, φ a kezdőfázis ($t = 0$ -hoz tartozó fázisérték). Az 1 mp alatt végzett rezgések száma a frekvencia (rezgésszám): $\gamma = \frac{\omega}{2\pi}$. Egy teljes rezgés ideje $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\gamma}$ a függvény periódusa.

Gyakran előfordul az, hogy egy pont egy egyenes mentén kétféle hatásra egyszerre két harmonikus rezgőmozgást végez. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a két harmonikus rezgés összegeződik.

3.1 Segédétel. Minden $A \sin \alpha + B \cos \alpha$ alakú kifejezés $C \sin(\alpha + \Psi)$ alakra hozható.

Bizonyítás. Ha $A = B = 0$, akkor $C = 0$ választással az állítás nyilvánvaló.

Ha $A^2 + B^2 > 0$, akkor

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \alpha + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \alpha \right) \quad (3.18)$$

mivel $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ és $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ abszolút értékben 1-nél nem nagyobb szá-

mok és négyzetösszegük egyenlő 1-gyel, azért létezik olyan Ψ szög, melynek az egyik szám a cosinusa, a másik a sinusa, s így alakalmazva a (3.2) azonosságot (3.18) így írható:

$$\begin{aligned} \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \Psi \cdot \sin \alpha + \sin \Psi \cos \alpha) &= \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha + \Psi) = C \sin(\alpha + \Psi), \text{ ahol} \end{aligned}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ és } \cos \Psi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \Psi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.2 Tétel. Két egyenlő frekvenciájú harmonikus rezgés, $y_1(t) =$

$= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ és $y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ összege is harmonikus rezgés és az eredő rezgés frekvenciája megegyezik az összetevő rezgések frekvenciájával.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \\ &= A_1 \sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + A_1 \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \\ &+ A_2 \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2 = \end{aligned}$$

$$= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \cos \omega t =$$

$$= A \sin(\omega t + \varphi),$$

a 3.1 Segédétel alapján, s ez valóban y_1 és y_2 közös frekvenciájával azonos frekvenciájú harmonikus rezgés, ahol ha

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = 0, \text{ akkor } A = 0,$$

ha pl. $A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \neq 0$, akkor

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

és

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

A 3.2 Tételből látható, hogy az eredő rezgés függ az összetevő rezgések fáziskülönbségétől. Pl. Ha $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$ és

$A = A_1 + A_2$, a rezgések erősítik egymást.

Ha $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$, akkor $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ és $A = A_1 - A_2$, a rezgések gyengítik egymást.

Ha $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, akkor $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ és $A^2 = A_1^2 + A_2^2$.

3.3 Tétel. Ha ω_1 és ω_2 összemérhető pozitív valós számok, vagyis

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}, \text{ ahol } p \text{ és } q \text{ relativ prim pozitív egész számok, akkor}$$

$$\text{az } y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ és } y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

harmonikus rezgések összege periodikus függvény és az eredő rezgés (összeg) periódusa a két összetevő rezgés periódusának legkisebb közös többszöröse (az a legkisebb pozitív valós szám, mely egész számu többszöröse mindkét periódusnak).

Bizonyítás. y_1 , ill. y_2 periódusa $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, ill. $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$; ezek szerint

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{q}{p}$. Vezessük be a $T = pT_1 = qT_2$ jelölést, T nyilván T_1 és T_2

legkisebb közös többszöröse és

$$\begin{aligned} y(t+T) &= y_1(t+T) + y_2(t+T) = \\ &= y_1(t+pT_1) + y_2(t+qT_2) = y_1(t) + y_2(t) = y(t) \end{aligned}$$

minden t -re. Felhasználtuk az 1.1 Tételt megelőző megjegyzést.!

4. Függvény határértéke

Legyen az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény D értelmezési tartományának az " a " pont torlódási pontja (I. I. kötet, 17. pont), és legyen K_a az " a " pont egy eléggé kicsiny sugaru környezete. Ha az f függvény a $K_a \cap D$, vagy a $(K_a \setminus \{a\}) \cap D$ halmazon bizonyos tulajdonsággal rendelkezik, akkor ezt a tulajdonságot lokális (helyi) tulajdonságnak nevezzük.

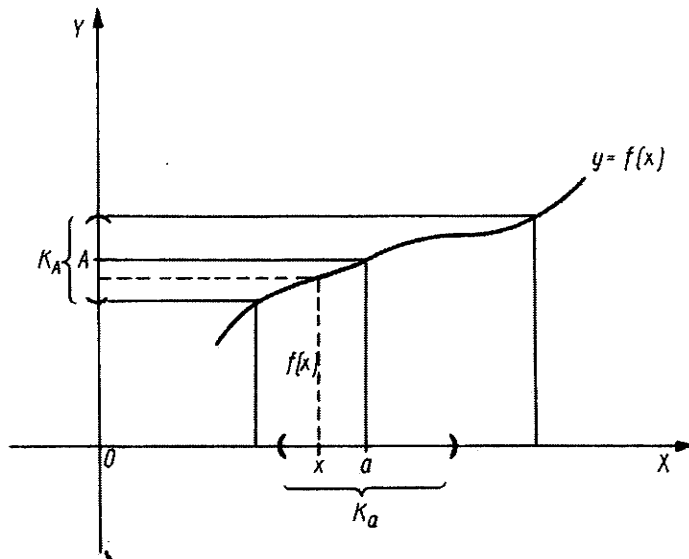
Az f függvény egy lokális tulajdonságával foglalkozunk: hogyan lehet matematikailag megfogalmazni azt a tulajdonságot, hogy egy hely környezetében a függvény értékei csak kicsit változzanak! Azaz, megadható-e olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, melynek bármilyen kis K_A környezetét adjuk is meg, " a "-nak legyen egy olyan K_a környezete, hogy ha $(K_a \setminus \{a\}) \cap D$ -ben felvesztünk egy x értéket, akkor az $f(x)$ érték benne legyen a K_A környezetben. Az analízis egyik legalapvetőbb fogalmát, a határérték fogalmát fogjuk értelmezni.

4.1 Definíció. Legyen az " a " pont az f függvény D értelmezési tartományának torlódási pontja; azt mondjuk, hogy $f(x)$ határértéke $x = a$ helyen (vagy " x tart " a " esetén) A , szimbolikus jelöléssel:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (f(x) \rightarrow A, \text{ ha } x \rightarrow a),$$

ha A minden K_A környezetéhez van " a "-nak olyan K_a környezete, hogy minden $x \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D$ -re $f(x) \in K_A$.

Más megfogalmazásban:



4.1 ábra

4.1' Definíció. Legyen "a" a D halmaz torlódási pontja; azt mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in D$ és $0 < |x - a| < \delta$ -ra $|f(x) - A| < \varepsilon$.

4.1 Példa. $f(x) = x^2$. Azt állítjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, azt kell belátni, hogy van $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre $0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.

$|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| \cdot |x+2| < 6|x-2|$, ha $0 < x < 4$.
A $\delta(\varepsilon) = \min(2, \frac{\varepsilon}{6})$ jelöléssel látható, hogy $0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.

Pl., ha $\varepsilon = \frac{1}{2}$, akkor $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{12}$, $K_{A, \varepsilon} = (3, 5; 4, 5)$ és

$$K_{a, \delta} = (2 - \frac{1}{12}; 2 + \frac{1}{12}).$$

A sorozat határértékének már ismert fogalma segítségével is értelmezhetjük függvény határértékét. Megadjuk ezt a definíciót is és a 4.1 Tételben igazoljuk, hogy a kétféle definíció ekvivalens.

4.2 Definíció. Legyen "a" az f függvény D értelmezési tartományának torlódási pontja; azt mondjuk, hogy $f(x)$ -nek van határértéke $x \rightarrow a$ esetén, ha minden $x_n, n \in T$ végtelen sorozatra, melyre $x_n \neq a, x_n \in D$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, az $f(x_n), n \in T$ sorozat konvergens; az ilyen $f(x_n), n \in T$ sorozatok közös A határértékét nevezzük az f függvény határértékének az $x = a$ helyen.

Megmutatjuk, hogy ha a definíció értelmében f -nek van határértéke, az "a" helyen, akkor minden a definícióban szereplő $f(x_n), n \in T$ sorozatnak a határértéke ugyanaz.

Legyen $x_{1n}, n \in T$ és $x_{2n}, n \in T$ két, a feltételeknek megfelelő sorozat, és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{1n}) = A_1, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{2n}) = A_2$. Képezzük az egyesített sorozatot: $x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{1n}, x_{2n}, \dots$, nyilvánvaló, hogy ennek a sorozatnak is "a" a határértéke. A megfelelő $f(x_{11}), f(x_{21}), f(x_{12}), f(x_{22}), \dots, f(x_{1n}), f(x_{2n}), \dots$ sorozat konvergens; jelöljük határértékét A -val. Akkor, mivel az $f(x_{1n}), n \in T$ és $f(x_{2n}), n \in T$ sorozatok az előbbi konvergens sorozatnak részsorozatai, $A_1 = A_2 = A$. (L. I. Kötet 15.7 Tétel).!

4.1 Tétel. Ha az f függvénynek a 4.1 Definíció értelmében létezik határértéke az $x = a$ helyen, akkor a 4.2 Definíció értelmében is létezik és fordítva; azaz 4.1 és 4.2 ekvivalens definíciók; a kétféle módon értelmezett határérték megegyezik.

Bizonyítás. 4.1 Definíció $\Rightarrow$ 4.2 Definíció: Tudjuk, hogy minden K_A környezethez van K_a környezet, hogy minden $x \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D$ -re $f(x) \in K_A$.

Vegyünk fel egy tetszőleges $x_n, n \in T$ sorozatot, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D, x_n \neq a$. Nyilván $x_n \in K_a$, ha n elég nagy és így $f(x_n) \in K_A$. Tehát az $f(x_n)$ sorozat A -hoz konvergál.

4.2 Definíció $\Rightarrow$ 4.1 Definíció: Tudjuk azt, hogy bármilyen $x_n, n \in T$ sorozatot is veszünk, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D, x_n \neq a$, létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Azt kell belátnunk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (K_{a,\delta} \setminus \{a\}) \cap D$ -re $f(x) \in K_{A,\varepsilon}$. Ezt indirekt uton bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy az állítás ellentetje igaz, azaz van $\varepsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ -ra van olyan $x \in (K_{a,\delta} \setminus \{a\}) \cap D$, hogy $f(x) \notin K_{A,\varepsilon}$. Belátjuk, hogy ha ez igaz, akkor van olyan x_n , $n \in \mathbb{N}$ sorozat, mely a követelményeknek eleget tesz és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$. A feltevés értelmében van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy ha

$$\delta_1 = 1, \text{ van olyan } x_1 \in (K_{a,1} \setminus \{a\}) \cap D, \text{ hogy } f(x_1) \notin K_{A,\varepsilon} ;$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}, \text{ van olyan } x_2 \in (K_{a,\frac{1}{2}} \setminus \{a\}) \cap D, \text{ hogy } f(x_2) \notin K_{A,\varepsilon} ;$$

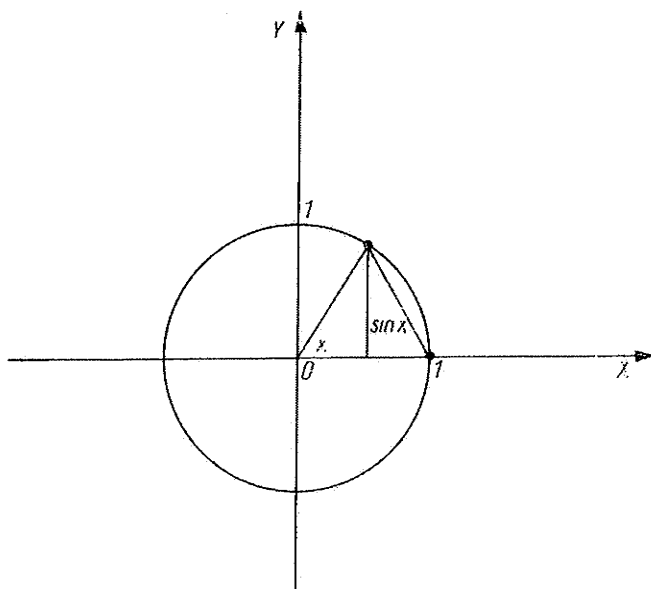
.....

$$\delta_n = \frac{1}{n}, \text{ van olyan } x_n \in (K_{a,\frac{1}{n}} \setminus \{a\}) \cap D, \text{ hogy } f(x_n) \notin K_{A,\varepsilon} ;$$

.....

Igy egy olyan $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ számsorozatot nyertünk, melyre

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$ ellentétben a 4.2 Definíció követelményével.!



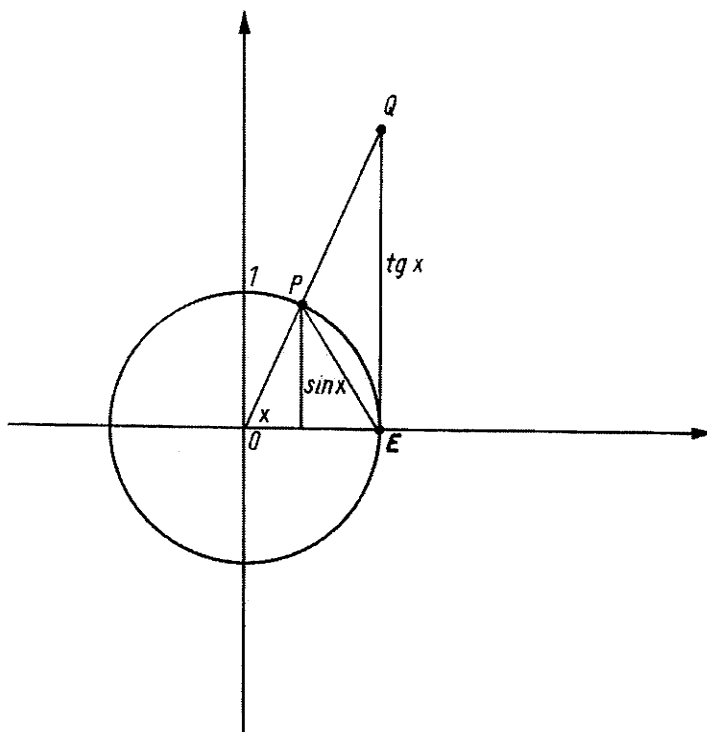
4.2 ábra

4.2 Példa. $f(x) = \sin x$. Állítás: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$\sin x < \text{félhúr} < \text{féltív} = x$, vagyis $\sin x < x$. $\sin x$ páratlanságából következik, hogy

$$|\sin x| < |x|, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.1)$$

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra $|\sin x - 0| < \varepsilon$, ha $|x - 0| < \delta = \varepsilon$.



4.3 ábra

4.3 Példa. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$. Állítás: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Legyen

$0 < x < \frac{\pi}{2}$. $OEP \triangle$ területe $<$ OEP körívk területe $<$ $OEQ \triangle$ területe, azaz

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}, \quad \frac{\sin x}{2} \text{ -vel végigosztva adódik}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

illetve

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x, \text{ és } -1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$$

$$\text{vagyis } 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x;$$

$$\text{de mivel } 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x,$$

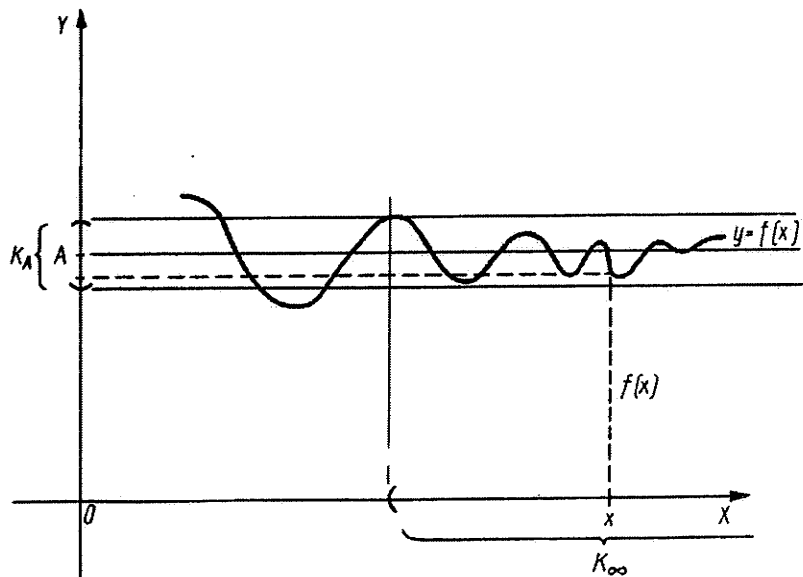
$$\text{azért } 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x < x.$$

Felhasználva azt, hogy $1 - \frac{\sin x}{x}$ páros függvény, tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra adódik,

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x| < \varepsilon, \text{ ha } |x - 0| < \delta = \varepsilon,$$

$$\text{tehát } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A függvény határértékét eddig a végesben értelmeztük. A végtelenben a következőképpen definiáljuk:



4.4 ábra

4.3 Definíció. Tételezzük fel, hogy az f függvény D értelmezési tartománya felülről nem korlátos (" $+\infty$ a D halmaz torlódási pontja"), azt mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (f határértéke $+\infty$ -ben A), ha minden K_A környezethez van olyan K_∞ környezet, hogy minden $x \in K_\infty \cap D$ -re $f(x) \in K_A$.

Más megfogalmazásban:

4.3' Definíció. Legyen az f függvény D értelmezési tartománya felülről nem korlátos; azt mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\varrho > 0$ szám, hogy minden $x > \varrho$, $x \in D$ -re $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Amennyiben az f függvény értelmezési tartománya a természetes számok T halmaza a 4.3, ill. 4.3' Definíció azonos a végtelen sorozat határértékére adott I. kötetbeli 15.1, ill. 15.2 Definícióval.

4.4 Példa. $f(x) = \frac{1}{x}$. Állítás: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$, $\frac{1}{x} < \varepsilon$, ha $\frac{1}{\varepsilon} = \varrho < x$.

A 4.1 Tétel bizonyításának pontos analógiájára bizonyítható be a következő

4.2 Tétel. Legyen az f függvény D értelmezési tartománya felülről nem korlátos; f -nek akkor és csak akkor létezik $+\infty$ -ben határértéke, ha minden x_n , $n \in T$ végtelen sorozatra, melyre $x_n \in D$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, létezik az $f(x_n)$, $n \in T$ végtelen sorozat határértéke; f határértéke megegyezik ezen $f(x_n)$, $n \in T$ sorozatok közös határértékével.

4.4 Definíció. Legyen "a" az f függvény D értelmezési tartományának torlódási pontja; azt mondjuk, hogy $f(x)$ határértéke az "a" helyen $+\infty$, azaz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, ha a ∞ minden K_∞ környezetéhez van "a"-nak olyan környezete, hogy minden $x \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D$ -re $f(x) \in K_\infty$.

4.4' Definíció. Legyen "a" D torlódási pontja; azt mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, ha minden $P > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $0 < |x-a| < \delta$, $x \in D$ -re $f(x) > P$.

4.5 Példa. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, u.i. minden $P > 0$ -ra $\frac{1}{x^2} > P$,

ha $x^2 < \frac{1}{P}$, $x \neq 0$, vagyis $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{P}} = \delta$.

Az előbbiek analógiájára értelmezzük függvény határértékét a $-\infty$ -ben, ill. azt, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, továbbá a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ -nel jelzett határértékreklációt.

Bebizonyítjuk a függvényhatárérték létezésének egy fontos szükséges és elégséges feltételét (vö. I. Kötet, 16.3 Tétel).

4.3 Tétel. (Cauchy-féle kritérium.) Legyen "a" ($a \in \mathbb{R}$, vagy $a = \pm\infty$) az f függvény D értelmezési tartományának torlódási pontja; a (véges) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ akkor és csak akkor létezik, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van K_a környezet, hogy minden $x', x'' \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D$ -re $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Bizonyítás. A feltétel szükséges. U.i. tételezzük fel, hogy $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz van K_a , hogy minden $x', x'' \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D$ -re $|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $|f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Innen azonban $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ következik.

A feltétel elégséges. Tételezzük fel u.i., hogy a feltétel fennáll, legyen x_n , $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges végtelen sorozat, melyre $x_n \neq a$, $x_n \in D$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Akkor a feltétel értelmében van K_a , hogy minden $x_n, x_m \in K_a$ -ra $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Azonban K_a -hoz található K_∞ , hogy minden $n, m \in K_\infty$ -re $x_n, x_m \in K_a$, vagyis $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Tehát az I. kötet 16.3 Tétel értelmében az $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ végtelen sorozat konvergens, ebből azonban a 4.1 és 4.2 Tételek alapján állításunk következik.!

Az f függvény egyoldali határértékéről beszélünk az "a" helyen, akkor ha a függvényt a D értelmezési tartomány azon részében tekintjük, amely az "a" ponttól jobbra, ill. balra esik.

4.5 Definíció. Legyen D az f függvény értelmezési tartománya. Tekintsük az f függvénynek a $(-\infty, a) \cap D$ halmazra való leszűkítését és legyen " a " a $(-\infty, a) \cap D$ halmaz torlódási pontja; azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik a bal oldali határértéke az " a " helyen, jelöléssel: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$, ha létezik a leszűkített függvény határértéke az " a " helyen.

Más megfogalmazásban:

4.5' Definíció. Legyen " a " a $(-\infty, a) \cap D$ halmaz torlódási pontja; $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $0 < a - x < \delta$, $x \in D$ -re $|f(x) - A| < \varepsilon$.

4.6 Definíció. Legyen D az f függvény értelmezési tartománya " a " az $(a, +\infty) \cap D$ halmaz torlódási pontja, és tekintsük az f függvénynek az $(a, +\infty) \cap D$ halmazra való leszűkítését; azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik a jobb oldali határértéke az " a " helyen, jelöléssel:

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$, ha létezik a leszűkített függvény határértéke az " a " helyen.

Hasonlóan az előző definícióhoz, ez is megfogalmazható egyenlőtlenségek segítségével.

4.6 Példa. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (l. 1.7 Példa) jobb, ill. bal oldali határértékére az $a = 0$ helyen:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = +1, \text{ ill. } \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1.$$

4.7 Példa. A Dirichlet függvénynek (l. 1.8 Példa) semmilyen helyen nincs sem jobb oldali, sem bal oldali határértéke.

Megjegyezzük, hogy a határérték értelmezését leszűkíthettük volna arra a speciális esetre, amikor a függvény a kérdéses hely egy egész környezetében (kivéve esetleg magát a helyet) értelmezve van. Ebben az esetben a definíciók valamivel egyszerűbbé válnak.

5. Határértékszámítás

A függvények határértékének kiszámításához szükségünk lesz néhány tétel ismeretére:

Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen "a" a $D_f \cap D_g$ halmaz torlódási pontja.

5.1 Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ véges határérték létezik, akkor az f függvény az "a" hely valamely K_a környezetében korlátos.

Bizonyítás. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ és $\varepsilon > 0$, akkor van K_a környezet, hogy $x \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D$ -re $|f(x) - A| < \varepsilon$, még inkább igaz, hogy $|f(x)| = |A| + \varepsilon$, vagyis $|f(x)| < |A| + \varepsilon$.

5.2 Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ véges határérték létezik, akkor $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ létezik.

A tétel pontosan úgy bizonyítható, mint az 5.1 Tétel. A tétel megfordítása nem igaz.

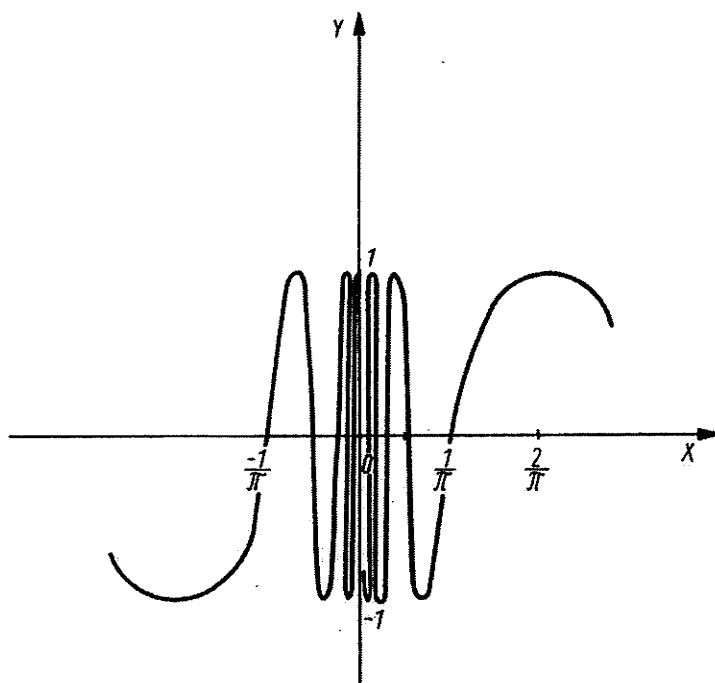
5.3 Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ véges határértékek léteznek, akkor $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$ is létezik és

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Bizonyítás. A tétel a 4.2 Definíció és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tétel (I. I. Kötet, 15.3 Tétel) közvetlen következménye.!

E tétel megfordítása nem igaz, ezt mutatja a következő

5.1 Példa. Legyen $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ és $g(x) = 1 - \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$ létezik és egyenlő 1-gyel, míg sem $f(x)$, sem $g(x)$ határértéke nem létezik a 0 helyen, u.i. pl. a $\sin \frac{1}{x}$ függvény a 0 pont tetszőleges környezetében minden $[-1; 1]$ intervallumbeli értéket felvesz.



5.1 ábra

5.4 Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ véges határértékek léteznek, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ is létezik és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Bizonyítás. A tétel a 4.2 Definíció és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tétel (I. I. kötet, 15.5 Tétel) közvetlen következménye.

Matematikai indukcióval igazolható, hogy az 5.3, ill. 5.4 Tétel megfelelője érvényes tetszőleges (véges) számú függvény összegére, ill. szorzatára is.

5.5 Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ véges határértékek léteznek és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$.

Bizonyítás. A tétel a 4.2 Definíció és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tétel (I. I. Kötet, 15.6 Tétel és az azt követő megjegyzés) közvetlen következménye.!

5.2 Példa. Racionális függvény határértéke a $+\infty$ -ben. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ és

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) \right] = \operatorname{sg} a_n \cdot \infty,$$

mivel a gömbölyű zárójelben levő tényező a_n -hez tart, ha x tart $+\infty$ -hez. Tehát racionális egész függvény határértéke a $+\infty$ -ben $+\infty$, vagy $-\infty$, az előjelet a legmagasabbfokú tag együtthatója dönti el. Legyen

$$q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1} x^{n-1-m} + \dots + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1} x^{-1} + \dots + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{sg} \frac{a_n}{b_m} \cdot \infty, & \text{ha } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{ha } n < m \end{cases}$$

A határérték kiszámításánál alkalmaztuk az 5.3 és 5.5 Tételt, valamint előző eredményünket. Hasonló módon határozható meg racionális egész és racionális törtfüggvény határértéke a $-\infty$ -ben.

5.6 Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ és $g(x)$ korlátos az "a" hely valamely $K_{a\varrho}$ környezetében, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

$x \rightarrow a$

Bizonyítás. Legyen $|g(x)| < M$, ha $x \in (K_{a\delta} \setminus \{a\}) \cap D_g$. Mivel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, minden $\varepsilon > 0$ -hoz "a"-nak van olyan $K_{a\delta} \subset K_{a\delta}$ környezete, hogy minden $x \in (K_{a\delta} \setminus \{a\}) \cap D_f$ -re $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Összeszorozva: $|g(x)| \cdot |f(x)| < \varepsilon$, vagyis $|g(x) \cdot f(x)| < \varepsilon$, ha $x \in (K_{a\delta} \setminus \{a\}) \cap D_f$.

5.7 Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ határérték létezik és egyenlők, a φ függvény értelmezési tartománya $D_\varphi \subset D_f \cap D_g$, "a" a D_φ halmaz torlódási pontja és van $K_{a\delta}$ környezet, hogy minden $x \in (K_{a\delta} \setminus \{a\}) \cap D_\varphi$ -re

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x), \quad (5.1)$$

akkor $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ is létezik és

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ és K_A az A szám $(+\infty)$ tetszőleges környezete; van "a"-nak $K_{a\delta} \subset K_{a\delta}$ környezete, hogy minden $x \in (K_{a\delta} \setminus \{a\}) \cap D_\varphi$ -re $f(x) \in K_A$ és $g(x) \in K_A$. Ekkor azonban (5.1)-ből következik, hogy $\varphi(x) \in K_A$.

5.8 Tétel. Legyen $h: D_h \rightarrow \mathbb{R}$, $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ és f értékkészlete $Y \subset D_h$, "a" a D halmaznak, A pedig az Y halmaznak torlódási pontja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} h(y) = B$, továbbá tételezzük fel, hogy van $K_{a\delta}$ környezet, melyre $x \in (K_{a\delta} \setminus \{a\}) \cap D_f$ esetén $f(x) \neq A$; ekkor a $h \circ f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ összetett függvénynek létezik "a"-ban a határértéke és $\lim_{x \rightarrow a} (h \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = B$.

Bizonyítás. B tetszőleges K_B környezetéhez van K_A környezet, hogy minden $y \in (K_A \setminus \{A\}) \cap D_h$ -ra $h(y) \in K_B$; K_A -hoz viszont van $K_a \subset K_{a\delta}$ környezet, hogy minden $x \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D_f$ -re $y = f(x) \in K_A$. Miután ezen

x -ekre $f(x) \neq A$ -val és minden esetre $f(x) \in Y$, az is igaz, hogy
 $y = f(x) \in (K_A \setminus \{A\}) \cap Y \subset (K_A \setminus \{A\}) \cap D_h$, vagyis ha $x \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D_f$,
 akkor $h(f(x)) \in K_B$. !

A továbbiakban, ha valamely függvény határértékéről beszélünk valamely
 "a" helyen, haligatolagosan mindig feltételezzük, hogy "a" az értelmezési tar-
 tomány torlódási pontja.

6. Folytonos függvények

A műszaki, fizikai és egyéb folyamatokat, különösen az egyszerűbbeket
 leíró függvények nagy része azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a függet-
 len változó értékének kis megváltoztatása következtében a függvényérték is
 csak kevésbé változik meg. Ha például valamilyen tartályba zárt, adott tömegű
 gáz nyomását, mint a hőmérséklet függvényét vizsgáljuk, azt tapasztaljuk,
 hogy az egymáshoz közeli hőmérsékletértékek mellett mért nyomások értéke
 csak kevésbé különbözik egymástól. A függvényeknek erre a tulajdonságára
 adunk szabatos meghatározást.

6.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow R$ függvény az $a \in R$ helyen folytonos, ha

- (a) $a \in D$,
- (b) "a" a D értelmezési tartomány torlódási pontja és létezik a véges $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ határérték, és
- (c) $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

6.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow R$ függvény az "a" helyen jobbról folytonos ha f -nek az $[a, +\infty) \cap D$ halmazra való leszűkítése az "a" helyen folytonos.

Hasonlóan értelmezhető függvény bal oldali folytonossága az "a" helyen. Nyil-
 vánvaló, hogy ha az f függvény az "a" helyen balról és jobbról folytonos, ak-
 kor folytonos.

6.1 Tétel. Ha az f függvény az "a" hely valamely K_a környezetében állan-
 dó, akkor f az "a" helyen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f(x) = c$, minden $x \in K_a$ -ra, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, de

$f(x) = c$ miatt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. !

6.2 Tétel. Ha f az "a" helyen folytonos, akkor $|f|$ is folytonos az "a" helyen.

Bizonyítás. Mivel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, az 5.2 Tételből következik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|. !$$

6.3 Tétel. Ha az f és g függvények folytonosak az "a" helyen, akkor $f + g$ is folytonos az "a" helyen.

Bizonyítás. Mivel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, az 5.3 Tételből következik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a). !$$

6.4 Tétel. Ha az f és g függvények folytonosak az "a" helyen, akkor $f \cdot g$ is folytonos az "a" helyen.

Bizonyítás. Mivel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, az 5.4 Tételből következik, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = f(a) \cdot g(a). !$

A 6.3, ill. 6.4 Tétel megfelelője igaz tetszőleges véges számú függvény összegére, ill. szorzatára is, amint ez matematikai indukcióval könnyen igazolható.

6.5 Tétel. Ha f és g az "a" helyen folytonos és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos az "a" helyen.

Bizonyítás. Mivel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, alkalmazva az 5.5 Tételt adódik, hogy $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}. !$

6.6 Tétel. Legyen $h : D_h \rightarrow R$, $f : D_f \rightarrow R$ és f értékkészlete $Y \subset D_h$; ha f folytonos az "a" helyen és h folytonos az $f(a)$ helyen, akkor a $h \circ f : D_f \rightarrow R$ összetett függvény is folytonos az "a" helyen.

Bizonyítás. f ill. h folytonosságából következik, hogy $a \in D_f$, ill.

$A = f(a) \in D_h$, vagyis $h \circ f$ értelmezve van "a" -ban. Legyen

$B = (h \circ f)(a) = h(f(a))$ és K_B a B szám tetszőleges környezete; h folytonossága miatt van olyan K_A környezet, hogy minden $y \in K_A \cap D_h$ -ra

$h(y) \in K_B$; f folytonossága miatt van olyan K_a környezet, hogy minden $x \in K_a \cap D_f$ -re $f(x) \in K_A$; mivel ugyanakkor $f(x) \in Y \subset D_h$, következik, hogy $h(f(x)) \in K_B$, vagyis $\lim_{x \rightarrow a} (h \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = h(f(a))$.!

6.7 Tétel. Ha $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ az "a" helyen folytonos, akkor "a"-nak van olyan K_a környezete, melyben f korlátos.

Bizonyítás. A tétel az 5.1 Tétel közvetlen következménye.!

6.8 Tétel. Ha $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ az "a" helyen folytonos és $f(a) > 0$ (ill. $f(a) < 0$) akkor "a"-nak van olyan $K_{a,\delta}$ környezete, hogy minden $x \in K_{a,\delta} \cap D$ -re $f(x) > 0$ (ill. $f(x) < 0$). Vagyis f az "a" hely elég kis környezetében megtartja $f(a)$ előjelét.

Bizonyítás. Legyen pl. $f(a) > 0$, akkor $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ -hoz van $\delta > 0$, hogy minden $x \in K_{a,\delta} \cap D$ -re $f(x) \in K_{f(a), \frac{f(a)}{2}}$, vagyis $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$.!

6.9 Következmény. Ha az f függvény az "a" helyen folytonos és "a"-nak minden $K_{a,\delta}$ környezetére van $x_1, x_2 \in K_{a,\delta}$, hogy $f(x_1) > 0$ és $f(x_2) < 0$, akkor $f(a) = 0$.

6.10 Következmény. Ha az f függvény az "a" hely bármely $K_{a,\delta}$ környezetében pozitív és negatív értékeket is felvesz és $f(a) \neq 0$, akkor f az "a" helyen nem folytonos.

6.1 Példa. $f(x) = x$ minden $x = a \in \mathbb{R}$ helyen folytonos, mivel $f(a) = a$ és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.

6.2 Példa. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ minden $x \in \mathbb{R}$ helyen folytonos, az előbbi példa és a 6.1, 6.3, 6.4 Tétel alapján.

6.3 Példa. $g(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{neve-}\}$

ző zérushelyei} helyen folytonos, azaz ahol értelmezve van ott folytonos is. Alkalmaztuk a 6.1, 6.3, 6.4, 6.5 Tételt és az előző példa eredményét.

6.4 Példa. $f(x) = \sin x$ minden $x \in \mathbb{R}$ helyen folytonos. Először azt látjuk be, hogy $\sin x$ a 0 helyen folytonos; a definícióból adódik, hogy $\sin 0 = 0$ és $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ (l. 4.2 Példa).

$x \rightarrow 0$

Legyen $a \in \mathbb{R}$, akkor $\sin a$ értelmezve van. Tekintsük a függvényt az $x = a + h$ helyen, ahol h tetszőleges

$$\sin x = \sin(a+h) = \sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h. \quad (6.1)$$

Mivel $1 - \cos h = 2 \sin^2 \frac{h}{2} \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$, következik, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1. \quad (6.2)$$

Ha $x \rightarrow a$, akkor $h \rightarrow 0$ és (6.1) jobb oldalának első tagja $\sin a$ -hoz, második tagja 0-hoz tart, vagyis $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.

$x \rightarrow a$

(6.2)-ből azonnal következik, hogy a $\cos x$ függvény folytonos a 0 helyen és ebből az előbbihez hasonló módon az, hogy $\cos x$ is folytonos minden $x \in \mathbb{R}$ -re.

6.5 Példa. $f(x) = \operatorname{tg} x$ és $g(x) = \operatorname{ctg} x$ minden olyan helyen folytonos, ahol értelmezve van (l. 3. pont). A 6.5 Tételt alkalmazhatjuk.

6.6 Példa. $f(x) = [x]$ minden $k \in \mathbb{Z}$ helyen jobbról folytonos, de balról nem folytonos (l. 1.5 Példa).

6.3 Definíció. Legyen " a " az f függvény D értelmezési tartományának torlódási pontja; azt mondjuk, hogy az f függvénynek az " a " helyen szakadása van, (f az " a " helyen szakadásos) ha ott nem folytonos.

Nem teljesül a folytonosság feltétele az " a " helyen, ha: f -nek itt nem létezik véges határértéke, vagy $a \notin D$, vagy létezik $f(a)$ és $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, de

$x \rightarrow a$

$f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. A szakadási helyek teljes osztályozása több szempontból is történhet.

6.4 Definíció. Az " a " szakadási helyet megszüntethető szakadási helynek nevezzük, ha f -nek az " a " helyen létezik véges határértéke.

Ha az f függvénynek megszüntethető szakadása van az " a " helyen, akkor ott a függvény alkalmas módon történő értelmezésével "folytonossá tehető".

6.7 Példa. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ az $x = 0$ helyen nem folytonos, mivel itt nincs értelmezve; megszüntethető szakadása van, mivel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ha a függvény értelmezését az $x = 0$ helyre a következő módon kiterjesztjük:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

az $x = 0$ helyen folytonos függvényt nyerünk.

6.5 Definíció. Az "a" szakadási helyet lényeges szakadási helynek nevezzük, ha az f függvénynek az "a" helyen nem létezik véges határértéke.

6.8 Példa. $f(x) = \operatorname{sg} x$ az $x = 0$ helyen nem folytonos, mivel itt nem létezik a határértéke (l. 4.6 Példa); lényeges szakadási helye van. A függvény nem tehető folytonossá a 0 helyen.

Más szempontból is osztályozhatjuk a szakadási helyeket.

6.6 Definíció. Az "a" szakadási helyet elsőfajú szakadási helynek nevezzük, ha itt létezik a véges jobb és bal oldali határérték.

Az elsőfajú szakadási hely lehet megszüntethető, vagy lényeges szakadási hely.

6.9 Példa. Az $f(x) = \operatorname{sg} x$ függvénynek $x = 0$ elsőfajú szakadási helye.

6.7 Definíció. Legyen "a" az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szakadási helye és a $(-\infty, a) \cap D$, valamint az $(a, +\infty) \cap D$ halmaz torlódási pontja; azt mondjuk, hogy f -nek "a"-ban másodfajú szakadása van ha f -nek legalább az egyik oldali határértéke nem létezik "a"-ban.

A másodfajú szakadási hely mindig lényeges szakadási hely.

6.10 Példa. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ az $x = 0$ helyen nem folytonos (l. 5.1 Példa), mivel itt nem létezik sem a jobb oldali, sem a bal oldali határértéke, a függvénynek másodfajú szakadási helye van.

7. Intervallumban folytonos függvények

7.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha f folytonos minden $x \in D$ helyen. A folytonos függvények halmazát C^0 -al jelöljük.

7.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos a $H \subset D$ halmazon, ha f -nek H -ra való leszűkitése folytonos. A H halmazon folytonos függvények osztályát (halmazát) C_H^0 -val jelöljük.

Különösen fontosak és gyakran fordulnak elő olyan függvények, melyek egy intervallumon folytonosak. A műszaki gyakorlatban előforduló függvények legnagyobb részének értelmezési tartománya véges sok olyan intervallum egyesítése, melyek mindegyikében a függvény folytonos; az ilyen függvényeket szakaszonként folytonos függvényeknek nevezzük.

Ha az f függvény az I intervallumon folytonos, akkor bármilyen $x_0 \in I$ helyet választunk is ki, az x_0 -hoz elég közeli $x \in I$ helyeken vett függvényérték eltérése $f(x_0)$ -tól kicsi lesz. Általában azonban nem biztos az, hogy ha a függvényérték engedélyezett megváltozását előírjuk, akkor lehet találni az I intervallum minden helyére egyformán érvényes korlátot, mely alatti helyváltoztatás a függvényértéknek az előírtnál csak kisebb mértékű megváltozását vonja maga után. Más szóval általában nem biztos az, hogy a függvény folytonossága az egész I intervallumon egyenletesen érvényes tulajdonság.

7.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $I \subset D$ intervallumon egyenletesen folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta > 0$, hogy minden $x_1, x_2 \in I$ -re

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

7.1 Tétel. Ha az f függvény az I intervallumon egyenletesen folytonos, akkor minden $a \in I$ pontban folytonos.

Bizonyítás. Ha a 7.3 Definícióban $x_1 = a - t$ írunk, állításunk azonnal adódik a 6.1 és 4.1' Definíciókból.!

7.1 Példa. Az $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ függvény a $(0, +\infty)$ intervallumon folytonos, mivel az ezen intervallumon folytonos $\frac{1}{x}$ és a folytonos sinus-függvényből összetett függvény (l. 6.3, 6.4 Példa és 6.6 Tétel). Megmutatjuk, hogy a függvény a $(0, +\infty)$ intervallumon nem egyenletesen folytonos. Legyen

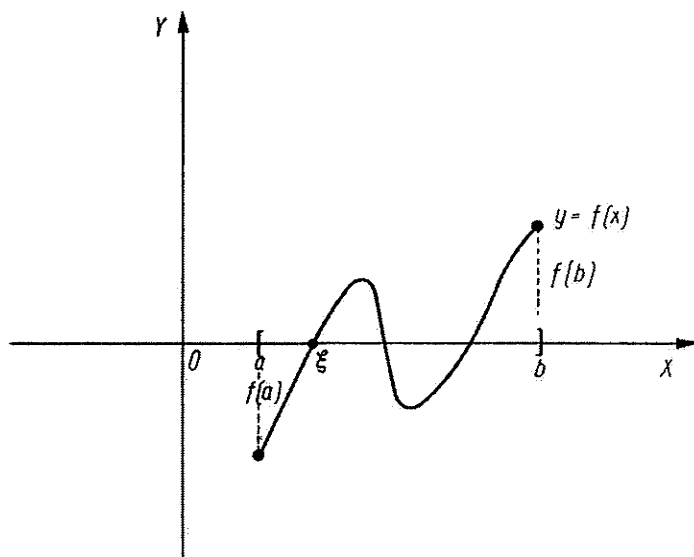
$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, bármilyen $\delta > 0$ -t adunk is meg, van $n \in \mathbb{N}$, hogy $0 < \frac{1}{2n\pi} < \delta$
és $0 < \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} < \delta$, de akkor

$$\left| \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \right| < \delta$$

is fennáll és mégis

$$\left| f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\right) \right| = \left| \sin 2n\pi - \sin (2n+1)\frac{\pi}{2} \right| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Azok a függvények, amelyek valamely zárt $[a, b]$ intervallumon folytonosak, vagyis amelyek a $C^0_{[a, b]}$ függvényhalmazba tartoznak egy sor előnyös tulajdonsággal rendelkeznek, mégpedig két függvényérték között minden értéket felvesznek (vagyis értékkészletük egy intervallum), korlátosak, felveszik függvényértékként a függvényértékek halmazának supremumát és infimumát továbbá egyenletesen folytonosak. A felsorolt tulajdonságokat a következő tételekben fogalmazzuk meg és bizonyítjuk.



7.1 ábra

7.2 Tétel. (Bolzano tétele, speciális eset): Ha

$$f \in C^0_{[a,b]} \text{ és } \operatorname{sg} \{f(a), f(b)\} = -1,$$

akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítás a valós számok Cantor féle tulajdonsága, az egymásba skatulyázott intervallumok elve alapján történt (l. I. kötet 12.1 Tétel).

Megfelezzük az $[a, b]$ intervallumot. Ha a felezőpontban $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, akkor az

állítás igaz. Ha $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, a két félintervallum közül azt az $[a_1, b_1]$ intervallumot tekintjük, amelyre teljesül $\operatorname{sg} \{f(a_1), f(b_1)\} = -1$, ahol a_1 -gyel, ill. b_1 -gyel jelöltük az utóbbi intervallum bal oldali, ill. jobb oldali végpontját. Nyilvánvaló, hogy $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, ahol $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. Az eljárást most megismételjük az $[a_1, b_1]$ intervallumon, így adódik, hogy

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}, \quad a \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b,$$

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b], \quad \operatorname{sg} \{f(a_2), f(b_2)\} = -1$$

Az n -edik lépésben

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b,$$

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \dots \subset [a, b], \quad n \in \mathbb{N}$$

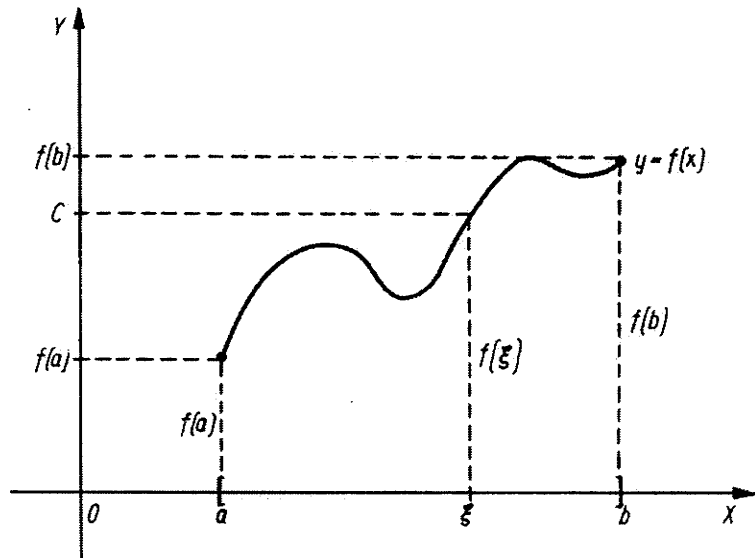
$\operatorname{sg} \{f(a_n), f(b_n)\} = -1$. Az eljárást végnélkül folytatva egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatát kaptuk és mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$,

csak egyetlen olyan $\xi \in [a, b]$ pont az amely minden intervallumnak eleme. Nyilván $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$.

Most belátjuk, hogy ez a ξ rendelkezik az előírt tulajdonsággal, azaz $f(\xi) = 0$.

Mivel $\xi \in [a, b]$, a feltétel szerint az f függvény ξ -ben is folytonos. De ξ -nek minden környezetében az f függvény pozitív és negatív értéket is felvesz (t.i. az a_n , ill. b_n helyeken), tehát a 6.9 Következmény alapján $f(\xi) = 0$. Mivel

$$f(a) \neq 0, \quad f(b) \neq 0, \quad \text{ezért } \xi \in (a, b).!$$



7.2 ábra

7.3 Tétel. (Bolzano tétele, általános eset.) Ha $f \in C^0_{[a, b]}$ és $f(a) < f(b)$ (vagy $f(a) > f(b)$), akkor minden $c \in (f(a), f(b))$ -hez van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = c$, vagyis a függvény a $[a, b]$ intervallumban minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz.

Bizonyítás. Legyen $g(x) = f(x) - c$, ahol pl. $f(a) < c < f(b)$. $g(x) \in C^0_{[a, b]}$ és $g(a) < 0$, ill. $g(b) > 0$; így alkalmazható a 7.2 Tétel, azaz van olyan $\xi \in [a, b]$, hogy $g(\xi) = f(\xi) - c = 0$!

Megjegyzés: Lényeges kikötés volt itt az, hogy a folytonosságnak zárt intervallumban kell fennállnia. Pl. $f(x) = \sin x$ a $(0, 1]$ balról nyílt intervallumban folytonos, a $[0, 1]$ zárt intervallumban Bolzano tételének állítása rá nem érvényes.

7.4 Következmény. Páratlan fokszámú polinomnak biztosan van legalább egy valós gyöke.

Bizonyítás. Legyen

$$p(x) = a_{2m-1}x^{2m-1} + a_{2m-2}x^{2m-2} + \dots + a_1x + a_0, \text{ és pl. } a_{2m-1} > 0.$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$, ha "a" elég kicsi és b elég

nagy, akkor $p(a) < 0$ és $p(b) > 0$. Alkalmazzuk a 7.2 Tételt $p(x)$ -re az $[a, b]$ intervallumon, adódik, hogy van $\xi \in [a, b]$, hogy $p(\xi) = 0$.

7.5 Tétel: (Weierstrass tétele I.) Ha $f \in C^0_{[a, b]}$, akkor van olyan $M \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq M$, minden $x \in [a, b]$ -re, vagyis zárt intervallumban folytonos függvény korlátos.

Bizonyítás. A bizonyítás reductio ad absurdummal történik. (L. I. kötet 7. c.) Tegyük fel, hogy f az $[a, b]$ -ben folytonos, de nem korlátos, azaz minden $M \in \mathbb{R}$ -re van olyan $x \in [a, b]$, hogy $|f(x)| > M$. Mivel f nem korlátos, kiválasztható olyan x_n , $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a, b]$ sorozat, hogy

$$1 < |f(x_1)|, \max(2, |f(x_1)|) < |f(x_2)|, \dots$$

$$\dots, \max(n, |f(x_{n-1})|) < |f(x_n)|, \dots$$

Az x_n , $n \in \mathbb{N}$ sorozathoz tartozó $f(x_n)$ sorozat divergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = \infty$.

De az x_n , $n \in \mathbb{N}$ sorozat korlátos, mivel minden eleme $[a, b]$ -ben van, tehát kiválasztható belőle x_{i_n} , $i_n \in \mathbb{N}$ konvergens részsorozat (I. I. Kötet 16.2 Tétel) $\lim_{i_n \rightarrow \infty} x_{i_n} = \xi \in [a, b]$. Mivel az f függvény a ξ helyen folyto-

nos, azért $\lim_{i_n \rightarrow \infty} |f(x_{i_n})| = |f(\xi)|$, (I. 6.2 Tétel), ez pedig ellentmondás,

mert az $|f(x_{i_n})|$, $i_n \in \mathbb{N}$ sorozat részsorozata az $|f(x_n)|$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat-

nak mely ∞ -hez tart. Tehát a feltevéssel ellentétben van olyan $M \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq M$.

Megjegyzés: A tétel nyílt intervallumra nem érvényes. Pl.

$f(x) = \frac{1}{x}$ a $(0, 1)$ intervallumban folytonos, de nem korlátos.

7.6 Tétel. (Weierstrass tétele II.) Ha $f \in C^0_{[a, b]}$, akkor van olyan

$$\xi \in [a, b] \text{ és } \eta \in [a, b], \text{ hogy } f(\xi) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ és } f(\eta) = \inf_{x \in [a, b]} f(x),$$

vagyis zárt intervallumban folytonos függvény felveszi maximumát és minimumát.

Bizonyítás. Reductio ad absurdummal igazoljuk a tételt. Az előző tételből következik, hogy f korlátos, legyen $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Tegyük fel, hogy

$f(x) < s$, ha $x \in [a, b]$, és így az f függvény az s értéket az $[a, b]$ intervallum egyetlen helyén sem veszi fel. Bevezetjük a $g(x)$ segédfüggvényt:
 $g(x) = \frac{1}{s - f(x)}$. Nyilván $g(x) \in C^0_{[a, b]}$. Mivel g a 7.5 Tétel alapján korlátos, van olyan $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, hogy $g(x) < M$ minden $x \in [a, b]$ -re.

Tehát igaz, hogy $\frac{1}{s - f(x)} < M$, rendezve

$$1 < Ms - M f(x)$$

$$M f(x) < Ms - 1$$

$$f(x) < s - \frac{1}{M}, \text{ minden } x \in [a, b] \text{ -re.}$$

Ez pedig ellentmond annak, hogy s a legkisebb felső korlát. Tehát a feltevéssel ellentétben van olyan $\xi \in [a, b]$, hogy $f(\xi) = s$.

Hasonlóan igazolható a tétel másik állítása is.!

Megjegyzés: A tétel nyílt intervallumban folytonos függvényekre nem érvényes. Pl. az $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvény a $(0, \pi)$ intervallumon korlátos,

$\sup_{x \in (0, \pi)} \frac{\sin x}{x} = 1$, de az 1 értéket sehol sem veszi fel, mivel $\sin x < x$, $x \neq 0$.
 $x \in (0, \pi)$.

7.7 Tétel. Ha $f \in C^0_{[a, b]}$, akkor f az $[a, b]$ intervallumban egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz és minden $\xi \in [a, b]$ -hez van $\delta > 0$, hogy minden $x_1, x_2 \in K_\delta(\xi) \cap [a, b]$ -re

$$|f(x_1) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x_2) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (7.1)$$

A $K_{\xi, \frac{\varrho(\xi)}{2}}$, $\xi \in [a, b]$ környezetek egyesítése lefedi az $[a, b]$ intervallumot, vagyis

$$[a, b] \subset \bigcup_{\xi \in [a, b]} K_{\xi, \frac{\varrho(\xi)}{2}}$$

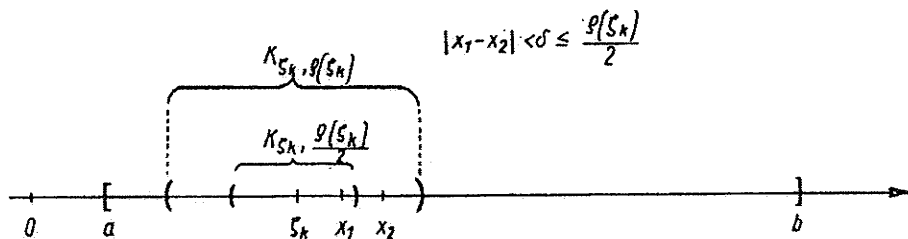
A Borel-féle lefedési tételből (I. kötet, 12.2 Tétel) következik, hogy kiválasztható véges számú

$$K_{\xi_1, \frac{\varrho(\xi_1)}{2}}, K_{\xi_2, \frac{\varrho(\xi_2)}{2}}, \dots, K_{\xi_n, \frac{\varrho(\xi_n)}{2}},$$

$\xi_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$ környezet, melyek egyesítése szintén lefedi $[a, b]$ -t vagyis

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^n K_{\xi_k, \frac{\varrho(\xi_k)}{2}} \quad (7.2)$$

Vezessük be a $\delta = \min \left\{ \frac{\varrho(\xi_1)}{2}, \frac{\varrho(\xi_2)}{2}, \dots, \frac{\varrho(\xi_n)}{2} \right\} > 0$ jelölést és legyen x_1 és x_2 az $[a, b]$ intervallum tetszőleges két pontja, melyre $|x_1 - x_2| < \delta$. Mivel $x_1 \in [a, b]$, (7.2)-ből adódik, hogy van ξ_k , melyre



7.3 ábra

$$x_1 \in K_{\xi_k}, \frac{g(\xi_k)}{2} \in K_{\xi_k, g(\xi_k)},$$

de akkor

$$x_2 \in K_{\xi_k}, \frac{g(\xi_k)}{2} + \delta \in K_{\xi_k, g(\xi_k)}.$$

Innen (7.1) következik.!

8. Implicit alakban adott függvények Algebrai függvények

8.1 Definíció. Az $F(x, y) = 0$ kétismeretlenes egyenlet egy implicit függvényt definiál, a $D \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha minden $x \in D$ -hez található egy és csak egy olyan y , amely x -szel együtt kielégíti az egyenletet.

8.2 Definíció. Algebrai függvénynek nevezzük azokat az egyváltozós valós függvényeket, amelyeknél minden $x \in D$ -hez tartozó $f(x)$ függvényérték kiszámításához x -en csak algebrai műveleteket kell végezni (összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás).

Megjegyezzük, hogy az algebrai függvény fogalmát az előbbinél általánosabban is szokták definiálni.

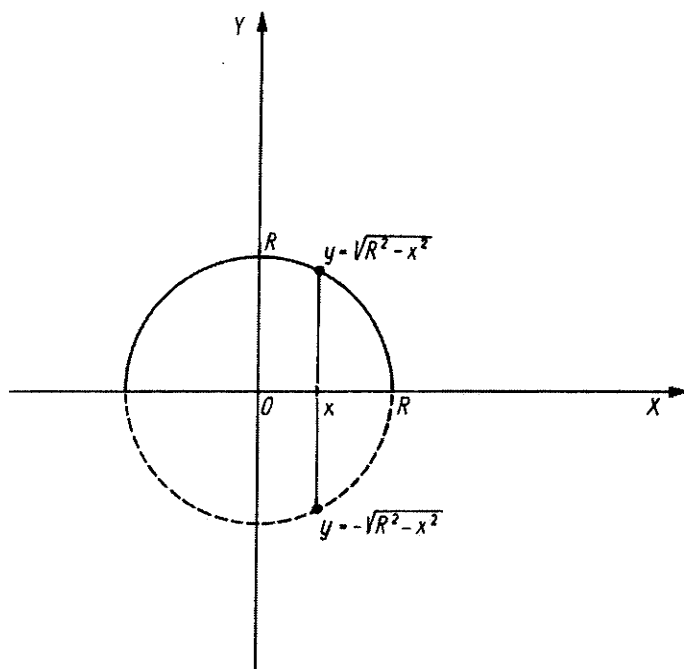
8.1 Példa. Az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenlet az $y \geq 0$ feltétel mellett a $D = [-r, r]$ intervallumon a $\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in D$ függvényt definiálja. E függvény grafikonja az origó középpontu r sugaru felső félkör.

8.2 Példa. A $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, $A^2 + B^2 > 0$, olyan un. kupszelet egyenlete, melynek "tengelyei": (vagy tengelye) a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak.

Ha $A = B$, akkor a kupszelet kör (ha van olyan pontja a síknak, amely kielégíti az egyenletet);

ha $sg A = sg B$, akkor ellipszis;

ha $sg A = -sg B$, akkor hiperbola; ennek elfajuló esete: $x^2 - y^2 = 0$, vagyis $y = \pm x$ egyenespár;



8.1 ábra

ha $A \cdot B = 0$, akkor parabola.

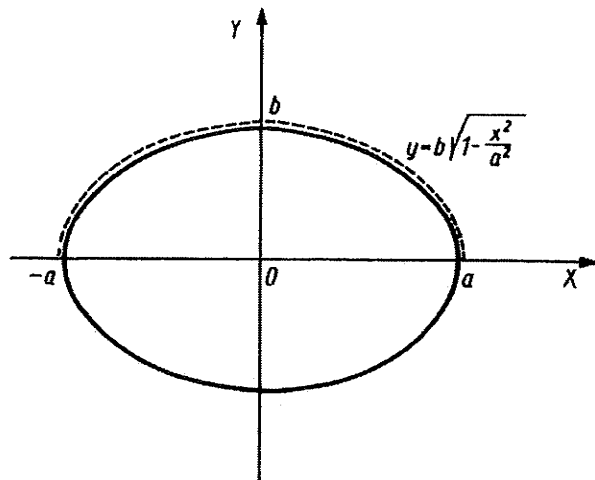
Abban az esetben, ha a kúpszelet középpontja (csúcspontja) a koordináta-rendszer kezdőpontjával egybeesik, a kúpszeletek egyenletének ún. kanonikus alakját kapjuk:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ellipszis,} \quad (8.1)$$

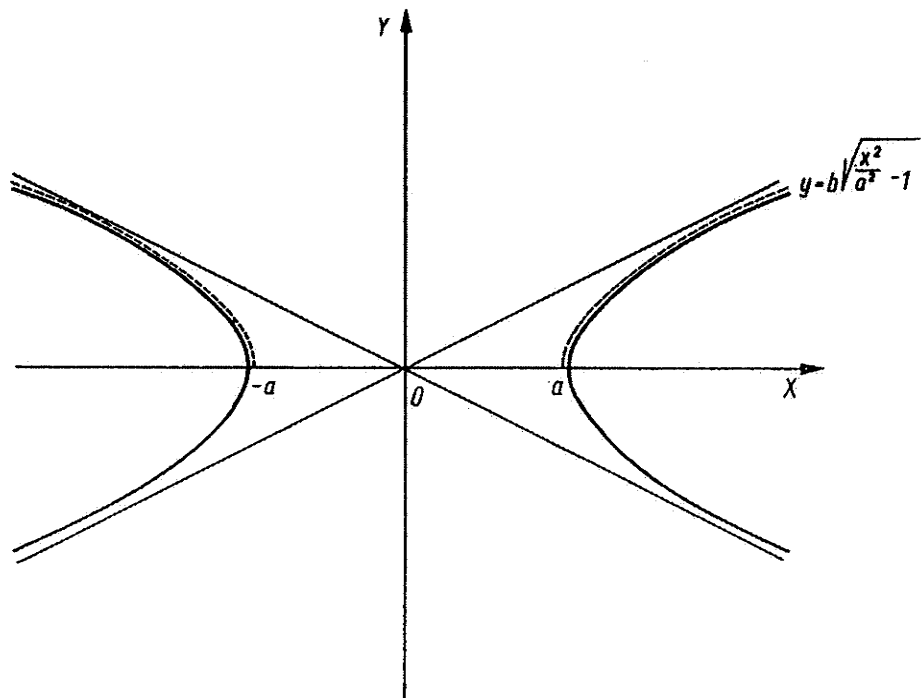
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hiperbola,} \quad (8.2)$$

$$y^2 = 2px \quad \text{parabola egyenlete.} \quad (8.3)$$

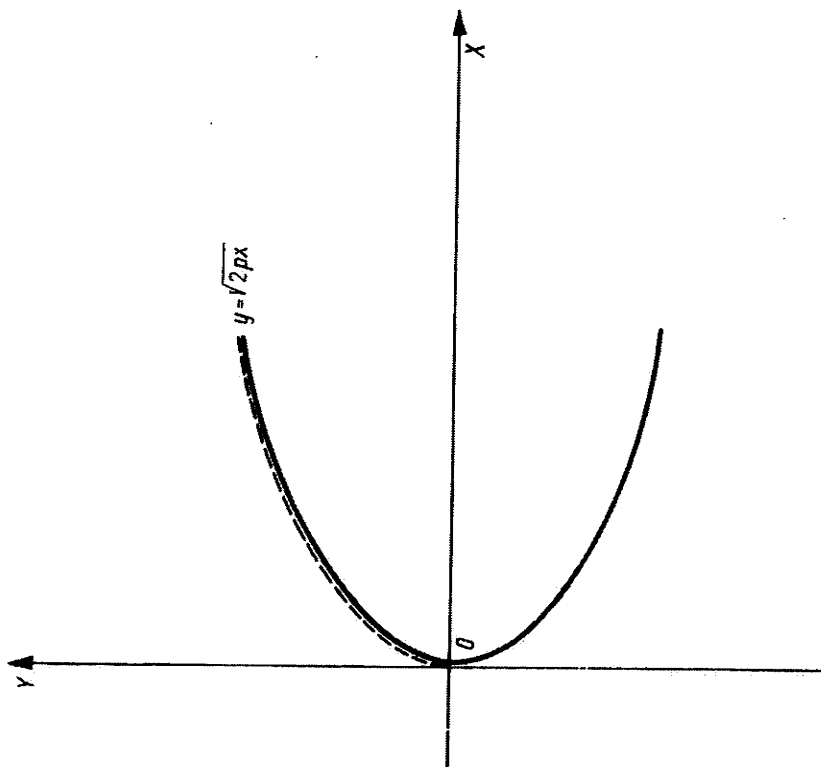
Ezek az egyenletek az $y \geq 0$ feltétel mellett a következő algebrai függvényeket értelmezik. (8.1)-ből: $y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, grafikonja a felső félellipszis, értelmezési tartománya $D = [-a, a]$.



8.2 ábra



8.3 ábra



8.4 ábra

(8.2)-ből: $y = b \sqrt{\frac{x}{a} - 1}$, grafikonja a két fél felsőhiperbola ág, értelmezési tartománya $D = (-\infty, -a) \cup (a; +\infty)$. (8.3)-ból: $y = \sqrt{2px}$ $p > 0$ felső félpárola, értelmezési tartománya $D = [0; +\infty]$. Vö. III. Kötet 19.1 Példa.

9. Az inverz függvény. Arcus függvények

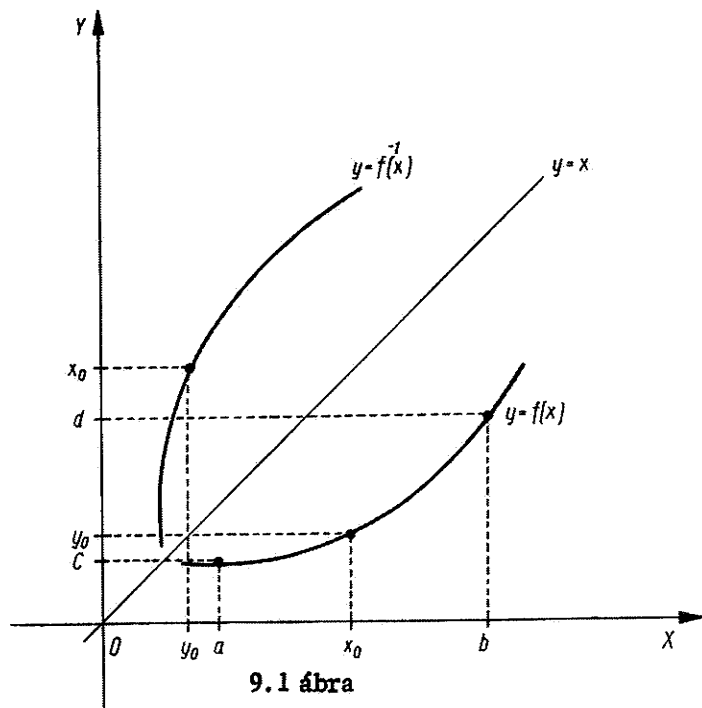
9.1 Definíció. Legyen az $f: X \rightarrow Y$ függvény értékkészlete $Y = \{y \in Y : \text{van } x \in X, \text{ hogy } y = f(x)\}$ és az $f: X \rightarrow Y$ függvény az X halmaznak az Y halmazra történő egy-egyértelmű leképezése; az $f^{-1}: Y \rightarrow X$ függvényt, melyre $f^{-1}(y) = x$, ha $y = f(x)$, az f függvény inverz függvényének nevezzük. (Vö. I. Kötet 2.3 Definíció.)

A definícióból következik, hogy az f^{-1} függvény értelmezési tartománya az f függvény értékkészletével, és az f^{-1} függvény értékkészlete az f függvény értelmezési tartományával egyezik meg; így f^{-1} értékkészlete:
 $X = \{x \in \mathbb{R} : \text{van } y \in Y, \text{ hogy } x = f^{-1}(y)\}$. Ha az f leképezésnél x képe y , akkor az f^{-1} leképezésnél y képe x , érvényesek tehát a következő azonosságok

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{és} \quad f(f^{-1}(y)) = y. \quad (9.1)$$

Megjegyzés: előfordul, hogy egy adott f függvénynek nem létezik inverz függvénye a teljes értelmezési tartományban, de létezik inverze az f függvény alkalmas halmazra való leszűkítésének.

9.1 Példa. $f(x) = x^2$ értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, az értékkészlet $Y = \{y : y \geq 0\}$. A függvény nem létesít egy-egyértelmű leképezést, mivel $f(x) = x^2$ és $f(-x) = x^2$, tehát nem beszélhetünk az inverzről. Szűkítsük le az értelmezési tartományt az $X = \{x : x \geq 0\}$ intervallumra. A leszűkített függvény egy-egyértelmű leképezést létesít (a nem negatív számok halmazát egy-egyértelműen képezi le a nem negatív számok halmazára), tehát létezik inverze: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



9.1 ábra

Jelöljük az f függvény, ill. az f^{-1} inverz függvény grafikonját G -vel, ill. G^{-1} -vel, vagyis legyen

$$G : \{ (x, y) : x \in X, y = f(x) \},$$

ill.

$$G^{-1} : \{ (x, y) : x \in Y, y = f^{-1}(x) \}$$

Nyilvánvaló, hogy $(x_0, y_0) \in G$ akkor és csak akkor, ha $(y_0, x_0) \in G^{-1}$, vagyis a G^{-1} -et ábrázoló görbét az x, y síkban úgy kapjuk G -ből, hogy az utóbbit az $y = x$ egyenletű egyenesre tükrözzük. A G^{-1} grafikon egyenlete $y = f^{-1}(x)$ ami ekvivalens $f(y) = x$ -szel. Ezek szerint G^{-1} egyenletét úgy kapjuk G egyenletéből $y = f(x)$ -ből, hogy az utóbbiban az x és y betűket formálisan felcseréljük.

9.1 Tétel. Ha az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton és értékkészlete az I intervallum, akkor $f \in C^0_{(a, b)}$.

Bizonyítás. Legyen f például monoton növekedő, $\xi \in (a, b)$ és K_η az $\eta = f(\xi) \in I$ pont tetszőleges környezete. Legyen $y_1 < \eta$, $y_1 \in K_\eta \cap I$,

ill. $y_2 > \eta$, $y_2 \in K_\eta \cap I$. (Ha pl. ilyen y_1 szám nem léteznék, az azt jelenté, hogy I -ben nincs η -nál kisebb szám; mivel azonban f az $(a, \xi]$ -intervallumban monoton növekedő, állandó kell legyen, vagyis ξ -ben balról folytonos. Hasonlóan látható be, hogy ha a kívánt tulajdonságú y_2 szám nem létezik, akkor f ξ -ben jobbról folytonos).

Miután f monoton növekedő, van a $a < x_1 < \xi < x_2 < b$, hogy $f(x_1) = y_1 < \eta < y_2 = f(x_2)$. Legyen $\delta = \min(\xi - x_1, x_2 - \xi) > 0$. Minden $x \in K_{\xi\delta}$ -ra

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$

vagyis

$$f(x) \in [y_1, y_2] \subset K_\eta, \text{ tehát } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) = \eta.$$

Ezek szerint f az (a, b) intervallum minden ξ helyén folytonos. Hasonlóan látható be az állítás monoton csökkenő függvényre.!

9.2 Tétel. Legyen az $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekedő (csökkenő) és folytonos akkor létezik az f^{-1} inverz függvény, amely szigorúan monoton növekedő (csökkenő) és folytonos.

Bizonyítás. Mivel Bolzano tétele (7.3 Tétel) értelmében f két értéke között minden értéket felvesz, értékkészlete egy I intervallum. Az f függvény (a, b) -nek I -re történő egy-egyértelmű leképezése, mivel, ha $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 \neq x_2$, pl. $x_1 < x_2$, akkor f szigorúan monoton növekedéséből (csökkenéséből)

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)), \quad \text{vagyis} \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

következik. Létezik tehát az $f^{-1}: I \rightarrow (a, b)$ inverz függvény. f^{-1} szigorúan monoton növekedő (csökkenő), mivel ha

$$y_1, y_2 \in I, \quad y_1 < y_2 \quad (y_1 > y_2),$$

akkor

$$x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2);$$

ha ul. $x_1 \geq x_2$ lenne, akkor

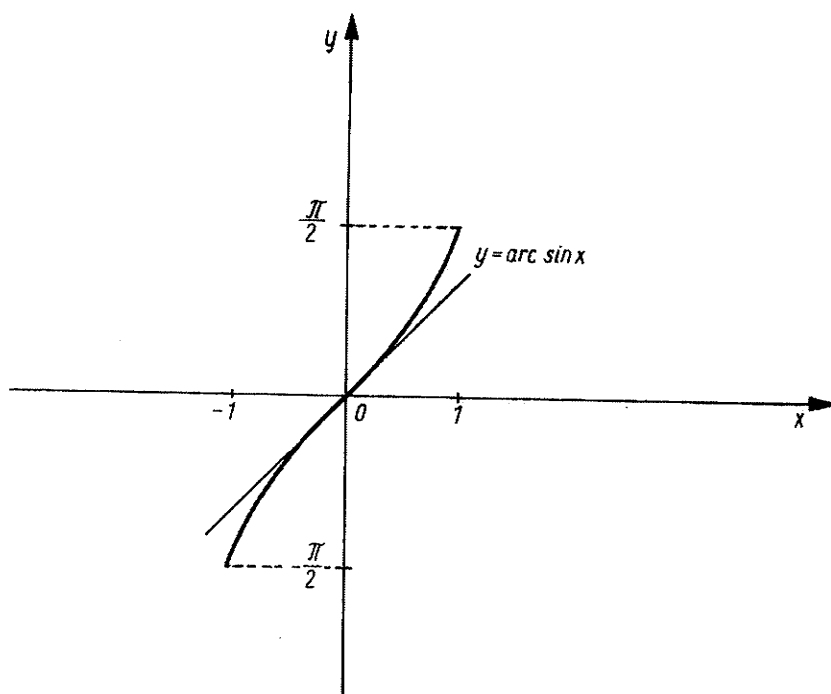
$$f(x_1) = y_1 \geq f(x_2) = y_2 \quad (f(x_1) = y_1 \leq f(x_2) = y_2)$$

lenne. f^{-1} folytonossága most már a 9.1 tételből azonnal következik.!

A trigonometrikus függvények alkalmasan választott intervallumokra való leszűkítése szigorúan monoton, folytonos függvények. Ezek inverz függvényeit arcus függvényeknek (arcus = ív, szög) nevezzük.

Az $f(x) = \sin x$ függvény leszűkítése a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumra szigorúan monoton növekedő, folytonos tehát létezik egyértékű inverze: $f^{-1}(x) = \arcsin x$, amely szigorúan monoton növekedő és folytonos. Az $\arcsin x$ függvény értelmezési tartománya $[-1, 1]$ értékkészlete $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (l. 9.2 ábra)

Az inverz függvény értelmezéséből következik, hogy az $\arcsin x$ függvényérték annak az ívnek (szögnek) mértékszám, melynek sinusa x . Az $\arcsin x$ függvény grafikonját a $\sin x$ függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével nyerjük.



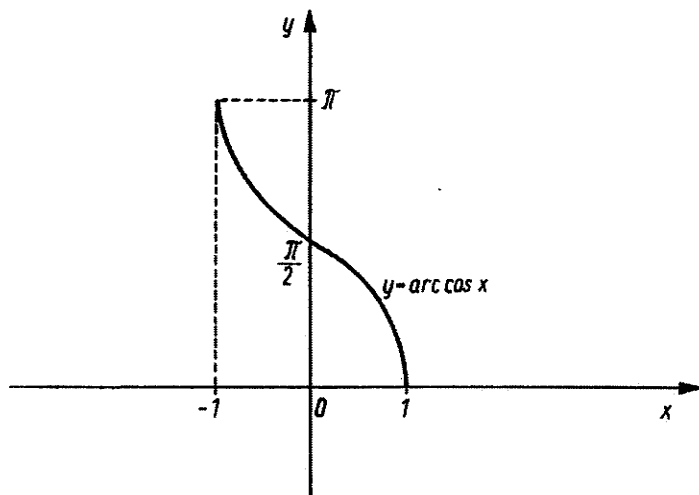
9.2 ábra

A $\sin x$ függvénynek (bármilyen k egész számra) a $\left[(2k-1) \frac{\pi}{2}, (2k+1) \frac{\pi}{2} \right]$ intervallumra vonatkozó leszűkítése ugyancsak szigorúan monoton, folytonos függvény. E leszűkítés inverz függvényét is arcsin függvénynek nevezzük és értékészlete megadásával különböztetjük meg. Szokták - különösen régebben - az előző bekezdésben értelmezett arcsin x függvényt, vagyis a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ intervallumra leszűkített sinus függvény inverzét "a végtelen sokértékű arcsin x függvény főértékének" nevezni.

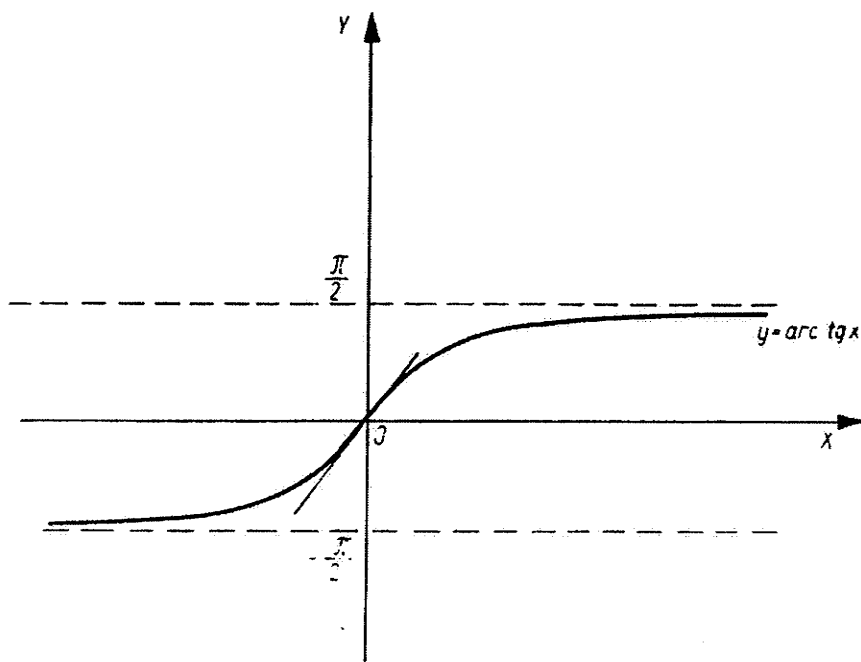
Az $f(x) = \cos x$ függvény leszűkítése a $[0, \pi]$ intervallumra, szigorúan monoton csökkenő, folytonos, tehát létezik egyértékű, szigorúan monoton csökkenő, folytonos inverze: $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Az $\arccos x$ függvény értelmezési tartománya $[-1, 1]$, értékészlete $[0, \pi]$. (l. 9.3 ábra).

Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ leszűkítése a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra szigorúan monoton növekedő, folytonos, tehát létezik egyértékű szigorúan monoton, folytonos inverze: $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.



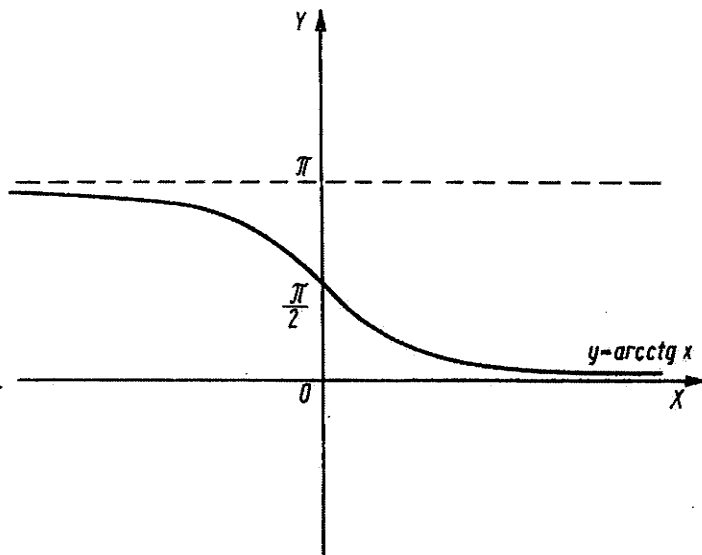
9.3 ábra



9.4 ábra

Az $\operatorname{arctg} x$ függvény értelmezési tartománya $(-\infty, \infty)$, értékkészlete $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (l. 9.4 ábra.)

Az $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $(0, \pi)$ intervallumra való leszűkítésének inverze. (l. 9.5 ábra).



9.5 ábra

Az $\operatorname{arc} \sin x$ függvény értelmezésének végén tett megjegyzéshez hasonló értelemben szokták a most definiált $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$, ill. $\operatorname{arctg} x$ függvényt a megfelelő "végtelen sok értékű függvény főértékének" nevezni.

10. Az exponenciális és logaritmus függvény

Legyen "a" tetszőlegesen rögzített pozitív szám és jelöljük Q -val a racionális számok halmazát. Minden $r \in Q$ számra az ismert módon értelmezzük "a"-nak r kitevős hatványát a^r -et. Legyen $r = \frac{p}{q}$, ahol p tetszőleges, q pedig pozitív egész szám, akkor

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p \quad (10.1)$$

Ily módon minden $r \in Q$ -hoz egyértelműen hozzárendeltük az a^r pozitív számot (l. az I. kötet, 10.3 Példát követő megjegyzést), vagyis beszélhetünk

az $f: Q \rightarrow P$ függvényről, ahol P a pozitív számok halmaza és $f(r) = a^r > 0$, $r \in Q$. Ismeretesek ennek a függvénynek legfontosabb tulajdonságai, és pedig minden $r_1, r_2 \in Q$ -ra

$$a^{r_1 + r_2} = a^{r_1} a^{r_2}, \quad (10.2)$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2} \quad (10.3)$$

stb., továbbá az, hogy ha $a > 1$, akkor

$$r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2} \quad (10.4)$$

Ennek a függvénynek értelmezését kiterjesztjük a valós számok teljes R halmazára. Legyen $a > 1$ és $x \in R$, legyen $Q_x = Q \cap (-\infty, x)$ és $Q'_x = Q \cap (x, +\infty)$, vagyis Q_x , ill. Q'_x az x -nél kisebb, ill. x -nél nagyobb racionális számok halmaza.

10.1 Definíció. Az " a " szám x kitevős hatványának nevezzük és a^x -szel jelöljük azt a h pozitív számot, mely minden $r \in Q_x$ és $r' \in Q'_x$ -re kielégíti a következő egyenlőtlenséget

$$a^r < h < a^{r'}. \quad (10.5)$$

Bebizonyítjuk, hogy ez értelmes definíció, vagyis minden $x \in R$ -re van egy és csak egy (10.5)-öt kielégítő $h = a^x$ szám. Könnyű belátni, hogy ilyen szám van. Az $\{a^r : r \in Q_x\}$ halmaz ui. felülről korlátos, mivel (10.4) miatt minden $a^{r'}$, $r' \in Q'_x$ szám felső korlátja. Ezért a

$$h = \sup \{a^r : r \in Q_x\} \quad (10.6)$$

legkisebb felső korlát létezik és kielégíti az

$$a^r \leq h \leq a^{r'}$$

egyenlőtlenséget minden $r \in Q_x$, ill. $r' \in Q'_x$ -re. Egyenlőség azonban itt nem állhat fenn, mert ha pl. lenne $r \in Q_x$, melyre $a^r = h$ fennállna, akkor

egy r_1 racionális számot választva az (r, x) intervallumban

$a^{r_1} > a^r = h = \sup \{ a^r : r \in Q_x \}$ lenne, ami ellentmond $r_1 \in Q_x$ -nek. Ezek szerint (10.6) valóban kielégíti a 10.1 Definíció követelményeit. Megmutatjuk, hogy csak egy (10.5)-öt kielégítő szám van, vagyis a^x egyértelműen meghatározott. Tegyük fel, hogy van (10.6)-on kívül más $h' \neq h$ szám is, melyre (10.5) fennáll. (10.6)-ból nyilvánvaló, hogy akkor $h' > h$. Minden $r \in Q_x$ és $r' \in Q'_x$ -re $a^{r'} - a^r > h' - h$. Azonban minden n pozitív egész számra

$$0 < a^{r'} - a^r = a^r (a^{r'-r} - 1) < h(a^{r'-r} - 1) < h(a^{\frac{1}{n}} - 1),$$

$$h(a^{\frac{1}{n}} - 1) < h' - h,$$

ha n elég nagy, tehát $a^{r'} - a^r < h' - h$, ha $r' - r$ elég kicsi, ami ellentmondás!

Ha $0 < a < 1$, akkor tetszőleges $x \in R$ -re a^x -et a következőképpen értelmezzük

$$a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}. \quad (10.7)$$

ha $r' - r < \frac{1}{n}$. Az I. Kötet 15.5 Példa szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$, vagyis

10.2 Definíció. Legyen $a > 0$, $a \neq 1$; az $f(x) = a^x$ formulával értelmezett függvényt " a " alapu exponenciális függvénynek nevezzük.
 $1^x \equiv 1$.

Abban a speciális, fontos esetben, amikor az alap az e szám (I. I. Kötet 16.2 Példa) az exponenciális függvény jelölésére még az $\exp x \equiv e^x$ jelet is használjuk.

Az exponenciális függvény értelmezési tartománya R . Tetszőleges $a > 0$ alap esetén $a^0 = 1$. Minden $x_1, x_2 \in R$ -re fennáll a (10.2)-vel analóg

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} \quad (10.8)$$

azonosság. Ezt először az $a > 1$ esetre igazoljuk. Teljesüljenek az r, r', s , ill. s' egyébként tetszőleges racionális számokra az

$$r < x_1 < r', \quad s < x_2 < s'$$

egyenlőtlenségek, akkor (összeadással)

$$r + s < x_1 + x_2 < r' + s'$$

is következik. A 10.1 Definíció szerint

$$0 < a^r < a^{x_1} < a^{r'}, \quad 0 < a^s < a^{x_2} < a^{s'},$$

ahonnan szorzással és (10.2) felhasználásával

$$a^r a^s = a^{r+s} < a^{x_1} a^{x_2} < a^{r'+s'} = a^{r'} a^{s'}$$

következik. Mivel r és r' , ill. s és s' tetszőlegesen közel lehetnek x_1 -hez, ill. x_2 -höz, $r + s$ és $r' + s'$ tetszőlegesen közel lehet $x_1 + x_2$ -höz. Az egyetlen olyan szám, amely minden ilyen $r + s$ és $r' + s'$ -re az a^{r+s} és $a^{r'+s'}$ közé esik, az $a^{x_1+x_2}$ szám, tehát (10.8) fennáll. Az, hogy (10.8) érvényes a $0 < a < 1$ esetben is, előző eredményünkből és (10.7)-ből azonnal következik.!

Hasonlóan igazolható az

$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2} \quad (10.9)$$

azonosság fennállása minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ -re.

Ha $a > 1$, az a^x függvény szigorúan monoton növekedő. Legyen ul. $x_1 < x_2$, akkor van r racionális szám, melyre $x_1 < r < x_2$. A (10.1) Definícióból következik, hogy $a^{x_1} < a^r < a^{x_2}$.!

Ha $0 < a < 1$, az a^x függvény szigorúan monoton fogyó. Ez az állítás előző eredményünknél és (10.7)-nek közvetlen következménye.

Ha $a > 1$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad (10.10)$$

Ezek a határértékelációk az I. Kötet 15.3 Példa közvetlen következményei.

(10.10)-ből és (10.7)-ből azonnal következik, hogy ha $0 < a < 1$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad (10.11)$$

Bebizonyítjuk, hogy az a^x exponenciális függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ helyen folytonos. Először az $a > 1$ esettel foglalkozunk. Legyen ε tetszőleges pozitív szám; mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ (I. Kötet, 15.5 Példa), ha n elég nagy természetes szám, fennáll

$$a^{x_0 - \frac{1}{n}} < a^{x_0} < a^{x_0 + \frac{1}{n}},$$

ahol felhasználtuk (10.8)-at és a függvény szigorúan monoton növekedését. Ez utóbbi tulajdonság újbóli felhasználásával adódik, hogy minden

$$x \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) = K_{x_0, \frac{1}{n}} \text{ -re}$$

$$a^{x_0 - \frac{1}{n}} < a^x < a^{x_0 + \frac{1}{n}}$$

vagyis $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$, tehát $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$

A $0 < a < 1$ esetre vonatkozó megfelelő állítás (10.7)-ből és a 6.5 Tételből következik.

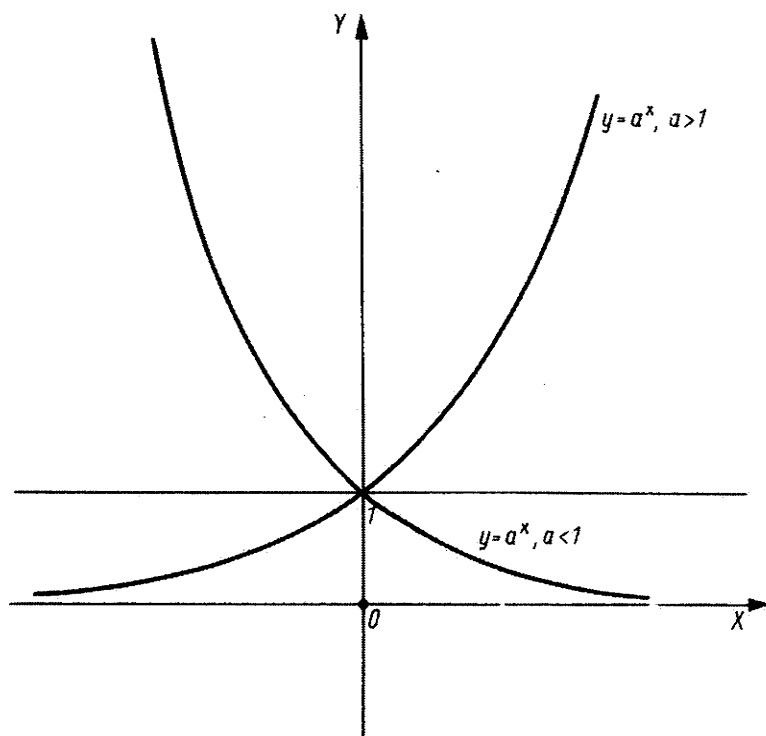
(10.10)-ből, (10.11)-ből és Bolzano tételéből (7.3 Tétel) következik, hogy az a^x függvény ($a > 0$, $a \neq 1$) zérus és $+\infty$ között minden értéket felvesz, vagyis értékkészlete a $(0, +\infty)$ intervallum. Az exponenciális függvény grafikonjára nézve különböző "a" alapok mellett l. a 10.1 ábrát.

Az $f(x) = a^x$ függvény ($a > 0$, $a \neq 1$) a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban szigorúan monoton és folytonos, tehát létezik szigorúan monoton, folytonos inverze. Ezt a függvényt logaritmus függvénynek nevezzük és így jelöljük:

$$f^{-1}(x) = {}^a\log x.$$

Az ${}^a\log x$ függvény értelmezési tartománya $(0, +\infty)$, értékkészlete $(-\infty, \infty)$.

Az inverz függvény értelmezése alapján érvényes a következő azonosság



10.1 ábra

$$x \equiv a^{\log x}, \quad 0 < x < \infty$$

Az ${}_a \log x$ függvény tulajdonságai:

Ha $a > 1$, akkor az $f(x) = {}_a \log x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ha $0 < a < 1$, akkor szigorúan monoton csökkenő (l. 9.2 Tétel).

Az exponenciális függvényekre vonatkozó határérték-relációkból következik (l. (10.10), ill. (10.11)), hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} {}_a \log x = -\infty, \quad \text{ha } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} {}_a \log x = +\infty, \quad \text{ha } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} {}^a\log x = +\infty, \text{ ha } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} {}^a\log x = -\infty, \text{ ha } 0 < a < 1$$

Az $f(x) = {}^a\log x$ függvény kielégíti az

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (10.12)$$

függvényegyenletet, vagyis

$${}^a\log x_1 x_2 = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2 \quad (10.13)$$

minden $x_1, x_2 \in (0 + \infty)$. Legyen $y_1 = {}^a\log x_1$ és $y_2 = {}^a\log x_2$, akkor $x_1 = a^{y_1}$ és $x_2 = a^{y_2}$; összeszorozva és alkalmazva (10.8)-at

$$x_1 x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}$$

amiből az állítás adódik.

Ennek alapján érvényesek a következő azonosságok:

$${}^a\log x_1 x_2 = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2 \quad (10.14)$$

$${}^a\log \frac{x_1}{x_2} = {}^a\log x_1 - {}^a\log x_2 \quad (10.15)$$

$${}^a\log x_1^p = p {}^a\log x_1. \quad (10.16)$$

ahol $x_1, x_2 > 0$, $p \in \mathbb{R}$.

Legyen $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ és $y > 0$, akkor

$$y = a^{a \log y} = b^{b \log y},$$

ahonnan mindkét oldal a -alapu logaritmusát véve és (10.16)-t felhasználva

$$a \log y \cdot a \log a = b \log y \cdot a \log b,$$

vagyis

$$b \log y = \frac{a \log y}{a \log b}. \quad (10.17)$$

DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

11. Függvény differenciálhatósága

A differenciálszámítás a XVII. század kimagasló matematikai felfedezése volt, mely Newton (1643-1727) és Leibniz (1646-1716) nevéhez fűződik. Ezzel a matematikában forradalmi átalakulás kezdődött, és megnövekedett a matematika szerepe az emberiség természettudományos ismereteinek rendszerében.

Vizsgáljuk a következő mechanikai problémát: egy nem egyenletes mozgás pályájának tetszőleges pontjában hogyan határozható meg a sebesség. Meghatározzuk a szabadon eső test pillanatnyi sebességét t idő elteltével az esés kezdete után. Ismeretes a mozgás utja (s) és ideje (t) közötti összefüggés

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

ahol g a nehézségi gyorsulás. A $t + \Delta t$ idő alatt megtett ut $\frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2$, az ut megváltozása Δt idő alatt (a $(t, t + \Delta t)$ időintervallumban megtett ut):

$$\frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2$$

Δt idő alatt az átlagsebesség:

$$\frac{\frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t}$$

Itt t rögzített, az átlagsebesség Δt függvénye. Ha Δt tart 0-hoz, akkor az átlagsebesség a t időhöz tartozó pillanatnyi sebességhez tart:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} g \cdot 2t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(g t + \frac{1}{2} g \Delta t \right) = g t .$$

11.1 Definíció. Legyen adott az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in D$; az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in D \setminus \{x_0\}$$

hányados az f függvény x_0 helyhez tartozó különbségi hányadosának (differenciahányadosának) nevezzük.

A különbségi hányados x -nek függvénye, s értelmezési tartománya $D \setminus \{x_0\}$.

A különbségi hányados felírható más alakban is: az $x - x_0 = h$, vagy $x - x_0 = \Delta x$ jelöléssel:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

vagy

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

vagy az

$$f(x) - f(x_0) = \Delta y$$

jelöléssel

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

11.2 Definíció. Képezzük az f függvény különbségi hányadosának határértékét

$$h \rightarrow 0 \text{ esetén; ha } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ véges határérték léte-}$$

zik, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 helyen differenciálható (létezik a deriváltja) és e véges határértéket az f függvény differenciahányadosának (deriváltjának) nevezzük. Jelölése:

$$f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \dot{f}(x_0).$$

Ezeket a jelöléseket Lagrange, Leibniz, ill. Newton vezette be.

Az x_0 pontbeli differenciálhányados azt méri, hogy a függvény értéke az x_0 pontban milyen gyorsan változik; azaz a differenciálhányados segítségével a függvényérték pillanatnyi változási sebességét határozzuk meg.

Függvény differenciálhatóságára más definíció is adható.

11.3 Definíció. Legyen az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az x_0 helyen értelmezve; azt mondjuk, hogy f az x_0 helyen differenciálható, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám és $\varepsilon(h)$, hogy minden elég kicsi $|h|$ -re melyre $x_0 + h \in D$, a függvény megváltozása így írható fel:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h, \quad (11.1)$$

$$\text{ahol } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Általában, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, akkor

azt mondjuk, hogy $x \rightarrow a$ esetén f erősebben tart 0-hoz, mint g . Ezt így jelöljük: $f = o(g)$ (olv. f kisordó g). Mivel (11.1) jobb oldalának második tagja $\varepsilon(h) \cdot h = o(h)$, e tag a h -ban lineáris első tag mellett kis $|h|$ esetén elhanyagolható és így a differenciálható függvény megváltozása h -nak közelítőleg lineáris függvénye.

Megmutatjuk, hogy a 11.2 és 11.3 Definíció ekvivalens.

11.1 Tétel. Ha az f függvény a 11.2 Definíció értelmében differenciálható, akkor a 11.3 Definíció értelmében is differenciálható és fordítva.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény a 11.2 Definíció értelmében differenciálható, akkor

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h),$$

ahol $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$, vagyis a függvény megváltozása így írható:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \quad (11.2)$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az f függvény a 11.3 Definíció értelmében differenciálható és az ott szereplő együttható $A = f'(x_0)$.

Megfordítva, ha az f függvény a 11.3 Definíció értelmében differenciálható, akkor

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(h).$$

Ha $h \rightarrow 0$, akkor a jobb oldal tart A -hoz, s így a bal oldal is, tehát az f függvény a 11.2 Definíció értelmében is differenciálható és $A = f'(x_0)$.!

(11.2)-ben a jobb oldalon álló első tag a függvény megváltozás főrésze. A függvény megváltozás főrészét a függvény differenciáljának nevezzük és df -el jelöljük:

$$df = f'(x_0) \cdot h. \quad (11.3)$$

A differenciál h -nak homogén lineáris függvénye. Speciálisan, a $g(x) \equiv x$ függvény megváltozása $x_0 + \Delta x - x_0 = 1 \cdot \Delta x$, differenciálja $dx = \Delta x$.

Ezért (11.3) így is írható:

$$df = f'(x_0) \cdot dx.$$

11.4 Definíció. Legyen adott az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény; ha az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

különbségi hányados függvény $D \cap (x_0, +\infty)$ -re

$(D \cap (-\infty, x_0))$ -ra vonatkozó leszűkítésének létezik az

$x = x_0$ helyen határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 helyen jobbról (balról) differenciálható és e határértéket nevezzük az f függvény x_0 helyen vett jobb oldali (bal oldali) differenciálhányadosának, jelben

$$f'_+(x_0) \quad (f'_-(x_0)).$$

Nyilvánvaló, hogy ha egy f függvény egy x_0 helyen jobbról is és balról is differenciálható és $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, akkor az f függvény az x_0 helyen differenciálható; ha $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, akkor az f függvény az x_0 helyen nem differenciálható.

11.1 Példa. $f(x) = |x|$ az $x = 0$ helyen jobbról is és balról is differenciálható, de ebben a pontban a deriváltja nem létezik, mivel $f'_+(0) = 1$ és $f'_-(0) = -1$.

11.2 Tétel. Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható, akkor ott folytonos.

Bizonyítás. A feltétel szerint

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

ebből $(f(x) - f(x_0)) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow x_0$, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

A tétel megfordítása nem érvényes.

11.2 Példa. Az $f(x) = |x|$ függvény $x = 0$ -ban folytonos, de itt nem differenciálható, ugyanis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sg} x$$

nem létezik. (L. 4.6 Példa.)

A differenciálhányadosnak, ill. függvény differenciálhatóságának szemléletes geometriai jelentés adható.

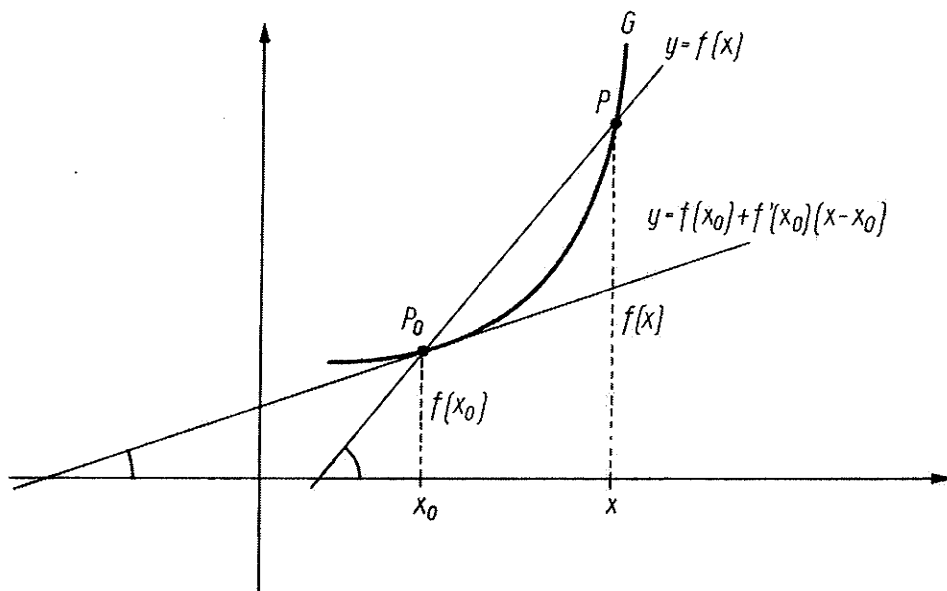
11.5 Definíció. Legyen az x_0 pont $K_{x_0, \delta}$ környezete az f függvény értel-

mezési tartományának részhalmaza, jelöljük G -vel f grafikonját, P_0 -al az $(x_0, f(x_0))$ pontot és P -vel a G görbe tetszőleges $(x, f(x))$ pontját ($x \in K_{x_0, \delta}$); azt mondjuk, hogy

G görbének a P_0 pontban létezik az érintője, ha a $P_0 P$ szelőknek "létezik a határfekvése $x \rightarrow x_0$ esetén" (a P_0 ponton áthaladó egyenest a $P_0 P$ szelő határfekvéseinek nevezzük $x \rightarrow x_0$ esetén, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow (P_0 P, e) x < \varepsilon.$$

11.3 Tétel. Ha az f függvény egy K_{x_0} környezetben értelmezve van, és az x_0 pontban differenciálható, akkor G grafikonjának az $(x_0, f(x_0))$ pontban van érintője és az érintő egyenes iránytangense $f'(x_0)$.



11.1 ábra

Bizonyítás. A G görbe $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontján áthaladó szelő iránytangense $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Mivel létezik $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, a szelő iránytangense az $(x_0, f(x_0))$ ponton áthaladó

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (11.4)$$

egyenletű egyenes iránytangenséhez tart, ha $x \rightarrow x_0$. Az $\arctg x$ függvény folytonossága miatt (l. 9. pont) ez azt jelenti, hogy a szelőnek az x -tengely pozitív irányával bezárt szöge a (11.4) egyenesnek az x -tengely pozitív irányával bezárt szögéhez tart, vagyis a szelő és a (11.4) egyenes által bezárt szög zérushoz tart. (l. 11.1 ábra.)

Bebizonyítható, hogy - fordítva - ha az f függvény grafikonjának van

érintője az x_0 abszcisszájú pontban és az nem párhuzamos az y -tengellyel, akkor f az x_0 pontban differenciálható.

(11.4) az x_0 abszcisszájú ponthoz tartozó érintő egyenlete. Ha a (11.4) egyenlet jobb oldalán álló lineáris függvényt $\ell(x)$ -szel jelöljük, vagyis

$$\ell(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

akkor azt látjuk, hogy az f függvény x_0 -hoz tartozó df differenciálja éppen az ℓ függvény megváltozásával egyenlő:

$$\ell(x_0 + h) - \ell(x_0) = f'(x_0)h = df.$$

"Az x_0 pontban differenciálható f függvény grafikonja x_0 elég kis környezetében közelítőleg az érintő egyenessel helyettesíthető."

12. Differenciálszámítás

Függvény differenciálhányadosának kiszámításához szükségünk lesz az alábbi tételekre, melyeket differenciálási szabályoknak is szokás nevezni. (Rövidség kedvéért ott, ahol ez nem vezet félreértésre, a "differenciálható az x helyen" kifejezés helyett a "differenciálható" kifejezést használjuk.)

12.1 Tétel. Ha az f függvény differenciálható, akkor cf is differenciálható, ($c \in \mathbb{R}$) és

$$\frac{d[c \cdot f(x)]}{dx} = c \frac{df(x)}{dx}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} [c \cdot f(x)]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = \\ &= c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x) \end{aligned}$$

12.2 Tétel. Ha az f és g függvények differenciálhatók, akkor $f + g$ is differenciálható és

$$\frac{d[f(x) + g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}.$$

Bizonyítás. A tétel a 11.2 Definíció és az 5.3 Tétel közvetlen következménye.

12.3 Tétel. Ha az f és g függvények differenciálhatók, akkor $f \cdot g$ is differenciálható és

$$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

Bizonyítás. A 11.2 Definíció alapján, a 11.2 Tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ f(x + \Delta x) \left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + g(x) \cdot \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \right\} = \\ &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

12.4 Tétel. Ha f és g differenciálhatók és $g(x) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható és

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Bizonyítás. A 11.2 Definíció alapján, a 6.8 és 11.2 Tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x+\Delta x)} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)} = \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Matematikai indukcióval igazolható, hogy a 12.3 Tétel megfelelője érvényes tetszőleges véges számú függvény szorzatára is:

$$\begin{aligned}
[f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x)]' &= f_1'(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) \dots f_n(x) + \\
&\quad + \dots + f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n'(x).
\end{aligned} \tag{12.1}$$

Ennek következménye:

$$[f^n(x)]' = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots \tag{12.2}$$

12.1 Példa. $f(x) \equiv C$ állandó; $f'(x) = \frac{dc}{dx} = 0$, ui.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0 \rightarrow 0, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

12.2 Példa. $f(x) = x$; $f'(x) = \frac{dx}{dx} = 1$, ui.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \rightarrow 1, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

12.3 Példa. $g(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$;

$g'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}$. Az eredmény azonnal adódik (12.2)-ből, ha azt az $f(x) = x$ függvényre alkalmazzuk és felhasználjuk a 12.2 Példa eredményét.

12.4 Példa. A $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ n -ed fokú polinom deriváltja

$p'(x) = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}$ $(n-1)$ -ed fokú polinom. A derivált kiszámításánál felhasználtuk a 12.1 és 12.2 Tételt, valamint a 12.3 Példa eredményét.

12.5 Tétel. Tegyük fel, hogy a $h \circ f$ összetett függvény az x_0 hely egy környezetében értelmezve van és $f(x_0) = y_0$, $h(y_0) = z_0$. Ha az f függvény az x_0 helyen, a h függvény az y_0 helyen differenciálható, akkor $h \circ f$ összetett függvény is differenciálható az x_0 helyen és $(h \circ f)'(x_0) = h'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

Bizonyítás. A 11.3 Definíció felhasználásával képezzük az f függvény, ill. a h függvény megváltozását az x_0 , ill. az y_0 helyen:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon_1(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ ahol}$$

$$\varepsilon_1(\Delta x) \rightarrow 0, \text{ ha } \Delta x \rightarrow 0,$$

$$\Delta h = h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon_2(\Delta y) \cdot \Delta y, \text{ ahol}$$

$$\varepsilon_2(\Delta y) \rightarrow 0, \text{ ha } \Delta y \rightarrow 0.$$

Igy a $h \circ f$ összetett függvény megváltozása az x_0 helyen:

$$\begin{aligned} (h \circ f)(x_0 + \Delta x) - (h \circ f)(x_0) &= h(f(x_0 + \Delta x)) - h(f(x_0)) = \\ &= h(y_0 + \Delta f) - h(y_0) = h'(y_0) \Delta f + \varepsilon_2(\Delta f) \cdot \Delta f = \\ &= h'(y_0) [f'(x_0) \Delta x + \varepsilon_1(\Delta x) \cdot \Delta x] + \varepsilon_2(\Delta f) [f'(x_0) \Delta x + \varepsilon_1(\Delta x) \Delta x] = \\ &= h'(y_0) \cdot f'(x_0) \Delta x + [h'(y_0) \varepsilon_1(\Delta x) + f'(x_0) \varepsilon_2(\Delta f) + \varepsilon_2(\Delta f) \varepsilon_1(\Delta x)] \Delta x, \end{aligned}$$

ahol $[h'(y_0) \varepsilon_1(\Delta x) + f'(x_0) \varepsilon_2(\Delta f) + \varepsilon_2(\Delta f) \varepsilon_1(\Delta x)] \rightarrow 0$, ha

$$\Delta x \rightarrow 0.$$

Megjegyzés: a tétel érvényes többszörösen összetett függvény esetén is. Az összetett függvény deriválási szabályát szokás "láncszabály"-nak nevezni.

12.6 Tétel. Tegyük fel, hogy az f függvény az (a, b) intervallumban szigorúan monoton és folytonos, az $x_0 \in (a, b)$ helyen differenciálható $f'(x_0) \neq 0$ és $y_0 = f(x_0)$; akkor az f^{-1} inverz függvény differenciálható az y_0 helyen és

$$f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (12.3)$$

Bizonyítás. f^{-1} különbségi hányadosa az $x = f^{-1}(y)$ jelöléssel:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}},$$

ul. f^{-1} szigorú monotonitása miatt $x - x_0 \neq 0$, ha $y \neq y_0$.

Ha $y \rightarrow y_0$, akkor f^{-1} folytonossága miatt $x \rightarrow x_0$, tehát

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Megjegyzés: ha tudjuk, hogy az f^{-1} függvény differenciálható, akkor alkalmazható a következő eljárás is. (9.1) első azonosságának mindkét oldalát differenciálva, felhasználva az összetett függvény differenciálási szabályát (12.5 Tétel) és a 12.2 Példát:

$$f^{-1'}(y_0) \cdot f'(x_0) = 1,$$

ahonnan (12.3) adódik.

13. Függvények differenciálása

Polinom differenciálhányadosát a 12.4 Példában határoztuk meg. Ebben a pontban a többi eddig tárgyalt (un. elemi) függvény differenciálhatóságát bizonyítjuk és differenciálhányadosát határozzuk meg.

$$\frac{d}{dx} \sqrt[q]{x} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}, \quad q = 1, 2, \dots, x > 0. \quad (13.1)$$

Bizonyítás. Az inverz függvényre vonatkozó (12.3) differenciálási szabályt alkalmazhatjuk, mivel $\sqrt[q]{x}$ az x^q függvény inverze. A függvény a $(0, +\infty)$ intervallumban szigorúan monoton növekedő. Legyen $x_0 > 0$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} \sqrt[q]{x} \right|_{x=x_0} &= \left. \frac{1}{q x^{q-1}} \right|_{x=\sqrt[q]{x_0}} = \\ &= \frac{1}{q x_0^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x_0^{-\frac{q-1}{q}} = \frac{1}{q} x_0^{\frac{1}{q}-1}. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}, \quad x > 0, \quad p, q = 1, 2, \dots, \quad (13.2)$$

Alkalmazzuk ut. az összetett függvény differenciálási szabályát:

$$\left[\left(x^{\frac{1}{q}} \right)^p \right]' = p \left(x^{\frac{1}{q}} \right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Könnyen belátható, hogy ha q páratlan, akkor (13.2) az $x < 0$ esetben is érvényes.

Ha $r > 0$ racionális szám és $x > 0$, akkor

$$\frac{d x^{-r}}{dx} = -r x^{-r-1}, \quad (13.3)$$

Ui. a hányados differenciálási szabályát alkalmazva

$$\frac{d \frac{1}{x^r}}{dx} = \frac{-r \cdot x^{-r-1}}{x^{2r}} = -r x^{-r-1}.$$

Tehát minden racionális α kitevő esetén érvényes:

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0. \quad (13.4)$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad (13.5)$$

ui. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right]. \quad (13.6)$$

A 4.3 Példából: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, másrészt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$, ui. (3.7)

alapján

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -2 \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = -\sin \frac{h}{2} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \rightarrow 0,$$

ha $h \rightarrow 0$.

(13.6)-ban a határátmenetet tagonként elvégezve (13.5) adódik.

Mivel $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$, alkalmazva az összetett függvény differenciálási szabályát kapjuk:

$$\frac{d \cos x}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x. \quad (13.7)$$

Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, alkalmazzuk a hányados differenciálási szabályát:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \\ x &\neq \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{T}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Mivel $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, az előbbiekhöz hasonlóan

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = \\ &= -(1 + \operatorname{ctg}^2 x), \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{T}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \quad (13.10)$$

ul. alkalmazzuk az inverz függvény differenciálási szabályát:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d \arcsin x}{dx} \right|_{x=x_0} &= \frac{1}{\cos x} \bigg|_{x=\arcsin x_0} = \frac{1}{\cos(\arcsin x_0)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}. \end{aligned}$$

Hasonlóan:

$$\left. \frac{d \arccos x}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{1}{-\sin(\arccos x_0)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x_0)}} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}},$$

tehát

$$\frac{d \arccos x}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1. \quad (13.11)$$

Hasonlóan

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (13.12)$$

Hasonlóan

$$\frac{d \operatorname{arcctg} x}{dx} = \frac{1}{-(1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x))} = - \frac{1}{1 + x^2}. \quad (13.13)$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \log a, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

(az e számra nézve 1. I. Kötet 16.2 Példa).

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges rögzített szám

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}. \quad (13.14)$$

h helyett új változót vezetünk be:

$a^h - 1 = \frac{1}{z}$, így $h = {}^a \log(1 + \frac{1}{z})$ és, ha $h \rightarrow 0$, akkor $|z| \rightarrow \infty$.

Tehát

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z}}{{}^a \log(1 + \frac{1}{z})} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{{}^a \log(1 + \frac{1}{z})^z}.$$

Vagyis, ha léteznek a $\lim_{z \rightarrow +\infty} {}^a \log(1 + \frac{1}{z})^z \neq 0$ és $\lim_{z \rightarrow -\infty} {}^a \log(1 + \frac{1}{z})^z \neq 0$ határ-
értékek és megegyeznek, akkor a (13.14) határérték is létezik.
Elegendő azt belátni, hogy

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{z})^z \quad (13.15)$$

és

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{z})^z \quad (13.16)$$

léteznek és megegyeznek, mert akkor a logaritmusfüggvény folytonossága miatt

$\lim_{z \rightarrow +\infty} {}^a \log(1 + \frac{1}{z})^z$ határérték is létezik.

Megmutatjuk, hogy ha (13.15) létezik, akkor (13.16) is létezik és me-
gegyeznek. Ennek igazolására (13.16)-ban új változót vezetünk be; legyen
 $y = -z$, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{z})^z &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{y})^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} (\frac{y}{y-1})^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{y-1})^{y-1} \cdot (1 + \frac{1}{y-1}) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[(1 + \frac{1}{t})^t \cdot (1 + \frac{1}{t}) \right], \text{ ahol } t = y - 1. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Ez utóbbi limesz pedig valóban megegyezik (13.15)-tel, ha az létezik.

Most meghatározzuk a $\lim_{z \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{z})^z$ határértékeket. Tekintsük a z_k ,
 $k \in T$, $z_k \rightarrow \infty$ tetszőleges sorozatot és vizsgáljuk, hogy az $(1 + \frac{1}{z_k})^{z_k}$,
 $k \in T$ sorozat milyen határértékhez tart, ha $k \rightarrow \infty$. Minden elég nagy
 z_k -hoz van pozitív egész n_k , hogy $n_k \leq z_k < n_k + 1$, vagyis

$$1 + \frac{1}{n_k} \geq 1 + \frac{1}{z_k} > 1 - \frac{1}{n_k + 1},$$

még inkább

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \geq \left(1 + \frac{1}{z_k}\right)^{z_k} > \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség a következő alakban is írható:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{z_k}\right)^{z_k} > \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n_k+1}}.$$

Mivel

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \rightarrow e \text{ és } \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \rightarrow e$$

(l. I. Kötet 16.2 Példa), valamint

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \rightarrow 1 \text{ és } \frac{1}{1 + \frac{1}{n_k+1}} \rightarrow 1,$$

ha $z_k \rightarrow \infty$, ezért $\left(1 + \frac{1}{z_k}\right)^{z_k} \rightarrow e$.

Ezek szerint

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} {}^a \log \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = {}^a \log e,$$

vagyis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \frac{1}{{}^a \log e}.$$

Tehát a (13.14) határérték:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{1}{{}^a \log e} = a^x e \log a,$$

mivel

$$a^{\log e} = \frac{e^{\log a}}{e^{\log a}} = \frac{1}{e^{\log a}}.$$

(1. 10.17).!

Az $a = e$ speciális esetben

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \quad (13.18)$$

(13.18)-ből látszik, hogy az e^x függvény differenciálása különösen egyszerűen történik. E függvénynek és inverzének az $e^{\log x}$ függvénynek kitüntetett szerepe van az analízisben és az alkalmazásokban. Az $e^{\log x}$ függvényt természetes alapú logaritmusfüggvénynek (logaritmus naturális) nevezzük, és $\ln x$ -szel jelöljük. Ezzel a jelöléssel

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a \quad (13.19)$$

Az inverz függvény differenciálási szabályának felhasználásával

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \quad (13.20)$$

Innen

$$\frac{d a^{\log x}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (13.21)$$

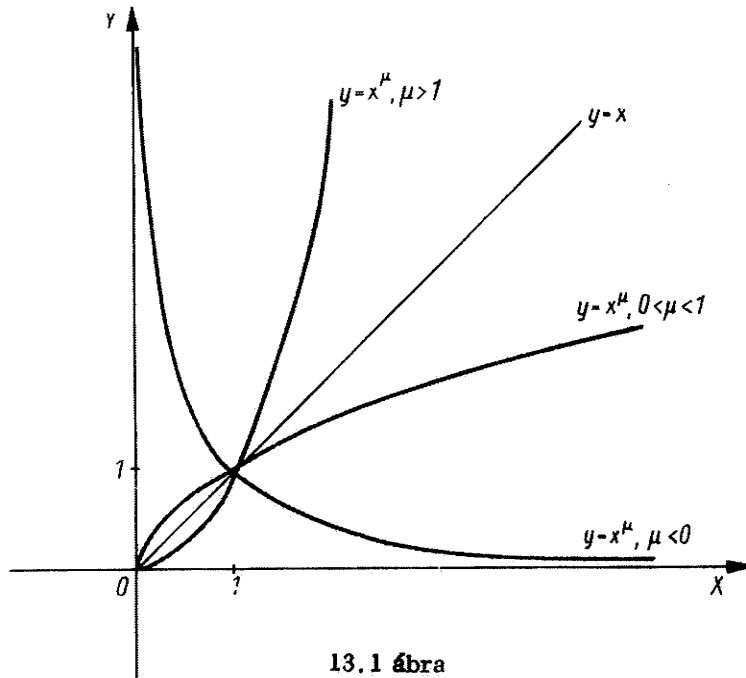
Az x^μ függvényt, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ (nem szükségképpen racionális szám), $a \in (0, +\infty)$ értelmezési tartományon a következőképpen értelmezzük:

$$x^\mu = e^{\mu \ln x}, \quad x > 0 \quad (13.22)$$

és (általános) hatványfüggvénynek nevezzük. Grafikonját l. a 13.1 ábrán. Az x^μ függvény differenciálható és az összetett függvény differenciálási szabálya alapján

$$\frac{dx^\mu}{dx} = e^{\mu \ln x} \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = x^\mu \mu \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1} \quad (13.23)$$

Látható, hogy a hatványfüggvény deriválási szabálya érvényes minden valós ki-tető esetére.



13.1 ábra

14. A derivált függvény. Magasabbrendű deriváltak

14.1 Definíció. Legyen az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $A \subset D$ halmaz minden pontjában differenciálható, akkor az

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in A$$

formulával értelmezett $f': A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt f derivált függvényének nevezzük.

14.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, ha f differenciálható minden $x \in D$ helyen és

az f' derivált függvény folytonos. A folytonosan differenciálható függvények halmazát C^1 -gyel jelöljük.

14.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow R$ függvény folytonosan differenciálható a $H \in D$ halmazon, ha f -nek H -ra való leszűkítése folytonosan differenciálható. A H halmazon folytonosan differenciálható függvények osztályát (halmazát) C_H^1 -val jelöljük.

14.4 Definíció. Ha az f függvénynek az x_0 hely egy környezetében létezik a derivált függvénye és az az x_0 helyen differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 helyen kétszer differenciálható; a

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

határértéket az f függvény x_0 -beli második deriváltjának nevezzük és $f''(x_0)$ -al jelöljük.

Vagyis a definíció szerint $(f'(x))'_{x=x_0} = f''(x_0)$. A második derivált jelölésére is szokás más szimbolumokat alkalmazni, így:

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, \quad \ddot{f}(x_0).$$

A derivált függvényhez hasonlóan értelmezhető az f függvény második derivált függvénye f'' . Ha az f függvény második derivált függvénye f'' folytonos, akkor az f függvényt kétszer folytonosan differenciálhatónak nevezzük.

A H halmazon kétszer folytonosan differenciálható függvények osztályát C_H^2 -val jelöljük. Értelmezhetjük az f függvény harmadik, negyedik, általában n -ik deriváltját a 14.4 Definíció alapján. Az n -dik derivált jelölése

$$f^{(n)}(x_0), \quad \text{ill.} \quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$$

Hasonlóan, beszélhetünk az f függvény harmadik, negyedik, általában n -ik derivált függvényről, ill. a C_H^n függvényosztályról.

Ha az f függvény a H halmazon akárhányszor differenciálható, azt így jelöljük:

$$f \in C_{H_i}^{\infty}.$$

14.1 Példa. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$ magasabbrendű deriváltjait számítjuk ki.

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}, \quad k \leq n,$$

$$f^{(n)}(x) = n!$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

$$f^{(n+m)}(x) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Ennek alapján egy $p_n(x)$ n -ed fokú polinom k -ik derivált függvénye legfeljebb $(n-k)$ -adfokú polinom, n -ik derivált függvénye állandó, $(n+1)$ -ik és minden következő deriváltja azonosan 0.

14.2 Példa. $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

általában

$$f^{(4n+k)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } k = 1 \\ -\sin x, & \text{ha } k = 2 \\ -\cos x, & \text{ha } k = 3 \\ \sin x, & \text{ha } k = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

14.1 Tétel. (Leibniz-formula.) Ha u és v n -szer differenciálható függvények, akkor szorzatuk is n -szer differenciálható és

$$[u \cdot v]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$$

Bizonyítás. A tételt matematikai indukcióval bizonyítjuk. A tétel $n=1$ -re igaz (1. 12.3 Tétel), ugyanis

$$(u \cdot v)' = \binom{1}{0} u^{(0)} \cdot v^{(1)} + \binom{1}{1} u^{(1)} \cdot v^{(0)} = u \cdot v' + u' \cdot v$$

Tegyük fel, hogy $u \cdot v$ $(n-1)$ -szer differenciálható és

$$(u \cdot v)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u^{(k)} \cdot v^{(n-1-k)};$$

itt a 12.2 és 12.3 Tétel alapján a jobb oldal differenciálható, tehát $u \cdot v$ n -szer differenciálható. Deriváljuk mindkét oldalt:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n)} &= \left[(u \cdot v)^{(n-1)} \right]' = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(u^{(k+1)} \cdot v^{(n-1-k)} + u^{(k)} \cdot v^{(n-k)} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u^{(k+1)} \cdot v^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u^{(k)} \cdot v^{(n-k)} \end{aligned}$$

Az első szummában vezessük be a $k+1 = \ell$ jelölést, a másodikban k helyett írjunk ℓ -et

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n)} &= \sum_{\ell=1}^n \binom{n-1}{\ell-1} u^{(\ell)} \cdot v^{(n-\ell)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} u^{(\ell)} \cdot v^{(n-\ell)} = \\ &= \binom{n-1}{0} u^{(0)} \cdot v^{(n)} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{\ell-1} + \binom{n-1}{\ell} \right] u^{(\ell)} \cdot v^{(n-\ell)} + \\ &+ \binom{n-1}{n-1} u^{(n)} \cdot v^{(0)}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0}, \quad \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}$$

és

$$\binom{n-1}{\ell-1} + \binom{n-1}{\ell} = \binom{n}{\ell} \quad (\text{I. I. Kötet (8.7)}),$$

$$(u, v)^{(n)} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u^{(\ell)} \cdot v^{(n-\ell)} \cdot !$$

15. Középértéktételek

Az 1.4 Definícióval értelmeztük a függvény monoton növekedését (csökkenését) az értelmezési tartományon, ill. annak részhalmazán (intervallumon) monoton növekedő. A következő definíció a függvény egy lokális (pontbeli) tulajdonságára vonatkozik.

15.1 Definíció. Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$; azt mondjuk, hogy az f függvény

$\xi \in D_f$ -ben lokálisan növekedő (lokálisan csökkenő) ha ξ -nek

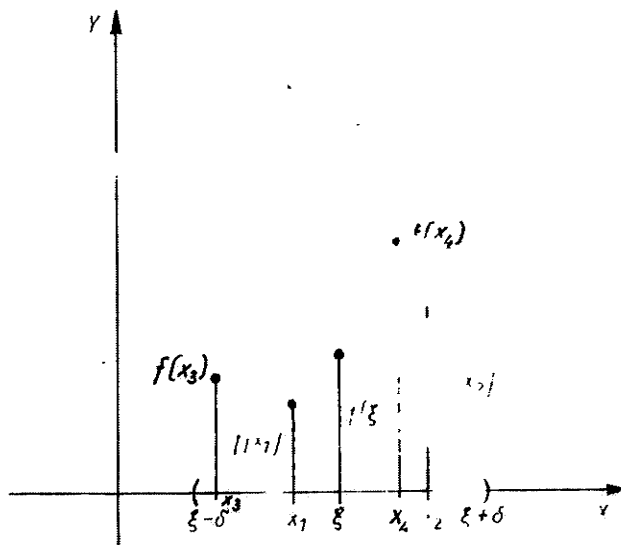
van olyan $K_{\xi, \delta}$ környezete, hogy minden

$x_1, x_2 \in K_{\xi, \delta} \cap D_f$, $x_1 < \xi < x_2$ -re:

$$f(x_1) < f(\xi) < f(x_2)$$

$$(f(x_1) > f(\xi) > f(x_2)).$$

Ha az f függvény lokálisan növekedő (csökkenő), az intervallum egy pontjában, abból nem következik, hogy monoton növekedő (monoton csökkenő) lenne az intervallumban (l. 15.1 ábra).



15.1 ábra

15.1 Tétel. (Lokális növekedés tétele.) Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, és $\xi \in D_f$; ha $f'(\xi)$ létezik és $f'(\xi) > 0$ ($f'(\xi) < 0$) akkor az f függvény ξ -ben lokálisan növekedő (csökkenő).

Bizonyítás. Csak a lokális növekedésre vonatkozó állítást bizonyítjuk. Mivel

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0,$$

tehát

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0, \text{ ha } 0 < |x - \xi|$$

elég kicsi, és $x \in D_f$. Ebből következik, hogy ha $x > \xi$, akkor $f(x) > f(\xi)$,

ill. ha $x < \xi$, akkor $f(x) < f(\xi)$!

Az 1.8 Definícióban értelmezett lokális maximumot és lokális minimumot közös néven lokális szélsőértéknek nevezzük. Azokat a helyeket, ahol a függvénynek lokális szélsőértéke van, szélsőérték-helyeknek nevezzük.

15.2 Tétel. (Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.)

Ha az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $\xi \in D_f$ pontban lokális szélső-

értéke van, $f'(\xi)$ létezik és van a ξ -nek olyan $K_{\xi, \delta}$ környezete, hogy $K_{\xi, \delta} \subset D_f$, akkor $f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás. A tétel az 15.1 Tételnek triviális következménye. Tegyük fel ugyanis, hogy $f'(\xi) \neq 0$, legyen pl. $f'(\xi) > 0$, akkor a 15.1 Tétel szerint a függvény lokálisan növekedő és minden K_ξ -hez van $x_1, x_2 \in K_\xi$ hogy $f(x_1) < f(\xi) < f(x_2)$, ami ellentmond annak, hogy f -nek ξ -ben lokális szélsőértéke van.!

Megjegyzés: A tétel feltételei lényegesek, ezt két példával illusztráljuk.

15.1 Példa. Az $f(x) = |x|$ függvénynek az $x = 0$ helyen lokális minimuma van, a tétel mégsem alkalmazható, mivel $f'(0)$ nem létezik.

15.2 Példa. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvény leszűkítését az $[1, 2]$ intervallumra. A leszűkített függvénynek az $x = 1$ helyen lokális szélsőértéke van, de nincs 1 -nek olyan környezete, amelyben a függvény értelmezve van. A leszűkített függvény 1 pontbeli deriváltja (az eredeti függvény 1 pontbeli jobb oldali deriváltja) nem zérus.

A következő tételek intervallumban differenciálható függvények tulajdonságait fejezi ki.

15.3 Tétel. (Rolle tétele.) Legyen $f \in C^0_{[a, b]}$. (a, b) -ben differenciálható és $f(a) = f(b)$, akkor van $\xi \in (a, b)$, hogy $f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás. Mivel az f függvény $[a, b]$ -ben folytonos, Weierstrass tétele értelmében (l. 7.6 Tételt) felveszi maximumát és minimumát:

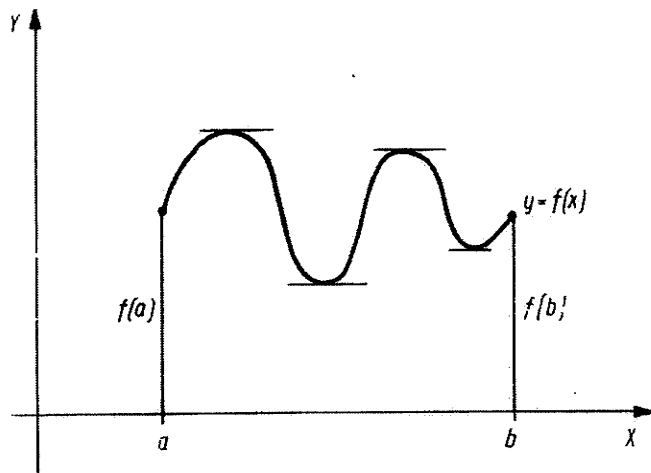
$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{és} \quad m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

Abban a speciális esetben, amikor $m = M$, a feltétel szerint $m = M = f(a) = f(b)$, s ez csak akkor lehetséges, ha $f(x) = \text{const}$ $[a, b]$ -ben, de akkor bármely $\xi \in (a, b)$ helyre igaz, hogy $f'(\xi) = 0$. (L. 12.1 Példa.)

Ha $m < M$, akkor az f függvény a m és M értékek közül legalább az egyiket az intervallum belsejében veszi fel, azaz van olyan $\xi \in (a, b)$, melyre $f(\xi) = m$, vagy $f(\xi) = M$, de akkor itt az f -nek lokális szélsőértéke van és a 15.2 Tételből következik, hogy $f'(\xi) = 0$!

A Rolle tétel geometriailag azt jelenti, hogy van legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$ hely, melyben a függvény grafikonjához tartozó érintő vízszintes. (L. 15.2 ábra.)

A Rolle tétel általánosítását, amikor $f(a) \neq f(b)$, a következő tételben fogalmazzuk meg:



15. 2 ábra

15.4 Tétel. (Lagrange-féle középértéktétel.)

Legyen $f \in C^0[a, b]$, (a, b) -ben differenciálható, akkor van $\xi \in (a, b)$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (15.1)$$

Bizonyítás. A tételt segédfüggvény bevezetésével Rolle tételére vezetjük vissza. Legyen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Mivel F $[a, b]$ -ben folytonos és (a, b) -ben differenciálható függvény, valamint $F(a) = f(a)$ és

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = f(a),$$

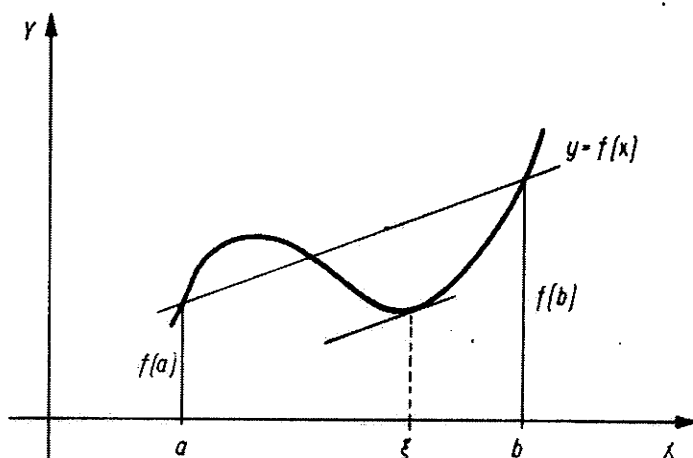
azaz $F(a) = F(b)$, alkalmazható a Rolle-tétel: van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $F'(\xi) = 0$, vagyis

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

A Lagrange-féle középértéktételnek egy lehetséges mechanikai interpretációját kapjuk abban az esetben, ha az $y = f(x)$ ut-idő függvényt jelent.

Ekkor (15.1) bal oldala az átlagsebességet, jobb oldala a pillanatnyi sebességet jelenti. A tétel azt mondja ki, hogy van olyan ξ időpillanat, amikor ezek megegyeznek.

A Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentése: van legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$ hely, melyben a függvény grafikonjához tartozó érintő párhuzamos a görbe végpontjait összekötő huzzal. (L. 15.3 ábra.)



15.3 ábra

(15.1) felírható más alakban is:

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi)$$

Ebben a felírásban a Lagrange-féle középértéktétel jelentése: a függvény megváltozása megegyezik a ξ -beli érintő emelkedésével. Uí. a ξ pontbeli érintő egyenlete (l. (11.4))

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi),$$

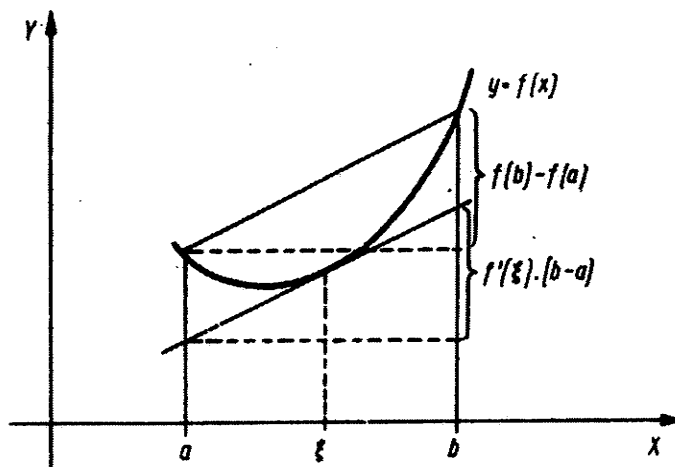
rendezve

$$y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \quad (15.2)$$

Tekintsük (15.2)-t az a , ill. b helyen és képezzük ezek különbségét, az érintő emelkedését:

$$y(b) - y(a) = f'(\xi)(b-a)$$

(l. 15.4 ábra).



15.4 ábra

15.5 Következmény. (Deriváltnak nem lehet megszüntethető szakadása.)

Legyen $f \in C^0_{K_a}$ és differenciálható $K_a \setminus \{a\}$ -ban;

ha létezik $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = A$, akkor f az " a " helyen is differenciálható és $f'(a) = A$.

Bizonyítás. Legyen $[a, x] \subset K_a$. Az $[a, x]$ intervallumban az f függvényre alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel; van olyan $\xi \in (a, x)$ melyre

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi).$$

Mivel $\xi \in (a, x)$, azért ha $x \rightarrow a$, akkor $\xi \rightarrow a$, így

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi \rightarrow a} f'(\xi) = A.$$

15.3 Példa.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ nem létezik, ugyanakkor a derivált létezik az $x = 0$ helyen és $f'(0) = 0$.

15.4 Példa.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, \quad \text{ha } x \neq 0,$$

mivel $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, alkalmazható a 15.5 Következmény, így:

$$f'(0) = 0.$$

15.6 Tétel. (Cauchy-féle középértéktétel.)

Legyen $f \in C^0_{[a,b]}$, $g \in C^0_{[a,b]}$, mindkét függvény (a,b) -ben differenciálható és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a,b)$; akkor van olyan $\xi \in (a,b)$ melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Abban a speciális esetben, amikor $g(x) \equiv x$, a Lagrange-féle középértéktétel adódik.

Bizonyítás. Bevezetjük a következő $F(x)$ segédfüggvényt, majd erre alkalmazzuk a Rolle tételt:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)).$$

Itt $g(b) - g(a) \neq 0$ mivel $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ (vö. Rolle-tétele).

Mivel $F \in C^0_{[a,b]}$ differenciálható (a,b) -ben és $F(a) = f(a)$, valamint $F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(b) - g(a)) = f(a) = F(a)$, van olyan $\xi \in (a,b)$, melyre $F'(\xi) = 0$, azaz

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0.$$

16. A Bernoulli - l'Hospital szabály

Bizonyos feltételeket kielégítő függvények határértékének kiszámítását könnyíti meg a Bernoulli - l'Hospital szabály.

16.1 Tétel. Legyenek az f és g függvények differenciálhatók az " a " hely valamilyen $K_a \setminus \{a\}$ környezetében, valamint

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ és } g'(x) \neq 0, \quad x \in K_a \setminus \{a\},$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (16.1)$$

feltéve, hogy az utóbbi határérték létezik (vagy $\pm\infty$).

Bizonyítás. Az f és g függvényeket az " a " helyen is folytonossá tesszük, oly módon, hogy ezen a helyen a következő módon értelmezzük: $f(a) = g(a) = 0$. Legyen $x \in K_a \setminus \{a\}$, akkor az (a, x) intervallumban alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (a, x).$$

Ha $x \rightarrow a$ akkor $\xi \rightarrow a$ és amennyiben $\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

létezik, akkor (16.1) fennáll.

Megjegyzés: a tétel megfordítása nem igaz. Előfordulhat ugyanis, hogy

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték nem létezik, ugyanakkor a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték létezik.

16.1 Példa. Legyen $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ és $g(x) = \sin x$. A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték létezik és egyenlő 0-val.

Ugyanis $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow 0$. Ezzel szemben

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ függvénynek a 0 helyen nem létezik a határértéke,

mivel $\cos \frac{1}{x}$ -nek nem létezik. (L. 5.1 Példa.)

16.2 Tétel. Legyenek az f és g függvények differenciálhatók, $g'(x) \neq 0$ az " a " hely valamely $K_a \setminus \{a\}$ környezetében és

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty,$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (16.2)$$

amennyiben az utóbbi határérték létezik (vagy $\pm \infty$).

Bizonyítás. Legyen $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Először abban az esetben bizonyítjuk a té-

telt, ha A véges szám. Megmutatjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ és $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Ebből a tétel állítása következik. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta_1 > 0$, hogy

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \frac{\varepsilon}{2} \quad (16.3)$$

minden $x \in (a, a + \delta_1)$ -re.

Másrészt $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ miatt van olyan $\delta_2 > 0$, hogy

$$f(x) \neq 0 \text{ és } g(x) \neq 0 \quad (16.4)$$

minden $x \in (a, a + \delta_2)$ -re. Legyen $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, akkor (16.3) és (16.4) fennáll minden $x \in (a, a + \delta)$ esetén. Válasszuk meg x_1 és x_2 -t

ugy, hogy $a < x_1 < x_2 < a + \delta$ akkor az (x_1, x_2) intervallumban alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel (15.6 Tétel):

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, a + \delta), \quad (16.5)$$

de (16.4) miatt (16.5) így írható:

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_2)}{f(x_1)}}{1 - \frac{g(x_2)}{g(x_1)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Mivel $\xi \in (a, a + \delta)$, azért (16.3)-at figyelembe véve érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_2)}{f(x_1)}}{1 - \frac{g(x_2)}{g(x_1)}} < A + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16.6)$$

Rögzített x_2 mellett

$$\frac{1 - \frac{f(x_2)}{f(x_1)}}{1 - \frac{g(x_2)}{g(x_1)}} \rightarrow 1,$$

ha $x_1 \rightarrow a+0$, mivel

$$\lim_{x_1 \rightarrow a} |f(x_1)| = \lim_{x_1 \rightarrow a} |g(x_1)| = \infty.$$

Alkalmazzuk a következő jelölést:

$$\frac{1 - \frac{f(x_2)}{f(x_1)}}{1 - \frac{g(x_2)}{g(x_1)}} = \frac{1}{1 + \varphi(x_1)},$$

ahol $\varphi(x_1) \rightarrow 0$, ha $x_1 \rightarrow a+0$. Mivel $1 + \varphi(x_1) > 0$, a (16.6) egyenlőtlenséget végig szorozva $1 + \varphi(x_1)$ -gyel adódik, hogy

$$A - \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(x_1) \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{f(x_1)}{g(x_1)} < A + \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(x_1) \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (16.7)$$

Válasszuk meg a δ_3 -at, ill. δ_4 -et úgy, hogy

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \varphi(x_1) \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

ill.

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \varphi(x_1) \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesüljön, ha $x_1 \in (a, \delta_3)$, ill. $x_1 \in (a, \delta_4)$. Ennek és (16.7)-nek alapján

$$A - \varepsilon < \frac{f(x_1)}{g(x_1)} < A + \varepsilon$$

minden $x_1 \in (a, a + \delta^*)$, ahol $\delta^* = \min(\delta, \delta_3, \delta_4)$, azaz

$$\lim_{x_1 \rightarrow a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = A.$$

Ily módon beláttuk, hogy $\frac{f(x)}{g(x)}$ jobb oldali határértéke a $x = a$ helyen A . Hasonlóan látható be, hogy a bal oldali határérték is A . Legyen most

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty.$$

Tetszőleges $P > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 2P, \quad \text{ha } x \in (a, a + \delta).$$

Válasszuk meg x_1, x_2 -t az előzőkhöz hasonlóan, akkor figyelembe véve (16.5)-öt, következik, hogy

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} > 2P(1 + \vartheta(x_1)), \quad (16.8)$$

ha x_1 az "a" helyhez elég közel van. Azonban $\lim_{x_1 \rightarrow a+0} \vartheta(x_1) = 0$ -ból következik,

hogy $(1 + \vartheta(x_1)) > \frac{1}{2}$, ha x_1 az "a" helyhez elég közel van, innen:

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} > P,$$

vagyis $\frac{f(x)}{g(x)}$ jobb oldali határértéke az $x = a$ helyen $+\infty$.

Hasonlóan látható be, hogy bal oldali határértéke is $+\infty$.

Hasonlóan bizonyítható a tétel a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$ esetben is!

16.3 Tétel. A Bernoulli- ℓ' Hospital szabály azaz a 16.1 és 16.2 Tétel érvényes abban az esetben is ha $a = +\infty$ vagy $a = -\infty$.

Bizonyítás. Legyen $a = +\infty$. Alkalmazzuk az $x = \frac{1}{u}$ helyettesítést, akkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(\frac{1}{u})}{g(\frac{1}{u})}. \quad (16.9)$$

Az előző tételeket alkalmazva (16.5) így írható

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{2} f'(\frac{1}{u})}{-\frac{1}{2} g'(\frac{1}{u})} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f'(\frac{1}{u})}{g'(\frac{1}{u})},$$

vagyis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

amennyiben ez utóbbi határérték létezik.

A tétel hasonlóan bizonyítható az $a = -\infty$ esetben is.

A Bernoulli-é' Hospital szabály alkalmazásával nem mindig sikerül egyszerűsítést elérni.

16.2 Példa.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

akárhányszor is alkalmazzuk a szabályt, egyszerűsítést nem érünk el. Közvetlen kiszámítással kapjuk

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

16.3 Példa.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{kx}, \quad n \in \mathbb{T}, \quad k > 0.$$

A Bernoulli-é' Hospital szabály n -szeres alkalmazásával adódik

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{kx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{k} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{k^n} = 0.$$

Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy e^{kx} "erősebben tart" a $+\infty$ -hez, mint x^n .

16.4 Példa.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu}, \quad \mu > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu \cdot x^\mu} = 0.$$

16.5 Példa.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^k \cdot \ln^p x, \quad k > 0, \quad p=1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} x^k \ln^p x &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln^p x}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{p \ln^{p-1} x}{-k x^{-k}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{p(p-1) \ln^{p-2} x}{(-k)^2 x^{-k}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{p!}{(-k)^p x^{-k}} = 0. \end{aligned}$$

16.6 Példa.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x, \quad x > 0.$$

Mivel $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$, felhasználva az 5.8 Tételt és az előző példa eredményét arra az esetre, amikor $k = p = 1$, kapjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = 1$.

17. Függvényvizsgálat

Teljes függvényvizsgálat elvégzésekor az eddig előforduló fogalmak és tételek mellett szükségünk lesz további fogalmakra és tételekre.

17.1 Tétel. (Integrálszámítás alaptétele.) Legyen az $f \in C^0_{[a,b]}$ függvény differenciálható az (a,b) intervallumban; $f(x) \equiv c$ állandó akkor és csak akkor, ha $f'(x) \equiv 0$. Jelöléssel: $f(x) \equiv c \Leftrightarrow f'(x) \equiv 0$.

Bizonyítás. A szükségesség igazolásához lásd a 12.1 Példát. Az elégségesség igazolásához felhasználjuk a Lagrange-féle közéértéktételt. Legyen $x \in (a,b)$, akkor $f(x) - f(a) = f'(\xi) \cdot (x-a) \equiv 0$, $\xi \in (a,b)$. Mivel $f'(\xi) = 0$, $f(x) \equiv f(a)$.

17.2 Következmény. Legyen az f és g függvény $[a,b]$ -ben folytonos és (a,b) -ben differenciálható. Ha $f'(x) \equiv g'(x)$, $x \in (a,b)$, akkor $f(x) \equiv g(x) + C$.

Bizonyítás. $(f'(x) - g'(x)) \equiv 0$, azaz $(f(x) - g(x))' \equiv 0$ az előzőek értelmében $f(x) - g(x) \equiv C$.

Ebben a pontban a továbbiakban az f függvényről feltesszük, hogy legalább egyszer (ahol szükséges, kétszer, ill. háromszor) differenciálható a szóban forgó intervallumban vagy a szóban forgó hely egy egész környezetében.

17.3 Tétel. (Monoton növekedés tétele.) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az f függvény az I intervallumban monoton növekedő (csökkenő) legyen: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), minden $x \in I$ -re.

Bizonyítás. A feltétel szükséges: ha f monoton növekedő és $x \in I$, akkor

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

mivel a tört nem negatív.

A feltétel elégséges: ha $f'(x) \geq 0$ és $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, a Lagrange-féle középértéktétel alapján

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$$

a feltételek miatt.!

17.4 Következmény. Ha $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), $x \in I$ és nincs I -nek olyan részintervalluma, ahol $f'(x) \equiv 0$, (a derivált csak izolált pontokban lehet 0) akkor az f függvény az I intervallumban szigoruan monoton növekedő (csökkenő).

17.1 Példa. $f(x) = x^3$ a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban szigoruan monoton növekedő, bár $f'(0) = 0$.

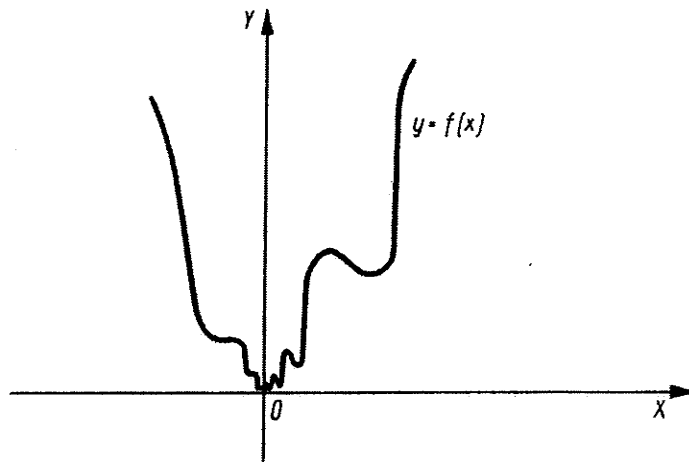
Szélsőérték létezésének elégséges feltételei:

17.5 Tétel. Ha $f'(a) = 0$ és az $x = a$ helyen f monoton csökkenőből (növekedőből) monoton növekedőbe (csökkenőbe) megy át, akkor ott f -nek minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás. Mivel az f függvény $x < a$ esetén monoton csökkenő és az " a " helyen folytonos, $f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$. Hasonlóan látható be, hogy

$$f(a) \leq f(x), \quad x > a.$$

A feltétel nem szükséges, lásd 17.1 ábrát.



17.1 ábra

17.6 Tétel. Ha $f'(a) = 0$ és az $x = a$ helyen f' negatívból (pozitívból) pozitívba (negatívba) megy át, akkor f -nek ott minimuma (maximuma) van.

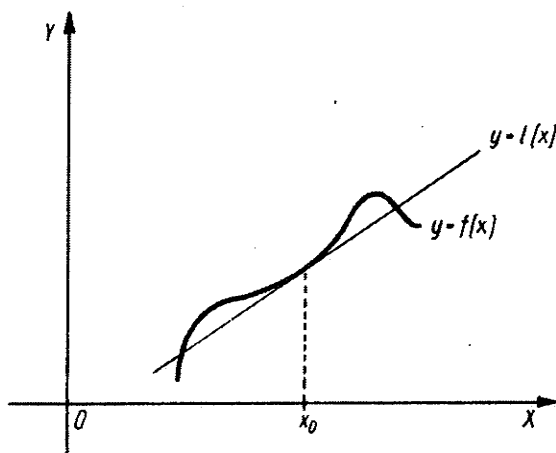
Bizonyítás. A 17.3 Tételből következik, hogy f monoton csökkenő (növekedő), ha $x < a$ és monoton növekvő (csökkenő), ha $x > a$, tehát az $x = a$ hely minimum (maximum) hely!

17.7 Tétel. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), akkor az " a " helyen f -nek minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás. Mivel $f''(a) > 0$, f' az " a " helyen lokálisan növekedő (l. 15.1 Tétel), de akkor $f'(x) - f'(a) < 0$, így $f'(x) < 0$, ha $x < a$ és $f'(x) - f'(a) > 0$, így $f'(x) > 0$, ha $x > a$. Ezzel a tételt a 17.6 Tételre vezettük vissza!

17.1 Definíció. Legyen az f függvény grafikonjának nem függőleges érintője az x_0 pontban (vagyis legyen f differenciálható x_0 -ban), az érintő egyenlete (l. (11.4)) $y = \ell(x)$, ahol $\ell(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban alulról nézve lokálisan konvex (konkáv), ha x_0 -nak van olyan K_{x_0} környezete, hogy minden $x \in K_{x_0} \setminus \{x_0\}$ -

ra f grafikonja az érintő felett (alatt) van: $f(x) > \ell(x)$; $(f(x) < \ell(x))$. (L. 17.2 ábra.)



17.2 ábra

17.8 Tétel. (A lokális konvexitás elégséges feltétele.)

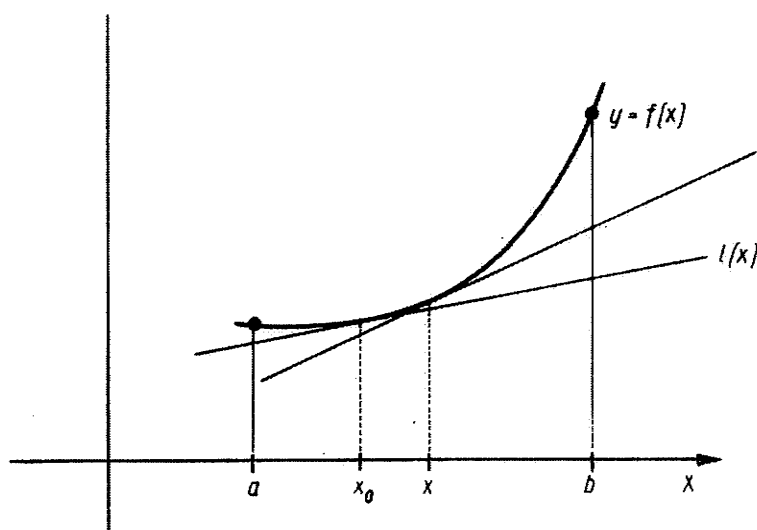
Ha $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), akkor f az x_0 pontban lokálisan konvex (konkáv).

Bizonyítás. Ha az x_0 pontbeli érintő egyenlete $y = \ell(x)$, akkor $\ell'(x) = f'(x_0)$, így az $f(x) - \ell(x)$ függvény deriváltja:

$$(f(x) - \ell(x))' = f'(x) - f'(x_0). \quad (17.1)$$

A feltevés szerint $f''(x_0) > 0$, tehát f' az x_0 helyen lokálisan nő, ebből következik, hogy $f'(x) > f'(x_0)$, ha $x > x_0$ és $f'(x) < f'(x_0)$, ha $x < x_0$. Így (17.1) alapján $(f(x) - \ell(x))' > 0$, ill. < 0 aszerint, hogy $x > x_0$, ill. $x < x_0$. A 17.4 Következmény értelmében tehát az $(f(x) - \ell(x))$ függvény x_0 előtt szigorúan monoton fogyó, x_0 után szigorúan monoton növekedő. Mivel az x_0 helyen a függvényérték 0, az x_0 hely előtt is és után is pozitív, vagyis az f függvény grafikonja az x_0 hely előtt is és után is az x_0 pontbeli érintő felett van.!

17.2 Definíció. Legyen az f függvény az I intervallumban differenciálható. Azt mondjuk, hogy f I -ben konvex (konkáv), ha minden $x_0 \in I$ -re és minden $x \in I$ -re, $x \neq x_0$ igaz az, hogy $f(x) > l_{x_0}(x)$; ($f(x) < l_{x_0}(x)$), ahol $y = l_{x_0}(y)$ az x_0 abszcisszájú pontbeli érintő egyenlete. (L. 17.3 ábra.)

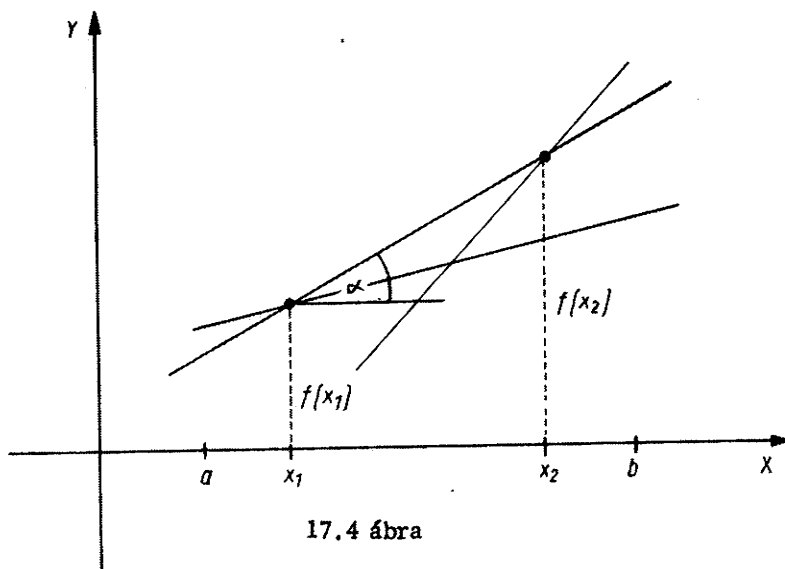


17.3 ábra

17.9 Tétel. Legyen f az I intervallumban differenciálható függvény. f I -ben akkor és csak akkor konvex (konkáv), ha f' I -ben szigorúan monoton növekedő (csökkenő).

Bizonyítás. A bizonyítást a konvex esetre végezzük el. A szükségeség igazolása:

Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, és tekintsük az x_1 helyhez tartozó érintőt. Az érintő iránytangense $f'(x_1)$. f konvexitásából következik, hogy $(x_2, f(x_2))$ az érintő felett van, és ezért az $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő hur iránytangense ($\text{tg } \alpha$) nagyobb mint az érintő iránytangense $f'(x_1)$, azaz $f'(x_1) < \text{tg } \alpha$. Hasonlóan látható be az x_2 helyhez tartozó érintő felhasználásával, hogy $\text{tg } \alpha < f'(x_2)$. Az utóbbi két egyenlőtlenségből $f'(x_1) < f'(x_2)$. (L. 17.4 ábra.)



17.4 ábra

Az elégségségesség igazolása:

Legyen $x_0 \in I$ és az x_0 -beli érintő egyenlete $y = l(x)$, ahol

$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Képezzük az $f(x) - l(x)$ függvény deriváltját:

$$(f(x) - l(x))' = f'(x) - l'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

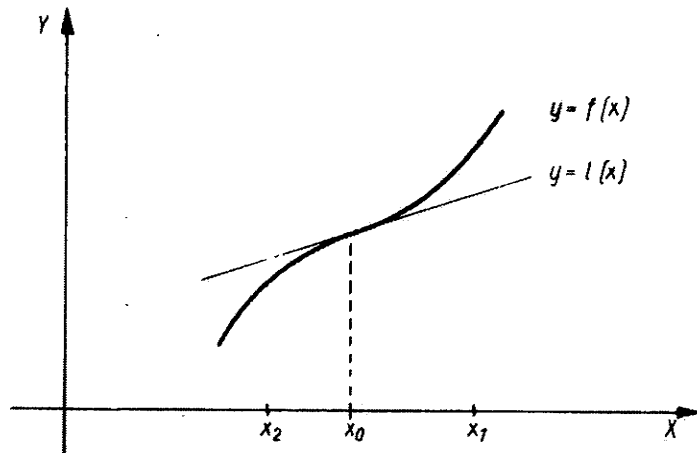
Mivel f' szigorúan monoton növekedő, azért $f'(x) - f'(x_0) > 0$, ha $x > x_0$ és $f'(x) - f'(x_0) < 0$, ha $x < x_0$. Tehát az $f(x) - l(x)$ függvény x_0 előtt szigorúan monoton csökkenő, x_0 után szigorúan monoton növekedő és mivel x_0 -ban 0, azért $f(x) - l(x) > 0$ minden $x \in I$, $x \neq x_0$!

17.10 Tétel. Legyen f az I intervallumban kétszer differenciálható függvény.

Ha $f''(x) > 0$ (< 0) minden $x \in I$ -re, akkor f I -ben konvex (konkáv).

Bizonyítás. Mivel $f''(x) > 0$, $f'(x)$ szigorúan monoton növekedő I -ben, így a tétel a 17.9 Tételnek közvetlen következménye.!

17.3 Definíció. Legyen az f függvény grafikonja x_0 pontjához tartozó érintő egyenlete $y = l(x)$. Azt mondjuk, hogy x_0 f -nek inflexiós pontja, ha minden K_{x_0} környezetben van $x_1, x_2 \in K_{x_0}$, hogy $f(x_1) > l(x_1)$ és $f(x_2) < l(x_2)$. (L. 17.5 ábra.)



17.5 ábra

17.11 Tétel. (Inflexiós pont létezésének szükséges feltétele.) Legyen f kétszer differenciálható x_0 -ban. Ha x_0 f -nek inflexiós pontja, akkor $f''(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Mivel f x_0 -ban sem nem lokálisan konvex, sem nem lokálisan konkáv, a 17.8 Tételből következik az állítás!

A feltétel nem elégséges. Pl. $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$, de $x = 0$ -ban nincs inflexiós pont.

Inflexiós pont létezésének elégséges feltételei:

17.12 Tétel. Ha $f''(x_0) = 0$ és az x_0 helyen f' monoton csökkenőből (növekedőből) monoton növekedőbe (csökkenőbe) megy át, akkor x_0 inflexiós pont.

Bizonyítás. Legyen az x_0 -hoz tartozó érintő egyenlete $y = l(x)$. A feltétel szerint a 17.5 Tétel alapján az x_0 helyen f' -nek lokális minimuma van. Mivel $l'(x) = f'(x_0)$, tehát $(f(x) - l(x))' = f'(x) - f'(x_0) > 0$ minden $x \in K_{x_0} \setminus \{x_0\}$ -ra. Ebből következik, hogy $f(x) - l(x)$ az x_0 hely előtt és

után is növekedik. Mivel $f(x_0) - l(x_0) = 0$, $f(x) - l(x)$ az x_0 hely előtt negatív, utána pozitív, vagyis f grafikonja az x_0 hely előtt az érintő alatt, x_0 után az érintő felett van, azaz az érintő x_0 -ban átmetszi a görbét.!

17.13 Tétel. Ha $f''(x_0) = 0$ és az x_0 helyen f'' előjelet vált, akkor x_0 inflexiós pont.

Bizonyítás. Mivel x_0 -ban f'' előjelet vált, a 17.6 Tétel alapján f' -nek itt vagy lokális minimuma, vagy lokális maximuma van, és a 17.12 Tétel feltételei teljesülnek.!

17.14 Tétel. Ha $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor x_0 inflexiós pont.

Bizonyítás. A feltétel szerint f' -nek lokális szélsőértéke van x_0 -ban (l. 17.7 Tételt), és a 17.12 Tétel feltételei teljesülnek.!

17.2 Példa. Vizsgáljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. Az értelmezési tartomány: $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

A határérték az értelmezési tartomány szélén:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0, \text{ és } \lim_{x \rightarrow 0+\infty} x^2 \ln x = +\infty.$$

A monotonitási tartományok és a lehetséges szélsőérték helyek meghatározása az első derivált segítségével történik.

$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x = x(2\ln x + 1)$, minden $x \in D$ -re folytonos. Az

$$f'(x) = x(2\ln x + 1) = 0 \text{ egyenlet megoldása } x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$f'(x) < 0, \quad x \in (0, \frac{1}{\sqrt{e}});$$

$$f'(x) > 0, \quad x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty),$$

tehát f előbb csökkenő, majd növekvő, az $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ helyen a függvénynek minimuma van (l. 17.6 Tétel). A konvexitási, ill. konkávitási tartományokat

és a lehetséges inflexiós pontokat a második derivált segítségével határozzuk meg.

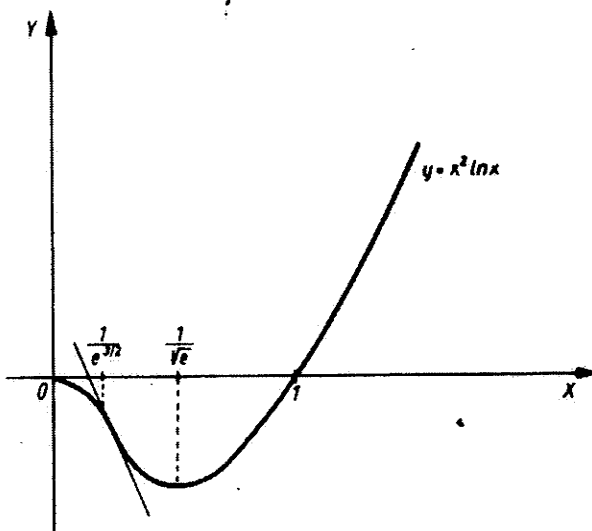
$$f''(x) = 2 \ln x + 3.$$

Az

$$f''(x) = 2 \ln x + 3 = 0 \text{ egyenlet megoldása } x = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

$$f''(x) < 0, \quad x \in (0, e^{-\frac{3}{2}}); \quad f''(x) > 0, \quad x \in (e^{-\frac{3}{2}}, +\infty),$$

tehát f előbb konkáv, majd konvex, $x = e^{-\frac{3}{2}}$ inflexiós pont (l. 17.13 Tétel).
A függvény grafikonjának vázlatát lásd a 17.6 ábrán.



17.6 ábra

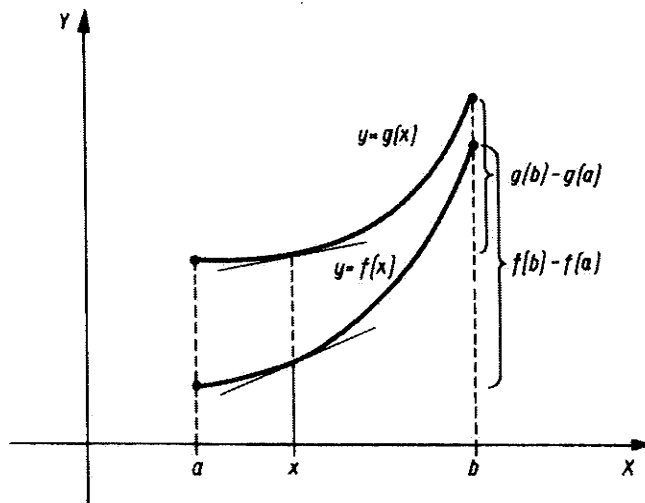
17.15 Tétel. Legyen az f függvény az x_0 helyen $(n+1)$ -szer differenciálható, $n \geq 2$. Ha $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ és $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, akkor f -nek az x_0 helyen szélsőértéke, ill.

inflexiója van aszerint, hogy n páratlan, ill. páros. A szélsőérték minimum, vagy maximum aszerint, hogy $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, vagy $f^{(n+1)}(x_0) < 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f^{(n+1)}(x_0) > 0$. Akkor mivel $f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n-1)}$ az x_0 helyen monoton fogyóból monoton növekedőbe megy át, és $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ miatt van K_{x_0} , hogy $K_{x_0} \setminus \{x_0\}$ -ban $f^{(n-1)}(x) > 0$. Ez annyit jelent, hogy K_{x_0} -ban $f^{(n-2)}$ szigorúan monoton növekedő, és így $f^{(n-2)}(x_0) = 0$ miatt $f^{(n-3)}(x)$ -nek az x_0 helyen lokális minimuma van. Hasonlóan következtetve tovább, páratlan n esetén az adódik, hogy f -nek az x_0 helyen lokális minimuma van, páros n esetén pedig az hogy f' az x_0 helyen monoton fogyóból monoton növekedőbe megy át, ami a 17.12 Tétel alapján állításunkat jelenti.!

17.16 Tétel. (Növekmények összehasonlításának elve.)

Legyen f és g $[a, b]$ -ben differenciálható. Ha $f'(x) \geq g'(x)$, minden $x \in (a, b)$ -re, akkor $f(b) - f(a) \geq g(b) - g(a)$. (l. 17.7 ábra).



17.7 ábra

Bizonyítás. Mivel $(f(x)-g(x))' \geq 0$, ezért $f(x)-g(x)$ monoton növekedő, de ekkor $f(b)-g(b) \geq f(a)-g(a)$, ebből az állítás adódik.!

17.4 Definíció. Ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-g(x)) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $x \rightarrow +\infty$

esetén f aszimptotikusan egyenlő g -vel.

Ez azt jelenti, hogy elég nagy x értékek esetén a két függvény egymással helyettesíthető. Megjegyezzük, hogy f -nek, ill. g -nek nem kell hogy létezzék a határértéke.

17.5 Definíció. Legyen az A egyenes egyenlete $y = ax + b$. Azt mondjuk, hogy $x \rightarrow \infty$ esetén az A egyenes az f függvény aszimptotája, ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0, \quad (17.2)$$

(f és $ax + b$ aszimptotikusan egyenlőek).

17.17 Tétel. Az f függvénynek $x \rightarrow \infty$ esetén az $y = ax + b$ egyenletű egyenes akkor és csak akkor aszimptotája, ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy ha " a "-t és " b "-t a tételben szereplő két határérték definiálja, akkor az $y = ax + b$ egyenletű egyenes aszimptota. Tegyük fel, hogy van olyan " a " és " b ", hogy (17.2) teljesül, akkor

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

vagyis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.!$$

Speciális esetben: ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, akkor a Bernoulli- ℓ 'Hospitál szabály

alapján (16.3 Tétel) $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ feltéve, ha ez utóbbi limes létezik.

Hasonlóan értelmezhető és tárgyalható függvény aszimptotája $-\infty$ -ben.

Ezek után összefoglaljuk a teljes függvényvizsgálat menetét:

a) Értelmezési tartomány, folytonosság vizsgálata, határérték meghatározása az értelmezési tartomány torlódási pontjaiban.

b) Monotonitási tartományok, szélsőérték helyek meghatározása f' segítségével.

c) Konvexitási, konkávitási tartományok, inflexiós pontok meghatározása f'' segítségével.

d) Aszimptota meghatározása.

17.5 Példa. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényen,

ahol $f(x) = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$.

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. A függvény D -ben mindenütt folytonos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +1-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +1+0} f(x) = -\infty,$$

$$f(x) = 0, \text{ ha } x = 0.$$

A függvény páratlan, így elegendő csak pozitív x -ekre vizsgálni.

b)
$$f'(x) = 1 + \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= 1 + \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0, \text{ ha } x^4 - 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5},$$

$$x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx \pm 2,1,$$

tehát az alábbi intervallumokban vizsgáljuk a függvényt:

ha $x \in (-\infty; -2,1), (-2,1;-1), (-1,1), (1;2,1), (2,1; +\infty)$

$f'(x):$	+	-	-	-	+
$f(x):$	növ.	csökken			növekszik

az $x = -2,1$ helyen lokális maximuma,
az $x = 2,1$ helyen lokális minimuma van.

$$\begin{aligned} \text{c) } f''(x) &= -2 \frac{2x(x^2-1)^2 - (x^2+1) 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \\ &= -2 \frac{2x(x^2-1) - 4x(x^2+1)}{(x^2-1)^3} = -4x \frac{x^2-1-2x^2-2}{(x^2-1)^3} = \\ &= 4x \frac{x^2+3}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0, \text{ ha } 4x(x^2+3) = 0, \quad x = 0.$$

Ha $x \in (-\infty, -1), (-1,0), (0,1), (1, +\infty)$

$f''(x):$	-	+	-	+
$f(x):$	konkáv	konvex	konkáv	konvex

az $x = 0$ inflexiós pont.

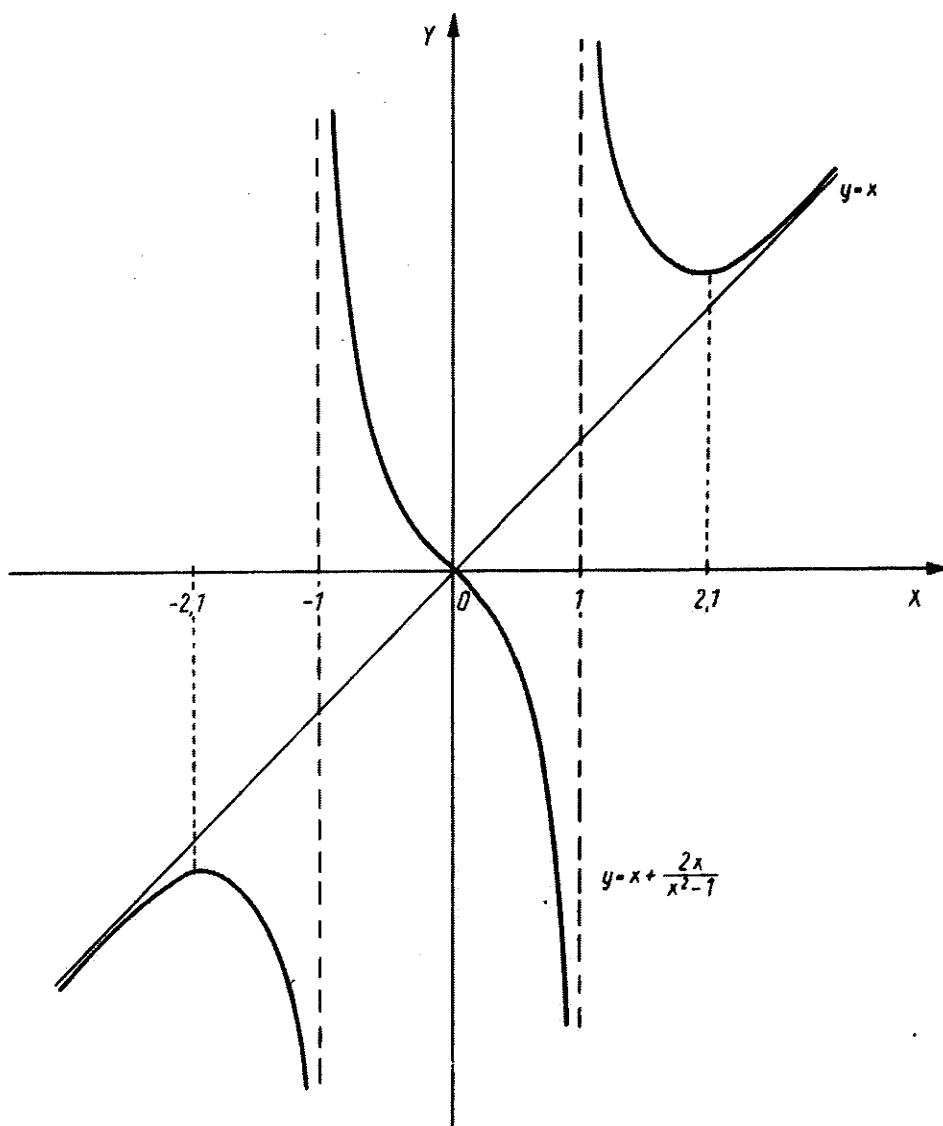
$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0.$$

$x \rightarrow \infty$ esetén az aszimptota egyenlete $y = x$,

$x \rightarrow -\infty$ esetén is $y = x$ aszimptota.

Ezek után a függvény grafikonja felvázolható (l. 17.8 ábra).



17.8 ábra

18. Görbék érintkezése

Azzal a problémával foglalkozunk, hogy egy pont környezetében hogyan lehet függvényeket egyszerűbb függvényekkel helyettesíteni.

18.1 Definíció. Legyen az f és g függvény x_0 -ban $(n+1)$ -szer differenciálható. Azt mondjuk, hogy f grafikonja g grafikonjával (röviden: f g -vel) legalább n -ed rendben érintkezik x_0 -ban,

$$\text{ha} \quad f(x_0) = g(x_0)$$

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \quad (n \geq 1)$$

és pontosan n -ed rendben, ha az előbbi feltételek mellett még $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$ is fennáll.

Függvény grafikonja az érintőjével legalább elsőrendben érintkezik.

Ha az f függvény adott, van-e olyan kör, amely a függvény görbáját egy adott pontban az összes körök között a legmagasabbrendben érinti? Erre választ a következő tétel ad:

18.1 Tétel. Legyen az f függvény x_0 -ban legalább kétszer differenciálható és $f''(x_0) \neq 0$ akkor van egy és csak egy kör, mely f grafikonját x_0 -ban legalább másodrendben érinti. Ezt a kört az f függvény x_0 -beli simulókörének nevezzük. (L. 18.1 ábra.)

Bizonyítás. Először az egyértelműséget igazoljuk. Bevezetjük a következő jelöléseket $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$, $y''_0 = f''(x_0)$.

Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ görbét x_0 -ban másodrendben érintő kör egyenlete:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2 \quad (18.1)$$

$$(x_0-u)^2 + (y_0-v)^2 = r^2 \quad (18.2)$$

(18.1) -ből fejezzük ki y -t mint x függvényét. pontosabban, határozzuk meg azt a $k(x)$ függvényt, melyre $k(x_0) = y_0$ és

$$(x-u)^2 + (k(x) - v)^2 \equiv r^2$$

Az azonosságot kétszer egymásután deriválva kapjuk

$$(x - u) + (k(x) - v) \cdot k'(x) \equiv 0$$

$$1 + k'^2(x) + (k(x) - v) k''(x) \equiv 0$$

Mivel a (18.1) kör f -et x_0 -ban másodrendben érinti a 18.1 Definíció alapján fennállnak a következő egyenlőségek.

$$x_0 - u + (y_0 - v)y'_0 = 0 \quad (18.3)$$

$$1 + y'^2_0 + (y_0 - v)y''_0 = 0 \quad (18.4)$$

A (18.2), (18.3), (18.4) egyenletekből u , v és $r > 0$ egyértelműen meghatározhatók, mivel a feltevés szerint $y''_0 \neq 0$,

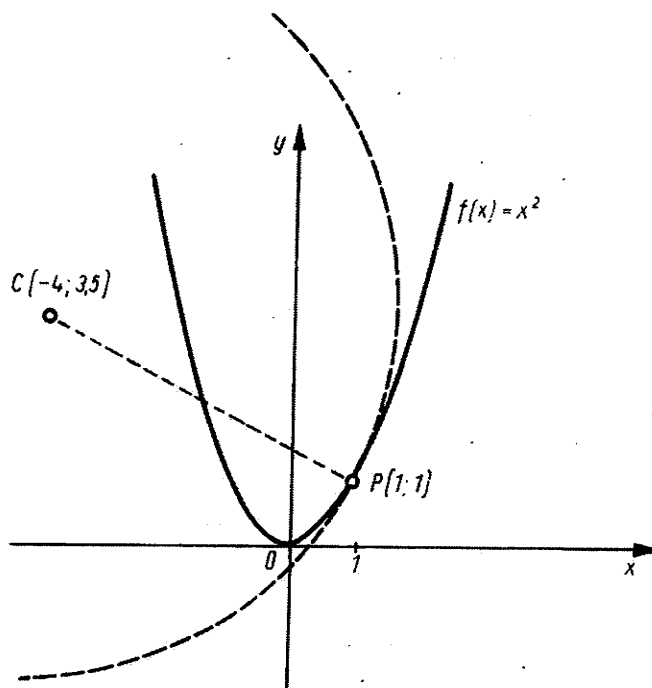
$$v = y_0 + \frac{1 + y'^2_0}{y''_0}, \quad (18.5)$$

$$u = x_0 - y'_0 \frac{1 + y'^2_0}{y''_0}, \quad (18.6)$$

$$r = \frac{(1 + y'^2_0)^{\frac{3}{2}}}{|y''_0|}. \quad (18.7)$$

r a görbületi sugár, ennek reciproka $\frac{1}{r} = \kappa$ a görbület.

Fordítva, könnyű igazolni, hogy a (18.5), (18.6), (18.7) képletekkel megadott u, v, r -rel felírt (18.1) egyenletű kör f grafikonját x_0 -ban legalább másodrendben érinti.!



18.1 ábra

18.2 Definíció. Legyen az f függvény x_0 -ban n -szer differenciálható függvény; a

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

polinomot az f függvény x_0 -hoz tartozó n -ed fokú Taylor polinomjának nevezzük.

Megmutatjuk, hogy az n -ed fokú Taylor-polinom görbéje elég jól simul az f függvény görbéjéhez, x_0 környezetében a függvény ezzel helyettesíthető.

18.2 Tétel. Legyen az f függvény az x_0 hely K_{x_0} környezetében n -szer differenciálható, akkor van egy és csak egy legfőbb n -edfokú

polinom, mely f -et x_0 -ban legalább n -edrendben érinti. Ez a polinom az n -ed fokú Taylor polinom.

Bizonyítás. $T_n(x)$ f -et legalább n -ed rendben érinti, ul.

$$T_n(x_0) = f(x_0)$$

...

$$T_n^{(k)}(x) = 0 + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k! +$$

$$+ \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (k+1)k(k-1)\dots 2 \cdot 1 (x-x_0) + \dots$$

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Tehát $T_n(x)$ $f(x)$ -et x_0 -ban legalább n -ed rendben érinti.

Még azt kell belátnunk, hogy $T_n(x)$ az egyetlen ilyen tulajdonsággal rendelkező polinom. Legyen $p(x)$ f -et x_0 -ban n -ed rendben érintő legfőbb n -edfokú polinom s rendezzük át $(x-x_0)$ hatványai szerint:

$$p(x) \equiv a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_k(x-x_0)^k + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Deriváljuk az azonosságot az x_0 helyen k -szor

$$p^{(k)}(x_0) = 0 + a_k k! + 0,$$

ebből

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Mivel $p(x)$ f -et n -ed rendben érinti fennáll:

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Tehát a $p(x)$ polinom a $T_n(x)$ Taylor polinom.!

Nyilvánvaló, hogy polinom Taylor polinomja önmaga.

18.3 Tétel. Legyen az f függvény az x_0 hely $K_{x_0 \varnothing}$ környezetében $(n+1)$ -szer differenciálható; minden $x \in K_{x_0 \varnothing}$ -hoz van $\xi \in (x_0, x)$, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned} \quad (18.8)$$

A (18.8)-ban fellépő $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ tagot az x_0 helyhez tartozó n -edik fokú Taylor polinom Lagrange-féle maradéktagjának nevezzük.

A 18.3 Tétel a Lagrange-féle középértéktétel (15.4 Tétel) általánosítása, ui. (18.8) -ből az $n=0$ esetben az

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x-x_0)$$

formulát kapjuk vissza.

Bizonyítás. Legyen $x \in K_{x_0 \varnothing}$, pl. $x > x_0$. Bevezetjük az

$$F(t) = f(t) - T_n(t) - C(t-x_0)^{n+1}, \quad t \in [x_0, x]$$

segédfüggvényt, ahol C -t úgy választjuk meg, hogy F a $t=x$ helyen zérus legyen: $F(x) = 0$. Megmutatjuk, hogy van $\xi \in (x_0, x)$, melyre

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Mivel $F(x_0) = F(x) = 0$, a F függvényre az (x_0, x) intervallumban alkalmazhatjuk a Rolle tételt (15.3 Tételt). Eszerint van olyan $\xi_1 \in (x_0, x)$, melyre $F'(\xi_1) = 0$. De $F'(x_0) = F'(\xi_1) = 0$ miatt most F' -re alkalmazható a Rolle tétel (x_0, ξ_1) -ben:

$$F''(\xi_2) = 0, \quad x_0 < \xi_2 < \xi_1 < x.$$

Mivel $F''(x_0) = F''(\xi_2) = 0$ ismét alkalmazzuk a Rolle tételt F'' -re, és így tovább, míg az n -ik lépés után felírható a következő

$$F^{(n)}(x_0) = F^{(n)}(\xi_n) = 0, \quad x_0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \dots < \xi_2 < \xi_1$$

Még egyszer alkalmazzuk a Rolle tételt: van $\xi \in (x_0, x)$, hogy

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0$$

de mivel $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - C(n+1)!$, ezért

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

19. Hiperbolikus és area függvények

19.1 Definíció. Az $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ formulával értelmezett függvényt sinus hyperbolicus függvénynek nevezzük és az $\operatorname{sh} x$ szimbolummal jelöljük:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

A $\operatorname{sh} x$ függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, mindenütt folytonos, páratlan függvény ui.

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh} x$$

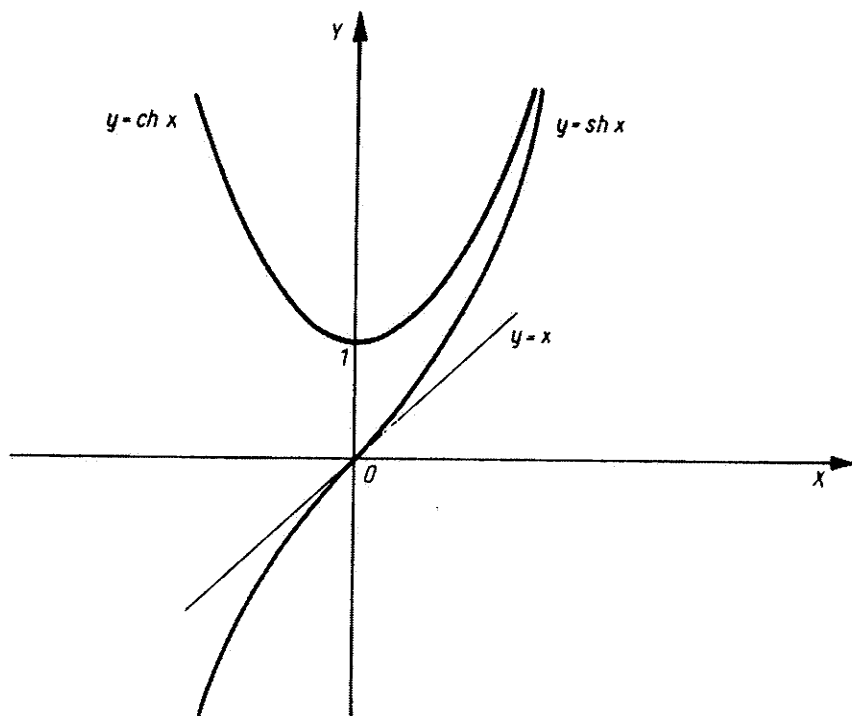
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$

$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ minden $x \in (-\infty, \infty)$, tehát a függvény mindenütt monoton növekedő.

$$(\operatorname{sh} x)'' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(\operatorname{sh} x)'' = 0, \quad \text{ha } x = 0.$$

A második derivált negatív, ha $x < 0$ és pozitív, ha $x > 0$, tehát a görbe konkáv, ha $x < 0$ és konvex, ha $x > 0$; $x = 0$ inflexiós pont. Mivel $(\operatorname{sh} x)'_{x=0} = 1$ az inflexiós érintő 45° -os. Az $\operatorname{sh} x$ függvény görbáját l. a 19.1 ábrán.



19.1 ábra

19.2 Definíció. Az $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ formulával értelmezett függvényt cosinus hyperbolicus függvénynek nevezzük és a $\text{ch } x$ szimbolummal jelöljük:

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

A $\text{ch } x$ függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, mindenütt folytonos, páros függvény, minden x -re pozitív,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\text{ch } x > \text{sh } x .$$

$(\text{ch } x)' = \text{sh } x$, $x = 0$ -nál előjelváltás van, tehát a függvény monoton csökkenő, ha $x < 0$ és monoton növekvő, ha $x > 0$; $x = 0$ -ban minimuma van.
 $(\text{ch } x)'' = (\text{sh } x)' = \text{ch } x > 0$ minden $x \in \mathbb{D}$ -re, tehát a függvény alulról konvex.
A $\text{ch } x$ függvény görbáját l. a 19.1 ábrán.

Az értelmezésből következnek az alábbi azonosságok:

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 , \quad (19.1)$$

ul.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ & = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{4}{4} = 1 . \end{aligned}$$

$$\text{ch}(x_1 \pm x_2) = \text{ch } x_1 \text{ch } x_2 \pm \text{sh } x_1 \text{sh } x_2 . \quad (19.2)$$

$$\text{sh}(x_1 \pm x_2) = \text{sh } x_1 \text{ch } x_2 \pm \text{ch } x_1 \text{sh } x_2 . \quad (19.3)$$

Igazoljuk pl. (19.2)-t:

$$\text{ch}(x_1 + x_2) = \frac{e^{x_1+x_2} + e^{-x_1-x_2}}{2} ,$$

másrészt

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2 &= \\
 &= \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} \cdot \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} + \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} \cdot \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} = \\
 &= \frac{1}{4} (2e^{x_1+x_2} + 2e^{-x_1-x_2}) = \frac{e^{x_1+x_2} + e^{-x_1-x_2}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ha (19.2) -ben és (19.3) -ban a felső műveleti jelet vesszük figyelembe és $x_1 = x_2 = x$, akkor a következő azonosságokat kapjuk:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \quad (19.4)$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \quad (19.5)$$

A (19.1) és (19.5) azonosságokat összeadva, ill. kivonva egymásból kapjuk

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \quad (19.6)$$

ill.

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}. \quad (19.7)$$

19.3 Definíció. Az $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ függvényt tangens hyperbolicus függvénynek nevezzük és $\operatorname{th} x$ -szel jelöljük:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$\operatorname{th} x$ értelmezési tartománya $R = (-\infty, +\infty)$, mindenütt folytonos, páratlan függvény,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = 1,$$

és a páratlanság miatt

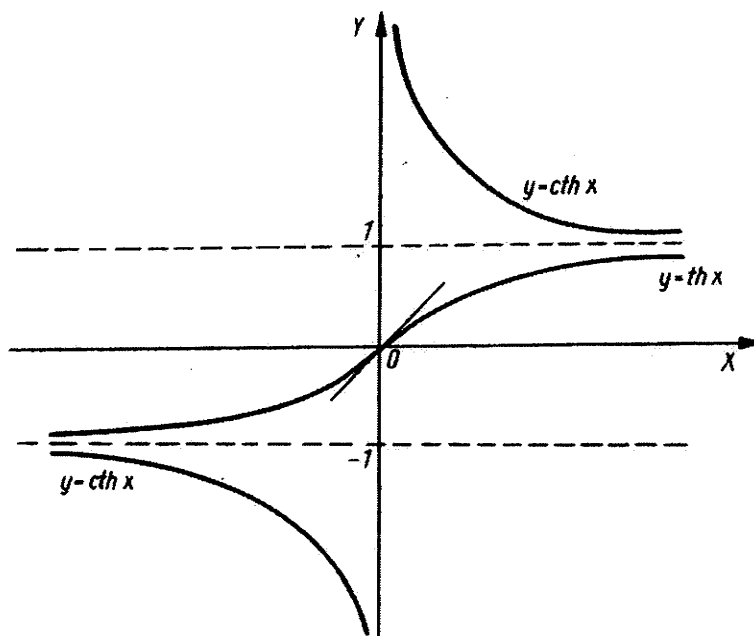
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1.$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$$

minden $x \in \mathbb{R}$ -re, a függvény mindentől monoton növekedő.

$$(\operatorname{th} x)'' = -\frac{2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} \text{ pozitív, ha } x < 0, \text{ negatív, ha } x > 0 \text{ és } 0\text{-val}$$

egyenlő, ha $x = 0$; tehát $x = 0$ inflexiós pont; $\operatorname{th} x$ alulról konvex, ha $x < 0$ és alulról konkáv, ha $x > 0$. A függvény görbéje a 19.2 ábrán látható.



19.2 ábra

19.4 Definíció. A $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$, $x \neq 0$ függvényt cotangens hyperbolicus függvénynek nevezzük és $\operatorname{cth} x$ -szel jelöljük:

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0$$

$\operatorname{cth} x$ értelmezési tartománya: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, páratlan függvény,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cth} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) = 1$$

és a páratlanság miatt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cth} x = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{cth} x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = +\infty,$$

mivel $e^x - e^{-x} > 0$ ha $x > 0$. Hasonlóan $\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{cth} x = -\infty$.

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

A derivált minden $x \in D$ -re negatív, tehát a függvény $(-\infty, 0)$ -ban, ill. $(0, +\infty)$ -ben monoton csökkenő.

$$(\operatorname{cth} x)'' = \frac{2 \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x} \text{ sehol sem } 0, \quad x < 0 \text{ -ra negatív, és } x > 0 \text{ -ra pozi-}$$

tív, így a függvény a $(-\infty, 0)$ intervallumban alulról konkáv és a $(0, +\infty)$ -ban alulról konvex. A függvény görbéje a 19.2 ábrán látható.

A hiperbolikus függvények inverzei az ún. area függvények. Area terület jelent, az elnevezés indoklására később visszatérünk. (L. 31.2 Példa.)

Az $f(x) = \operatorname{sh} x$ függvény a $(-\infty, \infty)$ intervallumban szigorúan monoton növekvő folytonos, tehát létezik egyértékű, szigorúan monoton növekedő, folytonos inverze:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Ha bevezetjük az $y = \operatorname{arsh} x$ jelölést, akkor $x = \operatorname{sh} y$. A 19.1 Definíció alapján

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

tehát

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0,$$

ahonnan

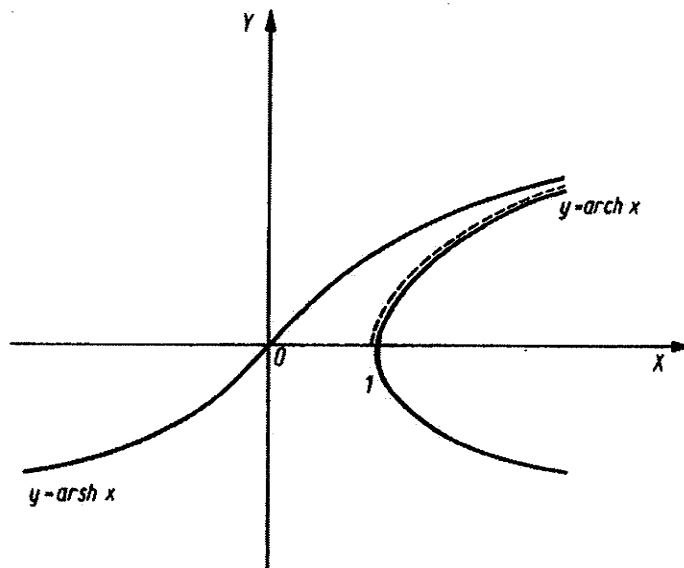
$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

vagyis

$$\operatorname{arsh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Sok esetben célszerűbb az $\operatorname{arsh} x$ függvény utóbbi logaritmikus alakját használni. (Grafikonját l. a 19.3 ábrán.)



19.3 ábra

Az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény leszűkítése a $[0, \infty)$, ill. a $(-\infty, 0]$ intervallumra, szigorúan monoton növekedő (ill. szigorúan monoton csökkenő), folytonos, tehát létezik egyértékű ugyanilyen tulajdonságú inverze:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arch} x, \quad x \geq 1.$$

Az $y = \operatorname{arch} x$ jelölés bevezetésével

$$x = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

$$e^{2y} - 2x e^y + 1 = 0,$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

tehát $\operatorname{arch} x \equiv \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$, (+, ill. - aszerint, hogy $\operatorname{ch} x$ melyik le-
szűkítésének inverzéről van szó). Grafikonját l. a 19.3 ábrán.

Az $f(x) = \operatorname{th} x$ függvény a $(-\infty, \infty)$ intervallumban szigorúan mono-
ton növekedő, folytonos, tehát létezik egyértékű szigorúan monoton növekedő
inverze:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arth} x, \quad -1 < x < 1.$$

Logaritmikus alakját a következő módon nyerjük:

$$x = \operatorname{th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}},$$

$$(x-1)e^{2y} + (x+1) = 0,$$

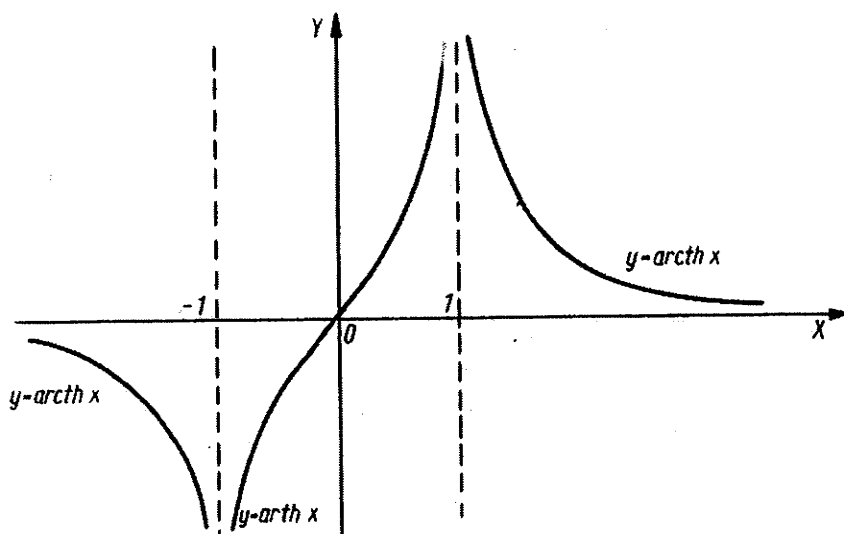
$$e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

tehát

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Grafikonját l. a 19.4 ábrán.



19.4 ábra

Az $f(x) = \text{cth } x$ függvény a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő függvény tehát létezik egyértékű inverze:

$f^{-1}(x) = \text{arch } x$, $|x| > 1$. Logaritmikus alakját az előbbiekhöz hasonló módon nyerjük:

$$\text{arch } x \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Grafikonja a 19.4 ábrán látható.

Az area függvények deriváltjait az inverz függvény deriválási szabálya (1. 12.6 Tétel) alapján nyerjük. Közben felhasználjuk a (19.1) azonosságot.

$$(\text{arsh } x)' = \frac{1}{\text{ch}(\text{arsh } x)} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2(\text{arsh } x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\text{arch } x)' = \frac{1}{\text{sh}(\text{arch } x)} = \frac{1}{\pm \sqrt{\text{ch}^2(\text{arch } x) - 1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, |x| > 1,$$

(a $\pm$ előjel itt azt jelenti, hogy két függvényről van szó).

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arth} x)}} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{arth} x)} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1.$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{th} x)' = \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{sh}^2(\operatorname{arc} \operatorname{th} x)}} = \frac{1}{1 - \operatorname{cth}^2(\operatorname{arc} \operatorname{th} x)} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1.$$

Megjegyezzük, hogy az area függvények deriváltjait a függvények logaritmikus alakjaiból is levezethetjük.

A racionális egész és tört-, az algebrai, a trigonometrikus, az arcus, az exponenciális, a logaritmus, a hiperbolikus és az area függvényeket közös néven elemi függvényeknek szokás nevezni.

20. Paraméteresen és polárkoordinátákban adott görbék

Legyen adott a g síkgörbe. Ha a g görbe P pontjának abszcisszája és ordinátája valamely t paraméter (segédváltozó) függvényeként adható meg egy közös értelmezési tartományban.

$$x = x(t), \quad (20.1)$$

$$y = y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

akkor (20.1)-gyel a g görbe egyenletének ún. paraméteres alakját adtuk meg az x, y síkban. A továbbiakban feltételezzük, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonosak, valamint azt, hogy (20.1) a (t_1, t_2) nyílt intervallum egy-egy értelmű leképezése az x, y síkra. Ugyanannak a g görbének végtelen sokféle paraméteres előállítása lehetséges.

A görbén mindig azt a befutási irányt tekintjük pozitívnak, amely a paraméter növekedésének felel meg. Ha a görbe egyenlete $y = f(x)$ alakban adott, akkor ez a (20.1) alatti paraméteres előállítás speciális esetének is tekinthető, amikor is a t paraméter az x abszcissza:

$$x = t,$$

$$y = f(t).$$

Fordítva nem mindig lehetséges az áttérés. Erre nézve érvényes a következő

20.1 Tétel. Legyen a g görbe paraméteres megadása

$$x = x(t), y = y(t), t_1 < t < t_2.$$

Ha az $x(t)$ függvény szigorúan monoton, akkor a g görbe paraméteres egyenletéről áttérhetünk a görbe $y = f(x)$ explicit alaku egyenletére, vagyis van olyan f függvény, melynek a görbe grafikonja.

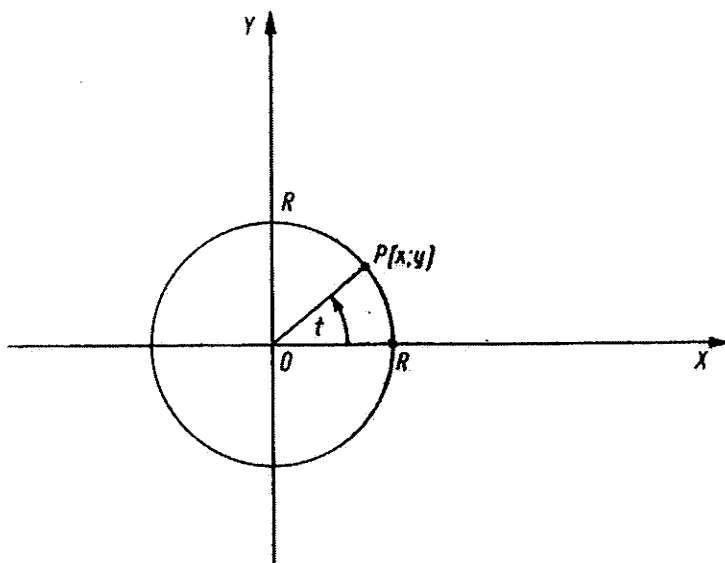
Bizonyítás. A feltétel szerint, a 9.2 Tétel értelmében $x(t)$ -nek létezik egyértékű inverze $t = t(x)$. Ezt behelyettesítve kapjuk a görbe $y = y(t(x))$ egyenletét.!

20.1 Példa. Origó középpontu R sugaru kör paraméteres előállítása. Válasszuk paraméternek a kör egy tetszőleges P pontját az origóval összekötő egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szögét (l. 20.1 ábra) akkor az

$$x = R \cos t,$$

$$y = R \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi \quad (20.2)$$

a kör egy paraméteres előállítása. Könnyen igazolható, hogy ugyanennek a körnek egy másik paraméteres előállítása:



20.1 ábra

$$x = R \frac{2\tau}{1 + \tau^2} ,$$

$$y = R \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} , \quad -\infty < \tau < \infty , \quad (20.3)$$

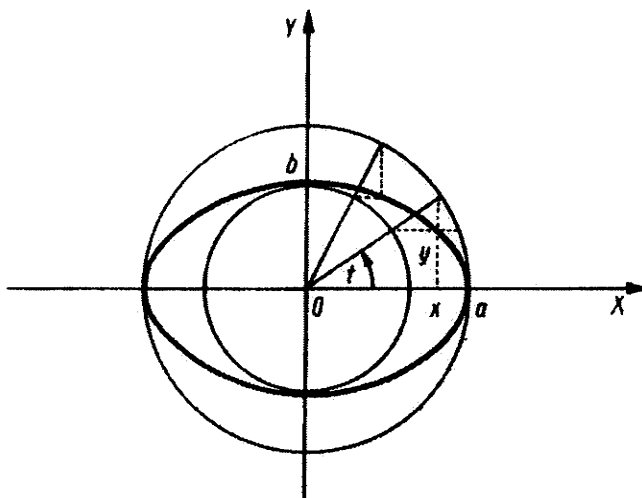
20.2 Példa. Ellipszis paraméteres egyenlete:

$$x = a \cos t ,$$

$$y = b \sin t , \quad 0 \leq t < 2\pi , \quad (20.4)$$

ahol $a, b > 0$ állandók. Ul. $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$, négyzetreemelve és összeadva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ adódik. A t paraméter jelentése a 20.2 ábrán látható.

Innen egyuttal leolvasható az ellipszis szerkesztésének egy módja is.



20.2 ábra

20.3 Példa. Hiperbolaág paraméteres előállítása:

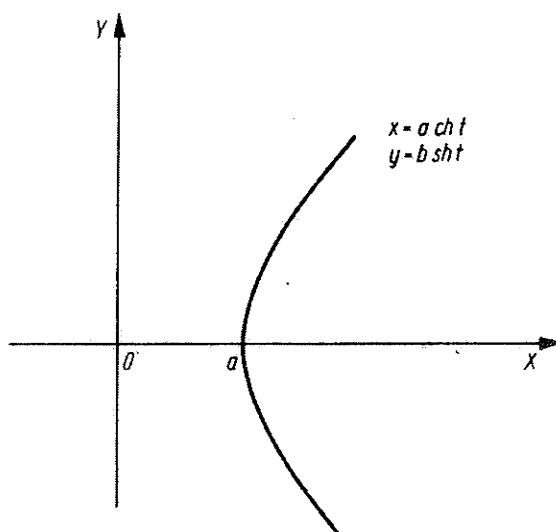
$$x = a \operatorname{ch} t, \quad (20.5)$$

$$y = b \operatorname{sh} t, \quad -\infty \leq t < \infty,$$

$a, b > 0$ állandók.

Valóban $\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t$, $\frac{y}{b} = \operatorname{sh} t$; négyzetreemelve és egymásból kivonva a

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola egyenletét adja. Mivel (20.5)-ben x pozitív; (20.5) csak a hiperbola jobb oldali ágát adja meg (l. 20.3 ábra).



20.3 ábra

20.4 Példa. Ciklois paraméteres egyenlete. Egyenesen csuszásmentesen gördülő kör kerületének egy kiszemelt pontja ún. ciklois pályán mozog. Legyen az egyenes az x tengely és a kiinduló helyzetben érintse az " a " sugarú kör az origóban. Amíg az " a " sugarú kör (l. 20.4 ábra) előre gördül 0 -tól A -ig, addig a kerület 0 pontja a P pontba jut. A csuszásmentesség miatt $\widehat{OA} = \widehat{AP} = at$, ahol $t = \angle ABP$. Válasszuk paraméternek a t szöveget. Egy teljes fordulás alatt t 0 -tól 2π -ig változik. A mozgó P pont abszcisszája és ordinátája

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{dy(t_0)}{dt} \cdot \frac{dt(x_0)}{dx} = \dot{y}(t_0) \cdot \frac{1}{\dot{x}(t_0)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \bigg|_{t=t_0} .$$

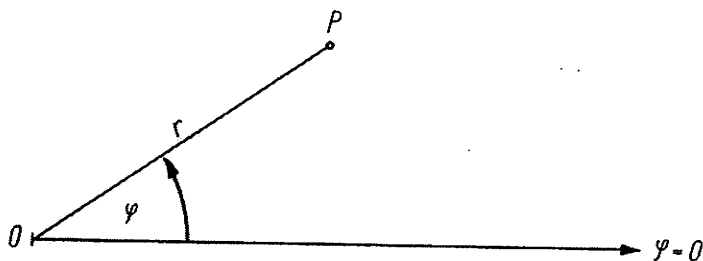
20.5 Példa. Számítsuk ki a (20.6) egyenletrendszerrel adott ciklois $P(x, y)$ pontjabeli érintő iránytangensét. Mivel $\dot{x} = a(1 - \cos t)$ és $\dot{y} = a \sin t$, így

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} ,$$

$$t \neq 0, \quad t \neq 2\pi .$$

Ha pl. $t \rightarrow 0$ jobbról, akkor $x \rightarrow 0$ jobbról és $y \rightarrow 0$, tehát $\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \rightarrow +\infty$, vagyis az origóban függőleges az érintő.

Sok esetben a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer helyett célszerű polár koordináta-rendszert bevezetni.



20.5 ábra

Kiválasztunk a síkon egy rögzített O pontot és egy ebből kiinduló fél-egyenest. A pontot pólusnak, a félegyenest polártengelynek nevezzük.

A sík P pontjának helyzete a pólustól való $r = OP$ távolsággal és azzal a φ szöggel (polárszög) jellemezhető, amelyet az OP rádiuszvektor a polártengellyel ($\varphi = 0$) bezár pozitív forgásirányt véve figyelembe. r és φ a P pont polárkoordinátái (l. 20.8 ábra).

r és φ egyértelműen meghatározza a P pont helyzetét, ezzel szemben a P pont csak r -et határozza meg egyértelműen a φ szöveget csak 2π egész számú többszörösétől eltekintve. Az O pont polárszöge határozatlan.

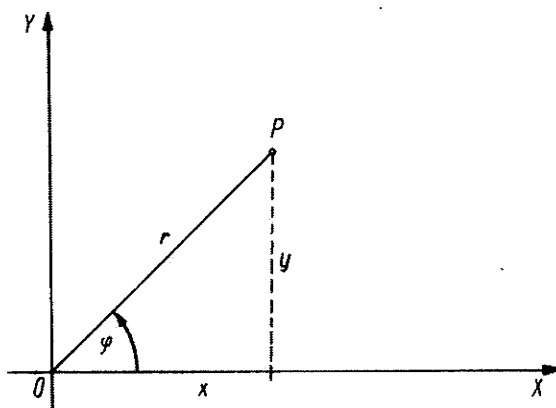
Vizsgálataink során gyakran egymás mellett használjuk a Descartes-féle derékszögű és a polár koordináta-rendszert. Ha a kétféle koordináta-rendszer kezdőpontja valamint a polártengely és az x tengely pozitív fele egybeesik, akkor az

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (20.7)$$

illetve

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi = \arccos \frac{x}{r}, \quad \varphi = \arcsin \frac{y}{r} \quad (20.8)$$

összefüggések állanak fenn a derékszögű és a polár koordináták között (l. 20.6 ábra).



20.6 ábra

Ha valamely g görbe polárkoordinátákban adott egyenlete

$$r = r(\varphi)$$

akkor a g görbe egy paraméteres előállítása:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi \quad (20.9)$$

$$y = r(\varphi) \sin \varphi$$

Legyen az $r(\varphi)$ függvény differenciálható, akkor a (20.9) paraméteres alakban felírt görbe egyenlete segítségével könnyen felírhatjuk a g görbe egy $P(x, y)$ pontjához tartozó érintő iránytangensét (20.2 Tétel):

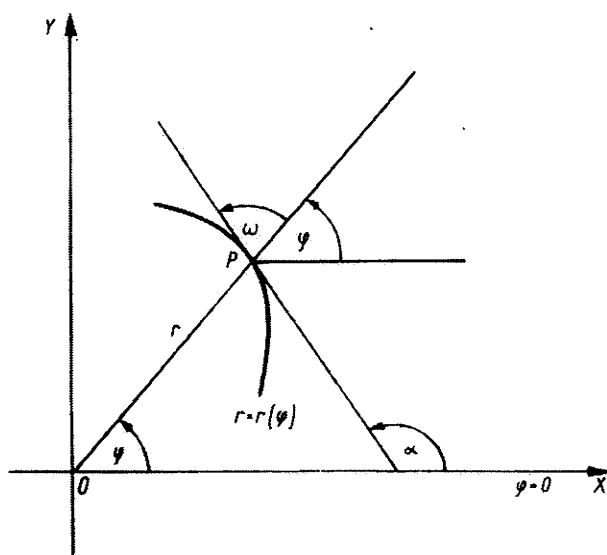
$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi} \quad (20.10)$$

20.3 Tétel. Legyen a g görbe polárkoordinátákkal adott egyenlete $r = r(\varphi)$. Ha az $r(\varphi)$ függvény differenciálható és $r' \neq 0$, akkor g egy

P pontjához tartozó r rádiuszvektor és a P pontbeli érintő által bezárt szögre fennáll a következő összefüggés

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'}$$

Bizonyítás. Legyen az érintőnek az x tengellyel bezárt szöge α . Mivel a g görbe egyenlete (20.9) alakra hozható



20.7 ábra

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \frac{r}{r'}}{1 - \frac{r}{r'} \operatorname{tg} \varphi}; \quad (20.11)$$

másrészt $\alpha = \varphi + \omega$ (l. 20.7 ábra), így (l. 3.6)

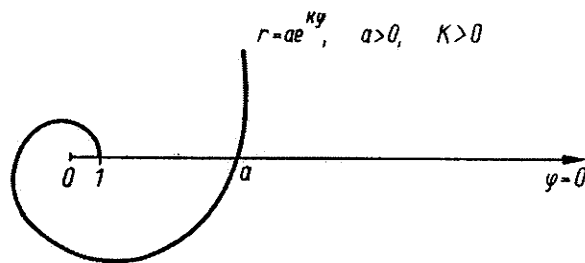
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi + \omega) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \omega}, \quad (20.12)$$

(20.11) és (20.12) összehasonlításából már következik az állítás. I

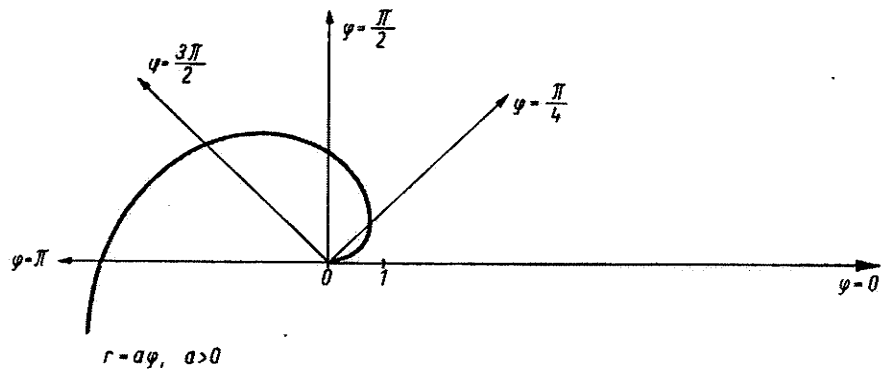
20.6 Példa. $r = a e^{k\varphi}$, $a > 0$, $k \neq 0$ az un. logaritmikus spirális egyenlete (l. 20.8 ábra). A logaritmikus spirális bármely P pontjához tartozó rádiuszvektor és érintő által bezárt szög állandó, ui.

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'} = \frac{a e^{k\varphi}}{a k e^{k\varphi}} = \frac{1}{k}.$$

20.7 Példa. $r = a\varphi$, $a > 0$, a un. archimedesi spirális egyenlete (l. 20.9 ábra).



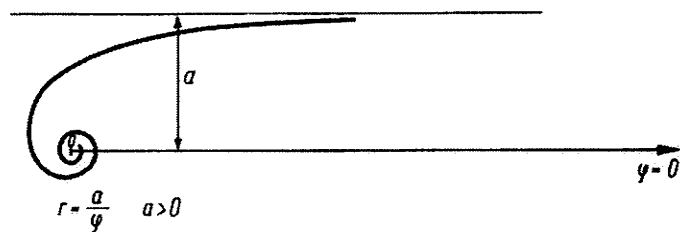
20.8 ábra



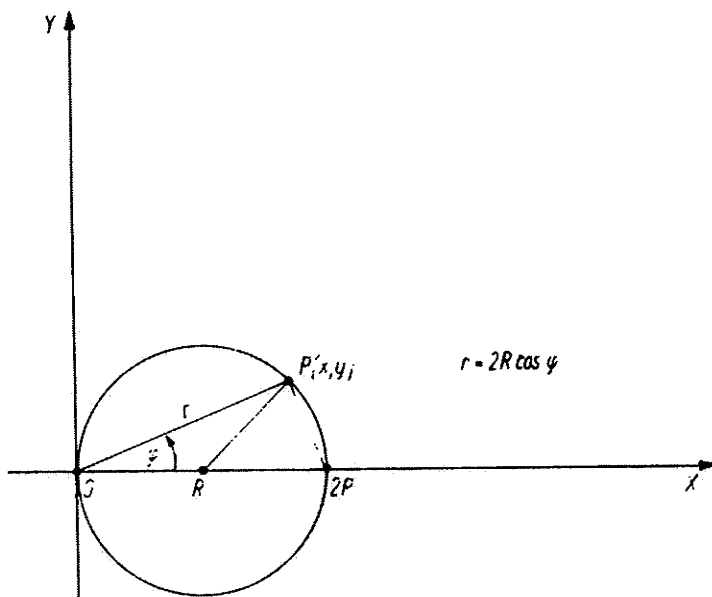
20.9 ábra

20.8 Példa. $r = \frac{a}{\varphi}$, $a > 0$, az un. hiperbolikus spirális egyenlete. Mivel $x = a \frac{\cos \varphi}{\varphi}$ és $y = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}$, így $\lim_{\varphi \rightarrow 0} y = a$ (l. 4.3 Példa). Tehát a görbe aszimptotája az $y = a$ egyenes. (l. 20.10 ábra.)

20.9 Példa. $r = 2R \cos \varphi$, $R > 0$ kör egyenlete. Mivel $r \geq 0$, $\cos \varphi$ csak nem-negatív lehet, így $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (l. 20.11 ábra).



20.10 ábra



20.11 ábra

21. Egyenletek gyökeinek közelítő meghatározása

Az

$$f(x) = 0 \quad (21.1)$$

egyenlet, ahol f valamely intervallumon értelmezett folytonos függvény, megoldása abban az esetben, amikor f legfeljebb másodfoku polinom egyszerű gyökképlettel történik, mely az olvasó előtt előző tanulmányaiból ismert. Rendelkezésre áll gyökképlet azokban az esetekben is, amikor f harmad-, vagy negyedfoku polinom. Ezek a gyökképletek azonban igen nehézkesek és gyakorlati számolásra alkalmatlanok. Az ún. Ruffini-Abel-tétel szerint viszont, ha f legalább ötödofoku polinom, általánosan alkalmazható gyökképlet nem adható meg. Még kevésbé jöhet szóba egzakt megoldóképlet abban az esetben, amikor f nem racionális függvény. Az esetek nagy részében tehát olyan közelítő (numerikus) eljárás alkalmazására van szükség, mely ugyan nem egzaktul, de tetszőleges pontossággal megadja a gyököt. Több ilyen eljárást ismertettünk, melyek közös vonása az, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén a keresett gyökhöz konvergáló végtelen sorozat tagjainak egymásutáni meghatározását teszik lehetővé.

a) A gyökök elkülönítése és az intervallum-felezés. (21.1) egyenlet megoldásához vezető uton az első lépés olyan intervallum meghatározása, melyben biztosan van gyök. Ez próbálgatással történik. Ha $a < b$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor Bolzano tételének (I. 7.2 Tétel) következtében az $[a, b]$ intervallumban (21.1)-nek van legalább egy gyöke. Felezzük az (a, b) intervallumot és meghatározzuk az f függvény értékét a felező pontban:

$f(\frac{a+b}{2})$. Ha $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, akkor $\frac{a+b}{2}$ (21.1) gyöke. Ha $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, akkor az

$[a, \frac{a+b}{2}]$, ill. $[\frac{a+b}{2}, b]$ intervallumok közül az egyik olyan, hogy két vég-

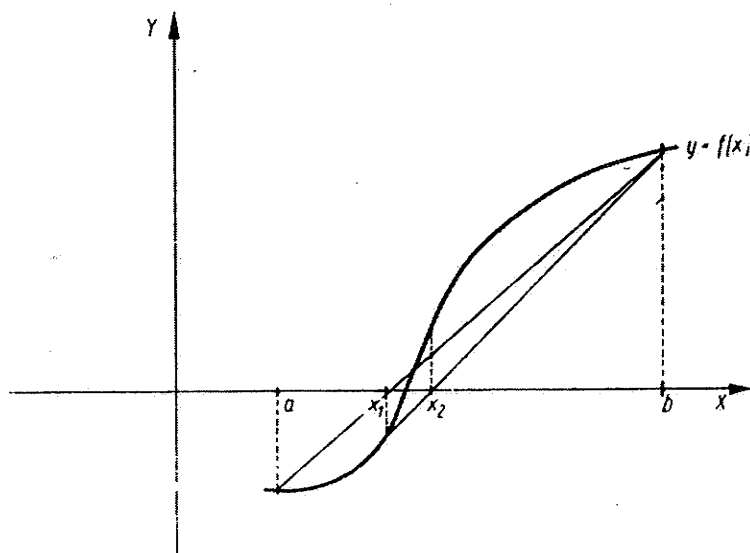
pontjában a függvényérték különböző előjelű. Jelöljük ezt az intervallumot $[a_1, b_1]$ -vel, tehát $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ és $[a_1, b_1] \subset [a, b]$.

$[a_1, b_1]$ -ben biztosan van gyök; most ezt az intervallumot felezzük és megismételjük az előbbi eljárást. Így módon az n -edik lépésben nyert intervallumot $[a_n, b_n]$ -nel jelölve nyilván

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi, \text{ ahol } f(\xi) = 0.$$

Ha ξ -t a_n -nel, vagy b_n -nel helyettesítjük, $\xi \approx a_n$, vagy $\xi \approx b_n$, az elkövetett hiba biztosan kisebb a $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ hibakorlátnál.

b) A hurmódszer. A gyök meghatározása geometriailag az x -tengely és az f függvény grafikonja metszéspontjának megkeresését jelenti. Az előbbinél gyorsabban konvergáló eljárást kapunk, ha az $f(a) \cdot f(b) < 0$ tulajdonsággal rendelkező $[a, b]$ intervallum meghatározása után a függvény grafikonját az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenessel (a függvénygörbe hurjával) pótoljuk, meghatározzuk a hurnak és az x -tengelynek a metszéspontját, x_1 -et és ha $f(x_1) \neq 0$, az $[a, x_1]$, ill. $[x_1, b]$ intervallumok közül kiválasztjuk azt, amelynek két végpontjában a függvényérték különböző előjelű. Ha pl. $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, akkor az $[x_1, b]$ intervallumra megismételjük az eljárást, vagyis meghatározzuk az $(x_1, f(x_1))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó hurnak és az x -tengelynek a metszéspontját, x_2 -t, és így tovább. Az ily módon nyert $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sorozat nyilván az $[a, b]$ intervallumbeli (egyik) gyökhöz konvergál (l. 21.1 ábra). Miután az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokon áthaladó hur egyenlete



21.1 ábra

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a),$$

$y = 0$ helyettesítés után x_1 -re az

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

kifejezést kapjuk. A gyök további $x_2, x_3, \dots$ approximációit analóg formulák szolgáltatják.

c) A Newton-Raphson-módszer (érintőmódszer). Az előbbinél általában lényegesen gyorsabban konvergáló eljárást kapunk, ha az $f(a) \cdot f(b) < 0$ tulajdonsággal rendelkező $[a, b]$ intervallum meghatározása után az f függvény grafikonját az intervallum egyik végpontjához tartozó érintővel pótoljuk (feltéve persze, hogy f differenciálható függvény) és a gyök első approximációjának ezen érintő és az x -tengely metszéspontját tekintjük, majd a grafikon ezen metszésponthoz tartozó pontjában vesszük az érintőt, és így tovább. Ha pl. az $x_0 = a$ pontból indulunk, az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő egyenlete:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Innen az $y = 0$ helyettesítéssel adódik a gyök első approximációja

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

Az $(x_1, f(x_1))$ pontbeli érintőnek és az x -tengelynek metszéspontja

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Az n -edik lépés:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \quad (21.2)$$

A (21.2) rekurziós formula meghatározza az $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ végtelen

sorozatot, mely bizonyos feltételek mellett a keresett gyökhöz konvergál. Pontosabban érvényes a következő

21.1 Tétel. Legyen f kétszer differenciálható az $[a, b]$ intervallumban, $f(a)f(b) < 0$, f' és f'' állandó előjelű $[a, b]$ -ben és

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{ha } \operatorname{sg} f(a) = \operatorname{sg} f''(x) \\ b, & \text{ha } \operatorname{sg} f(b) = \operatorname{sg} f''(x) \end{cases};$$

akkor a (21.2) rekurziós formulával definiált x_n , $n \in T$ végtelen sorozat a (21.1) egyenlet $[a, b]$ -beli gyökeihez konvergál.

Bizonyítás. Tételezzük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $x \in [a, b]$. A tétel feltételeit kielégítő egyéb esetekben a bizonyítás analóg módon történik. Mivel f szigorúan monoton növekedő, (21.1)-nek $[a, b]$ -ben pontosan egy gyöke van, jelöljük a gyököt ξ -vel. $f(x) < 0$, ha $x \in [a, \xi)$, $f(x) > 0$, ha $x \in (\xi, b]$, $x_0 = a$. Bebizonyítjuk, hogy az x_n , $n \in T$ sorozat monoton növekedő, felülről korlátos és ξ felső korlát. A bizonyítást matematikai indukcióval végezzük.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$$

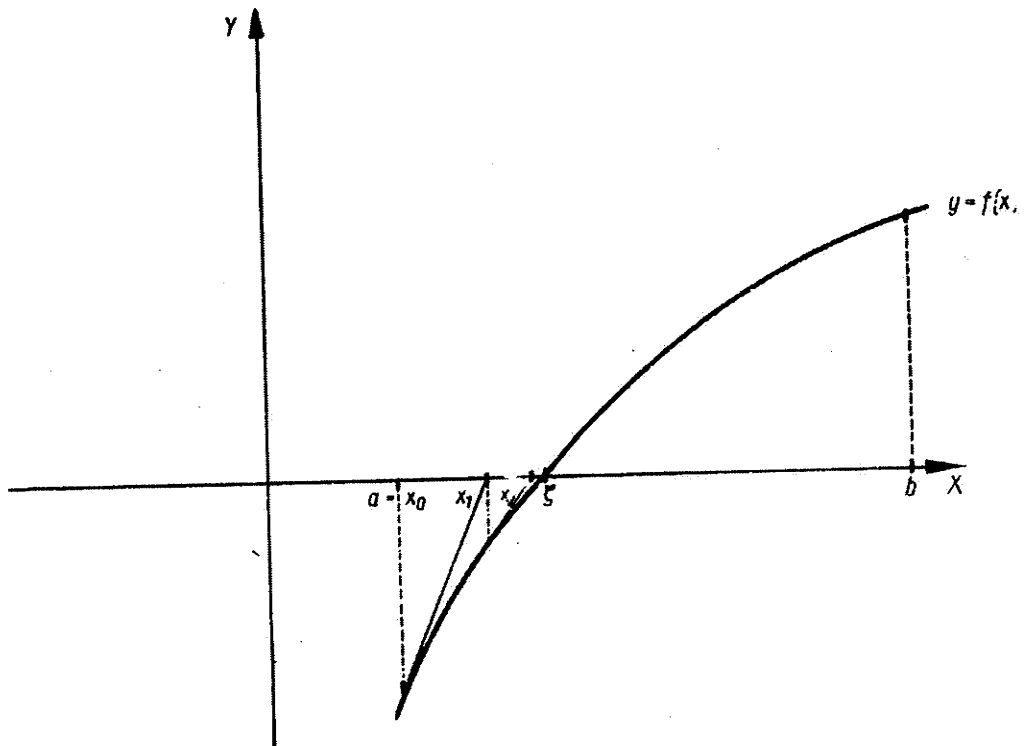
az előjelviszonyok miatt. $f'(x) < 0$ miatt f grafikonja az $[a, b]$ intervallumban alulról nézve konkáv, ezért az x_0 abszcisszáju ponthoz tartozó érintő ordinátája a ξ pontban $f(\xi) = 0$ -nál nagyobb, vagyis pozitív. Így az érintő x_0 és ξ között metszi az x tengelyt, vagyis $x_1 < \xi$. Tegyük fel, hogy $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < \xi$. Mivel ekkor $f(x_{n-1}) < 0$, (21.2)-ből következik, hogy

$$x_n > x_{n-1}.$$

Mivel f grafikonja konvex, ezért az x_{n-1} abszcisszáju ponthoz tartozó érintő ordinátája a ξ pontban már pozitív, tehát $x_n < \xi$. Ezzel beláttuk, hogy az x_n , $n \in T$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, amiből az I. kötet 16.1 Tétele alapján következik, hogy konvergens. Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S \leq \xi$. (21.2) mindkét oldalán végrehajtva a határátmenetet és felhasználva azt, hogy f és f' S -ben folytonos:

$$S = S - \frac{f(S)}{f'(S)},$$

vagyis $f(S) = 0$, $S = \xi$!



21.2 ábra

A Newton-Raphson-módszer a 21.1 Tétel feltételeinek teljesülése esetén igen gyorsan konvergál a keresett gyökhöz. Az eddigi jelölésekkel és feltételekkel élve, továbbá feltéve, hogy $|f''(x)| \leq M$ és $|f'(x)| \geq m > 0$, $x \in [a, b]$, az n -edik approximáció x_n és a gyök, ξ eltérését a következőképpen becsülhetjük meg. Felírjuk az f függvény megváltozását az elsőfokú Taylor-polinom és a Lagrange-féle maradéktag segítségével (l. 18.3 Tétel), akkor, amikor a független változó x_{n-1} -ről ξ -re változik:

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = -f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(\xi - x_{n-1}) + \frac{f''(\eta_{n-1})}{2!} (\xi - x_{n-1})^2,$$

ahol $\eta_{n-1} \in (x_{n-1}, \xi)$; innen

$$\xi - (x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}) = - \frac{f''(\eta_{n-1})}{2f'(x_{n-1})} (\xi - x_{n-1})^2.$$

A (21.2) összefüggés felhasználásával

$$\begin{aligned} |\xi - x_n| &= \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\eta_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right| (\xi - x_{n-1})^2 \leq \\ &\leq \frac{M}{2m} |\xi - x_{n-1}|^2. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Az utóbbi egyenlőtlenséget még a

$$\frac{|\xi - x_n|}{|\xi - x_{n-1}|} \leq \frac{M}{2m} |\xi - x_{n-1}|$$

alakban is írhatjuk. Mivel itt a jobb oldal zérushoz tart $n \rightarrow \infty$ esetén, azt kaptuk, hogy a "rákövetkező approximáció hibája a megelőző approximáció hibájával osztva" is zérushoz tart, ha n tart végtelenhez. Ha az $(n-1)$ -edik approximáció hibáját (a gyöktől való eltérést) megbecsüljük, a (21.3) egyenlőtlenség módot nyújt az n -edik és minden további approximáció hibájának megbecslésére.

Megjegyezzük még, hogy a Newton-Raphson-módszer az esetek nagy részében bizonyos kezdeti szabálytalanság után akkor is gyökhöz konvergál, ha a 21.1 Tétel feltételei nem mind teljesülnek.

d) Az iteráció. Ennél a módszernél az (21.1) egyenletet az

$$x = \varphi(x) \quad (21.4)$$

alakba írjuk. Kiindulunk a gyök egy közelítő x_0 értékéből és azt (21.4) jobb oldalába helyettesítve kapjuk az első approximációt

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

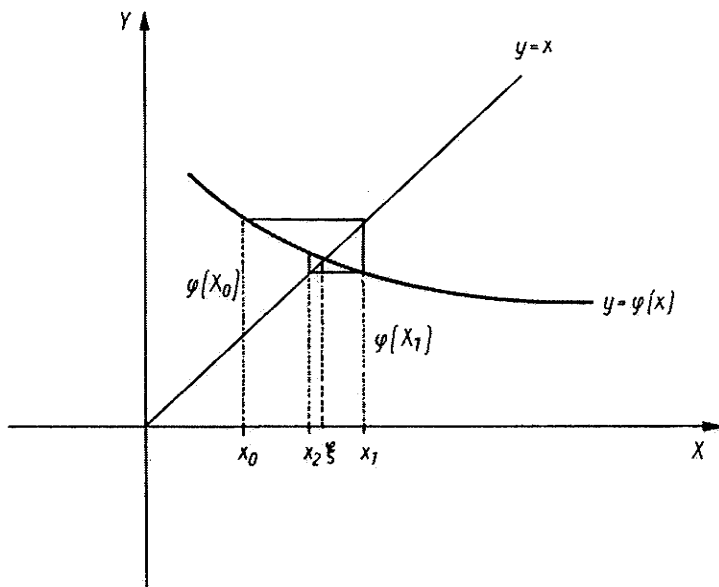
majd x_1 -et helyettesítve (21.4) jobb oldalába kapjuk a következő approximációt

$$x_2 = \varphi(x_1),$$

és így tovább, általában

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (21.5)$$

Ha ξ -vel jelöljük a keresett gyököt, akkor azt a ξ értéket keressük, melyre $\xi = \varphi(\xi)$. Geometriailag az $y = x$ egyenletű origón áthaladó 45° -os egyenes és a φ függvény grafikonjának metszéspontját kell meghatározni. Az iteráció egyes lépéseit a 21.3 ábra szemlélteti.



21.3 ábra

21.2 Tétel. Tételezzük fel, hogy a (21.4) egyenletnek van ξ gyöke az "a" pont egy ϱ sugarú $K_{a,\varrho}$ környezetében, $x_0 \in K_{a,\varrho}$, a φ függvény differenciálható $K_{a,3\varrho}$ -ban és van $0 < q < 1$ szám, hogy

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \text{ ha } x \in K_{a,3\varrho}; \quad (21.6)$$

akkor a (21.5) rekurziós formulával meghatározott x_n , $n \in T$ sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy a $K_{a,3\varrho}$ környezetben csak egy

gyök van, ui. $x - \varphi(x)$ deriváltja pozitív, vagyis $x - \varphi(x)$ szigorúan monoton növekedő. Megmutatjuk, hogy

$$|x_n - \xi| \leq 2 \varrho q^n, \quad n \in T. \quad (21.7)$$

A bizonyítást matematikai indukcióval végezzük. $|x_0 - \xi| < 2 \varrho$, ezért a Lagrange-féle közéértéktétellel és (21.6) felhasználásával

$$\begin{aligned} |x_1 - \xi| &= |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(\eta_0)(x_0 - \xi)| \leq \\ &\leq q \cdot 2 \varrho < 2 \varrho, \quad \eta_0 \in (x_0, \xi) \subset K_{a, 3 \varrho} \end{aligned}$$

vagyis mivel $\xi \in K_{a, \varrho}$, $x_1 \in K_{a, 3 \varrho}$. Tegyük fel, hogy

$$|x_{n-1} - \xi| < 2 \varrho q^{n-1} < 2 \varrho,$$

akkor

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(\eta_{n-1})(x_{n-1} - \xi)| \leq \\ &\leq q \cdot 2 \varrho q^{n-1} = 2 \varrho q^n < 2 \varrho, \end{aligned}$$

$$\eta_{n-1} \in (x_{n-1}, \xi) \subset K_{a, 3 \varrho}.$$

Tehát $x_n \in K_{a, 3 \varrho}$ és (21.7) fennáll minden $n \in T$ -re. (21.7)-ből már következik, hogy az x_n , $n \in T$ sorozat ξ -hez konvergál.!

(21.7) egyben az n -edik approximáció hibájának becslésére is lehetőséget ad.

Az előbbieken ismertetett közelítő eljárások bármelyikének alkalmazása esetén mindenegyik lépésben újra és újra ki kell számítani az egyenletben szereplő függvény helyettesítési értékét más és más helyeken (a Newton-Raphson-módszer alkalmazása esetén még a deriváltfüggvény értékeinek kiszámítására is szükség van). Algebrai egyenlet esetén a függvény, amelynek helyettesítési értékeit ki kell számítani, polinóm.

Amennyiben a

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (21.9)$$

pontosan n -edfoku polinom helyettesítési értékét közvetlenül a (21.8) alakba való behelyettesítéssel számítjuk ki, összesen általában $2n$ számú szorzást és n számú összeadást kell elvégeznünk. Az elvégzendő szorzások száma a felére csökkenthető, ha a $p(x)$ polinomot a következő alakban írjuk fel:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv$$

$$\equiv ((\dots ((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + \dots) x + a_1) x + a_0. \quad (21.10)$$

Az utóbbi alakban felírt polinom helyettesítési értékét az x_0 helyen úgy számítjuk ki, hogy ("belülről kifelé haladva") a_n -et megszorozzuk x_0 -lal, az eredményhez hozzáadjuk a_{n-1} -et, az eredményt megszorozzuk x_0 -lal stb. Ily módon általában n szorzás és n összeadás után megkapjuk a helyettesítési értéket. A számítást a következő ún. Horner-féle elrendezés segítségével végezzük:

$x \backslash a_k$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_0	$p(x)$
x_0	a_n	$a_n x_0 + a_{n-1}$	$(a_n x_0 + a_{n-1}) x_0 + a_{n-2}$		$(\dots (a_n x_0 + a_{n-1}) x_0 + \dots + a_0 =$	$= p(x_0)$

A Horner-féle elrendezésnek gazdaságosságán kívül még a következő előnye van. Ha x_0 a $p(x)$ polinom zérushelye, vagyis $p(x_0) = 0$ akkor a fenti Horner-elrendezés második sorában annak a polinomnak együtthatói állnak, mely $p(x)$ -ből az $(x-x_0)$ gyöktényezővel való osztás útján keletkezik. (Vö. Bezout tétele, 2.3 Tétel). Erről az olvasó könnyen meggyőződhet, ha figyelembe veszi, hogy a polinomok osztási algoritmusa szerint a

$\frac{p(x)}{x-x_0}$ hányados-polinom legmagasabbfoku $((n-1)$ -edfoku) tagjának együtthatója

a_n és minden rákövetkező együttható a megelőzőből x_0 -al való szorzás és a $p(x)$ polinom megfelelő együtthatójának hozzáadása útján keletkezik. Ha tehát a polinom egy gyökét már meghatároztuk, akkor a Horner-elrendezésben egyben előállt az az eggyel alacsonyabb fokú polinom is, melynek gyökei szolgáltatják az eredeti polinom többi gyökét.

21.1 Példa. Meghatározzuk a

$$p_4(x) = 4x^4 + 2x^3 - 3x - 5$$

polinom valós zérushelyeit, vagyis a $4x^4 + 2x^3 - 3x - 5 = 0$ egyenlet valós gyökeit. Néhány kísérlet után azt látjuk, hogy az $[1, 2]$ intervallumban van gyök és

$$p'_4(x) = 16x^3 + 6x^2 - 3 > 0, \quad x \in [1, 2]$$

$$p''_4(x) = 48x^2 + 12x > 0, \quad x \in [1, 2].$$

A Newton-Raphson-módszer alkalmazható; a számítás részleteit a megfelelő Horner-táblázatok tartalmazzák:

$x \backslash a_k$	4	2	0	-3	-5	$p_4(x)$
1	4	6	6	3	-2	
$x_0 = 2$	4	10	20	37	69	
$x_1 = 1,54$	4	8,15	12,4	16,0	24,5	
$x_2 = 1,18$	4	6,70	7,90	6,30	2,40	
$x_3 = 1,11$	4	6,44	7,12	4,90	0,42	
$x_4 = 1,09$	4	6,35	6,90	4,50	-0,1 $\approx$ 0	

$x \backslash a_k$	16	6	0	-3	$p'_4(x)$
2	16	38	76	149	
1,54	16	30,5	46,6	68,1	
1,18	16	24,9	29,4	32,5	
1,11	16	23,8	26,4	26,3	

"Logarléc pontossággal" tehát a $p_4(x)$ polinom egyik zérushelye $\xi_1 = 1,09$. Amint ez a $p_4(x)$ -re vonatkozó Horner-táblázat utolsó sorából kiolvasható

$$p_3(x) = \frac{p_4(x)}{x-1,09} = 4x^3 + 6,35x^2 + 6,90x + 4,50.$$

Ez utóbbi polinomnak a $[-1; -0,55]$ intervallumban van zérushelye és

$$p_3'(x) = 12x^2 + 12,7x + 6,9 > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$p_3''(x) = 24x + 12,7 < 0, \quad x \in [-1; -0,55].$$

Ennek a zérushelynek a meghatározására ismét a Newton-Raphson-módszert használjuk; a számítás részleteit a következő Horner-táblázatok tartalmazzák:

$x \backslash a_k$	4	6,35	6,90	4,50	$p_3(x)$
0				4,50	
-0,55	4	4,15	4,62	1,97	
$x_0 = -1$				-0,15	
$x_1 = -0,98$	4	2,43	4,52	0,07 ≈ 0	

$x \backslash a_k$	12	12,7	6,9	$p_3'(x)$
-1			6,2	
-0,98	12	0,9	6,1	

A $p_4(x)$ polinom második zérushelye tehát $\xi_2 = -0,98$. A $p_3(x)$ polinomra vonatkozó Horner-táblázat utolsó sorából kiolvasható, hogy

$$p_2(x) = \frac{p_3(x)}{x+0,98} = \frac{p_4(x)}{(x-1,09)(x+0,98)} = 4x^2 + 2,43x + 4,52.$$

Ez utóbbi polinom zérushelyei már gyökképlettel meghatározhatók. Látható, hogy $p_2(x)$ -nek már nincs valós gyöke, vagyis ξ_1 -gyel és ξ_2 -vel $p_4(x)$ összes valós zérushelyét meghatároztuk.

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

22. Függvény integrálhatósága

Számos olyan gyakorlati probléma merül fel, amelynek matematikai megfogalmazása és megoldása csak az integrál fogalmának felhasználásával lehetséges. A 22.1 Példa egy ilyen, egyszerű feladatot mutat be.

22.1 Példa. Legyen egy rakéta v sebessége a t időpontban

$$v(t) = e^t, \quad (22.1)$$

a null időpontban $v(0) = 1$ km/sec. Számítsuk ki mekkora s utat tesz meg a rakéta az első két másodperc alatt.

Osszuk fel a $[0, 2]$ időintervallumot n egyenlő részre (n tetszőleges pozitív egész szám). Jelöljük s_k -val azt az utat, amelyet a rakéta a k -adik részintervallumban tesz meg ($k = 1, 2, \dots, n$). A kérdéses ut

$$s = \sum_{k=1}^n s_k. \text{ Megbecsüljük } s_k \text{ értékét és ebből következtetünk } s \text{ értékére.}$$

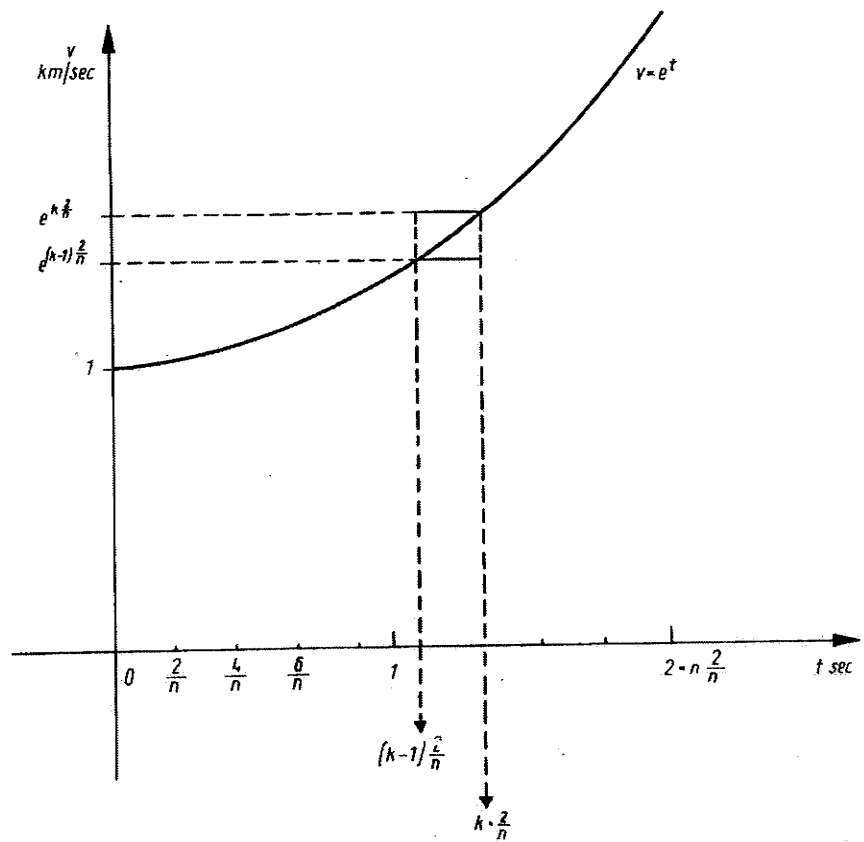
A k -adik részintervallum kezdőpontjában a rakéta

$$v\left((k-1) \frac{2}{n}\right) = e^{(k-1) \frac{2}{n}} \quad (22.2)$$

sebességgel, a többi pontjában ennél nagyobb sebességgel rendelkezik, hiszen a (22.1) sebesség függvény az idő monoton növekedő függvénye. Ha az egész k -adik részintervallumban a rakéta (22.2) sebességtől egyenletes mozgást végezne, akkor $v\left((k-1) \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n}$ utat tenne meg (lásd 22.1 ábra). Ez az ut nyilván kisebb mint az, amelyet a rakéta valójában megtesz. Tehát:

$$v\left((k-1) \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} < s_k$$

$$e^{(k-1) \frac{2}{n}} \cdot \frac{2}{n} < s_k$$



22.1 ábra

Ez az egyenlőtlenség k minden lehetséges értékére $(1, \dots, n)$ igaz. Ezt az n számú egyenlőtlenséget összeadva kapjuk:

$$\sum_{k=1}^n e^{(k-1) \frac{2}{n}} \cdot \frac{2}{n} < \sum_{k=1}^n s_k,$$

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} < s. \quad (22.3)$$

Hasonló okoskodással, a k -adik részintervallum végpontjában felvett sebességértékkel számolva s_k -ra felső becslést nyertünk:

$$s_k < e^{k \frac{2}{n}} \cdot \frac{2}{n} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ezt összegezve:

$$s < \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^k \quad (22.4)$$

A (22.3) és ((22.4) egyenlőtlenségeket összekapcsolva:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \left(1 + e^{\frac{2}{n}} + \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^{n-1}\right) &< s < \\ &< \frac{2}{n} \left(e^{\frac{2}{n}} + \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^n\right), \end{aligned}$$

azaz:

$$\frac{\frac{2}{n} \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} < s < \frac{\frac{2}{n} \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} \cdot e^{\frac{2}{n}}.$$

Azonosan átalakítva

$$\frac{\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}}}{\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}}} < s < \frac{\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}}}{\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} \cdot e^{\frac{2}{n}}}$$

Ez az egyenlőtlenség tetszőleges pozitív egész n esetén fennáll, mindkét oldal határértéke $n \rightarrow \infty$ esetén létezik és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{e^{\frac{2}{n}} - e^0}{\frac{2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} \cdot e^{\frac{2}{n}} = e^2 - 1.$$

innen az I. Kötet, 15.8 Tétel alapján adódik, hogy

$$s = e^2 - 1.$$

Felmerülhet azonban a kérdés, hogy eljutunk-e ugyanehhez az eredményhez, ha az intervallumot nem egyenlő részekre osztjuk fel és így végezzük el a becslést. Látjuk majd, hogy erre a kérdésre igennel válaszolhatunk. A módszer lényegének kifejtése az integrálfogalomhoz vezet.

A következő definíciók az integrálfogalom meghatározásához szükségesek. E pontban mindenütt $a < b$ valós számok.

22.1 Definíció. Az $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ zárt intervallumok

$P = \{I_k: k = 1, 2, \dots, n\}$ halmazát az $[a, b]$ intervallum egy

felosztásának nevezzük, ha $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots$

$< x_n = b$; x_k -t osztópontnak nevezzük.

22.2 Definíció. Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvénynek az $[a, b]$ intervallum

$P = \{I_k: k=1, \dots, n\}$ felosztásához tartozó alsó összege:

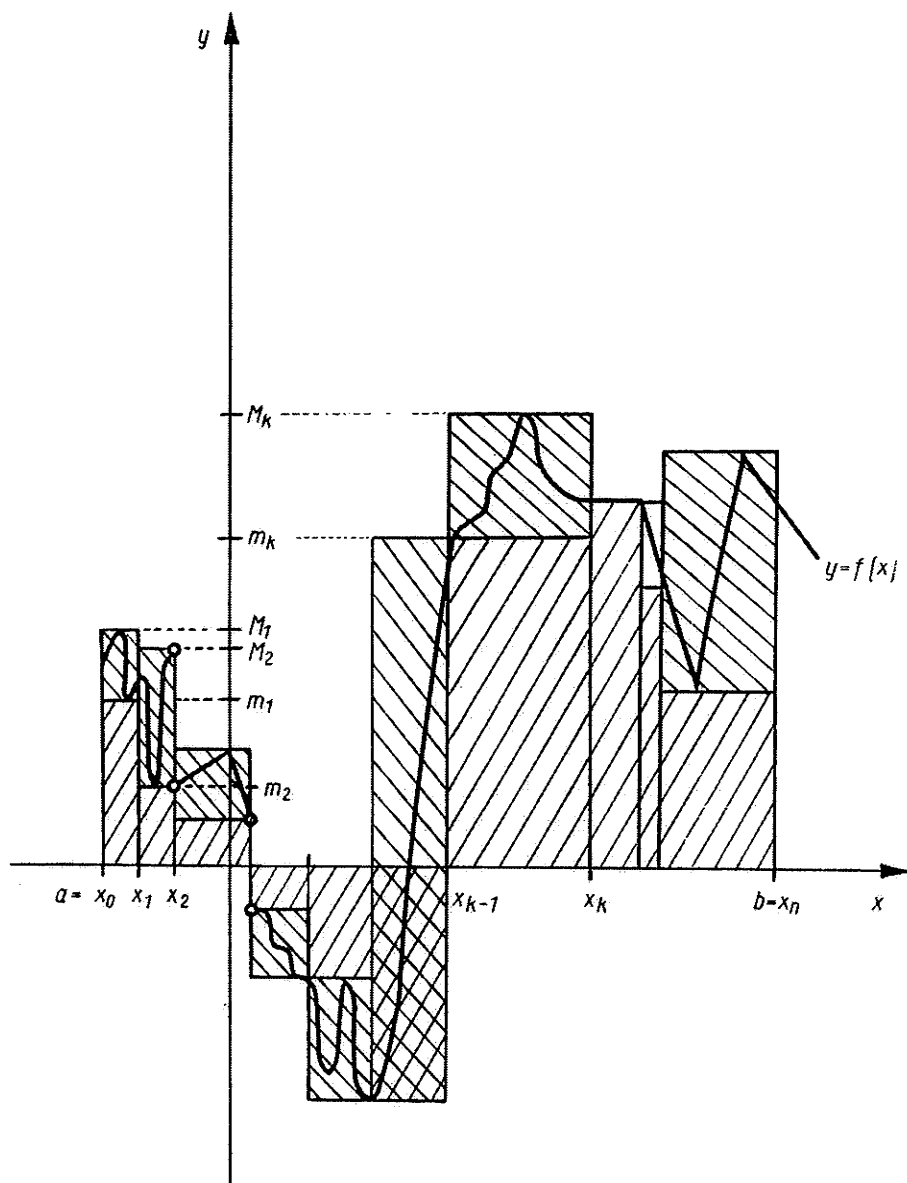
$$s_P = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

felső összege

$$S_P = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

ahol $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$

és $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$.



22.2 ábra

Megjegyzés. A 22.2 Definíció csak korlátos függvényekre értelmezhető. Ez esetben a $\{f(x); x \in I_k\}$ halmaz felülről és alulról is korlátos, így a Dedekind-féle folytonossági axiómából (I. I. Kötet 10. pont D.) következik, hogy m_k és M_k létezik.

22.3 Definíció. A $\Delta P = \max_k (x_k - x_{k-1})$ értéket a $P = \{I_k; k=1, \dots, n\}$, ahol

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \quad \text{felosztás finomságának nevezzük.}$$

22.4 Definíció. A $[a, b]$ intervallum P_l ($l=1, 2, \dots$) felosztásának sorozatát minden határon túl finomodónak nevezzük, ha

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Delta P_l = 0$$

A következő segédtételek (22.1 Segédttétel - 22.6 Segédttétel) rögzített $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény felső, illetve alsó összegeinek tulajdonságaival foglalkoznak.

22.1 Segédttétel. Adott P felosztáshoz tartozó alsó összeg kisebb vagy egyenlő, mint a felső összeg, azaz $s_P \leq S_P$.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik $m_k \leq M_k$ -ből!

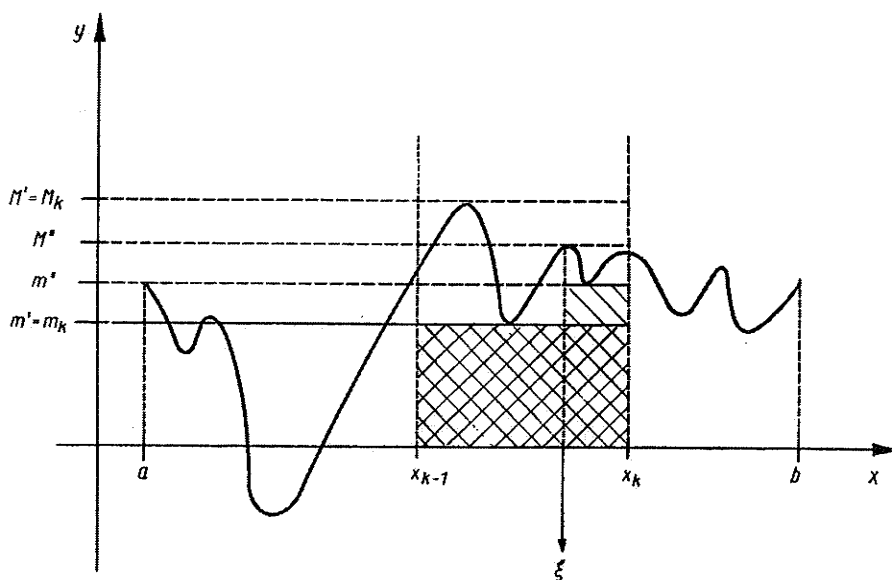
22.2 Segédttétel. Ha egy adott P felosztás osztópontjaihoz véges sok osztópontot veszünk hozzá, akkor az így létrejött P' felosztáshoz tartozó $s_{P'}$, ill. $S_{P'}$ alsó, ill. felső összegre fennáll:

$$s_P \leq s_{P'}, \text{ ill. } S_P \geq S_{P'}.$$

Bizonyítás. Nyilván elég azt az esetet bizonyítanunk, amikor P' a P -ből egy új osztópont (ξ) hozzávételével keletkezik. Legyen $x_{k-1} < \xi < x_k$. s_P tagjait, a k -adik tag kivételével megtalálhatjuk $s_{P'}$ tagjai között. s_P k -adik tagja, $m_k(x_k - x_{k-1})$ helyett $s_{P'}$ -ben az $m'(\xi - x_{k-1}) + m''(x_k - \xi)$ összeg szerepel, ahol

$$m' = \inf \{f(x); x \in [x_{k-1}, \xi]\}$$

$$m'' = \inf \{f(x); x \in [\xi, x_k]\}$$



22.3 ábra

(lásd 22.3 ábra). Így:

$$s_{P'} - s_P = m' (\xi - x_{k-1}) + m''(x_k - \xi) - m_k(x_k - x_{k-1}) \quad (22.5)$$

m_k definíciója alapján (lásd 22.2 Definíció)

$$m_k \leq m' \quad \text{és} \quad m_k \leq m''.$$

Ezért:

$$s_{P'} - s_P \geq m_k (\xi - x_{k-1}) + m_k(x_k - \xi) - m_k(x_k - x_{k-1}) = 0$$

Tehát $s_{P'} \geq s_P$. Hasonló okoskodással kapjuk, hogy $S_{P'} \leq S_P$.

22.3 Segédteétel. Legyen P $\delta > 0$ -nál finomabb tetszőleges felosztás. Származzék P' a P -ből N számú új osztópont hozzávételével. Akkor a s_P és $s_{P'}$ (illetve a S_P és $S_{P'}$) alsó összegek (felső összegek) eltérése $2KN\delta$ -val becsülhető, ahol K az $|f(x)|$ felső korlátja. Azaz:

$$|s_P - s_{P'}| \leq 2KN\delta \quad \text{és} \quad |S_P - S_{P'}| \leq 2KN\delta.$$

Bizonyítás. Az alsó összegekre vonatkozó állítást bizonyítottuk csak, először az $N = 1$ esetben. (Az új osztópont $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$). Felső összegekre a bizonyítás analóg úton történik. A 22.2 Segédétel jelöléseit használva legyen $m = \max(|m'|, |m''|)$, tehát

$$|m'| \leq m \text{ és } |m''| \leq m$$

(lásd 22.3 ábra). Így (22.5)-ből kapjuk:

$$\begin{aligned} |s_{P'} - s_P| &\leq |m(\xi - x_{k-1})| + |m(x_k - \xi)| + |m_k(x_k - x_{k-1})| = \\ &= |m(x_k - x_{k-1})| + |m_k(x_k - x_{k-1})| = \\ &= (m + |m_k|) |x_k - x_{k-1}| \leq 2K\delta. \end{aligned}$$

Ebből az állítás $N > 1$ -re is nyilvánvalóan következik, ugyanis az N számú osztópontot egyesével vesszük hozzá a P felosztáshoz. A szereplő felosztások mind δ -nál finomabbak. Így minden alkalommal az alsó összeg legfeljebb $2K\delta$ -val változhat, tehát összesen legfeljebb $2KN\delta$ -val.

22.4 Segédétel.

$$s_{P_1} \leq s_{P_2},$$

ahol P_1 és P_2 tetszőleges felosztások.

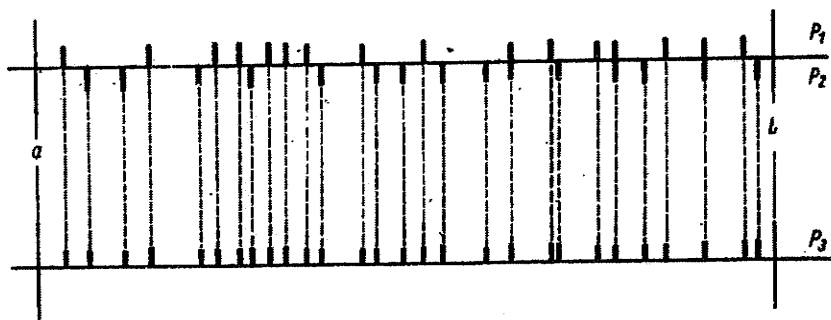
Azaz, bármely felosztáshoz tartozó alsó összeg kisebb vagy egyenlő, mint bármely felosztáshoz tartozó felső összeg.

Bizonyítás: Tekintsük a P_1 és P_2 felosztás osztópontjainak az egyesítését, majd az ezen pontok által meghatározott P_3 felosztást (lásd 22.4 ábra). A P_3 felosztás mind a P_1 -ből, mind pedig a P_2 -ből származtatható véges sok osztópont beiktatásával. Ezért a 22.2 Segédétel szerint:

$$s_{P_1} \leq s_{P_3} \text{ és } s_{P_3} \leq s_{P_2} \quad (22.6)$$

A 22.1 Segédétel alapján:

$$s_{P_3} \leq S_{P_3} \quad (22.7)$$



22.4 ábra

Felhasználva az egyenlőtlenségek tranzitivitását (22.6) és (22.7) -ből kapjuk:

$$s_{P_1} \leq s_{P_2} .!$$

22.5 Segédétel. Legyen az $[a, b]$ intervallum valamennyi felosztásához tartozó alsó összegek halmaza $\{s\}$, felső összegek halmaza $\{S\}$. Létezik $h = \sup \{s\}$ és $H = \inf \{S\}$ és $h \leq H$.

Bizonyítás. $\{s\}$ felülről korlátos halmaz, hiszen a 22.4 Segédétel alapján bármely S felső összeg felső korlátja. Ugyanígy $\{S\}$ alulról korlátos halmaz, mivel bármely alsó összeg alsó korlátja. A Dedekind-féle folytonossági axióma biztosítja h és H létezését.

Az I. Kötet 10.3 Definícióját követő megjegyzésből adódik, hogy $h \leq H$, ui. h az $\{s\}$ halmaz felső korlátai halmazának legnagyobb alsó korlátja és H a felső korlátok halmaza egy részhalmazának, $\{S\}$ -nek legnagyobb alsó korlátja.!

22.6 Segédétel: Legyen P_i , $i = 1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztás sorozat. Akkor $\lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = h$ és $\lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i} = H$.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden $\delta(\varepsilon)$ -nál finomabb felosztáshoz tartozó alsó összeg h -től a felső összeg pedig H -től ε -nál kevesebbel tér el. Az alsó összegre vonatkozó állítást bizonyítjuk be. A felső összegre vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható.

Azt kell megmutatnunk, hogyha $\delta = \delta(\varepsilon)$ -t "elég kicsire" választjuk, és P egy tetszőleges, δ -nál finomabb felosztás, akkor $h - s_P < \varepsilon$.

A 22.5 Segédttételből következik, hogy létezik olyan s_{P_0} , melyre $h - s_{P_0} < \frac{\varepsilon}{3}$. Jelöljük P_0 osztópontjainak számát N -nel. A P' felosztás jelölje P_0 és P osztópontjainak egyesítésével nyert felosztást. P' -t a P_0 -ból véges sok osztópont hozzávételével származtattuk, ezért a 22.2 Segédttétel értelmében $s_{P_0} \leq s_{P'} \leq h$. Mivel

$$h - s_{P_0} < \frac{\varepsilon}{3},$$

azért

$$s_{P'} - s_{P_0} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

P' -t származtathatjuk P -ből is N darab osztópont (P_0 osztópontjai) hozzávételével. Alkalmazhatjuk a 22.3 Segédttételt: $s_{P'} - s_P < 2KN\delta$.

Igy:

$$h - s_P = (h - s_{P_0}) + (s_{P_0} - s_{P'}) + (s_{P'} - s_P),$$

$$\begin{aligned} |h - s_P| &\leq |h - s_{P_0}| + |s_{P_0} - s_{P'}| + |s_{P'} - s_P| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 2KN\delta. \end{aligned}$$

Ezért $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{6KN}$ választással $h - s_P < \varepsilon$!

22.5 Definíció. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon Riemann szerint integrálható, ha $h = H$, ahol h és H jelentése u.a. mint előbb. Az $I = h = H$ számot az $f(x)$ függvény $[a, b]$ -beli határozott integráljának nevezzük és

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{vagy} \quad I = \int_{[a, b]} f(x) dx \text{ -szel jelöljük.}$$

22.7 Tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

a) Ha $\int_a^b f(x)dx$ létezik, akkor bármely P_i , $i = 1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztás sorozatra fennáll:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i} = \int_a^b f(x)dx.$$

b) Ha van P_i , $i = 1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztás-sorozat, melyre léteznek a következő véges határértékek és

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i},$$

akkor $\int_a^b f(x)dx = I$ létezik, és

$$I = \lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i}$$

Bizonyítás. a) A feltétel szerint $h = H$. Alkalmazva a 22.6 Segédételt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = h = H = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i}.$$

b) A 22.6 Segédétél szerint

$$h = \lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i} = H$$

Tehát $h = H = I$, és $I = \int_a^b f(x) dx$ létezik.!

22.8 Tétel. A $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható $[a, b]$ -n, ha csak egy olyan I szám létezik, hogy minden s alsó összegre és minden S felső összegre $s \leq I \leq S$.

Bizonyítás. A feltételt kielégítő I számok elemei a $[h, H]$ intervallumnak, és a $[h, H]$ minden eleme ilyen tulajdonságú. Ezért, ha f integrálható, akkor $h = H$ és $[h, H]$ -nak csak egyetlen I eleme van. Megfordítva, ha csak egy I szám létezik, akkor $[h, H]$ -nak csak egy eleme van. Ezért $h = H$, f integrálható.!

Az integrálhatóság egy előbbiekkal ekvivalens definíciójának megadásához bevezetjük a téglányösszeg (más néven integrálközelítő összeg) fogalmát.

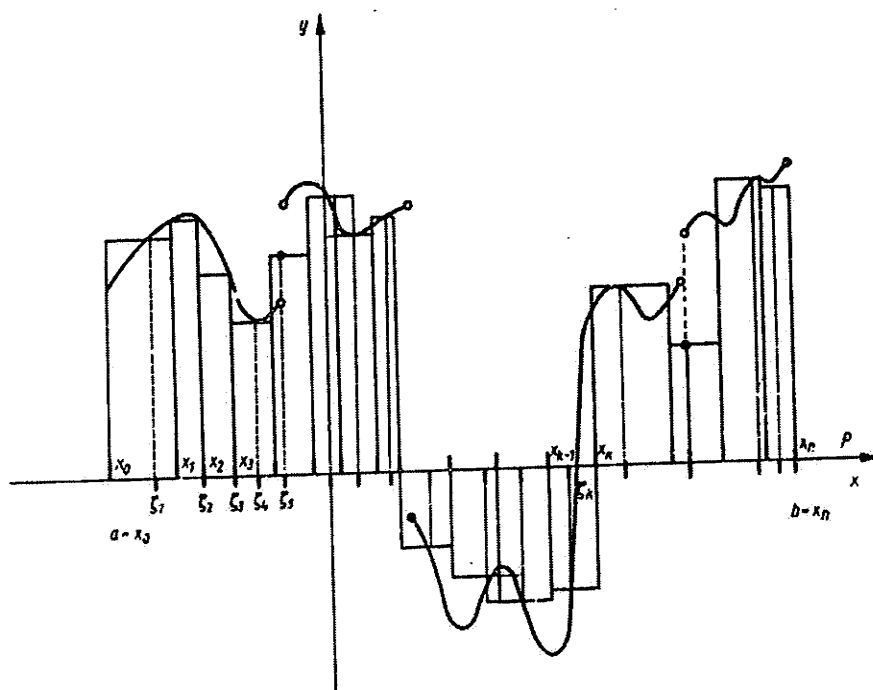
22.6 Definíció. Azt mondjuk, hogy a

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

kifejezés az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvénynek az $[a, b]$ intervallum $P = \{I_k : k = 1, \dots, n\}$ felosztásához tartozó téglányösszege, ha

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] = I_k$$

$k = 1, 2, \dots, n$ (lásd 22.5 ábra).



22.5 ábra

Rögzített P felosztáshoz kontinuum számosságú téglányösszeg tartozik, mivel minden k -ra $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ kontinuum sokféleképpen választható meg. Jelöljük a P -hez tartozó téglányösszegek halmazát $\{\sigma_P\}$ -vel. Nyilvánvaló, hogy valamennyi téglányösszegre fennáll: $s_P \leq \sigma_P \leq S_P$. Ebből az egyenlőtlenségből kaphatjuk a következő Segédételt.

22.9 Segédétel. Legyen P tetszőleges rögzített felosztás, akkor

$$s_P = \inf \{ \sigma_P \}, \quad S_P = \sup \{ \sigma_P \}.$$

Bizonyítás. Mivel minden σ_P -re $s_P \leq \sigma_P$, azért s_P alsó korlát. Megmutatjuk, hogy s_P a $\{\sigma_P\}$ halmaz legnagyobb alsó korlátja, vagyis ha $k > s_P$, akkor van σ_P , hogy $\sigma_P < k$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megválasztható ξ_k ($k = 1, \dots, n$) úgy, hogy $f(\xi_k) - m_k < \varepsilon$ legyen, ($k = 1, \dots, n$); m_k jelölése ua., mint a 22.2 Definícióban. Így

$$\begin{aligned} \sigma_P - s_P &= \sum_{k=1}^n [f(\xi_k) - m_k] (x_k - x_{k-1}) < \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n \varepsilon \Delta P = n \varepsilon \Delta P. \end{aligned}$$

Mivel rögzített P felosztásról van szó, azért $\varepsilon > 0$ választható úgy, hogy $\sigma_P - s_P$ tetszőlegesen kicsi legyen, vagyis fennálljon $\sigma_P - s_P < k - s_P$, ahonnan $\sigma_P < k$ következik. Hasonlóan bizonyítható az S_P -re vonatkozó állítás.

Ha f korlátos és integrálható, akkor P_i minden határon túl finomodó felosztássorozathoz tartozó s_{P_i} és S_{P_i} értékek $I = \int_a^b f(x) dx$ -hez tartanak (l. 22.7 Tétel). Így a közéjük eső kontinuum sok σ_P is egyre közelebb kerül I -hez. Ez utóbbi állítás pontos tartalmát a következő definícióban és tételben fogalmazzuk meg.

22.7 Definíció. Azt mondjuk, hogy a P_i , $i = 1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztássorozathoz tartozó téglányösszegek a véges

ℓ értékhez konvergálnak (jelölése: $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{P_i} = \ell$), ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden $\Delta P_i < \delta(\varepsilon)$ -t kielégítő P_i felosztáshoz tartozó valamennyi σ_{P_i} benne van ℓ -nek ε sugaru környezetében.

22.10 Tétel. a) Ha az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény integrálható, akkor minden $P_i, i = 1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztás sorozatra $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{P_i} = \int_a^b f(x) dx$.

b) Ha található olyan $P_i, i = 1, 2, \dots$ felosztássorozat, hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta P_i = 0$ és $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{P_i} = \ell$, akkor f integrálható és $\ell = \int_a^b f(x) dx$.

Bizonyítás. a) Legyen $P_i, i = 1, 2, \dots$ tetszőleges minden határon túl finomodó felosztás sorozat. A

$$s_{P_i} \leq \sigma_{P_i} \leq S_{P_i} \quad i = 1, 2, \dots$$

egyenlőtlenség bal és jobb oldalának a 22.7 Tétel alapján létezik közös határértéke, éspedig f $[a, b]$ -re vonatkozó integrálja. Ebből következik, hogy a σ_{P_i} téglányösszegek is konvergálnak:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{P_i} = \int_a^b f(x) dx.$$

b) A feltétel szerint bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\Delta P_i < \delta(\varepsilon)$ esetén $|\sigma_{P_i} - \ell| < \varepsilon$ a $\{\sigma_{P_i}\}$ halmaz valamennyi elemére.

Ezen σ_{P_i} téglányösszegek között van olyan σ'_{P_i} és σ''_{P_i} , hogy

$$|\sigma'_{P_i} - s_{P_i}| < \varepsilon \quad \text{illetve} \quad |\sigma''_{P_i} - S_{P_i}| < \varepsilon \quad (\text{lásd 22.9 Segédétel}).$$

Ezért

$$|s_{P_1} - \ell| \leq |s_{P_1} - \sigma'_{P_1}| + |\sigma'_{P_1} - \ell| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$|s_{P_1} - \ell| \leq |s_{P_1} - \sigma''_{P_1}| + |\sigma''_{P_1} - \ell| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Tehát $\lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = \ell = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i}$. A 22.7 Tétel b) pontjából következik, hogy f

integrálható és $\ell = \int_a^b f(x) dx$.

Az integrálok tulajdonságaira vonatkozó tételek (23. pont) bizonyításánál jól használható az integrálhatóságnak az ugynevezett oszcillációs összeggel megfogalmazott kritériuma, amely ekvivalens a 22.5 Definícióval.

22.8 Definíció. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és P az $[a, b]$ intervallum egy felosztása; az $O_P = S_P - s_P$ értéket a P felosztáshoz tartozó oszcillációs összegnek nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy $O_P \geq 0$, és $O_P = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1})$

ahol $P = \{I_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ és $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ (lásd 22.2 ábra, a jelölésre nézve 1. a 22.2 Definíciót).

22.11 Tétel. a) Ha az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény integrálható, akkor tetszőleges minden határon túl finomodó P_i , $i = 1, 2, \dots$ felosztássorozatra fennáll:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} O_{P_i} = 0$$

b) Ha van olyan P_i minden határon túl finomodó felosztássorozat, hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} O_{P_i} = 0$, akkor f integrálható.

Bizonyítás. a) A 22.7 Tétel a) és a 22.8 Definíciónak a következménye:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} O_{P_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} (S_{P_i} - s_{P_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i} - \lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = 0.$$

b) A 22.7 Tétel b) és a 22.8 Definíciónak a következménye; ugyanis ha $\lim_{i \rightarrow \infty} O_{P_i} = 0$, akkor $\lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i}$ tehát f integrálható!

22.12 Tétel. Ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz, létezik olyan P felosztás, hogy $O_P < \varepsilon$, akkor f integrálható.

Bizonyítás. A feltétel szerint létezik P , hogy $O_P = S_P - s_P < \varepsilon$. Mivel $S_P \geq H \geq h > s_P$, igaz a $H - h \leq S_P - s_P < \varepsilon$ egyenlőtlenség minden $\varepsilon > 0$ -ra. Ezért $H = h$, így f integrálható!

22.2 Példa. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x$ függvény integrálható $[a, b]$ -ben,

ahol $a < b$ tetszőleges valós számok és számítsuk ki $\int_a^b f(x) dx$ értékét!

Legyen $P_n = \{I_1, \dots, I_k, \dots, I_n\}$ $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ahol

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} k.$$

(Az $[a, b]$ -t n egyenlő részre osztottuk (lásd 22.6 ábra)). Nyilván

$\Delta P_n = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$ vagyis P_n minden határon túl finomodó felosztássorozat. Megmutatjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} O_{P_n} = 0$. Ebből következik, hogy $f(x)$

integrálható, a 22.11 Tétel b) alapján.

Mivel $f(x)$ monoton növekvő

$$m_k = x_{k-1} = a + (k-1) \frac{b-a}{n}$$

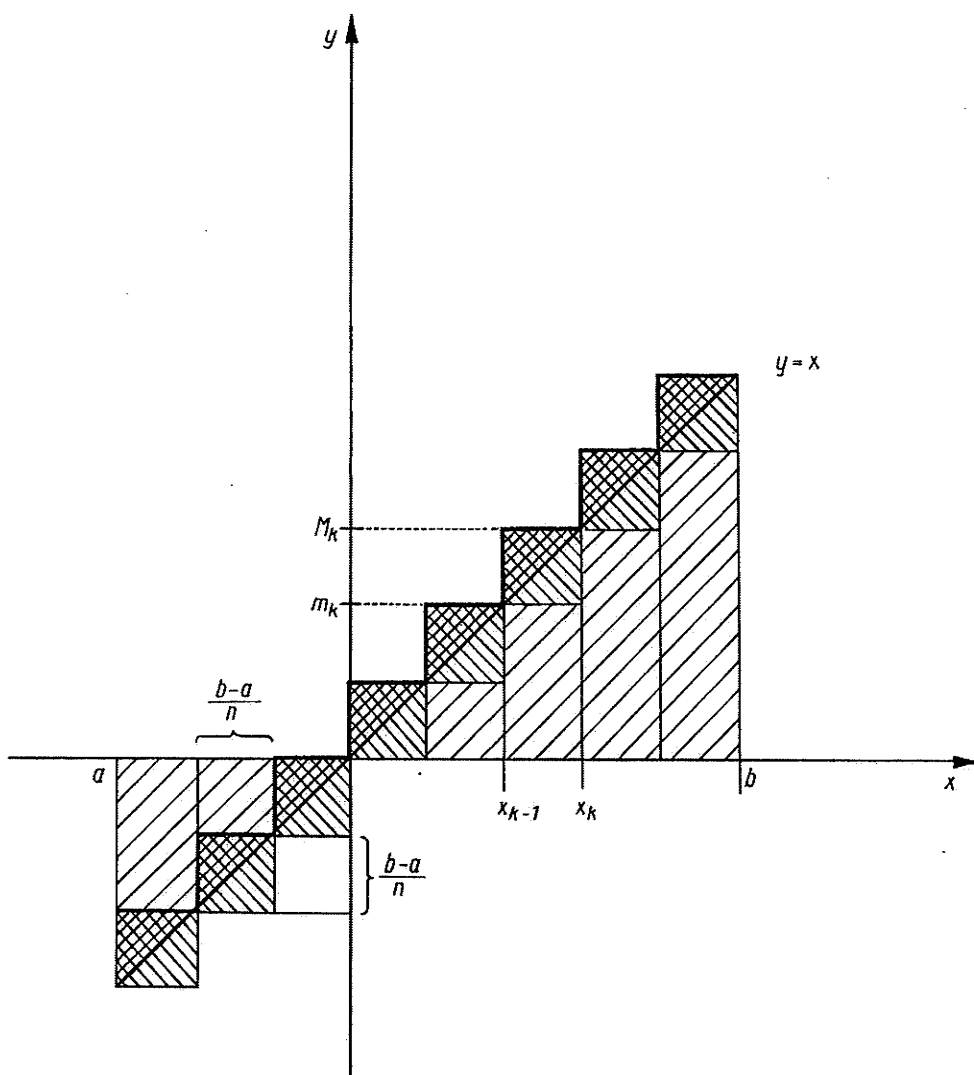
és

$$M_k = x_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

Igy

$$\begin{aligned} O_{P_n} &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^n 1 = \frac{(b-a)^2}{n} \cdot n = \frac{(b-a)^2}{n} \end{aligned}$$

$$O_{P_n} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$



22.6 ábra

A 22.7 Tétel szerint $\int_a^b x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{P_n}$

$$S_{P_n} = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{a(b-a)}{n} + \sum_{k=1}^n k \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{a(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^n k = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{P_n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x \, dx.$$

22.3 Példa. Legyen $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális és } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális és } x \in [0, 1] \end{cases}$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ nem integrálható $[0, 1]$ -ben.

Tetszőleges P felosztáshoz tartozó O_P -re fennáll:

$$\begin{aligned} O_P &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (1-0) (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1, \end{aligned}$$

miel minden $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumban van racionális és irracionális szám

is (1 függvényérték és 0 függvényérték). Így $\Delta P_1 \rightarrow 0$ esetén $O_{P_1} \rightarrow 1$,

ezért a 22.11 Tétel a)-ból következik, hogy f nem integrálható $[0, 1]$ -ben.

Megjegyzés. A 22.7 Tétel felhasználásával kapjuk, hogy a 22.1 Példában szereplő ut:

$$s = \int_0^2 e^t \, dt = e^2 - 1.$$

23. A határozott integrál

A következő tételek (23.1-től 23.8-ig) az integrál elemi tulajdonságaira vonatkoznak. Az előző pontban bevezetett jelöléseket külön magyarázat nélkül használjuk.

23.1 Tétel. Ha $f(x) \equiv c$, c állandó, $x \in [a, b]$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = c(b-a)$$

Bizonyítás:

$s_p = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$, $S_p = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$,
tetszőleges P felosztás esetén. Ezért $h = \sup_P \{s_p\} = c(b-a) = \inf_P \{S_p\} = H$,
vagyis $I = c(b-a)$!

23.1 Definíció. Az $[a, b]$ intervallumon korlátos és integrálható függvények halmazát $\Sigma_{[a, b]}$ -vel jelöljük ($b > a$).

23.2 Definíció. Legyen $f \in \Sigma_{[a, b]}$ ($b > a$). Megállapodunk a következő jelölésben:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

23.3 Definíció: $\int_a^a f(x) dx = 0$.

A 23.2 Definíciót az $a=b$ esetre alkalmazva ez a definíció nem lehet más, ugyanis a határokat felcserélve:

$$\int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx = 0 \text{ -nak}$$

kell fennállnia.

23.2 Tétel. Legyen $f \in \sum_{[a,b]}$ és $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$
akkor $f \in \sum_{[\alpha, \beta]}$.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $\delta(\varepsilon) > 0$ olyan, hogy f -nek az $[a, b]$ minden $\delta(\varepsilon)$ -nál finomabb felosztásához tartozó oszcillációs összege kisebb legyen ε -nál. A 22.11 Tétel biztosítja ilyen $\delta(\varepsilon)$ létezését. Tekintsük az $[\alpha, \beta]$ intervallum tetszőleges $\delta(\varepsilon)$ -nál finomabb felosztását. Alkalmas új osztó pontok beiktatásával ez az $[a, b]$ intervallum egy $\delta(\varepsilon)$ -nál finomabb felosztásává egészíthető ki. Az ezen vett oszcillációs összeg nagyobb - egyenlő mint az eredeti $[\alpha, \beta]$ -hoz tartozó felosztáson vett oszcillációs összeg, mivel az utóbbiból nem negatív tagok hozzávételével keletkezett. Így az $[\alpha, \beta]$ tetszőleges $\delta(\varepsilon)$ -nál finomabb felosztásához tartozó oszcillációs összeg is kisebb, mint ε . A 22.11 Tétel értelmében $f \in \sum_{[\alpha, \beta]}$.!

23.3 Tétel. Ha $f \in \sum_{[a,b]}$ és $f \in \sum_{[b,c]}$, akkor $f \in \sum_{[a,c]}$ és

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

ahol a, b, c tetszőleges valós számok lehetnek, figyelembe véve a 23.2 és 23.3 Definíciót.

Bizonyítás. Elegendő azt az esetet bizonyítanunk, amikor $a < b < c$. A többi eset ebből már könnyen adódik. Például, ha $b < c < a$, akkor $f \in \sum_{[a,b]}$ -ből a 23.2 Tétel alapján következik

$$f \in \sum_{[b,c]} \text{ és } f \in \sum_{[c,a]},$$

ezért

$$\int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$$

Ebből

$$\int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx - \int_b^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Legyen tehát $a < b < c$. Jelentse $P_1([a, b])$, ill. $P_1([b, c])$,

$i = 1, 2, \dots$ az $[a, b]$, ill. a $[b, c]$ intervallum minden határon túl finomodó felosztás sorozatát, $s_{P_i}[a, b]$, $s_{P_i}[b, c]$ illetve $S_{P_i}[a, b]$, $S_{P_i}[b, c]$ a megfelelő alsó, illetve felső összegeket. A $P_i([a, b])$ és $P_i([b, c])$ felosztások egyesítése $[a, c]$ felosztását adja, amelyet $P_i([a, c])$ -val jelölünk. $P_i([a, c])$, $i = 1, 2, \dots$ is minden határon túl finomodó felosztássorozat.

A 22.7 Tételből következik:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i}[a, b] = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i}[a, b]$$

$$\int_b^c f(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i}[b, c] = \lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i}[b, c]$$

Mivel

$$s_{P_i}[a, c] = s_{P_i}[a, b] + s_{P_i}[b, c]$$

$$S_{P_i}[a, c] = S_{P_i}[a, b] + S_{P_i}[b, c],$$

$$\text{azért } \lim_{i \rightarrow \infty} s_{P_i}[a, c] = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{P_i}([a, c])$$

A 22.7 Tétel b)-ből következik, hogy $f \in \Sigma_{[a, c]}$ és

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

23.4 Tétel. Ha $f \in \Sigma_{[a, b]}$, akkor $cf(x) \in \Sigma_{[a, b]}$ és

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx,$$

ahol c tetszőleges valós szám.

Bizonyítás. Állításunk nyilvánvalóan következik abból a tényből, hogy az $[a, b]$ tetszőleges felosztásánál $cf(x)$ alsó, illetve felső összege egyenlő $f(x)$ alsó, illetve felső összegének c -szeresével és a 22.7 Tételből.

23.5 Tétel. Ha $f \in \sum [a, b]$ és $g \in \sum [a, b]$, akkor $(f + g) \in \sum [a, b]$ és

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Bizonyítás. Mivel $[a, b]$ tetszőleges felosztása esetén $f(x)$ és $g(x)$ -nek ugyanazon ξ_k -kal (l. 22.6 Definíció) képezett téglányösszegeinek összege $(f(x) + g(x))$ téglányösszegét adja és megfordítva $f(x) + g(x)$ bármely téglányösszege felbontható $f(x)$, illetve $g(x)$ téglányösszegeinek az összegére, azért állításunk a 22.10 Tétel felhasználásával adódik.

23.6 Tétel. Ha $f \in \sum [a, b]$ és $g \in \sum [a, b]$, akkor $(f \cdot g) \in \sum [a, b]$.

Bizonyítás. Először bebizonyítjuk, hogy ha $F \in \sum [a, b]$, akkor $F^2 \in \sum [a, b]$. Legyen I_k az $[a, b]$ intervallum egy részintervalluma és $m_k = \inf_{x \in I_k} F(x)$,

$$M_k = \sup_{x \in I_k} F(x) \text{ és } |F(x)| < K, x \in [a, b].$$

Ekkor ha $0 \leq m_k \leq M_k$, vagy $m_k \leq M_k \leq 0$, akkor

$$\sup_{x \in I_k} F^2(x) - \inf_{x \in I_k} F^2(x) \leq |M_k^2 - m_k^2| =$$

$$= |M_k + m_k| |M_k - m_k| \leq 2K |M_k - m_k|,$$

illetve ha $m_k < 0 < M_k$, akkor $\sup_{x \in I_k} F^2(x) - \inf_{x \in I_k} F^2(x) \leq \max(M_k^2, m_k^2) \leq$

$$\leq |M_k - m_k|^2 \leq 2K |M_k - m_k|.$$

Ezek szerint F^2 tetszőleges $O_P^{F^2}$ oszcillációs összegére, ahol I_k a P felosztás k -adik intervalluma

$$O_P^{F^2} = \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in I_k} F^2(x) - \inf_{x \in I_k} F^2(x) \right) (x_k - x_{k-1}) \leq$$

$$\leq 2K \sum_{k=1}^n |M_k - m_k| (x_k - x_{k-1}) = 2KO_P^F.$$

Mivel F integrálható, $O_P^F \rightarrow 0$, és ennek következtében $O_P^{F^2} \rightarrow 0$, ha P minden határon túl finomodik, vagyis F^2 valóban integrálható. Mivel

$$f \cdot g = \frac{1}{2} [(f+g)^2 - f^2 - g^2],$$

a tétel állítása most már a 23.3 és 23.4 Tételekből és abból következik, hogy az előbb bizonyítottak szerint $(f+g)^2$, f^2 és g^2 integrálhatók.!

23.7 Tétel. Ha $f \in \Sigma_{[a,b]}$, $g \in \Sigma_{[a,b]}$ és $g(x) \geq m > 0$, $x \in [a,b]$ (vagy $g(x) \leq m < 0$) akkor

$$\frac{f}{g} \in \Sigma_{[a,b]}.$$

Bizonyítás. Elég azt bizonyítani, hogy $\frac{1}{g} \in \Sigma_{[a,b]}$ ebből a 23.6 Tétel felhasználásával adódik, hogy $f \cdot \frac{1}{g} \in \Sigma_{[a,b]}$.

$\frac{1}{g}$ nyilván korlátos és tetszőleges $P = \{I_k : k = 1, \dots, n\}$ felosztáshoz tartozó $O_P^{\frac{1}{g}}$ oszcillációs összegére igaz:

$$\begin{aligned} 0 \leq O_P^{\frac{1}{g}} &= \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in I_k} \frac{1}{g(x)} - \inf_{x \in I_k} \frac{1}{g(x)} \right) (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\inf_{x \in I_k} g(x)} - \frac{1}{\sup_{x \in I_k} g(x)} \right) (x_k - x_{k-1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \frac{\sup_{x \in I_k} g(x) - \inf_{x \in I_k} g(x)}{\inf_{x \in I_k} g(x) \cdot \sup_{x \in I_k} g(x)} (x_k - x_{k-1}) \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{\sup_{x \in I_k} g(x) - \inf_{x \in I_k} g(x)}{m^2} (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{m} \cdot O_P^g.
\end{aligned}$$

Mivel $g \in \Sigma[a, b]$ azért a 22.11 Tétel a) alapján $\lim_{\Delta P \rightarrow 0} O_P^g = 0$. Felhasználva

a fenti becslést kapjuk: $\lim_{\Delta P \rightarrow 0} O_P^g = 0$. Így a 22.11 Tétel b) biztosítja $\frac{1}{g}$ integrálhatóságát $[a, b]$ -n.

23.8 Tétel. Ha $f \in \Sigma[a, b]$ és a $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $g(x) = f(x)$, ha $x \neq c_1, x \neq c_2, \dots, x \neq c_N$ (véges számú hely kivételével megegyeznek), akkor

$$g \in \Sigma[a, b] \quad \text{és} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Bizonyítás. Elég az $N = 1$ esetet bizonyítanunk, nagyobb N -re az állítás matematikai indukcióval adódik. g nyilván korlátos. Csak olyan $P = \{I_1, \dots, I_k, \dots, I_n\}$ felosztásokat tekintünk, amelyeknél c_1 belső pontja valamely I_j -nek, vagyis $c_1 \in (x_{j-1}, x_j)$. Így O_P^f és O_P^g csak az j -edik tagban különbözik egymástól. Ezért:

$$\begin{aligned}
0 \leq O_P^g &= \sum_{k=1}^{j-1} (M_k^g - m_k^g)(x_k - x_{k-1}) + (M_j^g - m_j^g)(x_j - x_{j-1}) \\
&+ \sum_{k=j+1}^n (M_k^g - m_k^g)(x_k - x_{k-1}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n (M_k^f - m_k^f) (x_k - x_{k-1}) - (M_j^f - m_j^f) (x_j - x_{j-1}) \\
&+ (M_j^g - m_j^g) (x_j - x_{j-1}) \leq \\
&\leq O_P^f + (|M_j^f| + |m_j^f| + |m_j^g| + |M_j^g|) (x_j - x_{j-1}) \leq \\
&\leq O_P^f + (2K^f + 2K^g) \Delta P,
\end{aligned}$$

ahol K^f , ill. K^g az $|f|$, ill. $|g|$ függvény felső korlátja. Ha $\Delta P \rightarrow 0$, akkor 22.11 Tétel a) szerint $O_P^f \rightarrow 0$. Így a fenti becslésből következik, hogy $O_P^g \rightarrow 0$, tehát a 22.11 Tétel b) alapján $g \in \sum_{[a,b]}$.

A 23.2, 23.5, 23.6 és 23.7 tételekben megfogalmazott integrál tulajdonságokkal kapcsolatban megjegyezzük, hogy ezek nem megfordítható állítások. Például a 23.5 Tétel egyik megfordítása lenne, ha $(f+g) \in \sum_{[a,b]}$ akkor $f \in \sum_{[a,b]}$. A 23.1 Példa mutatja, hogy ez általában nem igaz.

23.1 Példa. Legyen f a 22.3 Példában definiált, $[0, 1]$ -ben nem integrálható Dirichlet függvény és $g(x) \equiv 1 - f(x)$; $x \in [0, 1]$ esetén. Így $f(x) + g(x) \equiv 1$; $x \in [0, 1]$, ezért a 23.1 Tétel alapján $(f+g) \in \sum_{[0,1]}$, holott $f \notin \sum_{[0,1]}$.

Eddig az f függvénynek csak zárt intervallumon vett Riemann integráljáról volt szó. Szeretnénk kiterjeszteni a definíciót nyílt, balról zárt jobbról nyílt, valamint balról nyílt jobbról zárt intervallumra is. A definíciót úgy célszerű megadni, hogy az integrálokra vonatkozó eddigi tételek továbbra is érvényben maradjanak.

23.4 Definíció. Legyen az $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvénynek az $[a, b]$ -re való tetszőleges kiterjesztése az $\bar{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (lásd I. Kötet 2.5 Definíció). Ha $\bar{f} \in \sum_{[a,b]}$, akkor azt mondjuk,

hogy $f \in \sum_{[a,b]}$ és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \bar{f}(x) dx.$$

Könnyen látható, hogy bárhogyan terjesztjük ki f -et $[a, b]$ -re, a kiterjesztett $\bar{f}$ függvény integráljának értéke mindig ugyanaz. Ilyenformán a

továbbiakban $\int_a^b f(x)dx$ -ben az intervallumot zártság szempontjából olyanak tekintjük, amilyen a bizonyításban a legkényelmesebb.

A következő tételek (23.9 -tól 23.11-ig) az integrál monoton tulajdonságára vonatkoznak. Láttuk, hogy $\int_a^b f(x)dx$ lehetséges fizikai interpretációja

egy $v = f(x)$ (x jelenti az időt) sebességgel mozgó testnek az $[a, b]$ időintervallumban megtett útja, ha $f \in \Sigma_{[a, b]}$ és $f(x) \geq 0$. Tetszőleges $f \in \Sigma_{[a, b]}$ függvény tekinthető sebességfüggvénynek, ha úgy képzeljük, hogy $f(x) < 0$ esetén, a test "visszafelé" mozog. Így azt várjuk, hogy $f(x) \leq g(x)$ sebességfüggvényekhez tartozó megfelelő utakra ugyanabban az időintervallumban szintén fennálljon a kisebb-egyenlő reláció, azaz $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ legyen.

Ez az integrál monoton tulajdonsága.

23.9 Tétel. Ha $f \in \Sigma_{[a, b]}$, és $f(x) \geq 0$, ahol $a < b$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Bizonyítás. Bármely P felosztásra $s_P \geq 0$, mivel $m_k \geq 0$. Így

$$0 \leq \lim_{\Delta P \rightarrow 0} s_P = \int_a^b f(x)dx .!$$

23.10 Tétel. Ha $f \in \Sigma_{[a, b]}$, $g \in \Sigma_{[a, b]}$, $a \leq b$, és $f(x) \geq g(x)$; $x \in [a, b]$,

$$\text{akkor } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx .!$$

Bizonyítás. A feltétel szerint $f(x) - g(x) \geq 0$, így a 23.9 Tétel alapján:

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$$

A 23.4 és 23.5 Tételek következménye

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (-g(x)) dx = \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx . \end{aligned}$$

Tehát: $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx .!$

23.11 Tétel. Ha $f \in \Sigma_{[a,b]}$ és $a < b$, akkor $|f| \in \Sigma_{[a,b]}$ és

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Bizonyítás. Tetszőleges P felosztás esetén:

$$0 \leq O_P^{|f|} \leq O_P^f$$

ugyanis:

ha $\operatorname{sg} M_k^f = \operatorname{sg} m_k^f$, akkor $M_k^f - m_k^f = M_k^{|f|} - m_k^{|f|}$,

ha $\operatorname{sg} M_k^f \neq \operatorname{sg} m_k^f$, akkor $M_k^f - m_k^f \geq M_k^{|f|} - m_k^{|f|}$.

Tehát mindkét esetben $0 \leq M_k^{|f|} - m_k^{|f|} \leq M_k^f - m_k^f$.

Igy $\Delta P \rightarrow 0$, $O_P^f \rightarrow 0$ -ből $O_P^{|f|} \rightarrow 0$ következik, vagyis a 22.11 Tétel alapján

$$|f| \in \Sigma_{[a,b]} .$$

Mivel $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, a 23.10 Tételből következik, hogy

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx ,$$

vagyis

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx . !$$

23.2 Példa. Értelmezzük az $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen $f(x) = 1$, ha x irracionális, $f(x) = -1$, ha x racionális. Az f függvény nem integrálható; ez ugyanugy látható be, mint a Dirichlet-függvény esetében (l. 22.3 Példa). Azonban $|f(x)| \equiv 1$, tehát az $|f|$ függvény integrálható. Ez azt mutatja, hogy az előző tétel nem fordítható meg.

23.5 Definíció. Legyen L , ill. M lineáris tér valamilyen F test felett (l. III. Kötet 16.5 Definíció). Az $f: L \rightarrow M$ függvényt lineáris operátornak (homogén lineáris függvénynek) nevezzük, ha minden $x, x_1, x_2 \in L$ -re és minden $c \in F$ -re

$$f(cx) = cf(x)$$

és

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) .$$

23.6 Definíció. Legyen H tetszőleges halmaz és $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza; egy $\Phi: H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt (valós) funkcionálnak neveztünk. Ha H lineáris tér a valós számok teste felett és Φ lineáris operátor, akkor Φ -t lineáris funkcionálnak nevezzük.

A 23.4 és 23.5 Tételekből következik, hogy $\sum_{[a, b]}$ lineáris tér a

valós számok teste felett és $\Phi: \sum_{[a, b]} \rightarrow \mathbb{R}$, ahol

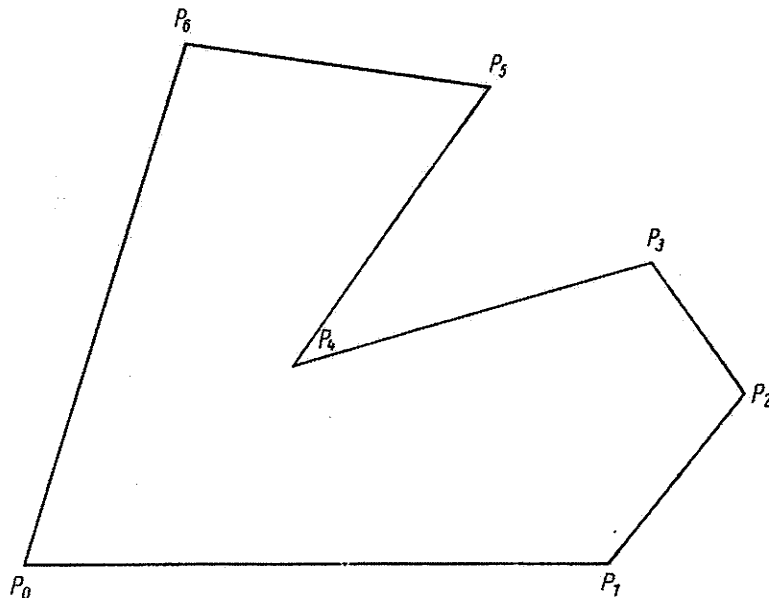
$$\Phi(f) = \int_a^b f(x) dx, f \in \sum_{[a, b]}, \text{ lineáris funkcionál.}$$

24. Síktartomány területe

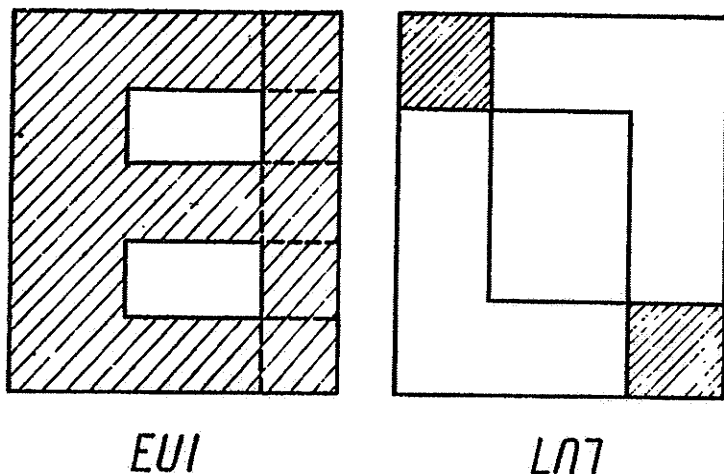
Ebben a pontban a terület fogalmával és e fogalom, valamint a határozott integrál közötti kapcsolattal foglalkozunk.

24.1 Definíció. A sík pontjainak H halmazát korlátosnak nevezzük, ha van a síknak olyan O pontja és van olyan $R > 0$ szám, hogy minden $P \in H$ -ra, $\overline{OP} < R$.

Legyenek $P_0, P_1, \dots, P_n$ a sík pontjai, a $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ szakaszok egyesítését töröttvonalnak (poligonnak) nevezzük. Ha $P_0 = P_n$, a töröttvonalat zártnak nevezzük. Ha a $P_0P_1P_2 \dots P_{n-1}P_0$ zárt töröttvonalat alkotó szakaszoknak a szomszédos szakaszok közös végpontjain kívül nincs közös pontjuk, akkor sokszögvonalról beszélünk (l. 24.1 ábra). A sokszögvonal a síkot két részre osztja, melyek közül pontosan az egyik korlátos tartomány; ezt a sokszögvonal által határolt egyszerű sokszögtartománynak (sokszögnek) nevezzük. Véges sok egyszerű sokszögtartomány egyesítését és közös részét, két sokszög (halmazelméleti) különbségét (l. I. Kötet, 1. pont) is sokszögnek nevezzük. Az ilyen sokszög is egyenes szakaszok által határolt, korlátos tartomány, mely azonban igen bonyolult lehet. Miután sokszögek közös részeként az üres halmazhoz is eljuthatunk, ezt is sokszögnek tekintjük.



24.1 ábra



24.2 ábra

Sokszögek területének fogalmát ismertnek tételezzük fel. Tudjuk azt, hogy minden sokszög felbontható háromszögekre, (előállítható, mint véges számú olyan háromszögtartomány egyesítése, melyeknek legfeljebb az oldalai közösek) és a sokszög területe e háromszögek területösszegével egyenlő. (A sokszög területe nem függ attól, hogy milyen módon bontottuk fel háromszögekre.) Az üres halmaz területét zérusnak tekintjük.

Legyen H tetszőleges korlátos siktartomány. Ha a B sokszögtartományra teljesül $B \subset H$, akkor B -t H belső sokszögének nevezzük. Ha a K sokszögtartományra teljesül $H \subset K$, akkor K -t H külső sokszögének nevezzük. Mivel H korlátos, van külső sokszöge. H területét úgy kívánjuk értelmezni (ha lehet), hogy a definíció egyértelmű legyen és H területe nagyobb legyen minden belső sokszöge területénél és kisebb minden külső sokszöge területénél. Valamely A sokszög területét $mes A$ -val jelöljük (la mesure = mérték, francia), az összes sokszögek halmazát S -sel jelöljük. H belső sokszögei területének halmaza (nem üres, ul. H minden esetre tartalmazza az üres halmazt, melynek területe 0) felülről korlátos halmaz, mivel bármely külső sokszög területe nyilván felső korlát. E halmaz legkisebb felső korlátját H belső területének nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$\underline{mes} H = \sup \{ mes B : B \in S, B \subset H \}.$$

H külső sokszögei területének halmaza alulról korlátos halmaz, mivel pozitív számokból áll és így pl. 0 minden esetre alsó korlát (alsó korlát bármely belső sokszög területe). E halmaz legnagyobb alsó korlátját H külső területének nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$\overline{\text{mes}} H = \inf \left\{ \text{mes } K : K \in S, H \subset K \right\}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\underline{\text{mes}} H \leq \overline{\text{mes}} H. \quad (24.1)$$

24.2 Definíció. (Jordan-féle területfogalom.) Azt mondjuk, hogy a H korlátos siktartomány mérhető területű, ha belső és külső területe megegyezik; e közös értéket H területének nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$\text{mes } H = \underline{\text{mes}} H = \overline{\text{mes}} H.$$

Ha H sokszögtartomány, akkor egyidejűleg saját belső és külső sokszögének tekinthető. Ebből következik, hogy minden sokszögtartomány mérhető területű és a 24.2 Definíció által értelmezett területe megegyezik azzal az értékkel, melyet egyébként is a sokszög területének tekintettünk.

Ha a H korlátos tartomány külső területe zérus, $\overline{\text{mes}} H = 0$, akkor H nyilván mérhető területű és területe zérus.

Könnnyen igazolható a következő

24.1 Tétel. A H korlátos tartomány akkor és csak akkor mérhető területű, ha található belső sokszögeknek, ill. külső sokszögeknek egy-egy B_n , $n \in T$, ill. K_n , $n \in T$ végtelen sorozata, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mes } K_n - \text{mes } B_n) = 0. \quad (24.2)$$

$$\text{Ekkor } \text{mes } H = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } B_n. \quad (24.3)$$

Bizonyítás. Nyilván található mindig belső sokszögeknek B_n , $n \in T$, ill. külső sokszögeknek K_n , $n \in T$ sorozata, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } B_n = \underline{\text{mes}} H$, ill.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } K_n = \overline{\text{mes}} H$. Ha H mérhető területű, akkor ebből (24.3) következik, a (24.2) feltétel tehát szükséges. Tegyük fel, hogy (24.2) teljesül. A

$$\text{mes } B_n \leq \underline{\text{mes}} H \leq \overline{\text{mes}} H \leq \text{mes } K_n, \quad n \in T,$$

egyenlőtlenségláncból

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\text{mes}} H - \underline{\text{mes}} H \leq \text{mes } K_n - \underline{\text{mes}} H \leq \\ &\leq \text{mes } K_n - \text{mes } B_n \end{aligned}$$

következik. Mivel az utóbbi egyenlőtlenség lánc utolsó szeme tetszőlegesen pozitív számnál kisebb, ha n elég nagy

$$\overline{\text{mes}} H = \underline{\text{mes}} H = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } B_n$$

következik.!

24.1 Példa. Vezessük be a síkon az x, y Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert és jelölje H azon "egységnégyzet" racionális abszcisszájú pontjainak halmazát, melynek (egységnyi hosszúságú) oldalai a koordináta-tengelyekkel párhuzamosak és melynek "bal alsó" csucspontja az origóban van, vagyis

$$H = \{ (x, y) : x \text{ racionális}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}.$$

Mivel az egységnégyzetbe írt bármely pozitív területű sokszögnek van racionális abszcisszájú pontja, H -ba nem írható pozitív területű belső sokszög. Ezért $\underline{\text{mes}} H = 0$. Az egységnégyzet H -nak külső sokszöge és ennél kisebb külső sokszöge H -nak nincs, vagyis $\overline{\text{mes}} H = 1$. Tehát H nem mérhető területű.

24.2 Tétel. Legyenek H_1 és H_2 mérhető területű tartományok és

$$H_1 \cap H_2 = \emptyset, \text{ akkor } H_1 \cup H_2 \text{ is mérhető és}$$

$$\text{mes}(H_1 \cup H_2) = \text{mes } H_1 + \text{mes } H_2.$$

Bizonyítás. Legyen tetszőlegesen adott az $\varepsilon > 0$ szám. H_1 -nek, ill. H_2 -nek van B_1 , ill. B_2 belső sokszöge, hogy $\text{mes } B_1 > \text{mes } H_1 - \varepsilon$ és $\text{mes } B_2 > \text{mes } H_2 - \varepsilon$. H_1 -nek, ill. H_2 -nek van K_1 , ill. K_2 külső sokszöge, hogy

$$\text{mes } K_1 < \text{mes } H_1 + \varepsilon \text{ és } \text{mes } K_2 < \text{mes } H_2 + \varepsilon.$$

$B_1 \cup B_2$ a $H_1 \cup H_2$ tartomány belső sokszöge. Mivel $B_1 \subset H_1$, $B_2 \subset H_2$ és $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, következik, hogy $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Ezért

$$\text{mes}(B_1 \cup B_2) = \text{mes } B_1 + \text{mes } B_2 > \text{mes } H_1 + \text{mes } H_2 - 2\varepsilon. \quad (24.4)$$

$K_1 \cup K_2$ a $H_1 \cup H_2$ tartomány külső sokszöge és

$$\text{mes}(K_1 \cup K_2) \leq \text{mes } K_1 + \text{mes } K_2 < \text{mes } H_1 + \text{mes } H_2 + 2\varepsilon \quad (24.5)$$

(K_1 és K_2 nem szükségképpen idegenek). Miután $\varepsilon > 0$ tetszőleges, (24.4)-ből következik, hogy $H_1 \cup H_2$ belső sokszög területi halmazának nincs $\text{mes } H_1 + \text{mes } H_2$ -nél kisebb felső korlátja, vagyis

$$\text{mes } H_1 + \text{mes } H_2 \leq \underline{\text{mes}} (H_1 \cup H_2).$$

Hasonlóan látható be (24.5)-ből, hogy

$$\text{mes } H_1 + \text{mes } H_2 \geq \overline{\text{mes}} (H_1 \cup H_2).$$

Az utóbbi két egyenlőtlenségből és (24.1)-ből állításunk már következik.

24.3 Tétel. Legyen H és H_1 mérhető területű tartomány és $H_1 \subset H$, akkor $H_2 = H \setminus H_1$ is mérhető és $\text{mes } H_2 = \text{mes } H - \text{mes } H_1$.

E tétel tehát azt mondja ki, hogy ha egy mérhető tartományból elhagyunk egy mérhető részt, akkor a maradék is mérhető területű.

Bizonyítás. Legyen tetszőlegesen adott az $\varepsilon > 0$ szám. H -nak, ill. H_1 -nek van B , ill. B_1 belső, továbbá K , ill. K_1 külső sokszöge, hogy

$$\text{mes } B > \text{mes } H - \varepsilon, \quad \text{mes } B_1 > \text{mes } H_1 - \varepsilon \quad (24.6)$$

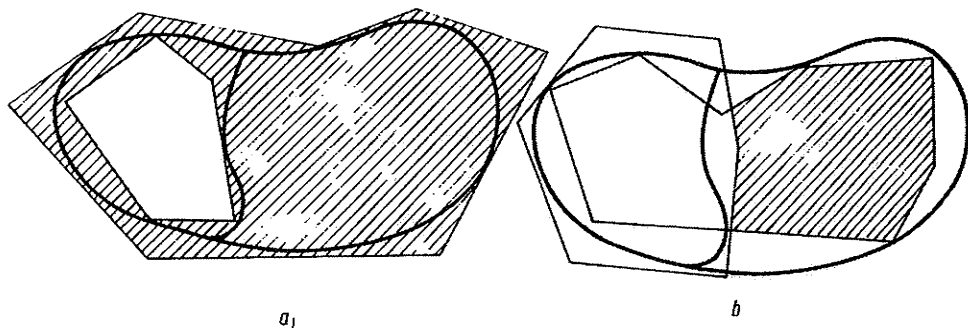
és

$$\text{mes } K < \text{mes } H + \varepsilon, \quad \text{mes } K_1 < \text{mes } H_1 + \varepsilon. \quad (24.7)$$

Ha a K sokszögből elhagyjuk a B_1 sokszöget, a kapott $K \setminus B_1$ sokszög H_2 külső sokszöge, ul. $H_2 \subset K$ és $H_2 \cap B_1 = \emptyset$ (lásd 24.3 a ábra). (24.6) második és (24.7) első egyenlőtlenségéből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \text{mes}(K \setminus B_1) &= \text{mes } K - \text{mes } B_1 < \text{mes } H + \varepsilon - (\text{mes } H_1 - \varepsilon) = \\ &= \text{mes } H - \text{mes } H_1 + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Mivel $B \subset H$ és $H_1 \subset K_1$, a $B \setminus K_1$ sokszög H_2 belső sokszöge (lásd 24.3 b ábra). (24.6) első és (24.8) második egyenlőtlenségének felhasználásával kapjuk, hogy



24.3 ábra

$$\begin{aligned} \text{mes } (B \setminus K_1) &\geq \text{mes } B - \text{mes } K_1 > \text{mes } H - \varepsilon - (\text{mes } H_1 + \varepsilon) = \\ &= \text{mes } H - \text{mes } H_1 - 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (24.9)$$

Miután $\varepsilon > 0$ tetszőleges, a (24.8), ill. (24.9) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\overline{\text{mes}} H_2 \leq \text{mes } H - \text{mes } H_1,$$

ill.

$$\underline{\text{mes}} H_2 \geq \text{mes } H - \text{mes } H_1.$$

Az utóbbi két egyenlőtlenségből és (24.1)-ből

$$\overline{\text{mes}} H_2 = \underline{\text{mes}} H_2 = \text{mes } H_2 = \text{mes } H - \text{mes } H_1. \quad (24.10)$$

A 24.3 Tételből azonnal adódik a

24.4 Következmény. Ha H és H_1 mérhető területű tartomány és $H_1 \subset H$, akkor $\text{mes } H_1 \leq \text{mes } H$.

Miután, mint ismeretes, egybevágó (merev testszerű mozgással egymással fedésbe hozható) sokszögek területe egyenlő, a siktartomány területének általunk adott fogalma is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal:

24.5 Tétel. Ha H és H' egybevágó tartományok és H mérhető területű, akkor H' is mérhető és

$$\text{mes } H' = \text{mes } H.$$

Bebizonyítható továbbá, hogy mérhető területű tartományok közös része és egyesítése (a tartományok idegenségére vonatkozó megszorítás nélkül is) mérhető (l. [3], 147. o.).

A következőkben mérhető siktartományok egy gyakorlati szempontból elegendően széles osztályát mutatjuk be. E siktartományok területe integrálás útján meghatározható.

Ha az $a \leq x \leq b$ intervallumon értelmezett $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény adott, beszélhetünk az x, y sík azon A tartományáról, melyet az x -tengely, az $x = a$, az $x = b$ egyenesek és f grafikonja határol. Ezt az

$$A = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, \quad y \in [0, f(x)] \} \quad (24.11)$$

siktartományt az f grafikonja alatti tartománynak nevezzük (akkor is, ha $f(x) < 0$ esetén, pontjai f grafikonja "fölött" helyezkednek el).

24.6 Tétel. Legyen $f \in \sum_{[a, b]}$ és $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, akkor az f grafikonja alatti A tartomány mérhető területű és

$$\text{mes } A = \int_a^b f(x) dx.$$

Bizonyítás. Legyen $P = \{ I_k : k = 1, \dots, n \}$ az $[a, b]$ intervallum egy tetszőleges felosztása, ahol $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. A P felosztáshoz tartozó alsó összeg

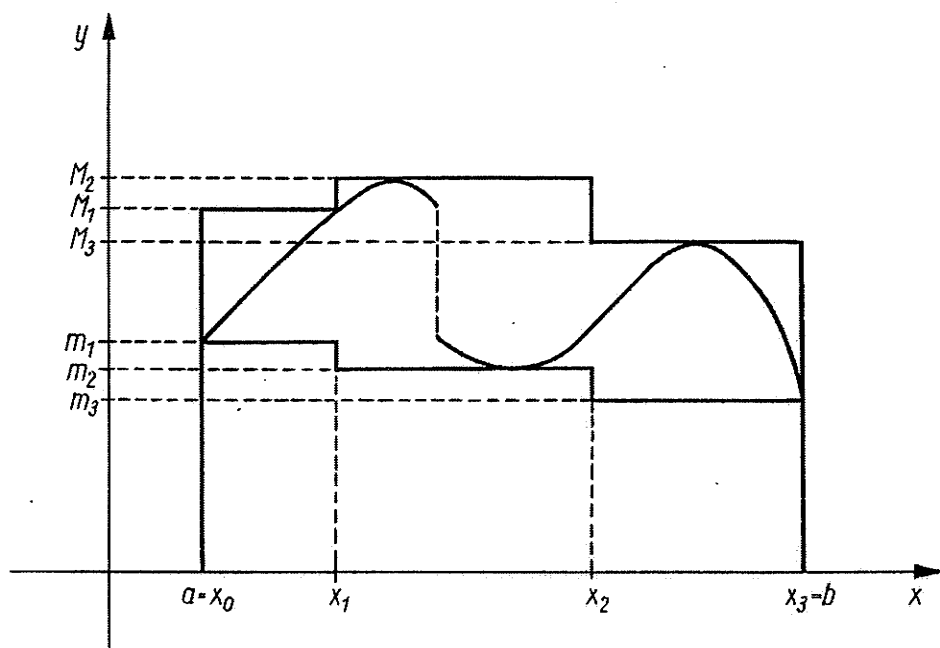
$$s = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}),$$

ahol $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, az A tartomány azon (téglalapok egyesítéseként előálló)

belső sokszögének területe, melynek csúcspontjai (l. 24.4 ábra)

$$(x_0, 0), (x_0, m_1), (x_1, m_1), (x_1, m_2), \dots$$

$$\dots, (x_{n-1}, m_n), (x_n, m_n), (x_n, 0), (x_0, 0).$$



24.4 ábra

A P felosztáshoz tartozó felső összeg

$$S = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}),$$

ahol $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$, az A tartomány azon (téglalapok egyesítéseként előálló)

külső sokszögének területe, melynek csúcspontjai (l. 24.4 ábra)

$$(x_0, 0), (x_0, M_1), (x_1, M_1), (x_1, M_2), \dots$$

$$\dots, (x_{n-1}, M_n), (x_n, M_n), (x_n, 0), (x_0, 0).$$

Ha az alsó összegek halmazának legkisebb felső korlátját h -val, a felső összegek halmazának legnagyobb alsó korlátját H -val jelöljük, fennáll a

$$h \leq \underline{\text{mes}} A \leq \overline{\text{mes}} A \leq H$$

egyenlőtlenség. Mivel f integrálható $h = H = \int_a^b f(x)dx$, ahonnan állításunk már következik.!

Megjegyezzük, hogy ha az $f \in \sum_{[a,b]}$ függvény az $[a,b]$ intervallumban véges sokszor előjelet vált, akkor $[a,b]$ -n vett határozott integrálja a függvény pozitivitási tartományához tartozó grafikonja alatti tartomány és negatívítási tartományához tartozó grafikonja alatti tartomány területének különbségével egyenlő.

Megjegyezzük továbbá, hogy a gyakorlatban előforduló korlátos siktartományok általában előállíthatók integrálható függvények grafikonja alatti tartományok egyesítése-, közös része-, ill. (halmazelméleti) különbségeként.

Siktartomány mérhetőségének és területének 24.2 Definíciójával a sík részhalmazai közül kiválasztottunk bizonyosakat, t.i. a mérhető területűeket és ezek mindegyikéhez egy jól meghatározott nem-negatív számot, a területet rendeltük hozzá. Az olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya valamely halmaz bizonyos részhalmazainak összessége, értékhalma pedig a valós számok halmaza, halmazfüggvénynek nevezzük. A terület tehát halmazfüggvény, mely a sík (Jordan-féle értelemben) mérhető pontthalmazainak összességén van értelmezve. Ha J -vel jelöljük a sík mérhető tartományainak halmazát, a 24.2 és 24.3 Tételből látjuk, hogy J rendelkezik a következő tulajdonságokkal: véges sok J -beli elem egyesítése is J -beli elem és két J -beli elem különbsége (a két tartomány halmazelméleti különbsége) is J -beli elem. Igaz tovább, hogy a sokszögek J elemei.

A terület e pontban tárgyalt tulajdonságai közül a legfontosabbakat kiválasztva és ezeket axiómákként a tárgyalás alapjául véve siktartományok területfogalmának axiomatikus felépítése válik lehetővé.

Legyen $\mu: J \rightarrow \mathbb{R}$ egy halmazfüggvény, melyre a következő állítások érvényesek:

- a) Axioma (nem-negativitás). Ha $H \in J$, akkor $\mu(H) \geq 0$.
- b) Axioma (additivitás). Ha $H_1 \in J$, $H_2 \in J$ és $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, akkor $\mu(H_1 \cup H_2) = \mu(H_1) + \mu(H_2)$.
- c) Axioma (mozgás invariancia). Ha $H_1 \in J$, $H_2 \in J$ és H_1 egybevágó H_2 -vel, akkor $\mu(H_1) = \mu(H_2)$.
- d) Axioma (normalizálás). Az egységoldalú E négyzetre $\mu(E) = 1$.

A 24.2 Definícióval értelmezett μ és H függvényre érvényesek az a) b) c) d) állítások, tehát ezek az állítások a terület-fogalom tulajdonságai. Bebizonyítható, hogy a) b) c) d) -ből a területfogalom összes tulajdonsága levezethető. Sőt igaz az is, hogy egyetlen egy a) b) c) d) -t kielégítő $\mu: J \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvény létezik, mégpedig a μ mes H (vö. [8], 308. o.).

Ha csak a) -t és b) -t követeljük meg, akkor az ilyen tulajdonságú $\mu: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvények még igen változatosak lehetnek. A c) tulajdonságot is megkövetelve már a μ halmazfüggvény konstans faktortól eltekintve meghatározott: $\mu(H) = c$ mes H ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát még mindig végtelen sok μ halmazfüggvény létezik. A d) tulajdonságot is hozzávéve $c=1$ adódik, azaz $\mu(H) = \text{mes } H$.

25. Riemann szerint integrálható függvényosztályok

Az integrálhatóság elégséges feltételeit keressük, vagyis olyan függvény-tani tulajdonságokat, amelyek teljesüléséből következik a függvény integrálhatósága. A 22. és 23. pont jelöléseit külön magyarázat nélkül használjuk.

25.1 Tétel. Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és monoton, akkor $f \in \sum_{[a, b]}$.

Bizonyítás. f monotonitásából következik (legyen például f monoton növekedő), hogy $M_k = f(x_k)$ és $m_k = f(x_{k-1})$. Így:

$$\begin{aligned} O_P &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta P = \\ &= \Delta P \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \Delta P (f(x_n) - f(x_0)) = \Delta P (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

$f(x)$ korlátosságából következik, hogy $(f(b) - f(a))$ véges valós szám, ezért $\Delta P \rightarrow 0$ esetén $O_P \rightarrow 0$. Így a 22.11 Tételből következik, hogy $f \in \sum_{[a, b]}$.

25.2 Tétel. Ha $f \in C_{[a, b]}^0$, akkor $f \in \sum_{[a, b]}$.

Bizonyítás. A 7.6 Tételből következik, hogy minden $k = 1, 2, \dots, n$ -re létezik $\xi'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ és $\xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$, hogy $m_k = f(\xi'_k)$ és $M_k = f(\xi''_k)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. A 7.7 Tétel szerint tetszőlegesen $\varepsilon' > 0$ -hoz létezik $\delta(\varepsilon') > 0$, hogy

$$|f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon', \quad \text{ha} \quad |\xi' - \xi''| < \delta(\varepsilon').$$

Legyen $\Delta P < \delta(\varepsilon')$, ekkor $|\xi'_k - \xi''_k| < \delta(\varepsilon')$, $k = 1, 2, \dots, n$, miatt:

$$\begin{aligned}
 0_P &= \sum_{k=1}^n (f(\xi_k'') - f(\xi_k'))(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n \varepsilon' (x_k - x_{k-1}) = \\
 &= \varepsilon' \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon' (x_n - x_0) = \varepsilon' (b-a) = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

ha $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ebből a 22.12 Tétel alapján következik, hogy $f \in \Sigma_{[a,b]}$.!

25.3 Tétel. Ha $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és korlátos, akkor $f \in \Sigma_{[a,b]}$.

Bizonyítás. Az $[a+\delta, b-\delta]$ intervallumban ($0 < \delta < \frac{b-a}{2}$) f folytonos, így a 25.2 Tételből következik, hogy $f \in \Sigma_{[a+\delta, b-\delta]}$. A 22.11 Tétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik az $[a+\delta, b-\delta]$ intervallumnak olyan $P[a+\delta, b-\delta]$ felosztása, hogy $0_{P[a+\delta, b-\delta]} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha ehhez a felosztáshoz hozzávesszük az $[a, a+\delta]$ és $[b-\delta, b]$ intervallumokat az $[a, b]$ intervallum egy $P[a, b]$ felosztását kapjuk.

$$\begin{aligned}
 0_{P[a,b]} &= \left(\sup_{x \in [a, a+\delta]} f(x) - \inf_{x \in [a, a+\delta]} f(x) \right) \delta + 0_{P[a+\delta, b-\delta]} + \left(\sup_{x \in [b-\delta, b]} f(x) - \inf_{x \in [b-\delta, b]} f(x) \right) \delta \leq \\
 &\leq 2K\delta + \frac{\varepsilon}{2} + 2K\delta = 4K\delta + \frac{\varepsilon}{2},
 \end{aligned}$$

ahol K az $|f|$ függvény felső korlátja. $\delta \leq \frac{\varepsilon}{8K}$ választással $0_{P[a,b]} < \varepsilon$ így a 22.12 Tétel alapján $f \in \Sigma_{[a,b]}$.!

Megjegyzés. A 25.3 Tétel feltételei közül a korlátosság nem hagyható el. Ugyanis Weierstrass I. tételénél (7.5 Tétel) láttuk, hogy ha $f(x)$ folytonos (a,b) -ben, akkor ott nem feltétlenül korlátos. A Riemann integrál pedig csak korlátos függvényekre van értelmezve.

25.4 Tétel. Ha az f függvény véges számú hely kivételével folytonos és korlátos $[a,b]$ -ben akkor $f \in \Sigma_{[a,b]}$.

Bizonyítás. Az $[a,b]$ intervallumot $f(x)$ szakadási helyeivel véges sok intervallumra bonthatjuk fel. Ezen részintervallumok belsőjében $f(x)$ folytonos, így a 25.3 Tétel szerint integrálható. A 23.4 Definícióból és a 23.3 Tételből következik, hogy $f \in \Sigma_{[a,b]}$.!

A 25.1 Tétel fontos következménye, hogy a polinomok, racionális tört-függvények, exponenciális függvény, trigonometrikus és hiperbolikus függvények minden olyan intervallumban integrálhatók, ahol korlátosak. Ezek a függvények ugyanis monoton szakaszokra bonthatók. A felsorolt függvényekből képezett összetett függvények integrálhatósága a 25.4 Tétel következménye.

(Például $\sin \frac{1}{x}$ integrálható $(0, 1)$ -ben.)

25.1 Példa. Számítsuk ki $\int_a^b x^k dx$ -et, ahol k természetes szám, $b > a > 0$.

$f(x) = x^k$ folytonos $[a, b]$ -ben, így a 25.2 Tétel alapján integrálható. A 22.7 Tételből következik, hogy tetszőleges, minden határon túl finomodó felosztássorozathoz tartozó felső összegek az integrálhoz konvergálnak. Legyen az $[a, b]$ intervallum $P_n = \{I_1, \dots, I_\ell, \dots, I_n\}$,

$I_\ell = [x_{\ell-1}, x_\ell]$, felosztása $x_\ell = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\ell}{n}}$, $\ell = 0, 1, \dots, n$ -nel definiált.

Bevezetve a $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = q$ jelölést, $x_\ell - x_{\ell-1} = a q^{\ell-1}(q-1)$. P_n , $n=1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztássorozat, ui.

$$\Delta P_n = \max_{\ell} (x_\ell - x_{\ell-1}) = \max_{\ell} a q^{\ell-1}(q-1) = a q^n (q-1) =$$

$$= a \frac{b}{a} \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) = b \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right),$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = b(1-1) = 0,$$

mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1$$

(I. I. Kötet, 15.5 Példa). Mivel $x^k = f(x)$ monoton növekedő és folytonos, azért $M_\ell = x_\ell^k = a^k q^{\ell k}$.

$$\begin{aligned}
S_{P_n} &= \sum_{\ell=1}^n M_{\ell}(x_{\ell} - x_{\ell-1}) = \sum_{\ell=1}^n a^k q^{\ell k} \cdot a q^{\ell-1} (q-1) = \\
&= a^{k+1} (q-1) \sum_{\ell=1}^n q^{\ell(k+1)-1} = \\
&= a^{k+1} \frac{(q-1)}{q} \sum_{\ell=1}^n (q^{k+1})^{\ell} = \\
&= \frac{a^{k+1} (q-1)}{q} \cdot q^{k+1} \cdot \frac{(q^{k+1})^n - 1}{q^{k+1} - 1} = \\
&= a^{k+1} \cdot q^k ((q^{k+1})^n - 1) \left(\frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \right)^{-1} = \\
&= a^{k+1} \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^k} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} - 1 \right) \cdot \left(1 + \sqrt[n]{\frac{b}{a}} + \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} + \dots + \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^k} \right)^{-1} \\
\int_a^b x^k dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{P_n} = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.
\end{aligned}$$

25.2 Példa. $\int_a^b \frac{1}{x} dx = ?$, $a \cdot b > 0$.

Az $\frac{1}{x}$ függvény $x = 0$ környezetében nem korlátos, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -ban folytonos, tehát integrálható $[a, b]$ -ben, ha $0 < a < b$, vagy $a < b < 0$. Legyen P_k tetszőleges, minden határon túl finomodó felosztássorozat

$$\sigma_{P_k} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(k)}) (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}), \quad \xi_i^{(k)} = \pm \sqrt{x_i^{(k)} x_{i-1}^{(k)}},$$

(+, vagy - aszerint amint az $[a, b]$ intervallum az origótól jobbra, vagy balra van), nyilván

$$\xi_1^k \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}].$$

Igy

$$\begin{aligned}\sigma_{P_k} &= \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}} (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n_k} \left(\frac{1}{x_{i-1}^{(k)}} - \frac{1}{x_i^{(k)}} \right) = \\ &= \frac{1}{x_0^{(k)}} - \frac{1}{x_{n_k}^{(k)}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.\end{aligned}$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{P_k} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

(22.10 Tétel alapján).

26. Az integrálszámítás középtértéktételei

Az "integrálközep" fogalma - éppugy, mint az integrál fogalom - gyakorlati problémák megoldása során alakult ki. A 26.1 és 26.2 Példák ilyen problémákat mutatnak be.

26.1 Definíció. Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számoknak $m_1, m_2, \dots, m_n$, ($m_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$) "súlyokkal" képezett súlyozott számtani közepe:

$$\frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Ha $m_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, akkor a számtani középhez jutunk.

26.1 Példa. A $v(t)$ pillanatnyi sebességgel mozgó test a $[t_1, t_2]$ időintervallumban

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

utat tesz meg. Így a $[t_1, t_2]$ időintervallumban

$$\bar{v} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt}{t_2 - t_1}$$

átlagsebességgel mozog.

26.2 Példa. Legyen a τ hőmérséklet az $a \leq t \leq b$ intervallumban, mint a t idő függvénye adott. Mennyi az átlagos hőmérséklet? ($\bar{\tau}$)

Legyen

$$P = \{ I_1, \dots, I_k, \dots, I_n \}, \quad I_k = [t_{k-1}, t_k]$$

$[a, b]$ tetszőleges felosztása. Ha feltételezzük, hogy I_k -ban a hőmérséklet valamilyen $\tau(\xi_k^P)$ konstans értéket vesz fel ($\xi_k^P \in I_k$), akkor az átlagos hőmérsékletre:

$$\bar{\tau}_P = \frac{\sum_{k=1}^n \tau(\xi_k^P) (t_k - t_{k-1})}{\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})} = \frac{\sum_{k=1}^n \tau(\xi_k^P) (t_k - t_{k-1})}{b-a}$$

értéket kapnánk. Itt a $\tau(\xi_k^P)$ hőmérsékletértékeket azokkal az időtartamokkal "súlyoztuk", amelyekben a feltételezés szerint fennálltak, és így képeztük a $\bar{\tau}_P$ súlyozott számtani közepet. Valójában átlagos hőmérsékletnek egy olyan számot szeretnénk nevezni, amely független a P felosztástól, az I_k -k megválasztásától, továbbá nem igényli annak feltételezését, hogy a hőmérséklet az I_k intervallumban állandó és értékét ugrásszerűen változtassa. Ha $\tau \in \sum_{[a, b]}$, akkor az integrál tulajdonságaiából következik, hogy a

$$\bar{\tau} = \frac{\int_a^b \tau(t) dt}{b-a}$$

a megfelelő érték a középhőmérsékletre.

26.2 Definíció. Legyen $f \in \Sigma[a, b]$, $a < b$ az

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

számot az f függvény $[a, b]$ -re vonatkozó integrálközepének nevezzük.

26.1 Tétel. Ha $f \in \Sigma[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, akkor:

$$m \leq \bar{f} \leq M.$$

Bizonyítás. Mivel $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b]$, a 23.10 Tétel alapján:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx, \text{ vagyis (l. 23.1 Tétel)}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \text{ tehát } m \leq \bar{f} \leq M.!$$

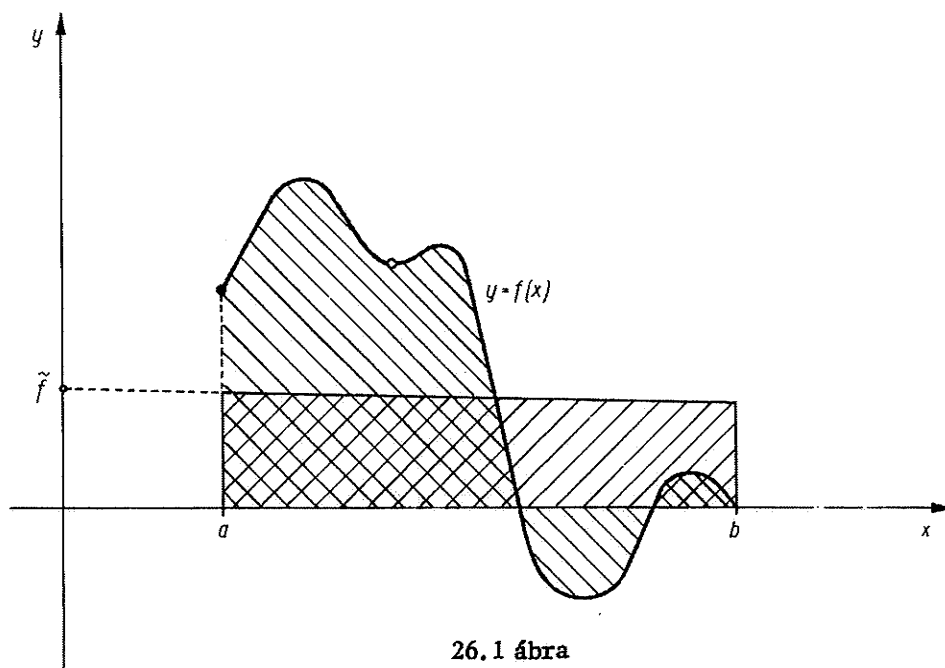
26.2 Tétel. Ha $f \in C^0_{[a, b]}$, akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$, hogy

$$\bar{f} = f(\xi).$$

Bizonyítás. A 26.1, a 7.6 és a 7.3 Tétel nyilvánvaló következménye.!

Mivel $\int_a^b f(x) dx = \bar{f} \cdot (b-a)$, azért $\bar{f}$ szemléletes jelentése egy olyan

téglalap (előjeles) magassága, amelynek területe megegyezik az f függvény grafikonja alatti tartomány (előjeles) területével. (L. 26.1 ábra.)



26.1 ábra

26.3 Tétel. Legyen $f \in \Sigma_{[a, b]}$, $g \in \Sigma_{[a, b]}$, $g(x) \geq 0$ $x \in [a, b]$, $a < b$,

$$\int_a^b g(x) dx > 0, \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ és } M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \text{ akkor}$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Az

$$\frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

értéket az f függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó g súlyfüggvény szerinti integrálközepének nevezzük.

Bizonyítás.

$$m \leq f(x) \leq M.$$

$g(x) \geq 0$ miatt: $g(x)m \leq g(x) f(x) \leq M g(x).$

A 23.10 Tételből:

$$\int_a^b g(x)m dx \leq \int_a^b g(x) f(x) dx \leq \int_a^b M g(x) dx,$$

azaz

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Tehát $\int_a^b g(x) dx > 0$ miatt

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

26.4 Következmény. Ha $g \in \Sigma[a, b]$, $g(x) \geq 0$ $x \in [a, b]$, $\int_a^b g(x) dx > 0$ és $f \in C^0[a, b]$, akkor van olyan $\xi \in [a, b]$, hogy

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

Bizonyítás. A 26.3, a 7.6 és a 7.3 Tétel közvetlen következménye.!

27. Függvény primitív függvénye

27.1 Példa. Adott az $F(t)$ erő, mint a t idő függvénye valamely $[t_1, t_2]$ időintervallumban. Milyen $v(t)$ pillanatnyi sebességgel mozog az $F(t)$ erő hatására az m tömegű test? A Newton-féle axióma szerint

$$F(t) = m \dot{v}(t),$$

ahol $\dot{v}$ a sebességfüggvény idő szerinti deriváltja, a gyorsulás. Innen

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m} F(t)$$

Tehát ismerjük a $v(t)$ függvény t szerinti deriváltját és ebből szeretnénk meghatározni $v(t)$ -t. Ha $\dot{v}(t)$ -ben felismerjük valamelyik függvény deriváltját, akkor megoldottuk a problémát. Például, ha $\dot{v}(t) = \cos t$, akkor $v(t) = \sin t$. Persze nem várhatjuk, hogy egyetlen megoldás létezzék, hiszen $v(t)$ függ attól is, hogy a t_1 időpillanatban a test milyen kezdeti állapotban volt, milyen $v(t_1)$ "kezdő sebességgel" rendelkezett. Például, ha $v(t) = \cos t$, akkor nemcsak $v_1(t) = \sin t$ megoldás, hanem $v_2(t) = 2 \sin \frac{4t + \pi}{8} \cos \frac{4t - \pi}{8}$ is, mert:

$$\begin{aligned} \dot{v}_2(t) &= \frac{d}{dt} \left(2 \sin \frac{4t + \pi}{8} \cos \frac{4t - \pi}{8} \right) = \\ &= 2 \cdot \left(\cos \frac{4t + \pi}{8} \right) \frac{1}{2} \cos \frac{4t - \pi}{8} - \\ &\quad - 2 \sin \frac{4t + \pi}{8} \left(\sin \frac{4t - \pi}{8} \right) \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \cos \left(\frac{4t + \pi}{8} + \frac{4t - \pi}{8} \right) = \cos t. \end{aligned}$$

Tehát a megoldás nem egyetlen függvény, hanem olyan $v(t)$ függvények halmaza, amelyek mindegyikének derivált függvénye az adott $\dot{v}(t)$ függvény. A $v(t)$ függvények halm. azát $\int \dot{v}(t) dt$ -vel jelöljük, és a $\dot{v}(t)$ függvény határozatlan integráljának nevezzük. A jelölés és elnevezés hasonlít a határozott Riemann integráléhoz; ennek okát a 28. pontban látjuk majd. Azonban két lényegesen különböző fogalomról van szó. A határozott integrál - mint láttuk -

olyan funkcionál, amely függvényekhez valós számokat rendel. A határozatlan integrál függvényekhez függvények halmazát rendel.

27.1 Definíció. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I tetszőleges intervallum. Azt mondjuk, hogy az $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény f -nek primitív függvénye az I intervallumon, ha F differenciálható I -ben és

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad x \in I.$$

27.2 Definíció. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f függvény határozatlan integráljának nevezzük és $\int f(x)dx$ -szel jelöljük.

Ha f -nek nem létezik primitív függvénye, akkor határozatlan integrálja üres halmaz. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\int f(x)dx$ nem létezik.

27.1 Tétel. Legyen F az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek primitív függvénye az I intervallumon. A $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor primitív függvénye f -nek, ha van $c \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) \equiv F(x) + c$.

Bizonyítás. Ha $G(x) \equiv F(x) + c$, akkor G primitív függvénye f -nek, mert $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

Ha G primitív függvénye f -nek, akkor $G'(x) \equiv f(x)$, vagyis $G'(x) - F'(x) = (G(x) - F(x))' \equiv 0$. Az integrálszámítás alaptételéből (17.1 Tétel) következik, hogy $G(x) - F(x) \equiv c$. Tehát $G(x) \equiv F(x) + c$!

Tehát a határozatlan integrál egymástól állandóban különböző függvények halmaza. Ha megtaláltuk a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek akármelyik $F(x)$ primitív függvényét, akkor

$$\int f(x)dx = \left\{ F(x) + c : c \in \mathbb{R} \right\}$$

Az előbbi egyenlőséget kevésbé pontos, de a hagyományoknak jobban megfelelő formában a következőképpen is írjuk:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

A 27.1 Példában $v_1(t)$ és $v_2(t)$ a $\dot{v}(t) = \cos t$ függvény primitív függvénye. Trigonometrikus átalakítás után látható, hogy $v_1(t)$ és $v_2(t)$ valóban konstansban különbözik egymástól ($c = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

27.2 Tétel. Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, ill. a $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek F , ill. G primitív függvénye az I intervallumon, akkor $F + G$ primitív függvénye $f + g$ -nek és cF primitív függvénye cf -nek I -n ($c \in \mathbb{R}$, tetszőleges).

Bizonyítás. $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$;

$$(cF(x))' = cF'(x) = cf(x) . !$$

27.3 Tétel. Ha létezik $\int f(x)dx$ és $\int g(x)dx$, akkor

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx ,$$

ahol a jobb oldalon álló függvényhalmazt úgy kapjuk, hogy f minden egyes primitív függvényéhez hozzáadjuk g minden egyes primitív függvényét; továbbá minden $c \in \mathbb{R}$ -re

$$\int c f(x)dx = c \int f(x)dx ,$$

ahol a jobb oldalon álló függvényhalmazt úgy kapjuk, hogy f minden egyes primitív függvényét megszorozzuk c -vel.

Bizonyítás. A 27.1 Tétel és a 27.2 Definíció nyilvánvaló következménye. !

Az elemi függvények deriváltjainak ismerete alapján állítható össze a következő, ugynevezett "alapintegrálokat" tartalmazó táblázat.

$$\int a dx = ax + c , \quad I = (-\infty , \infty) ,$$

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c , \quad I = (0, \infty) , \quad \mu \neq -1 ,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c , \quad I = (0, +\infty) ,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + c , \quad I = (-\infty , 0) ,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c , \quad I = (-\infty , \infty) ,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c , \quad I = (-\infty , \infty) ,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c , \quad I = \left((2k-1) \frac{\pi}{2} , (2k+1) \frac{\pi}{2} \right) , \quad k \text{ egész szám} ,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c , \quad I = (k\pi , (k+1)\pi) , \quad k \text{ egész szám} ,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c , \quad I = (-1, 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c, \quad I = (-1, 1),$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + c, \quad I = (-\infty, \infty),$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arctg} x + c, \quad I = (-\infty, \infty),$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad I = (-\infty, \infty),$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c, \quad I = (-\infty, \infty),$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c, \quad I = (-\infty, \infty),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x + c, \quad I = (-\infty, \infty),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x + c, \quad I = (1, \infty),$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arth} x + c, \quad I = (-1, 1),$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arch} x + c, \quad I = (-\infty, -1), \text{ vagy } I = (1, +\infty).$$

28. A Newton-Leibniz formula

Ebben a pontban a határozott integrál és a határozatlan integrál kapcsolatát vizsgáljuk. Ezáltal a határozott integrál kiszámítására nyerünk egyszerű módszert.

28.1 Definíció. Legyen $f \in \sum_{[a,b]}$. Az $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$ formulával értelmezett függvényt f integrálfüggvényének nevezzük.

28.1 Tétel. Az $f \in \sum_{[a,b]}$ függvény F integrál függvénye folytonos $[a,b]$ -ben.

Bizonyítás. $F(x)$ értelmezett $[a,b]$ -ben, mivel $f \in \sum_{[a,x]}$, $x \in [a,b]$ (lásd

23.2 Tétel). Azt kell megmutatnunk, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} F(x_0 + h) = F(x_0)$, $x_0 \in [a,b]$

esetén. A 23.3, 23.4 és 23.11 Tételek felhasználásával kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |F(x_0 + h) - F(x_0)| = \left| \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} K dt \right| = |K \cdot h| = K |h|, \end{aligned}$$

ahol $K > 0$ az $|f|$ függvény egy felső korlátja, vagyis

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} |F(x_0 + h) - F(x_0)| \leq \lim_{h \rightarrow 0} K |h| = 0.$$

Tehát

$$\lim_{h \rightarrow 0} (F(x_0 + h) - F(x_0)) = 0. \quad |$$

28.2 Tétel. Ha $f \in \sum_{[a,b]}$, és f folytonos $x_0 \in [a,b]$ -ban, akkor f integrálfüggvénye differenciálható x_0 -ban és

$$\left. \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \right|_{x=x_0} = f(x_0)$$

Bizonyítás. Az $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ függvény x_0 pontbeli különbségi hányadosa

a következő alakban írható fel:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt .$$

A 26.1 Tétel alapján:

$$\inf_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x) \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq \sup_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x) .$$

Mivel f folytonos x_0 -ban, $f(x)$ eltérése $f(x_0)$ -tól tetszőlegesen kicsi lesz minden $x \in [x_0, x_0+h]$ -ra, ha $|h|$ elég kicsi, ezért

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x) = f(x_0) .$$

Tehát az előbbi egyenlőtlenségből következik, hogy F különbségi hányadosának is létezik határértéke, és

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) . !$$

28.3 Következmény. Ha $f \in C^0_{[a,b]}$, akkor f -nek az $[a,b]$ -n létezik primitív függvénye.

Bizonyítás. $\int_a^x f(t) dt$ primitív függvénye f -nek mivel a 28.2 Tétel alapján

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad x \in [a,b] . !$$

28.4 Tétel. (Newton-Leibniz formula.) Ha $f \in C^0_{[a,b]}$ és a G függvény f -nek primitív függvénye $[a,b]$ -n, akkor:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) .$$

Bizonyítás. 28.2 Tétel szerint az $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ formulával értelmezett

függvény f -nek primitív függvénye, és a 27.1 Tétel alapján van $c \in \mathbb{R}$, melyre $G(x) \equiv F(x) + c$. Így

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) =$$

$$= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(x)dx .!$$

Az előző tételt általánosítja a

28.5 Tétel. Ha $f \in \sum_{[a,b]}$ és f -nek létezik $[a,b]$ -n F primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Bizonyítás. Tetszőleges $P = \{I_k : k = 1, \dots, n\}$ felosztáshoz, ahol

$I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, a következőképpen készítjük el a téglányösszeget. Az $F(x)$ függvényre $[x_{k-1}, x_k]$ -ban ($k = 1, \dots, n$) alkalmazzuk a Lagrange-féle közéértéktételt (15.4 Tétel):

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(\xi_k) = f(\xi_k), \text{ ahol } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

Legyen

$$\sigma_P = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

Mivel

$$f \in \sum_{[a,b]}, \quad \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \sigma_P = \int_a^b f(x)dx.$$

Így

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\
&= \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\
&= \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) = F(x_1) - F(x_0) + \dots \\
&\dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).!
\end{aligned}$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a tétel feltételei közül egyik sem hagyható el. Létezik ui. olyan függvény, mely Riemann szerint integrálható, de nem rendelkezik primitív függvénnyel (ilyen pl. sg x a $[-1, 1]$ intervallumon), és olyan függvény is, melynek van primitív függvénye, de Riemann szerint nem integrálható.

29. Integrálok kiszámítása

Ebben a pontban azzal foglalkozunk, hogy miképpen lehet a primitív függvényt felismerni vagy meghatározását azonos átalakításokkal egyszerűbb esetre visszavezetni. A szereplő módszerek természetesen határozott integrál kiszámítására is alkalmazhatók a 28.5 Tétel alapján, amennyiben a tétel feltételei teljesülnek.

29.1 Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív és differenciálható az I intervallumon és $\mu \neq -1$, akkor

$$\int (f(x))^\mu f'(x) dx = \frac{(f(x))^{\mu+1}}{\mu+1} + c.$$

Bizonyítás. $\frac{(f(x))^{\mu+1}}{\mu+1}$ differenciálható az I intervallumon, deriválással meggyőződhetünk arról, hogy primitív függvény.!

29.2 Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív és differenciálható az I intervallumon, akkor

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$$

Bizonyítás. $\ln f(x)$ deriválásával látható, hogy az egyenlőség igaz.!

29.3 Tétel. Ha az f és φ függvények differenciálhatók és képezhető az $f(\varphi(x))$ összetett függvény, melynek értelmezési tartománya az I intervallum, akkor

$$\int f'(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = f(\varphi(x)) + c$$

Bizonyítás. A 27.2 Definíció közvetlen következménye.!

29.4 Segédétel. Legyen $f \in C^0_{[a,b]}$, $\varphi \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ szigorúan monoton, és $\varphi(t) \in [a,b]$ ha $t \in [\alpha,\beta]$, akkor

$$\left[\int f(x) dx \right]_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Bizonyítás. Az integrandusok folytonossága biztosítja, hogy az egyenlőség mindkét oldalán szereplő határozatlan integrál létezik. (28.3 Következmény.) Azt kell bebizonyítanunk, hogy ha

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad \text{akkor} \quad F(\varphi(t)) \text{ az } [\alpha, \beta]$$

intervallumon primitív függvénye $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ -nek. Valóban: $F(\varphi(t))$ differenciálható $[\alpha, \beta]$ -ban t szerint és

$$\frac{d}{dt} (F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t), \quad \text{ha } t \in [\alpha, \beta] \quad .!$$

29.5 Tétel. (Integrálás helyettesítéssel.) Az előbbi Segédétel feltételei mellett

$$\int f(x) dx = \left[\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Bizonyítás. A 29.4 Segédétel közvetlen következménye.!

29.6 Következmény. Legyen $f \in C^0_{[a,b]}$ és $\varphi \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ szigorúan monoton és $\varphi(t) \in [a,b]$, ha $t \in [\alpha,\beta]$, akkor

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Bizonyítás. $\varphi(\alpha) \in [a,b]$, $\varphi(\beta) \in [a,b]$ és $f \in C^0_{[a,b]}$ -ből a 25.2 és 25.3 Tétel alapján következik, hogy $f \in \Sigma_{[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]}$. Jelöljük F -fel f egy primitív függvényét. A Newton-Leibniz formula (28.4 Tétel) és a 29.4 Segéd-tétel alapján:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \left[F(\varphi(t)) \right]_{\alpha}^{\beta} = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

A 29.4 Tétel és a 29.5 Következmény nyilván akkor is igaz, ha $[\alpha, \beta]$ felbontható véges sok olyan intervallum egyesítésére, amelyek mindegyikén $\varphi(t)$ szigorúan monoton. Ez az integrál additivitásának a következménye.

29.1 Példa.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \right]_{t=\arcsin x} = \left[\int \cos^2 t dt \right]_{t=\arcsin x} = \\ &= \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + c \right]_{t=\arcsin x} = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin 1} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

29.7 Tétel. (Parciális integrálás.) Legyen $u \in C^1[a, b]$, $v \in C^1[a, b]$,

akkor

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Bizonyítás. $u, v' \in C^0[a, b]$ és $u', v \in C^0[a, b]$, így a 28.3 Következmény értelmében az egyenlőség mindkét oldalán szereplő határozatlan integrál létezik. Mivel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx] &= \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - \frac{d}{dx} \left[\int u'(x)v(x) dx \right] = \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x) \cdot v'(x), \end{aligned}$$

azért az egyenlőség fennáll.!

29.8 Következmény. Legyen $u \in C^1[a, b]$, $v \in C^1[a, b]$, akkor

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Bizonyítás. Állításunk a 29.7 Tétel és a Newton-Leibniz formula (28.4 Tétel) közvetlen következménye.!

A 29.7 Tétel feltételei egyszerűsíthetők, elegendő feltételezni, hogy $u'v$ -nek és uv' -nek létezzék a primitív függvénye. A 29.8 Következmény is igaz, ha még emellett $uv' \in \sum [a, b]$ és $u'v \in \sum [a, b]$.

Az előbbi tételek felhasználásával több fontos függvénytípus integrálását végezzük el a következő példákban.

29.2 Példa. Az $R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ racionális törtfüggvény integrálása. Ha $n \geq m$,

akkor $R(x)$ felbontható egy polinom és egy valódi törtfüggvény (a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál) összegére. A polinom integrálása nem okoz problémát, ezért elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $n < m$. A 2.6 Tétel alapján $R(x)$ egyértelműen bontható fel parciális törtek összegére. Mivel az integrálás additív, $R(x)$ integrálját a hozzátartozó parciális törtek integráljaiból nyerhetjük. Az alábbi a) b) c) d) e) f) bekezdésekben valamennyi esetet tárgyaljuk.

a) Legyen $A \neq 0$, $a \neq 0$;

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \ln(ax+b) + c, \quad ax+b > 0.$$

b) Legyen $A \neq 0$, $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$;

$$\int \frac{A}{(ax+b)^\alpha} dx = \frac{A}{1-\alpha} (ax+b)^{-\alpha+1} \cdot \frac{1}{a} + c,$$

az $ax+b > 0$ egyenlőtlenséggel jellemzett intervallumon.

c) Legyen $A \neq 0$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$ azaz az $ax^2 + bx + c$ polinomnak ne legyen valós gyöke;

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{ax^2+bx+c} dx &= \frac{A}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} dx = \\ &= \frac{A}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}} dx. \end{aligned} \quad (29.1)$$

Vezessük be az $\alpha = \frac{b}{2a}$ és $\beta = \frac{-b^2+4ac}{4a^2}$ jelöléseket. A feltétel szerint

$\beta > 0$, $\sqrt{\beta}$ valós, azért (29.1) a következőképpen alakítható:

$$\frac{A}{a} \int \frac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta} dx = \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} dx =$$

$$= \frac{A}{a} \operatorname{arctg} \frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta}} + C, \quad \text{az } I = (-\infty, \infty) \text{ intervallumon.}$$

d) Legyen $A \neq 0$, $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$;

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2x + \frac{2B}{A}}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{(2x + \frac{b}{a}) + (\frac{2B}{A} - \frac{b}{a})}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{A}{a} \left[\ln(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) + \right.$$

$$\left. + (\frac{2B}{A} - \frac{b}{a}) \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} dx \right].$$

Innen c) alapján a primitív függvény meghatározható.

e) Legyen $\alpha > 1$ egész szám, $\beta > 0$; $\int \frac{dx}{(x^2 + \beta)^\alpha}$

meghatározását egy rekurziós formula megadásával $\int \frac{dx}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}}$ meghatározására vezetjük vissza. Ennek a rekurziós formulának a véges sokszori ismételt alkalmazásával $\int \frac{dx}{x^2 + \beta}$ -hoz jutunk (lásd c)).

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \beta)^\alpha} = \frac{1}{\beta} \int \frac{x^2 + \beta - x^2}{(x^2 + \beta)^\alpha} dx =$$

$$= \frac{1}{\beta} \left[\int \frac{dx}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2 + \beta)^\alpha} dx \right]. \quad (29.2)$$

Az $u' = \frac{2x}{(x^2 + \beta)^\alpha}$ és $v = \frac{x}{2}$ választással a 29.7 Tételből kapjuk:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + \beta)^\alpha} dx &= \int \frac{2x}{(x^2 + \beta)^\alpha} \cdot \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}} \cdot \frac{x}{2} - \int \frac{1}{2(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}} dx \end{aligned} \quad (29.3)$$

Behelyettesítjük (29.3)-at (29.2)-be:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta)^\alpha} &= \frac{1}{\beta} \left[\int \frac{dx}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}} - \frac{-1}{2(1-\alpha)} \frac{x}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(1-\alpha)} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}} \right] = \\ &= \frac{-1}{2\beta(1-\alpha)} \frac{x}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}} + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + \beta)^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (29.4)$$

f) Legyen $\alpha > 1$ egész szám, $A \neq 0$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$;

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^\alpha} dx &= \frac{A}{2a^\alpha} \int \frac{2x + \frac{2B}{A}}{(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})^\alpha} dx = \\ &= \frac{A}{2a^\alpha} \left[\int \frac{2x + \frac{b}{a}}{(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})^\alpha} dx + \left(\frac{2B}{A} - \frac{b}{a} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})^\alpha} \right] = \\ &= \frac{A}{2a^\alpha} \left[\frac{1}{1-\alpha} (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})^{1-\alpha} + \left(\frac{2B}{A} - \frac{b}{a} \right) \int \frac{dx}{\left((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Az $x + \frac{b}{2a} = t$ új változó bevezetésével visszavezettük e)-re.

29.3 Példa. Legyen $R(e^x)$ - az e^x -nek racionális törtfüggvénye - korlátos az I intervallumon. Az $e^x = t$ helyettesítéssel

$$\int R(e^x) dx = \left[\int R(t) \frac{1}{t} dt \right]_{t=e^x}$$

az I intervallumon, a 29.5 Tétel szerint. Az $\frac{R(t)}{t}$ racionális törtfüggvény integrálása a 29.1 Példa alapján történhet.

29.4 Példa. Legyen $R(\sin x, \cos x)$ - a $\sin x$ -nek és a $\cos x$ -nek racionális tört kifejezése - korlátos az I intervallumon. Felhasználva a

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{azonosságokat és a 29.5 Tételt}$$

$R(\sin x, \cos x)$ integrálját a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel racionális törtfüggvény integráljára vezetjük vissza:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \left[\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot (2 \arctg t)' dt \right]_{t=\operatorname{tg} \frac{x}{2}} =$$

$$\left[\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \right]_{t=\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

az I intervallumon, ahol az integrandus t -nek racionális törtfüggvénye.

29.5 Példa. $\int R\left(x, \left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx$, ahol p_k, q_k pozitív relatív prímszámok,

$k=1, 2, \dots, n$, és R x -nek és $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}$, $k=1, \dots, n$ -nek racionális tört-kifejezése, szintén racionális törtfüggvény integrálására vezet, amennyiben az

$$R\left(x, \left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]^{\frac{p_k}{q_k}}\right) \text{ korlátos az } I \text{-n.}$$

A

$$t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \text{ ahol } r \text{ a } q_1, q_2, \dots, q_n \text{ számok leg-}$$

kisebb közös többszöröse, - helyettesítést alkalmazva (l. 29.5 Tétel) az I intervallumon

$$\begin{aligned} & \int R\left(x, \left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx = \\ & = \left[\int R(\varphi(t), (t^r)^{\frac{p_k}{q_k}}) \cdot \varphi'(t) dt \right]_{t=\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}} \end{aligned} \quad (29.5)$$

Mivel $\varphi(t)$ racionális törtfüggvény és így $\varphi'(t)$ is racionális törtfüggvény,

valamint $t^{\frac{p_k}{q_k}}$, $k=1, \dots, r$, egész kitevőjű hatvány, (29.5) jobb oldalán racionális törtfüggvény integrálja áll.

29.6 Példa. $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ meghatározása

$$a) \ a > 0, \quad b^2 - 4ac > 0;$$

$$a \quad \frac{b}{2a} = \alpha \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \beta > 0$$

jelölésekkel, majd az $\frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta}} = t$, azaz $x = \sqrt{\beta} t - \alpha$ helyettesítést alkalmazva:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx &= \int \sqrt{a} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} dx = \\ &= \int \sqrt{a} \sqrt{(x+\alpha)^2 - \beta} dx = \sqrt{a\beta} \int \sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2 - 1} dx = \end{aligned}$$

$$= \left[\sqrt{a\beta} \int \sqrt{t^2 - 1} \sqrt{\beta} dt \right]_{t=t(x)=\frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta}}}$$

A $t = \operatorname{ch} u$, $\frac{dt}{du} = \operatorname{sh} u$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx &= \left[\beta \sqrt{a} \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} \operatorname{sh} u du \right]_{u=\operatorname{arch}(t(x))} = \\ &= \beta \sqrt{a} \left[\int \operatorname{sh}^2 u du \right]_{u=\operatorname{arch}(t(x))} = \frac{\beta \sqrt{a}}{2} \left[(\operatorname{ch} 2u - 1) du \right]_{u=\operatorname{arch}(t(x))} = \\ &= \frac{\beta \sqrt{a}}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2} - u \right]_{u=\operatorname{arch} \frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta}}} \end{aligned}$$

b) $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$. a) jelöléseit használva; itt $\beta < 0$, $\sqrt{-\beta}$ valós. Így az előbbiekhez hasonlóan kapjuk:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx &= \left[\sqrt{-a\beta} \int \sqrt{t^2 + 1} \sqrt{-\beta} dt \right]_{t=t(x)=\frac{x+\alpha}{\sqrt{-\beta}}} \\ &= -\beta \sqrt{a} \left[\int \sqrt{t^2 + 1} dt \right]_{t=t(x)=\frac{x+\alpha}{\sqrt{-\beta}}} \end{aligned}$$

Ezt az integrált $t = \operatorname{sh} u$ helyettesítéssel integrálhatjuk.

c) $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$;

Ebben az esetben $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ meghatározása az $ax^2 + bx + c > 0$ egyenlőtlenséggel jellemzett intervallumon $\int \sqrt{1 - t^2} dt$ -re vezethető vissza az előbbiekhez hasonló módon $\int \sqrt{1 - t^2} dt$ pedig $t = \cos u$ vagy $t = \sin v$ helyettesítéssel integrálható.

29.7 Példa. Az $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ integrál meghatározása $ax^2 + bx + c$ teljes négyzetté alakításával

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \text{ ill. } \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

integrálására vezethető vissza. (L. a 27. pont végén levő táblázatot.)

29.8 Példa. $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$ és $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$ meghatározása.

A 29.7 Tételt alkalmazzuk; $u = e^{\alpha x}$, $v = \sin \beta x$ választással:

$$\int e^{\alpha x} \beta \cos \beta x \, dx = e^{\alpha x} \sin \beta x - \int \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx, \quad (29.6)$$

$u = e^{\alpha x}$ $v = -\cos \beta x$ választással pedig:

$$\int e^{\alpha x} \beta \sin \beta x \, dx = -e^{\alpha x} \cos \beta x + \int \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx. \quad (29.7)$$

(29.6)-ot (29.7)-et lineáris egyenletrendszernek tekinthetjük

$$X = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx \text{ és } Y = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$$

ismeretlenekkel.

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk:

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + c$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) + c.$$

29.9 Példa. Az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ és $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ integrálok megegyeznek,

mivel az $y = \sin x$ görbe tükörképe az $y = \cos x$ görbének a $x = \frac{\pi}{4}$ egyenes-

re vonatkozólag. Elég az egyik határozott integrált meghatározni. A 29.8 Következményt alkalmazzuk; legyen $u = \sin^{n-1} x$ $v' = \sin x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \left[-\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \quad (29.8)$$

Itt az első tag zérus és

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx. \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx \end{aligned} \quad (29.9)$$

A (29.9) redukciós formula ismételt alkalmazásával

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \text{ értéke meghatározható.}$$

Legyen n páros szám, ekkor:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-2)n} \quad (29.10)$$

Legyen n páratlan szám, ekkor:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \dots (n-3)(n-1)}{3 \cdot 5 \dots (n-2)n} \quad (29.11)$$

Jelentse $k!!$ (olv. "szemi faktoriális") a k -val megegyező paritású, k -nál nem nagyobb pozitív egész számok szorzatát, vagyis legyen:

$$k!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \dots k, & \text{ha } k \text{ páros} \\ 1 \cdot 3 \dots k, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

(29.10)-et és (29.11)-et közös képletben felírhatjuk:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \delta_n,$$

ahol

$$\delta_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

30. Impropius integrálok

A Riemann integrált eleve csak véges intervallumon, korlátos függvényekre definiáltuk. A definícióból közvetlenül látszik, hogy ezek a feltételek nem hagyhatók el, ugyanis a felső (alsó) összeg fogalma értelmetlenné válnék. (Lásd a 22.2 Definícióhoz fűzött megjegyzést.) A 28.1 Tétel ad alapot arra, hogy bizonyos típusú, nem feltétlenül korlátos függvények véges vagy végtelen intervallumon vett "integrálját" definiáljuk. Ennek az új fogalomnak az "impropius" (nem tulajdonképpeni) megkülönböztető jelzője indokolt, mert nemcsak formálisan különbözik a Riemann integráltól, hanem tartalmilag is.

30.1 Definíció. Legyen $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ az $[a, \infty)$ intervallum minden véges résziintervallumán korlátos és Riemann szerint integrálható.

Ha létezik a $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^{\omega} f(x) dx$ véges határérték, akkor

ezt az értéket az f függvény $[a, \infty)$ -en vett impropius integráljának nevezzük és

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ -szel jelöljük. Ilyenkor azt is szokás mondani,

hogy az $\int_a^{\infty} f(x) dx$ impropius integrál konvergens.

Ha a $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^{\omega} f(x) dx$ végtelen, vagy nem létezik, akkor

azt mondjuk, hogy $\int_a^{\infty} f(x) dx$ divergens.

30.2 Definíció. Legyen $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ a $(-\infty, a]$ intervallum minden véges résziintervallumán korlátos és Riemann szerint integrálható.

Ha létezik a $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_{\omega}^a f(x) dx$ véges határérték, akkor

ezt az értéket az f függvény $(-\infty, a]$ -n vett impropius integráljának nevezzük.

A konvergencia illetve divergencia szóhasználat a 30.1 Definícióban leírtakkal analóg módon történik.

30.1 Tétel. Az $\int_a^\infty f(x)dx$ (ill. $\int_{-\infty}^a f(x)dx$) improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $\Omega(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy minden $\omega_1 > \Omega$, $\omega_2 > \Omega$ (ill. $\omega_1 < \Omega$, $\omega_2 < \Omega$) esetén:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A Cauchy-féle kritérium (4.3 Tétel) alkalmazásával közvetlenül következik.

30.2 Tétel. Ha f korlátos és integrálható az $[a, \infty)$ (illetve $(-\infty, a]$)

intervallum minden véges részintervallumán, és $\int_a^\infty |f(x)|dx$

(illetve $\int_{-\infty}^a |f(x)|dx$) konvergens, akkor $\int_a^\infty f(x)dx$ (illetve

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$) is konvergens, és

$$\left| \int_a^\infty f(x)dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx, \text{ illetve}$$

$$\left| \int_{-\infty}^a f(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^a |f(x)|dx.$$

Bizonyítás. A 23.11 Tételből következik, hogy minden $\omega_1, \omega_2 \in [a, \infty)$ -re ($(-\infty, a]$ -ra):

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|dx \right| \quad (30.1)$$

Ezen egyenlőtlenség felhasználásával az $\int_a^\infty |f(x)| dx$ (ill. $\int_{-\infty}^a |f(x)| dx$)

konvergenciájából következik az $\int_a^\infty f(x) dx$ (ill. $\int_{-\infty}^a f(x) dx$) konvergenciája,

ugyanis a 30.1 Tétel alkalmazható.

A tétel állításában szereplő egyenlőtlenségeket a 23.11 Tételből kaphatjuk meg, ha ott a b tart plusz végtelenhez, illetve az a tart mínusz végtelenhez határátmeneteket elvégezzük.

A tétel megfordítása nem igaz, f improprius integráljának konvergenciájából nem következik az $|f|$ improprius integráljának a konvergenciája.

30.3 Tétel. (Majoráns kritérium.) Legyen f korlátos és integrálható $[a, +\infty)$, (illetve $(-\infty, a]$) minden véges részintervallumán, és $|f(x)| \leq g(x)$, ha $x \in [a, +\infty)$ (illetve $x \in (-\infty, a]$). Ha

$$\int_a^\infty g(x) dx \text{ (ill. } \int_{-\infty}^a g(x) dx \text{) konvergens, akkor } \int_a^\infty f(x) dx \text{ (ill. } \int_{-\infty}^a f(x) dx \text{) is konvergens.}$$

Bizonyítás. Az $[a, +\infty)$ intervallumra vonatkozó állítást bizonyítjuk. A másik állítás hasonlóan igazolható. A 30.1 Tétel biztosítja, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz

van $\Omega(\varepsilon) > 0$, hogy $\omega_1, \omega_2 > \Omega$ esetén $\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x) dx \right| < \varepsilon$. Mivel

$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ és feltehetjük, hogy $\omega_1 < \omega_2$, azért:

$$-\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x) dx \leq \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx \leq \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x) dx. \quad (30.2)$$

Tehát

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x) dx \right| < \varepsilon$$

A 30.1 Tétel szerint ez azt jelenti, hogy f improprius integrálja az $[a, +\infty)$ intervallumon konvergens.

Mind a 30.2, mind pedig a 30.3 Tételben nagyon fontos az a feltétel, hogy f korlátos és integrálható az $[a, +\infty)$ minden véges részintervallumán. A feltétel kihasználása a (30.1), ill. (30.2) formulák felírásakor történt. Enélkül f improprius integráljáról nem lehet beszélni. Ugyanakkor ez a feltétel nem következik sem $|f(x)|$ integrálhatóságából (lásd 23.2 Példa), sem pedig a majoráló $g(x)$ integrálhatóságából.

A 30.2 Tétel következménye a 30.3 Tételnek, $g(x) = |f(x)|$ választással.

30.4 Tétel. (Minoráns kritérium.) Tegyük fel, hogy f korlátos és integrálható $[a, \infty)$ (illetve $(-\infty, a]$) minden véges részintervallumán, és van olyan g függvény melyre $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $x \in [a, \infty)$, (illetve $x \in (-\infty, a]$).

Ha $\int_a^\infty g(x) dx$ (illetve $\int_{-\infty}^a g(x) dx$) divergens, akkor $\int_a^\infty f(x) dx$ (illetve $\int_{-\infty}^a f(x) dx$) divergens.

Bizonyítás. Ha $\int_a^\infty f(x) dx$ (illetve $\int_{-\infty}^a f(x) dx$) konvergens volna, akkor a

30.3 Tétel alapján $\int_a^\infty g(x) dx$ -nek (illetve $\int_{-\infty}^a g(x) dx$ -nek) is konvergensnek kellene lennie, a feltétellel ellentétben.

30.3 Definíció. Az $[a, \infty)$ illetve a $(-\infty, a]$ intervallumon konvergens improprius integrállal rendelkező függvények halmazát $I_{[a, \infty)}$ -val, illetve $I_{(-\infty, a]}$ -val jelöljük.

30.5 Tétel. Legyen $f \in I_{[a, \infty)}$ (illetve $f \in I_{(-\infty, a]}$) és $f(x) \geq 0$,

$$\text{akkor } \int_a^\infty f(x) dx \geq 0 \quad \left(\int_{-\infty}^a f(x) dx \geq 0 \right)$$

Bizonyítás. A 23.9 Tételből határátmenettel kapjuk.!

30.6 Tétel. Ha $f \in I_{[a, \infty)}$, $g \in I_{[a, \infty)}$ ($f \in I_{(-\infty, a]}$, $g \in I_{(-\infty, a]}$).

$$\text{és } f(x) \geq g(x), \text{ akkor } \int_a^\infty f(x)dx \geq \int_a^\infty g(x)dx$$

$$\left(\int_{-\infty}^a f(x)dx \geq \int_{-\infty}^a g(x)dx \right).$$

Bizonyítás. A 30.5 Tétel közvetlen következménye.!

30.7 Tétel. $I_{[a, \infty)}$ (illetve $I_{(-\infty, a]}$) lineáris tér a valós számok teste felett.

$$\Phi_1: I_{[a, \infty)} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_1(f) = \int_a^\infty f(x)dx$$

$$(III. \quad \Phi_2: I_{(-\infty, a]} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_2(f) = \int_{-\infty}^a f(x)dx \quad \text{lineáris funkcionál.}$$

Bizonyítás. Ha $f, g \in I_{[a, \infty)}$ a 23.5 Tételből és az 5.3 Tételből követ-

kezik, hogy $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x)dx + \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega g(x)dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega (f(x)+g(x))dx$, azért

$$\int_a^\infty (f(x) + g(x)) dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx,$$

tehát $(f+g) \in I_{[a, \infty)}$.

A 23.4 Tételből és az 5.4 Tételből következik, hogy

$$\int_a^\infty c f(x)dx = c \int_a^\infty f(x)dx, \text{ ha } f \in I_{[a, \infty)}.$$

így $(cf) \in I_{[a, \infty)}$. Tehát Φ_1 lineáris funkcionál, a Φ_2 -re vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.!

30.8 Tétel. Ha $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ az $[a, \infty)$ intervallum minden véges részintervallumán korlátos és integrálható, valamint f -nek létezik az $[a, \infty)$ -en az F primitív függvénye, és $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega)$ létezik, akkor

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (F(\omega) - F(a)).$$

Bizonyítás. A 30.1 Definíció és a 28.5 Tétel közvetlen következménye.!

30.9 Tétel. Ha $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ a $(-\infty, a]$ intervallum minden véges részintervallumán korlátos és integrálható, valamint f -nek létezik $(-\infty, a]$ -n az F primitív függvénye és $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} F(\omega)$

$$\text{létezik, akkor } \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} (F(a) - F(\omega)).$$

Bizonyítás. A 30.2 Definíció és a 28.5 Tétel közvetlen következménye.!

30.1 Példa.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\arctg \omega - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}$$

30.2 Példa.

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = ?, \quad a > 0.$$

$$\text{a) } \alpha = 1 \quad \int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\ln \omega - \ln a) = \infty, \text{ divergens.}$$

$$\text{b) } \alpha \neq 1 \quad \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{ha } -\alpha + 1 > 0, \text{ vagyis } \alpha < 1 \text{ esetén divergens,} \\ \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{ha } -\alpha + 1 < 0, \text{ vagyis } \alpha > 1 \text{ esetén konvergens.} \end{cases}$$

30.4 Definíció. Legyen $f \in \sum_{[a, b-\delta]}$ minden $\delta > 0$ -ra, melyre $a < b - \delta < b$, az f függvény $[a, b]$ -n vett improprius integráljának nevezzük az $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$ határértéket, amennyiben az létezik és véges.

30.5 Definíció. Legyen $f \in \sum_{[a+\delta, b]}$ minden $\delta > 0$ -ra, melyre $a < a + \delta < b$; az f függvény $[a, b]$ -n vett improprius integráljának nevezzük az $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx$ határértéket, amennyiben az létezik és véges.

A 30.1 Tételtől a 30.9 Tételig valamennyi állítás értelemszerűen igaz a 30.4, illetve 30.5 Definícióban bevezetett improprius integrálokra.

30.3 Példa. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \delta) = \infty, & \text{ha } \alpha = 1 \\ \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{ha } 0 < \alpha < 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha > 1 \end{cases} \end{cases}$

30.6 Definíció. Legyen (a, b) , ahol $a < b$ és "a", ill. "b" lehet $-\infty$, ill. ∞ is, tetszőleges intervallum, $c \in (a, b)$ és az $f: (a, b) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény korlátos és integrálható értelmezési tartománya minden korlátos, valódi részintervallumán, legyen $c_1 \in (a, c)$ és $c_2 \in (c, b)$; ha léteznek az

$$\int_a^{c_1} f(x)dx, \int_{c_1}^c f(x)dx, \int_c^{c_2} f(x)dx, \int_{c_2}^b f(x)dx \text{ Riemann-}$$

féle, vagy improprius integrálok, akkor azt mondjuk, hogy létezik f improprius integrálja (a, b) -n és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^c f(x)dx + \int_c^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^b f(x)dx.$$

Könnnyen látható, hogy az így definiált improprius integrál értéke (ha létezik) független c_1 és c_2 választásától.

30.7 Definíció. Legyen $a < c < b$ és $f \in \sum_{[a, c-\delta]}$ és $f \in \sum_{[c+\delta, b]}$ minden $0 < \delta < \min(c-a, b-c)$ -re; a

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right] \text{ határértéket, ha létezik, az}$$

f függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó improprius integrálja Cauchy-féle főértékének nevezzük.

Megjegyezzük, hogy f improprius integráljának Cauchy-féle főértéke akkor is létezhet, ha f improprius integrálja (a 30.6 Definíció szerint) nem létezik.

30.4 Példa. Az $\int_{-a}^b \frac{dx}{x}$ improprius integrál, ahol $a > 0$, $b > 0$, nem létezik (l. 30.3 Példa). Létezik azonban a Cauchy-féle főérték, ul.

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\int_{-a}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^b \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\delta \rightarrow +0} [\ln \delta - \ln a + \ln b - \ln \delta] = \ln \frac{b}{a}.$$

31. Geometriai és mechanikai alkalmazások

Először a határozott integrálnak területszámitási feladatok megoldására való felhasználásával foglalkozunk. Legyen a c görbe egyenlete $y = f(x)$, ahol $f \in C^0_{[a,b]}$ és $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. A 24.6 Tétel szerint a c görbe alatti H tartomány területe

$$\text{mes } H = \int_a^b f(x) dx. \quad (31.1)$$

31.1 Tétel. Ha a c görbe paraméteres előállítása

$x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, ahol $\xi \in C^1_{[\alpha, \beta]}$, $\eta \in C^0_{[\alpha, \beta]}$, ξ szigorúan monoton függvény és $\xi(\alpha) = a$, $\xi(\beta) = b$, akkor

$$\text{mes } H = \int_{\alpha}^{\beta} \eta(t) \xi'(t) dt.$$

Bizonyítás. A (31.1) integrálra az $x = \xi(t)$ helyettesítést alkalmazva (l. 29.6 Következményt) és figyelembe véve, hogy $f(\xi(t)) = \eta(t)$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \eta(t) \xi'(t) dt.$$

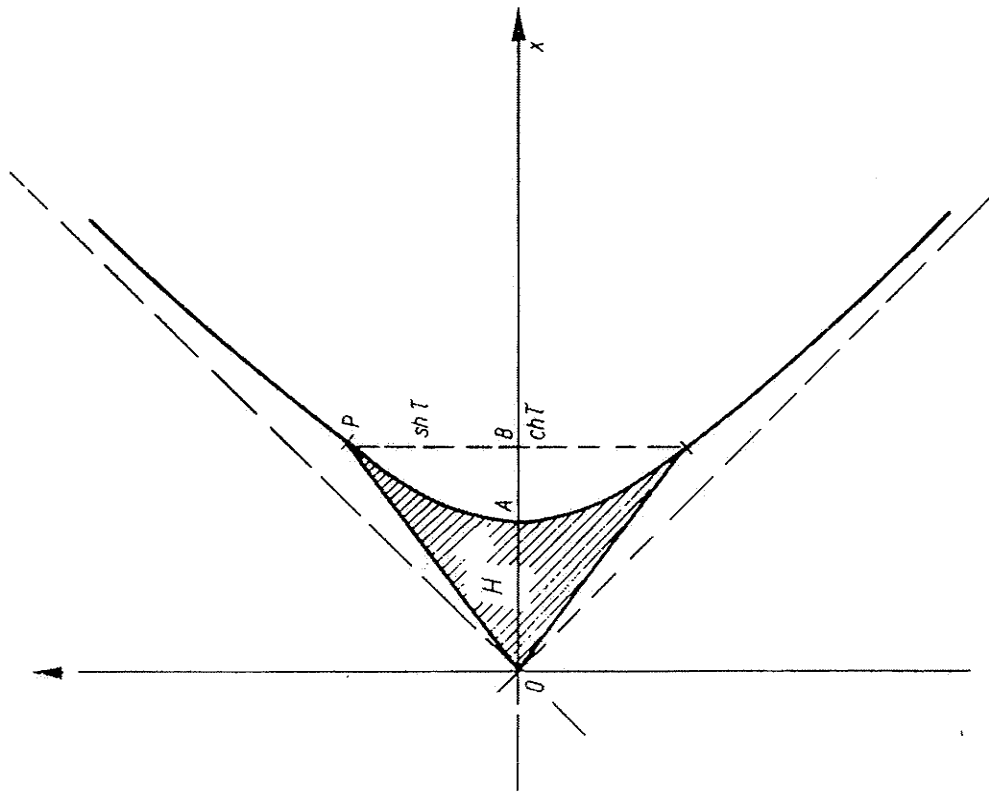
31.1 Példa. Kiszámítjuk az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis (l. 8.2 ábra)

által határolt E síktartomány területét. Az ellipszis paraméteres előállítása $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, (l. 20.2 Példa). A keresett terület a szimmetria miatt a felső félellipszis alatti tartomány területének kétszerese. Mivel $-a = a \cos \pi$, $a = a \cos 0$, a 31.1 Tétel alapján

$$\text{mes } E = 2 \int_{\pi}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt =$$

$$= 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = ab \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right] = ab\pi .$$

31.2 Példa. Tekintsük az $x = ch t$, $y = sh t$ paraméteres előállítású "egység-hiperbola" ágát (vö. 20.3 Példa). E hiperbolaág $-\tau \leq t \leq \tau$ -nak megfelelő szakasza és e szakasz végpontjait az origóval összekötő egyenes szakaszok által határolt H siktartományt a $P(ch \tau, sh \tau)$ pont által meghatározott hiperbola szektornak nevezzük (l. 31.1 ábra). A szimmetria miatt H területe az OBP derékszögű háromszög és az AP hiperbola ív alatti tartomány területe különbségének kétszerese. A 31.1 Tétel alapján (19.7) felhasználásával



31.1 ábra

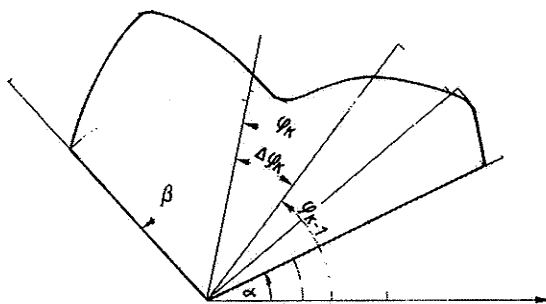
$$\begin{aligned}
\text{mes } H &= 2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau - \int_0^{\tau} \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t \, dt \right] = \\
&= \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau - \int_0^{\tau} (\operatorname{ch} 2t - 1) \, dt = \\
&= \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau - \left[\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t \right]_0^{\tau} = \\
&= \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau - [\operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau - \tau] = \tau.
\end{aligned}$$

Ez az eredmény az alapja a hiperbolikus függvények inverzei elnevezésének. $t = \operatorname{arch} x$, ill. $t = \operatorname{arsh} y$ annak a hiperbola szektornak a területe, melyet az $x > 1$ abszcisszáju, ill. az $y > 0$ ordinátájú pont határoz meg.

Vezessük be a síkon az r, φ polár koordináta-rendszert és legyen a g görbe egyenlete polárkoordinátákban $r = \varrho(\varphi)$, ahol $\varphi \in C^0[\alpha, \beta]$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. A g görbe valamint végpontjait az origóval összekötő egyenesszakaszok által határolt

$$S = \{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \varrho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta \}$$

tartományt szektortartománynak nevezzük (l. 31.2 ábra).



31. 2 ábra

31.2 Tétel. Az S szektortartomány mérhető területű és területe

$$\text{mes } S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2(\varphi) \, d\varphi. \quad (31.2)$$

Bizonyítás. Osszuk fel az $[\alpha, \beta]$ intervallumot az

$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \dots < \varphi_n = \beta$ osztópontokkal n részre és vezessük be a $\varphi_k - \varphi_{k-1} = \Delta \varphi_k$, $m_k = \min_{[\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \rho(\varphi)$, $M_k = \max_{[\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \rho(\varphi)$,

$k = 1, 2, \dots, n$ jelöléseket. E felosztásnak megfelel az S szektortartomány felosztása rész-szektortartományokra a $\varphi = \varphi_k$, $k = 1, \dots, n-1$, félegyenesekkel. A k -adik rész-szektortartományban m_k , ill. M_k sugárral húzunk körívet. A megfelelő m_k , ill. M_k sugaru körívek területe, mint ismeretes $\frac{1}{2} m_k^2 \Delta \varphi_k$, ill. $\frac{1}{2} M_k^2 \Delta \varphi_k$. Az m_k , $k = 1, 2, \dots, n$, sugaru körívek egyesítése S részhalmaza; az M_k sugaru körívek egyesítése pedig tartalmazza S -et. Ezen egyesítések területére nyilván fennáll

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k^2 \Delta \varphi_k \leq \underline{\text{mes}} S \leq \overline{\text{mes}} S \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_k^2 \Delta \varphi_k.$$

Az utóbbi egyenlőtlenséglánc első, ill. utolsó tagja azonban a (31.2) egyenlőség jobb oldalán álló integrál alsó, ill. felső összege. Mivel ez az integrál az egyetlen szám, mely $[\alpha, \beta]$ tetszőleges felosztásához tartozó alsó, ill. felső összeg közé esik,

$$\underline{\text{mes}} S = \overline{\text{mes}} S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

31.3 Példa. Kiszámítjuk az $r = a\varphi$, $a > 0$ Archimedesi spirális (l. 20.7 Példa) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ íve által meghatározott S szektortartomány területét:

$$\text{mes } S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\frac{\varphi^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} (a2\pi)^2 \pi,$$

vagyis a terület az $a2\pi$ sugaru kör területének harmada.

31.1 Definíció. Legyen a g görbe paraméteres megadása

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (31.3)$$

ahol $x(t)$ és $y(t)$ az $[\alpha, \beta]$ intervallumban - végsőszámu hely kivételével - folytonosan differenciálhatók és $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$

korlátosak, legyen továbbá (31.3) az (α, β) nyílt intervallumnak az x, y síkba való egy-egyértelmű leképezése; a

$$\text{mes } g = \int_{\alpha}^{\beta} (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{1}{2}} dt \quad (31.4)$$

integrált g ívhozzának nevezzük.

Az ívhossz (koordináta-rendszertől független) geometriai definícióját a VI. Kötetben adjuk meg.

Az ívhossz a görbe paraméterezésétől független. Ha ui. elvégezzük a $t = t(u)$ "paramétertranszformációt" ahol $t(u)$ szigorúan monoton (pl. növekedő) és folytonosan differenciálható függvény az $\gamma \leq u \leq \delta$ intervallumban és $t(\gamma) = \alpha$, $t(\delta) = \beta$, akkor a helyettesítéssel történő integrálást alkalmazva

$$\begin{aligned} \int_{\gamma}^{\delta} \left(\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} du &= \int_{\gamma}^{\delta} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{du} du = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

A (31.4)-gyel definiált ívhossz fogalom kielégíti a ponthalmazok mértékével szemben támasztott (a 24. pont végén felsorolt) négy alapvető követelményt a következő értelemben:

a) Ha a g görbe kielégíti a 31.1 Definíció követelményeit, akkor

$$\text{mes } g \geq 0.$$

b) Ha $g_1 = \{ (x, y), \quad x = \varphi_1(t), \quad y = \Psi_1(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \}$

$$g_2 = \{ (x, y): \quad x = \varphi_2(t), \quad y = \Psi_2(t), \quad \beta \leq t \leq \gamma \}$$

$\varphi_1, \Psi_1, \varphi_2, \Psi_2$ kielégítik a 31.1 Definícióban szereplő feltételeket és $g_1 \cap g_2$ legfeljebb a két görbe végpontjait tartalmazza, akkor a

$$g = g_1 \cup g_2 = \{ (x, y): x = \varphi(t), \quad y = \Psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \gamma \},$$

görbének, ahol

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \alpha \leq t \leq \beta \\ \varphi_2(t) & \beta \leq t \leq \gamma \end{cases}$$

is van ívhossza és

$$\text{mes } g = \text{mes } g_1 + \text{mes } g_2.$$

$$c) \text{ Ha a } g = \{ (x, y) : x = \varphi(t), \quad y = \Psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \}$$

görbét (mely kielégíti a 31.1 Definíció követelményeit) eltoljuk a síkban vagyis tekintjük a

$$\bar{g} = \{ (x, y) : x = \varphi(t) + c_1, \quad y = \Psi(t) + c_2, \quad \alpha \leq t \leq \beta \}$$

görbét, ahol c_1, c_2 tetszőleges valós számok, akkor ívhossza nem változik:

$$\text{mes } g = \text{mes } \bar{g}.$$

d) Az OE: $x = t, \quad y = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$ szakasz ívhossza $\text{mes OE} = \overline{\text{OE}} = 1$.

Ha speciálisan a g görbe egyenlete $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ alakban adható meg, ahol f az $[a, b]$ intervallumban - végezzámu hely kivételével - folytonosan differenciálható és $f'(x)$ korlátos, akkor

$$\text{mes } g = \int_a^b (1 + f'^2(x))^{\frac{1}{2}} dx. \quad (31.5)$$

Ha az x, y síkban r, φ polárkoordinátákat vezetünk be (l. (20.7)) és a g görbe egyenlete $r = r(\varphi)$ $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ alakban adható meg, ahol $r(\varphi)$ az $[\alpha, \beta]$ intervallumban - végezzámu hely kivételével - folytonosan differenciálható és $r'(\varphi)$ korlátos, akkor

$$\text{mes } g = \int_{\alpha}^{\beta} (r'^2(\varphi) + r^2(\varphi))^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (31.6)$$

U1. a (20.9) paraméteres alakra áttérve

$$\dot{x} = r' \cos \varphi - r \sin \varphi ,$$

$$\dot{y} = r' \sin \varphi + r \cos \varphi ,$$

$$\text{ahonnan } \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r'^2 + r^2 .$$

31.4 Példa. Az $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a \geq b > 0$, egyenlettel megadott e ellipszis (l. 20.2 Példa) kielégíti a 31.1 Definícióban szereplő követelményeket, létezik tehát ívhossza. (31.4) szerint kerülete

(a szimmetria miatt a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ negyedellipszis ívhosszának négyszerese)

$$\text{mes } e = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t\right)^{\frac{1}{2}} dt .$$

Felhasználva a $\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$ azonosságot és elvégezve az $u = (\frac{\pi}{2} - t)$ helyettesítést

$$\text{mes } e = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}} du ,$$

ahol $0 \leq k = \frac{1}{a} (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} < 1$. Bár az itt szereplő $(1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}}$ függ-

vénynek van a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumban primitív függvénye, az nem állítható elő elemi függvények segítségével zárt alakban (kivéve természetesen a $k = 0$ triviális esetet). Az

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt$$

kifejezést másodfajú teljes elliptikus integrálnak nevezzük. $E(k)$ kiszámítására a IV. Kötetben visszatérünk.

A következőkben "forgástest térfogatának", ill. "forgásfelület felszínének" kiszámításával foglalkozunk. Vegyük fel a térben az x, y, z Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert (I. III. Kötet, 4. pont). Legyen az x, y síkban levő g görbe egyenlete $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, ahol f az $[a, b]$ intervallumban korlátos és - végesszámu pont kivételével - folytonos függvény. A g görbe alatti tartomány x tengely körüli megforgatásával előálló F forgástestnek nevezzük a tér azon (x, y, z) pontjainak halmazát, melyek távolsága az x tengelytől kisebb, vagy egyenlő mint $|f(x)|$, vagyis

$$F = \left\{ (x, y, z): (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \leq |f(x)|, \quad a \leq x \leq b \right\}.$$

31.2 Definíció. Az F forgástest $\text{mes } F$ -fel jelölt térfogatát a következőképpen értelmezzük

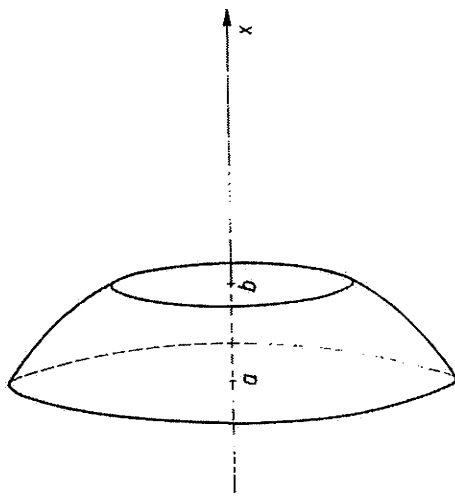
$$\text{mes } F = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (31.7)$$

A térfogat fogalmára az V. Kötetben még visszatérünk. A (31.7) -tel definiált forgástest - térfogat fogalom kielégíti a ponthalmazok mértékével szemben támasztott (a 24. pont végén felsorolt) követelményeket a következő értelemben:

- Az F forgástest térfogata $\text{mes } F \geq 0$.
- Ha F_1 és F_2 két forgástest, melyeknek legfeljebb valamelyik "alaplapja" közös, akkor $\text{mes } (F_1 \cup F_2) = \text{mes } F_1 + \text{mes } F_2$.
- Ha az F forgástestet eltoljuk az x tengely mentén, térfogata nem változik.
- Az egységnyl alapterületű és magassága egyenes körhenger, vagyis az $y = \pi \frac{1}{2}$, $0 \leq x \leq 1$, egyenletű szakasz alatti tartomány x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata 1.

31.5 Példa. Számítsuk ki az $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq a \leq x \leq b \leq R$ egyenletű körív alatti tartomány x tengely körüli megforgatásával keletkező G gömb-szelet térfogatát.

$$\begin{aligned} \text{mes } G &= \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2(b-a) - \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \pi (b-a) [3R^2 - (a^2 + ab + b^2)] . \end{aligned}$$



31.3 ábra

Legyen most az x, y síkban levő g görbe egyenlete

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (31.8)$$

paraméteres alakban adott, ahol $x(t)$ és $y(t)$ az $[\alpha, \beta]$ intervallumban - végezzük hely kivételével folytonosan differenciálhatók és $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ korlátozottak, $y(t) \geq 0$, legyen továbbá (31.8) az (α, β) nyílt intervallumnak az x, y síkba való egy-egyértelmű leképezése; a g görbe x tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelületnek nevezzük az

$$S = \left\{ (x, y, z) : x = x(t), \quad (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \right\}$$

halmazt.

31.3 Definíció. Az S forgásfelület $\text{mes } S$ -sel jelölt felszínét a következőképpen értelmezzük

$$\text{mes } S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{1}{2}} dt \quad (31.9)$$

Könnyen belátható, hogy ez a definíció (az ívhosszhoz hasonlóan) független a görbe paraméterezésétől és kielégíti a ponthalmazok mértékével szemben támasztott (a 24. pont végén felsorolt) és az adott esetnek megfelelően megfogalmazott négy alapvető követelményt.

Ha speciálisan a g görbe egyenlete $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alakban adható meg, ahol f az $[a, b]$ intervallumban - véges számú hely kivételével - folytonosan differenciálható, $f(x) \geq 0$ és $f'(x)$ korlátos, akkor

$$\text{mes } S = 2\pi \int_a^b f(x) (1 + f'^2(x))^{\frac{1}{2}} dx. \quad (31.10)$$

31.6 Példa. Számítsuk ki az $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $0 \leq t \leq \pi$, $a > b > 0$, egyenlettel megadott "felső" félellipszis (l. 20.2 Példa) x tengely körüli megforgatásával keletkező S "nyújtott forgásellipszoid" felszínét. (31.9) alapján

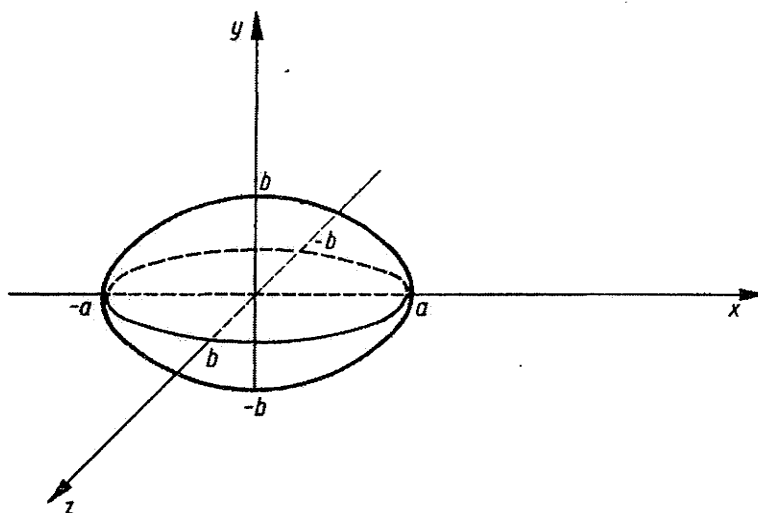
$$\begin{aligned} \text{mes } S &= 2\pi \int_0^{\pi} b \sin t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= 2\pi b a \int_0^{\pi} \sin t \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t\right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

A $k = \frac{1}{a} (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$ jelöléssel az $u = \cos t$ helyettesítés elvégzése után kapjuk

$$\text{mes } S = -2\pi ab \int_1^{-1} (1 - k^2 u^2)^{\frac{1}{2}} du = 4\pi ab \int_0^1 (1 - k^2 u^2)^{\frac{1}{2}} du.$$

Végezzük el most a $\sin v = k u$ helyettesítést:

$$\begin{aligned}
 \text{mes } S &= \frac{4\pi ab}{k} \int_0^{\arcsin k} \cos^2 v \, dv = \frac{4\pi ab}{k} \int_0^{\arcsin k} \frac{1+\cos 2v}{2} \, dv = \\
 &= \frac{2\pi ab}{k} \left[v + \frac{\sin 2v}{2} \right]_0^{\arcsin k} = \\
 &= 2\pi ab \left[\frac{\arcsin k}{k} + (1-k^2)^{\frac{1}{2}} \right].
 \end{aligned}$$



31.4 ábra

Az $a = b$, vagyis a $k = 0$ esetben a számítás természetesen sokkal egyszerűbb, azonban végeredményünkéből a $k \rightarrow 0$ határátmenet elvégzésével is megkapjuk az "a" sugarú gömb $4a^2\pi$ felszínét.

Legyen adott az x, y síkban az $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ pontrendszer és helyezzünk el az (x_k, y_k) pontban $m_k > 0$ tömeget, $k = 1, 2, \dots, n$. E tömegpont rendszer x , ill. y tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomatéka:

$$M_x = \sum_{k=1}^n y_k m_k, \quad \text{ill.} \quad M_y = \sum_{k=1}^n x_k m_k,$$

$S(x_s, y_s)$ súlypontjának (tömegközéppontjának) koordinátái pedig

$$x_s = \frac{M_y}{m}, \quad y_s = \frac{M_x}{m},$$

ahol $m = \sum_{k=1}^n m_k$ (l. III. Kötet, 4.3 Példa). Ismeretes továbbá, hogy a súlypontfogalom kielégíti a következő alapelveket:

a) Homogén anyagu szimmetrikus test súlypontja a szimmetriasíkon, a szimmetriatengelyen, ill. a szimmetriaközéppontban van.

b) Egy tömegeloszlásnak S akkor és csak akkor súlypontja, ha az S -ben elhelyezett össztömeg tetszőleges egyenesre vonatkozó elsőrendű nyomatéka megegyezik a tömegeloszlás elsőrendű nyomatékával. Síkbeli tömegeloszlásnak S akkor és csak akkor súlypontja, ha az S -ben elhelyezett össztömeg két nem párhuzamos egyenesre (pl. az x és az y tengelyre) vonatkozó elsőrendű nyomatéka megegyezik e tömegeloszlás elsőrendű nyomatékával.

c) Ha egy tömegeloszlást részekre bontunk és minden egyes részt a résznek saját súlypontjában elhelyezett tömegével pótolunk, az így nyert tömegpont rendszer súlypontja megegyezik az eredeti tömegeloszlás súlypontjával.

Az integrál alkalmazását súlypont meghatározására a következő példán szemléltetjük.

31.7 Példa. A homogén egységnyi sűrűségű vékony lemeznek feleljen meg az x, y síkon az $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, görbe alatti H tartomány, ahol

$f \in C^0_{[a,b]}$ és $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. (A vékony lemezt egységnyi sűrűségűnek nevezzük, ha tetszőleges t területű darabjának tömege t). Tekintsük az

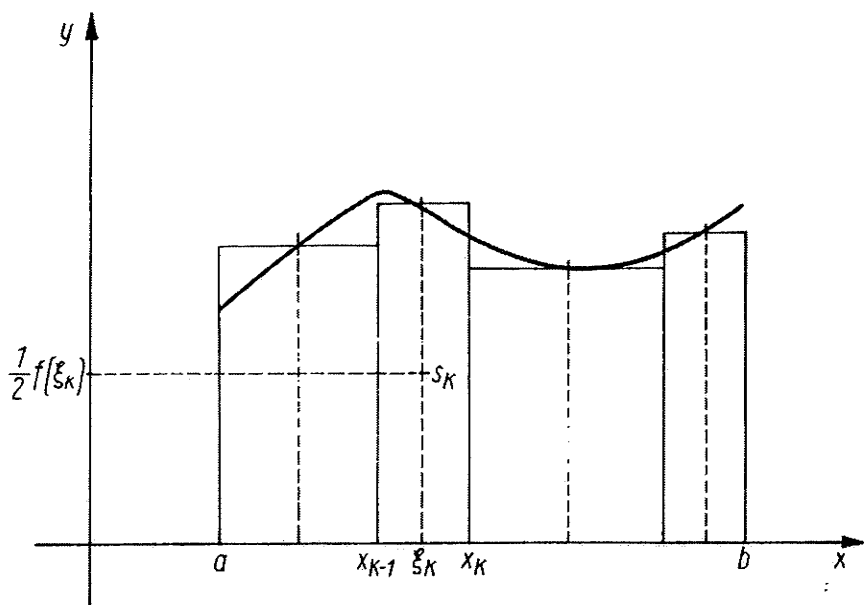
$[a,b]$ intervallum $P = \{I_k : k = 1, \dots, n\}$ felosztását, ahol $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

és jelöljük ξ_k -val az I_k intervallum felezőpontját, $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$.

Pótoljuk a lemez $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ egyenlőtlenességgel jellemzett darabját az $\{(x, y) : x \in I_k, 0 \leq y \leq f(\xi_k)\}$ homogén egységnyi sűrűségű téglalap lemezzel. E téglalap tömege $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, súlypontja pedig az

$S_k(\xi_k, \frac{1}{2}f(\xi_k))$ pont. (L. 31.5 ábra.) Ha az előbbieket minden k -ra,

$k = 1, 2, \dots, n$ elvégezzük, az eredeti lemez x tengelyre, ill. y tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomatéka közelítőleg a kapott téglalaprendszer S_k súlypontjaiból álló tömegpontrendszer megfelelő nyomatékával helyettesíthető:



31.5 ábra

$$M_x \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} f(\xi_k) \cdot f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}),$$

ill.

$$M_y \approx \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

Miután ezek az összegek az $\frac{1}{2} f^2(x)$, ill. az $x f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó téglányösszegek, és a közelítő egyenlőségek nyilván annál pontosabbak, mennél finomabb az $[a, b]$ intervallum felosztása, jogos az eredeti lemez M_x , ill. M_y nyomatékának következő értelmezése:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx, \quad M_y = \int_a^b x f(x) dx.$$

A lemez tömege

$$m = \text{mes } H = \int_a^b f(x) dx ,$$

S súlypontjának x_s , ill. y_s koordinátája a nyomatékok egyenlőségéből:

$$x_s = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \int_a^b x f(x) dx ,$$

$$y_s = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \int_a^b f^2(x) dx .$$

31.8 Példa. Legyen F homogén egységnyi sűrűségű forgástest (bármely v térfogatu részének tömege legyen v). Tételezzük fel, hogy F az x, y síkbeli $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ egyenletű görbe alatti tartomány x tengely körüli megforgatásával származtatható és $f \in C_{[a,b]}^0$. Először kiszámítjuk F -nek

az y tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomatékát. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum $P = \{I_k: k = 1, \dots, n\}$ felosztását ahol $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ és jelöljük

ξ_k -val az I_k intervallum felező pontját, $\xi_k = \frac{1}{2} (x_{k-1} + x_k)$. Pótoljuk a forgástest $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ egyenlőtlenséggel jellemzett darabját azzal a homogén egységnyi sűrűségű hengerrel, amelynek alap-, ill. fedőlapja az $x = x_{k-1}$, ill. $x = x_k$ sík, tengelye az x tengely és sugara $|f(\xi_k)|$.

E henger tömege $\pi f^2(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$, súlypontja pedig az $S_k(\xi_k, 0, 0)$ pont. Ha az előbbieket minden k -ra, $k = 1, \dots, n$ elvégezzük, F -nek az y tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomatéka közelítőleg a kapott hengerrendszer S_k súlypontjaiból álló tömegpont rendszer y tengelyre vonatkozó nyomatékával helyettesíthető:

$$M_y \approx \sum_{k=1}^n \xi_k \pi f^2(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

Miután a jobb oldalon álló összeg a $\pi x f^2(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó integrálközelítő összege és a közelítő egyenlőség nyilván annál pontosabb, mennél finomabb az $[a, b]$ intervallum felosztása, jogos az F forgástest M_y nyomatékának következő értelmezése:

$$M_y = \pi \int_a^b x f^2(x) dx.$$

Jelöljük F súlypontját $S(x_s, y_s, z_s)$ -sel. Mivel az x tengely F szimmetria tengelye, S rajta van az x tengelyen, tehát $y_s = z_s = 0$. x_s -et a következő nyomatéki egyenlethől számíthatjuk ki: $x_s m = M_y$, (ahol

$$m = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

a forgástest tömege):

$$x_s = \frac{\int_a^b x f^2(x) dx}{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

32. Numerikus integrálás

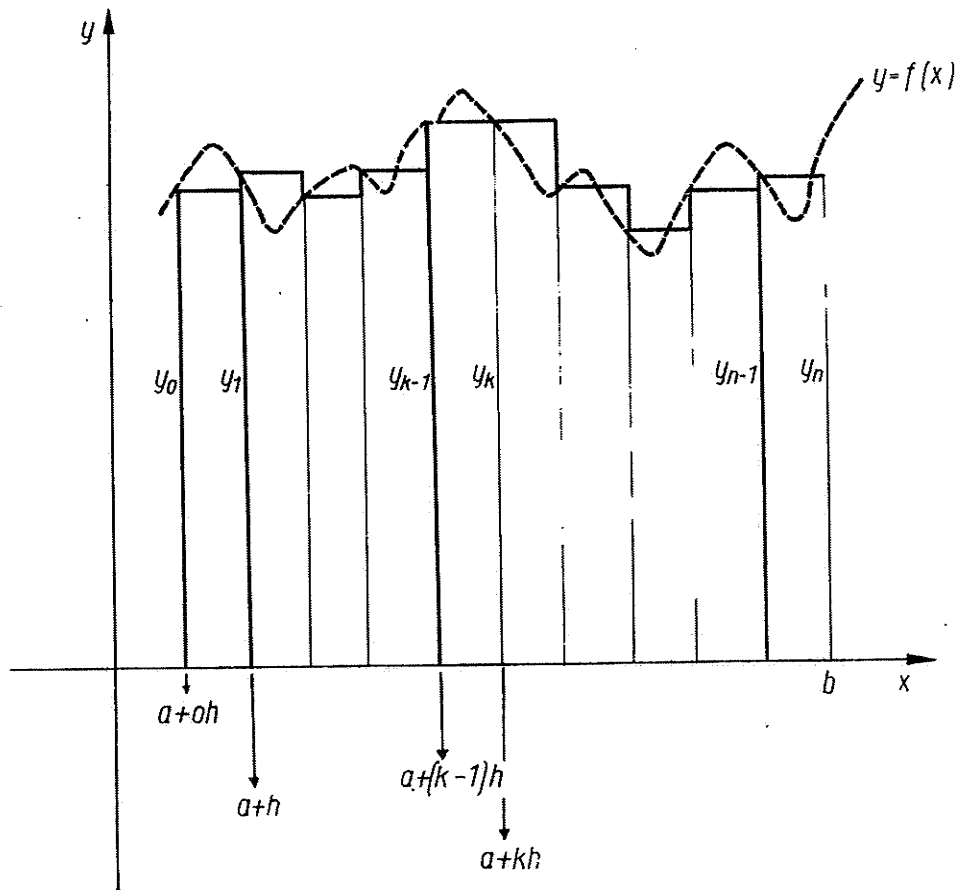
A Riemann integrál kiszámítására szolgáló pontos módszerek több esetben nem vezetnek célhoz; például akkor, ha az integrandus függvénynek nem létezik primitív függvénye, vagy primitív függvénye nem állítható elő elemi függvények segítségével zárt alakban. Ilyen esetekben az integrál értékét közelítőleg határozzuk meg, numerikus integrálást végzünk. A numerikus integrálás módszereit alkalmazhatjuk minden olyan esetben, amikor az integrál értékére (adott hibájú) közelítéssel van csak szükségünk, függetlenül attól, hogy az analízis pontos módszerei alkalmazhatók-e. Ha az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Riemann szerint integrálható, akkor alkalmazhatók a numerikus integrálási módszerek. Ha a függvény nem integrálható $[a, b]$ -ben, a közelítő formulák természetesen helytelen eredményt adnak. Ezért igen fontos meggyőződni arról, hogy $f \in \mathcal{R}[a, b]$ fennáll-e.

a) Téglalap szabály.

Az $I_k = [a + (k-1)h, a + kh]$ részintervallumban - ahol $h = \frac{b-a}{n}$ és $k = 1, 2, \dots, n$, $f(x)$ -et az $f(a + (k-1)h) = y_{k-1}$ konstanssal (0-ad fokú polinom) helyettesítjük (lásd 32.1 ábra). Így

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (32.1)$$

Tulajdonképpen a $P = \{I_k: k = 1, 2, \dots, n\}$ felosztáshoz tartozó egyik σ_P téglányösszeggel közelítettünk. Ha $y_k = f(a + kh)$ -val képezzük a téglányösszeget ($k = 1, 2, \dots, n$), akkor egy másik közelítéshez jutunk.



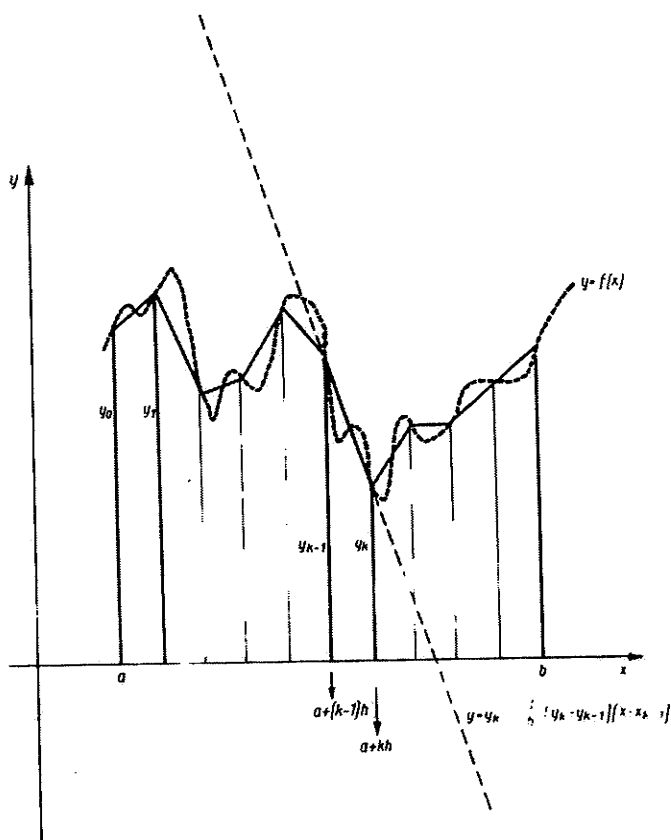
32.1 ábra

b) Trapéz szabály.

Az $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ részintervallumban - ahol $x_k = a + k h$, $h = \frac{b-a}{n}$ és $k = 1, 2, \dots, n$, $f(x)$ -et a $p_k(x) = y_{k-1} + \frac{1}{h}(y_k - y_{k-1})(x - x_{k-1})$ elsőfoku polinommal közelítjük (lásd 32.2 ábra), ahol $y_k = f(x_k)$. Tehát az integrál közelítő értéke:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) =$$

$$= h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right). \quad (32.2)$$



32.2 ábra

Bizonyítható, hogy ha f kétszer differenciálható és $|f''(x)| < M$,
 $x \in [a, b]$, akkor $n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}}$ esetén a $P = \{I_k; k = 1, 2, \dots, n\}$
 $I_k = [a + (k-1)h, a + kh]$ felosztáshoz tartozó téglalapformulák, illetve a
 trapézformula ε -nél jobban megközelíti az integrál pontos értékét
 ($\varepsilon > 0, h = \frac{b-a}{n}$).

c) Simpson szabály.

Az $[a, b]$ intervallumot 2ℓ számú egyenlő részre bontjuk, $h = \frac{b-a}{2\ell}$.
 Az $I_k = [x_{2k-2}, x_{2k}]$ $k = 1, 2, \dots, \ell$, intervallumban, ahol $x_m = a + mh$
 $m = 0, 1, 2, \dots, 2\ell$, f -et azon $p_k(x)$ másodfoku polinommal helyettesítjük,
 melyre $p_k(x_{2k-2}) = y_{2k-2}$, $p_k(x_{2k-1}) = y_{2k-1}$, $p_k(x_{2k}) = y_{2k}$, ahol
 $y_m = f(x_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots, 2\ell$ (lásd 32.3 ábra).
 Az integrál közelítő értéke

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_k(x) dx$$

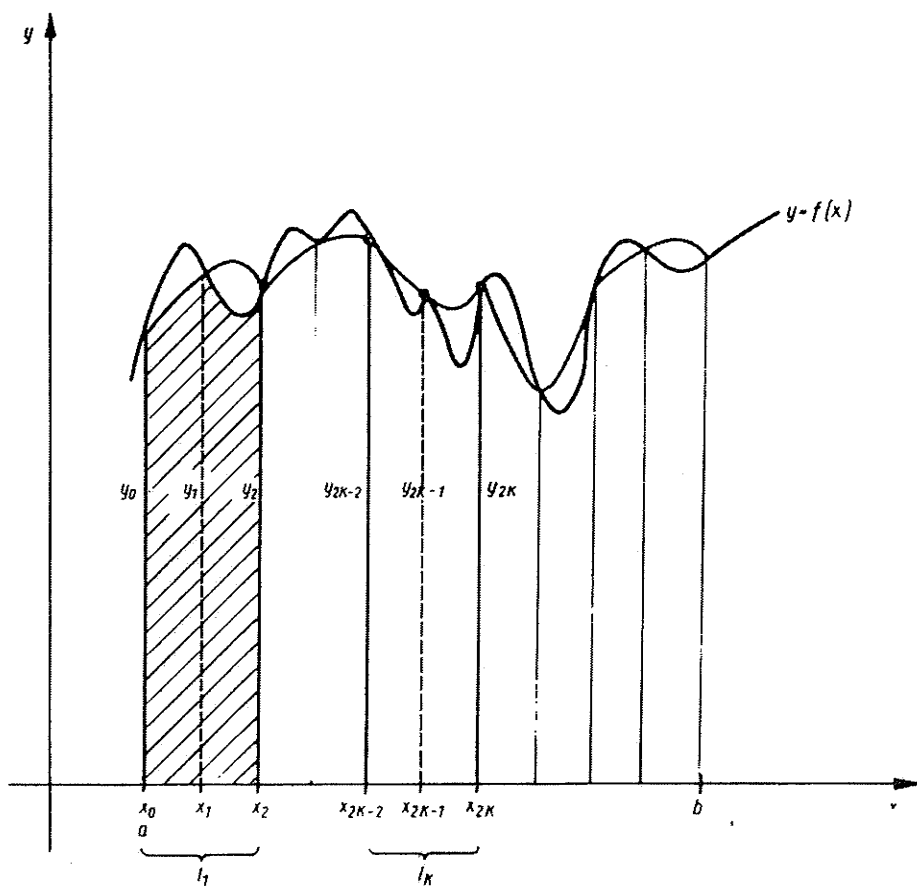
32.1 Segédétel. (Kepler féle hordó szabály.)

Legyen

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \text{ akkor}$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} p(x) dx = \frac{h}{3} [p(x_0-h) + 4p(x_0) + p(x_0+h)] .$$

Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy a szabály érvényes a $q_0(x) \equiv 1$, $q_1(x) \equiv x$
 és $q_2(x) \equiv x^2$ esetekben. Ebből következik már hogy igaz $p(x) = ax^2 + bx + c$
 esetben is (23.4 és 23.5 Tétel alapján)



32.3 ábra

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} 1 \, dx = 2h = \frac{h}{3} [1 + 4 + 1] =$$

$$= \frac{h}{3} [q_0(x_0-h) + 4q_0(x_0) + q_0(x_0+h)].$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} x \, dx = \frac{1}{2} [(x_0+h)^2 - (x_0-h)^2] =$$

$$= 2 x_0 h = \frac{h}{3} \cdot 6x_0 =$$

$$= \frac{h}{3} [x_0-h+4x_0+x_0+h] = \frac{h}{3} [q_1(x_0-h)+4q_1(x_0)+q_1(x_0+h)]$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} x^2 \, dx = \frac{1}{3} [(x_0+h)^3 - (x_0-h)^3] = \frac{1}{3} [6hx_0^2 + 2h^3] =$$

$$= \frac{h}{3} [6x_0^2 + 2h^2] = \frac{h}{3} [(x_0-h)^2 + 4x_0^2 + (x_0+h)^2] =$$

$$= \frac{h}{3} [q_2(x_0-h) + 4q_2(x_0) + q_2(x_0+h)] \quad .!$$

A 32.1 Segédétel alapján kapjuk tetszőleges $k = 1, 2, \dots, \ell$ -re:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_k(x) \, dx = \int_{x_{2k-1}-h}^{x_{2k-1}+h} p_k(x) \, dx = \frac{h}{3} [p_k(x_{2k-1}-h) + 4p_k(x_{2k-1}) + p_k(x_{2k-1}+h)] =$$

$$= \frac{h}{3} [p_k(x_{2k-2}) + 4p_k(x_{2k-1}) + p_k(x_{2k})] =$$

$$= \frac{h}{3} [y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}] \quad .$$

Ezek alapján kapjuk a Simpson formulát:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_k(x) \, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3} [y_2 + 4y_3 + y_4] + \dots + \\
&+ \frac{h}{3} [y_{2\ell-2} + 4y_{2\ell-1} + y_{2\ell}] = \\
&= \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2\ell-2} + 4y_{2\ell-1} + y_{2\ell}] . \quad (32.3)
\end{aligned}$$

Bebizonyítható, hogy ha $f^{(4)}(x)$ létezik és korlátos, azaz $|f^{(4)}(x)| \leq M$,

akkor az $n = 2\ell \geq \sqrt[4]{\frac{M(b-a)^5}{180\varepsilon}}$ osztásponttal számított Simpson formula

$\varepsilon > 0$ -nál jobban megközelíti $\int_a^b f(x)dx$ -et.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Matematika Példatár (szerkesztette: Monostory I.)
I.-II. kötet, Tankönyvkiadó, 1971.
- [2] Gáspár Gy.: Műszaki matematika I.-II. kötet,
Tankönyvkiadó, 1968.
- [3] Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1960.
- [4] Szász P.: A differenciál és integrálszámítás elemei, I. Kö-
tet, Közoktatásiügyi Kiadóvállalat, 1951.
- [5] Banach, S.: Differenciál és integrálszámítás,
Tankönyvkiadó, 1965.
- [6] Grebencsa, M.K. - Novoszelov, Sz. I.: Matematikai analízis I.-II. Kötet,
Tankönyvkiadó, 1952.
- [7] Фихтенгольц, Г.М.: Курс дифференциального и интеграль-
ного исчисления, том. I. Гостехиздат,
1949. Москва, Ленинград.
- [8] Maak, W.: An Introduction to Modern Calculus, Holt-Rinehart-
Winston, 1963, New-York.

Tárgymutató

abszcissza 8
abszolút maximum 14
abszolút minimum 14
algebrai függvény 54
alsó összeg 158
Archimedesi spirális 142
arcus függvény 57, 60
area függvények 125
aszimptota 116
aszimptotikus egyenlőség 116

baloldali differenciálhányados 74
baloldali folytonosság 42
baloldali határérték 37
balról differenciálható függvény 74
belső sokszög 184
belső terület 184
Bernoulli-l' Hospital szabály 100
Bézout tétele 16
Bolzano tétele 49, 50

Cauchy-féle középértéktétel 99
Cauchy-féle kritérium 36
ciklois 137

derivált 72
derivált függvény 89
Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer 8
differenciahányados 72
differenciál 74
differenciálhányados 72
differenciálhatóság 71
Dirichlet-függvény 12, 179

egyenletes folytonosság 47
egyszerű sokszögtartomány 183
egyváltozós valós függvény 7
elemi függvények 134
elsőrendű nyomaték 239
érintő egyenlete 77
érintőmódszer 146
euklideszi tér 9
exponenciális függvény 63, 65

felosztás finomsága 160
felső összeg 158

felszín 238
 folytonosan differenciálható függvény 89, 90
 folytonosság 42
 forgásfelület 237
 —— felszíne 236
 forgásszög 21
 —— cosinusa 21
 —— sinusa 21
 forgástest térfogata 236
 frekvencia 26
 funkcionál 162
 függvény 7
 korlátos —— 13
 —— lokális tulajdonsága 29
 monoton —— 12
 páratlan —— 13
 páros —— 13
 periodikus —— 13
 szigorúan monoton —— 12
 függvények hányadosa 12
 —— összege 12
 —— szorzata 12
 függvény grafikonja alatti tartomány 189
 függvényvizsgálat 106
 görbe egyenlete 9
 —— érintője 75
 —— ívhossza 233
 görbék érintkezése 120
 görbület 121
 görbületi sugár 121
 grafikon 9
 gyök multiplicitása 17
 gyökök elkülönítése 144
 gyöktényező 15
 halmazfüggvény 191
 határérték 29, 31, 35
 határozatlan integrál 202
 határozott integrál 164, 173
 hatványfüggvény 88
 hiperbolikus függvények 125
 hiperbolikus spirális 142
 homogén lineáris függvény 74
 Horner-féle elrendezés 152
 hurmódster 145

implicit függvény 54
 improprius integrál 221, 227, 228
 inflexió pont 112
 integrálás helyettesítéssel 209
 integrálfüggvény 204
 integrálhatóság 155
 integrálközép 196, 198
 integrálszámítás alaptétele 106
 ——— középértéktételei 196
 intervallum-felezés 144
 intervallum felosztása 158
 inverz függvény 57
 iteráció 149

 jobboldali differenciálhányados 74
 jobboldali folytonosság 42
 jobboldali határérték 37
 jobbról differenciálható függvény 74
 Jordan-féle területfogalom 185

 Kepler-féle hordó szabály 246
 kezdőfázis 26
 kisördő 73
 konkáv 110
 konvex 110
 körfrekvencia 26
 középértéktételek 93
 kúpszelet egyenlete 54
 különbségi hányados 72
 külső sokszög 184
 külső terület 184

 láncszabály 81
 Lagrange-féle interpolációs polinom 19
 Lagrange-féle középértéktétel 96
 Lagrange-féle maradéktag 124
 Leibniz-formula 92
 lineáris funkcionál 182
 ——— harmonikus rezgés 26
 ——— operátor 182
 logaritmus függvény 63, 67
 logaritmikus spirális 142
 lokális konvexitás 109
 ——— maximum 14
 ——— minimum 14
 ——— növekedés tétele 94
 ——— szélsőérték 94

lokálisan konkáv 108
 ——— konvex 108
 majoráns kritérium 223
 másodfajú teljes elliptikus integrál 236
 maximum 107
 minden határon túl finomodó felosztás 160
 minimum 107
 minoráns kritérium 224
 monoton növekedés tétele 107
 n-ed fokú Taylor polinom 122
 n-edrendű érintkezés 120
 Newton-Leibniz formula 204, 206
 Newton-Raphson-módszer 146
 növekmények összehasonlítósnak elve 115
 numerikus integrálás 243
 ordináta 8
 oszcillációs összeg 169
 paraméteresen adott görbék 134
 parciális integrálás 211
 parciális törtek 21
 periodikus rezgőmozgás 26
 periódus 13, 26
 polár koordinátarendszer 138
 polárkoordináták 139
 polárkoordinátákban adott görbék 134
 polárszög 139
 polártengely 139
 poligon 183
 polinom 15
 ——— fokszáma 15
 ——— gyöke 15
 pólus 139
 primitív függvény 201, 202
 racionális egész függvény 15
 ——— törtfüggvény 19
 radiusvektor 139
 rezgés amplitúdója 26
 ——— fázisa 26
 rezgésszám 26
 részlettörtek 21
 Riemann szerint integrálható függvény 164
 Rolle-tétel 95
 Ruffini-Abel-tétel 144

síktartomány 191
 —— területe 183
 simuló kör 120
 Simpson szabály 246
 sokszög 183
 sokszög vonal 183
 súlyfüggvény szerinti integrálközep 200
 súlyozott számtani közép 196
 súlypont 240
 szakadási hely 45
 elsőfajú ——— 46
 lényeges ——— 46
 másodfajú ——— 46
 megszüntethető ——— 45
 szektortartomány 231
 szélsőérték-hely 94
 "szemi faktoriális" 220
 szigorúan csökkenő 107
 —— növekedő 107
 téglalap szabály 244
 téglányösszeg 167
 természetes alapú logaritmus függvény 88
 terület 185
 többszörös gyök 16
 trapéz szabály 245
 trigonometrikus azonosságok 22
 Weierstrass tétele 51