BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA PÉLDATÁR

Szerkesztette:
Monostory Iván

VII. kötet

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Összeállította:
Kelemen Mihály

Műegyetemi Kiadó, 2004.

(Tizedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040811**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 7,4 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 061/04

* A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez útmutatást is adunk.

☐ A bekeretezett sorszámú feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő

Tartalomjegyzék

	Feladat sorszám	Feladat	Megoldás
I. Komplex függvények valós és képzetes rész összegére bontott alakja. Euler összefüggés	1-21	9-10	37-41
II. Tartományok, geometriai helyek és vonalak a komplex számsíkon	22-58	10-12	41-45
III. Komplex számokból álló halmazok. Komplex tagú sorozatok és sorok	59-82	12-14	45-50
IV. Függvényhatárérték és folytonosság	83-103	15-17	50-52
V. Komplex függvények differenciálhatósága	104-144	17-21	52-60
VI. Leképezések	145-174	21-24	60-69
VII. Komplex függvények görbementi integrálja. Cauchy-tétel	175-194	25-30	69-77
VIII. Komplex hatványsorok, sorfejtések. Reziduum	195-216	30-33	77-81

FELADATOK

I. Komplex függvények valós és képzetes rész összegére bontott alakja. Euler összefüggés

Hozzuk $u(x,y) + iv(x,y)$ alakra a következő komplex függvényeket:

1. $w(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$, * 2. $w(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, 3. $w(z) = \dfrac{w^2+1}{z}$,

4. $w(z) = e^z$, 5. $w(z) = z\,e^z$, 6. $w(z) = \ln z$,

$\boxed{7.}$ $w(z) = \cos z$, 8. $w(z) = \sin z$, * 9. $w(z) = \operatorname{ch} z$,

10. $w(z) = \operatorname{sh} z$, 11. $w(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$, 12. $w(z) = \dfrac{4z}{z^2+\bar{z}^2}$

Állítsuk elő $w(z)=f(z,\bar{z})$ alakban a következő komplex függvényeket:

* 13. $$w(z) = 2\,\frac{x+iy}{x^2-y^2},$$

* 14. $$w(z) = \frac{x^2-y^2+2\,xy\,i}{x^2+y^2}$$

Az Euler formula felhasználásával adjunk zárt összegképleteket a következő összegekre, ahol $n \geq 1$ egész:

$\boxed{15.}$ $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$,

$\boxed{16.}$ $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$

Határozzuk meg a következő végtelen sorok összegét:

* 17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi$, * 18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi$.

(ahol r és φ valósak, továbbá $0 < r < 1$)

$\boxed{19.}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n!}$ (Vizsgáljuk $e^{e^{i\varphi}}$ Taylor sorát!)

Igazoljuk a következő azonosságokat.

* 20. $|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x.$

$\boxed{21.}$ $\dfrac{e^{i\varphi} + e^{i\vartheta}}{e^{i\varphi} - e^{i\vartheta}} = -i \operatorname{ctg} \dfrac{\varphi - \vartheta}{2}$ (φ és ϑ valósak).

II. Tartományok, geometriai helyek és vonalak a komplex számsíkon

Jelöljük ki a komplex számsikon az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott tartományokat:

22. $|z| \leqq 2,$ 23. $|z| > 2,$ 24. $1 \leqq |z| \leqq 2,$

25. $\dfrac{1}{|z|} < \varepsilon$ (ε tetszőleges kis pozitiv szám)

26. $\dfrac{1}{|z-1|} > 1,$ 27. $|z - i + 1| < 2,$

* 28. $|\mathrm{Re}z| > 1,\ |\mathrm{Im}z| > 2,$ 29. $|z| + \mathrm{Re}(z) \leqq 1,$

30. $\left|\dfrac{z-i}{z+1}\right| \leqq 1,$ 31. $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| < \sqrt{2}$

Határozzuk meg a komplex számsikon a következő egyenleteket kielégitő komplex számoknak megfelelő pontok mértani helyét:

32. $\mathrm{Re}(z^2) = 0,$ 33. $\mathrm{Re}(z^2) = 1,$

34. $\mathrm{Re}(z^2) = -1,$ 35. $\mathrm{Im}(z^2) = 0,$

36. $\mathrm{Im}(z^2) = 1$, 37. $\mathrm{Im}(z^2) = -1$,

* 38. $|z - 1| = |z + i|$, * 39. $|z - 1| + |z + 1| = 4$

* 40. $|z^2 - 1| = \alpha$ $(0 < \alpha < 1;\ \alpha = 1;\ \alpha > 1$ esetekben)

Irjuk fel a következő egyenesek egyenletét z és $\bar{z}$ komplex változók segitségével:

* 41. $x = c$, * 42. $y = c$, (c valós állandó)

* 43. $y = x$, * 44. $y = -x$, * 45. $x + y = 2$

* 46. $ax + by + c = 0$ (a, b, c valós egyetthatók).

* 47. z_1 és z_2 adott komplex számoknak megfelelő pontok távolságát felező merőleges.

Irjuk fel a következő körök egyenletét z és $\bar{z}$ komplex változók segitségével:

48. Origó középpontu r sugaru kör.

* 49. P_0 középpontu r sugaru kör. (P_0 a z_0 adott komplex számnak megfelelő pont.)

* 50. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, ($a$, b, c valósak).

Milyen görbék felelnek meg az alábbi valós "t" változótól függő elfajuló komplex függvénynek?

51. $z(t) = a \cos t + ib \sin t$, $0 \leqq t < 2\pi$, $(a > 0, b > 0)$

52. $z(t) = ae^{it} + be^{-it}$, $0 \leqq t < 2\pi$ $(a > 0,\ b > 0)$

53. $z(t) = e^{(a+bi)t}$, (a és b valós), $-\infty < t < \infty$.

54. $z(t) = at + be^{i\omega t}$ $t \geqq 0$ $(a > 0,\ b > 0,\ \omega > 0)$.

55. $z(t) = t + \frac{i}{t}$, 56. $z(t) = \frac{i + t}{i - t}$

Igazoljuk a következő állításokat:

$\boxed{57.}$ Ha $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ és $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, akkor a szóban forgó komplex számoknak megfelelő pontok az origó középpontu egységkör kerületét három egyenlő részre osztják.

$\boxed{58.}$ Ha $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ és $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, akkor a szóban forgó komplex számoknak megfelelő pontok egy az origó középpontu egységkörbe irt derékszögü paralelogramma csucsai.

III. Komplex számokból álló halmazok Komplex tagú sorozatok és sorok

59. Korlátos-e a $|z| + \mathrm{Re}(z) \leqq 1$ egyenlőtlenséget kielégitő "z" komplex számok halmaza? Adjuk meg a komplex számsik azon tartományát, amelyet ezen halmaz elemeinek megfelelő pontok kitöltenek.

60. Adjuk meg az $\frac{1}{m+1} + \frac{i}{n+1}$ (m és n természetes számok) számhalmaz összes sürüsödési helyeit.

$\boxed{61.}$ Adjuk meg azon $z = x + iy$ komplex számok halmazának összes sürüsödési helyeit, amelyeknél x is, meg y is racionális. Rendezzük e halmaz elemeit ugy, hogy azok számsorozatot alkossanak.

$\boxed{62.}$ Sorozatba rendezhető-e az egységnyi abszolut értékü komplex számok halmaza?

Számitsuk ki a következő z_n, $n = 1, 2, \ldots$ sorozatok határértékét, és határozzuk meg, hogy hányadik tagtól kezdve lesz a sorozat tagjainak a határértéktől való eltérése adott $\varepsilon > 0$ számnál kisebb. (Mi lesz az ε-hoz tartozó $N(\varepsilon)$ küszöbszám?)

* 63. $$z_n = \frac{n - i}{n + 1},$$

* 64. $$z_n = \frac{1 + 2ni}{n + i}$$

Vizsgáljuk a következő sorozatokat korlátosság, sűrűsödési helyek és konvergencia szempontjából. Ha konvergensek, számitsuk ki határértékűket:

* 65. $z_n = (1-i)^n$, 66. $z_n = 1 + \frac{i^n}{n}$,

$\boxed{67.}$ $z_n = i^n(1+\frac{1}{n})$ * 68. $z_n = \left(\frac{2+i}{3}\right)^n$,

* 69. $z_n = \frac{(1+i)^{2n}}{3^n}$, * 70. $z_n = \frac{(\sqrt{2}+i)^n}{3^n}$,

* 71. $z_n = (2+i)^n$

* 72. $z_n = \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{(1+i)^n}$ (φ valós)

73. $z_n = z_o + \frac{1}{n} e^{i\varphi n}$ (z_o komplex, φ valós)

74. $z_n = (1 + \frac{1}{n}) e^{i\frac{\pi}{n}}$,

* 75. $z_n = (2 + \frac{3}{n}) e^{i\pi n}$.

$\boxed{76.}$ Ismeretes, hogy valós x esetén $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

Mutassuk meg, hogy ez az összefüggés komplex z esetén is fennáll.

Utmutatás: Hozzuk $(1 + \frac{z}{n})^n$ komplex számot $r_n e^{i\varphi_n}$ exponenciális alakra, majd vegyük figyelembe, hogy

$$\lim_{n\to\infty} r_n e^{i\varphi_n} = \lim_{n\to\infty} r_n \cdot e^{i \lim_{n\to\infty} \varphi_n}$$

A 76. feladatban bizonyitott tételt felhasználva számitsuk ki a következő sorozatok határértékét:

77. $z_n = (1 + i\frac{\pi}{2n})^n$, 78. $z_n = (1 + i\frac{\pi}{n})^n$

Vizsgáljuk a következő sorokat és amennyiben konvergensek, számitsuk ki az összegüket:

* 79. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k$, *80. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)^k$

Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját:

81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$, $\boxed{82.}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}$

Utmutatás a 82. feladat megoldásához:
Mutassuk meg mindenek előtt $|s_n| = |e^i + e^{2i} + \ldots + e^{ni}|$ korlátosságát.

Majd alkalmazzuk a következő tételt: Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ komplex tagu sor részletösszegeinek abszolut értéke korlátos és $b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots$ sorozat a zérushoz tart, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ végtelen sor konvergens.}$$

Jelen esetben $a_n = e^{in}$, $b_n = \frac{1}{n}$ és igy $|s_n|$ korlátossága és

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \ldots \to 0 \text{ miatt az idézett}$$

tétel értelmében a konvergencia feltételei teljesülnek.

IV. Függvényhatárérték és folytonosság

Vizsgáljuk a következő valós változós komplex értékű függvényeket a megadott t_o helyen határérték és folytonosság szempontjából:

83. $$z(t) = t + i\,\frac{\sin t}{t}, \quad t_o = 0;$$

84 $$z(t) = t + i \sin \frac{1}{t}, \quad t_o = 0;$$

* 85. $$z(t) = \frac{1}{t} + i\, e^{\frac{1}{t-2}}, \quad t_o = 2;$$

86. $$z(t) = \frac{it}{t^2 + 1}, \quad t_o = i;$$

Számitsuk ki a következő határértékeket:

* 87. $$\lim_{z \to a} \frac{z^3 - a^3}{z - a},$$

88. $$\lim_{z \to \infty} \frac{z^3 + 3z}{5z^2 - 9}$$

* 89. $$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{i\,(z^4 - 1)}$$

* 90. $$\lim_{z \to i} \frac{2\,(z^3 + z)}{i\,(z^2 + 1)}$$

$\boxed{91.}$ Vizsgáljuk $f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right)$ függvényt $z_o = 0$ helyen.

Értelmezzék az alábbi függvényeket $|z| > 0$ esetben a közölt képletek. Vizsgáljuk őket a $z_0 = 0$ helyen határérték és folytonosság szempontjából:

92. $$f_1(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{1+|z|},$$

93. $$g_1(z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{1+|z|}$$

* 94. $$f_2(z) = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|}$$

* 95. $$g_2(z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

* 96. $$f_3(z) = \frac{[\mathrm{Re}(z)]^2}{|z|}$$

* 97. $$g_3(z) = \frac{[\mathrm{Im}(z)]^2}{|z|}$$

Vizsgáljuk a következő függvényeket $z_0 = 0$ helyen:

98. $$f(z) = e^{\frac{1}{|z|}}$$

99. $$f(z) = e^{\frac{1}{\mathrm{Re}(z)}}$$

100. $$f(z) = e^{\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}}$$

Vizsgáljuk folytonosság szempontjából a következő függvényeket:

101. $$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z = 0 \text{ vagy } |z| \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q} & \text{ha } |z| = \frac{p}{q} \text{ racionális} \end{cases}$$

(p és q pozitiv egészek és relativ primek)

102. $$f(z) = \begin{cases} 0, \text{ ha } z = 0 \\ \sin\varphi \text{ ha } z = re^{i\varphi} \text{ és } r > 0 \end{cases}$$

$\boxed{103.}$ Igazoljuk, hogy $f(z) = z^n$ az egész nyilt sikon folytonos, azaz tetszőleges z_o-ra fennáll, hogy $|z^n - z_o^n| < \varepsilon$ hacsak $|z - z_o| < \delta(\varepsilon)$. Határozzuk meg $\delta(\varepsilon)$ függvényt.

V. Komplex függvények differenciálhatósága

Határozzuk meg a következő valós változós komplex függvények deriváltját a megadott helyen a derivált definiciója alapján:

$\boxed{104.}$ $$z(t) = \frac{i+t}{i-t}, \quad t = 1;$$

$\boxed{105.}$ $$z(t) = e^{(a+bi)t}, \; t = t_o.$$

Határozzuk meg a következő valós változós komplex függvényekkel adott görbék érintő- és normálvektorát a t_o paraméterű pontban:

* 106. $$z(t) = a\,e^{it} + b\,e^{-it}$$

* 107. $$z(t) = e^{(a+bi)t}$$

Vizsgáljuk meg a derivált definiciója alapján, hogy differenciálhatók-e a következő komplex változós függvények:

$\boxed{108.}$ $w(z) = z^3$, 109. $w(z) = \frac{1}{z}$,

110. $w(z) = \sqrt{z}$ $\boxed{111.}$ $w(z) = \bar{z}^2$,

$\boxed{112.}$ $w(z) = z|z|$ 113. $w(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$

A Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletekkel vizsgáljuk a következő függvények differenciálhatóságát:

*114.	$f(z) = z^3$,	115.	$f(z) = \frac{1}{z}$,
116.	$f(z) = e^z$,	* 117.	$f(z) = \bar{z}^2$,
118.	$f(z) = \bar{z} z^2$	119.	$f(z) = \frac{1}{\bar{z}^2}$

$\boxed{120.}$ Mutassuk meg, hogy a következőképpen értelmezett komplex függvény az origóban folytonos, továbbá itt a Cauchy--Riemann féle differenciálegyenletek is teljesülnek és a függvény mégsem analitikus.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ ahol}$$

$$u(x,y) = v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } |x|+|y| > 0 \\ 0 & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

Ismeretes, hogy az f(z) komplex függvényt akkor mondjuk analitikusnak, ha a derivált független a $\Delta z \to 0$ határátmenet módjától. Ennek feltételét tehát két tetszőleges egymásra merőleges

$$\Delta z = \Delta s \cdot e^{i\alpha} \to 0 \text{ illetve } \Delta z = \Delta n \cdot ie^{i\alpha} \to 0$$

határmenettel képezett derivált egybevetése utján is megadhatjuk, legyen ugyanis $w = u + iv$, és igy a kétféle derivált:

$$\frac{1}{e^{i\alpha}} \frac{\partial w}{\partial s} = e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + i\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

illetve

$$\frac{1}{ie^{i\alpha}} \frac{\partial w}{\partial n} = e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial n} - i\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

és innen az egybevetés eredményeképpen:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

Ezek az egyenletek a Cauchy-Riemann féle feltételek általánositásának tekinthetők.

Mutassuk meg, hogy az általánositott Cauchy-Riemann feltételek $w(z)=f(z)$ alább felsorolt megadásai esetén milyen alakot öltenek:

* 121. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

* 122. $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$

* 123. $f(z) = \varrho(x,y)\, e^{i\vartheta(x,y)}$

* 124. $f(z) = \varrho(r,\varphi)\, e^{i\vartheta(r,\varphi)}$

A Cauchy-Riemann féle feltételek polárkoordinátás alakjával vizsgáljuk meg, hogy analitikusak-e a következő függvények:

* 125. $f(z) = r^2 e^{2i\varphi}$

126. $f(z) = \frac{1}{r^2} e^{-2i\varphi}$

127. $f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$ * 128. $f(z) = \frac{r}{2} e^{2i\varphi}$

$\boxed{129.}$ Ha $w(x,y)=\varrho(x,y)e^{i\vartheta(x,y)}$ függvény analitikus, akkor analitikusak-e az alábbi függvények:

$$w(x,y) = \varrho(x,y) + i\vartheta(x,y)$$

$$w(x,y) = \ln \varrho(x,y) + i\vartheta(x,y).$$

Az alább felsorolt u illetve v függvények lehetnek-e egy analitikus komplex függvény valós illetve képzetes részei? Amennyiben lehetnek, keressük meg harmonikus társukat és állitsuk elő az $u + iv = f$ analitikus függvényt.

130. $u(x,y) = 2x(1-y),$

131. $v(x,y) = 3x^2 y - y^3,$

132. $u(x,y) = e^x \cos y,$

133. $v(x,y) = e^x \sin y,$

$\boxed{134.}$ $u(x,y) = \operatorname{sh} x \sin y,$

135. $v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y$

136. $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2},$

137. $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$

* 138. $u(r,\varphi) = \ln r,$

* 139. $v(r,\varphi) = r^2 \sin 2\varphi.$

(ahol $r = |z|$ és $\varphi = \arg z$)

(A két utolsó feladat megoldásánál a Laplace operátor és a Cauchy--Riemann féle feltételek polárkoordinátás alakját használjuk.)

* 140. Milyen kapcsolatnak kell fennállni $a > 0$ és $b > 0$ között, hogy $u(x,y)=e^{-ax}\cos by$ egy $f(z)$ analitikus függvény valós része lehessen. Határozzuk meg ezt az $f(z)$ analitikus függvényt.

$\boxed{141.}$ A komplex nabla operátort a következőképpen definiáljuk:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{és} \quad \overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$$

Mutassuk meg, hogy egy analitikus $f(z) = u + iv$ komplex függvény deriváltja a következő módon is előállítható:

$$2f'(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot(u + iv).$$

$*$ 142. Bizonyitsuk be, hogy ha $f = u + iv$ analitikus, akkor $g = -v + iu$ is analitikus.

$\boxed{143.}$ Bizonyitsuk be, hogy ha $f(z)$ és $\overline{f(z)}$ mindketten analitikusak, akkor $f(z) = \text{konst.}$

$*$ 144. Mutassuk meg, hogy ha az $f(z) = u + iv$ analitikus függvény egy sikáramlás komplex potenciálját jelenti, ahol "u" a sebességpotenciál "v" pedig az áramfüggvény, akkor a sebességpotenciál szintvonalai és az áramvonalak egy ortogonális trajektória-hálózatot képeznek.

VI. Leképezések

$\boxed{145.}$ Mutassuk meg, hogy a $w = az + b$ leképezés egy nyujtás-zsugoritás, egy forgatás és egy eltolás szuperpoziciója. Számitsuk ki a leképezés helyben maradó pontját. Határozzuk meg a lokális vonalmenti nyujtás-zsugoritás, elforgatás és területtorzitás mértékét. Mit mondhatunk a leképezés konformitásáról?

$\boxed{146.}$ Mutassuk meg, hogy a $w = \frac{1}{z}$ leképezés a "z"-nek megfelelő pontot a "w"-nek megfelelő pontba az egységkörre való inverzió, majd a valós tengelyen való tükrözés utján viszi át. Konform-e a leképezés? Mit mondhatunk külön-külön az előbbi két lépés konformitásáról?

$\boxed{147.}$ Mibe viszi át a $w = \frac{1}{z}$ leképezés a "z" sik köreit és egyeneseit? Milyen görbe felel meg a "w" sikon az

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ hiperbolának?}$$

$*$ 148. Mutassuk meg, hogy a

$w = \frac{az + b}{cz + d}$ lineáris törtfüggvény, (ahol a, b, c és d komplex együtthatók és $ad-bc \neq 0$) egy lineáris egész, egy reciprok majd ismét egy lineáris egész függvény láncolataként állitható elő.

* 149. Mibe viszi át a lineáris törtfüggvény a "z" sík köreit és egyeneseit?
(Utmutatás: a "z" sík köreit és egyeneseit adjuk meg $f(z, \bar{z})=0$ alaku egyenletekkel, majd alkalmazzuk az inverz leképezést.)

A következő lineáris egész függvények a "z" sík megadott tartományait a "w" sík mely tartományaira képezik le?

* 150. $w = i(z+1)$ a $\mathrm{Re}(z) > 0$ tartományt.

* 151. $w = (1+i)z$ az $\mathrm{Im}(z) > 0$ tartományt.

* 152. $w = -(iz+1)$ a $|z| < 1$ tartományt.

153. $w = (i-1)z$ a $|z| > 1$ tartományt.

Határozzuk meg azokat a lineáris egész függvényeket amelyek az alábbi "z" sikbeli tartományokat a mellettük feltüntetett "w" sikbeli tartományokra képezik le?

$\boxed{154.}$ $|z| < 1$ - et $|w - 2(1+i)| < 3$-ra

* 155. $|z - i| > 2$-t $|w - 2i| > 1$-re

A "w" sík mely tartományaiba viszi át a $w = \frac{1}{z}$ leképezés a "z" síknak az alábbiakban adott tartományait?

$\boxed{156.}$ $0 < y < 1$; 157. $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$.

Határozzuk meg azokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyek az alábbiakban adott z_1, z_2, z_3 pontokat adott w_1, w_2, w_3 pontokba viszik át:

$\boxed{158.}$

$z_1 = 2$	pontot	$w_1 = 1$	pontba,
$z_2 = i$	"	$w_2 = i$	"
$z_3 = -2$	"	$w_3 = -i$	"

159.

$z_1 = -i$	pontot	$w_1 = -i$	pontba
$z_2 = 0$	"	$w_2 = i$	"
$z_3 = i$	"	$w_3 = i$	"

160. $z_1 = 0$ pontot $w_1 = -i$ pontba

$z_2 = 1$ " $w_2 = 0$ "

$z_3 = \infty$ " $w_3 = i$ "

161. $z_1 = \infty$ pontot $w_1 = 0$ pontba

$z_2 = i$ " $w_2 = i$ "

$z_3 = 0$ " $w_3 = \infty$ "

$\boxed{162.}$ Mibe viszi át a

$$w = i\,\frac{1 - z}{1 + z} \text{ leképezés az } x = 0,\ y = 0$$

egyeneseket, és az $x^2 + y^2 = 1$ kört?

* 163 Mutassuk meg, hogy a

$$w(z) = \frac{2z + i}{iz - 2}$$

lineáris törtfüggvény a "z" és "w" sikok origó középpontu egységsugaru köreit egymásra képezi le.

Határozzuk meg az alábbi leképezések helyben maradó (fix) pontjait:

164. $$w = \frac{z - 1}{z + 1}$$

165. $$w = \frac{6z - 9}{z}$$

* 166. Határozzuk meg mindazokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyek által létesitett leképezéseknek két helyben maradó (fix) pontja:

$$z_1 = +1 \quad \text{és} \quad z_2 = -1$$

*167. Határozzuk meg, hogy az alábbi lineáris törtfüggvénynyel adott leképezés a "z" siknak melyik tartományát felelteti meg az $\mathrm{Im}(w) > 0$ félsiknak?

$$w = \frac{z - c^2}{z + c} \qquad (c > 0)$$

$\boxed{168.}$ Mutassuk meg, hogy a

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad (\alpha \text{ valós, "a" komplex állandó és } |a| \neq 1)$$

alaku lineáris törtfüggvények által létesitett leképezések az egységkört önmagára képezik le.

* 169. Mutassuk meg, hogy a

$w(z) = \frac{1}{z + i}$ függvény az $y \geqq 0$ félsikot az

$u^2 + v^2 + v \leqq 0$ körtartományra képezi le.

$\boxed{170.}$ Milyen vonalakra képezi le a $w = z^2$ leképzés a "z" sik $y = \text{konst}$ és $x = \text{konst}$ egyeneseit a "w" sikon?

$\boxed{171.}$ Mutassuk meg, hogy a

$w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ függvénnyel adott leképezés

nem egy-egyértelmü. Milyen kapcsolat van a "z" sík azon pontjái között, amelyeknek a "w" sikon ugyanaz a pont felel meg? A "z" sik mely tartományaiban egy-egyértelmü a leképzés?

* 172. Vizsgáljuk meg, hogy az előbbi leképezés a "w" sikon milyen görbékre képezi le a "z" sik origóból kiinduló sugarainak az egységkörön kivüli és belüli részét? Milyen görbékbe viszi át a "z" sik origó középpontu köreit?

Vizsgáljuk a következő komplex függvényekkel adott leképezéseket:

$\boxed{173.}$ $w(z) = e^z$

$\boxed{174.}$ $w(z) = \sin z$

Mutassuk meg, hogy mind a két függvény periódusos; határozzuk meg a periodusukat és jelöljük ki a "z" sik azon tartományait, amelyek az egész "w" sikra képeződnek le. A "z" sik x = konst. és y = konst. egyeneseinek milyen görbék felelnek meg a "w" sikon? Vannak-e olyan helyek ahol a leképezés nem konform?

VII. Komplex függvények görbementi integrálja Cauchy-tétel

Számitsuk ki az alábbi improprius komplex paraméteres integrálokat, és adjuk meg, hogy ezek a komplex "p" paraméter mely tartományában konvergensek.

175. $$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt\ .$$

176. $$\int_0^\infty te^{-pt}dt\,.$$

177. $$\int_0^\infty e^{at}\,e^{-pt}\,dt.$$

178. $$\int_0^\infty \cos at.e^{-pt}\,dt$$

(t valós változó, a valós állandó)

Számitsuk ki a definició alapján az alábbi komplex függvények görbementi integrálját az "a" és "b" komplex számoknak megfelelő pontok között tetszőleges görbe mentén.

$\boxed{179.}$ $f(z) = 1$

$\boxed{180.}$ $f(z) = z$

$\boxed{181.}$ Számitsuk ki a következő görbemeneti integrált:

$$\oint_{(G)} \frac{dz}{z - z_o}$$

ahol a G görbe: $z = z_o + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

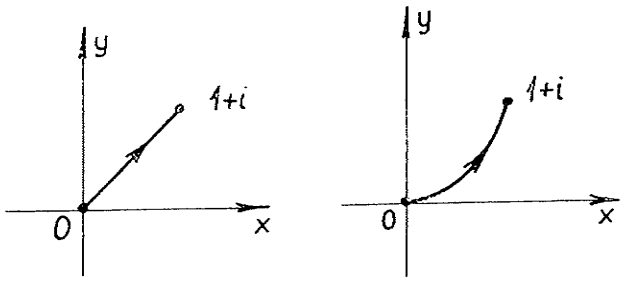
(z_o komplex, r valós állandó)

Határozzuk meg az alábbi függvények integrálját az adott görbék mentén:

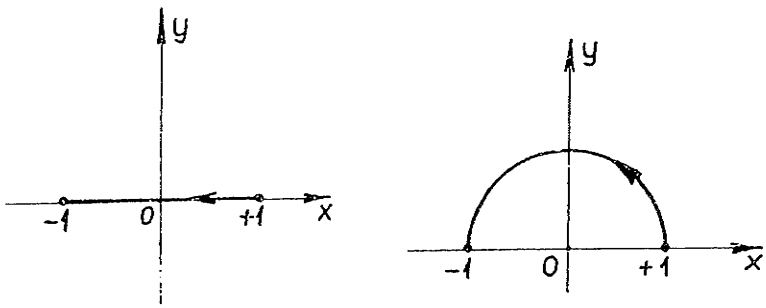
$\boxed{182.}$ $w(z)=z^2$ $G_1: z_1 = 0 \longrightarrow z_2 = 1 + i$, egyenes mentén.

$G_2: z_1 = 0 \rightarrow z_2 = 1 + i$, $y = x^2$ parabolaiv mentén.

(182.a., és b., ábra)



182.a-b ábra



183.a-b ábra

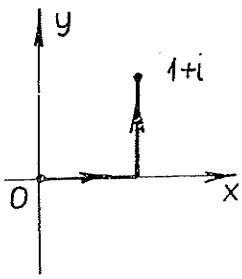
$\boxed{183.}$ $w(z)=z^2$ G_1: $z_1 = 1 \rightarrow z_2 = -1$ egyenes mentén.

G_2: $z_1 = 1 \rightarrow z_2 = -1$, $z(t) = e^{it}$ körivén.

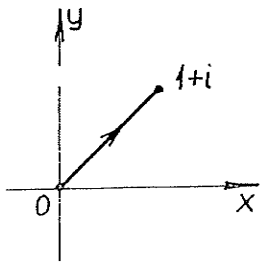
(183.a, és b. ábra)

* 184. $w(z)=\overline{z}$ $z_1 = 0 \rightarrow z_2 = 1 + i$ az alábbi ábrákon feltüntetett vonalak mentén

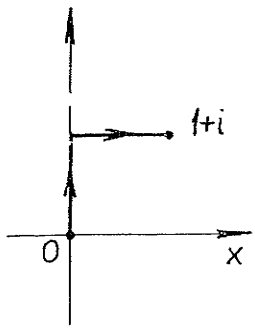
(183. a, b, c)



184.a ábra



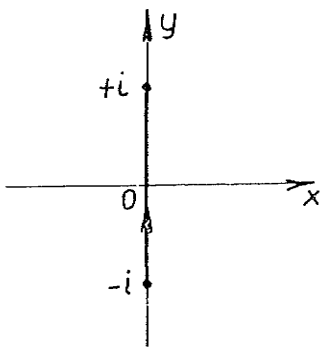
184.b ábra



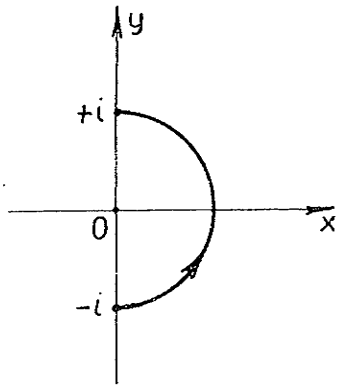
184.c ábra

$\boxed{185.}$ $w(z)=|z|$ $z_1 = -i \rightarrow z_2 = i$. az alábbi ábrákon feltüntetett vonalak mentén

(185.a, és b)



185.a ábra

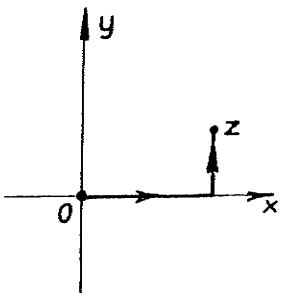


185.b ábra

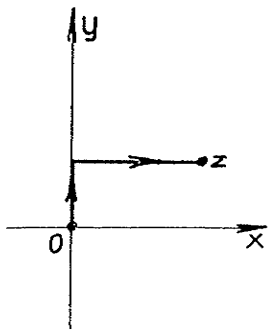
$\boxed{186.}$ Kiszámitandó $\oint\limits_{(G)} (z - z_o)^m dz$

ahol G: $z_o + r(\cos t + i \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, m egész

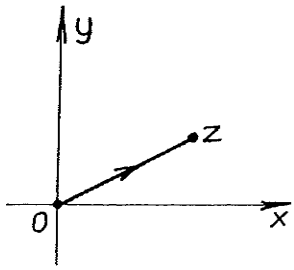
$\boxed{187.}$ Számitsuk ki $w(z)=3z^2$ függvény integrálját 0 és z komplex számoknak megfelelő pontok között az alábbi ábrákon feltüntett utak mentén. (187.a, b, c)



187.a ábra



187.b ábra



187.c ábra

Mutassuk meg, hogy az eredmény mindhárom esetben z^3. Mi ennek az oka?

A Cauchy formula alkalmazásával számitsuk ki a következő integrálokat az adott zárt görbék mentén:

$\boxed{188.}$ $\oint\limits_{(G)} \dfrac{e^{iz} \sin^n z}{z - \frac{\pi}{2}} dz$, G: $|z - \frac{\pi}{2}| = 2$

$\boxed{189.}$ $\oint\limits_{(G)} \dfrac{e^{z^2}}{z^2 - 1} dz$, G: $|z - \frac{1}{2}| = 1$

$\boxed{190.}$ $\oint\limits_{(G)} \dfrac{z^8 e^{\pi z}}{z^2 + 1} dz$, G: $|z - 1| = \frac{3}{2}$

Az integrálandó függvényeket bontsuk résztörtekre, majd a Cauchy-tétel és formula alkalmazásával integráljunk az adott zárt görbék mentén.

* 191. $\displaystyle\oint_{(G_k)} \frac{dz}{1+z^2}$

G_1: $|z-5| = 1$

G_2: $|z-i| = 1$

G_3: $|z+i| = 1$

G_4: $|z| = 2$

* 192. $\displaystyle\oint_{(G_k)} \frac{dz}{z(z^2-1)}$

G_1: $|z-4i| = 1$

G_2: $|z| = \frac{1}{2}$

G_3: $|z-1| = \frac{1}{2}$

G_4: $|z+1| = \frac{3}{4}$

G_5: $|z| = 2$

*193. $\displaystyle\oint_{(G)} \frac{dz}{z^4+1}$, $x^2+y^2 = 2x$ kör mentén.

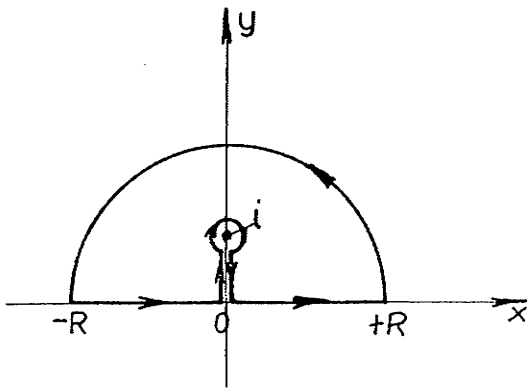
$\boxed{194.}$ Számitsuk ki a Cauchy-tétel segitségével a következő valós improprius integrált:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$$

Utmutatás: Kiszámitjuk

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} \quad \text{komplex}$$

függvény integrálját az ábrán látható görbe mentén a feltüntetett irányitás értelmében.



194. ábra

Az "i" szinguláris helyet kirekesztő kis körhöz és onnan visszavezető párhuzamos egyenes szakaszok mentén vett integrálok az ellentétes irányitás és a végzendő határátmenet miatt kiesnek, maradnak tehát a következő utak:

1. A valós tengely mentén -R-től +R-ig.
2. Az R sugaru felső félkör mentén.
3. A szinguláris helyet kizáró ϱ sugaru kör mentén. (194. ábra)

$R \to \infty$ és $\varrho \to 0$ határátmenetek után a Cauchy-tétel egy egyenletet ad a kérdéses ismeretlen integrál meghatározására.

VIII. Komplex hatványsorok, sorfejtések. Reziduum

Mely tartományban konvergensek a következő hatványsorok:

* 195. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n},$$

*196. $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iz-1}{2+i}\right)^n,$$

Határozzuk meg a sorok összegét is.

Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergencia körének sugarát

$\boxed{197.}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

$\boxed{198.}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad p \in R \text{ adott}$$

199. $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$$

200. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n z^n$$

Hogyan viselkednek a konvergenciakör kerületén a következő hatványsorok:

*201. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

*202. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{np}}{n}, \quad p \in R \text{ adott}$$

Fejtsük Taylor sorba az alábbi függvényeket a megadott hely környezetében:

*203. $f(z) = \frac{1}{z}$, $a = 1$;

*204. $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $a = -1$;

*205. $f(z) = e^z$, $a = 1$;

*206. $f(z) = \sin^2 z$, $a = 0$.

$\boxed{207.}$ Állitsuk elő az

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$ függvénynek az

az alábbi tartományokra érvényes Laurent-sorát:

a) $|z| < 1$;

b) $1 < |z| < 2$;

c) $2 < |z|$.

Utmutatás: Bontsuk fel a szóban forgó függvényt résztörtekre és használjuk fel a geometriai sor összegképletét.

Fejtsük Laurent-sorba az alábbi függvényeket a megadott hely környezetében:

$\boxed{208.}$ $$f(z) = \frac{z^2 + z + 3}{z^2 - 1}, \quad a = 1.$$

Utmutatás: $z - 1 = \zeta$ jelöléssel vezessük be ζ -t változónak, majd a polinomok osztási eljárásával állitsuk elő a kivánt sort.

* 209. $$f(z) = \frac{e^z}{z^k}, \quad a = 0,$$ "k" pozitiv egész szám.

* 210. $$f(z) = \frac{2z}{(z+1)^2(z-4)}, \quad a = -1$$ (Résztörtekre való felbontással)

Határozzuk meg az alábbi függvények reziduumát a megjelölt pólusra vonatkozólag.

$\boxed{211.}$ $$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1}, \quad a = i;$$

$\boxed{212.}$ $$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}, \quad a = \pi$$

* 213. $$f(z) = \frac{z^3}{(z \quad 1)^2} \quad a = 1.$$

Számitsuk ki a következő zárt görbementi integrálokat a görbe által körülzárt izolált szinguláris pontokra vonatkozó reziduumok meghatározása utján.

* 214. $$\oint_{(G)} \frac{e^z - 1}{z^3}\, dz, \quad G: |z| = 2$$

* 215. $$\oint_{(G)} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1}\, dz \quad G: |z| = 2$$

216. Számitsuk ki a reziduum tétel segitségével a következő valós improprius integrált:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1}\, dx$$

(Lásd a 194. feladatot, ahol ugyanezt az integrált a Cauchy-tétel felhasználásával kellett kiszámitani.)

217* Döntse el az alábbi kétdimenziós vektor-vektor függvényről, hogy van-e komplex potenciálja; ha van, akkor határozza meg azt.

a) $\underline{p}(\underline{r}) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,\underline{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,\underline{j}$

b) $\underline{p}(\underline{r}) = \frac{\underline{i} + \underline{j}}{x + y}$

218. A valós értékü k paraméter mely értéke mellett van a $\underline{p}(\underline{r}) = \cos x \operatorname{ch} ky\, \underline{i} + \sin x \operatorname{sh} k y\, \underline{j}$ vektor-vektor függvénynek komplex potenciálja? Irja fel az ezen k-hoz tartozó potenciálfüggvényt.

MEGOLDÁSOK

I.

1. $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\qquad v(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

2. $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2y+1}$ $\qquad v(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2+2y+1}$

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(\bar{z}-i)}{(z+i)(\bar{z}-i)} = \frac{z\bar{z}-i(z+\bar{z})-1}{z\bar{z}-i(z-\bar{z})+1} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2ix-1}{x^2+y^2+2y+1} \text{ stb.}$$

3. $u(x,y) = x + \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\qquad v(x,y) = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

4. $u(x,y) = e^x \cos y$, $\qquad v(x,y) = e^x \sin y$.

5. $$u(x,y) = e^x (x \cos y - y \sin y),$$

$$v(x,y) = e^x (y \cos y + x \sin y).$$

6. $u(x,y) = \dfrac{1}{2} \ln (x^2+y^2)$, $\qquad v(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

$$\ln z = \ln re^{i\varphi} = \ln r + i\varphi, \qquad r = |z|,\ \varphi = \operatorname{arc} z.$$

7. $u(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$, $\qquad v(x,y) = -\sin x \operatorname{sh} y$.

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{y}\right)$$

Alkalmazva az Euler formulát és rendezve:

$$\frac{1}{2}\left[(e^{y}+e^{-y})\cos x - i\,(e^{y}-e^{-y})\sin x\right] =$$

$$= \operatorname{ch} y \cos x - i \operatorname{sh} y \sin x.$$

8. $u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y,$ $\qquad v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y.$

(Az előbbihez hasonlóan)

9. $u(x,y) = \cos y \operatorname{ch} x,$ $\qquad v(x,y) = \sin y \operatorname{sh} x.$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\,(e^{x+iy}+e^{-x-iy}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x}(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(e^{x}+e^{-x})\cos y + i\,(e^{x}-e^{-x})\sin y\right] \text{ stb.}$$

10. $u(x,y) = \cos y \operatorname{sh} x,$ $\qquad v(x,y) = \sin y \operatorname{ch} x.$

(Az előbbihez hasonlóan)

11. $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\qquad v(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

12. $u(x,y) = \dfrac{2x}{x^2-y^2}$ $\qquad v(x,y) = \dfrac{2y}{x^2-y^2}$

13. $w(z,\bar{z}) = \dfrac{4z}{z^2+\bar{z}^2}$ $\qquad$ 14. $w(z,\bar{z}) = \dfrac{z}{\bar{z}}$

A 13. és 14. feladat megoldásánál alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

15. $$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin n\frac{x}{2} \cdot \sin (n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

16. $$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin n\frac{x}{2} \cdot \cos (n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Utmutatás a 15. és 16. feladat megoldásához: az Euler formula értelmében

$$\cos kx + i \sin kx = e^{ikx}$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$e^{i\frac{x}{2}}$ = "a" jelölést bevezetve

$$s = a^2 \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} = a^2 \frac{a^n(a^n - a^{-n})}{a(a - a^{-1})} = a^{n+1} \frac{a^n - a^{-n}}{a - a^{-1}}$$

$$a - a^{-1} = e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} = 2 i \sin\frac{x}{2}$$

$$a^n - a^{-n} = e^{in\frac{x}{2}} - e^{-in\frac{x}{2}} = 2 i \sin n\frac{x}{2}$$

$$a^{n+1} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}} = \cos (n+1)\frac{x}{2} + i \sin (n+1)\frac{x}{2}$$

Tehát $$s = \left[\cos (n+1)\frac{x}{2} + i \sin (n+1)\frac{x}{2}\right] \frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

ahonnan a valós és képzetes rész szétválasztása utján nyerjük a kivánt összegképleteket.

17. $$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1 - r\cos\varphi}{1 + r^2 - r\cos\varphi}$$

18. $$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}$$

Utmutatás a 17. és 18. feladat megoldásához

$$r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi = r^n e^{in\varphi} \qquad r < 1$$

Kiszámitjuk $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\varphi}$ konvergens végtelen mértani sor összegét, majd az összeg valós és képzetes részét szétválasztva kapjuk a kivánt összegképleteket.

19. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n!} = e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \qquad \text{legyen } z = e^{i\varphi}$$

$$\text{ekkor:} \quad e^{e^{i\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n!}$$

mindkét oldalt felbontva valós és képzetes rész összegére:

$$e^{\cos\varphi + i\sin\varphi} = e^{\cos\varphi} \cdot e^{i\sin\varphi} = e^{\cos\varphi}\left[\cos(\sin\varphi) + i\sin(\sin\varphi)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{n!}$$

A valós részek egybevetése utján kapjuk a kivánt összegképletet.

20. Használjuk fel a 8. feladatban kapott végeredményt.

$$|\sin(x+iy)|^2 = u^2 + v^2; \text{ stb.}$$

21. $$-i\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\vartheta}{2}, \text{ megoldás:}$$

$$\frac{e^{i\varphi}+e^{i\vartheta}}{e^{i\varphi}-e^{i\vartheta}} = \frac{(e^{i\varphi}+e^{i\vartheta})(e^{-i\varphi}-e^{-i\vartheta})}{(e^{i\varphi}-e^{i\vartheta})(e^{-i\varphi}-e^{-i\vartheta})} =$$

$$= \frac{e^{i(\vartheta-\varphi)}-e^{-i(\vartheta-\varphi)}}{2-\left[e^{i(\vartheta-\varphi)}+e^{-i(\vartheta-\varphi)}\right]} = \frac{2i\sin(\vartheta-\varphi)}{2-2\cos(\vartheta-\varphi)} =$$

$$= i\,\frac{\sin(\varphi-\vartheta)}{\cos(\varphi-\vartheta)-1} = i\,\frac{2\cdot\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}-1} =$$

$$= -i\,\frac{2\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\vartheta}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}} = -i\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\vartheta}{2}$$

II.

22. Origó középpontu, 2 egység sugaru zárt körtartomány.

23. Az előbbi zárt körtartomány komplementer tartománya.

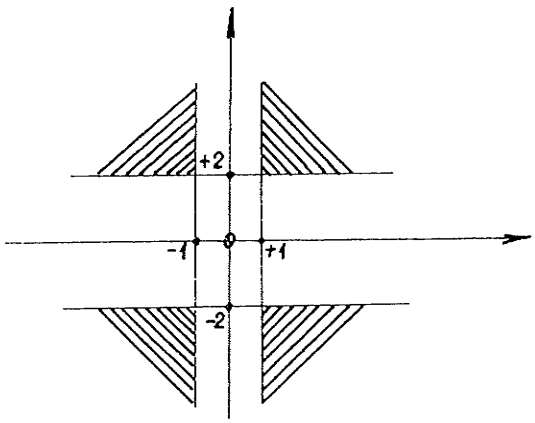
24. Az origó középpontu, 1 és 2 egység sugaru körök közti zárt körgyürü tartomány.

25. $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$, $z = \infty$ pont környezete; azaz a számsiknak tetszőlegesen nagy sugaru origó középpontu zárt körtartományon kivül eső része.

26. $|z - 1| < 1$, $z_0 = 1$ középpontu egységsugaru kör belseje.

27. $|z - (i - 1)| < 2$, $z_0 = i - 1$ középpontu két egységnyi sugaru kör belseje.

28. (28. ábra) A határoló egyenesek nem tartoznak a megoldást jelentő bevonalkázott sikrészekhez.



28. ábra

29. Az $y^2 = 1 - 2x$ parabola belseje a határvonallal együtt.

30. $x \geq 0$, a jobb oldali félsik az y tengelyt is beleértve.

31. $(x-3)^2 + y^2 > 8$; a számsik $z_0 = 3$ középpontu $2\sqrt{2}$ sugaru körön kivül eső része a határvonal nélkül.

32. $x^2 - y^2 = 0$; $y = x$, $y = -x$ egyenespár

33. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola;

34. $y^2 - x^2 = 1$ hiperbola.

35. $x = 0$, $y = 0$,

36. $xy = \frac{1}{2}$

37. $xy = -\frac{1}{2}$

38. $z_1 = 1$ és $z_2 = -i$ pontoktól egyenlő távolságra eső pontok mértani helye, $y = -x$ egyenes.

39. Azon pontok mértani helye, amelyeknek a $z_1 = 1$ és $z_2 = -1$ fix pontoktól való távolság-összege 4 egység. (Ellipszis)

40. $|z - 1||z + 1| = \alpha$. Azon pontok mértani helye, amelyekre nézve a $z_1 = +1$ és $z_2 = -1$ fix pontoktól való távolságok szorzata állandó. (A lemniszkáta három esete).

41. $z + \bar{z} = 2c$;

42. $z - \bar{z} = 2ci$;

43. $z - \bar{z} - i\,(z + \bar{z}) = 0$;

44. $z - \bar{z} + i\,(z + \bar{z}) = 0$;

45. $z - \bar{z} + i\,(z + \bar{z}) = 4$;

46. $b(z - \bar{z}) + \left[a\,(z + \bar{z}) + 2c\right] i = 0$.

A 41-46. feladatok megoldásánál az $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ és $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ helyettesitést alkalmaztuk.

47. $$(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z + (z_1 + z_2)\bar{z} + (z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1) = 0$$

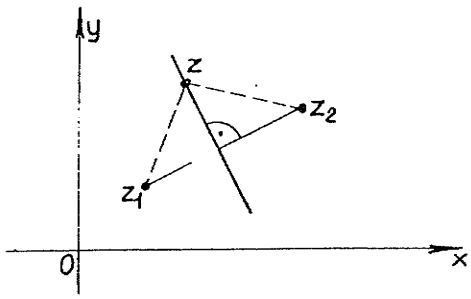
Utmutatás: azon pontok mértani helye, amelyek az adott z_1 és z_2 pontoktól egyenlő távol vannak.
(47. ábra)

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

vagy

$$(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2)$$

innen rendezéssel kapjuk a fenti eredményt.



47. ábra

48. $z\bar{z} = r^2$

49. $$z\bar{z} - \bar{z}_o z - z_o\bar{z} + z_o\bar{z}_o = r^2$$

Utmutatás: $|z - z_o| = r$ vagy $(z - z_o)(\bar{z} - \bar{z}_o) = r^2$ stb.

50. $2z\bar{z} + (a - bi)z + (a + bi)\bar{z} + 2c = 0$

Utmutatás: $x^2 + y^2 = z\bar{z}$, $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

helyettesités után megfelelő rendezéssel.

51. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, ellipszis.

52. $x = (a + b) \cos t$, $y = (a - b) \sin t$, ellipszis.

53. $x = e^{at} \cos bt$, $y = e^{at} \sin bt$ vagy $r = e^{at}$, $\varphi = bt$

és igy $r = e^{\frac{a}{b}\varphi}$, log spirális.

54. $x = at + b \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$

Közönséges, nyujtott, vagy hurkolt ciklois az $a = b$, $a < b$, $a > b$ eseteknek megfelelően.

55. $x = t$, $y = \frac{1}{t}$; $t \neq 0$ vagy $xy = 1$.

56. $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $y = -\frac{2t}{1 + t^2}$;

ha $t = \infty$ akkor $x = -1$, $y = 0$.

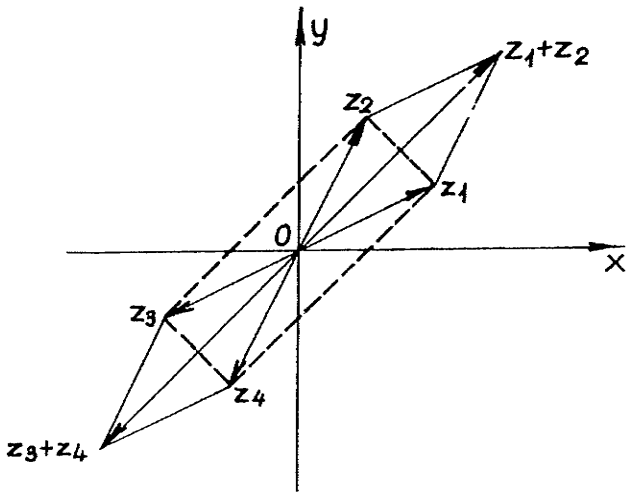
vagy a "t" paramétert kiküszöbölve: $x^2 + y^2 = 1$.

57. A z_1, z_2, z_3 komplex számoknak megfelelő vektorokat irány és nagyság szerint egymás után felmérve szabályos vektorháromszöget kapunk. Innen látható, hogy az egymást közvetlenül követő vektorok arkuszának különbsége rendre:

$$\frac{2\pi}{3}.$$

58. $z_1 + z_2 = -(z_3 + z_4)$ egyenlőségből látható, hogy a 0, z_1, z_2, $z_1 + z_2$ és a 0, z_3, z_4, $z_3 + z_4$ csucspontokkal rendelkező két rombusz

egymásnak az origóra vonatkozó tükörképe. A z_1, z_2, z_3, z_4 helyvektorok végpontjai tehát megfelelnek a feladat követelményeinek. (58. ábra)



58. ábra

III.

59. Nem. Az $y^2 = 1-2x$ parabola belseje a határvonallal együtt.

60. $0, \frac{1}{m+1}, \frac{i}{n+1}$.

61. A számsik minden helye. A racionális számok halmaza megszámlálható, azaz elemei sorozatba foglalhatók; legyen ez a sorozat: r_1, r_2, r_3, ... r_n, ...

A következő kétszeresen végtelen schéma a szóban forgó halmaz minden számát tartalmazza:

$$
\begin{array}{llll}
r_1 + ir_1, & r_1 + ir_2, & \ldots\ldots & r_1 + ir_n \ldots\ldots \\
r_2 + ir_1, & r_2 + ir_2, & \ldots\ldots & r_2 + ir_n \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
r_n + ir_1, & r_n + ir_2, & \ldots\ldots & r_n + ir_n \ldots\ldots
\end{array}
$$

Azon elemek, amelyeknél az indexek összege állandó, a fenti schéma egy-egy átiójában helyezkednek el; a p-edik átló elemei:

$$r_p + ir_1, \qquad r_{p-1} + ir_2, \quad \ldots, \qquad r_1 + ir_p.$$

A schema számai tehát a $p = 1, 2, 3, \ldots$ átlók szerint sorozatba foglalhatók.
(A megszámlálható halmaz fogalmát lásd a "Matematika alapjai" cimü I. kötetben)

62. Nem, mert az összes lehetséges arkuszok fő-értékei a valós számok $[0, 2\pi)$ alul zárt, felül nyitott intervallumának számai. A valós számok intervallumai pedig nem megszámlálható halmazok.

63. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n - i}{n + 1} = 1;$ $\qquad n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$, ugyanis:

$$\left| 1 - \frac{n - i}{n + 1} \right| = \left| \frac{1 + i}{n + 1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n + 1} < \varepsilon \quad \text{stb.}$$

64. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 2ni}{n + i} = 2i;$ $\qquad n > \sqrt{\frac{9}{\varepsilon^2} - 1}$ ugyanis:

$$\left| 2i - \frac{1 + 2ni}{n + i} \right| = \frac{3}{\sqrt{n^2 + 1}} < \varepsilon \quad \text{stb.}$$

65. Nem korlátos, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2^n} = \infty$

66. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{i^n}{n}\right) = 1$

67. Ha $n = 4k$, akkor $\lim\limits_{k \to \infty} i^{4k} \left(1 + \frac{1}{4k}\right) = 1$

Ha $n = 4k + 1$ " $\lim\limits_{k \to \infty} i^{4k+1} \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right) = i$

ha $n = 4k + 2$ " $\lim\limits_{k \to \infty} i^{4k+2} \left(1 + \frac{1}{4k+2}\right) = -1$

ha $n = 4k + 3$ akkor $\lim\limits_{k \to \infty} i^{4k+3} \left(1 + \frac{1}{4k+3}\right) = -i$

A szóban forgó sorozat korlátos, sűrűsödési helyei: 1, i, -1, -i, és igy nem konvergens.

68. Konvergens, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 0$ és igy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$

69. Konvergens, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{3^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

és igy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$

70. Konvergens, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = 0$ és igy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$

71. Nem korlátos, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{5})^n = \infty$

72. Konvergens, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 0$ és igy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$

73. Konvergens, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(z_0 + \frac{1}{n} e^{in\varphi}\right) = z_0$

74. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\frac{\pi}{n}} = 1$

75. $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = 2$, de $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{arc} z_n$ nem létezik.

A sorozat korlátos, de nem konvergens.

76. $r_n = \left[\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2}\right]^n$

$$\lim_{n \to \infty} \ln r_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \cdot \ln \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)$$

$\frac{0}{0}$ alakra hozva és a l'Hospital szabályt alkalmazva:

$$\lim_{n \to \infty} \ln r_n = x \quad \text{és igy} \quad \lim_{n \to \infty} r_n = e^x$$

Az előbbihez hasonló eljárással:

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \lim_{n \to \infty} n \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = y$$

$$\text{és igy} \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

77. $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + i \frac{\pi}{2n}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

78. $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + i \frac{\pi}{n}\right)^n = e^{i\pi} = -1$$

79. Mértani sor; hányados: $q = \frac{i}{2}$, $|q| = \frac{1}{2}$ és igy a sor konvergens

$$\text{Összeg:} \quad \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{2}{2 - i}$$

80. Mértani sor; hányados: $q = \frac{1}{2}(1 + i)$, $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és igy a sor konvergens

$$\text{Összeg:} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(1+i)} = \frac{2}{1 - i}$$

81. A sor abszolut konvergens, mert a tagok abszolut értékeiből képezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{sor konvergens.}$$

82. $|s_n|$ korlátosságának igazolása:

$$|s_n| = |e^i + e^{2i} + \ldots + e^{ni}| = \left| e^i \frac{e^{in} - 1}{e^i - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^i - 1|} = K$$

Az utmutatásban idézett tétel igazolása:
A szóban forgó sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele:

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| \sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v \right| < \varepsilon \quad \text{hacsak } n > N(\varepsilon)$$

($p > 1$, ha $p = 1$, akkor a feltétel csak szükséges.)
Az Abel féle parciális összegezés értelmében:

$$\sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v = \sum_{v=n+1}^{n+p} s_v (b_v - b_{v+1}) - (s_n b_{n+1} - s_{n+p} b_{n+p+1})$$

$$|s_n| < K \text{ és } b_1, > b_2 > \ldots > b_n > \ldots \to 0 \text{ miatt}$$

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| < K \left| \sum_{v=n+1}^{n+p} (b_v - b_{v+1}) - b_{n+1} + b_{n+p+1} \right| < \varepsilon$$

hacsak $n > N(\varepsilon)$, ami bizonyitandó volt.

Megjegyzés: Az előbbiek alapján nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} \quad \text{sor is konvergens, ha } \varphi \neq 2k\pi, \ (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

Ha egy komplex tagokból álló sor konvergens, akkor külön a valós részek és külön a képzetes részek sora is konvergens, és igy a szóban forgó komplex tagu sor konvergenciájából a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} \quad (\varphi \neq 2k\pi, \quad k = 0, 1, \ldots)$$

valós tagu Fourier sorok konvergenciája is következik.

IV.

83. $$\lim_{t \to 0} \left(t + i\frac{\sin t}{t}\right) = i;$$

z (0) = 1 értelmezéssel a függvény t = 0 helyen is folytonos függvénnyé kiterjeszthető.

84. Sem jobb, sem bal oldali határérték nem létezik, mert $\sin \frac{1}{t}$ függvény a $t_o = 0$ hely környezetében -1 és +1 között végtelen sokszor oszcillál.

85. Létezik jobb és bal oldali határérték, de ezek nem egyenlők egymással:

$$\lim_{t \to 2+0} z(t) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{t \to 2-0} z(t) = \frac{1}{2}$$

A függvénynek tehát $t_o = 2$ helyen nincs határértéke.

86. $$\lim_{t \to i} \frac{it}{t^2 + 1} = -\infty$$

87. $3a^2$; $(z - a) \neq 0$ egyszerüsitéssel.

88. ∞

89. $$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{i(z^4 - 1)} = \lim_{z \to i} \frac{1}{i(z^2 - 1)} = \frac{i}{2}$$

90. $$\lim_{z \to i} \frac{2z^3 + z}{i(z^2 + 1)} = \lim_{z \to i} \frac{2z}{i} = 2$$

(A 87. 89. 90. feladatban szereplő függvények a szóban forgó helyen megfelelő értelmezéssel folytonossá tehetők).

91. Határérték nem létezik, mert nem független attól, hogy a számsikon milyen irányban közeledünk az origóhoz.

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z}}\right) = \frac{1}{2i}\,\frac{4xyi}{x^2 + y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Polárkoordinátákat bevezetve:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi \quad \text{és igy} \quad f(z) = \sin 2\varphi$$

Tehát $\lim\limits_{r \to 0} f(z) = \sin 2\varphi\,, \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$

92. $f_1(z)$ az egész számsikon folytonos.

93. $g_1(z)$ hasonlóképpen.

94. $f_2(z)$ minden $z \neq 0$ helyen folytonos.
Polárkoordináták bevezetésével $f_2(z) \doteq \cos\varphi\,, \quad \varphi = \arg z,$ tehát az origóban nincs határérték.

95. Az előbbihez hasonlóan: $g_2(z) = \sin\varphi\,, \quad \varphi = \arg z$

96. Polárkoordináták bevezetésével ugyanis $f_3(z) = r\cos^2\varphi$ és igy

$$\lim_{r \to 0} f_3(z) = 0, \qquad r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

$f_3(0) = 0$ értelmezéssel az origóban is folytonossá tehető.

97. Az előbbihez hasonlóan: $g_3(z) = r\sin^2\varphi$

98. $$\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{|z|}} = \infty$$

99. $$\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} \infty \text{ ha } z \text{ a jobb oldali félsikból} \to 0 \\ 0 \text{ ha } z \text{ a bal oldali félsikból} \to 0 \end{cases}$$

100. $$\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{y}} = \begin{cases} \infty \text{ ha } z \text{ a felső félsikból} \longrightarrow 0 \\ 0 \text{ ha } z \text{ az alsó félsikból} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

101. A függvény az origóban és minden olyan z helyen, ahol $|z|$ irracionális, folytonos; minden más helyen pedig szakadásos.

102. A függvény az origó kivételével mindenütt folytonos.

103. $z^n - z_o^n = (z - z_o)(z^{n-1} + z^{n-2} z_o + \ldots + z_o^{n-1})$ tehát

$$\left|z^n - z_o^n\right| \leqq \left|z - z_o\right| (r^{n-1} + r^{n-2} r_o + \ldots + r_o^{n-1})$$

ahol $r = |z|$ és $r_o = |z_o|$

A z_o pont δ sugaru környezetében $|z| < r_o + \delta$, tehát:

$$\left|z^n - z_o^n\right| < \left|z - z_o\right| \left[(r_o + \delta)^{n-1} + (r_o + \delta)^{n-2} r_o + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + r_o^{n-1}\right] < n\delta\,(r_o + \delta)^{n-1} < \varepsilon \text{ ha } \delta \text{ elegendő kicsi.}$$

V.

104. $$\left[\frac{dz}{dt}\right]_{t=1} = \lim_{t \to 1} \frac{\frac{i+t}{i-t} - \frac{i+1}{i-1}}{t-1} = \frac{2i}{(i-1)^2}$$

105. $$\left[\frac{dz}{dt}\right]_{t=t_o} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{(a+ib)(t_o + \Delta t)} - e^{(a+ib)t_o}}{\Delta t} =$$

$$= (a+ib) e^{(a+ib)t_o} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{(a+ib)\Delta t} - 1}{(a+ib)\Delta t} = (a+ib) \cdot e^{(a+ib)t_o}$$

ugyanis $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, ahol $h = (a + ib)\,\Delta t$.

106. Érintővektor: $i\,(ae^{it_o} - be^{-it_o})$

Normálvektor $(ae^{it_o} - be^{-it_o})$

107. Érintővektor: $(a+bi)\,e^{(a+bi)\,t_o}$

Normálvektor: $(b - ai)\,e^{(a+bi)\,t_o}$

(Magyarázat 106. és 107. feladathoz: az érintővektor $\dot{z}(t)$; a normálvektor $\mp i\dot{z}\,(t)$.

A 107-ben szereplő log. spirális érintővektorának és helyvektorának hajlásszöge δ állandó.

Ugyanis $\delta = \arc \frac{\dot{z}\,(t)}{z\,(t)} = \arc\,(a + bi) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \text{konst.}$

Utmutatás 108-113. feladatokhoz:

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ határérték létezését kell vizsgálni.

108. $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{3z^2\,\Delta z + 3z\Delta z^2}{\Delta z} =$

$= \lim\limits_{\Delta z \to 0} (3z^2 + 3z\Delta z) = 3z^2$. Differenciálható.

109. 110. Differenciálhatók.

111. $$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(\bar{z} + \Delta \bar{z})^2 - \bar{z}^2}{\Delta z} = \frac{2\bar{z}\,\Delta \bar{z} + \Delta \bar{z}^2}{\Delta z}$$

$\Delta z = \Delta r . e^{i\varphi}$; $\Delta \bar{z} = \Delta r e^{-i\varphi}$ helyettesitéssel

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = (2\bar{z} + \Delta \bar{z})\,.\,e^{-2i\varphi}$$

Nem differenciálható, mert a határérték függ a határátmenet módjától.

$$(2\bar{z}e^{-2i\varphi}).$$

112. $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(r + \Delta r) - zr}{\Delta z} = \frac{r\Delta z + z\Delta r + \Delta z \Delta r}{\Delta z} =$

$\Delta z = \Delta r e^{i\varphi}$ helyettesitéssel: $\frac{\Delta w}{\Delta z} = r + \Delta r + z e^{-i\varphi}$

Az előbbihez hasonló okból nem differenciálható.

113. Nem differenciálható.

114. $w = u + iv$, ahol $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$

A Cauchy- Riemann féle parciális differenciálegyenletek teljesülnek, tehát differenciálható.

115. 116. Differenciálhatók.

117. $w = u + iv$, ahol $u = x^2 - y^2$, $v = -2xy$

A C.-R. féle feltételek nem teljesülnek, tehát nem differenciálható.

118. 119. Nem differenciálhatók.

120. Polárkoordinátákat bevezetve:

$$f(z) = \frac{1}{2} r \sin 2\varphi . \quad \text{tehát} \lim_{z \to 0} f(z) = 0 \text{ és } f(0) = 0$$

tehát a függvény az origóban folytonos.

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad \text{és} \quad u(0, y) = v(0, y) = 0,$$

tehát az origóban: $u'_x = v'_x = 0$ és $u'_y = v'_y = 0$, és igy itt teljesülnek a C.-R. feltételek, differenciálhányados azonban nem létezik, ugyanis:

$$\left[\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]_{z=0} = \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x + i\Delta y} \cdot \frac{\Delta x \Delta y + i \Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Polárkoordinátákat bevezetve:

$$\left[\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]_{z=0} = \frac{1}{\Delta r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot \frac{(1+i)\,\Delta r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\Delta r} =$$

$$= \frac{(1+i)\sin 2\varphi}{2e^{i\varphi}}$$

A differenciálhányados φ függvénye, tehát a határértéke függ a határátmenet módjától.

A jelenség oka az, hogy u'_x, u'_y, v'_x, v'_y az origóban nem folytonosak; ez a szóban forgó deriváltak polárkoordinátás előállításából látható be:

$$u'_x = v'_x = \sin^3\varphi \quad \text{és} \quad u'_y = v'_y = \cos^3\varphi$$

121. Derékszögü koordináták esetén $\alpha = 0$, $\partial s = \partial x$, $\partial n = \partial y$, és az általános egyenletek átmennek az eredeti Cauchy-Riemann féle egyenletekbe.

122. Polárkoordináták esetén $\alpha = \varphi$, $\partial s = \partial r$, $\partial n = r\,\partial\varphi$, és igy a C.-R. feltételek:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

123. $$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho\frac{\partial \vartheta}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = -\varrho\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad \text{ugyanis}$$

$$\varrho(x,y)e^{i\vartheta(x,y)} = \varrho(x,y)\cos\vartheta(x,y) + i\,\varrho(x,y)\sin\vartheta(x,y)$$

alkalmazva az eredeti C.-R. feltételek egyikét:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varrho\cos\vartheta) = \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\sin\vartheta)$$

a deriválásokat végrehajtva

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x}\cos\vartheta - \varrho\sin\vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \varrho}{\partial y}\cdot\sin\vartheta + \varrho\cos\vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$$

a megfelelő tagok egybevetése utján nyerjük a közölt eredményt.

124. $\frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{\varrho}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = - \varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial r}$ ugyanis

$$\varrho(r, \varphi) . e^{i\vartheta(r, \varphi)} = \varrho(r, \varphi) \cos \vartheta(r, \varphi) + i \varrho(r, \varphi) \sin \vartheta(r, \varphi)$$

a közölt eredményt a polárkoordinátás megadás esetére vonatkozó C.-R. feltételek alkalmazásával nyerjük.

125. A függvény analitikus. Ugyanis:

$$u = r^2 \cos 2\varphi, \qquad v = r^2 \sin 2\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2 r \cos 2\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = - 2 r^2 \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2 r \sin 2\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 2 r^2 \cos 2\varphi$$

a deriváltakból látható, hogy a C.-R. feltételek teljesülnek.

126. A függvény az origó kivételével analitikus.

127. A függvény analitikus.

128. A függvény nem analitikus. Ugyanis:

$$u = \frac{r}{2} \cos 2\varphi \qquad v = \frac{r}{2} \sin 2\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = - r \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi. \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = r \cos 2\varphi.$$

a deriváltakból látható, hogy a C.-R. feltételek nem teljesülnek.

129. Ha $\varrho \cdot e^{i\vartheta}$ analitikus, akkor

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = -\varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

A kérdéses függvényeknél az eredeti C.-R. feltételek teljesülését kell vizsgálni. Ezek

$$\varrho + i\vartheta \quad \text{esetén:} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

$$\ln \varrho + i\vartheta \quad \text{esetén:} \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

Látható, hogy az $\ln \varrho + i\vartheta$ függvényre vonatkozó feltételek azonosak a $\varrho e^{i\vartheta}$ függvényre vonatkozó feltételekkel.

Ha tehát $\varrho e^{i\vartheta}$ analitikus, akkor $\ln \varrho + i\vartheta$ is az, de ekkor $\varrho + i\vartheta$ nem lehet analitikus.

Utmutatás a 130-137. feladatok megoldásához:

Mindenek előtt azt kell megvizsgálni, hogy az adott u illetve v kétváltozós valós függvények harmonikusak-e, azaz teljesülnek-e a $\Delta u = 0$, illetve $\Delta v = 0$ feltételek, ahol

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{az un. Laplace féle operátor.}$$

A szóban forgó függvények harmonikusak, mert mindegyikre teljesül az előbb említett feltétel.

Pl.: 134. feladatnál:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ch} x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{sh} x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sh} x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\operatorname{sh} x \sin y$$

Tehát:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Harmonikus függvényhez harmonikus társat vonalintegrál segitségével a következő módon kereshetünk:

Ha u az adott harmonikus függvény, és az ismeretlen v harmonikus társ teljes differenciálja:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

akkor v a C.-R. feltételek figyelembevételével meghatározható:

$$v = \int_{(L)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right) + c.$$

ahol L egy rögzitett $(x_0 y_0)$ pontból a változó (x, y) pontig futó tetszőleges görbe, célszerü a koordináta tengelyekkel párhuzamos szakaszokból álló törtvonalat választani.

(Megjegyzés: Az ismeretlen harmonikus társat vonalintegrál helyett az un. részlet-kvadraturával is meg lehet határozni.)

A 134. feladat folytatása:

$$v = \int_{(L)} -\operatorname{sh} x \cos y\,dx + \operatorname{ch} x \sin y\,dy =$$

$$= \int_0^x -\operatorname{sh} x\,dx + \int_0^y \operatorname{ch} x \sin y\,dy = \Big[-\operatorname{ch} x\Big]_0^x +$$

$$+ \Big[-\operatorname{ch} x \cos y\Big]_0^y = -\operatorname{ch} x + 1 - \operatorname{ch} x \cos y + \operatorname{ch} x =$$

$$= -\operatorname{ch} x \cos y + 1$$

130. $v(x,y) = x^2 + 2y - y^2 + C$; 131. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + C$;

132. $v(x,y) = e^x \sin y + C$; 133. $u(x,y) = e^x \cos y + C$;

134. $v(x,y) = -\operatorname{ch} x \cos y + C$; 135. $u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y + C$;

136. $v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + C;$ 137. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + C$

138. $v(r,\varphi) = \varphi + C$ 139. $u(r,\varphi) = r^2 \cos 2\varphi + C$

A Laplace-féle operátor polárkoordinátás alakja:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

140. $a = b$ és $f(z) = e^{-az}$

$u'_x = -ae^{-ax} \cos by$ $u'_y = -be^{-ax} \sin by$

$u''_{xx} = a^2 e^{-ax} \cos by$ $u''_{yy} = -b^2 e^{-ax} \cos by$

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = (a^2 - b^2)\, e^{-ax} \cos by = 0, \quad \text{ha } a = b$$

$$f(z) = u + iv = e^{-ax} \cos ay - ie^{-ax} \sin ay =$$

$$= e^{-ax} (\cos ay - i \sin ay) = e^{-ax} \cdot e^{-iay} = e^{-az}$$

141. $\overline{\nabla} w = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

A C.-R. feltételeket figyelembe véve:

$$\overline{\nabla} w = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2f'(z)$$

$$\text{vagy } \overline{\nabla} w = 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\, f'(z)$$

142. A C.-R. feltételekből közvetlenül belátható.

143. A C.-R. feltételek

$f(z) = (u + iv)$ függvényre: $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$

$\bar{f} = (u - iv)$ függvényre: $u'_x = -v'_y$ és $u'_y = v'_x$

A megfelelő egyenlőségeket összeadva, majd kivonva egymásból:

$$u'_x = 0, \quad u'_y = 0 \qquad v'_x = 0, \quad v'_y = 0$$

Tehát $u = \text{konst.}$ és $v = \text{konst.}$

144. $u(x, y) = \text{konst.}$ egyenlet a potenciálfüggvény szintvonalait, $v(x, y) = \text{konst}$ egyenlet pedig az áramvonalakat határozza meg.

A szintvonalak normál vektorát $\underline{\text{grad}}\, u$, az áramvonalak normál vektorát pedig $\underline{\text{grad}}\, v$ adja.

$$\underline{\text{grad}}\, u \,.\, \underline{\text{grad}}\, v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

a C.-R. feltételek teljesülése miatt. A szintvonalak és áramvonalak tehát merőlegesen metszik egymást.

VI.

145. Legyen $a = ke^{i\alpha}$, w a következő függvények láncolataként állítható elő.

$$w_1 = kz \quad \text{(k-szoros nyujtás-zsugoritás)}$$

$$w_2 = w_1 e^{i\alpha} \quad (\alpha \text{ szöggel való elforgatás})$$

$$w = w_2 + b \quad \text{(b vektorral való eltolás)}$$

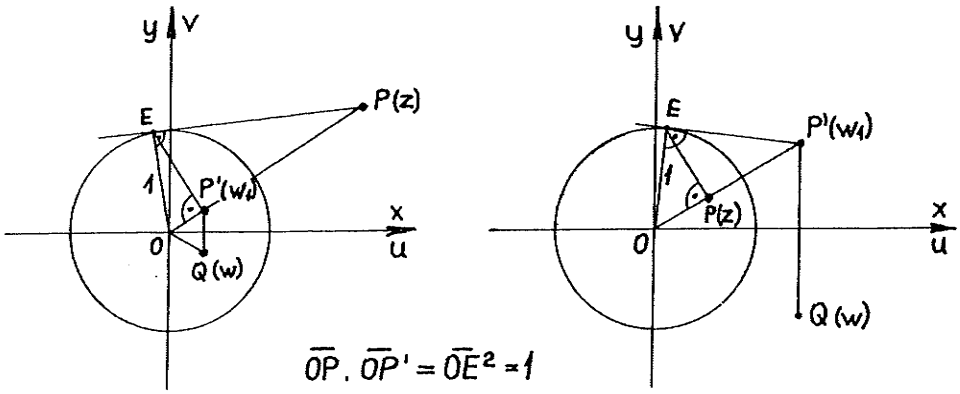
A leképezés helyben maradó, vagy fix pontjára:

$$c = ac + b \quad \text{innen} \quad c = \frac{b}{1 - a} \quad \text{ha } a \neq 0$$

A lokális vonalmenti nyujtás-zsugoritás, elforgatás és területtorzitás mértékei rendre: k, α és k^2. Minthogy ezek állandók, a leképezés nagyban is komform.

146. A leképezés komform. A komformitás a $z = 0$ és $z = \infty$ pontra is kiterjeszthető, ezen pontok számgömbi képei alapján.

$w = \frac{1}{z}$ a köv. függvények láncolata: $w_1 = \frac{1}{\bar{z}}$ és $w_2 = \bar{w}_1$; ezek a függvények nem analitikusak, tehát a lépések külön-külön nem komformak. (146.a, b. ábra,



146.a-b ábra

147. A "z" sik köreinek komplex alaku egyenlete:

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0 \qquad \text{(A és C valós számok)}$$

$A = 0$ esetben az egyenlet a "z" sik egyeneseit jelenti.

Ha $C = 0$, akkor a kör, illetve egyenes az origón megy át.

$w = \frac{1}{z}$ leképezés inverze: $z = \frac{1}{w}$, ezt a helyettesitést a kör egyenletében végrehajtva és rendezve, megkapjuk a "w" sikbeli kép egyenletét:

$$A\frac{1}{w\bar{w}} + \bar{B}\frac{1}{w} + B\frac{1}{\bar{w}} + C = 0$$

$$C\,w\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + A = 0$$

Ha $C = 0$, akkor a kép egyenest jelent; ha $A = 0$, akkor a kép az origón megy át.

Az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola egyenlete komplexben: $z^2 + \bar{z}^2 = 2$, a kép egyenlete:

$$\frac{1}{w^2} + \frac{1}{\bar{w}^2} = 2, \qquad \text{vagy} \qquad 2\,w^2\bar{w}^2 - w^2 - \bar{w}^2 = 0$$

$w = \varrho e^{i\vartheta}$ és $\bar{w} = \varrho e^{-i\vartheta}$ helyettesitést elvégezve $2\varrho^4 - \varrho^2 e^{2i\vartheta} - \varrho^2 e^{-2i\vartheta} = 0$, azaz $\varrho^2 = \cos 2\vartheta$

A kép tehát lemniszkáta.

148. A lineáris törtfüggvény a következő alakban is irható:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c\,(cz + d)} \qquad c \neq 0$$

ez a következő függvények láncolataként állitható elő:

$$w_1 = c\,(cz + d), \qquad w_2 = \frac{1}{w_1}, \qquad w = \frac{a}{c} + (bc - ad)w_2$$

149. Az inverz leképezés: $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$, ezt a transzformációt végrehajtva az $Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$ köregyenleten hozzá hasonló alaku $A'w\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + C' = 0$ egyenlethez jutunk. A lineáris törtfüggvény tehát körtartó ($A' = 0$ esetben a körök egyenesekké fajulnak el; $C' = 0$ esetben a körök, illetve az egyenesek az origón mennek át.)

150. $\operatorname{Im} w > 1$.

Az inverz leképezés: $z = -iw - 1$, $w = u + iv$ és igy $x + iy = v - 1 - iu$, innen $x = v - 1$

Ha $x > 0$, akkor $v = \operatorname{Im} w > 1$

151. $\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$

Hasonlóképpen: $z = \frac{1}{2} w(1 - i)$ és innen: $\operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2}(v - u)$.

Ha $y > 0$, akkor $v > u$

152. $$(u + 1)^2 + v^2 < 1 \qquad (w = u + iv)$$

Az inverz leképezésből: $x = -v$ és $y = u + 1$, és igy

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (u + 1)^2 + v^2 < 1$$

153. $$u^2 + v^2 > 2, \qquad (w = u + iv)$$

154. $w = az + b$, ahol $a = 3$, $b = 2(1+i)$

A leképezés körtartó. A $|z| = 1$ kör $z_o = 0$ középpontja a $b = 2(1+i)$ pontba megy át.

Az inverz transzformáció: $z = \frac{w - b}{a}$ ebből

$$|z|^2 = z\bar{z} = \frac{w - b}{a} \cdot \frac{\bar{w} - \bar{b}}{\bar{a}} = 1$$

A $z\bar{z} = 1$ kör képének egyenlete:

$$w\bar{w} - \bar{b}w - b\bar{w} + b\bar{b} = a\bar{a},$$

ahol a kör sugara $\sqrt{a\bar{a}} = 3$, tehát az $|a| = 3$ kikötés mellett "a" végtelen sokféleképpen választható; a legegyszerübb választás: $a = 3$.

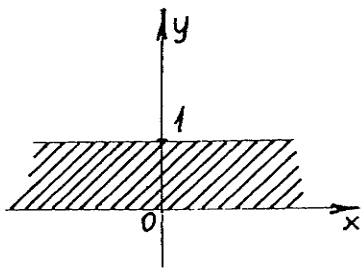
Egyébként a megoldás legegyszerübben abból következik, hogy a középpont $b = 2(1 + i)$ pontba megy át, továbbá a sugár háromszorosra nyulik, és igy a lineáris nyujtás: $|a| = 3$.

155. $w = az + b$ ahol $a = \frac{1}{2}$ $b = -\frac{1}{2} + 2i$.

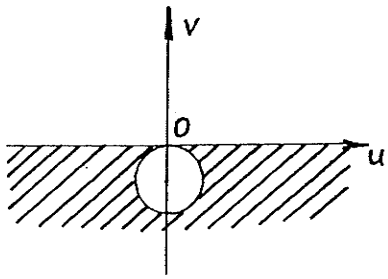
Hasonló következtetéssel $z_o = 1$ pont képe $w_o = a + b = 2i$; a lineáris zsugoritás: $|a| = \frac{1}{2}$.

Tehát a legyegyszerübb választás: $a = \frac{1}{2}$ és igy $b = -\frac{1}{2} + 2i$.

156. A sáv képe: $v < 0$, $u^2 + (v + \frac{1}{2})^2 > \frac{1}{4}$



156. a ábra



156. b ábra

$w = \frac{1}{z}$ a következő alakban irható: $x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$

Ha $y > 0$, akkor $\frac{v}{u^2 + v^2} < 0$ tehát $v < 0$

Ha $y < 1$, " $-\frac{v}{u^2 + v^2} < 1$, " $(u^2 + v^2) + v > 0$

azaz $u^2 + (v + \frac{1}{2})^2 > \frac{1}{4}$

157. $$(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 \geqq \frac{1}{4} \quad v \geqq 0$$

158. $$w = \frac{3z + 2i}{iz + 6};$$

Az adott tárgy- és a megfelelő képpontokat rendre behelyettesitve:

$$\frac{2a + b}{2c + d} = 1, \quad \text{vagy} \quad 2a + b = 2c + d \qquad \text{I.}$$

$$\frac{ia + b}{ic + d} = i, \quad \text{"} \quad ia + b = -c + id \qquad \text{II.}$$

$$\frac{-2a + b}{-2c + d} = -1 \quad \text{"} \quad -2a + b = 2c - d \qquad \text{III.}$$

I + III.-ból: $b = 2c$ és igy I.-ből: $d = 2a$ II-ből: $b + c = i(d - a)$, figyelembe véve, hogy $b = 2c$, $3c = i(d - a)$.

Legyen továbbá $c = i$, és igy $d - a = 3$

Tehát $a = 3$, $d = 6$, $c = i$ $b = 2i$

159. $$w = \frac{i - iz}{1 + z}$$

160. $$w = \frac{iz - i}{z + 1}$$

161. $$w = -\frac{1}{z}$$

162. a) Az y tengely képe: $u^2 + v^2 = 1$ kör

Legyen $w_1 = \frac{1 - z}{1 + z}$, ha $x = 0$, akkor $w_1 = \frac{1 - iy}{1 + iy} =$

$$= \frac{1 - y^2}{1 + y^2} - i\frac{2y}{1 + y^2} \quad \text{tehát} \quad u = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}, \quad v = \frac{2y}{1 + y^2}$$

innen
$$u^2 + v^2 = 1$$

$w = iw_1$ ugyanezt a kört adja az origó körül 90^0-kal elforgatva.

b) Az x tengely képe a v tengely

$$\text{Ha } y = 0, \text{ akkor } w = i\frac{1 - x}{1 + x} \text{ tehát}$$

$$u = 0, \quad v = \frac{1 - x}{1 + x}, \quad \text{innen az is leolvasható, hogy}$$

az x tengely adott pontjának a v tengely melyik pontja felel meg.

c) $x^2 + y^2 = 1$ kör képe az u tengely $x^2 + y^2 = 1$ komplex egyenlete $z = e^{i\varphi}$ ha $z = e^{i\varphi}$, akkor $w = i\frac{1 - e^{i\varphi}}{1 + e^{i\varphi}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ tehát $u = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $v = 0$; a $z = e^{i\varphi}$ kör φ arkuszhoz tartozó pontjának az u tengely $u = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ pontja felel meg.

163. $\quad w\bar{w} = 1$-ből $\quad \frac{2z + i}{iz - 2} \cdot \frac{2\bar{z} - i}{-i\bar{z} - 2} = 1$

innen: $(2z + i)(2\bar{z} - i) = (iz - 2)(-i\bar{z} - 2)$, a müveleteket elvégezve, és rendezve

$$z\bar{z} = 1$$

$z\bar{z} = 1$-ből kiindulva az inverz transzformációt használva $w\bar{w} = 1$-hez jutunk.

164. $\quad z = \pm i.$ $\qquad$ 165. $\quad z = 3.$

166. $w = \frac{az+b}{bz+a}$ $z = \frac{az+b}{cz+d}$ -ből

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0, \quad z = \pm 1, \quad \text{ha } c = b, \text{ és } d = a$$

167. Im $z > 0$ félsik.

$$z = \frac{cw + c^2}{1 - w} \quad \text{inverz transzformációból}$$

$$\text{Im } z = y = \frac{cv\,(c+1)}{(1-u)^2 + v^2}, \quad y = 0, \text{ csak akkor, ha } v = 0.$$

Tehát az x tengelynek megfelel az u tengely.

Megnézzük, hogy Im $w > 0$ félsik egy pontjának pl.: i-nek megfelelő pont a z sik melyik felében van.

$$z = \frac{ci + c^2}{1 - i} = \frac{c^2 - c}{2} + i\,\frac{c^2 + c}{2} \qquad \text{Im } z = y > 0$$

168. $z\bar{z} = 1$, legyen $w = e^{i\alpha}\, w_1$

$$w_1 = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad \text{ennek inverze:} \quad z = \frac{w_1 - a}{\bar{a}w_1 - 1}$$

és igy

$$z\bar{z} = \frac{w_1 - a}{\bar{a}w_1 - 1} \cdot \frac{\bar{w}_1 - \bar{a}}{a\bar{w}_1 - 1} = 1 \quad \text{innen } w_1\bar{w}_1 = 1$$

és igy $$w\bar{w} = (e^{i\alpha}\, w_1) \cdot (e^{-i\alpha}\, \bar{w}_1) = w_1\bar{w}_1 = 1$$

169. Ha $y = 0$, akkor $w = \frac{1}{x+i}$, azaz: $u = \frac{x}{x^2+1}$ és $v = \frac{-1}{x^2+1}$

innen $u^2 + v^2 + v = 0$; $z = i$ pont képe: $w = -\frac{1}{2}i$, azaz $u = 0$, $v = -\frac{1}{2}$

Behelyettesités utján látható, hogy ez a kör belső pontja.

170. $x = \text{konst.}$ $\left.\begin{array}{l} u = c^2 - y^2 \\ v = 2cy \end{array}\right\}$ vagy $v = 2c\sqrt{c^2 - u}$

$y = \text{konst.}$ $\left.\begin{array}{l} u = x^2 - c^2 \\ v = 2xc \end{array}\right\}$ vagy $v = 2c\sqrt{c^2 + u}$

171. A leképezés egy-egyértelmü. $z_1 \neq z_2$ esetén a függvényértékek egyenlőségét a következő egyenlet fejezi ki:

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \quad \text{vagy} \quad (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$$

ez akkor, és csakis akkor teljesül, ha $z_1 z_2 = 1$ A leképezés tehát csak olyan tartományban egy-egyértelmü, amely nem tartalmaz reciprok pontokat. Az egy-egyértelmüség tehát az egységkörön belül és azon kivül külön-külön fennáll.

172. A leképezés az origóból kiinduló sugarakat hiperbolákra, az origó középpontu köröket pedig ellipszisekre képezi le.

Ugyanis polárkoordinátákra áttérve és szétválasztva a valós és képzetes részt:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

A $\varphi = \text{konst.}$ félsugárnak a következő hiperbola felel meg:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$$

Az $r = \text{konst.}$ körnek $(r \neq 0)$ a következő ellipszis felel meg:

$$\frac{4u^2}{\left(r + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

A kapott hiperbola és ellipszis sereg konfokális és merőlegesen metszi egymást. Részletesebb vizsgálattal az is nyomon követhető, hogy a tárgygörbe befutásának milyen befutás felel meg a képgörbén.

173. 2π i szerint periódusos, ugyanis:

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = e^{z}$$

$$w = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} \quad \text{ahol} \quad e^{x} = |w| \quad \text{és} \quad y = \arc w,$$

Az x = konst. egyeneseknek a $|w|$ = konst. körök, az y = konst. egyeneseknek pedig az arc w = konst. origóból induló sugarak felelnek meg.

Az is látható, hogy valamely z sikbeli y = konst. egyenes 2π -vel való felfelé tolásának a w sik origójából induló arc $w = y$ sugárnak egy pozitiv értelmü teljes körülforgása felel meg. Ez azt jelenti, hogy a z sik minden x tengellyel párhuzamos 2π szélességü sávja ($y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$) kölcsönösen egyértelmüen az egész w sikra képeződik le.

174. 2π szerint periódusos, ugyanis:

$$\sin(z+2\pi) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} \cdot e^{i2\pi} - e^{-iz} \cdot e^{-i2\pi}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sin z$$

A z siknak az $x = -\frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesek között levő sávját konformisan képezi le az egész w sikra. A konformitás a két határvonalon megszünik, mert itt:

$$\frac{dw}{dz} = \cos z = 0.$$

(A z siknak más π szélességü függőleges sávja is hasonlóan viselkedik.)

$$w = u + iv = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \quad \text{és igy}$$

$$u = \sin x \operatorname{ch} y$$

$$v = \cos x \operatorname{sh} y$$

ahonnan x, illetve y kiküszöbölése utján a következő egyenletek adódnak:

$$\frac{u^2}{ch^2 y} + \frac{v^2}{sh^2 y} = 1 \quad \text{illetve} \quad \frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$

Az x tengellyel párhuzamos egyeneseknek ellipszisek, az y tengellyel párhuzamosaknak hiperbolák felelnek meg. Az ellipszisek és hiperbolák konfokálisak, továbbá merőlegesen metszik egymást.

VII.

175. $$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}; \qquad \mathrm{Re}(p) > 0.$$

176. $$\int_0^\infty te^{-pt}\,dt = \frac{1}{p^2}; \qquad \mathrm{Re}(p) > 0.$$

177. $$\int_0^\infty e^{at}e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-p)t}\,dt = \frac{1}{a-p}; \qquad \mathrm{Re}(p) > a.$$

178. $$\int_0^\infty e^{-pt}\cos at\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty \left[e^{(ia-p)t} + e^{(-ia-p)t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{p}{p^2 + a^2}; \qquad \mathrm{Re}(p) > 0.$$

(Megjegyzés: Az előbbi integrálok a Laplace transzformációnál szerepelnek.)

179. Az a és b pontok közötti tetszőleges görbének egy felosztását véve:

$$\int_G dz = \lim \sum_{k=1}^{n} \Delta z_k = \lim \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = b-a$$

ahol $z_o = a$ és $z_n = b$

(A határátmenetnél: $n \to \infty$ és $|\Delta z_k| \to 0$)

180. Az a és b pontok közötti tetszőleges görbének egy felosztását képezve két közelitő összeg számtani közepének a határértékét vesszük:

$$\int_{(G)} zdz = \frac{1}{2} \cdot \lim \left[\sum_{k=1}^{n} z_k \, \Delta z_k + \sum_{k=1}^{n} z_{k-1} \, \Delta z_k \right]$$

ahol $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ továbbá $z_o = a$ és $z_n = b$

$$\int_{(G)} zdz = \frac{1}{2} \lim \sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

181. A $z = z_o + re^{it}$ helyettesitést végrehajtva:

$$\int_0^{2\pi} \frac{rie^{it} dt}{re^{it}} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

182. a) G_1: $x = t$, $y = t$, $0 \leqq t \leqq 1$ figyelembevételével:

$$\int_0^1 (t+it)^2 \, (dt + idt) = \int_0^1 2it^2 \, (dt + idt) =$$

$$= \int_0^1 (2it^2 - 2t^2) \, dt = 2 \left[i \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \, (i - 1)$$

b) G_2: $x = t$, $y = t^2$, $0 \leqq t \leqq 1$ figyelembevételével:

$$\int_0^1 (t + it^2)^2 \, (dt + 2itdt) =$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2it^3 - t^4) \, (dt + 2itdt) =$$

$$= \int_0^1 \left[(t^2 - 5t^4) + i \, (4t^3 - 2t^5) \right] dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - t^5 \right]_0^1 + i \left[t^4 - \frac{t^6}{3} \right]_0^1 = -\frac{2}{3} + i \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \, (i-1)$$

183. a) G_1: $y = 0$, $1 \geqq x \geqq -1$ figyelembevételével:

$$\int_1^{-1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^{-1} = -\frac{2}{3}$$

b) G_2: $z(t) = e^{it}$ $0 \leqq t \leqq \pi$ figyelembevételével:

$$\int_0^{\pi} e^{2it} \cdot ie^{it}\, dt = i \int_0^{\pi} e^{3it}\, dt = \left[\frac{e^{3it}}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{3}$$

Megjegyzés: A 182. és 183. feladatban az integrál értéke független a kezdő- és végpontot összekötő uttól, z^2 ugyanis analitikus és igy a Cauchy tétel értelmében:

$$\int_a^b z^2\, dz = \frac{1}{3}\,(b^3 - a^3).$$

184. Figyelembe véve az ábrákon feltüntetett integrálási utakat:

a) $$\int_0^1 x dx + \int_0^1 (1-iy)\, idy = 1 + i$$

b) $$\int_0^1 (t - it)\,(dt + idt) = 1$$

c) $$\int_0^1 (-iy)\, idy + \int_0^1 (x-i)\, dx = 1-i$$

($\bar{z}$ ugyanis nem analitikus).

185. Figyelembe véve az ábrákon feltüntetett integrálási utakat:

a) $$\int_{-1}^{+1} |y|\, i\, dy = \int_{-1}^{0} (-y)\; idy + \int_0^1 yidy = -i \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = i$$

b) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 . ie^{it}\, dt = \left[e^{it}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2i$$

($|z|$ sem analitikus)

186. Figyelembe véve az integrálás utját:

$$(z - z_o)^m = r^m e^{imt} \qquad dz = ire^{it}dt \text{ és igy}$$

$$\oint_0^{2\pi} ir^{m+1} . e^{i(m+1)t}\, dt = \left[r^{m+1} . \frac{e^{i(m+1)t}}{m+1}\right]_0^{2\pi} = 0$$

ha $m \neq -1$

Ha $m = -1$, akkor az integrál: $\oint_0^{2\pi} idt = 2\pi i$, ami a Cauchy-formulából közvetlenül látható.

187. $3z^2 = 3(x^2 - y^2) + 6ixy$

a) Figyelembe véve, hogy az x tengely mentén $y = 0$, és az y tengellyel párhuzamos szakaszon $x = \text{konst.}$ és igy $dx = 0$,

$$\int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y \left[3(x^2 - y^2) + 6ixy\right] idy =$$

$$x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x + iy)^3 = z^3$$

b) Hasonlóképpen vegyük figyelembe, hogy az y tengely mentén $x = 0$, és az x tengellyel párhuzamos szakaszon $y = \text{konst}$, és igy $dy = 0$. stb.

c) Az integrációs ut paraméteres megadása: $x = t$, $y = ct$; ahol c az egyenes irány tangense.

$$\int_0^t 3(t + ict)^2 (1 + ic)\, dt = \int_0^t 3t^2 (1 + ic)^3\, dt =$$

$$= t^3 (1 + ic)^3 = t^3 + 3ict^3 - 3c^2 t^3 - ic^3 t^3 =$$

$$= x^3 + 3ix^2 y - 3xy^2 - iy^3 = (x + iy)^3 = z^3$$

Magyarázat: $3z^2$ függvény analitikus és ezért

$$\int_0^z 3z^2 dz = z^3$$

188. $f(z) = e^{iz} \sin^n z$, G a $\frac{\pi}{2}$ pontot körülvevő zárt görbe, és igy a Cauchy formula szerint:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(G)} \frac{f(z)}{z - \frac{\pi}{2}} \cdot dz = f(\tfrac{\pi}{2})$$ és igy az integrál értéke: $2\pi i e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \sin^n \frac{\pi}{2} =$

$= - 2\pi$

189. Az integrált a következő alakra hozzuk:

$$\oint_{(G)} \frac{\left(\frac{e^{z^2}}{z+1}\right)}{z - 1}\, dz \qquad f(z) = \frac{e^{z^2}}{z + 1}$$

G az 1 pontot körülvevő zárt görbe, és igy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(G)} \frac{f(z)}{z - 1}\, dz = f(1)$$

tehát az integrál értéke: $2\pi i \frac{e}{2} = e\pi i$

190. Az előbbihez hasonló átalakitással:

$$\oint_{(G)} \frac{\left(\frac{z^8 e^{\pi z}}{z+i}\right)}{z-i}\, dz \qquad f(z) = \frac{z^8 e^{\pi z}}{z+i}$$

G körülveszi az i pontot, tehát

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z-i}\, dz = f(i)$$

és igy az integrál értéke: $= 2\pi i \frac{i^8(-1)}{2i} = -\pi$

191. $G_1: |x - 5| = 1$. Az integrál értéke zérus, mert az integrálandó függvény a G_1 kör belsejében analitikus.

Az integrálandó függvény résztörtekre bontott alakja:

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

$G_2: |z - i| = 1$. Az integrál értéke: $\frac{1}{2i}\, 2\pi i = \pi$ mert i a G_2 kör belsejében van, de - i nem.

$G_3: |z + i| = 1$. Az integrál értéke: $\frac{1}{2i}(-2\pi i) = -\pi$ mert -i a G_3 kör belsejében van, de i nem. $G_4: |z| = 2$. Az integrál értéke:

$\frac{1}{2i}(2\pi i - 2\pi i) = 0$ mert +i és -i a G_4 kör belsejében van.

192. Az integrálandó függvény résztörtekre bontott alakja:

$$-\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{z+1}$$

Az előbbi meggondolások szerint az integrálok értéke:

G_1 esetén: 0; G_2 esetén: $-2\pi i$;

G_3 esetén: $\frac{1}{2}\, 2\pi\, i1 = \pi i$;

G_4 esetén: $-\frac{1}{2}\, 2\pi i \cdot (-1) = \pi i$;

G_5 esetén: $-2\pi i + \pi i + \pi i = 0$

193. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$ (G kör a $z^4 + 1$ nevezőnek csak két gyökét tartalmazza.)

194. A kérdéses integrál értéke: $\frac{\pi}{2e}$

f(z) integrálja a valós tengely mentén -R-től +R-ig

$$I_1 = \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx = 2\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx$$

f(z) integrálja az R sugaru félkör mentén:

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\,Re^{i\varphi}}}{R^2 e^{2i\varphi}+1} \cdot Rie^{i\varphi}\, d\varphi = i\int_0^{\pi} \frac{e^{i(Re^{i\varphi}+\varphi)}}{Re^{2i\varphi}+\frac{1}{R}}\, d\varphi$$

Innen látható, hogy $\lim\limits_{R\to\infty} I_2 = 0$

f(z) integrálja a ϱ sugaru kör mentén:

$$I_3 = -\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(i+\varrho\, e^{i\varphi})}}{(i+\varrho\, e^{i\varphi})^2+1}\, i\varrho\, e^{i\varphi}\, d\varphi =$$

$$= -i \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(i+\varrho e^{i\varphi})} \cdot \varrho e^{i\varphi}}{2\varrho i e^{i\varphi} \quad \varrho^2 e^{2i\varphi}} d\varphi =$$

$$= -i \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(i+\varrho e^{i\varphi})}}{2i + \varrho e^{i\varphi}} d\varphi \qquad \text{és}$$

$$\lim_{\varrho \to 0} I_3 = -i \int_0^{2\pi} \frac{e^{-1}}{2i} d\varphi = -\frac{\pi}{e}$$

A Cauchy tétel értelmében: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ és így a határátmenetek után is:

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + 0 - \frac{\pi}{e} = 0$$

Ahonnan a fent közölt eredmény látható.

VIII.

195. Mértani sor; hányados: $\frac{z-1}{3}$

Konvergencia tartomány: $|z - 1| < 3$, vagy $(x - 1)^2 + y^2 < 9$; összeg: $\frac{3}{4 - z}$

196. Mértani sor, hányados: $\frac{iz - 1}{2 + i}$

Konvergencia tartomány: $|iz - 1| < |2 + i|$

$x^2 + (y + 1)^2 < 5$; összeg: $\frac{2 + i}{3 + i(1 - z)}$

197. és 198. Mindkét sor konvergenciakörének sugara: 1. A Cauchy--Hadamard tétel szerint egy hatványsor konvergencia körének sugara:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim} \left| \sqrt[n]{a_n} \right|}$$

Jelen esetben: $a_n = \frac{1}{n}$ illetve $\frac{1}{n^p}$

199. $r = 1$ 200. $r = 0$

201. A sor $z = 1$ helyen a harmonikus sort adja; a konvergencia kör kerületének minden ettől különböző helyén azonban feltételesen konvergens. A konvergencia kör sugara 1, és igy a kerületi pontokban a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$$

A 82. feladat megoldásához fűzött megjegyzés értelmében az állitás nyilvánvaló.

202. A konvergencia kör sugara itt is 1, és igy a sor az egység kör minden olyan pontjában, ahol $z^p \neq 1$ feltételesen konvergens, egyébként divergens. A divergenciahelyeket a $z^p = 1$ binom egyenlet gyökei adják.

203. $f^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}$ és igy

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \qquad \text{ha } |z-1| < 1$$

204. $f^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}$ és igy

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad \text{ha } |z+1| < 1$$

205. $f^{(n)}(z) = e^z$ és $f^{(n)}(1) = e$ és igy

$$e^z = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \quad \text{az egész számsikon.}$$

206. $f'(z) = \sin 2z, \quad f''(z) = 2\cos 2z,$

$$f'''(z) = -2^2 \sin 2z$$

$$f^{(IV)}(z) = -2^3 \cos 2z, \qquad f^{(V)}(z) = 2^4 \sin 2z, .$$

stb., és igy $\sin^2 z = \frac{2}{2!} z^2 - \frac{2^3}{4!} z^4 + \frac{2^5}{6!} z^6 - + \ldots,$ az egész számsikon.

207. $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

a) $$f(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots\right) + \left(1 + z + z^2 + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} z + \frac{7}{8} z^2 + \ldots$$

b) $$f(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots\right) - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) =$$

$$= \ldots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \ldots$$

c) $$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\dots\right) - \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \dots$$

208. $z = 1 + \zeta$ bevezetésével:

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^2 + 3\zeta + 4}{\zeta^2 + 2\zeta} = 1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{2}{\zeta^2} - \frac{4}{\zeta^3} + \dots$$

A keresett sor tehát

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^3} + \dots$$

A konvergencia-gyűrű: $0 < |z-1| < 2$, mert az $a = 1$ szinguláris hely távolsága, a legközelebbi $b = -1$ szinguláris helytől: 2.

209. $$f(z) = \frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{n!}$$

210. $$f(z) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{8}{25}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{8}{25}\cdot\frac{1}{z-4} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{8}{25}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{8}{125}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{5}} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{8}{25}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{8}{125}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{5}\right)^n$$

Konvergenciatartomány: $0 < |z+1| < 5$.

211. $\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \to i} (z - i) \cdot \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1} = \frac{e^{i\pi}}{2i} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$

212. Ha $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, ahol mind a számláló, mind a nevező reguláris az "a" elsőrendü pólus helyen, akkor

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

és igy példánkban $\operatorname*{res}_{z=\pi} f(z) = \frac{e^{i\pi}}{\cos\pi} = 1$

213. $z = 1$ másodrendü pólus, polinom osztással, majd résztörtekre bontással:

$$f(z) = z + 2 + \frac{3}{z - 1} + \frac{1}{(z - 1)^2}, \quad \text{tehát} \operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 3$$

214. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}$, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}$ és igy

$$\oint_{(G)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$$

215. $f(z) = \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1}$, $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ és igy $\oint_{(G)} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \right.$

$$\left. + \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)\right] = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{2} = i\pi\sqrt{2}$$

216. Lásd a 194. feladatot, ahol ugyanezt az integrált a Cauchy tétel felhasználásával kellett kiszámitani.

217. a) A vektormező divergencia- és rotációmentes bármely, az origót nem tartalmazó, egyszeresen összefüggő tartományon, tehát van komplex potenciálja. Vezessük be a

$$\underline{q}\,(\underline{r}) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\underline{i} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\underline{j}$$

segéd-vektormezőt. Az $f = u + i\,v$ komplex potenciálra érvényes: grad $u = \underline{p}$ és grad $v = \underline{q}$. Ekkor u és v vonalintegrállal számolható.

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + a \quad \text{és} \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + b, \quad \text{ahol}$$

$a, b \in R$ integrációs állandók. Legyen $\alpha = a + i\,b$ és felhasználva a $z\,\bar{z} = x^2 + y^2$ összefüggést a potenciálfüggvény $f(z) = \frac{1}{z} + \alpha$.

b) Nincs komplex potenciál (A vektormező divergenciája nem zérus).

218. $k = 1$ esetén van komplex potenciál:

$f(z) = \sin z + \alpha$, ahol α komplex szám az integrálásból adódó állandó.

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság.*

A jegyzet címe: **MATEMATIKA PÉLDATÁR VII. KÖTET Komplex függvénytan**

A jegyzet szerkesztője: **Monostory Iván**

A jegyzet azonosítója: **040811**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: türhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)