



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA PÉLDATÁR
III. kötet
LINEÁRIS ALGEBRA

Összeállította:
Rábai Imre



Műegyetemi Kiadó, 2009

Szerkesztette:

Monostory Iván
egyetemi adjunktus

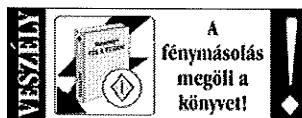
Összeállította:

Rábai Imre
egyetemi adjunktus

(Tizenharmadik utánnnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040933**



**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának**
megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 14,7 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 6956/09

Tartalomjegyzék

	Feladat	Megoldás
I. <u>Vektoralgebra</u>	7	109
I/1. Műveletek vektorokkal (koordináták nélkül)	7	109
I/2. Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal	15	117
I/3. Koordináta-geometria alkalmazások,	18	120
II. <u>Komplex számok</u>	32	131
III. <u>Polinomok</u>	44	146
IV. <u>Mátrixalgebra</u>	47	148
IV/1. Determinánsok	47	148
IV/2. Műveletek mátrixokkal	51	149
IV/3. Mátrix rangja	56	151
V. <u>Lineáris egyenletrendszerek</u>	61	152
VI. <u>Lineáris terek</u>	79	156
VII. <u>Bázistranszformáció</u>	86	159
VII/1. Mátrix sajátértéke, sajátvektora	86	159
VII/2. Másodrendű görbék	95	161
VII/3. Másodrendű felületek	99	164
VII/4. Bázistranszformáció	103	166

FELADATOK

I. Vektoralgebra

I/1. Műveletek vektorokkal (koordináták alkalmazása nélkül)

1. Határozzuk meg az ABCDEF szabályos hatszög A csucsból kiinduló oldal- és átlóvektorainak összegét.

2. Az ABC szabályos háromszög köré írt kör középpontja O. Igazoljuk, hogy

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$$

3. Igazoljuk, hogy két egyenlő hosszú vektor összege és különbsége merőleges egymásra.

4. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O. Legyen $\vec{OA} = \underline{a}$, $\vec{OB} = \underline{b}$, $\vec{OC} = \underline{c}$ és $\vec{OP} = \underline{p} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$. Igazolja, hogy a P pont az ABC háromszög magasságpontja.

5. Igazoljuk, hogy

$$|\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \dots + \underline{a}_n| \leq |\underline{a}_1| + |\underline{a}_2| + \dots + |\underline{a}_n|$$

6. Igazoljuk, hogy

$$|\underline{a} - \underline{b}| \geq ||\underline{a}| - |\underline{b}||.$$

7. Az a, b és c vektorok között nincsenek kollineáris vektorok. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az a, b, c vektorokból vektorháromszöget szerkeszthessünk?

8. Igazoljuk, hogy bármely háromszög súlyvonalából háromszög szerkeszthető.

9. Az ABC háromszög oldalaira szerkesszük meg az ABB_1A_2 , BCC_1B_2 és CAA_1C_2 paralelogrammákat. Az A_1A_2 , B_1B_2 és C_1C_2 szakaszokból szerkeszthető-e háromszög?

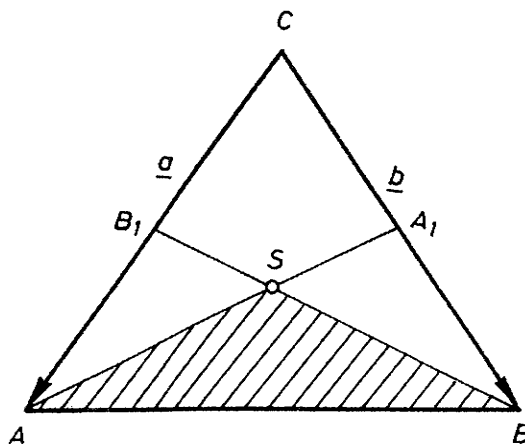
10. Szerkesszük meg az egy pontból kiinduló a, b, $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} + \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$ és $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} - \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$ vektorokat. Milyen állásu és irányu az utóbbi két vektor?

11. Igazoljuk, hogy ha $\lambda \underline{a} = \lambda \underline{b}$ és $\lambda \neq 0$, akkor $\underline{a} = \underline{b}$ és ha $\lambda \underline{a} = \mu \underline{a}$ és $\underline{a} \neq 0$, akkor $\lambda = \mu$.

12. Az ABC háromszög súlyvonalából szerkesztett háromszög $A_1B_1C_1$. Az $A_1B_1C_1$ háromszög súlyvonalából szerkesztett háromszög $A_2B_2C_2$. Igazoljuk, hogy az ABC és $A_2B_2C_2$ háromszögek hasonlóak és határozzuk meg a hasonlósági arányt.

1. példa

Igazoljuk, hogy a háromszög bármelyik két súlyvonalának metszéspontja a súlyvonalaknak a csúcstól távolabb eső harmadolópontja.



1. ábra

Megoldás: Legyen $\overrightarrow{CA} = \underline{a}$ és $\overrightarrow{CB} = \underline{b}$. Mivel $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, ezért

$$\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda = \mu = 0$.

Legyen az AA_1 és BB_1 súlyvonalak metszéspontja S.

Mivel $\overrightarrow{A_1A} = -\frac{1}{2}\underline{b} + \underline{a}$, $\overrightarrow{B_1B} = -\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$, ezért

$\overrightarrow{SA} = \alpha \overrightarrow{A_1A}$ és $\overrightarrow{SB} = \beta \overrightarrow{B_1B}$. $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA}$, ahol $\overrightarrow{BA} = \underline{a} - \underline{b}$.

Azt kell belátni, hogy $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$

$$\alpha \left(-\frac{1}{2} \underline{b} + \underline{a} \right) = \beta \left(-\frac{1}{2} \underline{a} + \underline{b} \right) + \underline{a} - \underline{b}.$$

Rendezzük e vektoregyenletet a következő alakra:

$$\left(\alpha + \frac{1}{2} \beta - 1 \right) \underline{a} + \left(1 - \frac{1}{2} \alpha - \beta \right) \underline{b} = 0.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\alpha + \frac{1}{2} \beta - 1 = 0, \text{ és}$$

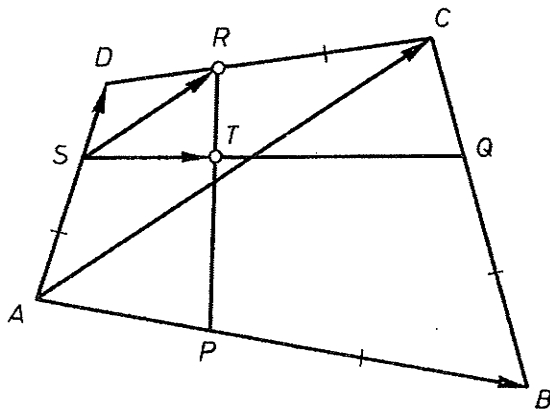
$$1 - \frac{1}{2} \alpha - \beta = 0, \text{ azaz } \alpha = \beta = \frac{2}{3}.$$

A most megismert módszerrel igazoljuk a következő állításokat.

13. Igazoljuk, hogy a paralelogramma átlól felezi egymást.

14. Egy paralelogramma egyik csucsat kössük össze a paralelogramma egyik oldalának felezőpontjával és húzzuk meg a kiválasztott csucsal szemközi átlót. Milyen arányban osztják ezek egymást?

15. Egy paralelogramma két szomszédos oldala felezőpontját kössük össze egy-egy szemközi csucsal. Milyen arányban osztja egymást e két szakasz?



2. ábra

16. Az ABCD négyszög oldalait 3-3 egyenlő részre osztjuk. Milyen arányban osztják egymást az ábrán látható PR és QS szakaszok?

A tér egy rögzített 0 pontjából a tér P pontjába mutató $\underline{r}$ vektort a P pont helyvektorának nevezzük. Ezt a következő módon is jelöljük: $P(\underline{r})$, ahol $\underline{r} = \vec{OP}$.

17. Határozzuk meg az AB szakasz F felezőpontjának helyvektorát, $\underline{f}$ -et, ha $A(\underline{a})$ és $B(\underline{b})$ adott.

18. Legyen $P(\underline{r})$ az $A(\underline{a})$ és $B(\underline{b})$ pontok által meghatározott egyenesen olyan pont, amely az AB szakaszt

a) belülről $\alpha:\beta$ arányban osztja, azaz $\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \alpha > 0, \beta > 0;$

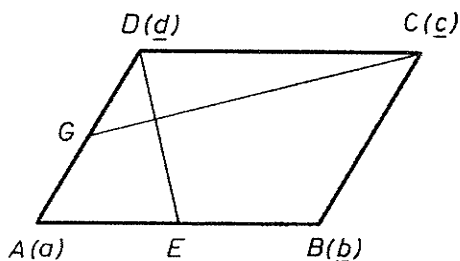
b) belülről $\lambda(\lambda:1)$ arányban osztja, azaz $\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = \lambda \quad (\lambda > 0);$

c) kívülről λ arányban osztja, azaz $\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = -\lambda \quad (\lambda < 0, \lambda \neq -1).$

Határozzuk meg az $\underline{r}$ vektort $\underline{a}$, $\underline{b}$ α, β illetve λ segítségével.

19. Az ABCD négyszög csúcspontjainak helyvektorai rendre $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. Milyen összefüggés (összefüggések) áll fenn (állanak fenn) a helyvektorok között, ha az ABCD négyszög paralelogramma?

A kapott feltételek szükséges és elégséges feltételek-e ahhoz, hogy a négyszög paralelogramma legyen?



3. ábra

2. példa. Legyen az ABCD paralelogramma két szomszédos AB és AD oldalának felezőpontja E, illetve G. ($AE = EB$, $AG = GD$.) Kössük össze az E pontot a D ponttal, a G pontot a C ponttal. Igazoljuk, hogy a GC és ED szakaszok P metszéspontja a GC szakaszt 1:4, az ED szakaszt 3:2 arányban osztja.

Megoldás: Legyen A az origó és így $B(\underline{b})$, $C(\underline{c})$ és $D(\underline{d})$. Ekkor $E\left(\frac{1}{2}\underline{b}\right)$ és $G\left(\frac{1}{2}\underline{d}\right)$. A GC szakaszt 1:4 arányban osztó P pont $\underline{p}$ helyvektora

$$\underline{p} = \frac{1}{5}(2\underline{d} + \underline{c}).$$

Az ED szakaszt 3:2 arányban osztó Q pont $\underline{q}$ helyvektora

$$\underline{q} = \frac{1}{5}(\underline{b} + 3\underline{d}).$$

A négyszög paralelogramma, így $\underline{b} = \underline{c} - \underline{d}$, tehát

$\underline{q} = \frac{1}{5} (\underline{c} - \underline{d} + 3\underline{d}) = \underline{p}$, azaz a P és Q pontok egybeesnek. Ezzel állításunkat igazoltuk.

20. Igazoljuk, hogy bármely (térbeli) négyszög oldalfelezőpontjai paralelogrammát határoznak meg.

21. Igazoljuk, hogy bármely négyszög egy pár szemköztes oldalának felezőpontjai és az átlók felezőpontjai paralelogrammát határoznak meg, ha nem esnek egy egyenesbe.

22. Az ABC háromszög csúcspontjába mutató helyzetvektorok rendre $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$.

Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást és a háromszög S súlypontjába mutató $\underline{s}$ vektor

$$\underline{s} = \frac{1}{3} (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}).$$

23. A tetraéder egy csucsát és a szemközti lap súlypontját összekötő szakaszt a tetraéder súlyvonalának nevezzük.

Igazoljuk, hogy a tetraéder súlyvonalai egymást a laphoz közelebb eső negyedelőpontjukban metszik.

(Ezt a pontot a tetraéder súlypontjának nevezzük.)

24. Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két nem kollineáris vektor. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ (α, β tetszőleges valós szám) vektorok közös pontból induljanak ki.

Igazoljuk, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha $\alpha + \beta = 1$. (Az $\alpha + \beta = 1$ teljesülése tehát szükséges és elégséges ahhoz, hogy a végpontok egy egyenesre essenek.)

25. Igazoljuk a következő azonosságokat

$$1. \quad (\underline{a} + \underline{b})^2 + (\underline{a} - \underline{b})^2 = 2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2;$$

$$2. \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = \frac{1}{2} [\underline{a}^2 + \underline{b}^2 - (\underline{a} - \underline{b})^2].$$

3. példa. Bontsuk fel az $\underline{a}$ vektort egy $\underline{e}$ egységvektorral párhuzamos $\underline{a}_p$ és egy arra merőleges $\underline{a}_m$ összetevőre.

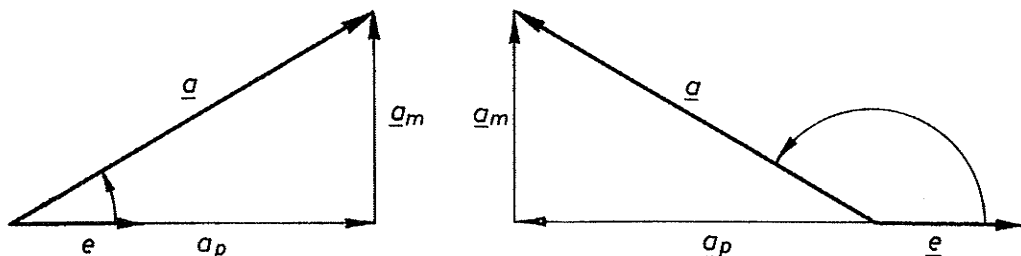
Megoldás. Legyen az $\underline{e}$ vektorral párhuzamos összetevő $\underline{a}_p$ vektor, a rá merőleges összetevő $\underline{a}_m$ vektor.

Az $\underline{ae}$ skaláris szorzat jelentése az $\underline{a}$ vektornak az $\underline{e}$ vektor egyenesére eső előjeles vetülete, ami akkor és csak akkor pozitív, nulla, negatív, ha az $\underline{a}$ és $\underline{e}$ vektorok szöge hegyesszög, derékszög, tompaszög. Ezek szerint

$$\underline{a_p} = (\underline{ae}) \underline{e},$$

és így

$$\underline{a_m} = \underline{a} - (\underline{ae}) \underline{e}.$$



4. ábra

26. Bontsuk fel az $\underline{a}$ vektort egy adott $\underline{b}$ vektorral párhuzamos és egy arra merőleges összetevőre.

27. Igazoljuk, hogy az $\underline{a}$ és az $(\underline{ac})\underline{b} - (\underline{ab})\underline{c}$ vektorok merőlegesek egymásra.

28. Igazoljuk, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra.

29. Igazoljuk a Thalész-tételt.

30. Igazoljuk a cosinustételt.

31. Igazoljuk, hogy a háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át.

32. Az $\underline{a}$ és $\underline{e}$ vektorok szöge, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $|\underline{a}| = \sqrt{3}$, $|\underline{e}| = 1$. Számítsuk ki az $\underline{a} + \underline{e}$ és $\underline{a} - \underline{e}$ vektorok szögét.

33. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok páronként egymásra merőlegesek ($\underline{a} \neq 0$, $\underline{b} \neq 0$, $\underline{c} \neq 0$). A $\underline{d}$ bármely $\underline{d}$ vektora egyértelműen írható fel,

$$\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$$

alakban. Határozzuk meg az α , β és γ skalárokat.

34. Adott az "e" egyenes és rajta az E pont. Határozzuk meg az E pontból kiinduló $\underline{y}$ vektorok végpontjainak mértani helyét, ha a $\underline{y}$ vektoroknak az "e" egyenesre eső merőleges előjeles vetületük α .

35. Adottak a közös pontból kiinduló $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem kollineáris vektorok. Mi a mértani helye a közös kezdőpontból kiinduló $\underline{v}$ vektorok végpontjainak, ha

$$\underline{v} \cdot \underline{a} = 0 \text{ és } \underline{v} \cdot \underline{b} = 1.$$

36. Igazoljuk a következő azonosságot:

$$(\underline{a} \times \underline{b})^2 + (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = \underline{a}^2 \underline{b}^2.$$

37. Azonosság-e a következő egyenlet?

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b}) = 2(\underline{a} \times \underline{b}).$$

38. Igazoljuk a következő azonosságot:

$$|(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b})| = 2 |\underline{a} \times \underline{b}|.$$

Mi az azonosság geometriai jelentése?

39. Határozzuk meg az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szögének tangensét.

40. Mi a feltétele annak, hogy

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$$

teljesüljön?

41. Igazoljuk, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok közös kezdőpontból indulnak ki és

$$(\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{b} \times \underline{c}) + (\underline{c} \times \underline{a}) = 0,$$

akkor az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesen vannak. Igaz-e az állítás megfordítása? Ha a közös kezdőpontból kiinduló $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek, akkor

$$(\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{b} \times \underline{c}) + (\underline{c} \times \underline{a}) = 0.$$

42. Igazoljuk, hogy

$$(\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{c}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{b} \times \underline{c}$ és $\underline{c} \times \underline{a}$ párhuzamos vektorok.

43. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egysíkú vektorok kezdőpontja közös. Igazoljuk, hogy a vektorok végpontjain áthaladó sík merőleges az

$$\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}$$

vektorra.

44. Igazoljuk, hogy ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok páronként nem kollineárisak, úgy

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}.$$

45. Igazoljuk a sinustételt.

46. Igazoljuk, hogy bármely háromszög közös kezdőpontból kiinduló két súlyvonalvektora által meghatározott háromszög területe az eredeti háromszög területének $\frac{3}{4}$ része.

47. Vegyük fel az ABC háromszög belsejében a P pontot. Igazoljuk, hogy a PAB, PBC, PCA háromszögek területe akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \underline{0}$$

Igazoljuk, hogy a P pont a háromszög súlypontja.

48. A $P_1(\underline{r}_1)$, $P_2(\underline{r}_2)$, $P_3(\underline{r}_3)$ csúcspontu háromszög területét fejezzük ki $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$, $\underline{r}_3$ vektorokkal.

49. Igazoljuk a következő összefüggéseket:

$$1. \quad ((\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \underline{bc}) = (\underline{a}_1 \underline{bc}) + (\underline{a}_2 \underline{bc});$$

$$2. \quad ((\underline{a} + \underline{b}) (\underline{b} + \underline{c}) (\underline{c} + \underline{a})) = 2(\underline{abc});$$

$$3. \quad (\underline{abc}) = (\underline{ab} (\underline{c} + \lambda \underline{a} + \mu \underline{b})).$$

50. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egysiku vektorok kezdőpontja közös. Igazoljuk, hogy

$$\left(\frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} - \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2} - \frac{\underline{c} + \underline{a}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\underline{abc});$$

Mi az igazolandó azonosság geometriai jelentése?

51. Igazoljuk, hogy a $\lambda \underline{a} - \mu \underline{b}$, $\gamma \underline{b} - \lambda \underline{c}$ és $\mu \underline{c} - \gamma \underline{a}$ vektorok komplanárisak.

52. Fejezzük ki a $P_1(\underline{r}_1)$, $P_2(\underline{r}_2)$, $P_3(\underline{r}_3)$, $P_4(\underline{r}_4)$ csúcspontu tetraéder térfogatát $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$, $\underline{r}_3$, $\underline{r}_4$ vektorokkal.

53. Adott két kitérő egyenes "e" és "f". Bizonyítsuk be, hogy az "e" egyenesen levő $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$ és az "f" egyenesen levő $\underline{c} = \overrightarrow{CD}$ vektorok kezdő és végpontjai által meghatározott ABCD tetraéder térfogata nem függ e vektoroknak az adott egyenesen elfoglalt helyzetétől.

54. Igazoljuk, hogy

1.
$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = 0 ;$$

2.
$$(\underline{a} \times \underline{b}) (\underline{c} \times \underline{d}) = \begin{vmatrix} \underline{ac} & \underline{ad} \\ \underline{bc} & \underline{bd} \end{vmatrix}.$$

55. Alkalmazzuk a kifejezési tételt az $(\underline{e} \times \underline{a}) \times \underline{e}$ vektorra. Hasonlítsuk össze a kapott eredményt a 3. példában az $\underline{a}_m$ vektorral. Irjuk fel az $\underline{a}$ vektornak az $\underline{e}$ egységvektor egyenesére merőleges $\underline{a}_m$ összetevőjét.

I/2. Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

56. Adott az $\underline{a} \cong [1, 5, 2]$ és $\underline{b} \cong [-2, 1, 2]$ vektor. Határozzuk meg az $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{b}$, $3\underline{a}$ és $-\frac{1}{2}\underline{b}$ vektorok koordinátáit.

57. Legyen $\underline{a} \cong [-4, 3]$, $\underline{b} \cong [1, 2]$, $\underline{c} \cong [3, -5]$. Igazoljuk, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokkal lehet vektorháromszöget szerkeszteni.

58. Adott az $\overrightarrow{AB} \cong [-1, 3, -3]$ és $\overrightarrow{BC} \cong [4, -5, 1]$ vektor. Határozzuk meg a $\overrightarrow{CA}$ vektort.

59. Igazoljuk, hogy az $\underline{a} \cong \left[\frac{18}{5}, -3, \frac{9}{2}\right]$ és $\underline{b} \cong \left[-10, \frac{25}{3}, -\frac{25}{2}\right]$ vektorok kollineárisak.

60. Igazoljuk, hogy az $\underline{a} \cong [-3, 0, 2]$, $\underline{b} \cong [2, 1, -4]$ és $\underline{c} \cong [11, -2, -2]$ vektorok komplanárisak.

61. Egy egyenesen vannak-e az A(2; 2; 3), B(4; 3; 4) és C(8; 5; 6) pontok?

62. Az ABCD paralelogramma három szomszédos csúcspontja A(1; -2; 3), B(3; 2; 1), C(6; 4; 4). Határozzuk meg a D csúcspont koordinátáit.

63. Legyen $\underline{a} \cong [2, -2]$, $\underline{b} \cong [1, 2]$. Igazoljuk, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ függetlenek. Írjuk fel a $\underline{c} = [9, 4]$ vektort $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként.

64. Legyen $\underline{a} \cong [3, -2, 1]$, $\underline{b} \cong [-1, 1, -2]$, $\underline{c} \cong [2, 1, -3]$. Igazoljuk, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ függetlenek. Fejezzük ki a $\underline{d} \cong [11, -6, 5]$ vektort $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ -vel.

65. Határozzuk meg az AB egyenesen azt a C pontot, amelynek x koordinátája 3, ha A(5; 3; -1) és B(-1; 2; 1) adott.

66. Határozzuk meg az $\underline{a} \cong [5, -3, 1]$ vektor irányába mutató egységvektort.

67. Határozzuk meg az A(2, -1, 2) és B(4, 3, -1) pontok távolságát, F felezőpontjának és A-hoz közelebb eső H harmadoló pontjának koordinátáit.

68. Határozzuk meg az ABC háromszög S súlypontjának koordinátáit, ha A(2; -3; 1), B(-1, 2, 2), C(5; -1, 3).

69. Számítsuk ki az $\underline{a} \cong [3, 1, -1]$ és $\underline{b} \cong [2, 1, 3]$ vektorok skaláris szorzatát.

70. Határozzuk meg λ értékét, ha az $\underline{a} \cong [3, -1, 2]$ és a $\underline{b} \cong [2, 5, \lambda]$ vektorok egymásra merőlegesek.

71. Határozzuk meg az $\underline{a}$ vektornak a $\underline{b}$ vektor egyenesére eső előjeles skalárvetületét, ha $\underline{a} \cong [2, 1, 10]$, $\underline{b} \cong [3, 4, 12]$.

72. Határozzuk meg az $\underline{a} \cong [-2, 0, 1]$ és $\underline{b} \cong [0, 2, 1]$ vektorok szögét.

4. példa. Bontsuk fel az $\underline{a} \cong [3, -1, 5]$ vektort a $\underline{b} \cong [4, 1, -3]$ vektorral párhuzamos ($\underline{b}_p$) és egy arra merőleges ($\underline{b}_m$) vektorra.

Megoldás. A 26. feladat szerint

$$\underline{b}_p = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b} \cong \frac{-4}{26} [4, 1, -3], \quad \underline{b}_m = \underline{a} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2} \underline{b} \cong \frac{1}{26} [94, -22, 118].$$

73. Számítsuk ki az $\underline{a} \cong [2, 1, -1]$ vektor iránycosinusait.

74. Határozzuk meg $\underline{x}$ vektort, ha tudjuk, hogy $|\underline{x}| = 14$, az y-tengellyel tompaszöget zár be és merőleges az $\underline{a} \cong [3, 2, 2]$ és $\underline{b} \cong [18, -22, -5]$ vektorokra.

75. Az ABC háromszögben a B pont vetülete az AC egyenesen a D pont. Határozzuk meg a $\vec{BD}$ vektor (magasságvektor) koordinátáit, ha $A(2; -5; 1)$, $B(6; -3; 5)$, $C(6; -4; 9)$.
76. Határozzuk meg az $A(2; -5; 1)$, $B(6; -3; 5)$, $C(6; -4; 9)$ csúcspontu háromszög szögeit.
77. Tükrözzük az $\underline{a} \cong [-2, 6, 1]$ vektort a $\underline{b} \cong [1, -1, 0]$ vektorra. Határozzuk meg a tükröképvektor koordinátáit.
78. Határozzuk meg az $\underline{a} \cong [2, -2, -3]$ és $\underline{b} \cong [0, 4, 7]$ vektorok $\underline{a} \times \underline{b}$ vektori szorzatának koordinátáit.
79. Határozzuk meg az ABC háromszög területének mérőszámát, ha $A(1; -1; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-1, -1, -2)$.
80. Határozzuk meg az $\underline{a} \cong [1, 1, -4]$ és $\underline{b} \cong [-1, 0, 2]$ vektorok síkjára merőleges egységvektort és a két vektor szögének sinusát.
81. Az $\underline{e}$ egységvektorral közös kezdőpontból kiinduló $\underline{a}$ vektor végpontja milyen távol van az $\underline{e}$ vektor egyenesétől? Határozzuk meg a 62. feladatban szereplő paralelogramma AB oldalához tartozó magasságot.
82. Számítsuk ki az $\underline{a} \cong [2, -2, 5]$, $\underline{b} \cong [-1, 0, 4]$ és $\underline{c} \cong [0, 2, -3]$ vektorok $(\underline{a}\underline{b}\underline{c})$ és $(\underline{c}\underline{b}\underline{a})$ vegyesszorzatát.
83. Számítsuk ki az $\underline{a} \cong [1, 0, -3]$, $\underline{b} \cong [-1, 2, 2]$ és $\underline{c} \cong [0, -2, -1]$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.
84. Számítsuk ki az ABCD tetraéder térfogatát, ha $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(1; -1; 1)$, $D(1; 1; -1)$.
85. Igazoljuk, hogy az $\underline{a} \cong [-1, 3, 2]$, $\underline{b} \cong [4, -6, 2]$ és $\underline{c} \cong [-3, 12, 11]$ vektorok komplanárisak.
86. Igazoljuk, hogy az $A(4; -2; -2)$, $B(3; 1; 1)$, $C(4; 2; 0)$ és $D(7; -1; -6)$ pontok egy síkon fekszenek.
87. Számítsuk ki az ABCD tetraéder D csúcsához tartozó magasságot, ha $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$.

I/3. Koordináta-geometria alkalmazások

88. Írjuk fel a $P_1(\underline{r}_1)$ ponton átmenő és a $\underline{y}$ vektorral párhuzamos egyenes vektoregyenleteit.

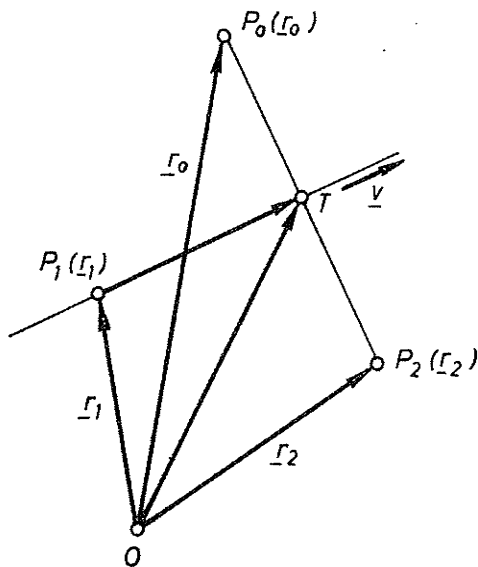
Írjuk fel a $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ponton átmenő és a $\underline{y} \cong [v_1, v_2, v_3]$ vektorral párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét és egyenletrendszerét.

89. Írjuk fel a $P_1(\underline{r}_1)$ és $P_2(\underline{r}_2)$ pontokon átmenő egyenes vektoregyenleteit.

Írjuk fel a $P_1(x_1; y_1; z_1)$ és $P_2(x_2; y_2; z_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét és paraméteres egyenletrendszerét.

90. Írjuk fel az A(a), B(b) és C(c) csúcspontu háromszög

- A csúcspontján áthaladó súlyvonalának vektoregyenletét;
- A csúcspontján áthaladó belső szögfelező vektoregyenletét;
- A csúcspontján áthaladó magasságvonal vektoregyenletét.



5. ábra

91. Adott a $P_0(\underline{r}_0)$ pont és az "e" egyenes: $\underline{r} = \underline{r}_1 + t\underline{v}$. Tükrözzük az "e" egyenest a P_0 pontra. Írjuk fel a tükröképegenes vektoregyenletét.

92. Melyik egyenesre kell tükrözni az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t\underline{v}$ egyenest, hogy a tükröképegenes vektoregyenlete $\underline{r} = \underline{r}_2 + t\underline{v}$ legyen? ($\underline{r}_2 \neq \underline{r}_1 + t\underline{v}$). Írjuk fel a keresett egyenes vektoregyenletét.

5. Példa. Határozzuk meg a $P_0(\underline{r}_0)$ pontnak az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t\underline{v}$ egyenesre eső merőleges vetülete helyvektorát.

Megoldás: Legyen a vetületi pont T. Az ábra jelölése szerint

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1T}$. A $\overrightarrow{P_1T}$ vektor a $\overrightarrow{P_1P_0}$ vektor $\underline{y}$ vektorral párhuzamos össze-

tevéje, ha $\vec{TP}_0$ vektor a merőleges összetevő. Így a 26. feladat szerint

$$\vec{P_1T} = \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \underline{v}}{|\underline{v}|^2} \cdot \underline{v}, \quad \vec{OT} = \underline{r}_1 + \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \underline{v}}{|\underline{v}|^2} \underline{v}.$$

6. példa. Határozzuk meg $P_0(\underline{r}_0)$ pontnak az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t\underline{v}$ egyenesekre vonatkozó $P_2(\underline{r}_2)$ tükörképét.

Megoldás: A T pont a P_0P_2 szakasz felezőpontja, így $\underline{r}_2 = 2\vec{OT} - \underline{r}_0 =$
 $= 2\underline{r}_1 + 2 \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \underline{v}}{|\underline{v}|^2} \underline{v} - \underline{r}_0.$

Megjegyzés. Az eredményből is látható, hogy a P_2 pontot úgy is megkaphatjuk, hogy a P_0 pontot a P_1 pontra tükrözzük, majd az így kapott pontot $2 \vec{P_1T}$ vektorral eltoljuk.

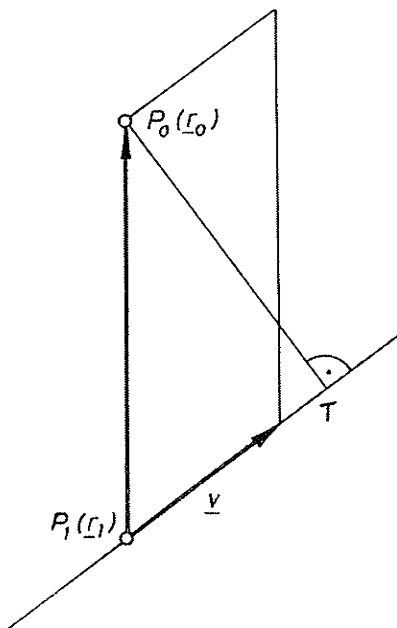
7. példa. Határozzuk meg a $P_0(\underline{r}_0)$ pontnak az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t\underline{v}$ egyenestől való távolságát.

1. megoldás: A keresett $d = P_0T$ távolság a P_0TP_1 derékszögű háromszögből határozható meg. Mivel

$$P_0P_1 = |\underline{r}_0 - \underline{r}_1|, \quad P_1T = \frac{|(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \underline{v}|}{|\underline{v}|}, \quad \text{ezért}$$

$$d^2 = (\underline{r}_0 - \underline{r}_1)^2 - \left(\frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \underline{v}}{|\underline{v}|} \right)^2.$$

$$\text{Megjegyzés. } d = |\underline{r}_0 - \vec{OT}|.$$



6/a. ábra

2. megoldás: A keresett távolság a $\vec{P_1P_0}$ és $\underline{v}$ vektorok által meghatározott paralelogramma $\underline{v}$ oldalvektorához tartozó magassága.

$$d = \frac{|(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \times \underline{v}|}{|\underline{v}|}.$$

93. Határozzuk meg az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t \underline{v}$ és $\underline{r} = \underline{r}_2 + t \underline{v}$ egyenesek távolságát.
94. Határozzuk meg az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t \underline{v}_1$ és $\underline{r} = \underline{r}_2 + t \underline{v}_2$ ($\underline{v}_1 \nparallel \underline{v}_2$) kitérő egyenesek távolságát.
95. Mi a feltétele annak, hogy az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t \underline{v}_1$ és $\underline{r} = \underline{r}_2 + t \underline{v}_2$ egyenesek egy síkba essenek?
96. Irjuk fel a $P_0(\underline{r}_0)$ ponton áthaladó egyenes egyenletét, ha az merőlegesen metszi az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t \underline{v}$ egyenest.
97. Irjuk fel a $P_1(\underline{r}_1)$ ponton átmenő $\underline{n}$ normálvektoru sík vektoregyenletét.
- Irjuk fel a $P_1(x_1; y_1; z_1)$ pontokon átmenő $\underline{n} \approx [A, B, C]$ ($A^2 + B^2 + C^2 > 0$) normálvektoru sík egyenletét.
98. Irjuk fel a $P_0(\underline{r}_0)$ ponton és az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t \underline{v}$ egyenesen átfektetett sík egyenletét ($\underline{r}_0 \neq \underline{r}_1 + t \underline{v}$).
99. Irjuk fel a $P_0(\underline{r}_0)$ ponton áthaladó és az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t \underline{v}$ egyenesre merőleges sík egyenletét.
100. Irjuk fel a $P_0(\underline{r}_0)$ ponton áthaladó, az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \underline{n} = 0$ síkkal párhuzamos sík egyenletét.
101. Irjuk fel a $P_1(\underline{r}_1)$, $P_2(\underline{r}_2)$, $P_3(\underline{r}_3)$ pontokon áthaladó sík egyenletét, ha a három pont nem esik egy egyenesbe.
102. Irjuk fel a $P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$, $P_3(x_3; y_3; z_3)$ pontokon áthaladó sík egyenletét, ha a három pont nem esik egy egyenesbe.
103. Irjuk fel az $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ pontokon áthaladó sík egyenletét, ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.
104. Irjuk fel a $P_0(\underline{r}_0)$ ponton áthaladó és az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorokkal párhuzamos sík paraméteres vektoregyenletét, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem kollineáris vektorok.
105. Irjuk fel a $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ponton áthaladó és az $\underline{a} \approx [a_1, a_2, a_3]$, $\underline{b} \approx [b_1, b_2, b_3]$ vektorokkal párhuzamos sík paraméteres egyenletrendszerét.

106. Határozzuk meg az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}_1 = 0$ és az $(\underline{r} - \underline{r}_2) \cdot \underline{n}_2 = 0$ síkok hajlásszögét.

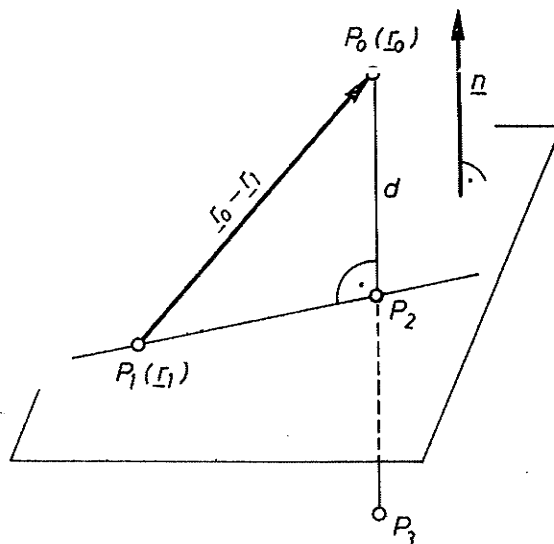
107. Határozzuk meg az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} = 0$ sík és az $\underline{r} = \underline{r}_2 + t \underline{v}$ egyenes hajlásszögét.

108. Írjuk fel a $P_1(\underline{r}_1)$, $P_2(\underline{r}_2)$ szakasz felezőmerőleges síkjának az egyenletét.

109. Adott a $P_0(\underline{r}_0)$ pont és az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} = 0$ sík. Tükrözzük a síkot a P_0 pontra. Írjuk fel a tükröképsík egyenletét.

110. Tükrözzük az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} = 0$ síkot az $(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n} = 0$ síkra, ha $(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} \neq 0$. Írjuk fel a tükröképsík egyenletét.

8. példa: Határozzuk meg a $P_0(\underline{r}_0)$ pontnak az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} = 0$ síktól való távolságát.



6/b. ábra

Megoldás: A keresett d távolság az $\underline{r}_0 - \underline{r}_1$ vektor $\underline{n}$ vektorral párhuzamos összetevője abszolút értéke, ha a másik összetevő $\underline{n}$ vektorra merőleges.

$$d = \left| (\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} \right|.$$

A távolságot tehát megkaphatjuk, ha a sík $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = 0$ normálegyenletében az $\underline{r}$ helyére az adott pont $\underline{r}_0$ helyvektorát írjuk és az egyenlet baloldalán álló kifejezésnek az abszolút értékét vesszük.

111. Határozzuk meg a $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pontnak az $Ax + By + Cz + D = 0$ siktól való távolságát.

112. Határozzuk meg az $(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n} = 0$ és az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} = 0$ síkok távolságát, ha $(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} \neq 0$. (Lásd 8. példa.)

9. példa. Határozzuk meg a $P_0(\underline{r}_0)$ pontnak az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}$ síkra eső $P_2(\underline{r}_2)$ vetületét.

1. megoldás: A $\overrightarrow{P_0 P_2}$ az $\underline{r}_0 - \underline{r}_1$ vektor $\underline{n}$ vektorral párhuzamos összetevője (ha a másik összetevő az $\underline{n}$ vektorra merőleges.) (Lásd 6/b. ábra.)

$$\overrightarrow{P_0 P_2} = \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} \quad \text{A vetületi pont helyvektora:}$$

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_0 - \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}}{\underline{n} \cdot \underline{n}} \cdot \underline{n}.$$

2. megoldás: A vetületi pont a $P_0(\underline{r}_0)$ ponton átmenő az adott síkra merőleges, tehát $\underline{n}$ normálvektoru egyenes és a sík közös pontja.

Az $\underline{r} = \underline{r}_0 + t \underline{n}$ egyenes az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} = 0$ síkot olyan "t" paraméter értékű pontban metszi, amelyre

$$(\underline{r}_0 + t \underline{n} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} = 0, \quad \text{tehát}$$

$$t = \frac{(\underline{r}_1 - \underline{r}_0) \cdot \underline{n}}{\underline{n} \cdot \underline{n}}.$$

A vetületi pont helyvektora tehát

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_0 + \frac{(\underline{r}_1 - \underline{r}_0) \cdot \underline{n}}{\underline{n} \cdot \underline{n}} \cdot \underline{n}.$$

10. példa. Határozzuk meg a $P_0(\underline{r}_0)$ pontnak, az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \underline{n} = 0$ síkra vonatkozó $P_3(\underline{r}_3)$ tükörképének helyvektorát.

Megoldás: A P_3 pont a P_0 pont tükörképe a P_2 pontra (lásd 9. példa, 6/b. ábra), így

$$\underline{r}_3 = 2\underline{r}_2 - \underline{r}_0 ,$$

$$\underline{r}_3 = \underline{r}_0 - 2 \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \underline{n}}{\underline{n} \cdot \underline{n}} \cdot \underline{n} .$$

113. Határozzuk meg az $\underline{r} = \underline{r}_0 + t \underline{v}$ egyenesnek az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \underline{n} = 0$ síkra vonatkozó tükörképének a vektoregyenletét, ha $\underline{v} \cdot \underline{n} \neq 0$.

114. Határozzuk meg az $(\underline{r} - \underline{r}_0) \underline{n}_0 = 0$ síknak az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \underline{n}_1 = 0$ síkra vonatkozó tükörképének egyenletét, ha $\underline{n}_0 \times \underline{n}_1 \neq 0$.

11. példa. Határozzuk meg az egymást metsző $(\underline{r} - \underline{r}_1) \underline{n}_1 = 0$ és $(\underline{r} - \underline{r}_0) \underline{n}_2 = 0$ síkok által meghatározott lapszögeket felező síkok egyenletét.

Megoldás: Egy $P(\underline{r})$ pont akkor és csak akkor van rajta a szögfelező síkon, ha a két síktól egyenlő távolságra van, azaz

$$\left| \frac{(\underline{r} - \underline{r}_1) \underline{n}_1}{|\underline{n}_1|} \right| = \left| \frac{(\underline{r} - \underline{r}_2) \underline{n}_2}{|\underline{n}_2|} \right| .$$

Ez utóbbi akkor teljesül, ha vagy

$$\frac{(\underline{r} - \underline{r}_1) \underline{n}_1}{|\underline{n}_1|} = \frac{(\underline{r} - \underline{r}_2) \underline{n}_2}{|\underline{n}_2|} , \quad (1)$$

vagy

$$\frac{(\underline{r} - \underline{r}_1) \underline{n}_1}{|\underline{n}_1|} = - \frac{(\underline{r} - \underline{r}_2) \underline{n}_2}{|\underline{n}_2|} . \quad (2)$$

Az (1) és a (2) egyenlet a szögfelezősíkok egyenlete.

115. Irjuk fel az egymást metsző $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ és $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ síkok által meghatározott lapszögeket felező síkok egyenletét.

116. Irjuk fel a $P_0(r_0)$ ponton áthaladó sík egyenletét és paraméteres vektoregyenletét, ha a sík merőleges az $r \cdot n_1 = k_1$ és $r \cdot n_2 = k_2$ síkok metszészonalára.

117. Irjuk fel az $(x; y)$ síkban a $P_0(r_0)$ ponton áthaladó és n normálvektoru egyenes egyenletét és normálegyenletét.

118. Irjuk fel a $P_0(x_0; y_0)$ ponton áthaladó $n \approx [A; B]$ normálvektoru egyenes egyenletét.

119. Határozzuk meg a $P_0(r_0)$ pontnak az $(r - r_1) \cdot n = 0$ egyenestől való távolságát.

120. Határozzuk meg az egymást metsző $(r - r_1) \cdot n_1 = 0$ és $(r - r_2) \cdot n_2 = 0$ egyenesek szögfelezőinek egyenletét.

121. Igazoljuk, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.

122. Irjuk fel a $P_1(-1; 2; 3)$ ponton átmenő és a $y \approx [4, -1, 2]$ vektorral párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét és egy egyenletrendszerét.

123. Irjuk fel a $P_1(4; -1; 3)$ és $P_2(-2, 2, 5)$ pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét és egy egyenletrendszerét.

124. Átmegy-e az $\frac{x-1}{3} = y + 2 = \frac{z-3}{2}$ egyenes a $P(4; -1; 5)$ ponton? Határozzuk meg az egyenesnek az (x, z) síkkal való dőféspontját.

125. Tükrözzük az $x + 2 = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ egyenest a $P_0(-5; 4; 1)$ pontra. Irjuk fel a tükröképegynes egyenletrendszerét. (Lásd 91. feladat.)

126. Melyik egyenesre kell tükrözni az $\frac{x-4}{2} = -(y+3) = \frac{z-1}{5}$ egyenest, hogy a tükröképegynes egyenlete $\frac{x+3}{2} = -y = \frac{z+4}{5}$ legyen? Irjuk fel a keresett egyenes egyenletrendszerét. (Lásd 92. feladat.)

127. Határozzuk meg a $P_0(-5; 4; 1)$ pont vetületét az $x+3 = \frac{y}{5} = \frac{2-z}{3}$ egyenesen. (Lásd 5. példa.)

128. Határozzuk meg a $P_0(-5; 4; 1)$ pont tükörképét az $x+3 = \frac{y}{5} = \frac{2-z}{3}$ egyenesre. (Lásd 6. példa.)

129. Határozzuk meg a $P_0(-5; 4; 1)$ pont és az $x+3 = \frac{y}{5} = \frac{2-z}{3}$ egyenes távolságát. (Lásd 7. példa.)

130. Határozzuk meg az $x-1 = \frac{y-2}{3} = 3-z$ és az $x-2 = \frac{y+1}{3} = 4-z$ egyenesek távolságát. (Lásd 93. feladat.)

131. Határozzuk meg a következő egyenesek távolságát:

$$a) \quad \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = z \quad \text{és} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{3};$$

$$b) \quad \frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \quad \text{és} \quad \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

(Lásd 94. feladat.)

12. példa. Határozzuk meg "a" értékét úgy, hogy az $x+1 = y-1 = z$ és az $x-1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{a}$ egyenesek messék egymást.

1. megoldás: A két egyenes nem párhuzamos, így legfeljebb egy közös pontjuk lehet. A $P(x; y; z)$ pont akkor és csak akkor közös pontjuk, ha mindkét egyenletrendszert kielégíti az $(x; y; z)$ számhármass. Az egyenletrendszerekből két-két egyenletet írjunk fel:

$$\begin{aligned} x+1 &= y-1, & 2x-2 &= y+1, \\ & \text{illetve} & & \\ x+1 &= z, & a(x-1) &= z-1. \end{aligned}$$

Az első három egyenlethől $x=5$, $y=7$, $z=6$, így a negyedik egyenlethől $a = \frac{5}{4}$.

2. megoldás: Írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét:

$$\begin{aligned}x &= -1 + t_1, & x &= 1 + t_2, \\y &= 1 + t_1, & \text{illetve } y &= -1 + 2t_2, \\z &= t_1, & z &= 1 + at_2.\end{aligned}$$

A két egyenes akkor és csak akkor metszi egymást, ha egyetlen olyan t_1, t_2 paraméterpár létezik, amelyre

$$\begin{aligned}-1 + t_1 &= 1 + t_2, \\1 + t_1 &= -1 + 2t_2, \\t_1 &= 1 + at_2.\end{aligned}$$

Az első két egyenletből $t_1 = 6$, $t_2 = 4$, így a harmadik egyenletből $a = \frac{5}{4}$.

3. megoldás: Mivel a két egyenes nem párhuzamos, ezért akkor és csak akkor metszik egymást, ha a két egyenes egy síkot határoz meg, azaz a két egyenes $\underline{v}_1$, illetve $\underline{v}_2$ irányvektora, és egy-egy pontjukat összekötő $\underline{r}_1 - \underline{r}_2$ vektor egy síkba esik. Ekkor $((\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \cdot \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2) = 0$.

Most $\underline{v}_1 \cong [1, 1, 1]$, $\underline{v}_2 \cong [1, 2, a]$, $\underline{r}_1 \cong [-1, 1, 0]$, $\underline{r}_2 \cong [1, -1, 1]$,
 $\underline{r}_1 - \underline{r}_2 \cong [-2, 2, -1]$. Így

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0, \quad a = \frac{5}{4}.$$

132. Döntsük el az

$$x - 3 = \frac{y+1}{3}, \quad z = 1 \text{ és } x + 1 = 3(y - 4) = z + 2$$

egyenesek kölcsönös helyzetét.

133. Határozzuk meg az

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-4} = z-1 \quad \text{és az} \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{5}$$

egyenesek szögét.

134. Határozzuk meg az

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}$$

egyenesnek a koordináta tengelyekkel alkotott szögeinek cosinusát.

135. Irjuk fel az $\frac{x-2}{2} = -y - 3 = \frac{z-4}{2}$ és az $x - 2 = -\frac{y+3}{2} = \frac{2z-8}{4}$ egyenesek szögfelező egyenesének az egyenletrendszerét.

136. Irjuk fel a $P_0(1; -3; 0)$ ponton áthaladó és az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = z$ és az $\frac{x+1}{3} = -\frac{y+1}{6} = \frac{z+6}{6}$ egyenesekkel egyenlő szöget bezáró egyenes egyenletrendszerét.

137. Irjuk fel a $P_0(2; 1; 3)$ ponton áthaladó, az $x+1 = \frac{y+2}{3} = z$ egyenest merőlegesen metsző egyenes egyenletrendszerét. (Lásd 95. feladat.)

138. Irjuk fel az $x+1 = \frac{y-1}{3} = z$ (e) és az $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$ (f) egyenesek normáltranszverzális egyenesének az egyenletrendszerét.

139. Irjuk fel a $P_1(1; 2; 4)$ ponton átmenő $\underline{n} \cong [2, 1, 3]$ normálvektoru sík egyenletét.

140. Irjuk fel a $P(5; 1; 2)$ ponton és az $x-2 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ egyenesen átfektetett sík egyenletét. (Lásd 98. feladat.)

141. Irjuk fel a $P(-3; 4; 1)$ ponton átmenő és a $3x - 4y + 5z = -1$ síkkal párhuzamos sík egyenletét. (Lásd 100. feladat.)

142. Irjuk fel a $P_1(2; 1; 1)$, $P_2(4, 1, 2)$, $P_3(2, -1, 3)$ pontokon átmenő sík egyenletét. (Lásd 102. feladat.)

143. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelynek tengelymetszetei rendre -4, 2, 3. (Lásd 103. feladat.)

144. Határozzuk meg azoknak a síkoknak egy normálvektorát, amelyek párhuzamosak az

- a) (x, y) , (x, z) , illetve (y, z) tengelysíkokkal;
- b) x , y , illetve z tengellyel.

145. Irjuk fel az x tengellyel párhuzamos és a $P_1(0; 1; 3)$, $P_2(2; 4; 5)$ pontokon áthaladó sík egyenletét.

146. Számítsuk ki a $6x - 2y - 3z = 6$ és a $3x + 6y - 2z = 12$ síkok hajlásszögét. (Lásd 106. feladat).

147. Számítsuk ki az $x = 5 + 6t$, $y = 1 - 3t$, $z = 2 + t$ egyenes és a $7x + 2y - 3z = -5$ sík szögét. (Lásd 107. feladat.)

148. Számítsuk ki a $6x - 2y^2 - 3z = 6$ síknak a koordináta tengelyekkel bezárt szögét.

149. Irjuk fel a sík egyenletét, ha a sík paraméteres egyenletrendszere $x = 2 + 3u - 4v$, $y = 4 - v$, $z = 2 + 3u$. (Lásd 105. feladat.)

13. példa. Határozzuk meg az $\frac{x-7}{5} = y - 4 = \frac{z-5}{4}$ egyenes és a $3x - y + 2z = 5$ sík közös pontját.

1. megoldás: A két alakzatnak akkor és csak akkor van egy közös pontja, ha az egyenes egyenletrendszeréből vett bármely két egyenlet és a sík egyenlete által meghatározott lineáris egyenletrendszernek egy megoldása van. Az egyenletrendszer megoldása adja a közös pont koordinátáit. Most az

$$x - 7 = 5y - 20,$$

$$z - 5 = 4y - 16,$$

$$3x - y + 2z = 5$$

egyenletrendszer megoldása $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$, tehát a metszéspont $P(2; 3; 1)$.

2. megoldás: A 9. példa 2. megoldása szerint járunk el. Irjuk fel az egyenes paraméteres egyenletrendszerét: $x = 7 + 5t$, $y = 4 + t$, $z = 5 + 4t$. Legyen t_0 a közös ponthoz tartozó paraméter. A pont koordinátái ekkor kielégítik a sík egyenletét.

$$3(7 + 5t_0) - (4 + t_0) + 2(5 + 4t_0) = 5, \text{ tehát}$$

$t_0 = -1$. Ekkor $x = 2$, $y = 3$ és $z = 1$.

14. példa. Határozzuk meg a $2x - y + 3z = 6$ az $x + y - 2z = 9$ síkok metszévonalának az egyenletrendszerét.

1. megoldás: A két sík nem párhuzamos és nem egybeeső, így van metszévonaluk. A metszévonal mindkét síkban benne van, tehát a metszévonal bármely $\underline{v}$ irányvektora merőleges a két sík $\underline{n}_1 \cong [2, -1, 3]$, illetve $\underline{n}_2 \cong [1, 1, -2]$ normálvektorára, így $\underline{v} = (\underline{n}_1 \times \underline{n}_2)$, $\underline{v} \cong [-1, 7, 3]$. A metszés-

vonall bármely pontja kielégíti mindkét sík egyenletét. A három ismeretlen közül egyet szabadon választhatunk. Legyen $z = 0$, ekkor

$$2x - y = 6,$$

$$x + y = 9.$$

Igy $x = 5$, $y = 4$. A metszésvonal egy pontja tehát $P(5; 4; 0)$.

A metszésvonal egyenletrendszere:

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{3} \quad (*)$$

2. megoldás: A két sík egyenlete által alkotott

$$2x - y + 3z = 6, \quad (1)$$

$$x + y - 2z = 9 \quad (2)$$

egyenletrendszer máris a keresett egyenletrendszer. Ez természetesen nem a megszokott alakban van, de arra az alakra hozható. Érdemes megfigyelni az egyenes egyenletrendszerének a 88. feladat megoldásában kapott alakját (mely tartalmazza a középiskolában megismert egyenes egyenletet is).

Adjuk össze az (1) és (2) egyenleteket, majd az (1) egyenletből vonjuk ki a második egyenlet kétszeresét, és rendezzük az egyenleteket:

$$3(x - 5) = -z,$$

$$(*) \quad (*)$$

$$3(y - 4) = 7z.$$

Látható, hogy az $(*)$ és $(*)$ egyenletrendszer ekvivalens. (Lásd még a 88. feladat megoldását.)

Megjegyzés: A metsző $Ax + By + Cz + D = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ síkok metszésvonalának egyenletrendszerét szokás a következő alakban is megadni:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

150. Milyen helyzetű a $4x + 3y - z = -3$ sík és az $\frac{x-1}{2} = -(y+3) = \frac{z+2}{5}$ egyenes egymáshoz viszonyítva?

151. Tükrözzük a $2x - y + 2z = -5$ síkot a $P_0(2; 5; -1)$ pontra. Irjuk fel a tükröképsík egyenletét. (Lásd 109. feladat.)

152. Melyik síkra kell tükrözni az $x + y - 2z = 1$ síkot, ha a tükröképsík egyenlete $x + y - 2z = -3$?

153. Határozzuk meg azt a síkot, amely az $x + y - z = -1$ síktól kétszer olyan távol van, mint az $x + y - z = 1$ síktól, és nem a két sík között helyezkedik el.

154. Határozzuk meg azt a síkot, amely az $x - 2y + z = 2$ és az $x - 2y + z = 6$ síkok között helyezkedik el és a két sík közti távolságot 1:3 arányban osztja (az $x - 2y + z = 2$ síktól számítva)?

155. Határozzuk meg a $P_0(2; 1; 1)$ pont és az $x + y - z = -1$ sík távolságát. (Lásd 8. példa.)

156. Irjuk fel a $7x + y - 6 = 0$ és a $3x + 5y - 4z = -1$ síkok által meghatározott lapszögek szögfelező síkjainak egyenletét. (Lásd 11. példa és 115. feladat.)

157. Irjuk fel a $2x - 2y - z = 3$ síkkal párhuzamos és tőle 5 egységnyi távolságra haladó sík egyenletét.

158. Határozzuk meg az $x - 2y + z = 1$ és a $2x - 4y + 2z = 1$ síkok távolságát. (Lásd 112. feladat.)

159. Határozzuk meg a $P_0(5; -2; 1)$ pont vetületét az $x + y - 2z = -5$ síkon. (Lásd 10. példa.)

160. Határozzuk meg a $P_0(2; 1; 1)$ pont tükröképét az $x + y - z = -1$ síkra. (Lásd 10. példa.)

161. Vetítsük az $\frac{x+1}{3} = y - 2 = -\frac{z}{3}$ egyenest a $2x - 2y + 5z = 0$ síkra és irjuk fel a vetület egyenletrendszerét.

162. Tükrözzük az $x = \frac{2y-1}{3} = 3z$ egyenest az $x + y + z = 0$ síkra. Irjuk fel a tükrökép egyenletrendszerét. (Lásd 113. feladat.)

163. Tükrözzük az $x + 2y - z = 1$ síkot a $3x + 4y - z = 0$ síkra. Irjuk fel a tükrökép egyenletét. (Lásd 114. feladat.)

164. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $x - 2 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ és az $x + 3 = \frac{1-y}{3} = \frac{z}{4}$ egyenesek síkjára merőleges és az egyenesektől egyenlő távolságban halad.

165. Határozzuk meg a $P_0(-2; -1; 8)$ ponton átmenő és az $x + 1 = -\frac{y}{2} = \frac{3-z}{3}$ egyenesre merőleges síknak az egyenessel való dőféspontját.

166. Irjuk fel a $P(5; 2; -4)$ ponton átmenő és a $3x + y - 4z = 5$, $2x - y + z = -2$ síkok metszésvonalával párhuzamos egyenes egyenletrendszerét.

167. Irjuk fel a $P(2; 2; 1)$ ponton átmenő és az $x + 2y + z = 1$, $2x + y - z = 0$ síkok metszésvonalára merőleges sík egyenletét.

168. Az $A(1; 1; 1)$ és $B(2; 2; 2)$ pontokon át fektessünk át olyan síkot, amely merőleges az $x + y - z = 0$ síkra.

169. A $P(1; 1; 2)$ ponton át fektessünk a következő egyenesekkel párhuzamos síkot:

$$\frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z+1}{2}, \quad x+1 = \frac{y-1}{2} = z+1.$$

170. Irjuk fel a $2x - y + z = 1$ és az $x + y - z = 0$ síkok metszésvonalán és a $P(2; 1; 1)$ ponton áthaladó sík egyenletét.

171. Igazoljuk, hogy az $x-1 = -(y+1) = \frac{z-1}{2}$ és az $1-x = \frac{y+1}{2} = z-1$ egyenesek síkot határoznak meg és írjuk fel a sík egyenletét.

172. Határozzuk meg az $x + y + z = 6$, a $2x - y + z = 3$ és az $x + 2y + z = 2$ síkok kölcsönös helyzetét. Van-e a síkoknak közös pontja? Ha van, akkor melyik az, illetve melyek azok?

173. A $P(-1; 2; 1)$ ponton át fektessünk az $x + y - 2z = 1$ és az $x + 2y - z = 1$ síkok metszésvonalával párhuzamos egyenest.

174. Adott a $P_1(3; 2; -1)$, $P_2(2; 4; 1)$, $P_3(1; 6; 5)$, $P_4(-1; 3; 1)$ csúcspontu tetraéder.

a) Számítsuk ki a tetraéder P_3 csúcspontjához tartozó magasságot.

b) $AP_1P_2P_4$ sík és az $(x; y)$ sík φ szögét.

c) $AP_1P_2P_4$ és $P_1P_3P_4$ lapok φ hajlásszögét.

d) AP_3P_4 él és a $P_1P_2P_4$ sík θ szögét.

II. Komplex számok

175. Végezzük el a kanonikus alakban adott komplex számokkal az alábbi műveleteket:

- a) $(3 - 7i) + (8 - i);$
- b) $(3 - 2\sqrt{2} i) + (5 + \sqrt{2} i);$
- c) $(3 + 6i) - (2 - i);$
- d) $(3\sqrt{3} - 2i) - (2 - 3\sqrt{3} i);$
- e) $(6 - i) (11 + 5i);$
- f) $(2 - 7i) (-4i);$
- g) $\frac{2 + i}{1 + 3i};$
- h) $\frac{18}{\sqrt{5} - 2i}$

176. Legyen $z = 2+i$. Hozzuk kanonikus alakra a z^2 , z^3 , z^4 komplex számokat és ábrázoljuk ezeket a komplex számsíkon.

177. Végezzük el a kanonikus alakban kapott komplex számokkal az alábbi műveleteket:

- a) $(1 + 2i)^6;$
- b) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5;$
- c) $\frac{(1 - i)^3}{1 + i};$
- d) $\left(\frac{2}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^8;$
- e) $(1 + i)^{-4} - (1 - i)^{-3};$
- f) $\frac{(1 + i)^3}{(2 - 2i)^2} \cdot \frac{3 - i}{2 + i} - \frac{2 - i}{3 + i};$
- g) $(1 + i)^8 + (1 - i)^8;$
- h) $\frac{(1 + i)^6 - (1 - i)^6}{(1 + i)^6 (1 - i)^6}.$

178. Számítsuk ki i^n -t, ha n természetes szám.

179. Számítsuk ki:

$$a) \frac{i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50}}{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{50}};$$

$$b) \frac{1}{i} + \frac{1}{i^{11}} + \frac{1}{i^{21}} + \frac{1}{i^{31}} + \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{51}}.$$

180. Határozzuk meg x , y , illetve x , y , z , t valós számokat, ha

$$a) (1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i;$$

$$b) \left. \begin{aligned} (1 + i)x + (1 + 2i)y + (1 + 3i)z + (1 + 4i)t &= 1 + 5i, \\ (3 - i)x + (4 - 2i)y + (1 + i)z + 4i t &= 2 - i \end{aligned} \right\}.$$

181. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

$$a) \left. \begin{aligned} 2x - iy &= 1 + i, \\ (2 - i)x + y &= 2i; \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} (2 + i)x - (2 + i)x - (3 + i)y &= i, \\ (3 + i)x + (3 + i)x + (1 - i)y &= i. \end{aligned} \right\}$$

182. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

$$a) z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0;$$

$$b) z^4 + 5z^2 + 9 = 0.$$

183. Végezzük el a kijelölt műveleteket a trigonometrikus alakban adott komplex számokkal:

$$a) 7 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot 3 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right);$$

$$b) \frac{12 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)}{3 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)};$$

$$c) \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right)^4.$$

184. Írjuk trigonometrikus alakba a következő komplex számokat:

- | | |
|--|--|
| a) 1 ; | b) -2 ; |
| c) 3i ; | d) $-\sqrt{2} i$; |
| e) $1 + i$; | f) $1 - i$; |
| g) $-1 + i$; | h) $-1 - i$; |
| i) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$; | j) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$; |
| k) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$; | l) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$; |
| m) $(2 - \sqrt{3}) - i$; | n) $3 + 4i$; |
| o) $-2 + 5i$; | p) $-4 - 3i$; |
| r) $3 - 2i$. | |

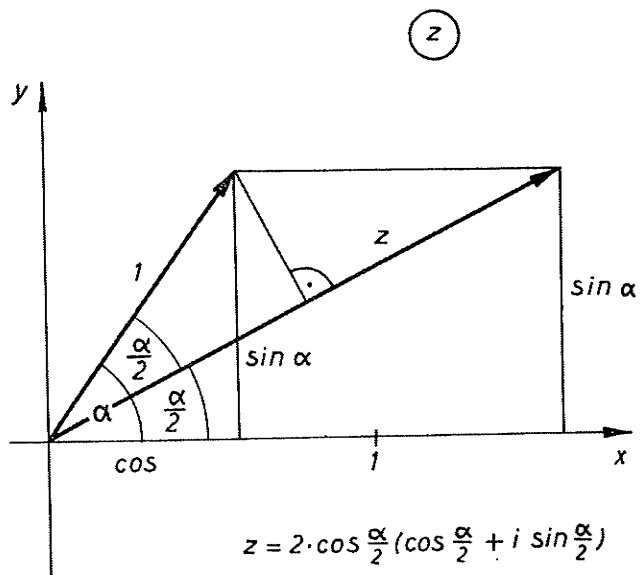
15. példa. Írjuk fel trigonometrikus alakban a $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ komplex számot.

Megoldás. Tudjuk, hogy $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Igy $z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$.

Legyen $\alpha = \varphi + 2k\pi$, ahol $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ha $\cos \frac{\alpha}{2} \geq 0$, azaz ha $0 \leq \varphi < \pi$, akkor $z = 2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2})$, ha $\cos \frac{\alpha}{2} \leq 0$, azaz $\pi \leq \varphi < 2\pi$, akkor $z = -2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right)$.

Megjegyzés: Sok esetben, mint most is, célszerű trigonometrikus azonosságok alkalmazása. Hasznos lehet geometriai interpretáció is. Ebben az esetben vizsgálatra van szükség. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ esetén ábrázolhatjuk a z komplex számot és itt alkalmazhatjuk a $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ($\alpha \neq (2k+1)\pi$) azonosságot.



7. ábra

185. Írjuk fel trigonometrikus alakban a következő komplex számokat:

- a) $z = \cos \varphi - i \sin \varphi$;
- b) $z = -\cos \varphi + i \sin \varphi$;
- c) $z = -\cos \varphi - i \sin \varphi$;
- d) $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$.

186. Írjuk fel trigonometrikus alakban a következő komplex számokat:

- a) $z = \frac{i}{(1-i)(\sin \alpha + i \cos \alpha)}$;
- b) $z = \frac{1+i}{i(\sin \alpha - i \cos \alpha)}$;
- c) $z = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2(1-i)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}$.

16. példa. Végezzük el a következő gyökvonást:

$$\sqrt[4]{-2 - i 2\sqrt{3}}. \text{ Ábrázoljuk a megoldásokat.}$$

Megoldás: Írjuk fel a $z = -2 - i 2\sqrt{3}$ számot trigonometrikus alakban.

$$|z| = \sqrt{16} = 4, \text{ arc } z = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\sqrt[4]{4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\text{Ha } k = 0, \text{ akkor } \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\text{ha } k = 1, \text{ akkor } \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right),$$

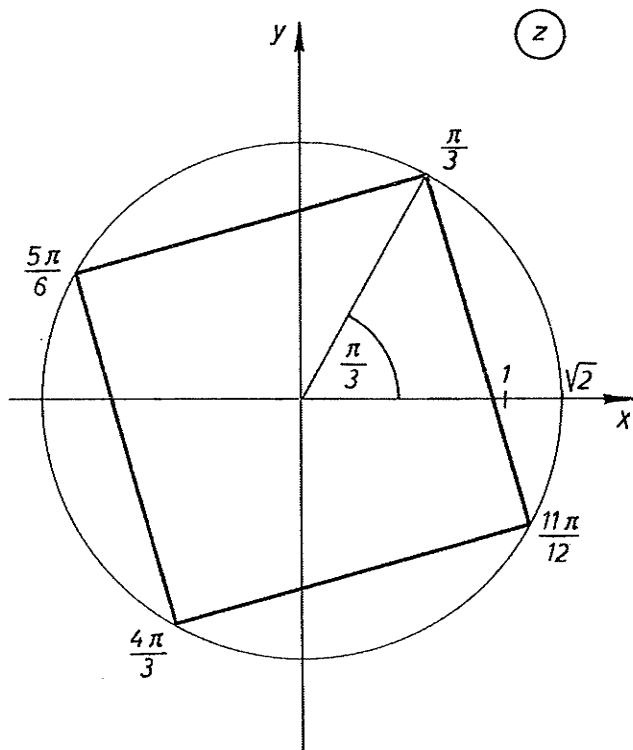
$$\text{ha } k = 2, \text{ akkor } \sqrt{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right),$$

$$\text{ha } k = 3, \text{ akkor } \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

A megoldásoknak megfelelő pontok a komplex számsíkon az origó középpontú $\sqrt{2}$ sugarú körön vannak, egy négyzet csúcspontjai. A

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) = \\ & = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

azonosság mutatja, hogy pl. a $k = 0$ esetén nyert gyököket a negyedik egységgyökökkel szorozva megkapjuk az összes gyököket.



8. ábra

187. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

- a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$;
d) $\sqrt[6]{1}$; e) $\sqrt[6]{-27}$.

188. Az $\sqrt[n]{z}$ egyik gyöke w . Írjuk fel $\sqrt[n]{z}$ összes gyökét.

189. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

- a) $\sqrt[3]{2+i}$; b) $\sqrt[3]{3-i}$; c) $\sqrt[5]{2+3i}$.

190. Oldjuk meg a következő binom egyenleteket:

- a) $(\sqrt{3}+i)z^6 = 1-i$;
b) $(\sqrt{3}-i)z^8 = 1+i$;
c) $(1+i\sqrt{3})z^6 = 1-i$.

197. Fejezzük ki $\sin x$ és $\cos x$ -szel a következő kifejezéseket:

a) $\cos 5x$;

b) $\sin 6x$.

198. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} ;$

b) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} .$

199. Bizonyítsuk be, hogy a $(z+1)^5 + z^5 = 0$ egyenlet gyökeinek valós része $-\frac{1}{2}$.

200. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(z+1)^5 + z^5 = 0 .$$

201. Egy paralelogramma három csúcspontjának a z_1, z_2, z_3 komplex számok felelnek meg. Milyen komplex szám felel meg a negyedik csúcspontnak?

202. Igazoljuk, hogy érvényes a következő azonosság:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 \right) .$$

Mi az azonosság geometriai jelentése?

203. Legyen $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ és $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy z_1, z_2 és z_3 -nak megfelelő pontok egy szabályos háromszög csúcspontjai.

204. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} ;$

b) $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} ;$

c) $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n ;$

$$d) \quad \overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n ;$$

$$e) \quad z \bar{z} = |z|^2 .$$

18. példa. Az $\underline{n} \approx [A, B]$ normálvektoru egyenes komplex normálvektora legyen $a = A + iB$. Írjuk fel az egyenletét a komplex számsíkon.

Megoldás: Minden $\underline{n}$ normálvektoru egyenes egyenlete $Ax + By + C = 0$ alakban írható. Legyen $z = x + iy$ az egyenes egy pontjának megfelelő komplex szám. Ekkor $x = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})$. Az egyenlet:

$$\frac{A}{2} (z + \bar{z}) + \frac{B}{2i} (z - \bar{z}) + C = 0 ,$$

$$(A - iB) z + (A + iB) \bar{z} + 2C = 0 .$$

Ha $A + iB = a$, akkor $A - iB = \bar{a}$, így az egyenlet:

$$\bar{a} z + a \bar{z} + 2c = 0 ,$$

ahol "a" az egyenes komplex normálvektora, $2c$ valós szám.

205. Legyen egy egyenes egységnormálvektora $a^0 = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ahol φ a valós tengely pozitív irányú félegyenese és az origóból kiinduló, az egyenesre merőleges félegyenes által meghatározott pozitív szög ($0 \leq \varphi < 2\pi$). Írjuk fel az a^0 normálvektoru egyenesek komplex egyenletét és határozzuk meg az origó távolságát az egyenestől.

206. Írjuk fel az "a" komplex normálvektoru, z_0 ponton áthaladó egyenes egyenletét.

207. Írjuk fel az origón áthaladó, "a" komplex normálvektoru egyenes egyenletét.

18/a. példa. Írjuk fel az origó középpontu ϱ sugaru kör egyenletét komplex alakban.

1. megoldás. Egy z komplex számnak megfelelő pont akkor és csak akkor van rajta a keresett körön, ha $|z| = \varrho$. Ez a kör egyenlete. Ez ekvivalens a $|z|^2 = \varrho^2$ egyenlettel. Mivel $|z|^2 = z \bar{z}$, ezért a keresett egyenlet $z \bar{z} = \varrho^2$ alakban is írható.

2. megoldás. A keresett kör egyenlete

$$x^2 + y^2 = \varrho^2.$$

Mivel $x^2 + y^2 = |z|^2 = z \bar{z}$, ezért az egyenlet

$$z \bar{z} = \varrho^2$$

alakban is írható.

208. Írjuk fel a z_0 középpontu ϱ sugaru kör komplex egyenletét.

209. Vizsgáljuk a

$$z \bar{z} + \bar{a} z + a \bar{z} + k = 0 \quad (1)$$

egyenletet, ahol "a" komplex szám, k valós szám.

Mi a mértani helye az (1) egyenletnek eleget tevő z komplex számoknak megfelelő pontoknak?

210. Határozzuk meg, hogy milyen vonalak felelnek meg a következő egyenleteknek:

- | | |
|--|--|
| a) $\operatorname{Re} z = a$; | b) $ \operatorname{Re} z = a$ |
| c) $\operatorname{Im} z = a$; | d) $ \operatorname{Im} z = a$ |
| e) $ z - z_1 = z - z_2 $; | f) $ z - 1 = \operatorname{Re} z $; |
| g) $ z - z_1 + z - z_2 = 2a, \quad a > \frac{1}{2} z_2 - z_1 $; | |
| h) $ z - z_1 - z - z_2 = 2a, \quad 0 < a < \frac{1}{2} z_2 - z_1 $. | |

A feladatokban a > 0 valós állandó, z_1 és z_2 komplex állandók.

19. példa. Milyen vonal felel meg a komplex számsíkon az

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \quad (a > 0)$$

egyenletnek?

Megoldás: Ha $z = x + iy$, akkor $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, így $x^2 + y^2 - ax = 0$.

A vonal a $(0; a]$ szakaszra, mint átmérőre rajzolt kör. (az origó nem tartozik a körhöz.)

211. Milyen vonal felel meg a komplex számsíkon a következő egyenleteknek?

a) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0$; b) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$.

212. Határozzuk meg és rajzoljuk fel a komplex számsíknak a következő egyenlőtlenségekkel meghatározott tartományait:

a) $\operatorname{Re} z > 0$; b) $|\operatorname{Re} z| < 1$;
 c) $\operatorname{Im} z \leq 1$; d) $|\operatorname{Im} z| > 1$;
 e) $|z| \leq 1$; f) $|z - i| > 1$;
 g) $0 < |z + i| < 2$; h) $1 < |z - 1| < 3$
 i) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$; j) $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$.

213. Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségekkel meghatározott tartományokat a komplex számsíkon.

a) $|z-1| + |z+1| < 4$; b) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$;
 c) $|z-2| - |z+2| < 2$; d) $|z+1| < |z-1|$;
 e) $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$; f) $|z| < 1 - \operatorname{Re} z$.

214. Igazoljuk, hogy a $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = K$ egyenletnek eleget tevő pontok egy körvonal pontjai, ha z_1, z_2 adott komplex állandó, K pedig 1-től különböző pozitív valós szám. Határozzuk meg a kör középpontját és sugarát (Apollóniusz kör).

215. Legyen z a $z = 1$ középpontú $\varrho = 1$ sugarú kör tetszőleges pontja. Igazoljuk, hogy $|z^2 - z| = |z|$ és $3 \arg(z-1) = 3 \arg z^2 = 2 \arg(z^2 - z)$.

216. Írjuk fel exponenciális alakban a következő komplex számokat:

a) $z = -\frac{3}{2}$; b) $z = -i\sqrt{3}$; c) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

217. Határozzuk meg a következő komplex számok valós és képzetes részeit.

a) $z = 5 e^{i \frac{5\pi}{6}}$; b) $z = 2e^{-i \frac{\pi}{2}}$; c) $z = e^{i\pi}$.

218. Fejezzük ki $\sin^3 x$ és $\cos^3 x$ -et az x szög többszöröseinek sinusával, illetve cosinusával.

III. Polinomok

219. Legyen $p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ n -edfoku adott polinom. Milyen komplex számok a polinom együtthatói, ha minden z komplex számra érvényesek a következő összefüggések:

a) $p_n(z) = \overline{p_n(\bar{z})}$; b) $p_n(z) = -\overline{p_n(\bar{z})}$.

220. Határozzuk meg azokat az A komplex számokat, és $p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z_k$ ($n \geq 1$) polinomokat, hogy minden z komplex számra teljesüljön a

$$p_n(z) = A \overline{p_n(\bar{z})}$$

összefüggés.

221. Írjuk fel (a komplex számok körében) gyöktényezősz alakban:

- a) $x^2 + 5x + 6$; b) $2x^2 + 4x + 4$;
 c) $x^2 + (1+i)x + 1$; d) $x^4 + 16$;
 e) $x^4 + 4i$; f) $x^4 + 2x^2 + (1-2i)$;
 g) $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$; h) $x^3 + x + 2$;
 i) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$; j) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
 k) $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$.

222. Bontsuk tényezőkre a valós számok körében a következő polinomokat:

- a) $x^3 + x + 2$; b) $x^4 + 16$;
 c) $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$;
 d) $x^4 - a x^2 + 1$; ahol a valós és $|a| < 2$;
 e) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

223. Irjuk fel azt a legalacsonyabb fokszámú normálpolinomot, amelynek

- a) 1 kétszeres, 2, 3, $1+i$ egyszeres,
- b) -1 háromszoros, 3 és 4 egyszeres
- c) i kétszeres, $-1-i$ egyszeres gyöke.

224. Irjuk fel azt a legalacsonyabb fokszámú valós együtthatóju normálpolinomot, amelynek

- a) 1 kétszeres, 2, 3, $1+i$ egyszeres,
- b) $2-3i$ háromszoros,
- c) i kétszeres, $-1-i$ egyszeres gyöke.

225. Határozzuk meg a

$$p_5(z) = z^5 + (1+2i)z^4 - (1+3i)z^2 + 7$$

polinom értékét a $z_0 = -2 - i$ helyen.

226. Osszuk el a $p(z)$ polinomot a $z - z_0$ polinommal. Határozzuk meg a hányadost és a maradékot, ha

- a) $p_3(z) = 4z^3 + z^2$, $z_0 = -1-i$; b) $p_3(z) = z^3 - z^2 + z$, $z_0 = 1 - 2i$.

227. Határozzuk meg A -t és B -t, ha

- a) $p_4(x) = Ax^4 + Bx^3 + 1$ polinom osztható $(x-1)^2$ -nel.
- b) $p_{n+1}(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ polinom osztható $(x-1)^2$ -nel.

228. Igazoljuk, hogy az $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2}$ polinom osztható $x^2 + x + 1$ -gyel ($m, n, k \geq 1$ egész számok).

229. Milyen n természetes szám esetén osztható az $x^{2n} + x^n + 1$ polinom az $x^2 + x + 1$ polinommal?

230. Igazoljuk, hogy az $x^4 + px^2 + q = 0$ egyenlet gyökeinek összege 0, szorzata q .

231. Igazoljuk, hogy ha az $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ egyenlet együttható között fennáll a $q^2 = 2rp$ összefüggés, akkor az egyenlet x_1, x_2, x_3 gyökei között érvényes a következő összefüggés:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2.$$

232. Írjuk fel azt a harmadfoku egyenletet, amelynek gyökei x_1, x_2, x_3 , a harmadfoku tag együtthatója 2, ha

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 2, \quad \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = 4, \quad \frac{1}{x_1 x_2 x_3} = 8.$$

233. A $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom együtthatói egész számok. Igazoljuk, hogy ha az $x_0 = \frac{p}{q}$ (p, q egész és $(p, q) = 1$) racionális szám gyöke a polinomnak, akkor

- a) q osztója a_n -nek; b) p osztója a_0 -nak;
- c) $p-q$ osztója $p_n(1)$ -nek; d) $p+q$ osztója $p_n(-1)$ -nek;
- e) $p-mq$ osztója $p_n(m)$ -nek.

IV. Mátrixalgebra

IV/1. Determinánsok

Számítsuk ki a következő determinánsok értékét:

$$234. \quad \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

$$235. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$236. \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$237. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$238. \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$239. \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$240. \quad \begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -4 & -12 \end{vmatrix}.$$

$$241. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

$$242. \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$243. \quad \begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$244. \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$245. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$246. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Fejtsük ki a következő determinánsokat:

$$247. \quad \begin{vmatrix} a+b & -2(a+b) \\ b & a-b \end{vmatrix}$$

$$248. \quad \begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}.$$

$$249. \quad \begin{vmatrix} z+1 & z \\ z^2 & z^2-z+1 \end{vmatrix}$$

$$250. \quad \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}, \quad a > 0, a \neq 1, \\ b > 0, b \neq 1.$$

$$251. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

$$252. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

$$253. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

$$254. \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}.$$

$$255. \begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a \end{vmatrix}.$$

$$256. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$257. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő determinánsokat, ahol $i^2 = -1$ és $e = e_{31}$ harmadik egységyök:

$$258. \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{vmatrix}.$$

$$259. \begin{vmatrix} e & e \\ -1 & e \end{vmatrix}.$$

$$260. \begin{vmatrix} e^2 & e^2 \\ e^2 & -e \end{vmatrix}.$$

$$261. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$262. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & e & e^2 \\ e^2 & e & 1 \end{vmatrix}.$$

$$263. \begin{vmatrix} 1 & 1 & e \\ 1 & 1 & e^2 \\ e^2 & e & 1 \end{vmatrix}.$$

264. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy a Vandermonde-féle determináns a következő módon számítható ki:

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

265. Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = V_4(a, b, c, d) .$$

266. Igazoljuk, hogy a nem egyenesbe eső $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ pontokon áthaladó kör egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

267. Igazoljuk, hogy

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + d_1 & a_1 + 2d_1 & \dots & a_1 + (n-1) d_1 \\ a_2 & a_2 + d_2 & a_2 + 2d_2 & \dots & a_2 + (n-1) d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n + d_n & a_n + 2d_n & \dots & a_n + (n-1) d_n \end{vmatrix} = 0 .$$

A következő n -edrendű determinánsokat a bennük szereplő változók kifejezéseként írjuk fel.

268.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(A determináns un. felső háromszög determináns, a főátló alatt levő minden elem nulla.)

269.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n} \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(A mellékátló felett levő minden elem nulla.)

270.

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a+x \\ a & a & \dots & a+x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+x & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$$

271.

$$D = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$$

272. Írjuk fel az

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+a & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+a & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+a \end{vmatrix}$$

polinomot gyöktényezőss alakban.

273. Végezzük el a következő determinánsok szorzását:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

IV/2. Műveletek mátrixokkal

274. Határozzuk meg az $\underline{A} + \underline{B}$, $\underline{A} - \underline{B}$, $5\underline{B} - \underline{A}$ mátrixokat, ha

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

275. Határozzuk meg az $\underline{A} + \underline{B}$, $\underline{A} - \underline{B}$, $3\underline{A} - 2\underline{B}$ mátrixokat, ha

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

276. Határozzuk meg az $\underline{AB}$ és $\underline{BA}$ mátrixokat, ha

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \underline{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \text{b) } \underline{A} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, & \underline{B} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \\ \text{c) } \underline{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, & \underline{B} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \\ \text{d) } \underline{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, & \underline{B} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$e) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

277. Határozzuk meg az

$$\begin{array}{ll} a) & (\underline{A} + \underline{B})^2 \\ b) & \underline{A}^2 + 2\underline{A}\underline{B} + \underline{B}^2 ; \\ c) & \underline{A}^2 + \underline{B}\underline{A} - \underline{A}\underline{B} - \underline{B}^2 \\ d) & (\underline{A} + \underline{B})(\underline{A} - \underline{B}) ; \\ e) & \underline{A}^2 - \underline{B}\underline{A} + \underline{A}\underline{B} - \underline{B}^2 \\ f) & \underline{A}^2 - \underline{B}^2 \end{array}$$

mátrixokat, ha $\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Van-e egyenlő a hat mátrix között? Ha igen, melyek egyenlők?

278. Határozzuk meg a következő mátrixokat:

$$a) \quad \underline{P}_{31}^2, \underline{P}_{31}^3 \text{ ha } \underline{P}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$b) \quad \underline{P}_{41}^2, \underline{P}_{41}^3, \underline{P}_{41}^4, \text{ ha } \underline{P}_{41} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$c) \quad \underline{T}^n, \text{ ha } \underline{T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$d) \quad \underline{A}^n, \underline{B}^n, \underline{C}^n, \text{ ha } \underline{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

279. Határozzuk meg az $(\underline{A}\underline{B})\underline{C}$ és $\underline{A}(\underline{B}\underline{C})$ mátrixokat, ha

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

280. Az alábbi négyzetes mátrixok közül melyik reguláris és melyik szinguláris?

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix},$ b) $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$

c) $\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$

281. Szorozzuk meg az $\underline{A}$ négyzetes mátrixot jobbról és balról is a transponáltjával, $\underline{A}'$ -vel, ha $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$

Igazoljuk, hogy mindkét esetben szimmetrikus mátrixot kapunk.

282. Igazoljuk, hogy $\underline{A}\underline{B} - \underline{B}\underline{A} = \underline{E}_n$ nem lehetséges.

283. Igazoljuk, hogy ha $\underline{A}$ reguláris négyzetes mátrix és $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A}$, akkor $\underline{A}^{-1}\underline{B} = \underline{B}\underline{A}^{-1}.$

284. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{A}$ négyzetes mátrix felírható egy $\underline{S}$ szimmetrikus ($\underline{S} = \underline{S}'$) és egy $\underline{T}$ antiszimmetrikus ($\underline{T}' = -\underline{T}$) mátrix összegeként és $\underline{S} = \frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}')$, $\underline{T} = \frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{A}')$.

285. Bontsuk fel a következő mátrixokat egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}; & \text{b)} \quad & \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \\ \text{c)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

286. Végezzük el a következő szorzásokat:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & [x, y] \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \\ \text{b)} \quad & [x, y] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \\ \text{c)} \quad & [x, y, z] \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \\ \text{d)} \quad & [x, y, z] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

20. példa. Határozzuk meg az $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

mátrix inverz mátrixát.

Megoldás: Mivel $\det \underline{A} = -85$, így $\underline{A}$ reguláris mátrix, létezik az inverz mátrixa $\underline{A}^{-1}$, és $\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{A}^x}{\det \underline{A}}$, ahol $\underline{A}^x$ az $\underline{A}$ mátrix asszociált (adjungált) mátrixa. (Az $\underline{A}^*$ elemei az $\underline{A}^T$ (transzponált mátrix) megfelelő elemeinek előjeles aldeterminánsai.)

Most $\underline{A}^* = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -28 \\ 17 & -17 & -17 \\ -13 & -2 & 8 \end{bmatrix},$

ezért

$$\underline{A}^{-1} = -\frac{1}{85} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -28 \\ 17 & -17 & -17 \\ -13 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizhető, hogy $\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{E}_3.$

287. Határozzuk meg a következő mátrixok inverz mátrixát:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix};$

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$

21. példa. Oldjuk meg az $\underline{A} \underline{X} = \underline{B}$ mátrix egyenletet, ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ adott n -edrendű négyzetes mátrixok és $\underline{A}$ reguláris.

Megoldás: Világos, hogy ha van ilyen $\underline{X}$ mátrix, akkor $\underline{X}$ n -edrendű négyzetes mátrix. Szorozzuk meg az $\underline{A} \underline{X} = \underline{B}$ egyenlet mindkét oldalát $\underline{A}^{-1}$ -gyel. Ekkor $\underline{A}^{-1}(\underline{A}\underline{X}) = \underline{A}^{-1}\underline{B}$, és mivel $\underline{A}^{-1}(\underline{A}\underline{X}) = (\underline{A}^{-1}\underline{A})\underline{X} = \underline{E}\underline{X} = \underline{X}$, ezért

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B}.$$

$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B}$ valóban megoldás, s ez helyettesítéssel ellenőrizhető.

Határozzuk meg az $\underline{X}$ mátrixot a következő egyenletekből:

288. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$

$$289. \quad \underline{X} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$290. \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \underline{X} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$291. \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$292. \quad \underline{X} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

IV/3. Mátrix rangja

22. példa. Határozzuk meg az A mátrix rangját.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & -8 & 19 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: A mátrixon végrehajtott elemi sor- és oszlopműveletekre a következő jelöléseket alkalmazzuk:

1. A mátrix i -edik és j -edik sorának felcserélésére: S_{ij} .
2. A mátrix i -edik és j -edik oszlopának felcserélésére: O_{ij} .
3. A mátrix i -edik sora elemeinek egy $\lambda \neq 0$ számmal való szorzása: $S_i(\lambda)$.
4. A mátrix j -edik oszlopa elemeinek egy $\lambda \neq 0$ számmal való szorzása: $O_j(\lambda)$.
5. A mátrix j -edik sora λ -szorosának az i -edik sorhoz való hozzáadása: $S_{ij}(\lambda)$.
6. A mátrix j -edik oszlopa λ -szorosának az i -edik oszlophoz való hozzáadása: $O_{ij}(\lambda)$.

A mátrixon végrehajtott elemi átalakításokat a mátrix alatt jelezzük. Minden átalakítás arra a mátrixra vonatkozik, amelyet az előző átalakítás során kaptunk.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & -8 & 19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \\ 0 & -7 & 13 & -1 & 41 \\ 0 & 11 & -17 & 5 & -61 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$s_{21}(-2); s_{31}(3); s_{41}(1) \quad 0_{21}(-3); 0_{31}(5); 0_{41}(-2); 0_{51}(19)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 13 & -1 & 41 \\ 0 & 11 & -17 & 5 & -61 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 41 & 41 & 41 \\ 0 & 11 & -61 & -61 & -61 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$0_{32}(-4); 0_{42}(-6) \quad 0_{43}(-1); 0_{53}(-1); s_{34}(11); s_{24}(-7)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -61 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_2\left(\frac{1}{42}\right), s_3\left(-\frac{1}{61}\right), s_4(-1) \quad s_{32}(-1)$$

Az utolsó mátrix az $\underline{A}$ mátrixszal ekvivalens. Ennek bármely sorában és oszlopában legfeljebb egy zérustól különböző elem áll, így rangja 3. Kaptuk: $r(\underline{A}) = 3$.

A mátrix rangját úgy is meghatározhatjuk, hogy meghatározzuk a legmagasabbrendű reguláris minor mátrixának a rendjét.

$$\underline{A} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \\ 0 & -7 & 13 & -1 & 41 \\ 0 & 11 & -17 & 5 & -61 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 11 & -17 & 5 & -61 \\ 0 & -7 & 13 & -1 & 41 \end{bmatrix}$$

$$s_{24} \quad s_{32}(11), s_{42}(-7)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -61 & -61 & -61 \\ 0 & 0 & 41 & 41 & 41 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -61 & -61 & -61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{42} \begin{pmatrix} 41 \\ 61 \end{pmatrix}$$

Az utolsó mátrixnak van reguláris harmadrendű minormátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -61 \end{bmatrix}, \text{ és minden magasabbrendű minormátrixa szinguláris. Így } r(\underline{A}) = 3.$$

A mátrix felbontható diadikus szorzatok (diádok) összegére.

$$\underline{A} = \underline{u}_1 \underline{v}'_1 + \underline{u}_2 \underline{v}'_2 + \dots + \underline{u}_r \underline{v}'_r. \quad (1)$$

Az (1) felbontás nem egyértelmű.

A mátrix rangja az (1) alakú előállításához szükséges diádok minimális számával egyenlő.

Állítsuk elő az $\underline{A}$ mátrix (1) felbontását. Válasszuk $\underline{u}_1$ -nek az $\underline{A}$ első oszlopvektorát, $\underline{v}'_1$ -nek $\underline{A}$ első sorvektorát.

$$\underline{u}_1 \underline{v}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \\ 2 & 6 & -10 & 4 & -38 \\ -3 & -9 & 15 & -6 & 57 \\ -1 & -3 & 5 & -2 & 19 \end{bmatrix} = \underline{B}^{(1)}$$

$$\underline{A} - \underline{B}^{(1)} = \underline{A} - \underline{u}_1 \underline{v}'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 13 & -1 & 41 \\ 0 & 11 & -17 & 5 & -61 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Válasszuk $\underline{u}_2$ -nek $\underline{A} - \underline{B}^{(1)}$ második oszlopvektorát, $\underline{v}'_2$ -nek $\underline{A} - \underline{B}^{(1)}$ negyedik sorvektorának (-1) -szeresét.

$$\underline{u}_2 \underline{v}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 11 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [0 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -28 & -42 & 0 \\ 0 & 11 & 44 & 66 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \underline{B}^{(2)}$$

$$\underline{A} - \underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)} = \underline{A} - \underline{u}_1 \underline{v}_1' - \underline{u}_2 \underline{v}_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41 & 41 & 41 \\ 0 & 0 & -61 & -61 & -61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Válasszuk $\underline{u}_3$ -nak $\underline{A} - \underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}$ harmadik oszlopvektorát, $\underline{v}_3'$ -nak $\underline{A} - \underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}$ második sorvektorának $\frac{1}{41}$ -szeresét.

$$\underline{u}_3 \underline{v}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 41 \\ -61 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41 & 41 & 41 \\ 0 & 0 & -61 & -61 & -61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{B}^{(3)}.$$

$$\underline{A} - \underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)} - \underline{B}^{(3)} = \underline{A} - \underline{u}_1 \underline{v}_1' - \underline{u}_2 \underline{v}_2' - \underline{u}_3 \underline{v}_3' = 0, \text{ tehát}$$

$\underline{A} = \underline{u}_1 \underline{v}_1' + \underline{u}_2 \underline{v}_2' + \underline{u}_3 \underline{v}_3'$. Az itt alkalmazott eljárás a lehető legkevesebb diádra való felbontáshoz vezet, azaz a diádok száma megegyezik a mátrix rangjával. Most tehát $r(\underline{A}) = 3$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \quad 3 \quad -5 \quad 2 \quad -19] + \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 11 \\ -1 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 0] + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 41 \\ -61 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1].$$

Határozzuk meg a következő mátrixok rangját:

$$293. \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$294. \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$295. \underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$296. \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -9 \\ -3 & -3 & 4 & 2 & 21 \end{bmatrix}.$$

$$297. \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$298. \underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

299. Igazoljuk, hogy az

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

síkok akkor és csakis akkor

a) metszik egymást, ha az $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$ mátrix rangja 2.

b) párhuzamosak, ha az $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$ mátrix rangja 1, és az

és az $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix}$ mátrix rangja 2.

Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a két sík egybeessen?

V. Lineáris egyenletrendszerek

Az $\underline{Ax} = \underline{b}$ (1) lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $r(\underline{C}) = r(\underline{A})$, ahol $\underline{C} = [\underline{A}, \underline{b}]$ az egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Ha az (1) egyenletrendszer ismeretleneinek száma n , és $r(\underline{A}) = r(\underline{C}) = n$, akkor az (1) egyenletrendszernek egy és csakis egy megoldása van.

Ha az (1) egyenletrendszerben az egyenletek és ismeretlenek száma n , és $\underline{A}$ reguláris (n -edrendű négyzetes) mátrix, akkor $\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$.

Az $\underline{Ax} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek az $\underline{x} = 0$ mindig megoldása (triviális megoldás).

Az $\underline{Ax} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálisól különböző megoldása, ha $r(\underline{A}) < n$, ahol n az ismeretlenek száma. Ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik, úgy az $\underline{Ax} = 0$ egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálisól különböző megoldása, ha $\underline{A}$ szinguláris mátrix, azaz $\det \underline{A} = 0$.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

23. példa.

$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4,$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6.$$

1. megoldás: A Gauss-féle megoldásmódszerrel dolgozunk. Az átalakításokat az egyenletrendszerhez tartozó $\underline{C}$ mátrixon hajtjuk végre és ennek segítségével felírhatjuk a redukált egyenletrendszert. (Jegyzet /14. 2/ alak.)

A mátrixokon végrehajtott elemi átalakításokat a mátrixok alatt a megfelelő betűjelekkel jelöljük.

$$\begin{aligned} \underline{C} = & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 7 & -14 & 21 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \end{array} \right] \sim \\ & \quad S_{13} \quad S_{21}(-3), S_{31}(-2) \quad S_2\left(\frac{1}{7}\right) \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array} \right] . \\ & \quad S_{32}(-1) \end{aligned}$$

Ez utóbbitól látható, hogy $r(\underline{A}) = r(\underline{C}) = 3$, tehát az egyenletrendszernek egy és csakis egy megoldása van, amelyet a redukált egyenletrendszerből megkaptunk. A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= -6, \\x_2 - 2x_3 &= 3, \\-x_3 &= 1.\end{aligned}$$

Igy $x_3 = -1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$. A megoldásvektor: $\underline{x} = [2, 1, -1]^T$.

2. megoldás: Most $\det \underline{A} = -7 \cdot 5$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -35$$

zérustól különböző, ezért $\underline{A}$ reguláris, tehát $\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} -7 & 16 & 1 \\ -14 & 7 & 7 \\ -7 & 1 & 11 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} -7 & 16 & 1 \\ -14 & 7 & 7 \\ -7 & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$\underline{x} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 70 \\ 35 \\ -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ azaz } x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Megjegyzés. Az egyenletrendszer három egyenlete egy-egy sík egyenleteként tekinthető. A három síknak most egy közös pontja van: $P(2; 1; -1)$.

24. példa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: $\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 5 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$

$$S_{21}(2), S_{31}(-1)$$

$$S_{32}(1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] . \text{ Látható, hogy } r(\underline{A}) = 2,$$

$r(\underline{C}) = 3$,   gy az egyenletrendszernek nincs megoldása. A redukált egyenletrendszer harmadik egyenlete:

$$0 x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 = 5 .$$

Ebből is látható, hogy az egyenletrendszer ellentmondást tartalmaz.

Megjegyzés: A három egyenlet   tal reprezentált három síknak nincs közös pontja.

25. példa. $\left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$

Megoldás: $\underline{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim$

$$S_{21}(-2), S_{31}(-1) \quad S_{32}(-1), S_2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] . \text{ Most } r(\underline{A}) = r(\underline{C}) = 2 .$$

Az egyenletrendszernek van megoldása. A megoldás egy szabad paramétert tartalmaz. A redukált egyenletrendszer:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 ,$$

$$x_2 + x_3 = 0 .$$

Legyen $x_3 = t$. Ekkor $x_2 = -t$, $x_1 = 2x_2 + x_3 + 1 = 1 - t$. A megoldásvektor $\underline{x} = [1-t, -t, t]$.

Megjegyzés. A három egyenlet   tal reprezentált síkoknak közös egyenesük van, a megoldás a közös egyenes paraméteres egyenletrendszere.

26. példa. $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$,
 $2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0$,
 $3x_1 - x_3 + x_4 = 0$,
 $2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0$.

Megoldás: A homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van triviális megoldása. Van-e triviálisától különböző megoldása?

$$\underline{C} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\begin{array}{c} 0_{13} \qquad S_{31}^{(1)}, S_{41}^{(2)} \\ \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\begin{array}{c} S_{32}^{(-1)} \qquad S_{43}^{(-2)} \\ \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{array} \right] . \quad r(\underline{A}) = 4 . \text{ Az egyenletrendszernek csak} \\ \text{a triviális megoldása létezik. Ez a re-} \\ \text{dukált egyenletrendszerből is jól lát-} \\ \text{ható.} \end{array}$$

(A 0_{13} átalakítással az x_1 és x_3 ismeretlen helyet cserélt.)

$$\begin{array}{l} x_3 - x_2 + 2x_1 - x_4 = 0 , \\ -x_2 + 2x_1 - 3x_4 = 0 , \\ 3x_1 - 3x_4 = 0 , \\ 9x_4 = 0 . \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 . \end{array}$$

27. példa.

$$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 ,$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 ,$$

$$x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0 ,$$

$$x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0 .$$

Megoldás: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & -9 & -14 \end{bmatrix} \sim$

$$S_{k1}(-1), k = 2, 3, 4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{32}(1), S_{42}(2)$$

$$S_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$r(A) = 2$. Az egyenletrendszernek (kétszeresen) végtelen sok (triviálistól különböző) megoldása van.

A redukált egyenletrendszer:

$$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 ,$$

$$2x_3 + 3x_4 = 0 .$$

Legyen $x_4 = 2u$, ekkor $x_3 = -3u$. $x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 = -3u + 4u = u$. Legyen

$x_2 = v$. Ekkor $x_1 = u - v$. A megoldásvektor $\underline{x} = [u - v, v, -3u, 2u]'$.

$\underline{x} = u [1, 0, -3, 2] + v [-1, 1, 0, 0]$. A megoldások az $\underline{a}_1 = [1, 0, -3, 2]'$

és az $\underline{a}_2 = [-1, 1, 0, 0]'$ lineáris független vektorok lineáris kombinációi. (A

megoldások a négydimenziós oszlopvektorok Q^4 terének 2 dimenziós altére.

Az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ a 2 dimenziós altér egy bázisa. (Lásd Jegyzet 14.5 tétel.)

28. példa.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 2, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_5 &= -2, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 16x_4 + x_5 &= 10. \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\underline{C} = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 & -2 \\ -5 & 7 & 1 & 16 & 1 & 10 \end{array} \right] \sim$$

$$S_{21}(-3), S_{31}(-3), S_{41}(-5)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 & -8 \\ 0 & -8 & -14 & 6 & -24 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -2 & 8 \end{array} \right] \sim$$

$$S_{32}(-2), S_{42}(-2)$$

$$S_{3,4}; S_4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A redukált egyenletrendszerben cseréljük fel az x_3 és x_5 oszlopát

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 5x_5 + 2x_4 + 3x_3 &= 2, \\ -4x_2 - 11x_5 - 3x_4 - 7x_3 &= -4, \\ -x_5 + 6x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Három független egyenletünk és öt ismeretlenünk van, tehát két szabad paramétert választhatunk. Legyen az egyik szabad paraméter x_4 . Ekkor $x_5 = -4 + 6x_4$. Helyettesítsük ezt a második egyenletbe. Válasszuk a másik szabad paraméternek x_3 -at és fejezzük ki a második egyenletből x_2 -t.

$$\begin{aligned} -4x_2 - 11(-4 + 6x_4) - 3x_4 - 7x_3 &= -4, \\ x_2 &= 12 - \frac{69}{4}x_4 - \frac{7}{4}x_3. \end{aligned}$$

Helyettesítsük az első egyenletbe az x_5 és x_2 -re kapott kifejezéseket és fejezzük ki x_1 -et az egyenletből.

$$x_1 = 14 - \frac{79}{4}x - \frac{9}{4}x_3.$$

Az egyenletrendszer megoldásvektora:

$$\underline{x} = \left[14 - \frac{79}{4}x_4 - \frac{9}{4}x_3, \quad 12 - \frac{69}{4}x_4 - \frac{7}{4}x_3, \quad x_3, \quad x_4, \quad -4 + 6x_4 \right].$$

A megoldásvektor a következő alakban is írható:

$$\underline{x} = [14, 12, 0, 0, -4]' + x_4 \left[-\frac{79}{4}, -\frac{69}{4}, 0, 1, 6 \right]' + x_3 \left[-\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}, 1, 0, 0 \right]'. \quad .$$

(Figyeljük meg az $\underline{x}$ megoldásvektort a jegyzet 14.8 tétel állítása szerint!)

29. példa.

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1,$$

$$4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 1.$$

Megoldás:

$$C = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$S_{21}(-2); S_{31}(-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right]$$

$$S_{32}(-2)$$

$r(\underline{A}) = 2$, $r(\underline{C}) = 3$, $r(\underline{A}) \neq r(\underline{C})$, az egyenletrendszernek nincs megoldása. Az ellentmondás a redukált egyenletrendszer harmadik egyenletéből is jól látható.

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -6, \text{ azaz}$$

$0 = -6$, ami valóban ellentmondás.

- . -

Az $\underline{A}$ mátrix minimális diádra való felbontása alkalmazásával is megoldhatunk lineáris egyenletrendszereket.

Az $\underline{A} \underline{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer $\underline{A}$ mátrixának diádokra való felbontása:

$$\underline{A} = u_1 v_1' + u_2 v_2' + \dots + u_r v_r' = \underline{U} \underline{V}, \text{ ahol}$$

$$\underline{U} = [u_1, u_2, \dots, u_r], \quad \underline{V} = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_r' \end{bmatrix}$$

Az $\underline{A}\underline{x} = 0$ egyenletrendszer
redukált egyenletrendszere:
 $\underline{V} \underline{x} = 0$.

Az $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldását homogén egyenletrendszer megoldására vezethetjük vissza: $\underline{A}\underline{x} - \underline{b} = 0$ egyenletrendszer ekvivalens az $[\underline{A}, \underline{b}] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ -1 \end{bmatrix} = 0$

egyenletrendszerrel.

30. példa. Oldjuk meg diádokra bontás alkalmazásával a 26. példa homogén lineáris egyenletrendszerét.

Megoldás. $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Bontsuk fel az $\underline{A}$ mátrixot a megismert eljárással diádok összegére. Legyen u_1 az $\underline{A}$ harmadik oszlopvektora, v_1' az $\underline{A}$ első sorvektora.

$$\underline{A} - u_1 v_1' = \underline{A} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Válasszuk u_2 -nek az $\underline{A} - u_1 v_1'$ mátrix második oszlopvektorát, v_1' -nek a második sorvektor (-1) -szeresét.

$$\underline{A} - u_1 v_1' - u_2 v_2' = \underline{A} - u_1 v_1' - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Válasszuk $\underline{u}_3$ -nak az $\underline{A} - \underline{u}_1 \underline{v}_1' - \underline{u}_2 \underline{v}_2'$ első oszlopvektorát, $\underline{v}_3'$ -nek a harmadik sorvektor $\frac{1}{3}$ -szorosát.

$$\begin{aligned} \underline{A} - \underline{u}_1 \underline{v}_1' - \underline{u}_2 \underline{v}_2' - \underline{u}_3 \underline{v}_3' &= \underline{A} - \underline{u}_1 \underline{v}_1' - \underline{u}_2 \underline{v}_2' - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{u}_4 \underline{v}_4' \end{aligned}$$

A $\underline{Y} \underline{x} = 0$ redukált egyenletrendszer tehát:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

Ebből $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, azaz csak a triviális megoldás létezik, ami az $\underline{r}(\underline{A}) = 4$ -ből is következik.

31. példa. Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris egyenletrendszert az egyenletrendszer kiegészített mátrixának minimális diádokra bontásának alkalmazásával.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 3 \\ -4 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített $\underline{C}$ mátrixát a 22. példában diádokra bontottuk (ott $\underline{A}$ -val jelöltük a mátrixot). Ezek szerint:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 11 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 41 \\ -61 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 41 \\ -3 & 11 & -61 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{UY}.$$

Az adott egyenletrendszer redukált egyenletrendszere

$$\underline{Y} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ -1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & -19 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -19,$$

$$x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0,$$

$$x_3 + 4x_4 = 1.$$

Innen, ha $x_4 = t$, akkor $x_3 = 1-t$, $x_2 = -4 - 2t$, $x_1 = -t - 2$.

$$\underline{x} = [-t-2, -4-2t, 1-t, t]'$$

Vizsgáljuk a következő egyenletrendszereket megoldhatóság szempontjából. Ha megoldható az egyenletrendszer, akkor írjuk is fel a megoldását.

300.

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0,$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0,$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0,$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 301. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\
 & x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0, \\
 & x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0.
 \end{aligned}$$

$$302. \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0.$$

$$303. \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

$$304. \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$305. \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

$$306. \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$307. \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$308. \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} .$$

$$309. \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

$$310. \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} .$$

$$311. \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

$$312. \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

$$313. \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

314.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

315.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

316.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

317.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

318.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

319.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 23 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

$$320. \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$321. \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$322. \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A λ paraméter értékétől függően vizsgáljuk és oldjuk meg a következő egyenletrendszereket.

32. példa.

$$x + y + \lambda z = \lambda^2,$$

$$x + \lambda y + z = \lambda,$$

$$\lambda x + y + z = 1.$$

Megoldás. Az egyenletrendszer $\mathbb{C}$ kibővített mátrixát hozzuk Gauss alak-
ra. Az átalakítások során feltesszük, hogy $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{C}} &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array} \right] \sim \\ & \quad S_{21}(-1); S_{31}(-\lambda) \quad S_2\left(\frac{1}{1-\lambda}\right); S_3\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) \end{aligned}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda + \lambda^2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (\lambda+2)^2 \end{array} \right] .$$

$\dots S_{32}^{(1)}$

A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x + y + \lambda z &= \lambda^2 , \\ -y + z &= \lambda , \\ (2+\lambda) z &= (\lambda+1)^2 . \end{aligned}$$

Ha $\lambda \neq 1$ és $\lambda \neq -2$, akkor $r(\underline{A}) = r(\underline{C}) = 3$, így az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van:

$$\underline{x} = \left[-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \right]' .$$

Ha $\lambda = 0$, akkor $r(\underline{A}) = r(\underline{C}) = 3$ és az $\underline{x}$ megoldás erre is vonatkozik.

Ha $\lambda = 1$, akkor $\underline{C} \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] ,$

tehát az egyenletrendszer redukált egyenletrendszere

$$x + y + z = 1 .$$

Ha $y = u$ $z = v$ a szabad paraméter, akkor

$$\underline{x} = [1 - u - v, u, v]' .$$

Megjegyzés. Az egyenletrendszer három egyenlete ebben az esetben egybeesik, a megoldás a sík kétparaméteres egyenletrendszere.

Ha $\lambda = -2$, akkor $\underline{C} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

Látható, hogy $r(\underline{C}) = 2$, $r(\underline{A}) = 3$, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. A redukált egyenletrendszer utolsó egyenlete ellentmondó.

$$0x + 0y + 0z = 1 .$$

33. példa.

$$x - y + z = 0 ,$$

$$2x + (\lambda - 1)y + 4z = 0 ,$$

$$3x - 5y + (2 - \lambda)z = 0 .$$

Megoldás: $\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 2 - \lambda & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -(1 + \lambda) & 0 \end{bmatrix} .$

$$S_{21}(-2); S_{31}(-3)$$

Ha $\lambda = -1$, akkor az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van, ami a redukált egyenletrendszerből jól látható. Ha $\lambda \neq -1$, akkor az

$S_{32}\left(\frac{2}{\lambda + 1}\right)$ átalakítást hajtsuk végre.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\lambda + 1} - (\lambda + 1) & 0 \end{bmatrix} .$$

A redukált egyenletrendszer:

$$x - y + z = 0 ,$$

$$(\lambda + 1)y + 2z = 0 ,$$

$$\left(\frac{4}{\lambda + 1} - (\lambda + 1)\right)z = 0 .$$

Ha $\frac{4}{\lambda + 1} - (\lambda + 1) \neq 0$, azaz $\lambda \neq 1$ és $\lambda = -3$, akkor az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ha $\lambda = 1$, akkor az egyenletrendszernek (egyszeresen) végtelen sok megoldása van.

$$x - y + z = 0 ,$$

$$y + z = 0 .$$

Ha $z = -t$, akkor $x = 2t$, $y = t$.

Ha $\lambda = -3$, akkor az egyenletrendszernek (kétszeresen) végtelen sok megoldása van.

$$x - y + z = 0 ,$$

$$-x + z = 0 .$$

Ha $y = u$, $z = v$, akkor $x = u - v$.

$$\underline{x} = [x, y, z]' = [u-v, u, v]' = u \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A λ paraméter értékétől függően vizsgáljuk és oldjuk meg a következő egyenletrendszereket.

$$323. \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

$$324. \quad \begin{bmatrix} 3 & -8 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & -3 & -8 \\ 3 & -11 & 5 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ -\lambda \end{bmatrix}.$$

$$325. \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$326. \quad \begin{bmatrix} \lambda+3 & 2 & -1 & 4 \\ \lambda & \lambda-1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 11 \\ 1 & 4 & -1 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 2 \\ -10 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

$$327. \quad \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3+\lambda & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 8+\lambda & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 8+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda+1 \\ \lambda+2 \\ \lambda+2 \end{bmatrix}.$$

328. Mi a feltétele annak, hogy a $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$ pontok egy egyenesre illeszkedjenek?

329. Mi a feltétele annak, hogy az (x, y) síkban fekvő n egyenes, $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ egy ponton menjen át?

330. A $P_i(x_i; y_i; z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ pontok mikor milyen feltétel mellett illeszkednek ugyanarra a síkra, illetve ugyanarra az egyenesre?

331. Mi a feltétele annak, hogy az $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ síkoknak legyen közös pontjuk, illetve legyen közös egyenesük?

VI. Lineáris terek

34. példa. Legyen $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ a Q^n ($n \geq 2$) oszlopvektorok terének két lineárisan független vektora. Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ eleme Q^n -nek. Ekkor $\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2$ és $\underline{b} = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2$. Mi az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok függetlenségének szükséges és elégséges feltétele?

Megoldás. Az $\underline{a}, \underline{b} \in Q^n$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} = \underline{0} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in R)$$

egyenletből $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ következik. Most

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1) \underline{e}_1 + (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2) \underline{e}_2.$$

Mivel $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ függetlenek, ezért

$$\begin{aligned} a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 &= 0, \\ a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

s mivel $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ezért a homogén lineáris egyenletrendszerre vonatkozó 14.4 tétel szerint

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ vagy}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok tehát akkor és csak akkor függetlenek, ha $D \neq 0$.

Megjegyzés. Ha $\underline{e}_1 = \underline{i}$, $\underline{e}_2 = \underline{j}$ és $\underline{i}, \underline{j} \in Q^2$, és $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j}$, $\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j}$, akkor a feltétel nyilván azonos azzal, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok nem párhuzamosak.

332. Legyen $\underline{a}, \underline{b} \in Q^n$ ($n \geq 2$) és $\underline{a}, \underline{b}$ lineárisan függetlenek. Határozzuk meg α értékét úgy, hogy $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok összefüggők legyenek:

a) $\underline{x} = \alpha \underline{a} + 2\underline{b}$, $\underline{y} = \underline{a} - \underline{b}$;

b) $\underline{x} = (\alpha + 1) \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{y} = 2\underline{b}$;

c) $\underline{x} = \alpha \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{y} = \underline{a} + \alpha \underline{b}$.

333. Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ a Q^n ($n \geq 2$) tér két lineárisan független vektora. Határozzuk meg α és β értékét, ha

a) $3\underline{a} + 5\underline{b} = \alpha \underline{a} + (2\beta + 1) \underline{b}$;

b) $(2\alpha - \beta - 1) \underline{a} = (3\alpha + \beta + 10) \underline{b}$.

334. Legyen $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ a Q^n ($n \geq 3$) vektortér három lineárisan független vektora.

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in Q^n$ és $\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3$,

$\underline{b} = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + b_3 \underline{e}_3$, $\underline{c} = c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 + c_3 \underline{e}_3$.

Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ független vektorok legyenek? Ha $n = 3$, akkor mi a kapott feltétel vektorgeometriai jelentése?

335. Igazoljuk, hogy az $\underline{a}_1 = [0, 1, 1]'$, $\underline{a}_2 = [1, 1, 2]'$ és $\underline{a}_3 = [1, 2, 3]'$ vektorok lineárisan összefüggnek.

336. Legyen $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ a Q^n ($n \geq 3$) vektortér három lineárisan független vektora.

a) Az α milyen értéke esetén függ egymástól az $\underline{x} = \alpha \underline{a} + 4\underline{b} + 2\underline{c}$ és $\underline{y} = \underline{a} + \alpha \underline{b} - \underline{c}$ vektor?

b) Az α milyen értéke esetén független egymástól az $\underline{x} = \alpha \underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}$, $\underline{y} = \alpha \underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}$ és $\underline{z} = \underline{a} - \underline{b} + \underline{c}$ vektor?

337. Igazoljuk, hogy a Q^n ($n \geq 3$) lineáris tér $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha az $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$ vektorok is lineárisan függetlenek.

338. Igazoljuk, hogy ha $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ a Q^n ($n \geq 3$) vektortér három lineárisan független vektora, akkor

a) $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{b} - \underline{c}$ és $\underline{c} - \underline{a}$ vektorok lineárisan összefüggnek;

b) $\alpha \underline{a} - \beta \underline{b}$, $\gamma \underline{b} - \alpha \underline{c}$, $\beta \underline{c} - \gamma \underline{a}$ vektorok lineárisan összefüggnek.

339. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a Q^n ($n \geq 3$) lineáris tér lineárisan független vektorai. Hogyan kell λ -t megválasztani, hogy az $\underline{x} = \lambda \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $\underline{y} = \underline{a} + \lambda \underline{b} + \underline{c}$ és $\underline{z} = \underline{a} + \underline{b} + \lambda \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, illetve hogyan, hogy lineárisan összefüggők legyenek?

35. példa. Adott Q^4 lineáris tér $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4$ vektora. Hány maximálisan független vektor található a négy vektor között? $\underline{x}_1 = [2, 1, 3, -1]'$, $\underline{x}_2 = [-1, 1, -3, 1]$, $\underline{x}_3 = [4, 5, 3, -1]$, $\underline{x}_4 = [1, 5, -3, 1]$.

1. megoldás. A négy oszlopvektorból előállított

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja a maximálisan független vektorok számával egyezik meg. Hajtsuk végre a következő átalakításokat: $0_{21}(1)$; $0_{31}(-1)$; $0_{41}(1)$.

$$\underline{A} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0_{32}(-2); 0_{42}(-3)$$

A vektorok között maximálisan 2 független vektor található. Független például az $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$.

Megjegyzés. Az átalakítások során $\underline{A}$ -val ekvivalens mátrixok oszlopvektorai a következők:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4] \sim [\underline{x}_1, \underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{x}_3 - \underline{x}_1, \underline{x}_4 + \underline{x}_1] \sim \\ &\sim [\underline{x}_1, \underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{x}_3 - 3\underline{x}_1 - 2\underline{x}_2, \underline{x}_4 - 2\underline{x}_1 - 3\underline{x}_2]. \end{aligned}$$

Mivel $\underline{x}_3 - 3\underline{x}_1 - 2\underline{x}_2 = \underline{0}$ és $\underline{x}_4 - 2\underline{x}_1 - 3\underline{x}_2 = \underline{0}$, ezért $\underline{x}_3 = 3\underline{x}_1 + 2\underline{x}_2$ és $\underline{x}_4 = 2\underline{x}_1 + 3\underline{x}_2$.

2. megoldás. A vektorok függetlenségének meghatározása szerint, ha

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \lambda_3 \underline{x}_3 + \lambda_4 \underline{x}_4 = \underline{0} \quad (1)$$

homogén lineáris egyenletrendszernek csak a triviális megoldása létezik, akkor a vektorok függetlenek. Most az (1) egyenletrendszer A mátrixán hajtsuk végre a következő sorműveleteket:

$$\begin{aligned} & S_3\left(\frac{1}{3}\right), S_{43}(1), S_{32}(-1), S_{12}(-3) \\ \underline{A} \sim \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & S_1\left(-\frac{1}{3}\right); S_3\left(-\frac{1}{2}\right) \quad S_{31}(-1) \end{aligned}$$

Az (1) egyenletrendszer redukált egyenletrendszere:

$$\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0.$$

Ha a λ -k közül kettőt (pl. λ_3 -t és λ_4 -et) nullától különböző szabad paraméternek választunk, akkor a másik kettőt (λ_1 és λ_2) ezekkel kifejezhető, így az $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ és $\underline{x}_4$ vektorok között maximálisan két független vektor van.

Megjegyzés. Most $\lambda_1 = -3\lambda_3 - 2\lambda_4$, $\lambda_2 = -2\lambda_3 - 3\lambda_4$, így

$$(-3\lambda_3 - 2\lambda_4)\underline{x}_1 + (-2\lambda_3 - 3\lambda_4)\underline{x}_2 + \lambda_3\underline{x}_3 + \lambda_4\underline{x}_4 = \underline{0}, \quad \text{azaz}$$

$$\lambda_3(\underline{x}_3 - 3\underline{x}_1 - 2\underline{x}_2) + \lambda_4(\underline{x}_4 - 2\underline{x}_1 - 3\underline{x}_2) = \underline{0}, \quad \text{tehát } \underline{x}_3 = 3\underline{x}_1 + 2\underline{x}_2 \text{ és}$$

$$\underline{x}_4 = 2\underline{x}_1 + 3\underline{x}_2, \quad \text{ahogyan azt az előző megoldásban is kaptuk.}$$

- . -

Határozzuk meg, hogy a következő vektorok lineárisan függetlenek, vagy lineárisan összefüggők-e? Ha lineárisan összefüggők, akkor válasszuk ki a lineárisan függetleneket, és ezekkel fejezzük ki a többi vektort.

340. $\underline{a}_1 = [1, 1, 1, 1]', \quad \underline{a}_2 = [4, 4, 4, 4]';$
341. $\underline{a}_1 = [1, 2, 3, 4]', \quad \underline{a}_2 = [4, 3, 2, 1]',$
 $\underline{a}_3 = [5, 5, 5, 5]';$
342. $\underline{a}_1 = [1, -1, 1, -1]', \quad \underline{a}_2 = [1, 0, 1, 0]',$
 $\underline{a}_3 = [1, -3, 1, -3]';$
343. $\underline{a}_1 = [1, 1, 1]', \quad \underline{a}_2 = [1, 2, 3]', \quad \underline{a}_3 = [1, 3, 3]';$
344. $\underline{a}_1 = [1, 1, 1, 1]', \quad \underline{a}_2 = [1, -1, 1, -1]',$
 $\underline{a}_3 = [2, 2, 1, 4]', \quad \underline{a}_4 = [2, 1, 1, 3]';$
345. $\underline{a}_1 = [1, 2, 3, 4]', \quad \underline{a}_2 = [4, 1, 2, 3]',$
 $\underline{a}_3 = [3, 4, 1, 2]', \quad \underline{a}_4 = [1, -1, -1, -1]';$
346. $\underline{a}_1 = [-2, 3, -4, 1]', \quad \underline{a}_2 = [1, -2, -4, 1]',$
 $\underline{a}_3 = [5, 1, 1, 0]', \quad \underline{a}_4 = [-4, -5, -2, 1]';$
347. $\underline{a}_1 = [2, 0, 1, 3, -1]', \quad \underline{a}_2 = [1, 1, 0, -1, 1]',$
 $\underline{a}_3 = [0, -2, 1, 5, -3]', \quad \underline{a}_4 = [1, -3, 2, 9, -5].$

348. Igazoljuk, hogy a Q^3 lineáris tér $\underline{a} = [a_1, 0, 2a_1]$ típusu vektorai ($a_1 \in R$) a lineáris tér egy alterét alkotják. Mely vektorok feszítik ki az alteret?

349. Igazoljuk, hogy a Q^3 lineáris tér $\underline{a} = [2a_1, a_2, 3a_1]$ típusu vektorai ($a_1, a_2 \in R$) a lineáris tér egy alterét alkotják. Mely vektorok feszítik ki az alteret?

350. A háromdimenziós vektorok lineáris terének alterét alkotják-e azok az origóból kiinduló vektorok, amelyek végpontjainak koordinátái mind pozitív számok. (A koordinátákat az i, j, k bázisra vonatkoztatjuk.)

Igazoljuk, hogy a következő halmazok lineáris teret alkotnak.

351. A valós számok végtelen sorozatai. (A sorozatok összeadását és számmal való szorzását a szokott módon értelmezzük.)

352. A valós együtthatóju, egyváltozós polinomok. (A polinomok összeadását és valós számmal való szorzását a szokott módon értelmezzük.)

353. A valós együtthatóju legfeljebb n -edfoku (n adott természetes szám) egyváltozós polinomok.

354. A valós együtthatóju kétváltozós polinomok.

355. A komplex számok.

356. Az $[0; 1]$ intervallumban értelmezett valós függvények. (Az összeadás értelmezése $f(x) + g(x) = h(x)$ minden $x \in [0; 1]$ és $\lambda f(x)$ az x helyen felvett $f(x)$ függvényérték λ -szorososa,

357. Igazoljuk, hogy a

$$K(x; y) = Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D$$

(A, B, C, D tetszőleges valós számok) kifejezések lineáris teret alkotnak.

358. Igazoljuk, hogy a

$$K(x; y; z) = Ax + By + Cz + D$$

(A, B, C, D tetszőleges valós számok) kifejezések lineáris teret alkotnak. Igazoljuk, hogy a

$$K_1(x; y; z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \quad \text{és}$$

$$K_2(x; y; z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2$$

független kifejezések által generált $\lambda_1 K_1(x; y; z) + \lambda_2 K_2(x; y; z)$ kifejezések ($K_1 \neq \lambda K_2$) az eredeti lineáris tér egy alterét alkotják.

Mi a geometriai jelentése a

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$$

egyenletnek, ha $K_1(x; y; z) = 0$ és $K_2(x; y; z) = 0$ két sík egyenlete?

359. Igazoljuk, hogy az $(n \times n)$ típusu (n adott természetes szám) mátrixok lineáris teret alkotnak.

Az $\underline{A}$ négyzetes mátrix un . alsó háromszögmátrix, ha $i < k$ esetén $a_{ik} = 0$.

Igazoljuk, hogy az $(n \times n)$ típusu alsó háromszög mátrixok az $(n \times n)$ típusu mátrixok lineáris terének egy alterét alkotják.

360. Jelöljük Z -vel azon $(n \times n)$ típusu mátrixok halmazát, amelyek fő-diagonalisában minden elem zérus.

Lineáris tér-e, ha Z -ben az összeadást és a valós számmal való szorzást a szokásos módon értelmezzük?

361. Jelöljük Z -vel azon függvények halmazát, amelyek értelmezési tartománya $[0; 1]$, és amelyek értéke legfeljebb véges számú helyen zérus. Lineáris tér-e Z , ha Z -ben az összeadást és a valós számmal való szorzást a szokásos módon értelmezzük?

VII. Bázistranszformáció

VII/1. Mátrix sajátértéke, sajátvektora

36. példa. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Legyenek A sajátértékei λ_1 és λ_2 , egységsajátvektorai $\underline{s}_1^0$, $\underline{s}_2^0$ és $\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{s}_1^0 & \underline{s}_2^0 \\ \underline{s}_1^0 & \underline{s}_2^0 \end{bmatrix}$, $\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Igazoljuk, hogy $\underline{M}' A \underline{M} = \underline{D}$.

Megoldás. Az $\underline{s}$ ($\neq 0$) vektor sajátvektora A -nak, ha $A \underline{s} = \lambda \underline{s}$, azaz $(A - \lambda E_2) \underline{s} = 0$. (1)

Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van triviálisól különböző megoldása, ha $\det(A - \lambda E) = 0$ (karakterisztikus egyenlet). Most

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\lambda-2)^2 - 1 = 0, (\lambda-3)(\lambda-1) = 0, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

A $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}]'$ sajátvektort az (1) egyenletrendszer megoldásaként kapjuk.

$$(2-3)s_{11} + s_{12} = 0,$$

$$s_{11} + (2-3)s_{12} = 0.$$

(Természetes, hogy ez a két egyenlet függ egymástól, hiszen az egyenletrendszer determinánsa nulla.) Így $s_{11} = s_{12}$. Tehát a λ_1 -hez tartozó egyik sajátvektor: $\underline{s}_1 = [1, 1]'$

A $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}_2 = [s_{21}, s_{22}]'$ sajátvektort is az (1) egyenletrendszer megoldásaként kapjuk.

$$(2-1) s_{21} + s_{22} = 0, \quad s_{21} = -s_{22}$$

Tehát a λ_2 -höz tartozó egyik sajátvektor:

$$\underline{s}_2 = [-1, 1]'$$

(Mivel $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix, így a (19.7) szerint sajátvektorai merőlegesek egymásra. Ezért az $\underline{s}_1$ ismeretében az $\underline{s}_2$ már felírható. Sok esetben célszerű az $\underline{s}_2$ -t az $\underline{s}_1$ pozitív irányú 90° -os elforgatásával nyerni.)

$$\text{Így az egységsajátvektorok: } \underline{s}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Számolással ellenőrizhető, hogy a (19.11) következmény szerint érvényes egyenlőség.

$$\underline{M}' \underline{A} \underline{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{D}.$$

37. Példa. Határozzuk meg az $\underline{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Legyenek $\underline{A}$ sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, egységsajátvektorai $\underline{s}_1^0, \underline{s}_2^0, \underline{s}_3^0$,

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{s}_1^0 & \underline{s}_2^0 & \underline{s}_3^0 \end{bmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{M}' \underline{A} \underline{M} = \underline{D}.$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0 \quad . \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = -2.$$

A $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}, s_{13}]'$ sajátvektor koordinátái kielégítik az $(\underline{A} - 3\underline{E}_3) \underline{s} = 0$ egyenletrendszert így

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = 0.$$

$$\underline{A} - 3\underline{E}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_{12}(2), s_{32}(-3), s_{31}(1), s_1\left(\frac{1}{5}\right)$$

A redukált egyenletrendszer:

$$s_{12} + s_{13} = 0,$$

$$s_{11} + 2s_{12} + s_{13} = 0.$$

Legyen $s_{12} = -1$. Ekkor $s_{13} = 1$, $s_{11} = 1$. Így egy sajátvektor $\underline{s}_1 = [1, -1, 1]'$.

(Megjegyzés. Az egyenletrendszer determinánsa nulla, így van triviálisan különböző megoldás. Próbálkozhatunk egyik s_{ii} ($i = 1, 2$ vagy 3) szabad választásával, ekkor a másik kettő meghatározható.)

A $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}_2 = [s_{21}, s_{22}, s_{23}]'$ sajátvektor koordinátái kielégítik az $(\underline{A} - 6\underline{E}_3) \underline{s} = 0$ egyenletrendszert. Így

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{bmatrix} = 0.$$

Legyen az egyenletrendszer egyik megoldásában $s_{21} = 1$. Tegyük fel, hogy ilyen megoldás van. Ekkor

$$\begin{aligned}s_{22} + 3s_{23} &= 5, \\ -s_{22} + s_{23} &= -1, \\ s_{22} - 5s_{23} &= -3.\end{aligned}$$

Az első két egyenletből adódik, hogy $s_{23} = 1$, $s_{22} = 2$. Ez az értékpár kielégíti a harmadik egyenletet is, így $\underline{s}_2 = [1, 2, 1]$.

A $\lambda_3 = -2$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}_3 = [s_{31}, s_{32}, s_{33}]'$ sajátvektor koordinátái kielégítik az $(\underline{A} + 2\underline{E}_3) \underline{s} = 0$ egyenletrendszert.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{31} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{bmatrix} = 0.$$

Az egyenletrendszer harmadik egyenlete elhagyható.

$$\begin{aligned}3s_{31} + s_{32} + 3s_{33} &= 0, \\ s_{31} + 7s_{32} + s_{33} &= 0.\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $s_{32} = 0$. Ekkor $s_{31} = -s_{33}$, így egy sajátvektor $\underline{s}_3 = [-1, 0, 1]'$.

Mivel $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix, így a (19.7) szerint sajátvektorai merőlegesek egymásra. Ezért $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ ismeretében $\underline{s}_3$ már meghatározható.

Sok esetben célszerű, ha $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$, $\underline{s}_3$ jobbrendszert alkot, és így

$\underline{s}_3 = \underline{s}_1 \times \underline{s}_2$. Most $\underline{s}_1 \times \underline{s}_2 = 3 [-1, 0, 1]'$.

Az egységsajátvektorok: $\underline{s}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{s}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\underline{s}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Számolással ellenőrizhető (a 19.11 következmény szerint érvényes egyenlőség)

$$\underline{M}' \underline{A} \underline{M} = \underline{D}$$

38. példa. Határozzuk meg az $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix

sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás. Legyenek $\underline{A}$ sajátértékei λ_1, λ_2 , egységsajátvektorai $\underline{s}_1^0, \underline{s}_2^0$ és $\underline{M} = [\underline{s}_1^0, \underline{s}_2^0]$, $\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Igazoljuk, hogy $\underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M} = \underline{D}$.

Megoldás. Az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0, \quad \lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2.$$

A $\lambda_1 = 7$ sajátértékhez tartozó egységsajátvektor $\underline{s}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1]'$, a $\lambda_2 = -2$

sajátértékhez tartozó egységsajátvektor $\underline{s}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{41}} [4, -5]$. Most

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{41}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-5}{\sqrt{41}} \end{bmatrix}, \quad \underline{M}^{-1} = -\frac{\sqrt{2} \sqrt{41}}{9} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{41}} & -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{41}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Számítással ellenőrizhető, hogy $\underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

39. példa. Határozzuk meg az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait}$$

Igazoljuk, hogy a sajátvektorok függetlenek.

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 ,$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)=0, \quad \lambda_1=3, \lambda_2=2, \lambda_3=1 .$$

A $\lambda_1=3$ sajátértékhez tartozó $(\underline{A} - 3 \underline{E}_3) \underline{s} = 0$ mátrixegyenlet egy megoldásvektora $\underline{s}_1 = [2, 2, 1]'$. A $\lambda_2=2$ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektor

$\underline{s}_2 = [1, 1, 0]$, a $\lambda_3=1$ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektor $\underline{s}_3 = [0, -2, 1]'$.

Legyen $\underline{M} = [\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3]$. $\det \underline{M} = -2 \neq 0$, tehát $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3$ független vektorok.

Megjegyzés. Most is ellenőrizhető, hogy $\underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M} = \underline{D}$, ahol $\underline{D}$ diagonálmátrix főátlójában levő elemei $\underline{A}$ sajátértékei 3, 2 és 1.

40. példa. Határozzuk meg az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ha $\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Megoldás: Az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 ,$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = 0 . \quad \lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=6 .$$

$\lambda_1=0$ -hoz tartozó egyik sajátvektor $\underline{s}_1 = [1, 2, 1]'$. Ha $\lambda_2=\lambda_3=6$, akkor

$\underline{s} = [\underline{s}_{21}, \underline{s}_{22}, \underline{s}_{23}]$ és

$$(\underline{A} - 6 \underline{E}_3) \underline{s} = 0 .$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{bmatrix} = 0 .$$

A redukált egyenletrendszer:

$$s_{21} + 2s_{22} + s_{23} = 0 \quad (1)$$

Ez azt jelenti, hogy a három változóból kettőt szabadon választhatunk, az egyenletrendszernek van két független megoldása, a $\lambda = 6$ sajátértékhez két független sajátvektor tartozik, s_2 és s_3 . Az A mátrix szimmetrikus, így vannak páronként egymásra merőleges sajátvektorai. Az (1) egyenletben legyen $s_{23} = 0$, $s_{22} = -1$, ekkor $s_{21} = 2$, így $s_2 = [2, -1, 0]'$. $s_3 = s_1 \times s_2 = [1, 2, -5]$ s_3 koordinátái valóban kielégítik az (1) egyenletet, így s_3 a $\lambda = 6$ -hoz tartozó sajátvektor és s_2 -től független.

41. példa. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: $A \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 + 1 = 0$

karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_1 = i$ és $\lambda_2 = -i$. A $\lambda_1 = i$ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektor $s_1 = [s_{11}, s_{12}]'$ koordinátái a

$$-i s_{11} + s_{12} = 0$$

egyenlet egyik megoldása. Ha $s_{11} = 1$, akkor $s_{12} = i$, így $s_1 = [1, i]'$.

Hasonlóan adódik, hogy $s_2 = [1, -i]'$.

42. példa. Határozzuk meg az A mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$.

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -6 \\ 4 & 6-\lambda & -9 \\ 3 & 6 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 1 = 0. \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \varepsilon_{31} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{31}^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékéhez tartozó egyik sajátvektor $\underline{s}_1 = [1, 1, 1]'$, a $\lambda_2 = \varepsilon_{31}$ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektor $\underline{s}_2 = [3 + 2 \varepsilon_{31}, 2 + 3 \varepsilon_{31}, 3 + 3 \varepsilon_{31}]'$, a $\lambda_3 = \varepsilon_{32}$ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektor $\underline{s}_3 = [3 + 2 \varepsilon_{22}, 2 + 3 \varepsilon_{32}, 3 + 3 \varepsilon_{32}]'$.

Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait. Szimmetrikus mátrixok esetén az egységsajátvektorokból mint oszlopvektorokból állítsuk elő az M mátrixot is.

$$362. \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$363. \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$364. \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$365. \quad \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

$$366. \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$367. \quad \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$368. \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$369. \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$370. \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$371. \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$372. \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$373. \quad \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$374. \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$375. \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$376. \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

VII/2. Másodrendű görbék

Tekintsük az

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

egyenlettel megadott másodrendű görbét az $\underline{i}, \underline{j}$ ($\underline{e}_1, \underline{e}_2$) ortonormált bázissal meghatározott Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben. Az (1) egyenlet mátrixok alkalmazásával

$$(2) \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0$$

alakban írható, ahol $a_{21} = a_{12}$.

A (2) egyenlet tömörebben:

$$(3) \quad \underline{r}' \underline{A} \underline{r} + \underline{b}' \underline{r} + c = 0,$$

$$\text{ahol } \underline{r}' = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b}' = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Legyenek λ_1 és λ_2 az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei, a hozzájuk tartozó egység sajátvektorok $\underline{m}_1$ és $\underline{m}_2$, ahol $\underline{m}_2$ -t az $\underline{m}_1$ pozitív irányú 90° -os elforgatásával kapjuk, s így ez a bázis jobbrendszert alkot.

$$(\text{Ha } \underline{m}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix}, \quad \text{akkor } \underline{m}_2 = \begin{bmatrix} -m_{21} \\ m_{11} \end{bmatrix}.) \quad \text{Írjuk fel ez új bázisban}$$

a másodrendű görbe egyenletét a bázistranszformáció $\underline{M} = [\underline{m}_1 \quad \underline{m}_2]$ mátrixának alkalmazásával:

$$(4) \quad \tilde{\underline{r}}' \underline{D} \tilde{\underline{r}} + \tilde{\underline{b}}' \tilde{\underline{r}} + c = 0,$$

ahol

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{b}}' = \underline{b}' \underline{M} \quad \text{és} \quad \underline{\tilde{r}}' = [\tilde{x} \ \tilde{y}] .$$

Az $(\tilde{x}, \tilde{y})$ derékszögű koordináta-rendszer megfelelő párhuzamos eltolásával kapott $(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}})$ derékszögű koordináta-rendszerben a másodrendű görbe egyenlete a lehető legegyszerűbb. Az eltolás $\underline{Q}$ vektora az $\underline{m}_1, \underline{m}_2$ bázisban

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \\ -\frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2} \end{bmatrix}, \quad \text{ha} \quad \underline{\tilde{b}}' = [\tilde{b}_1 \ \tilde{b}_2] .$$

43. példa. Ábrázoljuk az

$$a) \quad 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0 ;$$

$$b) \quad 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

egyenlettel adott másodrendű görbékét.

Megoldás. a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit

és a sajátvektorait az

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszerből adódó karakterisztikus egyenletből határozzuk meg.

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5 - \lambda)^2 - 16 = 0$$

$$\lambda - 5 = 4 \quad \text{vagy} \quad \lambda - 5 = -4, \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 1 .$$

Ha $\lambda_1 = 9$, akkor a (1) első egyenletéből:

$$-4 m_1 + 4 m_2 = 0, \quad \text{azaz} \quad m_1 = m_2 .$$

Legyen $m_1 = m_2 = 1$, ekkor $\underline{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és

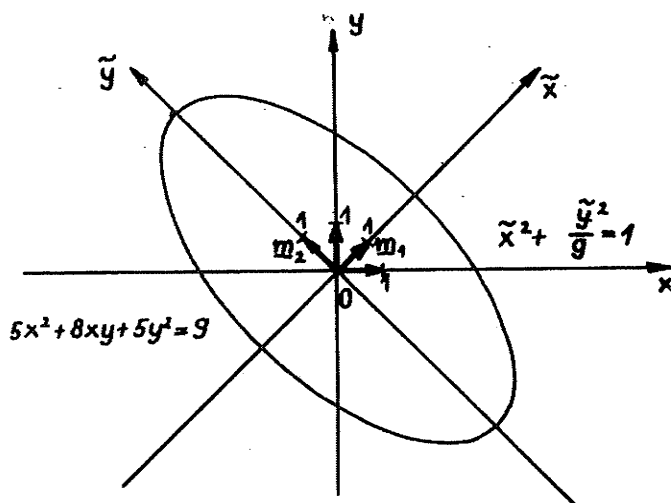
$\underline{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Az $\underline{m}_1, \underline{m}_2$ bázisban, az $(\tilde{x}, \tilde{y})$

derékszögű koordináta-rendszerben a másodrendű görbe egyenlete:

$$9 \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 9 = 0$$

$$(2) \quad \tilde{x}^2 + \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1.$$

A (2) ellipszis egyenlete.



9. ábra

b) Alkalmazzuk az a) feladat részeredményeit. Az $\underline{m}_1, \underline{m}_2$ bázisban a görbe egyenlete (lásd a bevezető áttekintés (4) egyenletét):

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -18 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + 9 = 0$$

$$9\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 18\sqrt{2}\tilde{x} - 9 = 0,$$

$$9(\tilde{x} - \sqrt{2})^2 + \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1$$

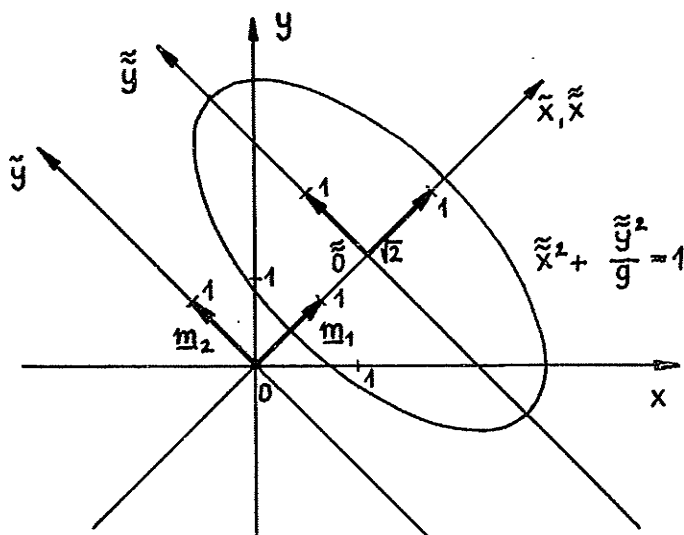
$$(\tilde{x} - \sqrt{2})^2 + \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1$$

Toljuk el az $(\tilde{x}, \tilde{y})$ koordináta-rendszert a $\underline{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorral,

az így kapott $\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}$ koordináta-rendszerben a másodrendű görbe egyenlete:

$$\tilde{\tilde{x}}^2 + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{9} = 1$$

A másodrendű görbe tehát ellipszis.



10. ábra

377. Ábrázoljuk a következő egyenletekkel adott másodrendű görbéket:

a) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$,

b) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$,

c) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$,

$$d) 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0 ,$$

$$e) 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0 ,$$

$$f) 16x^2 + 24xy + 5y^2 - 160x + 120y + 425 = 0 ,$$

$$g) 4x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 ,$$

$$h) x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9 = 0 .$$

VII/3. Másodrendű felületek

Tekintsük az

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

egyenlettel megadott másodrendű felületet az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$
($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) ortonormált bázissal meghatározott Descartes-féle derék-
szögű koordináta-rendszerben. Az (1) egyenlet mátrixok alkalmazásával

$$(2) \quad [x \ y \ z] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [b_1 \ b_2 \ b_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c = 0$$

alakban írható, ahol $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$ és $a_{32} = a_{23}$.

Az egyenlet tömörebben:

$$(3) \quad \underline{r}' \underline{A} \underline{r} + \underline{b}' \underline{r} + c = 0 ,$$

$$\text{ahol} \quad \underline{r}' = [x \ y \ z], \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\underline{b}' = [b_1 \ b_2 \ b_3] .$$

Legyenek λ_1 , λ_2 és λ_3 az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei, a hozzájuk tartozó egység sajátvektorok $\underline{m}_1$, $\underline{m}_2$, $\underline{m}_3$ jobbrendszert alkossanak, azaz $\underline{m}_3 = \underline{m}_1 \times \underline{m}_2$. Írjuk fel az $\underline{m}_1$, $\underline{m}_2$, $\underline{m}_3$ bázisban a másodrendű felület egyenletét a bázistranszformáció

$$\underline{M} = [\underline{m}_1 \ \underline{m}_2 \ \underline{m}_3] \text{ mátrixának alkalmazásával.}$$

$$(4) \quad \underline{\tilde{r}}' \ \underline{D} \ \underline{\tilde{r}} + \underline{\tilde{b}}' \underline{\tilde{r}} + c = 0 ,$$

ahol

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} , \quad \underline{\tilde{b}}' = \underline{b}' \underline{M} \text{ és } \underline{\tilde{r}}' = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}] .$$

Az $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ derékszögű (jobbrendszertű) koordináta-rendszer megfelelő párhuzamos eltolásával kapott $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ derékszögű koordináta-rendszerben a másodrendű felület egyenlete a lehető legegyszerűbb. Az eltolás $\underline{Q}$ vektora az $\underline{m}_1$, $\underline{m}_2$, $\underline{m}_3$ bázisban

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{\tilde{b}_1}{2 \lambda_1} \\ -\frac{\tilde{b}_2}{2 \lambda_2} \\ -\frac{\tilde{b}_3}{2 \lambda_3} \end{bmatrix} , \quad \text{ha } \underline{\tilde{b}}' = [\tilde{b}_1 \ \tilde{b}_2 \ \tilde{b}_3]$$

44. példa Írjuk fel a lehető legegyszerűbb alakban a következő másodrendű felületek egyenletét.

$$a) \ 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0 ;$$

$$b) \ x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0 .$$

Határozzuk meg a felület jellegét.

Megoldás a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Az $\underline{A}$ mátrix

sajátértékeit és sajátvektorait a

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszerből adódó karakterisztikus egyenletből határozzuk meg.

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0,$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9.$$

Ha $\lambda_1 = 3$, akkor (1) első és harmadik egyenletéből

$$\begin{aligned} 4m_1 - 2m_2 &= 0 & 2m_1 &= m_2 \\ -2m_2 + 2m_3 &= 0 & m_3 &= m_2 \end{aligned}$$

Legyen $m_1 = 1$, ekkor $m_2 = m_3 = 2$. Így $\underline{m}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Ha $\lambda_2 = 6$, akkor (1) első két egyenletéből:

$$\begin{aligned} m_1 - 2m_2 &= 0 & m_1 &= 2m_2 \\ -2m_1 &= 0 & m_1 &= -m_3 \end{aligned}$$

Ha $m_2 = 1$, akkor $m_1 = 2$, $m_3 = -2$. Így

$$\underline{m}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \underline{m}_3 = \underline{m}_1 \times \underline{m}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Az $\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3$ bázisban a másodrendű felület egyenlete:

$$3\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2 - 18 = 0 ,$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{6} + \frac{\tilde{y}^2}{3} + \frac{\tilde{z}^2}{2} = 1 .$$

A felület ellipszoid.

$$b) \quad \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 2 & -4 \\ & 2 & -2-\lambda & -2 \\ & -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 , \quad \lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$$

$$\lambda_1 = 6 , \lambda_2 = -3 , \lambda_3 = -3 .$$

Ha $\lambda_1 = 6$, akkor

$$-5 m_1 + 2 m_2 - 4 m_3 = 0 ,$$

$$2 m_1 - 8 m_2 - 2 m_3 = 0 .$$

Legyen pl. $m_2 = 1$, ekkor $m_1 = 2$ és $m_3 = -2$, azaz

$$\underline{m}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

Ha $\lambda_2 = -3$, akkor az $\underline{m}_2$ vektort meghatározó egyenletrendszer mindhárom egyenlete a következő egyenlettel ekvivalens.

$$2 m_1 + m_2 - 2 m_3 = 0$$

Legyen pl. $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, ekkor $m_3 = 2$, s így

$$\underline{m}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad \underline{m}_3 = \underline{m}_1 \times \underline{m}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Az $\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3$ bázisban a másodrendű felület egyenlete:

$$6\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 - 3\tilde{z}^2 = -6$$

$$-\tilde{x}^2 + \frac{\tilde{y}^2}{2} + \frac{\tilde{z}^2}{2} = 1$$

A felület egykőpenyű (forgás) hiperboloid.

378. Irjuk fel a lehető legegyszerűbb alakban a következő másodrendű felületek egyenletét és határozzuk meg a felület jellegét!

- a) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0$,
- b) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$,
- c) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$,
- d) $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$,
- e) $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz + 18x - 4y - 14z = 0$,
- f) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x - 6y - 8z + 21 = 0$,
- g) $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 3 = 0$,
- h) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0$.

VII/4. Bázistranszformáció

45. példa

a) Tekintsük a térben az 0 origóju (x, y, z) derékszögű jobbsodrásu koordináta-rendszert. Tükrözzük a P pontokat az (x, y) síkra, az $\vec{OP} = \underline{r}$ vektorokhoz rendeljük az $\vec{OP}' = \underline{v}$ vektorokat.

Lássuk be, hogy $\underline{v} = \underline{B} \underline{r}$ és irjuk fel az $\underline{B}$ mátrixot.

Határozzuk meg az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

b) Tekintsük az 0 ponton áthaladó $\underline{e}$ ($|\underline{e}| = 1$) normálvektoru síkot.

Tükrözzük az $\vec{OP} = \underline{r}$ vektorokat e síkra, a tükrökép legyen $\vec{OP}' = \underline{v}$.

Irjuk fel a $\underline{v} = \underline{A} \underline{r}$ függvényt az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban.

Irjuk fel a $\underline{v} = \underline{A} \underline{r}$ függvényt, ha $\underline{e} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ - \end{bmatrix}$.

Megoldás a) Ha $\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, akkor

$\underline{v} = x \underline{i} + y \underline{j} - z \underline{k}$ azaz

$$\left. \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{array} \right\}, \text{ tehát } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

azaz $\underline{v} = \underline{B} \underline{r}$.

Geometriai megfontolásból adódik, hogy e síkra vonatkozó tükrözés homogén lineáris, s mivel az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ortonormált bázisba $\underline{A}$ diagonálmátrix szimmetrikus, ezért $\underline{A}$ sajátvektorai $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a megfelelő sajátértékek 1, 1, -1. (Valóban $\underline{B} \underline{i} = \underline{i}$, $\underline{B} \underline{j} = \underline{j}$ és $\underline{B} \underline{k} = -\underline{k}$).

b) Tekintsünk egy $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}$ ortonormált jobbrendszert ahol $\underline{e}$ a sík adott egység normálvektora. E bázisban $\tilde{\underline{v}} = \tilde{\underline{A}} \tilde{\underline{r}}$, ahol

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisról az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}$ bázisra való áttérés (a bázistranszformáció) mátrixa $\underline{M} = [\underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \ \underline{e}]$. Mivel $\tilde{\underline{v}} = \underline{M}' \underline{v}$ és $\tilde{\underline{r}} = \underline{M}' \underline{r}$, ezért $\underline{v} = \underline{M} \tilde{\underline{A}} \underline{M}' \underline{r}$, tehát $\underline{A} = \underline{M} \tilde{\underline{A}} \underline{M}'$.

Ha $\underline{e} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, akkor egy megfelelő $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ vektorpár:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Az } \vec{OP} = \underline{r} \text{ vektornak az adott}$$

síkra vonatkozó $\vec{OP}' = \underline{v}$ tükörkép-vektora:

$$\underline{v} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \underline{r}.$$

379. Tekintsük az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban az $\underline{e} \cdot \underline{r} = 0$ ($|\underline{e}| = 1$) síkot. Irjuk fel az adott síkra vonatkozó λ arányú merőleges affinitás által meghatározott tenzor mátrixát. Irjuk fel a mátrixot, ha $\underline{e} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

380. a) Az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban adott $\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$ vektorokhoz rendeljük a

$$\underline{v} = \mu x \underline{i} + \nu y \underline{j} + \lambda z \underline{k}$$

vektorokat, ahol $\mu, \nu, \lambda \in \mathbb{R}$. (Az $\underline{r}$ vektort tehát az $\underline{i}$ vektor irányában μ -szörösére, a $\underline{j}$ vektor irányában ν -szörösére, a $\underline{k}$ vektor irányában λ -szörösére nyújtjuk, azaz változtatjuk). Irjuk fel a transzformáció mátrixát. Irjuk fel a $\underline{v}$ vektort $\underline{v} = \underline{A} \underline{r}$ alakban.

b) Irjuk fel a transzformáció mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban, ha minden $\underline{r}$ helyvektort, az $\underline{e}$ ($|\underline{e}| = 1$) vektor irányában λ -szorosra nyújtunk! (Az $\underline{r}$ vektorhoz a $\underline{v} = x \underline{i} + y \underline{j} + \lambda z \underline{k}$ vektort rendeljük).

$$\text{Irjuk fel a tenzor mátrixát, ha } \underline{e} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Milyen kapcsolat van e feladat és az előző között?

381. Tekintsük az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban a $\underline{r} = t \underline{e}$ egyenest ($|\underline{e}| = 1$).

Tükrözzük az $\vec{OP} = \underline{r}$ helyvektorokat az adott egyenesre, a tükrökép $\underline{v}$.
 Irjuk fel a $\underline{v}$ vektort $\underline{v} = \underline{A} \underline{r}$ alakban, azaz állítsuk elő a leképezés mátrixát az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban. Irjuk fel a mátrixot, ha $\underline{e} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

382. Tekintsük az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban az $\underline{e} \underline{r} = 0$ síkot és az $\underline{r} = t \underline{f}$ egyenest. ($|\underline{e}| = 1, |\underline{f}| = 1$).

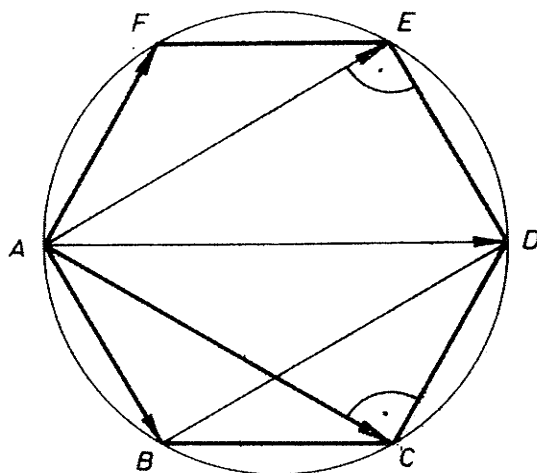
Tükrözzük az $\vec{OP} = \underline{r}$ helyvektorokat az adott síkra, a tükrökép $\vec{OP}' = \underline{v}$, majd a $\underline{v}$ vektorokat az adott egyenesre, a tükrökép $\vec{OP}'' = \underline{w}$. Irjuk fel a leképezést létesítő tenzor mátrixát az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban.

MEGOLDÁSOK

I. Vektoralgebra

I/1. Műveletek vektorokkal (koordináták alkalmazása nélkül)

1. Az ábrából látható, hogy $\vec{AB} + \vec{AE} = \vec{AF} + \vec{AC} = \vec{AD}$, így $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = 3 \vec{AD}$.

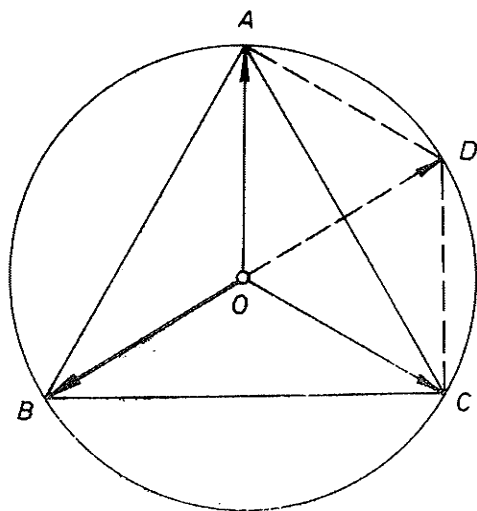


11. ábra

2. Az ábrából látható, hogy $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OD}$, ahol a D pont a B pont tükörképe az O pontra. Ezért $\vec{OD} = -\vec{OB}$, tehát $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{0}$.

3. Ha a két vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem kollineáris, akkor rombuszt határoznak meg, így a rombusz állóvektorai $\underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{a} - \underline{b}$ merőlegesek egymásra. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ kollineáris, úgy összegük vagy különbségük $\vec{0}$, tehát merőlegesek egymásra. (A nullvektor minden vektorra merőleges.)

4. Ha $\vec{OP} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, akkor $\vec{AP} = \underline{p} - \underline{a} = \underline{b} + \underline{c}$. Az előző példa

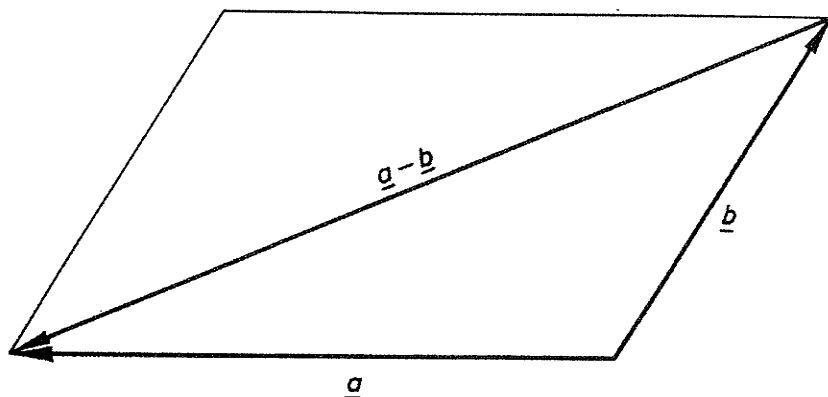


12. ábra

alapján $\underline{b} + \underline{c}$ merőleges $\underline{b} - \underline{c}$ -re. $\underline{b} - \underline{c} = \overrightarrow{CB}$. Így $\underline{p} - \underline{a}$ merőleges a BC egyenesre, tehát a P pont rajta van az A csucsból kiinduló magasságvonalon. Hasonlóan látható, hogy P rajta van a háromszög másik két magasságvonalán is, tehát P a háromszög magasságpontja.

5. Legyen $n = 2$. Ha $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ nem kollineáris, akkor $|\underline{a}_1 + \underline{a}_2| < |\underline{a}_1| + |\underline{a}_2|$ a háromszögegyenlőtlenség miatt igaz. Ha $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ kollineáris és különböző irányú, akkor világos, hogy $|\underline{a}_1 + \underline{a}_2| < |\underline{a}_1| + |\underline{a}_2|$. Ha $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ kollineáris és egyirányú, akkor $|\underline{a}_1 + \underline{a}_2| = |\underline{a}_1| + |\underline{a}_2|$, ha $|\underline{a}_1 + \underline{a}_2| = |\underline{a}_1| + |\underline{a}_2|$, akkor $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ kollineáris és egyirányú. Az állítás teljes indukcióval bizonyítható. $|\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \dots + \underline{a}_n| = |\underline{a}_1| + |\underline{a}_2| + \dots + |\underline{a}_n|$ akkor és csak akkor, ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorok kollineárisak és egyirányúak.

6. Az ábra segítségével belátható.

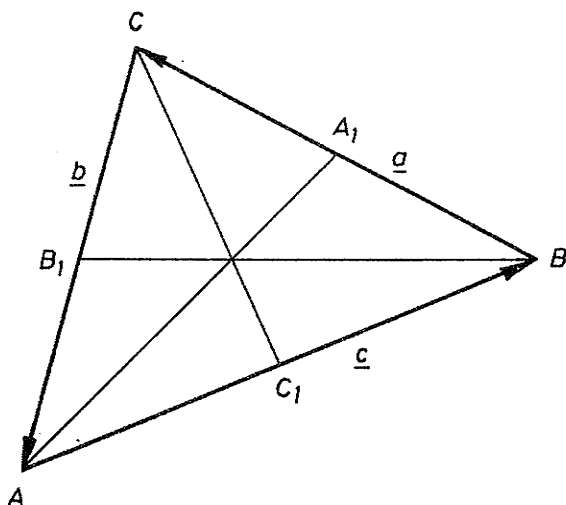


13. ábra

7. A keresett szükséges és elégséges feltétel, hogy $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ vagy $\underline{a} + \underline{b} = -\underline{c}$, azaz $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0$ vagy $\underline{a} + \underline{b} - \underline{c} = 0$ feltételek (vagy ezekkel ekvivalens feltételek) egyike teljesüljön.

8. Az ABC háromszögben legyen $\overrightarrow{AB} = \underline{c}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}$ és $\overrightarrow{CA} = \underline{b}$, így $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0$. Az oldalfelező pontok legyenek rendre $\underline{A}_1$, $\underline{B}_1$, $\underline{C}_1$. Ekkor $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{c})$ és $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$.

$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$, így az állítás igaz.
 $(\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1}) = (\underline{c} + \frac{1}{2}\underline{a}) + (\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}) + (\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{c}) = \frac{3}{2}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \vec{0}$, tehát az állítás így is belátható.



14. ábra

9. Igen.

10. A $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ és $\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$ egységvektorok. Mivel a rombusz átlói felezik a rombusz megfelelő szögeit, ezért az $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} + \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok mindegyikével egyenlő szöget zár be. A 2. feladat értelmében az $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} + \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$ és $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} - \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$ vektorok egymásra merőlegesek.

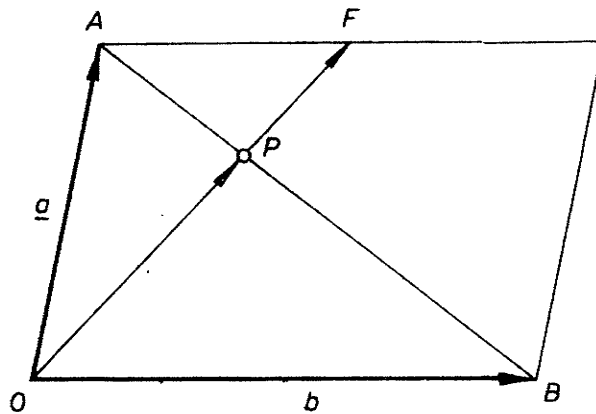
11. $\lambda \underline{a} - \lambda \underline{b} = \lambda(\underline{a} - \underline{b}) = \vec{0}$. Mivel $\lambda \neq 0$, ezért $\underline{a} - \underline{b} = \vec{0}$, azaz $\underline{a} = \underline{b}$.

$\lambda \underline{a} - \mu \underline{a} = (\lambda - \mu) \underline{a} = \vec{0}$. Mivel $\underline{a} \neq \vec{0}$, ezért $\lambda - \mu = 0$, azaz $\lambda = \mu$.

12. A hasonlósági arány 4:3.

14. Az ábra szerint (lásd a következő oldalon) $\vec{OA} = \underline{a}$, $\vec{OB} = \underline{b}$, így
 $\vec{OP} = \lambda(\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b})$, $\vec{PA} = \mu(\underline{a} - \underline{b})$ és $\vec{OP} + \vec{PA} = \vec{OA}$.
 $(\lambda + \mu - 1)\underline{a} + (\frac{1}{2}\lambda - \mu)\underline{b} = \vec{0}$, $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$

A P pont mindkét szakasz egyik harmadoló pontja.



15. ábra

15. A metszéspont mindkét szakasz egyik harmadoló pontja.

16. Legyen $\vec{AB} = \underline{a}$, $\vec{AC} = \underline{b}$ és $\vec{AD} = \underline{c}$. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok páronként nem kollineáris, komplanáris vektorok, így $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda = \mu = \gamma = 0$. $\vec{SR} = \frac{1}{3} \underline{b}$, $\vec{ST} = \alpha \vec{SQ} = \alpha (\vec{AQ} - \vec{AS}) =$
 $\alpha \left[\frac{1}{3} (2\underline{b} + \underline{a}) - \frac{2}{3} \underline{c} \right] = \frac{\alpha}{3} (2\underline{b} + \underline{a} - 2\underline{c})$, $\vec{TR} = \frac{\beta}{3} (2\underline{c} + \underline{b} - \underline{a})$.
 Mivel $3\vec{SR} = 3 (\vec{ST} + \vec{TR})$, ezért

$$\underline{b} = \alpha (2\underline{b} + \underline{a} - 2\underline{c}) + \beta (2\underline{c} + \underline{b} - \underline{a}) ,$$

$$(\alpha - \beta) \underline{a} + (2\alpha + \beta - 1) \underline{b} + 2(\beta - \alpha) \underline{c} = \underline{0} .$$

Igy $\alpha - \beta = 0$, $2\alpha + \beta - 1 = 0$, tehát $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$

A T pont tehát a PR és QS szakaszok R, illetve S ponthoz közelebb eső harmadoló pontja.

$$17. \underline{f} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b}) .$$

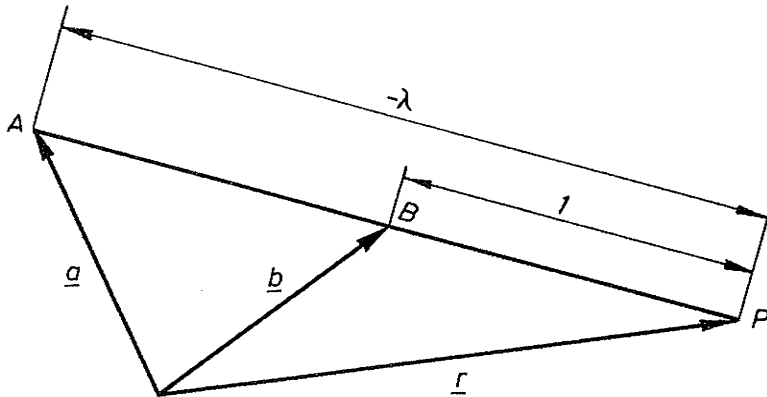
$$18. a) \underline{r} = \frac{\beta \underline{a} + \alpha \underline{b}}{\alpha + \beta} .$$

$$b) \underline{r} = \frac{\underline{a} + \lambda \underline{b}}{1 + \lambda} .$$

c) Az ábráról (lásd a következő oldalon) leolvasható, hogy

$$\underline{r} = \underline{a} + \frac{1}{-\lambda} (\underline{r} - \underline{a}), \text{ így}$$

$$\underline{r} = \frac{\underline{a} + \lambda \underline{b}}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1).$$



16. ábra

19. Legyen $A(\underline{a})$, $B(\underline{b})$, $C(\underline{c})$, $D(\underline{d})$. Ahhoz, hogy az ABCD négyszög paralelogramma legyen, szükséges és elégséges, hogy

1. $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ vagy az az ezzel ekvivalens

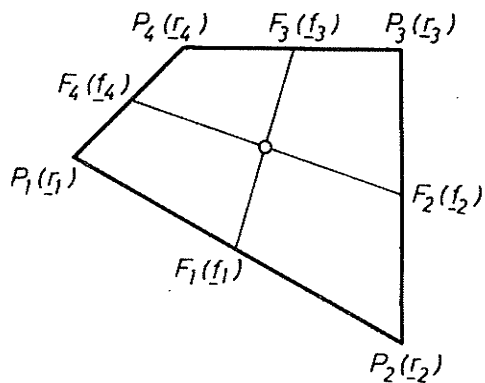
2. $\frac{\underline{a} + \underline{c}}{2} = \frac{\underline{b} + \underline{d}}{2}$ feltétel teljesüljön.

20. Legyen $P_1(\underline{r}_1)$, $P_2(\underline{r}_2)$, $P_3(\underline{r}_3)$, $P_4(\underline{r}_4)$. Az oldalak felezőpontjait legyenek rendre $F_1(\underline{f}_1)$, $F_2(\underline{f}_2)$, $F_3(\underline{f}_3)$, $F_4(\underline{f}_4)$, ahol

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{2} (\underline{r}_1 + \underline{r}_2), \quad \underline{f}_2 = \frac{1}{2} (\underline{r}_2 + \underline{r}_3),$$

$$\underline{f}_3 = \frac{1}{2} (\underline{r}_3 + \underline{r}_4), \quad \underline{f}_4 = \frac{1}{2} (\underline{r}_4 + \underline{r}_1).$$

Az $F_1 F_2 F_3 F_4$ négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha $\underline{f}_1 + \underline{f}_3 = \underline{f}_2 + \underline{f}_4$. Mivel ez most teljesül, ezért igaz az állítás.



17. ábra

22. A háromszög bármely súlyvonalának a csúcsponttól távolabb eső harmadoló pontjának helyvektora közös,

$\frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$, így valóban egy pontban metszik egymást a súlyvonalak és az S súlypont $\underline{s}$ helyvektora $\underline{s} = \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$.

23. Ha a tetraéder csúcspontjainak helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$, akkor bármely súlyvonalnak a laphoz közelebb eső negyedelőpontjának helyvektora közös $\underline{s} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d})$.

24. A feltétel szükséges, mert ha a vektorok végpontjai egy egyenesre esnek, akkor a C pont az AB szakaszt $\lambda (\neq -1)$ arányban, osztja, így

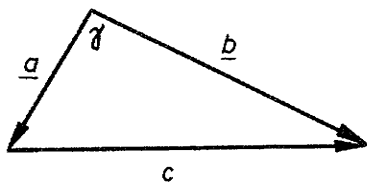
$$\underline{c} = \frac{\underline{a} + \lambda \underline{b}}{1 + \lambda} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}, \text{ ahol}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + \lambda} \text{ és } \beta = \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \text{ így } \alpha + \beta = 1.$$

A feltétel elégséges, mert ha $\beta = 1 - \alpha$, akkor $\underline{c} = \alpha \underline{a} + (1 - \alpha) \underline{b}$.

Legyen $\alpha = \frac{1}{1 + \lambda}$, ekkor $\beta = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$, tehát a C vektor C végpontja az AB

szakaszt λ arányban osztja, így A, B és C egy egyenesen vannak. Külön vizsgálható, ha C és A, illetve C és B egybeesik.



18. ábra

25. 1. A paralelogramma átlóira rajzoljuk négy téglalap területének összege megegyezik a paralelogramma oldalaira rajzolt négy téglalap területének összegével. 2. A cosinus tétel.

26. A 3. a jelölését alkalmazva

$$\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|}, \text{ ahol } \underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \gamma.$$

27. A merőlegesség szükséges és elégséges feltétele az, hogy a két vektor skaláris szorzata zérus, ami most teljesül.

28. Ha a rombusz egy csúcából kiinduló két oldalvektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$, akkor $|\underline{a}| = |\underline{b}|$. $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = \underline{a}^2 - \underline{b}^2 = 0$, tehát igaz az állítás.

30. Az ábra jelölése szerint $\underline{c} = \underline{b} - \underline{a}$, azaz $\angle(\underline{a}, \underline{b}) = \gamma$, a háromszög

oldalai $a = |\underline{a}|$, $b = |\underline{b}|$, $c = |\underline{c}|$.

$$c^2 = \underline{c}^2 = (\underline{b} - \underline{a})^2 = \underline{b}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{a}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

31. Az ABC háromszög csúcspontjainak helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$. Az A és B csúcsponton áthaladó magasságvonalak metszéspontja $M(\underline{m})$. Ezek szerint

$(\underline{m} - \underline{a}) \perp (\underline{b} - \underline{c})$ és $(\underline{m} - \underline{b}) \perp (\underline{c} - \underline{a})$, azaz

$$\left. \begin{aligned} (\underline{m} - \underline{a}) (\underline{b} - \underline{c}) &= 0 \\ (\underline{m} - \underline{b}) (\underline{c} - \underline{a}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{m} (\underline{b} - \underline{c}) - \underline{a} (\underline{b} - \underline{c}) &= 0 \\ \underline{m} (\underline{c} - \underline{a}) - \underline{b} (\underline{c} - \underline{a}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Adjuk össze az átalakított két feltételi egyenletet.

$$\begin{aligned} \underline{m} (\underline{b} - \underline{a}) - \underline{c} (\underline{b} - \underline{a}) &= 0 \\ (\underline{m} - \underline{c}) (\underline{b} - \underline{a}) &= 0 \end{aligned}$$

Igy az $\underline{m} - \underline{c} \perp \underline{b} - \underline{a}$, tehát az MC egyenes merőleges az AB egyenesre, tehát az MC egyenes a háromszög harmadik magasságvonala.

$$32. \varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

33. Szorozzuk meg $\underline{a}$ vektorral skalárisan a

$$\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$$

egyenlet mindkét oldalát. Mivel $\underline{a}\underline{b} = \underline{a}\underline{c} = 0$, ezért

$$\underline{a}\underline{d} = \alpha \underline{a}^2, \text{ azaz } \alpha = \frac{\underline{a}\underline{d}}{\underline{a}^2}. \quad \text{Hasonlóan}$$

$$\beta = \frac{\underline{b}\underline{d}}{\underline{b}^2}, \quad \gamma = \frac{\underline{c}\underline{d}}{\underline{c}^2}.$$

34. A $\underline{y}$ vektorok végpontjai az "e" egyenesre merőleges sík pontjai. A sík az E ponttól α távolságra van. Hol van a sík, ha $\alpha > 0$, illetve $\alpha < 0$?

35. A közös kezdőpontban az $\underline{a}$ vektorra merőleges sík és a $\underline{b}$ vektor egyenesére merőleges sík metszévonala. (Lásd 34. feladat.)

$$36. (\underline{a} \times \underline{b})^2 + (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 \cos^2 \varphi + |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 \sin^2 \varphi = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2. \quad (\varphi \text{ az } \underline{a} \text{ és } \underline{b} \text{ vektorok szöge.})$$

$$37. \text{ Nem. } (\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b}) = -2 (\underline{a} \times \underline{b}).$$

38. Bármely paralelogramma átlóvektorai által kifeszített paralelogramma területe az adott paralelogramma területének kétszerese.

$$39. \operatorname{tg} \varphi = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{\underline{a} \cdot \underline{b}}, \text{ ahol } \varphi \text{ a két vektor szöge.}$$

40. A két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha $\underline{b}$ merőleges az $\underline{a}$ és a $\underline{c}$ vektorokra ($\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$, $\underline{b} \cdot \underline{c} = 0$), vagy $\underline{a}$ és $\underline{c}$ kollineáris vektorok.

41. $(\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{b} \times \underline{c}) + (\underline{c} \times \underline{a}) = (\underline{a} \times \underline{b}) - (\underline{b} \times \underline{b}) - (\underline{c} \times \underline{a}) + (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{b} - \underline{c}) = 0$. Így az $\underline{a} - \underline{b}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ vektorok párhuzamosak, a $\underline{b}$ végpontja a két vektor közös pontja, tehát igaz az állítás. Az állítás megfordítása is igaz.

42. Az előző feladtból következik az állítás.

43. Az $\underline{a} - \underline{b}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ vektorok az adott síkban fekszenek és nem párhuzamosak, így igaz az állítás. (Lásd 41. feladat.)

44. Ha $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0$, akkor $\underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = 0$, így $\underline{c} \times \underline{a} = \underline{b} \times \underline{c}$. Hasonlóan $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c} \times \underline{a}$.

$$\text{Ha } \underline{a} \times \underline{b} = \underline{c} \times \underline{a}, \text{ akkor } \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} + \underline{a} \times \underline{a} = 0,$$

így $\underline{a} \times (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = 0$. Hasonlóan $\underline{b} \times (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = 0$ és $\underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = 0$. Ezek szerint az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ vektor párhuzamos az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem párhuzamos vektorok mindegyikével, ami csak úgy lehet, ha $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0$.

$$45. \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0, \text{ így } |\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{b} \times \underline{c}|, \text{ azaz } |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \gamma = |\underline{b}| |\underline{c}| \sin \alpha.$$

$$48. t = \frac{1}{2} \left| (\underline{r}_1 \times \underline{r}_2) + (\underline{r}_2 \times \underline{r}_3) + (\underline{r}_3 \times \underline{r}_1) \right|.$$

$$49. 1. ((\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}) = (\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{a}_1 \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{a}_2 \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}_1 \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}) + (\underline{a}_2 \cdot \underline{b} \cdot \underline{c})$$

50. A 49. 2. alapján igazolható. Ha $A(\underline{a})$, $B(\underline{b})$, $C(\underline{c})$, akkor $OABC$ tetraéder térfogata az OAB , OAC , OBC lapok O -ból kiinduló súlyvonalvektorai által meghatározott tetraéder térfogatának négyszerese.

$$52. V = \frac{1}{6} \left| (\underline{r}_1 \underline{r}_2 \underline{r}_3) + (\underline{r}_1 \underline{r}_3 \underline{r}_4) - (\underline{r}_1 \underline{r}_2 \underline{r}_4) - (\underline{r}_2 \underline{r}_3 \underline{r}_4) \right|.$$

53. Az ábra jelölése szerint az ACDB tetraéder térfogata $V_1 = \frac{1}{6} |(\underline{x}(\underline{x}+\underline{c})\underline{a})| = \frac{1}{6} |(\underline{x}\underline{c}\underline{a})|$. Az AC'D'B' tetraéder térfogata $V_2 = \frac{1}{6} |(\underline{y}\underline{c}\underline{a})|$. A 24. feladat szerint $\underline{y} = (1-\alpha)\underline{x} + \alpha(\underline{x}+\underline{c}) = \underline{x} + (1+\alpha)\underline{c}$, ezért $(\underline{y}\underline{c}\underline{a}) = ((\underline{x} + (1+\alpha)\underline{c})\underline{c}\underline{a}) = (\underline{x}\underline{c}\underline{a})$, tehát az állítás igaz.

54. 1. Alkalmazzuk a kifejtési tételt.

$$2. (\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a}\underline{b}(\underline{c} \times \underline{d})) = \underline{a}(\underline{b} \times (\underline{c}\underline{d})) = \underline{a}(\underline{c}(\underline{b}\underline{d}) - \underline{d}(\underline{b}\underline{c})) = (\underline{a}\underline{c})(\underline{b}\underline{d}) - (\underline{a}\underline{d})(\underline{b}\underline{c}).$$

55. $(\underline{e} \times \underline{a}) \times \underline{e} = (\underline{a})(\underline{e}\underline{e}) - \underline{e}(\underline{a}\underline{e}) = \underline{a} - \underline{e}(\underline{a}\underline{e}) = \underline{a}_m$. Az állítást igazolhatjuk a kifejtési tétel alkalmazása nélkül is.

I/2. Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

56. $\underline{a} + \underline{b} \approx [-1, 6, 4]$, $\underline{a} - \underline{b} \approx [3, 4, 0]$, $3\underline{a} \approx [3, 15, 6]$,
 $-\frac{1}{2}\underline{b} \approx [-1, \frac{1}{2}, 1]$.

57. $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ (lásd 7. feladat)

58. $\vec{CA} \approx [-3, 2, 2]$.

59. $25\underline{a} = -9\underline{b}$.

60. Akkor és csak akkor komplanárisak, ha van olyan α és β , hogy $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{c}$. M_0 -t $\alpha = 5$ és $\beta = -2$.

61. $\vec{AB} \approx [2, 1, 1]$, $\vec{AC} \approx [6, 3, 3]$
 $\vec{AC} = 3\vec{AB}$. Egy egyenesen vannak.

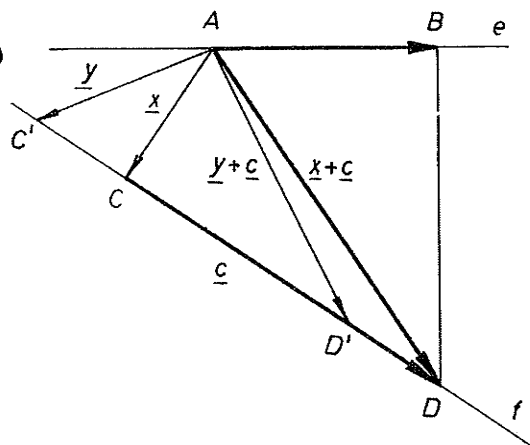
62. $D(4; 0; 6)$.

63. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$,

tehát függetlenek. $\underline{c} = x\underline{a} + y\underline{b}$, $x = 1$.

64. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$. Ha $\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$, akkor $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$.

65. $C(3; x; y)$ és $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$ feltételből $\lambda = \frac{1}{3}$, $y = \frac{8}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$.
 $C(3; \frac{8}{3}; -\frac{1}{3})$.



19. ábra

66. $|\underline{a}| = \sqrt{35}$, a keresett egységvektor

$$\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{[5, -2, 1]}{\sqrt{35}}.$$

67. $AB = |\vec{AB}| = 6$, $F(3; 1; 1)$, $H\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

68. $S\left(2; -\frac{2}{3}; 2\right)$.

69. $\underline{ab} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 4$.

70. A két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skalárszorzatuk nulla. $6 - 5 + 2\lambda = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$.

$$71. \frac{\underline{ab}}{|\underline{b}|} = \frac{6 + 4 + 120}{13} = 10.$$

72. $\cos(\underline{a}, \underline{b}) \angle = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|} = \frac{1}{5}$. $(\underline{a}, \underline{b}) \angle \approx 78,5^\circ$.

73. Az $\underline{a}$ iránycosinusa az $\underline{a}$ irányába mutató $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ egységvektor koordinátái: $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{6}}$. (Nyilván $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.)

74. $\underline{x} \cong [-4, -6, 12]$

75. $\vec{AB} = \underline{b} \cong [4, 2, 4]$, $\vec{AC} = \underline{c} \cong [4, 1, 8]$, $\vec{BD} = \frac{\underline{bc}}{\underline{c}}$. $\underline{c} - \underline{b} \cong \frac{1}{81} [-124, -112, 76]$.

76. $\vec{AB} \cong [4, 2, 4]$, $\vec{AC} \cong [4, 1, 8]$, $\cos \alpha = \frac{50}{54} = \frac{25}{27}$, $\alpha \approx 22^\circ 10'$, $\cos \beta = -\frac{7}{3\sqrt{17}}$, $\beta \approx 124^\circ 31'$, $\cos \gamma = \frac{31}{9\sqrt{17}}$, $\gamma \approx 33^\circ 10'$.

77. A tükörkép-vektor: $2 \frac{\underline{ab}}{\underline{a}}$. $\underline{b} - \underline{a} \cong [-6, 2, -1]$

$$78. \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = [-26, -14, 8].$$

79. $t = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \approx 5,01$ területegység.

80. Két ilyen egységvektor van,

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} \approx \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right], \quad \underline{e}_2 = -\frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} \approx \\ &\approx \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right]. \quad \sin \varphi = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{|\underline{a}| |\underline{b}|} \approx 0,316. \end{aligned}$$

81. A keresett távolság $|\underline{a} \times \underline{c}|$. A paralelogramma magassága

$$\frac{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}{|\vec{AB}|} = \sqrt{\frac{133}{6}} \text{ hosszúságegység}$$

82. $(\underline{a} \underline{b} \underline{c}) \cong \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -23,$

$$(\underline{c} \underline{b} \underline{a}) = -(\underline{a} \underline{b} \underline{c}) = 23.$$

83. $V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = |-4| = 4$ térfogategység.

84. Ha $A(\underline{a})$, $B(\underline{b})$, $C(\underline{c})$ és $D(\underline{d})$, akkor $V = \frac{1}{6} |(\underline{b}-\underline{a})(\underline{c}-\underline{a})(\underline{d}-\underline{a})| = \frac{4}{3}$ térfogategység.

85. A három vektor akkor és csak akkor komplanáris, ha vegyesszorzatuk nulla. Ez most teljesül.

86. Az $A(\underline{a})$, $B(\underline{b})$, $C(\underline{c})$ és $D(\underline{d})$ pontok akkor és csak akkor fekszenek egy síkon, ha $(\underline{b}-\underline{a})(\underline{c}-\underline{a})(\underline{d}-\underline{a}) = 0$. Ez most teljesül.

87. $m = \left| \frac{\frac{1}{6} (\vec{DA} \vec{DB} \vec{DC})}{\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|} \right| = 11$ hosszúságegység.

I/3. Koordináta-geometriai alkalmazások

88. A paraméteres vektoregyenlet $\underline{r} = \underline{r}_1 + t \underline{v}$, egy vektoregyenlet $(\underline{r} - \underline{r}_1) \times \underline{v} = \underline{0}$.

A paraméteres egyenletrendszer:

$$x = x_1 + t v_1,$$

$$y = y_1 + t v_2,$$

$$z = z_1 + t v_3.$$

Ha $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, akkor egy egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}.$$

Az $(\underline{r} - \underline{r}_1) \times \underline{v} = \underline{0}$ vektoregyenletből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$(x - x_1) v_2 - (y - y_1) v_1 = 0,$$

$$(x - x_1) v_3 - (z - z_1) v_1 = 0.$$

Ez az előzővel természetesen ekvivalens.

89. Az egyenes egy irányvektora $\underline{r}_2 - \underline{r}_1$, így paraméteres vektoregyenlete: $\underline{r} = \underline{r}_1 + t (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$. Az egyenes vektoregyenlete: $(\underline{r} - \underline{r}_1) \times (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = \underline{0}$.

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x_1 + t (x_2 - x_1),$$

$$y = y_1 + t (y_2 - y_1),$$

$$z = z_1 + t (z_2 - z_1).$$

Az egyenes egy egyenletrendszere: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$, ha

$$x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1, z_2 \neq z_1.$$

$$90. a) \underline{r} = \underline{a} + t (\underline{b} + \underline{c} - 2\underline{a}).$$

b) A rombusz szögfelező tulajdonságát felhasználva a szögfelező egy irányvektora $\underline{v} = |\underline{c} - \underline{a}| (\underline{b} - \underline{a}) + |\underline{b} - \underline{a}| (\underline{c} - \underline{a})$, így a szögfelező paraméteres vektoregyenlete: $\underline{r} = \underline{a} + t (|\underline{c} - \underline{a}| (\underline{b} - \underline{a}) + |\underline{b} - \underline{a}| (\underline{c} - \underline{a}))$.

c) A 75. feladat megoldási módszerével a magasságvonal egy irányvektora

$$\underline{v} = \frac{(\underline{a}-\underline{b}) (\underline{c}-\underline{b})}{(\underline{c}-\underline{b})^2} (\underline{c}-\underline{b}) + \underline{b}-\underline{a}.$$

91. A tükörképegyes egy pontjának helyvektora $\underline{r}_2 = 2\underline{r}_0 - \underline{r}_1$, így vektoregyenlete:

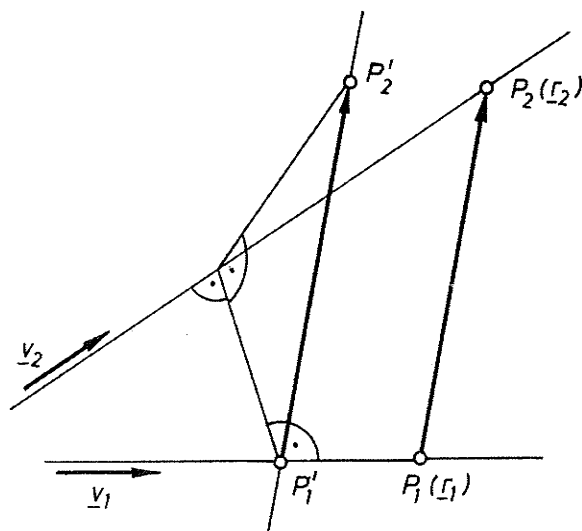
$$\underline{r} = 2\underline{r}_0 - \underline{r}_1 + t \underline{v}.$$

92. Az un. középpárhuzamos egyenesre

$$\underline{r} = \frac{1}{2} (\underline{r}_1 + \underline{r}_2) + t \underline{v}.$$

93. A két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes egyik pontjának a másik egyenestől való távolsága. A 7. példa 2. megoldása szerint a keresett távolság

$$\frac{|(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underline{v}|}{|\underline{v}|}.$$



20. ábra

94. A két kitérő egyenes normáltranszverzális egyenesre merőleges, így egy irányvektora $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$. A keresett távolság a két egyenes egy-egy pontját összekötő vektornak $(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$ a $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektorral párhuzamos összetevőjének hossza, ha a másik összetevő erre merőleges, azaz az $\underline{r}_2 - \underline{r}_1$ vektornak a $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektorra eső vetülete.

$$d = \frac{|(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)|}{|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2|} = \frac{|((\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2)|}{|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2|}$$

95. A két egyenes akkor és csak akkor határoz meg egy síkot, ha az $\underline{r}_2 - \underline{r}_1, \underline{v}_1, \underline{v}_2$ vektorok komplanárisak. Ekkor $((\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2) = 0$. Ez a keresett szükséges és elégséges feltétel.

96. A keresett egyenes egy $\underline{v}_1$ irányvektora az $\underline{r}_0 - \underline{r}_1$ vektornak a $\underline{v}$ vektorra merőleges összetevője. Az 55. feladat szerint $\underline{v}_1 = (\underline{v} \times (\underline{r}_1 - \underline{r}_0)) \times \underline{v}$. Az egyenes egyenlete:

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t \left((\underline{v} \times (\underline{r}_1 - \underline{r}_0)) \times \underline{v} \right).$$

$$97. (\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n} = 0, \quad A x + B y + C z = A x_1 + B y_1 + C z_1.$$

$$98. ((\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_0) \cdot \underline{v}) = 0.$$

$$99. (\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{v} = 0.$$

$$100. (\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n} = 0.$$

$$101. \text{ A sík egy normálvektora } (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \times (\underline{r}_3 - \underline{r}_1). \text{ A sík egyenlete: } ((\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot (\underline{r}_3 - \underline{r}_1)) = 0.$$

102. Az előző feladat alkalmazásával

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Az egyenlet a következő alakban is írható:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Bizonyítsuk bel

103. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. A sík un. tengelymetszetes alakja.

104. $\underline{r} = \underline{r}_0 + u \underline{a} + v \underline{b}$.

105. $\left. \begin{aligned} x &= x_0 + u a_1 + v b_1, \\ y &= y_0 + u a_2 + v b_2, \\ z &= z_0 + u a_3 + v b_3. \end{aligned} \right\}$

106. A két sík szöge megegyezik a rájuk merőleges egyenesek hajlás-szögével. Ha a két sík szöge φ ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$), akkor

$$\cos \varphi = \left| \frac{\underline{n}_1 \underline{n}_2}{|\underline{n}_1| |\underline{n}_2|} \right|, \quad \varphi = \arccos \left| \frac{\underline{n}_1 \underline{n}_2}{|\underline{n}_1| |\underline{n}_2|} \right|$$

107. A keresett szög megegyezik a síkra merőleges egyenesek és az adott egyenes által bezárt φ szög pótszögével. A keresett szög tehát

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \left| \frac{\underline{y} \underline{n}}{|\underline{y}| |\underline{n}|} \right|.$$

108. A sík egy pontja $P_0 \left(\frac{1}{2} (\underline{r}_1 + \underline{r}_2) \right)$ egy normálvektora $\underline{r}_2 - \underline{r}_1$, egyenlete $\left(\underline{r} - \frac{\underline{r}_1 + \underline{r}_2}{2} \right) (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = 0$.

109. A tükörképsík párhuzamos és adott síkkal így egy normálvektora $\underline{n}$. a $P_1(\underline{r}_1)$ pontnak a $P_0(\underline{r}_0)$ pontra való tükörképének helyvektora $2\underline{r}_0 - \underline{r}_1$, így a sík egyenlete

$$\left(\underline{r} - (2\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \right) \underline{n} = 0.$$

110. $\left(\underline{r} - (2\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \right) \underline{n} = 0$.

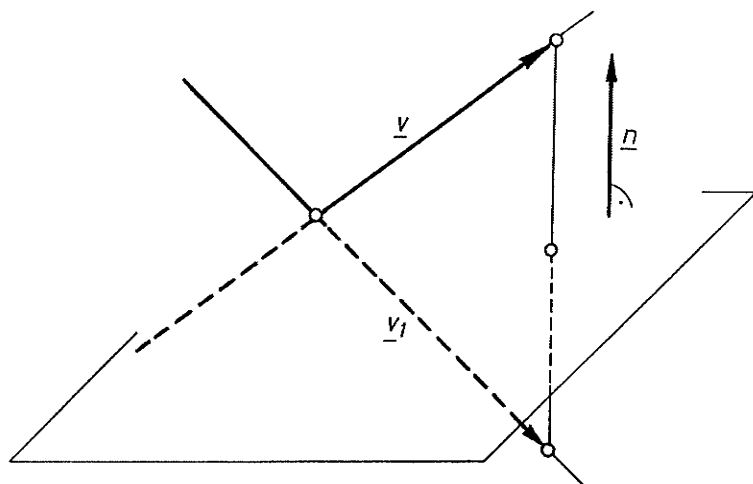
111. A sík egyik normálegyenlete

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \text{ így a keresett távolság}$$

$$d = \left| \frac{A x_0 + B y_0 + C z_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

112. A párhuzamos síkok távolsága az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól való távolsága.

$$d = \left| (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right|.$$



21. ábra

113. A tükörképegynes egy $\mathbf{v}_1$ irányvektora a $\mathbf{v}$ vektornak az adott síkra vonatkozó tükörképvektora, amely a 10. példa módszerével meghatározható.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}.$$

A tükörképegynes egy pontja a sík és az egyenes közös pontja, amelyet a 9. példa 2. megoldásában megismert módszerrel kaphatunk meg. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{v}$ egyenes az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$ síkot a

$$t = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \text{ paraméterértékű pontban met-}$$

szi. A metszéspont helyvektora tehát:

$$\mathbf{r}_0 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}.$$

114. Az adott sík $P_0(\underline{r}_0)$ pontjának és $\underline{n}$ normálvektorának az adott síkra vonatkozó

$$\underline{r}_0 - 2 \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}_1}{|\underline{n}_1|^2} \underline{n}_1, \text{ illetve } \underline{n}_0 = 2 \frac{\underline{n}_0 \cdot \underline{n}_1}{|\underline{n}_1|^2} \cdot \underline{n}_1$$

tükröképe, a tükröképsík egy pontjának helyvektora, illetve egy normálvektora, így a sík egyenlete ismert.

$$115. \frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

$$116. (\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot (\underline{n}_1 \times \underline{n}_2) = 0; \quad \underline{r} = \underline{r}_0 + u \underline{n}_1 + v \underline{n}_2.$$

117. $(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n} = 0$. Ha a normálvektor egységvektor, akkor normál-egyenletet kapunk:

$$\frac{(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|} = 0.$$

$$118. A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

$$Ax + By = Ax_0 + By_0.$$

$$119. d = \left| \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|} \right|.$$

$$120. \frac{(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}_1}{|\underline{n}_1|} = \frac{(\underline{r} - \underline{r}_2) \cdot \underline{n}_2}{|\underline{n}_2|} \quad \text{és} \quad \frac{(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}_1}{|\underline{n}_1|} = - \frac{(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{n}_2}{|\underline{n}_2|}$$

121. A háromszög csúcspontjai: $A(\underline{a})$, $B(\underline{b})$, $C(\underline{c})$. Ebben a három pont az (x, y) síkba. Az oldalfélezőmerőleges egyenesek vektoregyenletei ekkor a következők:

$$\left(\underline{r} - \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} \right) \cdot (\underline{b} - \underline{a}) = 0,$$

$$\left(\underline{r} - \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2} \right) \cdot (\underline{c} - \underline{a}) = 0,$$

$$\left(\underline{r} - \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2} \right) \cdot (\underline{c} - \underline{b}) = 0.$$

A 31. feladatban megismert módszerrel igazolható, hogy a három egyenesnek egy és csakis egy közös pontja van.

$$122. x = -1 + 4t,$$

$$y = 2 - t,$$

$$z = 3 + 2t. \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

$$123. x = 4 + 6t,$$

$$y = -1 - 3t,$$

$$z = 3 - 2t. \quad \frac{x-4}{6} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-3}{-2}.$$

124. Igen, mert a pont koordinátái kielégítik az egyenletrendszert. Az egyenes az $y = 0$ koordinátájú pontban metszi az (x, z) síkot, így $\frac{x-1}{3} = 2$ és $\frac{z-3}{2} = 2$, azaz $x = 7$, $z = 7$.
A keresett pont: $(7; 0; 7)$.

$$125. x + 8 = \frac{y-7}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

$$126. \frac{x - \frac{1}{2}}{2} = -(y + \frac{3}{2}) = \frac{z + \frac{3}{2}}{5}.$$

127. Az 5. példa szerint dolgozhatunk. Az egyenes egy pontja $P_1(-3; 0; 2)$, egy irányvektora $\underline{v} \approx [1, 5, -3]$. A vetületi pont helyvektora

$$[-3, 0, 2] + \frac{[-2, 4, -1] [1, 5, -3]}{(1 + 25 + 9)} \cdot [1, 5, -3] = \left[-\frac{12}{5}, 3, \frac{1}{5}\right].$$

Megjegyzés. A vetületi pontot az adott egyenes és a P_0 ponton átmenő, az adott egyenesre merőleges, tehát $\underline{v} \approx [1, 5, -3]$ normálvektoru egyenes metszéspontjaként is megkaphatjuk.

$$128. \text{ A 6. példa szerint a tükörképpont } P_2\left(\frac{1}{5}, 2; -\frac{3}{5}\right).$$

Megjegyzés. Az előző feladat megjegyzése szerint is dolgozhatunk és így egy szakasz egyik végpontja és felezőpontja ismeretében a szakasz másik végpontja, a tükörképpont meghatározható.

129. A 7. példa megoldásai szerint dolgozhatunk. $d = \frac{\sqrt{210}}{5}$, vagy a vetületi pont ismeretében e két pont távolságát kell meghatározni.

130. A 93. feladat megoldását felhasználva $d = \sqrt{\frac{40}{11}}$.

131. A 94. feladat megoldását felhasználva a) $d = 7$; b) $d = 13$.

132. A két egyenes kitérő. A 12. példában megismert módszerek bármelyikével dolgozhatunk.

133. Az egyenesek szöge az irányvektorok által meghatározott szög, vagy ennek kiegészítő szöge.

Most az irányvektorok $\underline{v}_1 \cong [2, -4, 1]$, $\underline{v}_2 \cong [2, -2, 5]$, így

$$\cos \varphi = \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{|\underline{v}_1| |\underline{v}_2|} = \frac{12}{\sqrt{693}} \quad \varphi \approx 49,8^\circ.$$

134. Az egyenes egyik egységirányvektora $\underline{v}^0 \cong \left[\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13} \right]$

Igy a keresett szögek cosinusai rendre $\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13}$.

135. A két egyenes közös pontja $P_0(2; -3; 4)$. A két egyenes egy-egy egységirányvektora $\underline{v}_1^0 \cong \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$, $\underline{v}_2^0 \cong \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]$. A szögfelező egyenesek egy-egy irányvektorai $\underline{v}_1^0 + \underline{v}_2^0$, illetve $\underline{v}_1^0 - \underline{v}_2^0$ (lásd 90 b. feladat). A szögfelező egyenesek: $\frac{x-2}{3} = -\frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{4}$ és $x-2 = y+3, z=4$.

136. A keresett egyenesek párhuzamosak a két egyenes $\underline{v}_1^0$ és $\underline{v}_2^0$ egységirányvektorából előállított $\underline{v}_1^0 + \underline{v}_2^0$ és $\underline{v}_1^0 - \underline{v}_2^0$ vektorokkal.

$$\frac{-1}{3} = -\frac{y+3}{4} = \frac{z}{3}, \quad x-1 = -z, \quad y = -3.$$

137. A 90. feladat megoldása szerint a keresett egyenes egy irányvektora $\underline{v}_1 = (\underline{v} \times (\underline{r}_1 - \underline{r}_0)) \times \underline{v}$, ahol $\underline{v} \cong [1, -1, 1]$, $\underline{r}_0 \cong [2, 1, -3]$, $\underline{r} \cong [-1, 2, -1]$.

$\underline{v}_1 \cong -5[4, 1, -7]$. Az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x-2}{4} = y-1 = \frac{z+3}{7}.$$

Megjegyzés. A két egyenes metszéspontja az adott egyenes és az adott ponton átmenő az adott egyenesre merőlege $x+3y+z=2$ sík $P_2\left(-\frac{2}{11}, \frac{5}{11}, \frac{9}{11}\right)$ közös pontja. A $P_0 P_2$ keresett egyenes.

138. A normáltranszverzális egyenes egy irányvektora $\underline{v} \cong [1, 0, -1]$.
(Lásd 94. feladat.) Az egyenes egy $A(a; b; c)$ pontja legyen az f egyenessel
való metszéspontja. Ekkor $\frac{a+1}{3} = \frac{b-1}{-1} = \frac{c+1}{3}$, amiből $c = a$, $b = \frac{2-a}{3}$.
A normáltranszverzális egyenes és az e egyenes metszik egymást. Ebből a
feltételből (lásd 12. példa) $a = -\frac{11}{20}$, $b = \frac{17}{20}$, $c = -\frac{11}{20}$. A normáltranszver-
zális egyenes egyenletrendszere:

$$-x = z + \frac{11}{10}, y = \frac{17}{20}.$$

Megjegyzés. A keresett egyenesen és az e , illetve f egyenesen átfektetett két
sík metszésvonala a keresett egyenes. Az e egyenest tartalmazó most felírt
sík egy normálvektora $\underline{v}_1 \times (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)$, az f egyenest tartalmazó sík egy normál-
vektora $\underline{v}_2 \times (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)$. Így a két sík egyenlete felírható, metszésvonaluk meg-
határozható.

139. $2x + y + 3z = 16$.

140. $7x - 10y - 9z = 7$.

141. $3x - 4y + 5z = -20$.

142. $x - 2y - 2z = -2$.

143. $-\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

144. a) $\underline{n}_{xy} \cong [0, 0, 1]$, $\underline{n}_{xz} \cong [0, 1, 0]$, $\underline{n}_{yz} \cong [1, 0, 0]$;

b) $\underline{n}_x \cong [0, A, B]$, $\underline{n}_y \cong [A, 0, B]$, $\underline{n}_z \cong [A, B, 0]$,

ahol $|A| + |B| \neq 0$.

145. $2y - 3z + 7 = 0$.

146. $\varphi \approx 75,8^\circ$.

147. $38,2^\circ$.

148. $\alpha_x \approx 59^\circ$, $\alpha_y \approx 16^\circ 36'$, $\alpha_z \approx 25^\circ 22'$.

149. A sík átmegy a $P_0(2; 4; 2)$ ponton és párhuzamos az $\underline{a} \cong [3, 0, 3]$
és a $\underline{b} \cong [-4, -1, 0]$ vektorokkal. A sík egyenlete $x - 4y - z = -16$.

150. Az egyenes a síkban fekszik.

151. $2x - y + 2z = -1$.

152. $x + y - 2z = -1$.

153. $x + y - z = 3$.

154. $x - 2y + z = 3$.

155. $d = \sqrt{3}$ hosszúságegység.

156. $\frac{7x + y - 6}{\sqrt{50}} = \pm \frac{3x + 5y - 4z + 1}{\sqrt{50}}$

A két sík: $4x - 4y + 4z = 7$ és $10x + 6y - 4z = 5$.

157. A keresett sík párhuzamos az adott síkkal, így egyenlete $2x - 2y - z + k = 0$ alakú. Az adott sík bármely pontja a keresett síktól 5 egység távolságra van. Az adott sík egy pontja (1; 0; -1). Így

$$\pm 5 = \frac{2 + 1 + k}{3}, \quad k = 12 \text{ vagy } k = -18.$$

Két ilyen sík van, egyenletük:

$$2x - 2y - z + 12 = 0 \text{ és } 2x - 2y - z - 18 = 0.$$

158. $d = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ h. e.

159. (4; -3; 3).

160. (0; -1; 3).

161. $\frac{x + \frac{29}{11}}{11} = y - \frac{16}{11} = \frac{z - \frac{18}{11}}{-4}$.

162. $\frac{x + \frac{3}{17}}{16} = \frac{y - \frac{4}{17}}{7} = \frac{z + \frac{1}{17}}{28}$.

163. $23x + 22y + z = 13$.

164. $118x + 10y - 22z = -65$.

165. A sík egyenlete: $x - 2y - 3z = -24$, a dőféspont D (-2; 2; 6).

$$166. \frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+4}{5} .$$

$$167. x - y + z = 1 .$$

$$168. x - y = 0 .$$

$$169. x - z + 1 = 0 .$$

$$170. x - 5y + 5z = 2.$$

$$171. 5x + 3y - z = 1 .$$

$$172. \text{ A síkok egyetlen közös pontja a } P(-11; -4; 21) \text{ pont.}$$

$$173. \frac{x+1}{3} = 2 - y = z - 1 .$$

$$174. \text{ a) } m = \frac{14}{\sqrt{89}} \approx 1,49 \text{ h. e.}$$

$$\text{b) } \gamma \approx 42,2^{\circ};$$

$$\text{c) } \varphi \approx 16,2^{\circ},$$

$$\text{d) } \delta \approx 16^{\circ} .$$

II. Komplex számok

175. a) $11 - 8i$; e) $71 + 19i$;
 b) $8 - \sqrt{2}i$; f) $-28 - 8i$;
 c) $1 + 7i$; g) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;
 d) $3\sqrt{2} - 2 + (3\sqrt{3}-2)i$; h) $2\sqrt{5} + 4i$.

176. $z^2 = 3 + 4i$; $z^3 = 2 + 11i$; $z^4 = -7 + 24i$.
 (A binomiális tételt alkalmazhatjuk.)

177. a) $117 + 44i$; b) $-76i$;
 c) -2 ; d) 1 ;
 e) $-\frac{1}{4}i$; f) $-\frac{1}{4}$;
 g) 32 ; h) $-\frac{1}{4}i$.

178. $n = 4k$ esetén 1 ,
 $n = 4k + 1$ esetén 1 ,
 $n = 4k + 2$ esetén -1
 $n = 4k + 3$ esetén $-i$, ahol k természetes szám.

179. a) $-1 - i$; b) 0 .

180. Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha a valós rész a valós résszel, a képzetes rész a képzetes résszel megegyezik. Így két, illetve négy ismeretlenes lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

a) $x = -\frac{4}{11}$, $y = \frac{5}{11}$;

b) $x = -2$, $y = \frac{3}{2}$, $z = 2$, $t = -\frac{1}{2}$

181. a) $x = \frac{1}{13}(-1 + 5i)$, $y = \frac{3}{13}(-1 + 5i)$;

b) $x = \frac{4i}{11 + 5i}$, $y = \frac{-i}{11 + 5i}$

182. a) A másodfoku egyenlet megoldó képlete most is alkalmazható. Az egyenlet diszkriminánsa $(4 + 3i)^2 - 4(1 + 5i) = 3 + 4i$. Keressük a $\sqrt{3 + 4i}$ -t

$a + bi$ alakban, ahol a és b valós szám. Ekkor $3 + 4i = (a^2 - b^2) + 2ab i$, azaz $ab = 2$ és $a^2 - b^2 = 3$. Mivel " a " valós, ezért $a = 2$ vagy $a = -2$, így $b = 1$ vagy $b = -1$. $\sqrt{3 + 4i} = \pm (2 + i)$. Az egyenlet gyökei $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 + i$. (Érdemes ellenőrizni a gyökök és együtthatók közötti összefüggést.)

$$b) \quad z_{1,2} = \pm \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{11}), \quad z_{3,4} = \pm \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{11}).$$

$$183. a) \quad 2i \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right);$$

$$b) \quad 4 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right);$$

$$c) \quad 16 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

$$184. a) \quad \cos 0 + i \sin 0;$$

$$b) \quad 2 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right);$$

$$c) \quad 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right);$$

$$d) \quad \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$e) \quad \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$f) \quad \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right);$$

$$g) \quad \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right);$$

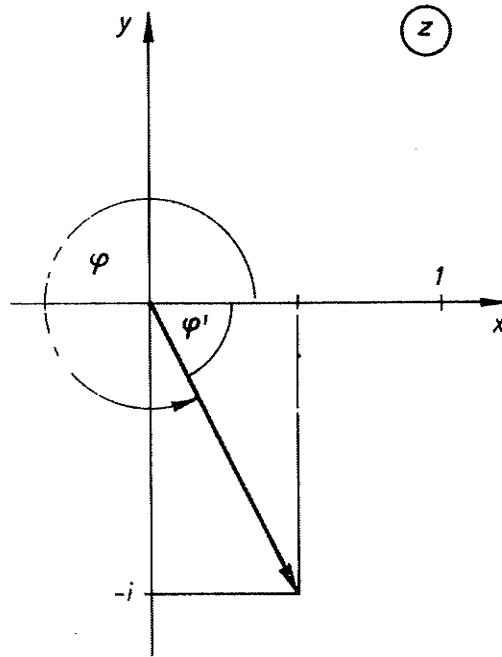
$$h) \quad \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

$$i) \quad \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3};$$

$$j) \quad \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$k) \quad \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3};$$

$$l) \quad \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3};$$



22. ábra

$$m) |z|^2 = 4(2 - \sqrt{3}), |z| = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\operatorname{ctg} \varphi' = 2 - \sqrt{3}, \cos \varphi' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{5\pi}{12},$$

$$\varphi' = \frac{5\pi}{12}, \quad \varphi = \frac{19\pi}{12}. \quad \text{Igy a trigonometrikus alak:}$$

$$2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right);$$

$$n) |z| = 5, \operatorname{arc} z = \operatorname{arc} \sin \frac{4}{5} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3} \approx 0,92.$$

$$z = 5(\cos 0,92 + i \sin 0,92);$$

$$o) |z| = \sqrt{29} \quad \operatorname{arc} z = \operatorname{arc} \cos \frac{-2}{\sqrt{29}} = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5}{2} \approx 1,95,$$

$$z = \sqrt{29}(\cos 1,95 + i \sin 1,95)$$

p) $|z| = 5$, $\arg z = \pi + \arctg \frac{3}{4} \approx 3,78$,
 $z = 5 (\cos 3,78 + i \sin 3,78)$;

r) $|z| = \sqrt{13}$, $\arg z = \arcsin \frac{-2}{\sqrt{13}} = \arctg \frac{-2}{3} \approx -0,59$,
 $z = \sqrt{13} (\cos (-0,59) + i \sin (-0,59))$.

185. a) $z = \cos (-\varphi) + i \sin (-\varphi)$;

b) $z = \cos (\pi - \varphi) + i \sin (\pi - \varphi)$;

c) $z = \cos (\pi + \varphi) + i \sin (\pi + \varphi)$;

d) Legyen $\alpha = \varphi + 2k\pi$, ahol $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$$z = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \frac{\pi - \varphi}{2} + i \sin \frac{\pi - \varphi}{2} \right].$$

186. a) $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$,

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right),$$

$$\sin \alpha + i \cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg z = \frac{\pi}{2} - \left(\left(-\frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{\pi}{2} \right) - \alpha \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \alpha.$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \right);$$

b) $\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right);$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{12} \right) \right).$

187. a) $-1, \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$;

b) $-1 + i, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i); \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})i)$;

c) $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$;

d) a hatodik egységgyökök: $e_{60} = 1, e_{61} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, e_{62} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, e_{63} = -1, e_{64} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, e_{65} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$e) i\sqrt{3} \cdot e_{6k}, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$188. w \cdot e_{nk}, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$$189. a) \sqrt[6]{5} (\cos 8^{\circ}5' + i \sin 8^{\circ}5') e_{3k}, k = 0, 1, 2;$$

$$b) \sqrt[6]{10} (\cos 113^{\circ}51' + i \sin 113^{\circ}51') \cdot e_{3k}, k = 0, 1, 2;$$

$$c) \sqrt[10]{13} (\cos 11^{\circ}15' + i \sin 11^{\circ}15') \cdot e_{5k}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$190. a) z = \sqrt[6]{\frac{1-i}{3+i}} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \left(\cos \frac{19+24k}{72} \pi + i \sin \frac{19+24k}{72} \pi \right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$b) z = \frac{1}{16\sqrt{2}} \left(\cos \frac{5+24k}{96} \pi + i \sin \frac{5+24k}{96} \pi \right), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$$

$$c) z = \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(\cos \frac{17+24k}{72} \pi + i \sin \frac{24k+17}{72} \pi \right), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$191. e_{7k} = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7} \text{ ahol } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

$$\sum_{k=0}^7 e_{7k} = 0, \quad \prod_{k=0}^7 e_{7k} = 1.$$

$$192. \text{ A trigonometrikus alakból adódik.}$$

$$193. z^3 - 1 = (z - 1)(z - e_{31})(z - e_{32});$$

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z + e_{31})(z + e_{32}), \text{ ahol}$$

$$e_{31} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e_{32} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$194. z \cdot e_{nk}, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

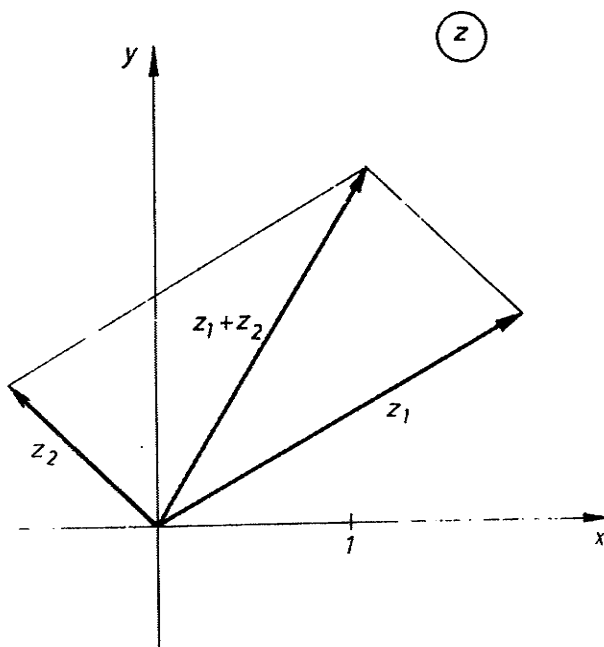
$$195. a) \text{ Ha } e_n = 1, \text{ akkor } S = \frac{n(n+1)}{2}; \text{ ha } e_n \neq 1,$$

$$S = 1 + 2e_n + 3e_n^2 + \dots + n e_n^{n-1},$$

$$-e_n S = -e_n - 2e_n^2 - \dots - (n-1)e_n^{n-1} - n \cdot e_n^n$$

$$(1-e_n)S = 1 + e_n + e_n^2 + \dots + e_n^{n-1} - n, \quad S = \frac{n}{e_n - 1};$$

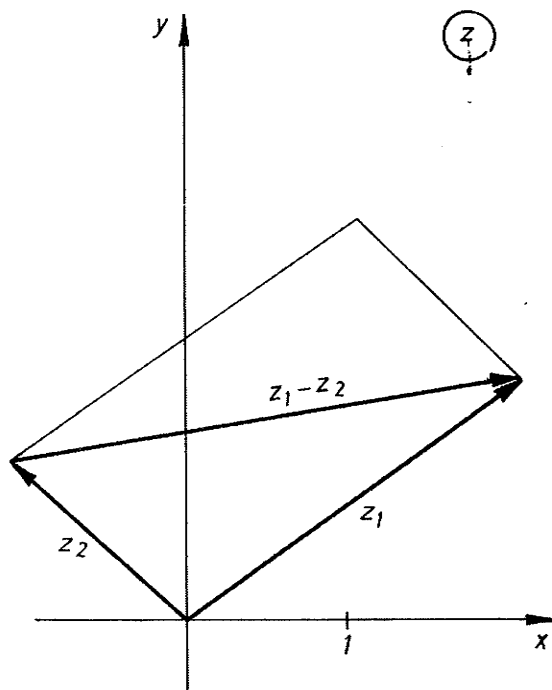
b) Ha $e_n = 1$, akkor $S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ha $e_n \neq 1$,
 akkor $S_1 = -\frac{n^2(1 - e_n) + 2n}{(1 - e_n)^2}$. (Az előző megoldáshoz hasonlóan járhatunk
 el, felhasználva az előző összefüggést.)



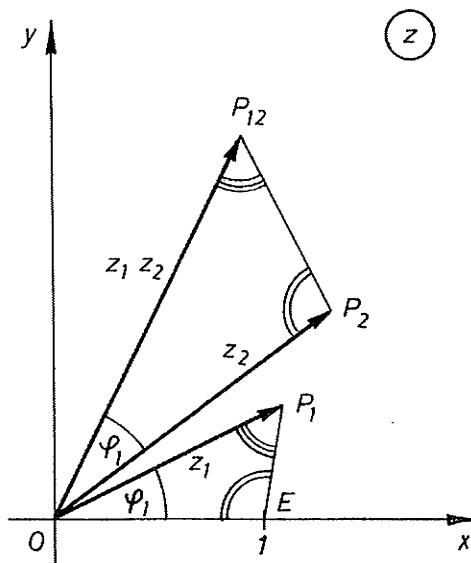
23. ábra

196. A szerkesztések $(z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}, z^2, z^3)$ a trigonometrikus alakban
 adott komplex számokon végzett műveletek eredménye alkalmazásával végez-
 hetők. Az ábrákon látható $0EP_1$, $0P_2P_{12}$, illetve $0EP_2$, $0P_{12}P_1$ háromszögek
 hasonlóak. A szerkesztések az ábrákról leolvashatók. (Az egy, két, illetve há-
 rom íves szögek egyenlők.)

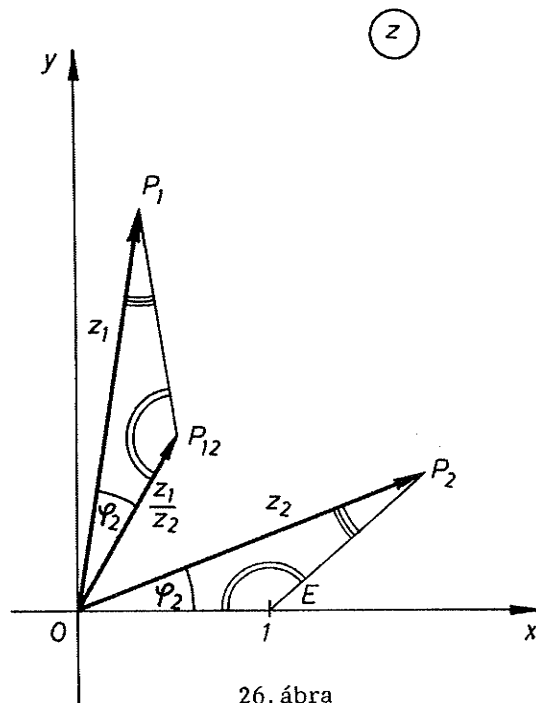
197. a) $\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$;
 b) $\sin 6x = 5 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x$.



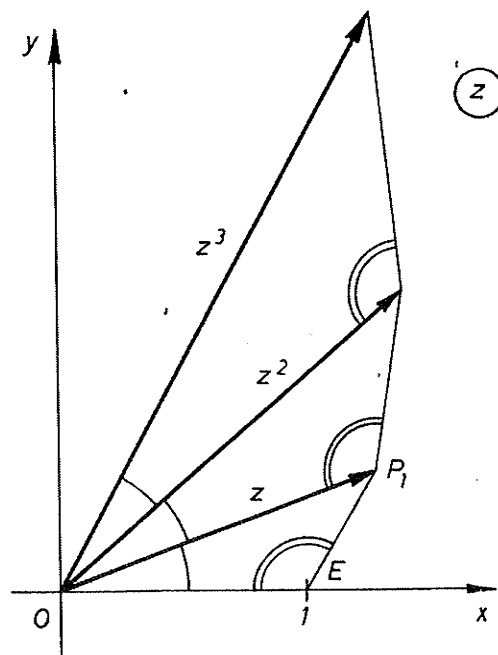
24. ábra



25. ábra



26. ábra



27. ábra

198. Legyen $T = \sum_{k=1}^n \sin kx$, $S = \sum_{k=1}^n \cos kx$ és

$$\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} = \alpha. \text{ Ekkor } S + iT = \alpha^2 + \alpha^4 + \dots + \alpha^{2n},$$

$$S + iT = \alpha^2 \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = \alpha^2 \frac{\alpha^n (\alpha^n - \alpha^{-n})}{\alpha(\alpha - \alpha^{-1})} = \alpha^{n+1} \frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}}.$$

$$\alpha - \alpha^{-1} = 2i \sin \frac{x}{2}, \quad \alpha^n - \alpha^{-n} = 2i \sin \frac{nx}{2}.$$

$$S + iT = \left(\cos \frac{n+1}{2} x + i \sin \frac{n+1}{2} x \right) \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ így}$$

$$S = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad T = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

199. Tegyük fel, hogy $(z_0 + 1)^5 + z_0^5 = 0$. Ekkor $(z_0 + 1)^5 = -z_0^5$,

$|z_0 + 1| = |z_0|$, azaz z_0 -nak megfelelő pontok a $z_0 = -1$ és $z_0 = 0$ számoknak megfelelő pontoktól egyenlő távolságra vannak, így valós részüik valóban $-\frac{1}{2}$

200. $-\left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = 1$, $-\frac{z+1}{z} = e_{5k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$z = \frac{-1}{1 + e_{5k}} = -\frac{1}{1 + \cos \frac{2\pi}{5} k + i \sin \frac{2\pi}{5} k} =$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{5} k}{1 + \cos \frac{2\pi}{5} k}, \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{5}.$$

201. 3 ilyen paralelogramma van. A negyedik csúcspontoknak megfelelő

komplex számok. $z_1 + z_2 - z_3$, $z_1 - z_2 + z_3$, $-z_1 + z_2 + z_3$.

202. Lásd 25. feladat.

203. Lásd 47. feladat.

205. Az egyenesek egyenlete

$$\bar{a}^0 z + a^0 \bar{z} - p = 0 \quad (p \geq 0)$$

alakban írható, ahol p az origó távolsága az egyenestől. Ez az egyenes Hesse-féle normálalakja. (Lásd 117-119. feladatok.)

206. Ha $a = A + iB$, $z_0 = x_0 + i y_0$, akkor $Ax + By = A x_0 + B y_0$, tehát a keresett egyenlet

$$\bar{a} z + a \bar{z} = \bar{a} z_0 + a \bar{z}_0. \text{ (Lásd 118. feladat).}$$

$$207. \bar{a} z + a \bar{z} = 0.$$

208. 1. megoldás. Azoknak és csak azoknak a z komplex számoknak megfelelő pontok vannak rajta a körön, amelyekre

$$|z - z_0| = \varrho :$$

Ezért

$$|z - z_0|^2 = \varrho^2,$$

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \varrho^2,$$

$$z \bar{z} - z_0 \bar{z} - z_0 \bar{z} + z_0 \bar{z}_0 - \varrho^2 = 0. \quad (1)$$

2. megoldás. Az egyenlet

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varrho^2,$$

ahol $x_0 + i y_0 = z_0$, és $x + i y = z$. Ezért $|z - z_0|^2 = \varrho^2$, ahonnan az (1) egyenlet megkapható.

209. Az egyenlet a következő alakban írható:

$$(z+a)(\bar{z}+\bar{a}) = a\bar{a} - k,$$

$$|z+a| = \sqrt{a\bar{a} - k}$$

Ha $a\bar{a} - k > 0$, akkor "-a" középpontú $\varrho = \sqrt{a\bar{a} - k}$ sugarú kör
akkor $z = -a$ komplex számnak megfelelő pont a mertani hely
akkor (1) üres alakzat.

$a\bar{a} - k = 0$
 $a\bar{a} - k < 0$

210. a) $x = a$ egyenes; b) $x = a$ és $x = -a$ egyenesek; c) $y = a$ egyenes; d) $y = a$ és $y = -a$ egyenesek.

e) a z_1, z_2 pontok által meghatározott szakasz felezőmerőlegese;

f) parabola, amelynek fókuszsa az 1 pont, direktrixe a képzetes tengely;

g) ellipszis, amelynek fókuszai a z_1, z_2 pontok, nagytengelyének hossza $2a$;

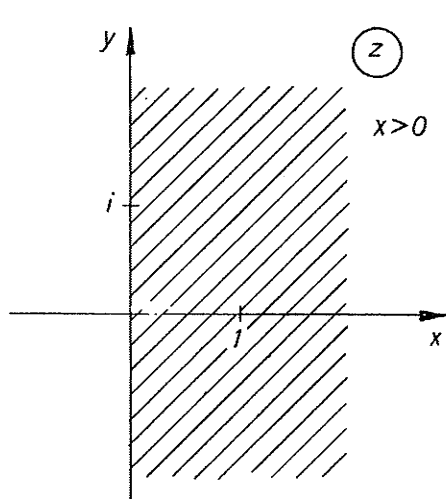
h) hiperbola, amelynek fókuszai a z_1, z_2 pontok, valós tengelyének hossza $2a$.

$$211. \frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \frac{z\bar{z}-1+z-\bar{z}}{(z+1)(\bar{z}+1)}.$$

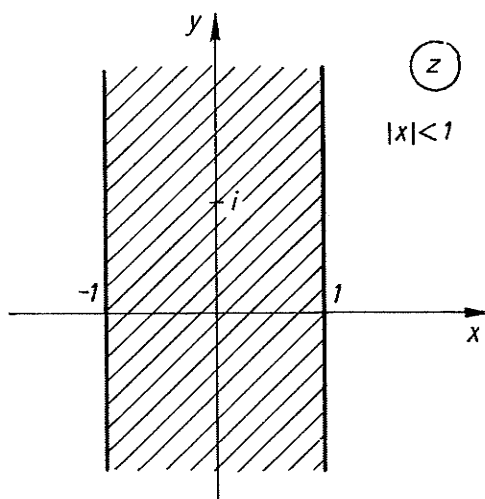
$(z+1)(\bar{z}+1)$ és $z\bar{z}-1$ valós, $z-\bar{z}$ tiszta képzetes komplex szám,

a) $z\bar{z}-1=0$, origó középpontú $\varphi=1$ sugarú kör.

b) $z=\bar{z}$, a valós tengely egyenese.



28. ábra



29. ábra

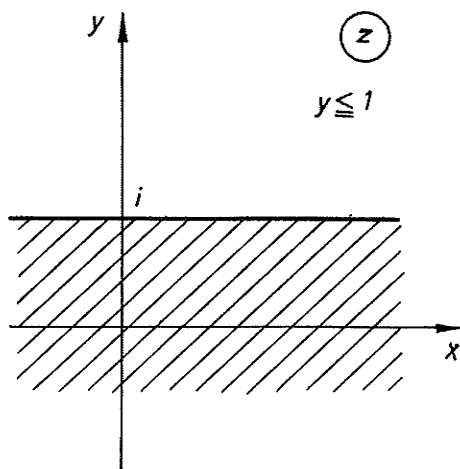
212. a) $x > 0$; (26. ábra);

b) $|x| < 1$; (27. ábra);

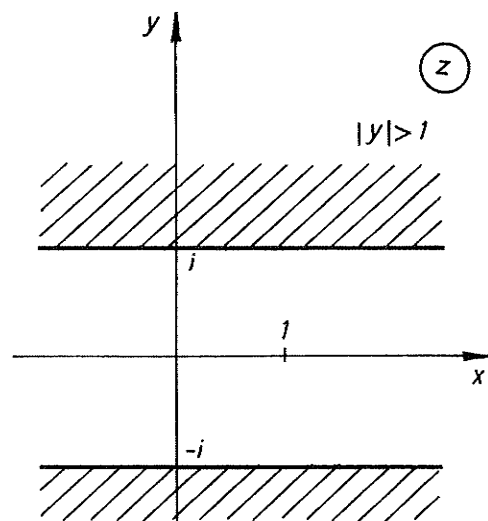
c) $y \leq 1$; (28. ábra);

d) $|y| > 1$; (29. ábra).

e) $x^2 + y^2 \leq 1$;



30. ábra



31. ábra

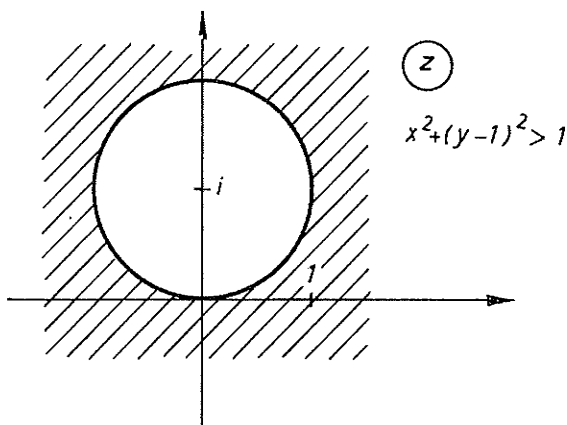
f) $x^2 + (y-1)^2 > 1$;

g) $0 < x^2 + (y+1)^2 < 4$;

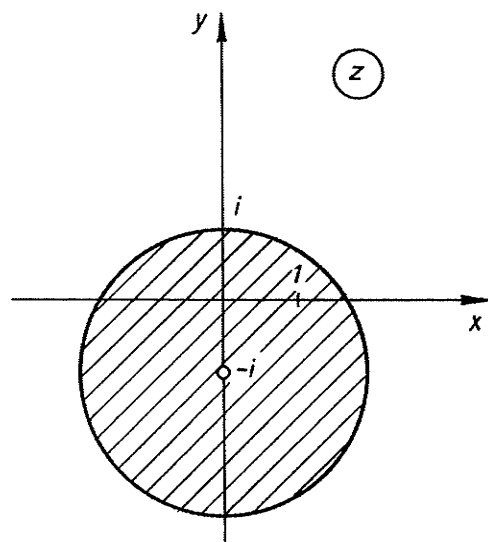
h) $1 < (x-1)^2 + y^2 < 9$;

i) $0 < \arctg \frac{y}{x} < \frac{\pi}{4}$, $x > 0$;

j) $\frac{3\pi}{4} < \text{Arc tg } \frac{y}{x} < \frac{5\pi}{4}$, $x < 0$.

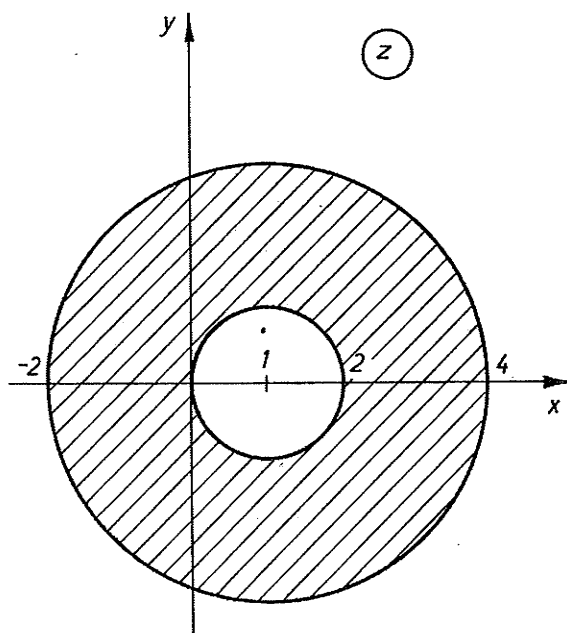


32. ábra



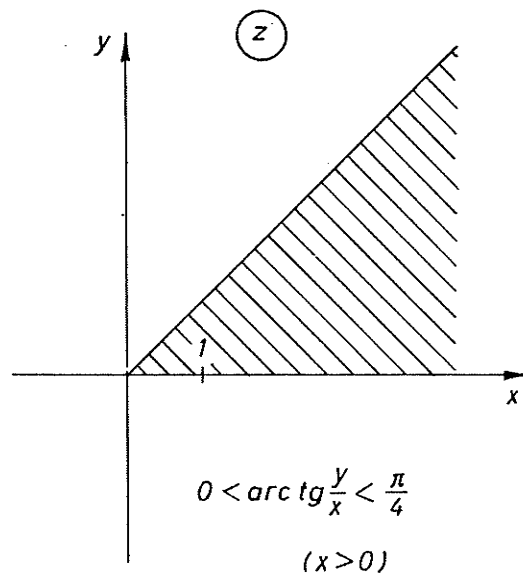
$$0 < x^2 + (y+1)^2 < 4$$

33. ábra

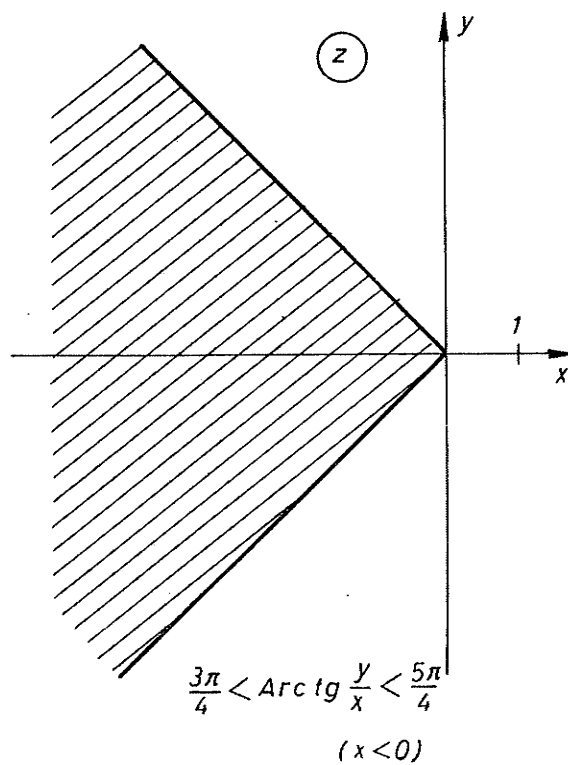


$$1 < (x-1)^2 + y^2 < 9$$

34. ábra



35. ábra



36. ábra

213. a) Az $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ellipszis belső tartománya;
 b) $(x-1)^2 + y^2 > 1$;
 c) az $x^2 - \frac{y^2}{5} = 1$ hiperbola jobboldali ágától balra fekvő tartomány,
 d) $x < 0$ félsík;
 e) $\frac{\pi}{4}$ nagyságú szögtartomány, amelynek csúcsa a "-i" pontban van és átmegy a 0 és 1 pontokon.
 f) az $y^2 = 1 - 2x$ parabola belső pontjainak halmaza.
214. A kör középpontja $\frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$, a kör sugara $\varrho = \frac{k |z_1 - z_2|}{1 - k^2}$.
215. Mivel $|z-1| = 1$, ezért $|z| |z-1| = |z|$. Tudjuk, hogy $\arcsin z^2 = 2 \arcsin z$.
 Most $\arcsin(z-1) = 2 \arcsin z$, ezért $\arcsin(z^2 - z) = \arcsin z + \arcsin(z-1) = 3 \arcsin z$.
 Így igaz az állítás.
216. a) $z = \frac{3}{2} e^{i\pi}$; b) $z = \sqrt{3} e^{i\frac{3\pi}{2}}$; c) $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
217. a) $z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + i\frac{5}{2}$; b) $z = -2i$; c) $z = -1$.
218. Tudjuk, hogy $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$,
 $\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$.
- $$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i} =$$
- $$= \frac{2i \sin 3x - 6i \sin x}{-8i} = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4};$$
- $$\cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}.$$

III. Polinomok

219. a) $\overline{p_n(z)} = \overline{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 = p_n(z)$ akkor és csak akkor, ha $\bar{a}_i = a_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.
 $A p_n(z)$ együtthatói valós számok.

b) Az együtthatók képzetes számok.

220. Mivel $a_k = A \bar{a}_k$ minden k -ra ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), ezért $|A| = 1$,
 $a_k = r_k (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, s így $A = 2 \varphi$.

221. b) $2(x+1+i)(x+1-i)$; c) $(x+1)(x+i)$;

d) $(x - \sqrt{2}(1+i))(x - \sqrt{2}(1-i))(x + \sqrt{2}(1+i))(x + \sqrt{2}(1-i))$;

g) $x^4 - 1 + 8x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 8x - 1) = \dots$

h) $x_0 = -1$ gyöke; i) $(x^2 + x + 1) = \dots$

j) Gyökei az 1-től különböző hatodik egységgyökök.

k) $\prod_{k=1}^{n-1} (x - e_{nk})$

222. b) $(x^2 - 2x\sqrt{2} + 4)(x^2 + 2x\sqrt{2} + 4)$;

e) $\frac{x^5 - 1}{x - 1} = (x - e_{51})(x - \bar{e}_{51})(x - e_{52})(x - \bar{e}_{52}) =$
 $= \left(x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x + 1\right) \left(x^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x + 1\right)$

223. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i) = x^5 - (8+i)x^4 + (24+7i)x^3 -$
 $- (34+17i)x^2 + (23+17i)x - (6+6i)$;

b) $(x+1)^3(x-3)(x-4) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$;

c) $(x-i)^2(x+1+i) = x^3 + (1-i)x^2 + (1-2i)x - 1 - i$.

224. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2) = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 65x^3 + 74x^2 - 46x + 12$;

b) $(x^2 - 4x + 13)^3 = \dots$;

c) $(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2) = \dots$

225. $-1 - 144i$.

226. a) $(z+1+i) [4z^2 - (3+4i)z - 1 + 7i] + 8 - 6i$;

b) $(z - 1 + 2i) [z^2 - 2iz - 5 - 2i] - 9 + 8i$.

227. a) $A = 3, B = -4$;

b) $A = n, B = -(n+1)$.

228. Az $x^2 + x + 1$ polinom gyökei harmadik egységgyökök, $e_{n1}, e_{n2} = e_{n1}^2$. Az $x^m + x^{n+1} + x^{k+2}$ polinomnak ezek szintén gyökei.

229. n nem többszöröse 3-nak.

230. A Vieta formulák felhasználásával adódik az állítás.

231. Tudjuk, hogy

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad (1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = -r. \quad (3)$$

$$\text{Igy } (x_1 + x_2 + x_3)^2 = p^2, \text{ azaz } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 2q. \quad (4)$$

Emeljük négyzetre a (2) egyenlet mindkét oldalát és alkalmazzuk a feltételt.
Ekkor

$$(x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2 = 0. \quad (5)$$

Emeljük négyzetre a (4) egyenlet mindkét oldalát és alkalmazzuk az (5) összefüggést, így az igazolandó állítás belátható.

232. $2x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$.

IV. Mátrixalgebra

IV/1. Determinánsok

234. -2, 235. 1, 236. 2, 237. 1, 238. 0, 239. -152,
 240. 564, 241. 12, 242. 12, 234. 54, 244. 48, 245. 1,
 246. 160, 247. $(a+b)^2$, 248. $(b-c)(d-a)$, 249. 1, 250. 0,
 251. 1, 252. $\sin(\alpha - \beta)$, 253. $\cos(\alpha + \beta)$, 254. $2a^2(a+x)$,
 255. ax^2 , 256. $(b-a)(c-a)(c-b)$, 257. $a^2 + b^2 + c^2 - 2(bc + ac + ab)$,
 258. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, 259. -1, 260. $-1 - e = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

261. -2, 262. $-3i\sqrt{3}$, 263. -3, 265. Szorozzuk meg a sorokat rendre, a, b, c, d-vel, majd emeljük ki a negyedik sorból abcd-t.

266. Az egyenlet $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ alakú és a megfelelő vonalon rajta van a P_1, P_2, P_3 pont.

267. Az első oszlop -1-szeresét adjuk a második és harmadik oszlophoz.

$$268. D = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}.$$

$$269. D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n} \dots a_{n-2,3} a_{n-1,2} a_{n1}.$$

270. Adjuk az utolsó oszlophoz az első n-1 oszlop összegét, majd emeljük ki az utolsó oszlopból $(na + x)$ -et. Ezután az utolsó oszlop $(-a)$ -szorosát adjuk, az első n-1 oszlophoz.

$$d = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} (x + na) x^{n-1}.$$

$$271. D = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^n D_i, \quad \text{ahol}$$

$$D_i = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & \dots & x \end{vmatrix}$$

(Az i -edik oszlop minden eleme a_i). $D_i = a_i x^{n-1}$

$$D = x^n + \sum_{i=1}^n x^{n-1} a_i = x^{n-1} (x + a_1 + a_2 + \dots + a_n) .$$

272. A $p(x)$ polinom fokszáma $n-1$. A polinom gyökei $2-a$, $3-a$, ..., $n-a$, mert ezeket x helyébe téve látható, hogy $p(k-a) = 0$, $k = 2, 3, \dots, n$. Ezért $p_{n-1}(x) = c(x+a-2)(x+a-3)\dots(x+a-n)$, ahol most $c = 1$. (Miért?)

$$273. \text{ a) } \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 8 & 17 \\ 11 & -6 & 5 \\ 3 & 8 & -3 \end{vmatrix} .$$

IV/2. Műveletek mátrixokkal

$$276. \text{ a) } \underline{\underline{AB}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{BA}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\text{b) } \underline{\underline{AB}} = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{BA}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 13 \\ -2 & -1 & 11 \\ 2 & -2 & 10 \end{bmatrix} .$$

$$\text{c) } \underline{\underline{AB}} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -12 & 6 & 1 \\ 15 & 1 & 44 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{BA}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -17 & 17 & 20 \\ -30 & 18 & 24 \end{bmatrix} .$$

$$\text{e) } \underline{\underline{AB}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a } \underline{\underline{BA}} \text{ szorzás nem végezhető el.}$$

$$278. \text{ a) } \underline{\underline{P}}_{31}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{P}}_{31}^3 = \underline{\underline{E}}_3 ;$$

$$b) \underline{P}_{41}^4 = \underline{E}_4 ;$$

$$c) \underline{T}^n = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}$$

$$d) \underline{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}, \underline{B}^n = a^n \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \underline{C}^n = a^{n-1} \begin{bmatrix} a & n \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$279. (\underline{AB})\underline{C} = \underline{A}(\underline{BC}) = \begin{bmatrix} 12 & 299 & 183 \\ 49 & 109 & 123 \\ 40 & 188 & 156 \end{bmatrix}.$$

280. a) $\det \underline{A} = 0$, tehát $\underline{A}$ szinguláris;

b) -c) $\det \underline{B} \neq 0$, $\det \underline{C} \neq 0$, így $\underline{B}$ és $\underline{C}$ is reguláris.

$$281. \underline{AA}' = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 7 \\ 2 & 26 & -17 \\ 7 & -17 & 17 \end{bmatrix}, \underline{A}'\underline{A} = \begin{bmatrix} 35 & -8 & 4 \\ -8 & 14 & -10 \\ 4 & -10 & 8 \end{bmatrix}.$$

Az $\underline{AA}'$ szimmetrikus, ha $(\underline{AA}')' = \underline{AA}'$. Most $(\underline{AA}')' = (\underline{A}')' \underline{A}' = \underline{A} \underline{A}'$, tehát $\underline{AA}'$ szimmetrikus. Hasonlóan látható be, hogy $\underline{A}' \underline{A}$ is szimmetrikus.

282. Nyilván $\underline{A}$, $\underline{B}$ és $\underline{E}_n$ n -edrendű négyzetes mátrixok. Az $\underline{AB}$ és $\underline{BA}$ szorzatokban a főátlókban álló elemek összege megegyezik, így az $\underline{AB} - \underline{BA}$ főátlójában levő elemek összege 0.

283. Szorozzuk meg a feltételi egyenlet mindkét oldalát jobbról és balról is $\underline{A}^{-1}$ -gyel.

284. Tegyük fel, hogy $\underline{A} = \underline{S} + \underline{T}$, ahol $\underline{S}' = \underline{S}$, $\underline{T}' = -\underline{T}$. Ekkor

$\underline{A}' = \underline{S} - \underline{T}$, $\underline{A} + \underline{A}' = 2\underline{S}$, $\underline{A} - \underline{A}' = 2\underline{T}$ és $\underline{S} = \frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}')$, $\underline{T} = \frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{A}')$. Valóban $\underline{S}$ szimmetrikus, $\underline{T}$ antiszimmetrikus és $\underline{S} + \underline{T} = \underline{A}$.

$$285. a) \begin{bmatrix} -4 & 1,5 & 5,5 \\ 1,5 & -1 & -2 \\ 5,5 & -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & -2,5 \\ -0,5 & 0 & 4 \\ 2,5 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$286. \text{ a) } 17x^2 + 12xy + 8y^2;$$

$$\text{ b) } a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2;$$

$$\text{ c) } 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz;$$

$$\text{ d) } a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

$$287. \text{ a) } \frac{1}{62} \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{ b) } \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

$$\text{ ha } a^2 + b^2 > 0.$$

$$\text{ c) } \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ d) } \begin{bmatrix} -11 & -2 & -7 \\ 14 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$288. \begin{bmatrix} -11 & -11 \\ 15 & 15 \end{bmatrix} \quad 289. \begin{bmatrix} -16 & 29 \\ -7 & 12 \end{bmatrix},$$

$$290. \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}. \quad 291. \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -8 & 4 & -2 \\ -12 & -2 & -7 \\ 60 & -26 & 41 \end{bmatrix}.$$

$$292. \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -16 & 16 & -2 \\ -1 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

IV/3. Mátrix rangja

$$293. r(\underline{A}) = 3.$$

$$294. r(\underline{A}) = 2.$$

$$295. r(\underline{A}) = 3.$$

$$296. r(\underline{A}) = 4.$$

$$297. r(\underline{A}) = 4.$$

$$298. r(\underline{A}) = 4.$$

299. a) A két sík akkor és csak akkor metszi egymást, ha a két sík normálvektora nem párhuzamos, azaz függetlenek, így a jelzett mátrix rangja valóban 2.

A keresett feltétel:

$$r \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} = 1.$$

V. Lineáris egyenletrendszerek

300. $\underline{x} = [0, 0, 0, 0]'$, azaz csak triviális megoldása van.

301. $\underline{x} = 0$, azaz $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

302. $\underline{x} = \left[\frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4, \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4, x_3, x_4 \right]' =$
 $= x_3 \left[\frac{3}{17}, \frac{19}{17}, 1, 0 \right]' + x_4 \left[-\frac{13}{17}, -\frac{20}{17}, 0, 1 \right]' .$

303. $x_1 = 3, x_2 = x_3 = 1; \underline{x} = [3, 1, 1]'$.

304. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2; \underline{x} = [1, 2, -2]'$.

305. $\underline{x} = [2, -2, 3]'$.

306. $\underline{x} = [3, 4, 5]'$.

307. $\underline{x} = [-1, -1, 0, 1]'$.

308. $\underline{x} = [1, 2, -1, -2]'$.

309. Nincs megoldás.

310. $\underline{x} = [1, 2, 3]'$.

311. $\underline{x} = x_3 \left[-\frac{11}{7}, -\frac{1}{7}, 1 \right]'$. Ha a négy egyenletnek egy-egy sík felel

meg, akkor a négy origón átmenő sík közös metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét kaptuk.

$\underline{x} = [-11t, -t, 7t]'$. A megoldások a háromdimenziós tér egy egydimenziós alterét képezik.

312. $\underline{x} = \frac{1}{8} \left[-4x_4 + 7x_5, -4x_4 + 5x_5, 8x_4, 8x_5 \right]' =$
 $= \frac{x_4}{2} [-1, -1, 2, 0]' + \frac{x_5}{8} [7, 5, 0, 8]'$.

313. $\underline{x} = t [0, 0, 0, 1, 1]'$.

$$314. \underline{x} = \frac{1}{3} [1 + x_5, 1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5, 3x_3, 3x_4, 3x_5]' .$$

$$315. \underline{x} = [1, 2, -2]' .$$

316. Nincs megoldás.

317. Nincs megoldás.

$$318. \underline{x} = [-8, 3 + x_4, 6 + 2x_4, x_4]' .$$

$$\underline{x} = [-8, 3, 6, 0]' + x_4 [0, 1, 2, 4]' .$$

$$319. \underline{x} = [-16 + x_3 + x_4 + 5x_5, 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5, x_3, x_4, x_5]' = \\ = [-16, 23, 0, 0, 0]' + x_3 [1, -2, 1, 0, 0]' + x_4 [1, -2, 0, 1, 0]' + \\ + x_5 [5, -6, 0, 0, 1]' .$$

320. Nincs megoldása.

$$321. \underline{x} = [-x_4 + 2x_5, -1 - 2x_4 + 4x_5, -3 - 6x_4 + 10x_5, x_4, x_5]' = \\ = [0, -1, -3, 0, 0]' + x_4 [-1, -2, -6, 1, 0]' + x_5 [2, 4, 10, 0, 1]' .$$

$$322. \underline{x} = \frac{1}{6} [4 + 2x_5, 1 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5, 6x_3, 6x_4, 6x_5]' = \\ \underline{x} = \frac{1}{6} [4, 1, 0, 0, 0]' + \frac{x_3}{6} [0, 3, 6, 0, 0]' + \frac{x_4}{6} [0, -3, 0, 6, 0]' + \\ + \frac{x_5}{6} [2, 5, 0, 0, 6]' .$$

323. Ha $\lambda \neq -2$, akkor nincs megoldás, ha $\lambda = -2$, akkor

$$\underline{x} = \left[\frac{1}{2} (1 + x_4), \frac{1}{2} (1 + 2x_3 - x_4), x_3, x_4 \right]' .$$

324. Ha $\lambda = -1$, akkor

$$\underline{x} = [1 + 2x_3 + 3x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4]' , \text{ ha } \lambda \neq -1, \text{ akkor}$$

$$\underline{x} = [-1 - 3x_4, -1 - 2x_4, -1 - 3x_4, x_4]' .$$

325. Ha $\lambda = 0$, akkor nincs megoldás, ha $\lambda = 1$, akkor

$$\underline{x} = [-4 - x_4, 2, 3, x_4]' , \text{ ha } \lambda \neq 0 \text{ és } \lambda \neq 1, \text{ akkor}$$

$$\underline{x} = \frac{1}{\lambda} [0, 1, 3, \lambda - 5]' .$$

326. Ha $\lambda = -2$, akkor nincs megoldás, Ha $\lambda \neq -2$, akkor

$$\underline{x} = \frac{1}{7\lambda + 14} [7\lambda + 14, 7(4 - \lambda), 18 - 21\lambda, -20 - 7\lambda]' .$$

327. Ha $\lambda = -22$, akkor nincs megoldás, ha $\lambda \neq -1$, akkor

$$\underline{x} = [1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4, x_2, x_3, x_4]' , \text{ ha } \lambda \neq -22 \text{ és } \lambda \neq -1, \text{ akkor}$$

$$\underline{x} = \frac{1}{\lambda + 22} [-7, \lambda + 8, \lambda + 1, \lambda + 1]' .$$

328. A pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy egyenesre, ha az $\underline{A}$ mátrix rangja kisebb 3-nál, ahol

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} .$$

329.

$$r \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots\dots\dots \\ A_n & B_n & C_n \end{bmatrix} < 3 .$$

330. A pontok akkor és csak akkor illeszkednek ugyanarra a síkra, ha $r(\underline{A}) < 4$, akkor és csak akkor illeszkednek ugyanarra az egyenesre, ha $r(\underline{A}) < 3$ ahol

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} .$$

331. A síkoknak akkor és csak akkor van közös pontjuk, ha $r(\underline{A}) < 4$, akkor és csak akkor van közös egyenesük, ha $r(\underline{A}) < 3$, ahol

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{bmatrix}$$

VI. Lineáris terek

332. a) A 34. példában kapott szükséges és elégséges feltétel szerint

$$\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha = -2.$$

b) $\alpha = -1$;

c) $\alpha = \pm 1$.

333. a) $\alpha = 3, \beta = 2$; b) $\alpha = -\frac{9}{5}, \beta = -\frac{23}{5}$.

334. A 34. példa megoldásához hasonlóan dolgozhatunk. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} = 0$$

egyenletből $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1) e_1 + (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2) e_2 + (\lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3) e_3 = 0.$$

Az
$$\begin{aligned} a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_3 &= 0, \\ a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + c_2 \lambda_3 &= 0, \\ a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

a homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van, így

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ tehát } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ez a keresett feltétel.

Ha $\underline{e}_1 = \underline{i}$, $\underline{e}_2 = \underline{j}$, $\underline{e}_3 = \underline{k}$, akkor ez azt jelenti, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok zérustól különböző, a három vektor nem komplanáris, tehát független.

336. a) Akkor és csak akkor függenek össze, ha $\underline{a}$, $\underline{x}, \underline{y}$ is összefüggnek, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 4 & 2 \\ 1 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = 0, \alpha = -2.$$

b) $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \alpha \neq \frac{7}{5}.$

337. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ lineárisan függetlenek, akkor a 349. feladat szerint

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ így } \underline{x} = \underline{a} + \underline{b},$$

$\underline{y} = \underline{b} + \underline{c}$, $\underline{z} = \underline{c} + \underline{a}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Mivel $\underline{x} + \underline{y} + \underline{z} = 2(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$, $\underline{a} = \frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{y} + \underline{z})$, $\underline{b} = \frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{y} - \underline{z})$,

$\underline{c} = \frac{1}{2}(-\underline{x} + \underline{y} + \underline{z})$.

Ha $\underline{x}$, $\underline{y}$ és $\underline{z}$ függetlenek, akkor

$$\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ így } \underline{a}, \underline{b} \text{ és } \underline{c} \text{ is függetlenek.}$$

338. a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ b) $\begin{vmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha \\ -\gamma & 0 & \beta \end{vmatrix} = 0,$ így

igazak az állítások.

339. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2).$

Az $\underline{x}$, $\underline{y}$ és $\underline{z}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\lambda \neq 1$, és $\lambda \neq -2$, lineárisan összefüggnek, ha $\lambda = 1$ vagy $\lambda = -2$.

340. $\underline{a}_2 = 4\underline{a}_1$.

341. $\underline{a}_3 = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$.

$$342. \underline{a}_3 = 3\underline{a}_1 - 2\underline{a}_2.$$

343. - 346. A vektorok függetlenek.

$$347. \underline{a}_3 = \underline{a}_1 - 2\underline{a}_2, \quad \underline{a}_4 = 2\underline{a}_1 - 3\underline{a}_2.$$

348. $\underline{a} = a_1 [1, 0, 2]'$. Két ilyen típusu vektor összege és valós számszorosa is ilyen típusu, hiszen $\underline{a} + \underline{b} = a_1 [1, 0, 2]' + b_1 [1, 0, 2]', = (a_1 + b_1) [1, 0, 2]', \quad \lambda \underline{a} = \lambda a_1 [1, 0, 2]'$. Az elméleti jegyzetben (9.1)-(9.8) -cal jelzett műveleti azonosságok is érvényben vannak, így az $\underline{a}$ típusu vektorok halmaza lineáris tér, s mivel része Q^3 -nak, ezért Q^3 egy alterét képezik. Az alteret az $[1, 0, 2]'$ vektor kifeszíti (egydimenziós alter).

349. Az előzőhöz hasonlóan látható, hogy az $\underline{a}$ típusu vektorok lineáris teret alkotnak, így valóban Q^3 egy alterét alkotják. Az alter kétdimenziós, egy bázisa pl.: $[2, 0, 3]', [0, 1, 0]'$.

350. Nem. A vektorok között nincs $\underline{0}$ vektor.

351. - 357. A (9.1)-(9.8) műveleti azonosságok érvényesek.

358. A (9.1) - (9.8) műveleti azonosságok érvényesek.

A $\lambda_1 K_1(x; y; z) + \lambda_2 K_2(x; y; z)$ kifejezések halmaza az adott halmaz részhalmaza, és önmagában lineáris teret képez, tehát az eredeti lineáris tér altere. Ha $K_1 \neq \lambda K_2$, akkor a $\lambda_1 K_1(x; y; z) + \lambda_2 K_2(x; y; z) = 0$ egyenlet is sík egyenlete, amely $K_1 = 0, K_2 = 0$ síkok közös egyenesén megy át, ha K_1 és K_2 metszi egymást, párhuzamos a $K_1 = 0, K_2 = 0$ síkokkal, ha azok is párhuzamosak egymással.

359. A (9.1)-(9.8) műveleti azonosságok érvényesek. Az alsó háromszög mátrixok is lineáris teret alkotnak.

360. Igen. A (9.1)-(9.8) műveleti azonosságok érvényesek.

361. Nem. Nincs a halmaznak zérus eleme, így a (9.3) és (9.4) nem teljesül.

VII. Bázistranszformáció

VII/1. Mátrix sajátértéke, sajátvektora

$$362. \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4, \underline{s}_1 = [1, -1]', \underline{s}_2 = [1, 1]',$$

$$\underline{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$363. \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8, \underline{s}_1 = [1, -1]', \underline{s}_2 = [1, 1]'$$

$$364. \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5, \underline{s}_1 = [1, -2]', \underline{s}_2 = [2, 1]'$$

$$\underline{M} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$365. \lambda_1 = \frac{5}{2}, \lambda_2 = -\frac{5}{2}, \underline{s}_1 = [3, 1]', \underline{s}_2 = [-1, 3],$$

$$\underline{M} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$366. \lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1, \underline{s}_1 = [3, 4]', \underline{s}_2 = [1, -1]',$$

$$367. \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9.$$

$$\underline{s}_1 = [1, 2, 2]', \underline{s}_2 = [2, 1, -2]', \underline{s}_3 = [-2, 2, -1]'$$

$$\underline{M} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$368. \lambda^3 - 10\lambda^2 + 8\lambda + 64 = 0, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = -2.$$

$$\underline{s}_1 = [1, 0, -1]', \underline{s}_2 = [1, 0, 1]', \underline{s}_3 = [0, -1, 0]'$$

$$\underline{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$369. \quad \lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 3.$$

$$\underline{s}_1 = [-1, 2, 2]', \quad \underline{s}_2 = [2, -1, 2]', \quad \underline{s}_3 = [2, 2, -1]'$$

$$\underline{M} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$370. \quad (\lambda + 3)^2 (\lambda - 6) = 0, \quad \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

$$\underline{s}_1 = [2, 1, -2]. \quad \underline{s}_2 \text{-nek bármely } \underline{s}_1 \text{-re merőleges vektor választható és}$$

$$\underline{s}_3 = \underline{s}_1 \times \underline{s}_2.$$

$$371. \quad -\lambda^3 + 9\lambda^2 = 0, \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad \underline{s}_1 = [2, -1, 2]'$$

$$\underline{s}_2 \text{-nek bármely } \underline{s}_1 \text{-re merőleges vektor választható és } \underline{s}_3 = \underline{s}_1 \times \underline{s}_2.$$

$$372. \quad \lambda^3 - 14\lambda^2 + 35\lambda - 22 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 11.$$

$$\underline{s}_1 = [1, -1, 0]', \quad \underline{s}_2 = [-2, 3, 4]', \quad \underline{s}_3 = [-1, -3, 2]'$$

$$373. \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2. \quad \underline{s}_1 = [-4, 1, 0]', \quad \underline{s}_2 = [-4, 0, 1]',$$

$$\underline{s}_3 = [-2, 1, 0]'$$

$$374. \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \quad \underline{s}_1 = [1, 1, 1]'. \quad \text{Az } \underline{s}_2 \text{ és } \underline{s}_3 \text{ koordinátái kielégítik az } x + 2y + z = 0 \text{ egyenletet. Így most a } \lambda = 1 \text{ sajátértékhez található két egymástól független } \underline{s}_2 \text{ és } \underline{s}_3 \text{ sajátvektor. Alkalmas például:}$$

$$\underline{s}_2 = [2, -1, 0]' \text{ és } \underline{s}_3 = [1, 0, -1]'$$

$$375. \quad (\lambda - 1)^3 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \quad \text{Egyetlen sajátvektora van a}$$

$$\text{mátrixnak } \underline{s} = [1, 1, 1]'$$

$$376. \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = i\sqrt{14}, \quad \lambda_3 = -i\sqrt{14}. \quad \underline{s}_1 = [3, -1, 2]',$$

$$\underline{s}_2 = [3 + 2i\sqrt{14}, 13, 2 - 3i\sqrt{14}]', \quad \underline{s}_3 = [3 - 2i\sqrt{14}, 13, 2 + 3i\sqrt{14}]'$$

VII/2. Másodrendű görbék

$$377. a) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \quad , \quad \lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = 0 \quad .$$

$$\text{Ha } \lambda_1 = 5 \quad , \quad \text{akkor } -m_1 - 2m_2 = 0 \quad , \quad m_1 = -2m_2 \quad .$$

$$\text{Legyen } m_2 = -1, \text{ így } m_1 = 2 \quad .$$

$$\underline{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{M} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & -6 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad .$$

$$5\tilde{x}^2 + 2\sqrt{5}\tilde{x} - 6\sqrt{5}\tilde{y} + 7 = 0 \quad ,$$

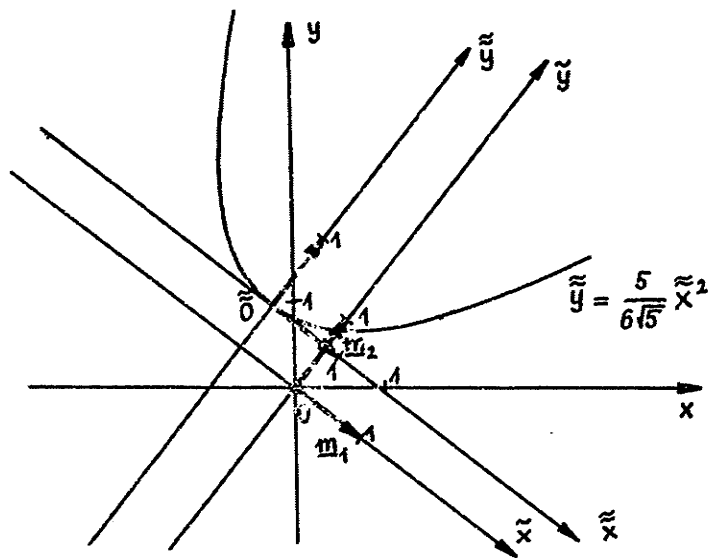
$$5\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 6\sqrt{5}\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \quad .$$

$$\text{Legyen } \underline{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad \text{az } \underline{m}_1, \underline{m}_2 \text{ bázisban, azaz}$$

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{\sqrt{5}}{5} \quad , \quad \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} - \frac{\sqrt{5}}{5} \quad . \quad \text{A másodrendű görbe tehát}$$

parabola

$$\tilde{\tilde{y}} = \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{5}} \tilde{\tilde{x}}^2$$



37. ábra

$$b) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = -1, \quad \underline{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -12 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -90 & 10 \end{bmatrix} .$$

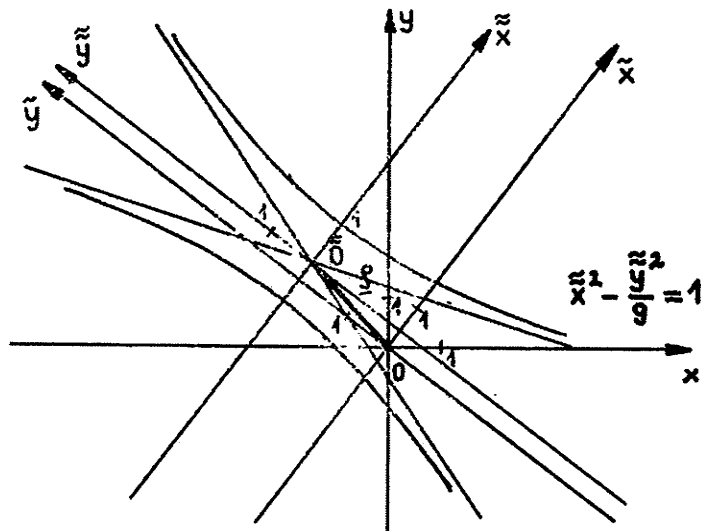
$$9\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \frac{90}{\sqrt{10}} \tilde{x} + \frac{10}{\sqrt{10}} \tilde{y} + 11 = 0 ,$$

$$9 \left(\tilde{x} - \frac{5}{\sqrt{10}} \right)^2 - \left(\tilde{y} - \frac{5}{\sqrt{10}} \right)^2 = 9 ,$$

$\tilde{x} = \tilde{x} - \frac{5}{\sqrt{10}} \quad , \quad \tilde{y} = \tilde{y} - \frac{5}{\sqrt{10}} \quad .$ A másodrendű görbe

hiperbola, egyenlete az $\tilde{x}, \tilde{y}$ koordináta-rendszerben:

$$\tilde{x}^2 - \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1 \quad .$$



38. ábra

c) Metsző egyenespár, egyenlete alkalmas $(\tilde{x}, \tilde{y})$ koordináta-rendszerben: $\tilde{x}^2 - 4\tilde{y}^2 = 0 \quad .$

d) Párhuzamos egyenespár, egyenlete alkalmas koordináta-rendszerben:

$$\tilde{x}^2 = 1 \quad ,$$

e) "Pont ellipszis" $2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 = 0 \quad .$

f) Képzetes párhuzamos egyenespár $\tilde{x}^2 + 1 = 0 \quad .$

g) Képzetes ellipszis.

h) Kettős egyenes.

VII/3. Másodrendű felületek

378. a) A 44. a) példa eredményeit felhasználjuk.

$$\text{Most } \underline{M} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{b}}' = \underline{b}' \underline{M},$$

$$\underline{\tilde{b}}' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & -24 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -24 & 18 \end{bmatrix}.$$

Az $\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3$ bázisban a másodrendű felület egyenlete:

$$3\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2 - 6\tilde{x} - 24\tilde{y} + 18\tilde{z} + 18 = 0$$

$$3(\tilde{x}-1)^2 + 6(\tilde{y}-2)^2 + 9(\tilde{z}+1)^2 = 18$$

Toljuk el az $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ koordináta-rendszert a $\underline{Q}$ vektorral, ami az $\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3$ bázisban: $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Az így kapott

$(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{z}})$ koordináta-rendszerben a felület egyenlete:

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{6} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{3} + \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{2} = 1.$$

A felület ellipszoid.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda = 0,$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 0.$$

$$\text{Ha } \lambda_1 = 2, \text{ akkor } \underline{m}_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{ha } \lambda_2 = 5, \text{ akkor}$$

$$\underline{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{és ha } \lambda_3 = 0, \text{ akkor } \underline{m}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Most } \underline{\tilde{b}}' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & -5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Az $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ koordináta-rendszerben a felület egyenlete:

$$2\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 + \sqrt{6}\tilde{x} - 5\sqrt{2}\tilde{z} + 3 = 0,$$

$$2\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + 5\tilde{y}^2 = 5\sqrt{2}\left(\tilde{z} - \frac{9\sqrt{2}}{40}\right).$$

$$\text{Legyen } \tilde{x} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \tilde{x}, \quad \tilde{y} = \tilde{y}, \quad \tilde{z} - \frac{9\sqrt{2}}{40} = \tilde{z}$$

$$\text{azaz toljuk el a } \underline{\tilde{Q}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 \\ \frac{9\sqrt{2}}{40} \end{bmatrix} \text{ vektorral (ez az}$$

$\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3$ bázisban adott) az $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ koordináta-rendszert.

Az így kapott $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ koordináta rendszerben a felület egyenlete:

$$2\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 = 5\sqrt{2}\tilde{z}.$$

A felület elliptikus paraboloid.

c) Kétköpenyű hiperboloid. Alkalmas koordináta-rendszerben az egyenlete:

$$\frac{\tilde{x}^2}{\frac{4}{5}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{4}{15}} - \frac{\tilde{z}^2}{\frac{4}{25}} = -1.$$

d) Hiperbolikus paraboloid. $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 2\tilde{z}$.

e) Elliptikus kup. $\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 - 3\tilde{z}^2 = 0$.

f) Képzetes kup (pont). $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 2\tilde{z}^2 = 0$.

g) Hiperbolikus henger. $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 1$.

h) Parabolikus henger. $\tilde{y}^2 = 2\tilde{x}$.

VII/4. Bázistranszformáció

379. Lásd 45. példa. Az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban az (x, y) síkra vonatkozó λ arányú merőleges affinitás tenzorának mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \text{ hiszen } \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \lambda z. \end{aligned} \text{ Vegyünk fel egy}$$

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}$ ortonormált bázist (jobbrendszer). E bázisban a tenzor mátrixa $\tilde{\underline{A}}$ az előzővel megegyező.

Most tehát $\tilde{\underline{v}} = \tilde{\underline{A}} \tilde{\underline{r}}$.

Térjünk vissza az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisra. Mivel $\underline{M} = [\underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \ \underline{e}]$, ezért

$$\underline{v} = \underline{M} \tilde{\underline{A}} \underline{M}' \underline{r} .$$

$$\text{Most egy megfelelő } \underline{M} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} .$$

$$\underline{A} = \underline{M} \tilde{\underline{A}} \underline{M}' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 + \lambda & -2 & 2\lambda & 2 & -2\lambda \\ -2 + 2\lambda & 5 & 4\lambda & 4 & -4\lambda \\ 2 - 2\lambda & 4 & -4\lambda & 5 & +4\lambda \end{bmatrix} .$$

$$380. \quad a) \quad \left. \begin{aligned} x' &= \mu x \\ y' &= \nu y \\ z' &= \lambda z \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

$$b) \quad \text{Most } \mu = 1, \nu = 1. \text{ A transzformáció mátrixa egy } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \text{ ortonormált jobbrendszerben } \underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} .$$

A transzformáció értelmezéséből (és $\underline{\tilde{A}}$ ismeretéből) adódik, hogy a transzformáció megegyezik az előző feladatban szereplő transzformációval.

381. Az $\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$ vektor tükörképe az z tengelyre (az $\underline{r} = t \underline{k}$ egyenesre)

$$\underline{v} = -x \underline{i} - y \underline{j} + z \underline{k} .$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

Egy alkalmas $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ jobbrendszerű ortonormált bázisban $\underline{r}$ tükörképe az origón áthaladó $\underline{e}_3$ irányvektoru egyenesre $\underline{\tilde{v}} = \underline{\tilde{A}} \underline{\hat{r}}$,

$$\text{ahol } \underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Térjünk vissza az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisra.

$\underline{v} = \underline{A} \underline{r}$, ahol $\underline{A} = \underline{M} \underline{\tilde{A}} \underline{M}'$ és egy alkalmas $\underline{M}$ mátrix:

$$\underline{M} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} .$$

$$\underline{A} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés. A 45. példában szereplő s a most kapott $\underline{A}$ mátrix között milyen összefüggés van? Mi az összefüggés magyarázata?

382. Alkalmazzuk a 45. példa és az előző feladat megoldását.

Ekkor

$$\underline{v} = \underline{M}_1 \tilde{\underline{A}}_1 \underline{M}_1' \underline{r} \quad , \quad \underline{v} = \underline{A}_1 \underline{r} \quad ,$$

ahol $\underline{M}_1 = [\underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \ \underline{e}]$ ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}$ ortonormált jobbrendszerű bázis) és

$$\tilde{\underline{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{A}_1 = \underline{M}_1 \tilde{\underline{A}}_1 \underline{M}_1'$$

$$\underline{w} = \underline{M}_2 \tilde{\underline{A}}_2 \underline{M}_2' \underline{v} \quad , \quad \underline{w} = \underline{A}_2 \underline{v} \quad ,$$

ahol $\underline{M}_2 = [\underline{f}_1 \ \underline{f}_2 \ \underline{f}]$ ($\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}$ ortonormált jobbrendszerű bázis) és

$$\tilde{\underline{A}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad \underline{A}_2 = \underline{M}_2 \tilde{\underline{A}}_2 \underline{M}_2' \quad .$$

Mivel $\underline{w} = \underline{A}_2 \underline{v}$ és $\underline{v} = \underline{A}_1 \underline{r}$, ezért

$$\underline{w} = \underline{A}_2 (\underline{A}_1 \underline{r}) \quad , \quad \underline{w} = (\underline{A}_2 \underline{A}_1) \underline{r} \quad .$$

A tenzor mátrixa az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban $\underline{A}_2 \underline{A}_1$.

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **MATEMATIKA PÉLDATÁR III. KÖTET LINEÁRIS ALGEBRA**

A jegyzet szerkesztője: **Rábai Imre**

A jegyzet azonosítója: **040933**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)



