



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Reiman István - Nagyné Szilvási Márta

GEOMETRIAI FELADATOK



Műegyetemi Kiadó, 2005.

(Kilencedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **041007**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 16,5 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 134/05

V E K T O R A L G E B R A

Vektorok összeadása, kivonása; szorzás számmal; koordináták; lineáris függetlenség

Összefoglalás. Egy $\underline{a}$ λ -szoros, $\lambda \underline{a}$, olyan vektor, amelynek hossza $|\lambda| |\underline{a}|$, iránya egyezik $\underline{a}$ irányával, ha $\lambda > 0$, ellenkező, ha $\lambda < 0$. (Jelölések: $\underline{a}\lambda = \lambda \underline{a}$, $\frac{\underline{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \underline{a}$).

A vektorok kollineárisak, ha van olyan egyenes, amellyel párhuzamosak. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ akkor és csak akkor kollineáris, ha $\underline{a} = \lambda \underline{b}$ ($\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$).

A vektorok egy halmaza komplanáris, ha van olyan sík, amellyel párhuzamosak. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem kollineárisak, a velük komplanáris minden vektor $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ alakú, azaz felbontható $\underline{a}$ -ral és $\underline{b}$ -ral párhuzamos összetevőkre.

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem komplanáris vektorok, a tér tetszőleges vektora $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$ alakú, azaz felbontható $\underline{a}$ -ral, $\underline{b}$ -ral és $\underline{c}$ -ral párhuzamos összetevőkre.

A tér egy rögzített pontjának (az origónak) kijelölésével az origótól a pontokba vezető vektorok a pontok helyvektoraira.

Két pont összekötővektora helyvektoraik különbségvektora.

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ helyvektorú pontok összekötő szakaszának felezőpontjához az origóból az $\frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$ mutat.

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokból álló pontrendszer súlypontja az S pont, amelynek $\underline{s}$ helyvektora:

$$\underline{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{a}_i,$$

ahol $\underline{a}_i$ az A_i helyvektora. A súlypont független az origó választásából és a súlypontból a pontokba vezető vektorok összege $\underline{0}$.

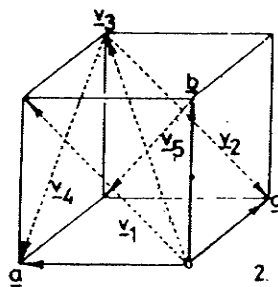
Ha $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ páronként merőleges jobbrendszert alkotó egységvektorok, az $\underline{a}$ koordinátái az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ rendszerben azok az a_1, a_2, a_3 számok, amelyekre $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$.

A koordinátákkal adott vektorok műveleti szabályai:
 $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$; $\underline{a} + \underline{b}$ koordinátái: $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$; $\lambda \underline{a}$ koordinátái: $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, ellenkező esetben lin. függők, a lineáris függőség azt is jelenti, hogy a vektorok közül egy előállítható a többi lineáris kombinációjaként.

Két vektor lin. független, ha nem kollineárisak, függők, ha kollineárisak. Három vektor lin. független, ha nem komplanárisak, függők, ha komplanárisak. Négy vektor mindig lin. függő.

1. Egy szabályos tetraéder egyik csúcsából kiinduló három élvektor legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$. Fejezzük ki ezek segítségével a többi élvektort.



2. A kocka egy csúcsából kiinduló három élvektor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$. Fejezzük ki ezek segítségével a 2. ábra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_5$ vektorát.

3. Legyen ABCD paralelogramma és O egy tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$.

4. Az ABCD paralelogramma csúcsainak a helyvektorai rendre $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$. Fejezzük ki $\underline{d}-t$, $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ segítségével.

5. Egy paralelepipedon egy csúcsból kiinduló lapátlóvektorai $\underline{x}, \underline{y}$ és $\underline{z}$. Állítsuk elő ezek segítségével a velük azonos csúcsból induló élvektorokat.

6. Az A, B, C, D, E, F pontok egy hatszög oldalainak felezőpontjai (valamilyen körüljárási irányt tekintve). Bizonyítsuk be, hogy $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} = \vec{0}$.

7. Egy szabályos hatszög alapú hasáb alaplapjának középpontjából az alap két szomszédos csúcsához az $\underline{x}$ és $\underline{y}$, a fedőlap középpontjához pedig a $\underline{z}$ vezet. Állítsuk elő a hasáb többi csúcsának a helyvektorait $\underline{x}$, $\underline{y}$ és $\underline{z}$ segítségével.

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok esetén $|\underline{a}||\underline{b}| + |\underline{b}||\underline{a}|$ egyenlő szögeket zár be mind az $\underline{a}$, mind a $\underline{b}$ vektorral.

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok esetén az $|\underline{a}||\underline{b}|$ és $|\underline{b}||\underline{a}|$ egyenlő hosszúak.

10. Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $5\underline{a} - 4\underline{b}$ helyvektorú pontok egy egyenesen vannak.

11. Bizonyítsuk be, hogy a közös kezdőpontú $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ (különböző) vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha $\underline{c}$ előállítható $\underline{c} = \alpha \underline{a} + (1 - \alpha) \underline{b}$ alakban. ($\underline{a}$, $\underline{b}$ nem nullvektorok).

12. Az ABCD négyszögben (lehet térbeli is) az AD, illetve BC oldalak felezőpontja legyen F_1 , illetve F_2 ; legyen továbbá $\vec{AB} = \underline{x}$, $\vec{DC} = \underline{y}$, $\vec{F_1F_2} = \underline{f}$. Állítsuk elő $\underline{f}$ -et $\underline{x}$ és $\underline{y}$ lineáris kombinációjaként.

13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két szemközti élét elhagyjuk, a megmaradó élek felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

14. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög középvonalainak a metszéspontja azonos az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjával.

15. ABCD és XYZV a tér két tetszőleges paralelogrammája. Mutassuk meg, hogy az AX, BY, CZ, DV szakaszok felezőpontjai szintén paralelogramma csúcsai (a paralelogramma esetleg elfajult).

16. Az A pont helyvektora $\underline{a}$, a B ponté $\underline{b}$. A tükörképe B-re A', ennek helyvektora $\underline{a'}$. Állítsuk elő $\underline{a'}$ -t $\underline{a}$ és $\underline{b}$ segítségével.

17. Legyenek A, B, C a tér tetszőleges pontjai. Egy bárhon választott P pontot tükrözzünk A-ra, a tükörképét B-re, az így kapott pontot C-re, majd az így nyertet ismét A-ra, majd hasonlóan B-re és C-re. Bizonyítsuk be, hogy a hatodik tükörkép azonos P-vel.

18. Adjunk meg három olyan egysíkú vektort, amelyek hossza egyenlő és összegük $\underline{0}$.

19. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok összege $\underline{0}$, és van közöttük két nem kollineáris vektor, akkor össze lehet adni a vektorokat olyan sorrendben, hogy az összeget előállító vektorpolicon konvex legyen.

20. Az A pont helyvektora $\underline{a}$, a B ponté $\underline{b}$. Állítsuk elő az AB szakasz harmadoló pontjainak helyvektorait.

21. Bizonyítsuk be, hogy a paralelepipedon testátlóját harmadolja az a sík, amelyet a testátló egyik végpontjából kiinduló élek második végpontjai határoznak meg.

22. Vegyünk fel a síkon tetszőlegesen öt pontot. Szerkesztünk a síkon olyan O pontot, amelyből a pontokhoz mutató vektorok összege $\underline{0}$.

23. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos sokszög súlypontja és középpontja azonos.

24. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder súlypontja és a lapsúlypontok meghatározta tetraéder súlypontja egybeesik.

25. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamos vektorok. Számítsuk ki α

és β számértékét ha

$$a) 3\underline{a} + 5\underline{b} = \underline{a} + (2\beta + 4)\underline{b};$$

$$b) (\alpha + \beta - 4)\underline{a} - (2\alpha - \beta)\underline{b} = \underline{0};$$

$$c) \underline{a} + \beta\underline{b} = (\beta + 4)\underline{a} - (\alpha - 4)\underline{b}.$$

26. Bizonyítsuk be, hogy ha P az ABCD négyzet köré írt körének egy pontja, akkor a

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$$

vektor hossza nem függ attól, hol választottuk P-t a körön.

27. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O. Mutassuk meg, hogy az $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ az ABC magasságpontjába mutat.

28. Az O középpontú kör egy K pontján át két merőleges húrt fektetünk, ezek végpontjai A, B, illetve C, D. Bizonyítsuk be, hogy a $\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} + \overline{KD}$ összeg csak a K pont helyzetétől függ.

29. Bizonyítsuk be, hogy egy ponton átmenő négy olyan egyenest, amelyek közül egyik három sincs egy síkban, mindig lehet egy paralelogramma csúcaiban metszeni.

30. A koordinátarendszerben úgy helyezzük el az egységkockát, hogy az origó az egyik csúcsba essék, a tengelyek pozitív fele pedig egy-egy kockaélt tartalmazzon. Adjuk meg a kockacsúcsok koordinátáit.

31. Egy szabályos hatszög középpontja $K(4,4,4)$, két szomszédos csúcsa $A(3,4,5)$ és $B(3,2,4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáit.

32. Az ABCD paralelogramma csúcsai $A(3,-2,5)$, $B(0,4,0)$, $C(-5,2,7)$. Számítsuk ki a D csúcs koordinátáit.

33. Egy paralelogramma középpontja $K(-3,2,4)$, két szomszédos csúcsa $A(4,-4,3)$, $B(-7,0,0)$. Adjuk meg a másik két csúcs koordinátáit.

34. Egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló élek végpontjai $A(3,6,-4)$, $B(-4,7,0)$, $C(9,1,-3)$. Számítsuk ki a többi négy csúcs koordinátáit.

35. Egy szabályos ötszög egyik csúcsának a koordinátái $A_1(1,0,0)$, középpontja az origó. Adjuk meg a többi csúcs koordinátáit.

36. Döntsük el, kollineárisak-e a következő vektorpárok:

a) $\underline{a}(-3,4,7)$, $\underline{b}(2,5,1)$;

b) $\underline{c}(12,9,15)$, $\underline{d}(8,6,10)$;

c) $\underline{e}(7,-4,2)$, $\underline{f}(0,0,0)$.

37. Döntsük el, hogy az alábbi ponthármak egy egyenesen vannak-e:

a) $A(-4,5,2)$, $B(2,0,-3)$, $C(14,-10,-13)$;

b) $D(0,3,5)$, $E(4,0,7)$, $F(4,-18,-23)$;

c) $G(0,0,0)$, $H(14,-6,8)$, $J(-24,9,-12)$;

d) $K(1,1,1)$, $L(4,1,7)$, $M(5,-1,-1)$.

38. Az adott $A(4,-1,3)$, $B(5,4,1)$ pontokhoz meghatározandók a $C(7,y,z)$ pont y,z koordinátái úgy, hogy az A , B , C pontok egy egyenesen legyenek.

39. Mik a $P(3,-4,8)$ pont $C(3,7,-2)$ pontra vonatkozó tükrképének a koordinátái?

40. Az $A(7,0,-1)$, $B(-2,4,0)$, $C(-5,4,2)$, $D(4,0,1)$ egy paralelogramma négy csúcsa (mutassuk ezt meg!). A $P(1,3,-1)$ pontot tükrözzük az A -ra, a tükrképet a B -re, az így nyert pontot a C -re, majd végül az így kapottat a D -re. Mik a negyedik tükrkép koordinátái? Általánosítsuk az eredményünket.

41. Adjuk meg a $\underline{v}(a_1, a_2, a_3)$ vektornak a koordinátasíkokon levő vetületeit.

42. Komplanárisak-e a $3\underline{a} - 4\underline{b}$, $\underline{a} + 7\underline{b}$, $-\underline{a} + 43\underline{b}$ vektorok?

43. Adottak az $\underline{a}(2, -1, 1)$, $\underline{b}(-1, 3, 0)$, $\underline{c}(1, 0, 7)$ vektorok. Bontsuk fel a $\underline{d}(9, -9, 10)$ vektort $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ irányú összetevőkre.

44. Adottak az $\underline{a}(-8, 7, 1)$, $\underline{b}(0, 3, 2)$, $\underline{c}(1, -1, 4)$ vektorok. Bontsuk fel a $\underline{d}(31, -37, 19)$ vektort $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ irányú összetevőkre.

45. Bontsuk fel a $\underline{v}(13, 56)$ vektort az $\underline{a}(2, 7)$ és $\underline{b}(-3, 0)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

46. Döntsük el, hogy az alábbi vektorhármasok lin. függetlenek-e?

a) $(-4, 2, 1)$, $(0, 4, 3)$, $(-4, 6, 4)$;

b) $(0, 0, 0)$, $(2, -9, 7)$, $(-1, -1, 0)$;

c) $(-9, 9, 3)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 1)$;

d) $(-2, 3)$, $(4, 1)$, $(1, 5)$.

47. Válasszuk ki az alábbi vektorok közül a független (nem kollineáris) vektorpárokat:

$\underline{a}(4, -1, 0)$, $\underline{b}(3, 5, 0)$, $\underline{c}(-8, 2, 0)$, $\underline{d}(-6, -10, 2)$, $\underline{e}(0, 0, 0)$.

48. Döntsük el, függetlenek-e az alábbi vektorok:

$\underline{a}(-1, 5, 19)$, $\underline{b}(17, 1, 4)$, $\underline{c}(-8, -9, -10)$, $\underline{d}(1, 0, 0)$.

Skaláris szorzat

Összefoglalás: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzata:

$\underline{a}\underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi$, ahol φ a két vektor szöge. Ha $\underline{a}\underline{b} > 0$, a vektorok hegyesszöget, ha $\underline{a}\underline{b} < 0$, tompaszöget, ha $\underline{a}\underline{b} = 0$, derékszöget zárnak be.

A skaláris szorzat fontosabb azonosságai:

$$\underline{a}\underline{b} = \underline{b}\underline{a},$$

$$\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{c},$$

$$(\lambda \underline{a})\underline{b} = \underline{a}(\lambda \underline{b}) = \lambda(\underline{a}\underline{b}),$$

$$\underline{a}\underline{a} = \underline{a}^2 = |\underline{a}|^2.$$

Az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata

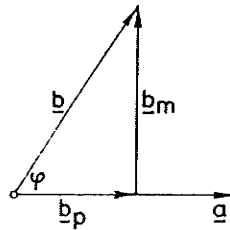
$$\underline{a}\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

$$\underline{a}^2 = |\underline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Az $\underline{a}$ irányába mutató $\underline{a}^0$ egységvektora: $\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$.

$\underline{a}^0$ koordinátái: $\left(\frac{a_1}{|\underline{a}|}, \frac{a_2}{|\underline{a}|}, \frac{a_3}{|\underline{a}|}\right)$, ezek a koordináták a megfelelő koordináta-tengelyekkel bezárt szögek koszinuszai.

$\underline{b}\underline{a}^0$ szorzat geometriai jelentése: a $\underline{b}$ -nak az $\underline{a}^0$ irányán levő előjeles vetülete.



A $\underline{b}$ -nak az $\underline{a}$ -ral párhuzamos, illetve rá merőleges összetevője:

$$\underline{b}_p = (\underline{a}^0 \underline{b} \underline{a}^0) \underline{a}^0 = \frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{a}^2} \underline{a},$$

$$\underline{b}_m = \underline{b} - (\underline{a}^0 \underline{b} \underline{a}^0) \underline{a} = \underline{b} - \frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{a}^2} \underline{a}.$$

Két vektor szöge a $\cos \varphi = \frac{\underline{a}\underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|}$ összefüggés alapján számítható ki.

49. Az egységnyi élhosszúságú kocka egy csúcsból kiinduló két lapátló vektora $\underline{x}$ és $\underline{y}$.

a) Számítsuk ki az $\underline{x}\underline{y}$ szorzat értékét.

b) Számítsuk ki $\underline{x}$ és $\underline{y}$ szögét.

50. Az ABC szabályos háromszög oldalhossza 2. Számítsuk ki az $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ szorzat értékét.

51. Legyen $\underline{a}$ és $\underline{y}$ az egységkocka egy csúcsból kiinduló egyik élvektora és testátló vektora. Számítsuk ki az $\underline{a}\underline{y}$ szorzat értékét és az $\underline{a}$, $\underline{y}$ vektorok szögét.

52. Egy szabályos tetraéder egy csúcsából induló egyik élvektor $\underline{a}$, ebből a csúcsból a szemközti lap súlypontjába mutató vektor $\underline{g}$. Számítsuk ki az $\underline{a}\underline{g}$ szorzat értékét, ha a tetraéder élhossza 4.

53. Bizonyítsuk be, hogy ha egy vektor merőleges egy sík nem kollineáris két vektorára, akkor a sík minden vektorára merőleges.

54. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\underline{y}$ egy sík három nem kollineáris vektorával egyenlő szöget zár be, akkor merőleges a síkra.

55. Az O, A, B, C pontok a tér tetszőleges pontjai. Bizonyítsuk be, hogy $\vec{OA} \cdot \vec{BC} + \vec{OB} \cdot \vec{CA} + \vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$.

56. Legyenek A és B az O pontra szimmetrikus pontok. Bizonyítsuk be, hogy a $\vec{PA}$ és $\vec{PB}$ vektorok akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha $PO = OA = OB$. (P a tér egy pontja.)

57. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok páronként merőlegesek. Bizonyítsuk be, hogy

$$(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})^2 = \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2.$$

58. Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{a}$ merőleges a következő vektorokra:

a) $(\underline{ac})\underline{b} - (\underline{ab})\underline{c};$

b) $\underline{b} - \frac{\underline{a}(\underline{ab})}{\underline{a}^2}.$

59. Hogyan kell megválasztani β értékét, hogy a $\underline{b}$ és az $\underline{a} + \beta \underline{b}$ merőlegesek legyenek egymásra ($\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem kollineáris vektorok).

Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok esetén szerkesszük meg $\underline{a} + \beta \underline{b}$ vektort.

60. a) Három egységvektor páronként egyenlő szöget zár be egymással, összegük nullvektor. Mekkora ez a szög?

b) Négy egységvektor páronként egyenlő szöget zár be egymással, összegük nullvektor. Mekkora ez a szög?

61. Három, egy pontból kiinduló páronként merőleges félegyenest vessünk el egy síkkal. Bizonyítsuk be, hogy a metszéspontok mindig hegyesszögű háromszög csúcsai.

62. Legyen $\underline{a}$ adott vektor és α adott szám. Jellemezzük az összes olyan $\underline{x}$ vektort, amelyek eleget tesznek az $\underline{ax} = \alpha$ egyenletnek.

63. Az ABC háromszög súlypontja köré írt r sugarú körön válasszunk ki egy P pontot. Bizonyítsuk be, hogy a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg független a P pont körön elfoglalt helyzetétől.

64. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma oldalainak a négyzetösszege egyenlő átlóinak a négyzetösszegével.

65. Az ABCD téglalap csúcsait kössük össze egy P ponttal. Bizonyítsuk be, hogy $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

66. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B, C, D a tér négy olyan pontja, hogy $AB \perp CD$ és $BC \perp AD$, akkor $AC \perp BD$ is teljesül.

67. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B, C, D a tér négy pontja, akkor az $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ akkor és csak is akkor teljesül, ha $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$ feltételek is teljesülnek.

68. Egy „csuklós négyszög”-ben az oldalak csuklókkal csatlakoznak egymáshoz, s így a négyszög formálható. Bizonyítsuk be, hogy ha az oldalak egy helyzetében az átlók merőlegesek egymásra, akkor minden helyzetben merőlegesek.

69. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek olyan helyzetűek, hogy az A, B, C csúcsokból rendre a $B'C', C'A', A'B'$ egyenesekre állított merőlegesek egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy ez a tulajdonság kölcsönös, azaz az A', B', C' csúcsokból rendre a BC, CA, AB egyenesekre állított merőlegesek is egy pontba futnak össze.

70. Adottak: $\underline{a}(3, -2, 5)$, $\underline{b}(-1, 0, 2)$. Számítsuk ki a következő szorzatok értékét:

$$\underline{a}\underline{b}, \quad (3\underline{a} - 2\underline{b})\underline{a}, \quad (\underline{a} - \underline{b})^2, \quad \underline{a}^2.$$

71. A szögek kiszámítása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék-, vagy tompaszöget zárnak-e be:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (-3, 2, 0), (4, 1, 5); & \text{b) } (1, -1, 9), (2, 1, 3); \\ \text{b) } (1, 1, 1), (-10, 7, 3); & \text{d) } (5, -3, 4), (1, -1, 2). \end{array}$$

72. Számítsuk ki az alábbi vektorok hosszát:

$$\underline{a}(8, -14, -8), \quad \underline{b}(0, 3, 0), \quad \underline{c}\left(\frac{5}{34}, -\frac{30}{34}, \frac{6}{34}\right), \quad \underline{d}(4, -9, 10), \\ \underline{e}(24, -7), \quad \underline{f}(1, 1).$$

73. Adjuk meg az alábbi vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit:

$$\underline{a}(4, -12, 3), \quad \underline{b}(0, 0, -7), \quad \underline{c}(1, 2, -3), \quad \underline{d}(-5, 0, 12), \\ \underline{e}(12, -5), \quad \underline{f}(9, 9).$$

74. Adjuk meg az alábbi vektorok irányába mutató egységvektorokat:

$$\underline{v}_1(-3, 0, 4), \quad \underline{v}_2(0, 0, -6), \quad \underline{v}_3(-1, 4, -8), \quad \underline{v}_4(9, 16, -3).$$

75. Számítsuk ki a következő vektorpárok szögét:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \underline{a}(7, -1, 6), \quad \underline{b}(2, 20, 1); \\ \text{b) } & \underline{c}(3, 6, -2), \quad \underline{d}(5, 4, -20); \\ \text{c) } & \underline{e}(9, 1, 4), \quad \underline{f}(4, 9, 1); \\ \text{d) } & \underline{g}(-1, 4, 7), \quad \underline{h}(5, -2, 0); \\ \text{e) } & \underline{m}(4, -9), \quad \underline{n}(2, 5). \end{aligned}$$

76. Adottak: $\underline{a}(3, -6, 1)$, $\underline{b}(12, 4, z)$. Határozzuk meg z értékét úgy, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőlegesek legyenek egymásra.

77. Jelentsen φ tetszőleges szöget. Mutassuk meg, hogy a $\underline{v}(\sin \varphi, -\cos \varphi, 1)$ vektorok mind ugyanakkora szöget zárnak be a koordinátarendszer z tengelyével. Mekkora ez a szög?

78. Mekkora szöveget zár be a $\underline{v}(-3, 8)$ vektor a koordinátatengelyek pozitív irányával.

79. Mekkora szöget zár be a $\underline{v}(4, -1, 8)$ vektor a koordinátatengelyek pozitív irányával?

80. Jelölje α , β , γ a vektornak a koordináta-tengelyek pozitív irányával bezárt szögeit. Van-e olyan vektor, amelyre

$$\begin{aligned} \text{a) } & \alpha = 45^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 120^\circ; \\ \text{b) } & \alpha = 45^\circ, \quad \beta = 135^\circ, \quad \gamma = 60^\circ; \\ \text{c) } & \alpha = 90^\circ, \quad \beta = 150^\circ, \quad \gamma = 60^\circ. \end{aligned}$$

81. Egy vektor az x tengellyel 60° -os, az y tengellyel 45° -os szöget zár be. Mekkora a z tengellyel bezárt szöge?

82. Egy vektor irányiszögei α , β , γ . Mekkora a $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$ összeg?

83. Jelentsen n tetszőleges számot. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi vektorok egy kocka egy csúcsából kiinduló élvektorok.

$$\underline{a} [-n, n+1, n(n+1)],$$

$$\underline{b} [n(n+1), -n, n+1],$$

$$\underline{c} [n+1, n(n+1), -n].$$

84. Mutassuk meg, hogy ha a , b tetszőleges egészek, akkor az

$$a) \underline{v}_4(ab, a(a-b), b(a-b));$$

$$b) \underline{v}_2(a^2, 2ab, 2b^2),$$

$$c) \underline{v}_3(2, 2a, a^2),$$

$$d) \underline{v}_4(2a-1, 2b, 2(a^2-a+b^2))$$

vektorok hossza is egész.

85. Bizonyítsuk be, hogy az $A(0,0,0)$, $B(4,3,1)$, $C(8,4,-2)$, $D(4,1,-3)$ pontok egy rombusz csúcsai.

86. Adjuk meg az $[x,y]$ koordinátákban olyan $\underline{v}$ vektort, amelynek hossza 5 és merőleges az $\underline{u}(-4,3,9)$ vektorra.

87. A z tengely melyik pontjából látszik az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ pontpár 30° -os szög alatt?

88. Adjunk meg az $[x,y]$ koordinátákban olyan vektorokat, amelyek az $\underline{e}(1,1,1)$ vektorral 60° -os szöget zárnak be.

89. Az ABC háromszög csúcsainak a koordinátái $A(-3,4,0)$, $B(-9,11,42)$, $C(1,2,4)$.

a) Mekkora a háromszög területe?

b) Mekkora az A csúcsnál fekvő szöge?

90. Bontsuk fel az $\underline{a}(3, -6, 9)$ vektort a $\underline{b}(2, -2, 4)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

91. Bontsuk fel az $\underline{u}(3, 6, -2)$ vektort a $\underline{v}(5, 4, -20)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőre.

92. Mekkora a $\underline{v}(-9, 4, 4)$ vektornak a $\underline{c}(5, -6, 30)$ irányú egyenesen levő vetülete?

93. Adjunk meg olyan vektort, amely felezi az $\underline{a}(-1, 4, 8)$ és $\underline{b}(-5, 4, 20)$ vektorok szögét.

94. Az ABCD téglalap csúcsainak koordinátái: $A(2, 6, 0)$, $B(4, 2, 3)$, $C(-2, 8, z)$. Számítsuk ki z értékét és a D csúcs koordinátáit.

95. Egy négyzet két csúcsának a koordinátái $A(5, 4, -3)$, $B(4, 6, -1)$, egy oldala pedig párhuzamos a $\underline{v}(4, -2, z)$ vektorral. Számítsuk ki a négyzet másik két csúcsának a koordinátáit.

96. Egy rombusz egyik csúcsa az origó, egy innen induló oldalvektora $\underline{a}(4, 7, -4)$, egy másik oldala a $\underline{b}(2, -4, 2)$ vektorral egyirányú. Adjuk meg a rombusz csúcsainak a koordinátáit.

97. A rombusz $A(2, 0, 4)$ csúcsából induló egyik oldalvektor $\underline{b}(0, 3, 6)$, a $\underline{v}(8, -4, 8)$ vektor egyirányú az A-ból induló rombusz-átlóval. Adjuk meg a rombusz csúcsainak a koordinátáit.

Vektoriális szorzat

Összefoglalás: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzata, az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, merőleges $\underline{a}$ -ra és $\underline{b}$ -ra, $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ jobbrendszert alkot, $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \varphi$, ahol φ a két vektor szöge.

A vektoriális szorzat fontosabb azonosságai:

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a},$$

$$\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b}),$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}; \quad \underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{c} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{b}.$$

$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, akkor és csak akkor teljesül, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ kollineárisak.

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített paralelogramma területe: $|\underline{a} \times \underline{b}|$, (a háromszögé $\frac{1}{2} |\underline{a} \times \underline{b}|$).

Az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektoriális szorzatának koordinátáira:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{teljesül.}$$

98. Igazoljuk a következő azonosságokat:

$$a) (\underline{a} + \lambda \underline{b}) \times \underline{b} = \underline{a} \times \underline{b};$$

$$b) (\underline{a} + \underline{b}) \times (\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = (\mu - \lambda)(\underline{a} \times \underline{b});$$

$$c) (\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b}) = 2\underline{b} \times \underline{a};$$

$$d) (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}.$$

99. Számítsuk ki az $\underline{a}(2, -2, 1)$ és $\underline{b}(2, 3, 6)$ vektorok szögének a szinusát.

100. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{u}$ tetszőleges vektorok. Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{a} \times \underline{u}$, $\underline{b} \times \underline{u}$, $\underline{c} \times \underline{u}$ vektorok komplanárisak.

101. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra fennállnak az $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c} \times \underline{d}$ és $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{d}$ egyenlőségek. Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{a} - \underline{d}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ vektorok kollineárisak.

102. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ akkor és csak akkor helyvektora három kollineáris pontnak, ha $\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a} = \underline{0}$.

103. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy sík három nem kollineáris pontjának helyvektorai. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}$ a sík egy normálvektora.

104. Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}$ egyenlőség egyenértékű az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ egyenlőséggel ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ között nincs két kollineáris).

105. Egy egyenes B és C pontjának helyvektora $\underline{b}$ és $\underline{c}$, egy egyenesen kívüli A ponté pedig $\underline{a}$. Bizonyítsuk be, hogy az A pont távolsága a BC egyenestől $\frac{|\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}|}{|\underline{b} - \underline{c}|}$.

106. Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelynek élvektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$:

- a) $\underline{a}(-4, 1, 2)$, $\underline{b}(5, 2, 7)$;
- b) $\underline{a}(-9, 0, 9)$, $\underline{b}(7, 2, -5)$;
- c) $\underline{a}(1, -7)$, $\underline{b}(-3, 2)$.

107. Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha

- a) $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 4, 7)$, $C(5, 2, 1)$;
- b) $A(1, 0, 2)$, $B(4, 3, 8)$, $C(0, -4, 6)$;
- c) $A(3, 6)$, $B(2, -7)$, $C(4, 4)$;
- d) $A(4, -1, -3)$, $B(3, 1, -2)$, $C(1, 5, 0)$.

108. Számítsuk ki az $\underline{a}(a_1, a_2)$, $\underline{b}(b_1, b_2)$ vektorok által kifeszített háromszög területét.

109. Számítsuk ki az ABC háromszög B csúcsához tartozó magasság hosszát, ha a csúcsok koordinátái: $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$.

110. Adjunk meg olyan $\underline{x}$ vektort, amely merőleges az $\underline{a}(2, -3, 1)$ és $\underline{b}(1, -2, 3)$ vektorokra, és a $\underline{c}(1, 2, -7)$ vektorral $\underline{c} \cdot \underline{x} = 40$.

111. Adjuk meg az x és y értékeket úgy, hogy a $\underline{c}(x, y, 16)$ merőleges legyen az $\underline{a}(1, 5, 4)$ és $\underline{b}(-1, 3, 1)$ vektorokra.

112. Egy kocka egy csúcsból kiinduló két élvektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$; fejezzük ki ezek segítségével a csúcsból induló harmadik élvektort.

113. Egy kocka egyik csúcsa az origó, a vele szomszédos két csúcs koordinátái: $(1, 4, 8)$ és $(8, -4, 1)$. Számítsuk ki az origóval szomszédos harmadik csúcs koordinátáit.

114. Egy háromszög alapú egyenes hasáb alapja az ABC háromszög: $A(0, 0, 0)$, $B(4, -1, 2)$, $C(3, 0, -1)$. Számítsuk ki az $A'B'C'$ fedőlap csúcsainak koordinátáit, ha az AA' magasság hossza 5.

115. Egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, ebből induló két élvektora: $\underline{a}(-1,0,2)$, $\underline{b}(1,1,0)$, a harmadik él merőleges az alap síkjára és hossza 9 egység. Szánitsuk ki a feltételeknek eleget tevő egyik paralelepipedon csúcsainak koordinátáit.

116. Egy téglatest egyik csúcsa az origó, az innen induló testátlóvektora: $\underline{d}(9,5,5)$, két élvektora az $\underline{a}(4,-3,1)$ és $\underline{b}(0,2,6)$. Adjuk meg a harmadik élvektort.

117. Mekkora szöget zárnak be egymással az ABCD tetraéder ABC és ACD lapsíkjai, ha a csúcsok koordinátái $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$.

118. Bizonyítsuk be, hogy ha tetszőleges négyszögben az átlók hossza e és f , közrezárt szögük φ , akkor területe $\frac{1}{2} ef \sin \varphi$.

Más szavakkal: Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög területe átlóik vektoriális szorzata abszolút értékének a fele.

119. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek olyan helyzetűek, hogy az A, B, C csúcsokból rendre a $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ oldalakkal húzott párhuzamosok egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy ez a tulajdonság kölcsönös, azaz az A' , B' , C' csúcsokon át rendre a BC, CA, AB egyenesekkel húzott párhuzamosok is egy pontba futnak össze.

120. Az ABCD tetraéder A csúcsánál az élek páronként merőlegesek. Bizonyítsuk be, hogy $t_{ABC}^2 + t_{ACD}^2 + t_{ADB}^2 = t_{BCD}^2$.

121. Egy háromszögbe írjuk be egy XYZ háromszöget, majd minden csúcsát tükrözzük a rajta átmenő oldal felezőpontjára, így egy $X'Y'Z'$ háromszöget kapunk. Bizonyítsuk be, hogy XYZ és $X'Y'Z'$ területe egyenlő.

Többtényezős vektorszorzatok; vegyesszorzat,
kifejtési tétel

Összefoglalás: Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzata:
 $\underline{abc} = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{c} = \underline{a}(\underline{b} \times \underline{c})$.

A vegyesszorzatban a tényezők ciklikusan felcserélhetők: $\underline{abc} = \underline{bca} = \underline{cab}$, viszont $\underline{abc} = -\underline{bac} = -\underline{acb} = -\underline{cba}$.

Három vektor akkor és csak akkor komplanáris, ha vegyesszorzatuk 0. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata: $\underline{abc}$, (a tetraéderé: $\frac{1}{6} \underline{abc}$).

Az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\underline{c}(c_1, c_2, c_3)$ vektorok vegyesszorzata:

$$\underline{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

A kifejtési tétel:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{ac})\underline{b} - (\underline{bc})\underline{a}.$$

122. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egységvektorok közül $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőlegesek egymásra, $\underline{c}$ pedig 30° -os szöget zár be síkjukkal. Számítsuk ki $\underline{abc}$ értékét.

123. Mutassuk meg, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy téglalap egy csúsból kiinduló élvektorai, akkor $\underline{abc} = |\underline{a}||\underline{b}||\underline{c}|$.

124. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem komplanáris vektorok. Komplanárisak-e $2\underline{a} + 3\underline{b}$, $5\underline{b} - 4\underline{c}$, $\underline{c} - \underline{a}$?

125. Mekkora az $\underline{a}(2, 3, 4)$, $\underline{b}(2, 3, 1)$, $\underline{c}(1, 2, 3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.

126. Számítsuk ki az ABCD tetraéder térfogatát:

a) $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$;

b) $A(0, 0, 0)$, $B(-2, 2, 3)$, $C(0, 2, -1)$, $D(4, 0, 1)$.

127. Az ABCD tetraéder térfogata 5 egység. Mik a D csúcs koordinátái, ha D az y tengelyen van és a másik három csúcs $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$?

128. Az ABCD tetraédernél $\vec{AB} = (2,-1,4)$, $\vec{BC} = (6,1,-4)$, $\vec{CD} = (1,1,2)$. Mekkora a térfogata?

129. a) Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder térfogatát megkapjuk, ha két szemközti élének a hosszát, ezek egyenesének a távolságát és hajlásszögük szinusztát összeszorozzuk és a szorzatot 6-tal elosztjuk.

b) Az e_1 és e_2 kitérő egyenesek, az e_1 -en egy AB, az e_2 -n egy CD szakasz mozog. Bizonyítsuk be, hogy a mozgás folyamán az ABCD tetraéder térfogata állandó.

130. Döntsük el, komplanárisak-e az alábbi vektorhármasok:

a) $(2,3,-1)$, $(1,-1,3)$, $(1,9,-11)$;

b) $(3,-2,1)$, $(2,1,2)$, $(3,-1,-2)$;

c) $(2,-1,2)$, $(1,2,-3)$, $(3,-4,7)$.

131. Döntsük el, egy síkban vannak-e az alábbi pontnégyesek:

a) $(1,2,-1)$, $(0,1,5)$, $(-1,2,1)$, $(2,1,3)$;

b) $(1,2,0)$, $(0,1,1)$, $(3,5,-4)$, $(-4,-2,6)$.

132. Válasszuk meg a z értékét úgy, hogy az $\underline{a}(4,-1,2)$, $\underline{b}(1,2,3)$, $\underline{c}(3,3,z)$ vektorok komplanárisak legyenek.

133. Mekkora az $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$ csúcsokkal rendelkező tetraéder D-hez tartozó magassága?

134. Egy paralelepipedon egy csúcsból kiinduló lapát-lói egy újabb paralelepipedont feszítenek ki. Hányszorosa ennek térfogata az eredeti térfogatának?

135. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

a) $(\underline{a} + \lambda \underline{b}) \underline{bc} = \underline{abc}$,

b) $(\underline{a} + \underline{b}) (\underline{b} + \underline{c}) (\underline{c} + \underline{a}) = 2\underline{abc}$,

c) $\underline{ab}(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}) = \gamma \underline{abc}$,

d) $(\underline{a} + \underline{v}) (\underline{b} + \underline{v}) (\underline{c} + \underline{v}) = \underline{abc} + \underline{abv} + \underline{bcv} + \underline{cav}$.

136. Bizonyítsuk be, hogy

$$(\underline{a} \times \underline{b})^2 + (\underline{a}\underline{b})^2 = \underline{a}^2 \underline{b}^2.$$

(Az ún. Lagrange-féle azonosság.)

137. Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ független vektorok és legyen $\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$. Fejezzük ki az α, β, γ együtthatókat az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok segítségével.

138. Bizonyítsuk be, hogy ha egy kocka csúcsainak a koordinátái egész számok, akkor az élhossza is egész szám.

139. Adottak az $\underline{a}(2, -3, 1)$, $\underline{b}(4, 2, -1)$, $\underline{c}(1, 0, -3)$ vektorok. Számítsuk ki az $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$ koordinátáit.

140. Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőleges vektorok. Mutassuk meg, hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = \underline{a}^2 \underline{b}$.

141. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{0}$.

142. a) Egy sík normálvektora $\underline{n}$. Mutassuk meg, hogy egy $\underline{c}$ vektornak a síkon levő merőleges vetülete

$$\underline{c}' = \underline{n}^0 \times (\underline{c} \times \underline{n}^0) = \underline{c} - \frac{\underline{c}\underline{n}}{\underline{n}^2} \underline{n}$$

alakban állítható elő.

b) Állítsuk elő a $\underline{c}(3, 3, -6)$ vektornak az $\underline{n}(2, -1, 2)$ normálvektorú síkon levő merőleges vetületét.

143. a) Bizonyítsuk be, hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a}\underline{c} \times \underline{b}\underline{d}) - (\underline{b}\underline{c} \times \underline{a}\underline{d})$, vagy determináns alakban:

$$(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = \begin{vmatrix} \underline{ac} & \underline{bc} \\ \underline{ad} & \underline{bd} \end{vmatrix}.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszögű gúla két-két szemközti oldallapja merőleges egymásra, akkor átlósíkjaik is merőlegesek.

144. a) Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$, illetve a $\underline{c}$ és $\underline{d}$ vektorok által kifeszített síkok metszésvonala párhuzamos az $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d})$ vektorral.

$$\begin{aligned} \text{b) Bizonyítsuk be, hogy } (\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) &= \\ &= (\underline{abd})\underline{c} - (\underline{abc})\underline{d} = (\underline{acd})\underline{b} - (\underline{bcd})\underline{a}. \end{aligned}$$

c) Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ független vektorok, akkor a tér minden $\underline{d}$ vektora előállítható

$$\underline{d} = \frac{\underline{bcd}}{\underline{abc}} \underline{a} + \frac{\underline{adc}}{\underline{abc}} \underline{b} + \frac{\underline{abd}}{\underline{abc}} \underline{c}$$

alakban.

145. Egy t területű paralelogrammának egy, a síkjával α szöget bezáró síkon levő vetülete t' területű. Bizonyítsuk be, hogy $t' = t \cos \alpha$.

AZ EGYENES ÉS A SIK ANALITIKUS GEOMETRIÁJA

Az egyenes a kétdimenziós koordinátarendszerben

Összefoglalás: A kétdimenziós koordinátarendszerben az egyenest egy $\underline{n}(A,B)$ normálvektorával és egy $\underline{r}_0$ helyvektorú $P(x_0, y_0)$ pontjával célszerű megadni, ebben az esetben az egyenes egyenlete $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakú, és fordítva; minden $Ax + By = C$ egyenlet, ahol $A^2 + B^2 \neq 0$, egyenes egyenlete.

Az egyenes egyenletének Hesse-féle normálalakja (v. normálegyenlete)

$$\frac{Ax + By - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

egy $P(x_0, y_0)$ pontnak az egyenestől mért távolsága

$$\left| \frac{Ax_0 + By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Két egyenes párhuzamosságának, illetve merőlegességének feltétele normálvektoraik párhuzamossága, illetve merőlegessége; két egyenes hajlásszöge normálvektoraik szögével (ha az nem tompaszög), illetve kiegészítőszögével (ha az tompaszög) egyenlő.

146. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek normálvektora $\underline{n}(-4, 2)$ és átmegy a $P(7, 2)$ ponton.

147. Számítsuk ki a következő egyenesek hajlásszögét:

- a) $5x - y + 7 = 0, \quad 3x + 2y = 0;$
- b) $3x - 2y + 7 = 0, \quad 2x + 3y - 3 = 0;$
- c) $x - 2y - 4 = 0, \quad 2x - 4y + 3 = 0;$
- d) $3x + 2y - 4 = 0, \quad 5x - 2y + 3 = 0.$

148. Döntsük el, hogy az alábbi egyenletek normálegyenletek-e:

- a) $x + y = 0;$
- b) $\frac{2x}{5} - \frac{3y}{5} - 1 = 0;$
- c) $-\frac{5x}{13} + \frac{12y}{13} + 2 = 0.$

449. Számítsuk ki a P pont és az e egyenes távolságát, ha

a) $P(-4,7)$ e: $3x - 4y = 5$;

b) $P(11,9)$ e: $5x + 12y = 26$;

c) $P(0,0)$ e: $7x - 3y = 12$.

450. Számítsuk ki az alábbi párhuzamos egyenespárok távolságát:

a) $3x - 4y - 10 = 0$, b) $24x - 10y + 39 = 0$,
 $6x - 8y + 5 = 0$; $12x - 5y - 26 = 0$.

451. Mekkora távolságra van a $15x - 8y - 34 = 0$ egyenes az origótól?

452. Mekkora a $20x + 24y - 29 = 0$ és $20x + 24y - 58 = 0$ egyenesek távolsága?

453. Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenleteit, amelyek párhuzamosak a $15x - 8y - 34 = 0$ egyenessel és tőle 6 egységnyi távolságra vannak.

454. Adjuk meg az alábbi egyenespárok szögfelezőinek az egyenleteit:

a) $x - 2y - 3 = 0$, b) $x - 3y + 5 = 0$,
 $2x + 4y + 7 = 0$; $3x - y - 2 = 0$;

c) $3x + 4y - 1 = 0$,
 $5x + 12y - 2 = 0$.

Az egyenes a háromdimenziós koordináta-rendszerben

Összefoglalás: A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontjával és $\underline{v}(a, b, c)$ irányvektorával adott egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x_0 + at,$$

$$y = y_0 + bt,$$

$$z = z_0 + ct.$$

Ezt az egyenletrendszert $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ alakban is szokás használni; ha pl. $c = 0$, akkor az egyenletrendszert: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$, $z = z_0$.

Ha y két koordinátája 0, ez az alak nem létezik. Mivel a két alakot egyszerűen egymásba tudjuk alakítani, eredményeinkben a két alak mindegyikét fogjuk használni.

455. Irjuk fel a P ponton átmenő y irányvektorú egyenes egyenletrendszerét:

- a) $P(-4, 3, 7)$, $\underline{y}(-4, 2, 6)$;
- b) $P(0, -4, 2)$, $\underline{y}(1, 7, -9)$;
- c) $P(9, 8, -3)$, $\underline{y}(6, 0, 2)$;
- d) $P(-11, 9, 1)$, $\underline{y}(12, 8, -4)$.

456. Egy egyenes egyenletrendszeréről hogyan lehet azonnal leolvasni, hogy az egyenes párhuzamos az yz koordinátasíkkal?

457. Döntsük el, rajta van-e a $P(-3, 2, 5)$ pont az alábbi egyeneseken:

a) $\frac{x - 6}{2} = \frac{y - 20}{4} = z - 9,5$;

b) $x = 15 - 2t$, $y = -43 + 5t$, $z = -22 + 3t$.

458. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely

a) átmegy a $P_0(3, -4, 5)$ ponton és párhuzamos az y tengellyel;

b) átmegy az origón és a koordinátatengelyek pozitív irányával egyenlő szögeket zár be;

c) irjuk fel az x tengely egyenletét.

459. Irjuk fel egy olyan egyenes egyenletrendszerét, amely átmegy a $Q(-3, 7, 5)$ ponton és párhuzamos az xy síkkal.

160. Írjuk fel a következő pontpárok összekötő egyenesének egyenletrendszerét:

a) $P(-2, 5, 6), \quad Q(7, -1, 3);$

b) $P(5, 1, 2), \quad Q(-5, 1, 3);$

c) $P(0, 0, 0), \quad Q(9, 11, -1);$

d) $P(1, 1, -2), \quad Q(3, -1, 0).$

161. Döntsük el, hogy az alábbi egyenletrendszerek közül melyek adják meg ugyanazt az egyenest:

a) $x = 5 - 3t, \quad y = -7 + 2t, \quad z = 2 - t;$

b) $\frac{x+7}{-6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-12};$

c) $\frac{x-2}{18} = \frac{y+5}{-12} = \frac{z+1}{6};$

d) $x = 14 + 9t, \quad y = -13 - 6t, \quad z = 5 + 3t.$

162. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(3, 6, -7), B(-5, 2, 3), C(4, -7, -2)$. Írjuk fel a C csúcson átmenő súlyvonal egyenletrendszerét.

163. Adjuk meg a $P(-6, 6, -5)$ és $Q(12, -6, 1)$ pontok összekötő egyenesének a koordinátasíkokkal való metszéspontjait.

164. Tükrözzük az $x = 7 - 8t, y = -4 + 6t, z = 9t$ egyenest a $C(-4, 6, 1)$ pontra. Mi a tükrökép egyenletrendszere?

165. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenesek párhuzamosak egy síkkal:

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}, \quad \frac{x}{5} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{7},$$

$$\frac{x+8}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z+9}{-3}.$$

166. Metszi-e az $x = -14 - 7t, y = 4 + 2t, z = 8 + 5t$ egyenes a z tengelyt?

467. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az $\frac{x-8}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+9}{7}$ egyenessel és átmegy a $(3, -1, -2)$ ponton.

468. Irjuk fel az

$$\frac{x+9}{-5} = \frac{y+2}{3} = z-4,$$

$$x-3 = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{-3}$$

metsző egyenesek szögfelezőinek az egyenletrendszerét.

469. Egy háromszög csúcsai: $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$, $C(-5, 14, -3)$. Irjuk fel a B csúcson átmenő belső szögfelező egyenletrendszerét.

470. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenespárok kölcsönös helyzetét; ha metszők, számítsuk ki metszéspontjuk koordinátáit is:

$$a) \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{4} \text{ és } x = 5 + 6t, y = -4t, z = 7 + 2t;$$

$$b) x = 2t, y = 13 + 5t, z = -13 - 7t \text{ és } x = -2 + 2t, y = 2 - t, z = 4 + 3t;$$

$$c) x = t, y = -1 + 2t, z = 1 + t \text{ és } x = 5 + 2t, y = -t, z = 3 - 2t;$$

$$d) x-3 = \frac{y-8}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ és } x-4 = \frac{y-9}{2} = \frac{z-9}{5}.$$

471. Adjuk meg az a értékét úgy, hogy a következő két egyenes metsző legyen:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}.$$

472. Mutassuk meg a metszéspont kiszámítása nélkül, hogy az $x = 1 + t$, $y = 4 - t$, $z = 3 + 2t$ és

$x = -1 + 2t$, $y = 7 - 3t$, $z = 4 - t$ egyenesek metszők.

173. Döntsük el, milyen a következő két egyenes kölcsönös helyzete:

$$\begin{aligned} x &= -3 + 2t, & y &= -2 + 3t, & z &= 6 - 4t, & \text{és} \\ x &= 5 + t, & y &= -1 - 4t, & z &= -4 + t. \end{aligned}$$

174. Adjuk meg az $x = 4 + 8t$, $y = -8t$, $z = 6 - 14t$ egyenesnek azokat a pontjait, amelyek az $A(8, -4, -1)$ pontjától 27 egységnyi távolságra vannak.

175. Számítsuk ki az alábbi egyenesek hajlásszögét:

$$a) \frac{x - 3}{-1} = \frac{y + 2}{\sqrt{2}} = \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ és } x + 2 = y - 3 = \frac{z + 5}{\sqrt{2}};$$

$$\begin{aligned} b) \quad x &= -2 + 3t, & y &= 0, & z &= 3 - t \text{ és} \\ x &= -1 + 2t, & y &= 0, & z &= -3 + t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad x &= 4 + t, & y &= 5t, & z &= 3 - t \text{ és} \\ x &= 17 + 2t, & y &= 3t, & z &= 9 + 17t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad \frac{x - 1}{3} &= \frac{y}{2,5} = \frac{z + 1}{-3} \text{ és } x = t, & y &= -3 + 2t, \\ z &= -5; \end{aligned}$$

$$e) \frac{x + 5}{3} = y - 5 = z \text{ és } \frac{x - 5}{4} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z + 1}{5}.$$

176. Irjuk fel az $M(4, -4, 16)$ pontból az $x = 2 + t$, $y = 4 + 4t$, $z = 4 + t$ egyenletrendszerű egyenesre állított merőleges egyenletrendszerét.

177. Irjuk fel a $P(2, 1, -3)$ pontból az $x = -1 + t$, $y = -2 + 3t$, $z = t$ egyenesre állított merőleges egyenletrendszerét.

178. Egy háromszög csúcsai: $A(1, -2, -4)$, $B(5, 1, -7)$, $C(3, 1, -3)$. Irjuk fel a C-n átmenő magasságvonal egyenletrendszerét.

179. Számítsuk ki a $P(2, 4, -6)$ pontnak az $\frac{x-2}{6} = \frac{y+4}{9} = \frac{z}{2}$ egyenestől mért távolságát.

180. Számítsuk ki az alábbi párhuzamos egyenesek távolságát:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= 2 + 3t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 2t \quad \text{és} \\ x &= 7 + 3t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 3 + 2t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x-2}{3} &= y = \frac{z-1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{x+2}{3} = y+1 = \\ &= \frac{z+4}{3}. \end{aligned}$$

181. Tükrözzük a $P(-1, 2, 3)$ pontot az $\frac{x+1}{3} = y = z$ egyenesre. Számítsuk ki a tükrökép koordinátáit.

182. Adjuk meg az alábbi egyenesek $[x, y]$ síkon levő vetületének az egyenletrendszerét:

$$\text{a) } \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{7},$$

$$\text{b) } x = 2 - 3t, \quad y = 4 + 9t, \quad z = -3 - t.$$

183. Egy egyenes xy síkon levő merőleges vetületének egyenlete $x - 2y = 15$; az yz síkon pedig $3y - z = 10$. Adjuk meg az egyenes paraméteres egyenletrendszerét.

184. Mekkora az $\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{9}$ egyenes távolsága a z tengelytől?

185. Számítsuk ki az alábbi egyenespárok távolságát:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= 8 - t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = 4t \quad \text{és} \\ x &= -3 + t, \quad y = 5t, \quad z = 1 + t; \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3} \quad \text{és}$$

$$\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+3}{3};$$

$$c) \frac{x+2}{3} = \frac{y}{0,5} = \frac{z+3}{4} \text{ és}$$

$$x = y = 3z;$$

$$d) \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1} \text{ és}$$

$$x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}.$$

$$186. \text{ Irjuk fel az } \frac{x-3}{4} = \frac{y+6}{8} = \frac{z-9}{7} \text{ és}$$

$x+1 = \frac{y-18}{-2} = z$ egyenesek z tengellyel párhuzamos transzverzálisának az egyenletrendszerét.

187. Adottak az $e_1: x = 5 - 6t, y = -3t, z = 1 + 4t$ és $e_2: x = 2t, y = 3 + t, z = 9 - t$ egyenesek. Határozzuk meg a két egyenes $\underline{c}(-11, -11, 2)$ vektorral párhuzamos transzverzálisát.

188. Irjuk fel az $x = -7 + 3t, y = 4 - 2t, z = 4 + 3t$ és $x = 1 + t, y = -8 + 2t, z = -12 - t$ egyenesek normáltranszverzálisának az egyenletrendszerét. Számítsuk ki a két kitérő egyenes avolságát.

189. Irjuk fel az alábbi egyenesek normáltranszverzálisának az egyenletrendszerét:

$$\frac{x-9}{6} = \frac{y-7}{3} = \frac{z}{-5},$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-13}{-12} = \frac{z+9}{11}.$$

190. Irjuk fel a $P(6, 4, 3)$ ponton átmenő és az $x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = -1 + 2t$ egyenest 45° -os szögben metsző egyenes egyenletét.

191. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy az $A(-1, 2, -3)$ ponton, merőleges a $\underline{d}(6, -2, -3)$ vektorra és metszi az $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ egyenest.

192. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $Q(-1, 2, 0)$ ponton és merőleges az $x = -2 + 3t$, $y = 5 + t$, $z = 3$ és az $x = 8 + t$, $y = -t$, $z = 3t$ egyenesekre.

A sík egyenlete

Összefoglalás: Az $\underline{n}(A, B, C)$ normálvektorával és az $\underline{r}_0$ helyvektorú $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjával adott sík egyenlete:

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D.$$

Ha $\underline{n}$ egységvektor, a sík nullára redukált egyenlete az úgynevezett Hesse-féle normálegyenlet, általános egyenletéből az

$$\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

átalakítással kaphatjuk. A $P(x_0, y_0, z_0)$ távolsága a siktól

$$\left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

193. Adott a sík $\underline{n}$ normálvektora és P pontja. Írjuk fel a sík egyenletét:

- a) $\underline{n}(-3, 2, 11)$, $P(9, 1, 0)$;
 b) $\underline{n}(9, 1, 7)$, $P(1, 1, -3)$;
 c) $\underline{n}(1, 0, 1)$, $P(2, 7, 5)$;
 d) $\underline{n}(-2, 9, 9)$, $P(0, 0, 0)$;
 e) $\underline{n}(0, 0, 1)$, $P(9, 13, -7)$.

194. Irjuk fel a koordinátasíkok egyenleteit.

195. Irjuk fel az xz síkkal párhuzamos, attól 8 egységsnyi távolságra levő sík egyenletét.

196. Hogyan mutatkozik az a sík egyenletében, hogy a sík merőleges valamelyik koordinátasíkra?

197. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az xy koordinátasíkra és azt az $ax + by = c$ egyenletű egyenesben metszi.

198. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(-3, 2, 5)$ ponton és tartalmazza a z tengelyt.

199. Az origóból egy síkra állított merőleges talpontja a $P(-4, 5, 2)$ pont. Irjuk fel a sík egyenletét.

200. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $Q(3, 4, -5)$ ponton és párhuzamos az $\underline{a}(3, 1, -1)$ és $\underline{b}(1, -2, 1)$ vektorokkal.

201. Irjuk fel az $A(2, -1, 3)$, $B(3, 1, 2)$ pontokon átmenő és az $\underline{a}(3, -1, 4)$ vektorral párhuzamos sík egyenletét.

202. Irjuk fel az $A(3, -1, 2)$, $B(4, -1, -1)$, $C(2, 0, 2)$ pontok síkjának az egyenletét.

203. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az origón és tartalmazza az $\frac{x-3}{2} = y + 7 = z$ egyenest.

204. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az x, y, z tengelyeket rendre a 4, -3, 2 pontokban metszi.

205. Mekkora térfogatú derékszögű tetraédert metsz ki a $4x + 6y + 8z = 24$ egyenletű sík a koordináta-síkokból?

206. Válasszuk ki az alábbi síkpárok közül a párhuzamosokat:

a) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$ és $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

b) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$ és $2x + y + 2z - 1 = 0$;

c) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

207. a) Írjuk fel az origón átmenő és a $2x - 8y + 6z = 17$ síkkal párhuzamos sík egyenletét.

b) Írjuk fel az $M(-4, 3, 8)$ ponton átmenő és a $9x + 6y - 4z = 3$ síkkal párhuzamos sík egyenletét.

208. Írjuk fel az AB szakasz felezőmerőleges síkjának az egyenletét; $A(-3, 7, 6)$, $B(1, -5, 0)$.

209. Írjuk fel a $P(-2, 0, 3)$ ponton átmenő és az $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z-3}{5}$ egyenesre merőleges sík egyenletét.

210. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos az x tengellyel és átmegy a $P(0, 1, 3)$ és $Q(2, 4, 5)$ pontokon.

211. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $R(-1, 5, 7)$ ponton és párhuzamos az $x = 5 - 2t$, $y = t$, $z = -1 + 3t$ és az $x = 7 + 9t$, $y = 3$, $z = -t$ egyenesekkel.

212. Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenleteit, amelyekben a $3x + 17y + 8z = 2$ sík a koordináta-síkokat metszi.

213. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az $x - 2y + 5z - 3 = 0$ síkra, párhuzamos az $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{4}$ egyenessel és átmegy a $P(-3, 2, 1)$ ponton.

214. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(1, -1, -2)$ és $B(3, 1, 1)$ pontokon és merőleges az $x - 2y + 3z - 5 = 0$ síkra.

245. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az origón és merőleges a $2x - y + 3z - 4 = 0$ és $x + 2y + z = 0$ síkokra.

246. Irjuk fel az $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ és $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$ párhuzamosok síkjának az egyenletét.

247. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $Q(1, 2, -3)$ ponton és párhuzamos az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$, $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$ egyenesekkel.

248. Mutassuk meg, hogy $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ és $x = 7 + 3t$, $y = 2 + 2t$, $z = 1 - 2t$ metsző egyenesek és irjuk fel síkjuk egyenletét.

249. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$ és $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$ egyenesekkel párhuzamos és tőlük egyenlő távol van.

220. Számítsuk ki a következő síkpárok hajlásszögeit:

a) $x - \sqrt{2}y + z - 4 = 0$, $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$;

b) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$;

c) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;

d) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$;

e) $7x - 3y + z - 19 = 0$, $x + 2y - z + 4 = 0$.

221. Irjuk fel az alábbi síkok normálegyenletét:

a) $10x - 2y + 25z + 54 = 0$;

b) $3x - 4y + z = 0$;

c) $x + y - 3 = 0$;

Mekkora ezeknek a síkoknak az origótól mért távolsága?

222. Számítsuk ki a $6x - y + 18z = 19$ sík távolságát a $P(4, -3, 2)$ ponttól.

223. Számítsuk ki az alábbi pont-sík távolságokat:

a) $(-2, -4, 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$;

b) $(2, -1, -1)$, $16x - 12y + 16z - 4 = 0$;

c) $(1, 2, -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$;

d) $(3, -6, 7)$, $4x - 3z - 1 = 0$;

e) $(9, 2, -2)$, $12y - 5z + 5 = 0$.

224. Számítsuk ki a $P(-1, 1, -2)$ pont távolságát az $A(1, -1, 1)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(4, -5, -2)$ pontok síkjából.

225. Határozzuk meg az y tengelynek azt a pontját, amely az $x + 2y - 2z - 2 = 0$ síktól 4 egységnyi távolságra van.

226. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely egyenlő távol van a $2x - 9y + 5z = 6$ síktól, valamint a $C(5, -8, 7)$ ponttól.

227. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely a $3x + 2y - z + 3 = 0$ és a $3x + 2y - z - 1 = 0$ párhuzamos síkoktól egyenlő távol van.

228. Számítsuk ki az alábbi párhuzamos síkpárok távolságait:

a) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, b) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$,
 $x - 2y - 2z - 6 = 0$; $4x - 6y + 12z + 24 = 0$.

229. Irjuk fel azoknak a síkoknak az egyenleteit, amelyek a $4x - 4y - 2z + 3 = 0$ síkból 2 egységnyi távolságra vannak.

230. Irjuk fel az $x - 3y + 2z - 5 = 0$ és $3x - 2y - z + 3 = 0$ síkok szögfelező síkjainak az egyenleteit.

231. Tükrözzük az $s_1: 2x - 8y + 3z - 6 = 0$ síkot az $s_2: 2x - 8y + 3z + 14 = 0$ síkra és irjuk fel a tükrökép egyenletét.

232. Tükrözzük a $4x - 4y + 7z - 8 = 0$ síkot a

$2x + z - 4 = 0$ síkra és írjuk fel a tükörkép egyenletét.

233. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átme-
gy a $P(1, -1, 0)$ ponton és az ABCD tetraéder lapsíkja-
it paralelogrammában metszi úgy, hogy AB-vel nincs közös
pontja; $A(-1, 4, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C(-8, 1, 4)$, $D(-6, 0, 3)$.

Sík és egyenes, vegyes feladatok

234. Számítsuk ki az adott egyenes és sík metszés-
pontjának a koordinátáit:

$$a) x - 1 = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6}, \quad 2x + 3y + z - 1 = 0;$$

$$b) \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 3}{3}, \quad 2x + 3y - 4z - 3 = 0;$$

$$c) x = 1 + 2t, y = -2 + 3t, \\ z = 4 + 6t, \quad 6x + 9y - 3z = 18;$$

$$d) \frac{x + 3}{3} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 1}{-5}, \quad x - 2y + z - 15 = 0;$$

$$e) \frac{x + 2}{-2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 3}{2}, \quad x + 2y - 2z + 6 = 0.$$

235. Mutassuk meg, hogy az $x = -2 + 3t$, $y = 1 - 4t$,
 $z = -5 + 4t$ egyenes párhuzamos a $4x - 3y - 6z - 5 = 0$ sík-
kal.

236. m milyen értékére lesz párhuzamos az
 $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{m} = \frac{z + 3}{-2}$ egyenes az $x - 3y + 6z + 7 = 0$ sík-
kal?

237. a és d milyen értékére lesz benne az $x = 3 + 4t$,
 $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ egyenes az $ax + 2y - 4z + d = 0$ sík-
ban?

238. Számítsuk ki a $2x + y - z - 3 = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ síkok metszésvonalán az xy koordinátesíkban levő pontnak
a koordinátáit.

239. Adjuk meg az alábbi síkpárok metszésvonalainak az egyenletrendszerét:

$$\begin{aligned} \text{a) } x - 2y + 3z - 4 &= 0, & \text{b) } x - 2y + 3z + 1 &= 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 &= 0; & 2x + y - 4z - 8 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 5x + y + z &= 0, & \text{d) } 2x - y + 3z - 6 &= 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 &= 0; & x + y - 2z - 9 &= 0. \end{aligned}$$

240. Bizonyítsuk be, hogy az $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ és $x - 3y + 2z - 11 = 0$ síkoknak egy közös pontja van. Számítsuk ki ennek a pontnak a koordinátáit.

241. Bizonyítsuk be, hogy a $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x + y + 2z - 4 = 0$, $4x + 3y + z + 2 = 0$ síkok három, páronként párhuzamos egyenesben metszik egymást.

242. Hogyan kell megválasztanunk a és b értékét, hogy a $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$ síkoknak a) egy közös pontja legyen; b) egy egyenesre illeszkedjenek; c) három párhuzamos egyenesben messék egymást.

243. Döntsük el, milyen helyzetű egymáshoz viszonyítva a következő három sík: $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

244. Az S_1 , S_2 , S_3 síkok egyenlete legyen rendre $S_1(x, y, z) = 0$, $S_2(x, y, z) = 0$, $S_3(x, y, z) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha nincs közöttük párhuzamos, a három sík akkor és csak akkor illeszkedik egy egyenesre, ha van olyan α, β szám, hogy $S_3(x, y, z) = \alpha S_1(x, y, z) + \beta S_2(x, y, z)$.

245. Egy egyenesre illeszkednek-e az $5x - 3y + 2z - 5 = 0$, $2x - y - z - 1 = 0$, $4x - 3y + 7z - 7 = 0$ síkok?

246. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely át-megy a $P(-2, 1, 3)$ ponton és az $x - y + 3z - 8 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ síkok metszésvonalán.

247. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $3x - y + 2z + 9 = 0$ és $x + z - 3 = 0$ síkok metszésvonalán és párhuzamos az x tengellyel.

248. Számítsuk ki az alábbi sík-egyenes pár hajlás-szögét:

$$a) x + 9y + 4z + 7 = 0, \quad \frac{x+3}{4} = y - 6 = \frac{z}{9};$$

$$b) x + 4y + 8z - 7 = 0, \quad x = 2 + 8t, \quad y = -5 - 4t, \\ z = 1 + t;$$

$$c) 3x + 6y - 7z + 1 = 0, \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-2}{-7};$$

$$d) x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad \frac{x-5}{-3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z}{-2}.$$

249. Az $x = -5 + 3t$, $y = 2t$, $z = 1 + t$ egyenesnek mely pontja van egyenlő távol az $A(2, -4, 7)$ és $B(0, -6, 5)$ pontoktól?

250. Adjuk meg a $P(5, 2, -1)$ pont vetületét a $2x - y + 3z - 23 = 0$ síkon.

251. Mik a $P(1, 3, -4)$ pont $3x + y - 2z = 0$ síkra vonatkozó tükörképének a koordinátái?

252. Adjuk meg a $P(3, -4, -6)$ pont tükörképét az $A(-6, 1, -5)$, $B(7, -2, -1)$, $C(10, -7, 1)$ pontok síkjára vonatkozólag.

253. Adjuk meg a $P(3, -4, -2)$ pont vetületét az $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$ párhuzamosak síkján.

254. Vetítsük az $x = 2 + t$, $y = -6 - 8t$, $z = 8 + 9t$ egyenest az $x - 3y + 5z + 10 = 0$ síkra és irjuk fel a vetület egyenletrendszerét.

255. Tükrözzük az $\frac{x+1}{7} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z-3}{-5}$ egyenest az $x + y + z = 0$ síkra és irjuk fel a tükörkép egyenletrendszerét.

256. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-3, 5, 2)$ ponton, párhuzamos a $2x - y + 5z + 9 = 0$ síkkal és metszi az $\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{5}$ egyenest.

257. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $Q(-3, 1, 1)$ ponton, párhuzamos a $2x + y - 8z + 3 = 0$ síkkal és merőleges az $\frac{x}{4} = \frac{y+6}{2} = z$ egyenesre.

258. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $x = 1 + 3t$, $y = 3 + 2t$, $z = -2 - t$ egyenesen és párhuzamos a $2x - y + z - 3 = 0$ és $x + 2y - z - 5 = 0$ síkok metszésvonalával.

259. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ egyenest és merőleges a $3x + 2y - z - 5 = 0$ síkra.

260. Irjuk fel az $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ egyenesek $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ síkokkal párhuzamos transzverzálisának az egyenletrendszerét.

261. Mutassuk meg, hogy az $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ egyenes párhuzamos a $2x + 2y - z - 10 = 0$ és az $x - y - z - 22 = 0$ síkokkal.

262. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges a $2x + 4y - z + 5 = 0$ síkra és metszi az $\frac{x}{2} = -y = z$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}$ egyeneseket.

263. Adottak az $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{4}$ és $x + 3 = \frac{y}{5} = z - 1$ egyenesek. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely első egyenest tartalmazza, a másodikkal pedig párhuzamos.

264. Adott az $\alpha: 2x - y + z + 9 = 0$ sík, a $P(2, 5, -1)$ pont és az $e: \frac{x-3}{2} = y, z = 6$ egyenes. Irjuk fel an

a γ síknak az egyenletét, amely merőleges α -ra, átmegy P-n és párhuzamos e -vel.

265. Adott az $\alpha: 5x - y + 3z + 4 = 0$ sík, az $e: x - 5 = \frac{y}{3} = \frac{z + 2}{-1}$ egyenes. Írjuk fel az α sík olyan g egyenesének az egyenletrendszerét, amely metszi az y tengelyt és merőleges e -re.

266. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az $x = 5 - 3t, y = t, z = -1 - t$ egyenest és az $x - 8y + z - 3 = 0, 2x + y + z - 1 = 0$ síkokból párhuzamos egyeneseket metsz ki.

267. Adott a $P(-1, 0, 3)$ pont, továbbá az $e_1: \frac{x-3}{2} = y = z-1$ és $e_2: \frac{x}{-2} = y = \frac{z+3}{7}$ egyenesek. Írjuk fel a P ponton átmenő olyan g egyenes egyenletrendszerét, amely metszi e_1 -et és merőleges e_2 -re.

268. Adjunk meg olyan egyenest, amely a $x - 8y + 4z - 9 = 0$ síkból 4 egységre, a $4x + 20y - 5z - 42 = 0$ síkból pedig 3 egységre van.

269. Egy rombusz alapú egyenes hasáb egyik alapéle az $e_1: x = -5 + 4t, y = 6 + 4t, z = -15 + 7t$ egyenesen van, fedőlapjának egyik éle pedig az $e_2: x = 5 + t, y = -7 + 4t, z = 20 + 8t$ egyenesen, a rombuszok oldalhossza 18 egység. Adjuk meg a hasáb csúcsainak a koordinátáit.

Koordináta-transzformáció

Összefoglalás: Ha egy pont koordinátái az $[xyz]$ koordinátarendszerben (x, y, z) és az $[x'y'z']$ rendszerben (x', y', z') , a két koordinátahármas közötti kapcsolatot a koordináta-transzformációs formulák adják meg.

Ha a koordinátarendszert eltoljuk egy $\underline{v}(a, b, c)$ vektorral, a régi és új koordináták közötti kapcsolat:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Ha a koordinátarendszert elforgatjuk úgy, hogy az origó

helyben marad, a transzformáció egyenletek:

$$x = \cos(x, x')x' + \cos(x, y')y' + \cos(x, z')z'$$

$$y = \cos(y, x')x' + \cos(y, y')y' + \cos(y, z')z'$$

$$z = \cos(z, x')x' + \cos(z, y')y' + \cos(z, z')z',$$

ahol pl. (y, z') az y tengely és a z' tengely pozitív irányába mutató vektorok szögét jelenti.

Transzformációs egyenleteinkben x' együttthatói az új x' tengely egységvektorának koordinátái a régi rendszerben, hasonlóan: y' együttthatói y' egységvektorának, z' együttthatói pedig z' egységvektorának a koordinátái a régi rendszerben („oszlopvektorok”).

Kétdimenziós koordinátarendszerben a fenti formulából a z -t, illetve z' -t tartalmazók elmaradnak. Ha speciálisan az $[x, y]$ rendszert α szöggel elforgatva kapjuk az $[x' y']$ rendszert, akkor az áttérés egyenletei:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

270. A koordinátarendszert eltoljuk úgy, hogy az origó a $(-4, 6, -1)$ pontba kerüljön.

a) Irjuk fel a transzformációs egyenleteket;

b) Mi lesz az új rendszerben az $x - 8y + 2z + 6 = 0$ sík egyenlete?

271. Egy sík egyenlete az $[xyz]$ rendszerben $3x - 4y + z + 9 = 0$, az eltolással nyert $[x' y' z']$ rendszerben $3x' - 4y' + z' - 17 = 0$. Hova toltuk el az $[xyz]$ rendszer origóját?

272. Irjuk fel a transzformációs formulákat, ha az $[xy]$ rendszert origója körül elforgattuk, az elforgatás szöge:

a) 60° ; b) -45° ; c) 90° ; d) -90° ; e) 180° .

273. Forgassuk el az $[xy]$ koordinátarendszert 45° -kal. Mi az új koordinátarendszerben az $x^2 - y^2 = 4$ egyenletű vonal egyenlete?

274. Milyen szögű elforgatás tartozik a következő koordináta-transzformációs egyenletekhez:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{y'}{2}, \quad y = -\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}.$$

275. Az $[xy]$ elforgatjuk olyan helyzetbe, hogy az x' , illetve y' tengelyek irányát az $\underline{a}(5, 12)$ és $\underline{b}(-12, 5)$ vektorok adják meg. Írjuk fel a koordináta-transzformáció egyenleteit.

276. Az $[xy]$ koordinátarendszert elforgatjuk 30° -kal, majd kezdőpontját eltoljuk a $(4, 8)$ pontba. Mi lesz az új koordinátarendszerben a $4x - 3y - 1 = 0$ egyenes egyenlete?

277. Toljuk el az $[xy]$ koordinátarendszer origóját a $(2, 3)$ pontba, majd forgassuk el a tengelyeket az $\underline{a}(2, -1)$, $\underline{b}(1, 2)$ vektorok irányába. Mi lesz az új koordinátarendszerben az $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$ görbe egyenlete?

278. Forgassuk el a koordinátarendszert a z tengely körül 45° -kal. Mi lesz az új koordinátarendszerben az $x - 4 = y - 4 = \frac{z + 12}{-4}$ egyenes egyenlete?

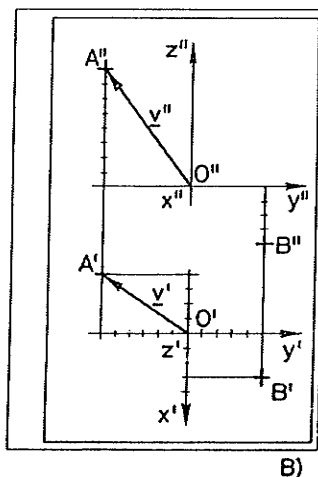
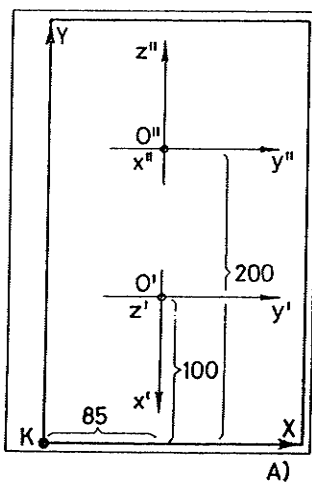
279. Forgassuk el a koordinátarendszert a z tengely körül a szöggel és írjuk fel az elforgatás transzformációs egyenleteit.

280. Forgassuk el az $[xyz]$ koordinátarendszert úgy, hogy az új tengelyek iránya rendre az $\underline{a}(2, 6, 9)$, $\underline{b}(9, -6, 2)$, $\underline{c}(6, 7, -6)$ vektorokéval egyezzenek meg. Írjuk fel a koordináta-transzformáció egyenleteit.

281. Forgassuk el az $[xyz]$ koordinátarendszert az origó körül úgy, hogy az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ egységvektorok rendre az $\underline{a}(2, -1, 2)$, $\underline{b}(2, 2, -1)$, $\underline{c}(-1, 2, 2)$ vektorok irányába menjenek át, majd toljuk el az origót (az új rendszerben koordinátázott) $\underline{v}(1, 0, 0)$ vektorral. Mi lesz a transzformációk után a $4x^2 + 2y^2 + 4xz - 4yz + 3z^2 + 8x - 4y + 8z = 0$ felület egyenlete?

Térgeometriai feladatok analitikus és ábrázoló
geometriai megoldása

Ebben a fejezetben olyan feladatokat közlünk, amelyeknek az analitikus és az ábrázoló geometriai megoldása együttesen végezhető el. A feladatok ábrázolási részét A4-es méretű rajzlapra terveztük; a megadott adatokat egy $\{xyz\}$ koordinátarendszerben két vetületének segítségével visszük fel a rajzlapra. Minden feladatra egységesen kikötjük a következőket: az első képsík az $[x,y]$ koordinátákkal, a második képsík az $[yz]$ koordinátákkal párhuzamos, tehát az x -tengely második, a z -tengely pedig első vetítőegyenese, az y -tengely mindkét képsíkkal párhuzamos, a tengelyek elrendezését az A) ábra mutatja. Hogy a rajzlapon a koordinátarendszerünk O origójának a helyzetét is megadhassuk, a rajzlap síkjában a rajz keretén egy $\{XY\}$ síkbeli koordinátarendszert veszünk fel, ennek kezdőpontja a K pont. Ebben a síkbeli koordinátarendszerben a méreteket mindig milliméterben adjuk meg, míg a térbeli koordinátarendszer egységét feladatonként közöljük. Ha az $\{XY\}$ rendszerben $O'(85, 100)$, $O''(85, 200)$ koordinátákkal rendelkezik, ezt egyesítve az $O[85, 100, 200]$ szimbólummal jelöljük.



Az $[xyz]$ koordinátarendszer első vetülete tehát egyben egy $[x'y']$, második vetülete pedig egy $[y'z']$ síkbeli koordinátarendszer. Ha egy $P(x,y,z)$ pont két képét akarjuk ábrázolni, akkor P' koordinátái az $[x'y']$ rendszerben (x,y) és az $[y'z']$ rendszerben pedig (y,z) . A B) ábránkon az $A(-4,-6,8)$ és $B(3,5,-4)$ pontok vetületeit ábrázoltuk, továbbá a $\underline{y} = \overrightarrow{OA}(-4,-6,8)$ vektort.

Ha egy egyenes egyenletrendszerével és egy sík egyenletével van megadva, akkor ábrázolási célra az egyenesnek előállítjuk két pontját, vagy pedig egy pontját és irányvektorát és először a fenti módon ezeket ábrázoljuk; a síkot pedig rendszerint 3 pontjával célszerű a rajzban megadni. A megoldás birtokában célszerű összehasonlítani a számolás és a szerkesztés eredményét.

282. Szerkesszük meg az ABC háromszög síkjának és a e egyenesnek a döféspontját és számítsuk ki a döféspont koordinátáit:

$A(-3,-5,-2)$, $B(0,7,0)$, $C(6,1,8)$; $e: x = 4 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = -6 - 8t$. (0[80,110,180], az egység 10 mm).

283. Szerkesszük meg az ABCD paralelogramma síkjának és az e egyenesnek a döféspontját és számítsuk ki a döféspont koordinátáit: $A(7,-4,-1)$, $B(3,8,-5)$, $C(-5,10,5)$; $e: x = 6 + 5t$, $y = 7 + 4t$, $z = 11 + 9t$. (0[60,90,190], az egység 10 mm).

284. Szerkesszük meg az ABC és 123 háromszögek síkjának a metszésvonalát és írjuk fel a metszésvonal egyenletrendszerét: $A(0,-6,-3)$, $B(-4,9,-6)$, $C(5,9,12)$; 1(7,0,-7), 2(1,12,-7), 3(-5,6,11). (0[80,80,200], az egység 5 mm).

285. Szerkesszük meg az ABC és az 123 háromszögek síkjának a metszésvonalát és írjuk fel a metszésvonal egyenletrendszerét: $A(4,-6,7)$, $B(-6,4,-3)$, $C(-1,8,8)$; 1(2,-6,-5), 2(5,10,2), 3(-7,0,10). (0[70,65,185], az egység 10 mm).

286. Szerkesszük meg az ABCD paralelogramma és az 123 háromszög síkjának a metszésvonalát és írjuk fel a metszésvonal egyenletrendszerét:

$A(3, -9, -3)$, $B(-9, 3, -6)$, $C(-3, 9, 3)$; $1(-8, -4, 8)$, $2(8, 4, 8)$, $3(2, 10, 8)$. ($O[90, 90, 200]$, az egység 5 mm).

287. Szerkesszük meg az ABC és 123 háromszögek síkjának a metszésvonalát és írjuk fel a metszésvonal egyenletrendszerét: $A(6, -7, 8)$, $B(3, 8, 5)$, $C(-9, -2, -7)$; $1(-4, -12, -8)$, $2(7, 4, -3)$, $3(-8, 4, 12)$. ($O[120, 90, 200]$, az egység 5 mm).

288. Adott az ABCD alapú és M csúcsú gúla és az α sík. Szerkesszük meg a gúla α síkkal képezett metszetét és számítsuk ki a gúlaéleknek és az α metszéspontjainak koordinátáit: $A(0, -6, 0)$, $B(8, 0, 0)$, $C(2, 6, 0)$, $D(-4, 0, 0)$, $M(2, 0, 12)$; $\alpha: 4x - 3z = -8$. ($O[90, 110, 160]$, az egység 10 mm).

289. A szabályos négyoldalú MABCD gúlát vessük el az α síkkal. Szerkesszük meg a síkmetszetet és számítsuk ki a gúla éleinek az α -val képezett metszéspontjait: $M(2, 4, 16)$, $A(10, 0, 0)$, $B(6, 12, 0)$, $C(-6, 8, 0)$, $D(-2, -4, 0)$; $\alpha: 4x - 2y + 5z + 20 = 0$. ($O[100, 100, 170]$, az egység 5 mm).

290. Adott a $T(-3, 4, 7)$ pont és az ABC sík. Szerkesszük meg T-nek a síkra vonatkozó tükörképét és számítsuk ki a tükörkép koordinátáit, ha a pontok koordinátái: $A(3, 8, 0)$, $B(-1, -1, -2)$, $C(5, -1, 10)$. ($O[70, 120, 170]$, az egység 10 mm).

291. Szerkesszük meg az $e: x = 10 + 4t$, $y = -5 - 8t$, $z = 10 + 7t$ egyenesnek az ABCD paralelogramma síkjára vonatkozó tükörképét és írjuk fel a tükörkép egyenletrendszerét. ($O[90, 110, 200]$, az egység 10 mm). A pontok koordinátái: $A(0, -3, 7)$, $B(-4, 3, 8)$, $C(4, 9, 3)$.

292. Tükrözzük a $P(-2, 3, 3)$ pontot az $e: x = 3 + 4t$, $y = 12 + 5t$, $z = -2 + 3t$ egyenesre. Szerkesszük meg a tükörképet és számítsuk ki a koordinátáit. ($O[40, 50, 240]$, az egység 10 mm).

293. Tükrözzük az $\alpha: x + y - 4z = -4$ síkra a $\beta: 5x - y - 2z = 4$ síkot; szerkesszük meg a tükörképet és számítsuk ki a tükörkép egyenletét.

294. Tükrözzük az $x - y - z + 8 = 0$ síkot a $Q(5, 8, 2)$ pontra. Szerkesszük meg a tükörképet és írjuk fel az egyenletét.

295. Forgassuk el az $a: x = 2 - 2t, y = -3 + 4t, z = 8 - 12t$ egyenest a $b: x = 5 + 3t, y = 5t, z = 1 - 2t$ egyenes körül 180° -kal. Szerkesszük meg az elforgatott egyenest és írjuk fel az egyenletrendszerét. ($0[90, 125, 190]$, az egység 10 mm).

296. Adott az a egyenes $A(-1, 5, -1)$ pontjával és $\underline{v}_a(3, 3, -1)$ irányvektorával, a b egyenes $B(6, -3, 5)$ pontjával és $\underline{v}_b(1, -2, -1)$ irányvektorával, továbbá a $P(8, -2, 8)$ pont. Szerkesszük meg a a és b egyenesen átmenő transzverzálisát és írjuk fel az egyenletrendszerét. ($0[90, 140, 180]$, az egység 10 mm).

297. Szerkesszük meg az $e_1: x = -2 - t, y = -4 + 3t, z = 6 - t$ és $e_2: x = -5 + 3t, y = 3 - 3t, z = -5 + t$ egyenesek $P(-2, -6, 3)$ ponton átmenő transzverzálisát és írjuk fel az egyenletrendszerét. ($0[120, 80, 200]$, az egység 10 mm).

298. Szerkesszük meg az $a: x = -2 - 6t, y = 10 + 13t, z = 9 + 5t$ és $b: x = -1 + 5t, y = 9 + 8t, z = -4 + t$ egyenesek $\underline{i}(-10, 4, -9)$ vektorral párhuzamos transzverzálisát és írjuk fel az egyenletrendszerét. ($0[70, 70, 210]$, az egység 5 mm).

299. Szerkesszük meg az $e_1: x = 5 - t, y = -6 + 3t, z = 2 + 3t$ és az $e_2: x = -4 + 3t, y = -3 + 6t, z = -3 + 4t$ egyenesek $\underline{v}(5, -6, 4)$ vektorral párhuzamos transzverzálisát és írjuk fel az egyenletrendszerét. ($0[90, 100, 200]$, az egység 10 mm).

300. Szerkesszük meg az $e_1: x = -4 + 2t, y = -2 + t, z = 2 - t$ és $e_2: x = 4 + 2t, y = 1 - 5t, z = 12 - 4t$ egyenesek normáltranszverzálisát és írjuk fel az egyenletrendszerét. ($0[110, 90, 160]$, az egység 10 mm).

301. Adott az e_1 egyenes $E_1(2, 4, 5)$ pontjával és $\underline{v}_1(-2, 6, 2)$ irányvektorával és az e_2 egyenes $E_2(8, 9, 7)$ pontjával és

$\underline{v}_2(2,6,6)$ irányvektorával. Szerkesszük meg a két egyenes normáltranszverzálisát, írjuk fel ennek egyenletrendszerét, számítsuk ki az egyenesekkel való metszéspontjainak koordinátáit és a metszéspontok távolságát. ($O[40,130,180]$, az egység 10 mm).

302. Szerkesszük meg azt a kockát, amely rajta áll a $-3x + 2y + 6z = 13$ síkon, alaplapjának két átellenes csúcsa $B(1,2,2)$ és $D(9,-1,7)$, az alaplapból induló élek iránya a sík adott normálisának irányával azonos. Számítsuk ki a kocka csúcsok koordinátáit. ($O[80,100,140]$, az egység 10 mm).

303. Adott az ABC háromszög három csúcsával: $A(-3,12,4)$, $B(12,4,-3)$, $C(4,-3,12)$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szabályos, és szerkesszük meg az ABCD szabályos tetraédert (a D csúcs felől nézve az ABC negatív körüljárású). Számítsuk ki a D csúcs koordinátáit. ($O[60,120,170]$, az egység 5 mm).

304. Egy szabályos tetraéder egyik magasság-egyenese: $x = 4 + t$, $y = 4 + t$, $z = 4 + t$, egyik csúcsa az $A(-3,12,4)$ pont. Szerkesszük meg a tetraédert és számítsuk ki csúcsainak a koordinátáit. (A tengelyen levő csúcs és az origó az alaplap különböző oldalán van.) ($O[60,120,170]$, az egység 5 mm).

305. Egy kocka egyik élegyenese: $x = -2 + 12t$, $y = -3 + 4t$, $z = -4 - 3t$, egy rajta fekvő csúcsnak a középpontra vonatkozó tükrképe: $A(-5,9,0)$. Szerkesszük meg a kockát és számítsuk ki csúcsainak koordinátáit. ($O[70,100,180]$, az egység 5 mm).

306. Adottak az $A(3,-8,-2)$, $B(1,6,-2)$, $C(-5,-2,8)$ pontok. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög szabályos és szerkesszük meg az M pontot úgy, hogy az MABC tetraéder szabályos legyen. (A két megoldás közül az első képsíkból távolabbi M-et válasszunk, $O[100,120,200]$, az egység 10 mm).

Kötött vektor, vektorrendszerek

Összefoglalás: Ha egy $\underline{v}$ vektort hozzárendelünk egy vele párhuzamos g egyeneshez, akkor (az egyeneshez) kötött vektorról beszélünk. A g egyenes tetszőleges pontját tekinthetjük a vektor kezdőpontjának, g -t a kötött vektor egyenesének vagy hatásvonalának nevezzük. Ha a tér egy tetszőleges O pontjából az egyenes egy pontjába mutató vektor $\underline{a}$, az $\underline{m} = \underline{a} \times \underline{v}$ vektor a $\underline{v}$ O pontra vonatkozó nyomatéka. (Az O pont legtöbbször az origóval azonos, a vonatkoztatási pontra való tekintettel $\underline{m}$ -t gyakran $\underline{m}_0$ -ral is jelöljük.)

Az $\underline{m}$ független a P egyenesen elfoglalt helyzetétől és mindig merőleges $\underline{v}$ -re. $\underline{m} = \underline{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha a vektor hatásvonala átmegy O -n.

A $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettőst a kötött vektor vektorkoordinátáinak nevezzük. Minden $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettős, ahol $\underline{v} \neq \underline{0}$ és $\underline{v} \perp \underline{m}$, egyértelműen meghatároz egy kötött vektort, $\underline{v}$ egyenesének egy pontjához O -ból mutató vektort $\underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{v^2}$ alakban

lehet előállítani, $\underline{r}_0$ egyébként az O -ból az egyenesre állított merőleges talppontjába mutat.

Ha a vonatkoztatási pontot O -ról O' -re cseréljük fel, $\underline{v}$ változatlan marad, az O -ra vonatkozó $\underline{m}$ nyomaték és az O' -re vonatkozó $\underline{m}'$ nyomaték között az

$$\underline{m} = \underline{m}' + \overline{OO'} \times \underline{v}, \text{ illetve } \underline{m}' = \underline{m} - \overline{OO'} \times \underline{v}$$

összefüggés áll fenn.

Ha egy t egyenest egy $\underline{e}$ irány-egységvektorával irányítunk, egy $\underline{v}$ vektorral a t egyenesre (tengelyre) vonatkozó nyomatékát úgy számítjuk ki, hogy $\underline{v}$ -nak t egy tetszőleges pontjára vonatkozó nyomatékát skalárisan szorozzuk $\underline{e}$ -ral (a tengelyre vonatkozó nyomaték szám!).

A $[\underline{v}_1, \underline{m}_1]$ és $[\underline{v}_2, \underline{m}_2]$ vektorkoordinátákkal adott egyenesek akkor és csak akkor vannak egy síkban, ha

$$\underline{v}_1 \underline{m}_2 + \underline{v}_2 \underline{m}_1 = 0.$$

A $[\underline{v}_1, \underline{m}_1], [\underline{v}_2, \underline{m}_2], \dots, [\underline{v}_k, \underline{m}_k]$ kötött vektorok egy halmazát vektortorrendszernek nevezzük. A vektorrendszer eredővektora definíció szerint:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_k,$$

eredő nyomatéka

$$\underline{m} = \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \dots + \underline{m}_k.$$

A vonatkoztatási pont megváltoztatásához $\underline{v}$ változatlan, $\underline{m}$ -re itt is az $\underline{m} = \underline{m}' + \underline{OO}' \times \underline{v}$ összefüggés érvényes.

A $\underline{v}\underline{m}$ szorzat független a vonatkoztatási pont választásától, és a vektorrendszer saját nyomatékának nevezzük.

A vektorpár két ellentett kötött vektorból álló vektorrendszer, hatásvonalai párhuzamosak. Eredő nyomatékuk merőleges síkjukra és független a vonatkoztatási ponttól. A nyomaték hossza a két vektor által meghatározott paralelogramma területével egyenlő. A vektorpár eredővektora $\underline{o}$.

Két vektorrendszer egyenértékű, ha eredővektoraik és (ugyanarra a pontra vonatkozó) eredőnyomatékaik egyenlők. Egy vektorrendszernek vele egyenértékű - lehetőleg kevés vektorból álló - vektorrendszerrel való helyettesítése a vektorrendszer redukálása. A redukció néhány fontosabb esetére az alábbi táblázatot állítjuk össze:

$\underline{v}$	$\underline{m}$	helyettesíthető (egyenértékű)
$\underline{v} = \underline{o}$	$\underline{m} = \underline{o}$	(egyensúlyi vektorrendszer) minden egyensúlyi rendszerrel
$\underline{v} \neq \underline{o}$	$\underline{v}\underline{m} = \underline{o}$	a $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkoordinátájú kötöttvektorral
$\underline{v} = \underline{o}$	$\underline{m} \neq \underline{o}$	$\underline{m}$ nyomatékú vektorpárral
$\underline{v}\underline{m} \neq \underline{o}$		(általános vektorrendszer) a) egy $\underline{m}$ nyomatékú vektorpárral és egy $\underline{o}$ -n átmenő hatásvonalú $\underline{v}$ vektorral; b) két kötött vektorral, az egyik egyenese szabadon választható.

Egy vektorrendszer centrális tengelye (vagy centrális egyenese) azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekre vonatko-

zón a rendszer eredő nyomatéka az eredő vektorral párhuzamos. A $\underline{v}$ eredővektorral és $\underline{m}$ eredőnyomatékkal rendelkező vektorrendszer centrális egyenesének egy pontjába 0 vonatkoztatási ponttól az $\underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{v^2}$ vektor mutat.

307. A $\underline{v}(1,3,4)$ vektor hatásvonala átmegy az $A(2,4,6)$ ponton. Határozzuk meg $\underline{v}$ -nak az origóra vonatkozó nyomatékát.

308. Számítsuk ki az $A(1,2,0)$ kezdőpontú $\underline{v}(2,3,4)$ vektornak a koordinátarendszer origójára és $P(1,1,1)$ pontra vonatkozó nyomatékát.

309. Egy kötött vektor vektorkoordinátái: $\underline{v}(1,-2,3)$, $\underline{m}(0,3,z)$. Számítsuk ki z értékét.

310. A $\underline{v}(3,-2,6)$ vektor kezdőpontja a $P(2,3,4)$ pont. Számítsuk ki $\underline{v}$ -nak az origóra, majd az $A(3,-1,2)$ pontra vonatkozó nyomatékát.

311. Döntsük el, hogy az alábbi $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorpárok közül melyek lehetnek egy kötött vektor vektorkoordinátái:

- | | |
|---|---|
| a) $\underline{v}(1,0,0)$, $\underline{m}(0,1,0)$; | d) $\underline{v}(0,0,0)$, $\underline{m}(9,1,1)$; |
| b) $\underline{v}(-3,5,2)$, $\underline{m}(2,8,-17)$; | e) $\underline{v}(3,-1,2)$, $\underline{m}(0,0,0)$; |
| c) $\underline{v}(1,-1,2)$, $\underline{m}(1,-1,6)$; | f) $\underline{v}(0,1,0)$, $\underline{m}(1,1,1)$. |

312. Adjuk meg annak a $\underline{v}(-1,3,5)$ kötött vektornak az origóra vonatkozó nyomatékát, amelynek hatásvonala az $x = 3 - t$, $y = 5 + 3t$, $z = 5t$ egyenes.

313. Egy kötött vektor vektorkoordinátái: $\underline{v}(1,-2,3)$, $\underline{m}_0(0,42,28)$. Írjuk fel hatásvonalának az egyenletrendszerét.

314. A $\underline{v}(-1,2,0)$ kötött vektor 0-ra vonatkozó nyomatéka: $\underline{m}(10,5,15)$. Milyen messze van hatásvonala 0-tól?

315. Egy kötött vektor vektorkoordinátái: $\underline{v}(-8,1,4)$, $\underline{m}(6,36,z)$. Mekkora az origó távolsága a vektor hatásvonalától?

316. A $\underline{v}(-1, 1, 9)$ kötött vektor O -ra vonatkozó nyomatéka $\underline{m}(-6, 12, -2)$. Számítsuk ki az $O'(2, 0, 1)$ pontra vonatkozó nyomatékát.

317. Döntsük el, milyen a kölcsönös helyzete az alábbi, vektorkoordinátáikkal megadott, egyenespároknak:

a) $\underline{v}_1(0, -1, 2)$, $\underline{m}_1(5, 2, 1)$; $\underline{v}_2(0, 3, -6)$, $\underline{m}_2(7, 6, 3)$;

b) $\underline{v}_1(1, 4, -6)$, $\underline{m}_1(-2, 2, 0)$; $\underline{v}_2(5, 1, -3)$, $\underline{m}_2(10, 1, 1)$;

c) $\underline{v}_1(1, 0, 1)$, $\underline{m}_1(9, -2, 0)$; $\underline{v}_2(0, -1, 3)$, $\underline{m}_2(1, 1, 1)$.

318. Számítsuk ki a $P(2, 1, 2)$ kezdőpontú $\underline{v}(1, -3, 2)$ vektornak az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-3}{-3}$ egyenesre vonatkozó nyomatékát.

319. A $\underline{v}(3, 2, 1)$ vektor kezdőpontja $A(2, 1, 0)$. Számítsuk ki $\underline{v}$ -nak a koordinátatengelyekre és az origót az $E(1, 1, 1)$ ponttal összekötő egyenesre vonatkozó nyomatékait.

320. Egy vektorrendszer eredővektora $\underline{v}(2, 1, 7)$, az $A(-1, 3, 0)$ vonatkozó eredő nyomatéka $\underline{m}(-2, 5, 1)$. Számítsuk ki a rendszer origóra vonatkozó nyomatékát és saját nyomatékát.

321. Egy vektorrendszer eredővektora $\underline{v}(1, -2, -1)$; az $A(2, 1, -2)$ pontra vonatkozó eredőnyomatéka $\underline{m}(3, 6, 0)$. Irjuk fel a centrális tengely egyenletrendszerét.

322. Egy vektorrendszernek a koordinátarendszer kezdőpontjára vonatkozó eredőnyomatéka $\underline{m}(6, 3, -6)$, eredővektora $\underline{v}(2, 6, 3)$. Irjuk fel centrális tengelyének egyenletrendszerét.

323. A $P_1(2, 0, 2)$ kezdőpontú $\underline{v}_1(0, 5, 0)$ és a $P_2(0, 2, 2)$ kezdőpontú $\underline{v}_2(0, -3, 0)$ vektorokból álló vektorrendszernek határozzuk meg az origóra vonatkozó vektorkoordinátáit és centrális tengelyének az origótól mért távolságát.

324. Egy vektorrendszer eredővektora: $\underline{v} = \underline{0}$, eredőnyomatéka: $\underline{m}(9, 2, -4)$. Adjunk meg olyan vektorpárt, amellyel a vektorrendszer helyettesíthető, írjuk fel hatásvonalaiik egyenletrendszerét.

325. Állapítsuk meg, egyenértékű-e az alábbi két vektorrendszer ($\underline{r}_i$ a $\underline{v}_i$ hatásvonalának egy pontjához mutat).

I. rendszer: $\underline{r}_1(1, 2, -1)$, $\underline{v}_1(2, -2, 1)$,

$\underline{r}_2(-2, 1, 0)$, $\underline{v}_2(1, 0, 3)$,

$\underline{r}_3(0, 0, 0)$, $\underline{v}_3(0, -4, 1)$,

$\underline{r}_4(1, 2, 0)$, $\underline{v}_4(0, 4, -1)$.

II. rendszer: $\underline{r}_5(-2, 1, 0)$, $\underline{v}_5(3, -2, 4)$,

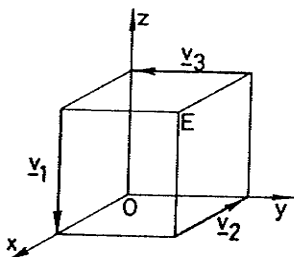
$\underline{r}_6(0, 0, 0)$, $\underline{v}_6(-4, 3, 0)$,

$\underline{r}_7(0, 1, -1)$, $\underline{v}_7(4, -3, 0)$.

326. Bizonyítsuk be, hogy ha a kötött vektorok hatásvonalai egy K ponton mennek át, akkor eredőjük a K -n átmenő hatásvonalú egyenes.

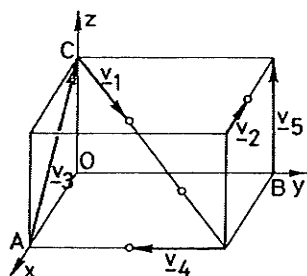
327. Egy vektorrendszer centrális tengelye áthalad a $T(6, 3, 2)$ ponton, eredője a $\underline{v}(1, 2, -2)$ vektor a T -re vonatkozó nyomatéka $\underline{v}$ -ral egyirányú és hossza 50 egység. Számítsuk ki a vektorrendszernek az origóra vonatkozó nyomatékát.

328. Egy vektorrendszer a $P_1(2, 2, 2)$ kezdőpontú $\underline{v}_1(0, 4, 0)$ és a $P_2(2, 0, 2)$ kezdőpontú $\underline{v}_2(4, 0, 0)$ vektorból áll. Írjuk fel a vektorrendszer centrális tengelyének egyenletrendszerét.



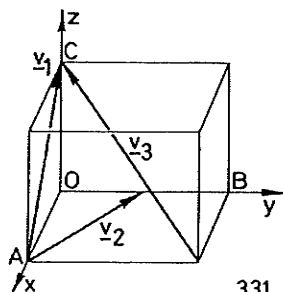
329.

329. Az egységkocka élein kijelöljük a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ vektorokat (329. ábra). Rajzoljuk be az ábrába a centrális tengelyt.



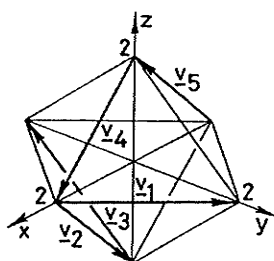
330.

330. Számítsuk ki a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_5$ vektorokból álló vektorrendszernek az origóra vonatkozó vektorkoordinátáit; a rendszer sajátnyomatékát; a rendszer sajátnyomatékát; a $P(2,1,3)$ pontra vonatkozó nyomatékát; írjuk fel a centrális tengely egyenletrendszerét. Mivel helyettesíthető a vektorrendszer? (330. ábra: $A(3,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,3)$).



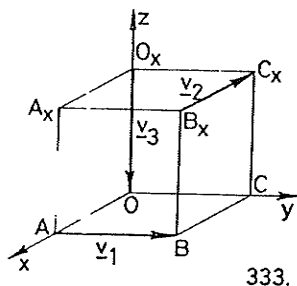
331.

331. Számítsuk ki a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok által meghatározott vektorrendszer (331. ábra) origójára vonatkozó vektorkoordinátáit; sajátnyomatékát, és írjuk fel centrális tengelyének egyenletrendszerét. ($A(3,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,3)$, $\underline{v}_2$ az OB felezőpontjába mutat)



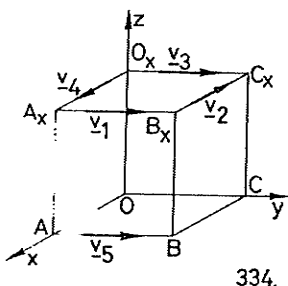
332.

332. A koordinátarendszerben egy szabályos oktaédert helyeztünk el, amelyben a tengelyek hossza 4. (332. ábra) Számítsuk ki a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_5$ vektorokból álló vektorrendszer O-ra vonatkozó vektorkoordinátáit. Mivel helyettesíthető a vektorrendszer?



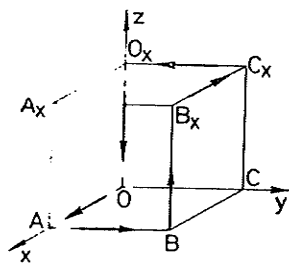
333.

333. Egy vektorrendszer a 333. ábrán látható $\vec{AB}$, $\vec{B_xC_x}$ és $\vec{O_xO}$ vektorokból áll. Számítsuk ki a vektorrendszernek az O és a C pontokra vonatkozó vektorkoordinátáit és a rendszer sajátnyomatékát, ha a kocka élhossza a.



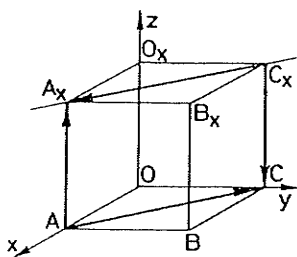
334.

334. Számítsuk ki a 334. ábrán látható kocka élein adott vektorokból álló vektorrendszernek a sajátnyomatékát és írjuk fel centrális tengelyének egyenletrendszerét. (A kocka élhossza egységnyi, a vektorok hossza $\frac{1}{3}$). Mivel helyettesíthető a vektorrendszer?



335.

335. A 335. ábrán látható kocka élhossza 2, az élegyeneseken levő vektorok egységvektorok. Számítsuk ki ebből a hat vektorból álló vektorrendszernek eredővektorát, az O-ra vonatkozó eredő nyomatékát. Helyettesítsük az adott vektorrendszert egy lehetőleg egyszerű vektorrendszerrel.



336.

336. A 336. ábrán látható a él-hosszúságú kocka lapátláti-
ból, illetve éleiből alkot-
tuk az $\vec{AC}$, $\vec{C_xA_x}$, $\vec{AA_x}$, $\vec{C_xC}$
vektorokat. Számítsuk ki a
fenti vektorok által alko-
tott vektorrendszer eredő
vektorát, az O és A pontokra
vonatkozó eredő nyomatékát.

337. Egy vektorrendszernek az eredővektora $\underline{v}(3,4,1)$, az
origóra vonatkozó eredőnyomatéka $\underline{m}(-2,3,4)$. Mutassuk meg, hogy
a centrális tengely tetszőleges pontjára vonatkoztatva az eredő
nyomaték és a $\underline{v}$ hosszának a hányadosa állandó. Mekkora ebben
az esetben az állandó értéke?

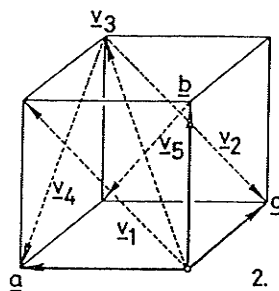
338. Bizonyítsuk be, hogy három vektor akkor és csakis
akkor alkot egyensúlyi vektorrendszert, ha hatásvonalaik egy
síkban vannak és vagy párhuzamosak, vagy pedig egy ponton
mennek át.

339. Legyen A, B, C, D a tér négy adott pontja. Számít-
suk ki az $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DB}$ vektorokból álló vektorrend-
szernek az AC tengelyre vonatkozó nyomatékát. A pontok milyen
elhelyezkedése mellett lesz ez a nyomaték 0?

340. Bizonyítsuk be, hogy két vektorrendszer egyen-
értékű, ha a két rendszernek három, nem kollineáris pont-
ra vonatkozó nyomatéka egyenlő.

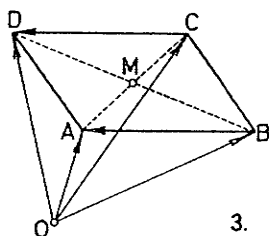
A FELADATOK MEGOLDÁSAI

1. $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{b} - \underline{c}$, $\underline{c} - \underline{a}$.



2. $\underline{v}_1 = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{v}_2 = -(\underline{a} + \underline{b})$,
 $\underline{v}_3 = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $\underline{v}_4 = -(\underline{b} + \underline{c})$,
 $\underline{v}_5 = \underline{a} + \underline{b} - \underline{c}$.

3. I. megoldás: Az $\vec{OA} - \vec{OB}$ és $\vec{OD} - \vec{OC}$ a paralelogramma két szemközti élvektora, ezért egyenlők. Az egyenlőségből átrendezéssel következik a bizonyítandó.



II. megoldás: Az átlók M metszéspontjához - azaz felezési pontjához mutató -

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{OB} + \vec{OD}}{2}$$

vektorok egyenlők, tehát kétszereseik is egyenlők.

4. Az előző feladat alapján $\underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{d}$, tehát $\underline{d} = \underline{a} + \underline{c} - \underline{b}$.

5. Ha az élvektorok $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, a velük közös csúcsból induló lapátlóvektorok $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$, tehát

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{b} &= \underline{x} \\ \underline{b} + \underline{c} &= \underline{y} \\ \underline{c} + \underline{a} &= \underline{z}. \end{aligned}$$

E három egyenlet összege: $2(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \underline{x} + \underline{y} + \underline{z}$. Ebből az egyenletek kétszereseit kivonva kapjuk rendre, hogy

$$\underline{c} = \frac{-\underline{x} + \underline{y} + \underline{z}}{2}, \quad \underline{a} = \frac{\underline{x} - \underline{y} + \underline{z}}{2}, \quad \underline{b} = \frac{\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}}{2}.$$

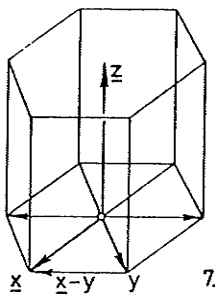
6. Állítsuk elő a síkban forgó vektorokat a hatszög-csúcsok helyvektorai segítségével.

7. Az alaplap csúcsainak helyvektorai:

$$\underline{x}, \underline{y}, \underline{y} - \underline{x}, -\underline{x}, -\underline{y}, \underline{x} - \underline{y}.$$

A fedőlapé:

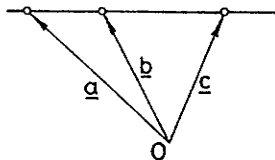
$$\underline{x} + \underline{z}, \underline{y} + \underline{z}, \underline{y} - \underline{x} + \underline{z}, \text{ stb.}$$



8. Az $|\underline{a}|$ $\underline{b}$ és $|\underline{b}|$ $\underline{a}$ vektorok egy rombuszt feszítenek ki, a paralelogramma szabály szerint $|\underline{a}|$ $\underline{b} + |\underline{b}|$ $\underline{a}$ ennek a rombusznak átlóvektora.

9. Mindkét vektor hossza $|\underline{a}| |\underline{b}|$.

10. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ végpontjait, illetve a $\underline{b}$ és $5\underline{a} - 4\underline{b}$ végpontjait összekötő vektorok $\underline{a} - \underline{b}$, illetve $5(\underline{a} - \underline{b})$, ezek kollineárisak, tehát a három végpont valóban egy egyenesen van.



11. $\underline{c}$ végpontja akkor és csak akkor van rajta az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ végpontjai által meghatározott egyenesen, ha a $\underline{c} - \underline{a}$ és $\underline{b} - \underline{a}$ kollineárisak.

Ha $\underline{c} = \alpha \underline{a} + (1 - \alpha) \underline{b}$, akkor $\underline{c} - \underline{a} = (1 - \alpha)(\underline{b} - \underline{a})$, tehát $\underline{c} - \underline{a}$ és $\underline{b} - \underline{a}$ kolli-

neárisak, ha viszont végpontjaik egy egyenesen vannak, $\underline{c} - \underline{b}$ és $\underline{a} - \underline{b}$ kollineárisak, tehát van olyan α , hogy $\underline{c} - \underline{b} = \alpha(\underline{a} - \underline{b})$, azaz $\underline{c} = \alpha \underline{a} + (1 - \alpha) \underline{b}$.

12. Jelöljük a négyszög csúcsaihoz, illetve oldalfelező pontjaihoz tartozó helyvektorokat a megfelelő kisbetűkkel. Ekkor

$$\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}, \quad \underline{y} = \underline{c} - \underline{d}, \quad \underline{f}_1 = \frac{\underline{a} + \underline{d}}{2}, \quad \underline{f}_2 = \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2}.$$

Ezért

$$\underline{f} = \underline{f}_2 - \underline{f}_1 = \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2} + \frac{\underline{c} - \underline{d}}{2} = \frac{\underline{x} + \underline{y}}{2}.$$

13. Ha a tetraéder csúcsainak helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, az élfelező pontoké

$$\frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}, \quad \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2}, \quad \frac{\underline{c} + \underline{d}}{2}, \quad \frac{\underline{d} + \underline{a}}{2};$$

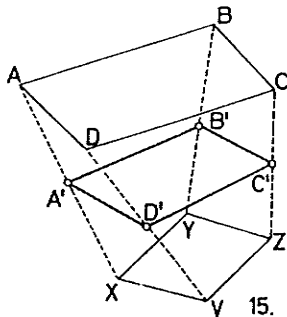
a felezőpontok által meghatározott négyszög két szemközti oldal vektora egyaránt

$$\frac{\underline{a} - \underline{c}}{2},$$

ezért valóban paralelogramma.

14. Ha a négyszög csúcsainak helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, a középvonalak felezőpontjainak és az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjának a helyvektora egyaránt

$$\frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}}{4}.$$



15. Legyenek a szakaszok felezőpontjai rendre $\underline{A'}$, $\underline{B'}$, $\underline{C'}$, $\underline{D'}$ és az alakzat pontjainak helyvektorait jelöljük a megfelelő kisbetűkkel. Az ABCD és XYZV paralelogramma voltából következik, hogy $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ és $\underline{y} - \underline{x} = \underline{z} - \underline{v}$. Azt kell bizonyítanunk,

hogy $\underline{b}' - \underline{a}' = \underline{c}' - \underline{d}'$. Mivel $\underline{b}' = \frac{\underline{b} + \underline{y}}{2}$, $\underline{a}' = \frac{\underline{a} + \underline{x}}{2}$,
 $\underline{c}' = \frac{\underline{c} + \underline{z}}{2}$ és $\underline{d}' = \frac{\underline{d} + \underline{v}}{2}$, ezek helyettesítésével a bizonyítandó adódik.

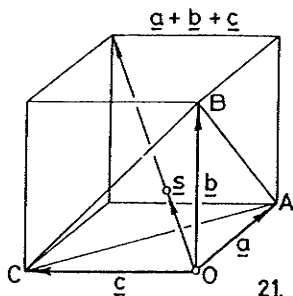
46. $2\underline{b} - \underline{a}$.

47. Legyenek A, B, C, P helyvektorai rendre $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{p}$. A tükörképek helyvektorai rendre $2\underline{a} - \underline{p}$, $2\underline{b} - 2\underline{a} + \underline{p}$, $2\underline{c} - 2\underline{b} + 2\underline{a} - \underline{p}$, $-2\underline{c} + 2\underline{b} + \underline{p}$, $2\underline{c} - \underline{p}$, $\underline{p}$.

48. Egy szabályos háromszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok.

49. Mérjük fel egy pontból kiindulva a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorokat. Egyik tetszőleges vektorból kiindulva adjuk össze a vektorokat olyan sorrendben, hogy minden vektorhoz azt fűzzük hozzá, amely pozitív körüljárási irányt betartva a legközelebb van hozzá. Az így nyert zárt vektorsokszög konvex lesz.

20. $\frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{3}$, $\frac{2\underline{a} + \underline{b}}{3}$.



24. A paralelepipedon O csúcsából kiinduló $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ élvektorok végpontjai A, B, C. Az O-ból induló testátlóvektor $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, az ABC háromszög súlypontjának helyvektora

$$\frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3},$$

tehát a testátlóvektor harmada, ami éppen azt

jelenti, hogy az ABC sík harmadolja a testátlót.

22. A keresett O pont a pontok meghatározta pontrendszer súlypontja. Megszerkeszthetjük úgy, hogy egy tetszőleges pontból a pontokhoz mutató helyvektorok összegének az ötödét vesszük, az O-nak ez lesz a helyvektora.

23. Legyen az n -oldalú szabályos sokszög középpontja O , ebből a csúcsokba mutató vektorok $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$; a súlypont $\underline{s}$ helyvektora:

$$\underline{s} = \frac{\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \dots + \underline{a}_n}{n}.$$

Forgassuk el a sokszöget a vektorokkal együtt O körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel, és legyen az $\underline{s}$ elforgatottja $\underline{s}'$. Mivel a csúcsok helyvektorainak halmaza az elforgatással önmagába megy át, $\underline{s} = \underline{s}'$, ami csak úgy lehetséges, ha $\underline{s} = \underline{o}$, tehát O a súlypont.

24. Legyenek a csúcsok helyvektorai rendre $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$. Állítsuk elő ezekkel a tetraéder és a lapok súlypontjait, stb.

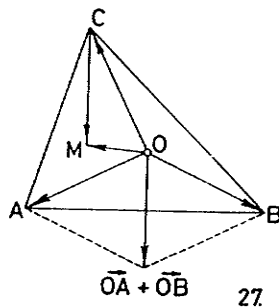
25. A feladatok megoldásánál azt kell felhasználnunk, hogy minden vektor csak egyféleképpen bontható fel $\underline{a}$ és $\underline{b}$ irányú összetevőkre, tehát pl. az

a) esetben: $\alpha = 3, \quad 2\beta + 1 = 5; \quad \beta = 2;$

b) $\alpha + \beta - 1 = 0, \quad 2\alpha - \beta = 0; \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3};$

c) $\alpha = \beta + 1, \quad \beta = -\alpha + 1; \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.$

26. $\vec{PA} + \vec{PC} = \vec{PB} + \vec{PD}$, mivel mindkét oldalon P -ből a négyzet középpontjába mutató vektor kétszerese áll, ezért $|\vec{PA} + \vec{PC}| = a$ kör átmérője.

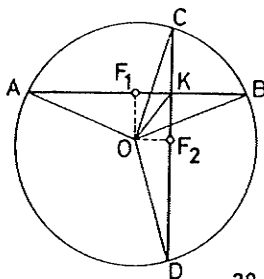


27. Mérjük fel az O -ból az $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ -t, és legyen a végpontja M , tehát

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

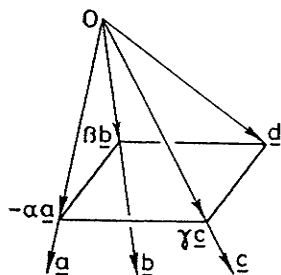
Elegendő megmutatni, hogy M rajta van ABC tetszőleges magasságvonalán, pl. a C -ből indulón azaz $\vec{CM} \perp \vec{AB}$. Mivel $\vec{CM} = \vec{OM} - \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ és $\vec{OA} + \vec{OB}$ valóban merőleges az AB oldalra a paralelogram-

ma szabály miatt (rombusz!).



28.

28. Mivel $\vec{KA} = \vec{OA} - \vec{OK}$, $\vec{KB} = \vec{OB} - \vec{OK}$, $\vec{KC} = \vec{OC} - \vec{OK}$, $\vec{KD} = \vec{OD} - \vec{OK}$, ha az AB, illetve CD szakaszok felezési pontjai F_1 és F_2 ,
 $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} = (\vec{OA} + \vec{OB}) + (\vec{OC} + \vec{OD}) - 4\vec{OK} =$
 $= 2(\vec{OF}_1 + \vec{OF}_2) - 4\vec{OK} =$
 $= 2\vec{OK} - 4\vec{OK} = 2\vec{KO}$, tehát az összeg csakis K helyzettől függ.



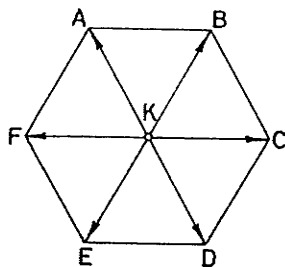
29.

29. Az egyenesek közös O pontjából az egyenesek irányába mutató vektorok legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. Közülük $\underline{d}$ biztosan előállítható

$\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$
 alakban, ebből

$\underline{d} - \gamma \underline{c} = \beta \underline{b} - (-\alpha \underline{a})$,
 tehát az O-ból induló $-\alpha \underline{a}$, $\beta \underline{b}$, $\gamma \underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok végpontjai paralelogrammát alkotnak.

30. $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$,
 $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$.



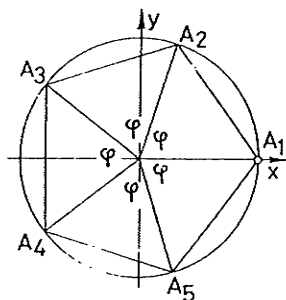
31.

31. Legyenek a hatszög csúcsai ABCDEF. Mivel $\vec{KC} = \vec{AB} =$
 $= (0,1,-1)$, a C csúcs koordinátái $(4,2,3)$. A többi csúcs koordinátái az A,B,C csúcsok K-ra vonatkozó tükrözéséből adódnak, ezért
 $D(5,1,3)$, $E(5,0,4)$, $F(4,0,5)$.

32. Felhasználhatjuk pl. hogy az AC és BD szakaszoknak azonos a felezési pontja, ebből: $D(-2, -1, 12)$.

33. $C(-7, 5, -1)$, $D(1, 4, 2)$.

34. Ha A, B, C helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, akkor a paralelepipedon többi csúcsába rendre az $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ vektorok vezetnek, ezek koordinátái azonosak a csúcsok koordinátaival, tehát: $(-1, 13, -4)$, $(5, 8, -3)$, $(12, 7, -7)$, $(8, 14, -7)$.



35.

35. Legyen $\varphi = 360^\circ/5 = 72^\circ$. A csúcsok helyvektorai rendre a φ , 2φ , 3φ , 4φ irány-szögű egységvektorok, ezért a koordináták: $A_2(\cos 72^\circ, \sin 72^\circ)$, $A_3(\cos 144^\circ, \sin 144^\circ)$, $A_4(\cos 216^\circ, \sin 216^\circ)$, $A_5(\cos 288^\circ, \sin 288^\circ)$.

36. Két vektor akkor kollineáris, ha egyikük a másikkal számszorosa, ezért:

a) nem kollineárisak, mert ha pl. $\underline{a} = \lambda \underline{b}$ lenne, akkor a harmadik koordinátára tekintettel $\lambda = 7$ lenne, de ez az első két koordináta esetében nyilván nem felel meg;

b) kollineárisak, $\underline{d} = \frac{2}{3} \underline{c}$;

c) kollineárisak, $\underline{f} = 0 \cdot \underline{e}$.

37. Három pont akkor van egy egyenesen, ha összekötővektoraik kollineárisak, azaz egyik a másikkal számszorosa.

a) Mivel $\vec{AB}(6, -5, -5)$, $\vec{BC}(12, -10, -10)$, $\vec{BC} = 2\vec{AB}$ és így A, B, C egy egyenesen vannak;

b), c) kollineárisak; d) nincsenek egy egyenesen.

38. Az $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$ vektoroknak kollineárisnak kell lenniük; mivel pedig koordinátáik

$$\overline{AB}(1,5,-2), \quad \overline{BC}(2,y-4,z-1),$$

ez csak úgy lehetséges (az első koordináták miatt), ha $\overline{BC} = 2\overline{AB}$, ezért $y - 4 = 10$, $y = 14$; $z - 1 = -4$, $z = -3$, tehát $C(7,14,-3)$.

39. Ha P , C és P' -nek C -re vonatkozó tükörképének, P' -nek a helyvektorai rendre $\underline{p}, \underline{c}, \underline{p}'$, akkor $\underline{c} = \frac{\underline{p} + \underline{p}'}{2}$, és ebből $\underline{p}' = 2\underline{c} - \underline{p}$, tehát $\underline{p}'$ -nek, azaz P' -nek a koordinátái $(3,18,-12)$.

40. A negyedik tükörkép azonos P -vel. A tükörképek rendre $(13,-3,-1)$, $(-17,11,1)$, $(7,-3,3)$, $(1,3,-1)$. Az eredmény tetszőleges paralelogramma és tetszőleges P pont esetén is ugyanez: a negyedik tükörkép azonos P -vel.

41. Az $[xy]$ síkon $\underline{v}_1(a_1, a_2, 0)$; az $[yz]$ síkon $\underline{v}_2(0, a_2, a_3)$; a $[zx]$ síkon $\underline{v}_3(a_1, 0, a_2)$.

42. Igen, mivel mindegyikük komplanáris $\underline{a}$ -val és $\underline{b}$ -vel.

43. $\underline{d}$ -t $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$ alakban keressük. Ha az $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{d}$ egyenletet mindhárom koordinátára felírjuk, a

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta + \gamma &= 9 \\ -\alpha + 3\beta &= -9 \\ \alpha + 7\gamma &= 10 \end{aligned}$$

egyenletrendszeret kapjuk. Ennek megoldása $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, tehát a felbontás: $\underline{d} = 3\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}$, az összetevők: $3\underline{a}(6,-3,3)$, $-2\underline{b}(2,-6,0)$, $\underline{c}(1,0,7)$.

44. A feladat az előző feladat mintájára oldható meg, $\underline{d} = -3\underline{a} - 3\underline{b} + 7\underline{c}$, az összetevők: $-3\underline{a}(24,-24,-3)$, $-3\underline{b}(0,-9,-6)$, $7\underline{c}(7,-7,28)$.

45. $\underline{v} = 8\underline{a} + \underline{b}$, az összetevők: $8\underline{a}(16,56)$, $\underline{b}(-3,0)$.

46. Három vektor akkor nem független, ha egy síkban vannak.

a) függők; b) függők; c) függetlenek; d) függők.

47. $\underline{a}, \underline{b}$; $\underline{a}, \underline{d}$; $\underline{b}, \underline{c}$; $\underline{b}, \underline{d}$; $\underline{c}, \underline{d}$.

48. Négy vektor sohasem lehet független.

49. a) Ha a lapátlókka közös csúcsból induló kocka-
élek vektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, akkor $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{y} = \underline{b} + \underline{c}$, ezért
- mivel az élvektorok közül bármely kettő merőleges egymás-
ra - $\underline{x}\underline{y} = (\underline{a} + \underline{b})(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{b}^2 = 1$.

$$b) \cos \alpha = \frac{\underline{x}\underline{y}}{|\underline{x}||\underline{y}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

$$50. \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot 2 \cos 60^\circ = 2.$$

51. Lásd a 49. feladat megoldásának gondolatmenetét.

$$\underline{a}\underline{y} = 1, \quad \alpha = 54,74^\circ.$$

$$52. \frac{2}{3}.$$

53. Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ a két nem kollineáris vektor és a
rájuk merőleges vektor $\underline{c}$, tehát $\underline{a}\underline{c} = 0$ és $\underline{b}\underline{c} = 0$. A síkjuk
minden vektora $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ alakú, tehát csak az $(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b})\underline{c} = 0$
teljesülését kell igazolnunk, ami nyilvánvaló.

54. Feltéhetjük, hogy a szóbanforgó vektorok mind egy-
ségvektorok, mert ha minden vektor helyett az irányába mu-
tató egységvektort vesszük, a vektorok szögét nem változtat-
juk meg. Legyenek a síkbeli egységvektorok $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$, $\underline{v}$ ve-
lők α szöget zár be, ezért $\cos \alpha = \underline{v}\underline{a} = \underline{v}\underline{b} = \underline{v}\underline{c}$, ebből
 $\underline{v}(\underline{a} - \underline{b}) = \underline{v}(\underline{b} - \underline{c}) = 0$, tehát $\underline{v}$ merőleges az $\underline{a} - \underline{b}$ és $\underline{b} - \underline{c}$
vektorokra. $\underline{a} - \underline{b}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ nem lehetnek kollineárisak, $\underline{v}$ te-
hát merőleges a sík két nem kollineáris vektorára, ezért me-
rőleges a síkra is.

55. Legyen az origó O; A, B, C helyvektorai legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$,
 $\underline{c}$. Azt kell bizonyítani, hogy $\underline{a}(\underline{b} - \underline{c}) + \underline{b}(\underline{c} - \underline{a}) + \underline{c}(\underline{a} - \underline{b}) =$
 $= 0$, ami a szorzások elvégzésével azonnal következik.

56. Legyenek az A, B, P pontok helyvektorai $\underline{a}$, $-\underline{a}$, $\underline{p}$.
 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\underline{a} - \underline{p}) \cdot (\underline{a} + \underline{p})$ akkor és csak akkor 0, ha PA és PB merőlegesek. Mivel $(\underline{a} - \underline{p}) \cdot (\underline{a} + \underline{p}) = \underline{a}^2 - \underline{p}^2 = 0$, $|\underline{p}| = PO = |\underline{a}| = OA$.

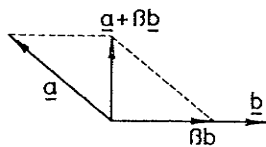
57. A szorzás disztributív szabályát alkalmazva
 $(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})^2 = \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 2\underline{a}\underline{b} + 2\underline{b}\underline{c} + 2\underline{c}\underline{a}$, az utóbbi három tag azonban 0, mert páronként merőleges vektorok szorzata.

58. $\underline{a}$ -ral való skaláris szorzatuk 0.

59. A merőlegesség miatt $0 = \underline{b}(\underline{a} + \beta \underline{b}) = \underline{a}\underline{b} + \beta \underline{b}^2$, ebből

$$\beta = -\frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{b}^2}.$$

A szerkesztés az ábráról leolvasható. Mind a számolásból, mind a szerkesztésből kitűnik, hogy $\underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{a} - \frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{b}^2} \underline{b}$, az $\underline{a}$ $\underline{b}$ -ra merőleges összetevője.



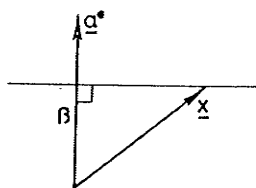
59.

ges összetevője.

60. a) Legyenek az egységvektorok $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, szögük α az $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = \underline{0}$ egyenlet négyzetre emelve:
 $3 + 6 \cos \alpha = 0$, $\alpha = 120^\circ$.

b) $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4 = \underline{0}$, négyzetre emelés után:
 $4 + 12 \cos \alpha = 0$, $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha = 109,47^\circ$. (Az $\underline{e}_i$ vektorok egy szabályos tetraéder középpontjából a csúcsokba vezetnek.)

61. A kezdőpontból a metszéspontokba mutató vektorokkal fejezzük ki a háromszög oldalvektorait és mutassuk meg, hogy közülük bármely kettő skaláris szorzata pozitív.



62.

62. Ha az $\underline{a} \cdot \underline{x} = \alpha$ egyenlet mindkét oldalát elosztjuk $|\underline{a}|$ -kel és bevezetjük az $\frac{\alpha}{|\underline{a}|} = \beta$ jelölést, kapjuk, hogy

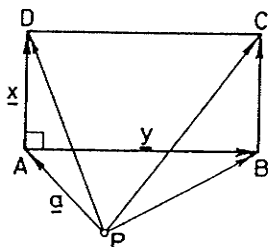
$$\underline{a}^0 \cdot \underline{x} = \beta,$$

ez azonban azt jelenti, hogy az $\underline{x}$ vektorok $\underline{a}^0$ irányán levő előjeles vetülete mindig β hosszúságú, az $\underline{x}$ vektorokat tehát a következő módon állíthatjuk elő: $\underline{a}^0$ kezdőpontjából $\underline{a}^0$ egyenesére előjelesen felmérjük

a β távolságot és végpontjában $\underline{a}^0$ -ra merőleges síkot állítunk. $\underline{a}^0$ kezdőpontjából a sík pontjaihoz mutató vektorok a feltételnek eleget tevő $\underline{x}$ vektorok.

63. Legyenek az s súlypontból rendre az A, B, C, P pontokba mutató vektorok $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{p}$. Ezzel a jelöléssel $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (\underline{a} - \underline{p})^2 + (\underline{b} - \underline{p})^2 + (\underline{c} - \underline{p})^2 = \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 3\underline{p}^2 - 2\underline{p}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$. Mivel $\underline{p}^2 = r^2$ és $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0$, a négyzetösszeg $= \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 3r^2 = \text{állandó}$.

64. Ha a paralelogramma egy csúcsból kiinduló két oldalvektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$, akkor átlóvektorai $\underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{a} - \underline{b}$, azt kell tehát igazolnunk, hogy $(\underline{a} + \underline{b})^2 + (\underline{a} - \underline{b})^2 = 2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2$, ami nyilvánvaló.



65.

65. Az ábra jelöléseit használva $\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = \underline{a}^2 + (\underline{a} + \underline{x} + \underline{y})^2 = 2\underline{a}^2 + \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + 2\underline{a}(\underline{x} + \underline{y})$, $\overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PD}^2 = (\underline{a} + \underline{y})^2 + (\underline{a} + \underline{x})^2 = 2\underline{a}^2 + \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + 2\underline{a}(\underline{x} + \underline{y})$, amivel állításunkat bizonyítottuk.

66. Legyen $\overrightarrow{DA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{DB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{c}$. A feltétel szerint

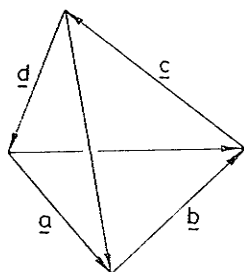
$\underline{c}(\underline{a} - \underline{b}) = 0$, $\underline{a}(\underline{b} - \underline{c}) = 0$, e két egyenlet megfelelő oldalait összeadva a $\underline{b}(\underline{a} - \underline{c}) = 0$ egyenlőséget kapjuk, ami éppen a bizonyítandót igazolja.

67. Legyen $\overline{DA} = \underline{a}$, $\overline{DB} = \underline{b}$, $\overline{DC} = \underline{c}$. A feltételezett azonosság azt jelenti, hogy $(\underline{a} - \underline{c})^2 + \underline{b}^2 = (\underline{a} - \underline{c})^2 + \underline{b}^2 = (\underline{b} - \underline{c})^2 + \underline{a}^2$. Az egyenlőség első része azt jelenti, hogy

$$\underline{a}^2 + \underline{b}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{c}^2 = \underline{a}^2 + \underline{c}^2 - 2\underline{a}\underline{c} + \underline{b}^2,$$

$$\underline{a}(\underline{c} - \underline{b}) = 0$$

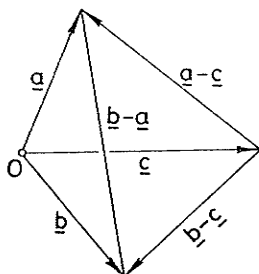
azaz $AD \perp BC$. Gondolatmenetünk megfordításával adódik, hogy ha $AD \perp BC$, akkor $AB^2 + CB^2 = AC^2 + BD^2$. Hasonlóan bizonyítható a feladat még hátralevő része is.



68.a.

68. I. megoldás: Megmutatjuk, hogy ha az átlók merőlegesek, akkor a szemközti oldalak négyzetösszege szükségképpen egyenlő, és ha a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő, akkor az átlók merőlegesek. Az ábra jelöléseit használva a szemközti oldalak négyzetösszege: $\underline{a}^2 + \underline{c}^2$, ill. $\underline{b}^2 + \underline{d}^2$; az átlóvektorok $\underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{b} + \underline{c}$. Az átlóvektorok merőlegessége azt jelenti, hogy

$(\underline{a} + \underline{b})(\underline{b} + \underline{c}) = 0$, azaz $\underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{c} + \underline{b}\underline{b} + \underline{b}\underline{c} = 0$. Mivel $\underline{d} = -(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$, ezért $\underline{b}^2 + \underline{d}^2 = \underline{b}^2 + \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 2\underline{a}\underline{b} + 2\underline{a}\underline{c} + 2\underline{b}\underline{c} = \underline{a}^2 + 2(\underline{a}\underline{b} + \underline{b}\underline{c} + \underline{a}\underline{c} + \underline{b}^2) + \underline{c}^2 = \underline{a}^2 + \underline{c}^2$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy a szemközti oldalak négyzetösszege akkor és csakis akkor egyenlő egymással, ha az átlók merőlegesek.



68.b.

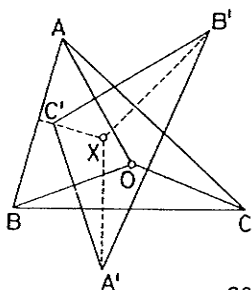
II. megoldás: A feltétel szerint $(\underline{b} - \underline{a})\underline{c} = 0$. A csuklós négyszög egy új helyzetében legyenek az O pontból induló élvektorok $\underline{a}_1$, $\underline{b}_1$, $\underline{c}_1$. Mivel a négyszög- oldalak hossza változatlan, $\underline{a}^2 = \underline{a}_1^2$, $\underline{b}^2 = \underline{b}_1^2$, $(\underline{a} - \underline{c})^2 = (\underline{a}_1 - \underline{c}_1)^2$ és $(\underline{b} - \underline{c})^2 = (\underline{b}_1 - \underline{c}_1)^2$,

ez utóbbi kettő részletesen:

$$\underline{a}^2 + \underline{c}^2 - 2\underline{ac} = \underline{a}_1^2 + \underline{c}_1^2 - 2\underline{a}_1\underline{c}_1,$$

$$\underline{b}^2 + \underline{c}^2 - 2\underline{bc} = \underline{b}_1^2 + \underline{c}_1^2 - 2\underline{b}_1\underline{c}_1.$$

E két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből adódik, hogy $(\underline{b} - \underline{a})\underline{c} = (\underline{b}_1 - \underline{a}_1)\underline{c}_1 = 0$, tehát az átlók az új helyzetben is merőlegeseek.



69.

69. Az A, B, C csúcsokból induló merőlegesek találkoznak az origóul választott O pontban, az A'-ből és B'-ből indulók pedig az X pontban. Elegendő azt igazolnunk, hogy XC' merőleges AB-re. A szóban forgó pontok helyvektorait jelöljük a megfelelő kisbetűk. A feltételezett merőlegességek miatt

$$\underline{a}(\underline{b}' - \underline{c}') = 0, \underline{b}(\underline{c}' - \underline{a}') = 0, \underline{c}(\underline{a}' - \underline{b}') = 0,$$

$$(\underline{a}' - \underline{x})(\underline{b} - \underline{c}) = 0, (\underline{b}' - \underline{x})(\underline{c} - \underline{a}) = 0.$$

A beszorzások után ezek ilyen alakban írhatók:

$$\begin{aligned} \underline{ab}' &= \underline{ac}', \underline{bc}' = \underline{ba}', \underline{ca}' = \underline{cb}', \underline{a}'\underline{b} - \underline{a}'\underline{c} = \\ &= \underline{x}(\underline{b} - \underline{c}), \underline{b}'\underline{c} - \underline{b}'\underline{a} = \underline{x}(\underline{c} - \underline{a}). \end{aligned}$$

Bizonyítandó: $(\underline{c}' - \underline{x})(\underline{b} - \underline{a}) = 0$, azaz $\underline{c}'\underline{b} - \underline{c}'\underline{a} = \underline{x}(\underline{b} - \underline{a})$.

Adjuk össze az utolsó két feltételi egyenletet, majd használjuk fel bennük az első három egyenlet által nyújtott helyettesítési lehetőségeket, így éppen a bizonyítandóhoz jutunk.

70. 7, 400, 29, 38.

71. a) tompaszög; b) hegyesszög; c) derékszög; d) hegyesszög.

72. $|\underline{a}| = 48$, $|\underline{b}| = 3$, $|\underline{c}| = 4$, $|\underline{d}| = \sqrt{197}$, $|\underline{e}| = 25$,
 $|\underline{f}| = \sqrt{2}$.

73. Mivel $\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$, és $|\underline{a}| = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2} = 13$,

$$\underline{a}^0 = (\frac{4}{13}, -\frac{12}{13}, \frac{3}{13});$$

$$\underline{b}^0 = (0, 0, -1), \underline{c}^0 = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}), \underline{d}^0 = (-\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13});$$

$$\underline{e}^0 = (\frac{12}{13}, \frac{5}{13}), \underline{f}^0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

74. $\underline{v}_1^0(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$, $\underline{v}_2^0(0, 0, -1)$, $\underline{v}_3^0(-\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$,

$$\underline{v}_4^0(\frac{9}{\sqrt{346}}, \frac{16}{\sqrt{346}}, -\frac{3}{\sqrt{346}}).$$

75. a) 90° ; b) $57,49^\circ$; c) 60° ; d) $107,29^\circ$; e) $134,24^\circ$.

76. $\underline{a}\underline{b} = 36 - 24 + z = 0$, $z = -12$.

$$77. \cos(\underline{v}, \underline{k}) = \frac{\underline{v} \cdot \underline{k}}{|\underline{v}| |\underline{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$(\underline{v}, \underline{k}) = 45^\circ.$$

78. A szögek koszinuszai a $\underline{v}^0$ koordinátái, mivel $\underline{v}^0 =$
 $= (-\frac{3}{\sqrt{73}}, \frac{8}{\sqrt{73}}) \cos \alpha_x = \frac{-3}{\sqrt{73}}$, $\alpha_x = 110,56^\circ$, $\cos \alpha_y = \frac{8}{\sqrt{73}}$,

$$\alpha_y = 20,56^\circ.$$

79. A kérdéses szögek koszinuszai a vektor irányába mutató egységvektor koordinátái (iránykoszinuszok). $|\underline{v}| = 9$, ezért az irányszögek koszinuszai:

$$\cos \alpha_x = \frac{4}{9}, \quad \alpha_x = 63,64^\circ,$$

$$\cos \alpha_y = -\frac{4}{9}, \quad \alpha_y = 96,38^\circ,$$

$$\cos \alpha_z = \frac{8}{9}, \quad \alpha_z = 27,27^\circ.$$

80. a) α, β, γ szögeknek - az irányszögeknek - a koszinuszai az egységvektor koordinátái. $(\cos 45^\circ, \cos 60^\circ, \cos 120^\circ) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, mivel

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 1,$$

tehát a vektor létezik.

b) nem létezik;

c) létezik.

84. Legyen a keresett szög α .

Feltehetjük, hogy a vektor egységvektor, hiszen a tengelyekkel bezárt szög független a vektor hosszától. Mivel az egységvektor koordinátái a tengelyekkel bezárt szögek koszinuszai, a koordináták $(\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos \alpha) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha)$ és $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \alpha = 1$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$.

82. Mivel az iránykoszinuszok (az egységvektor koordinátái) négyzetösszege 1, azaz $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, ezért $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \beta + 1 - \cos^2 \gamma = 2$.

83. Vegyük észre, hogy mindhárom vektor hossza egyenlő $(|n^2 + n + 1|)$, és bármely két vektor merőleges egymásra.

$$84. |\underline{v}_1| = a^2 - ab + b^2, \quad |\underline{v}_2| = a^2 + 2b^2, \quad |\underline{v}_3| = a^2 + 2, \\ |\underline{v}_4| = 2(a^2 - a + b^2) + 4.$$

85. A négyszög paralelogramma, mivel az AC és a BD szakaszok felezési pontja egyaránt a $(4, 2, -1)$ pont; rombusz, mivel két szomszédos oldala $AB = AD = \sqrt{26}$ (ugyanaz az átlók merőlegességével is belátható).

86. $\underline{v}$ koordinátái $\underline{v}(x, y, 0)$, mivel hossza 5, $x^2 + y^2 = 25$, és merőleges $\underline{n}$ -ra $-4x + 3y = 0$. Az x -re és y -ra adódott egyenletrendszer megoldva kapjuk, hogy $x = \pm 3$, $y = \pm 4$, tehát a két lehetséges megoldás $\underline{v}_1(3, 4, 0)$, $\underline{v}_2(-3, -4, 0)$.

87. Legyen a keresett pont $C(0, 0, z)$; a $\vec{CA}(1, 0, -z)$ és $\vec{CB}(0, 1, -z)$ vektorok szöge 30° -os, ezért

$$\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} = \frac{z^2}{1 + z^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ebből $z = \pm 2,54$, tehát $C_1(0; 0; 2,54)$, $C_2(0; 0; -2,54)$.

88. Legyenek a keresett $\underline{v}$ koordinátái $\underline{v}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. $\underline{v}$ és $\underline{e}$ szögének koszinusza:

$$\cos(\underline{v}, \underline{e}) = \frac{\underline{e} \cdot \underline{v}}{|\underline{e}| |\underline{v}|} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad \cos\varphi + \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hogy ezt a trigonometrikus feladatot megoldjuk, szorozzuk meg mindkét oldalt $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -vel:

$$\begin{aligned} \cos\varphi \cos 45^\circ + \sin\varphi \sin 45^\circ &= \cos(\varphi - 45^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} = 0,6124 \end{aligned}$$

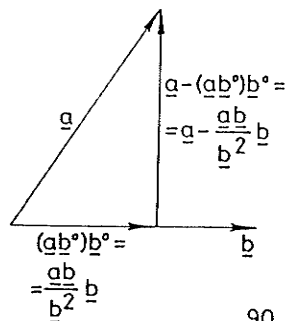
$$\varphi_1 = 97,24^\circ$$

$$\varphi_2 = -7,24^\circ$$

és így a keresett vektorok $\underline{v}_1(-0,126; 0,992; 0)$

$$\underline{v}_2(0,992; -0,126; 0).$$

$$89. \text{ a) } 49 + \sqrt{1625} = 89,34 \quad \text{ b) } 72,3^\circ$$



90.

90. Mivel $|\underline{b}| = 3$, $\underline{b}^o = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\underline{a}\underline{b}^o = 9$, ezért a $\underline{b}$ -ral párhuzamos összetevő $(\underline{a}\underline{b}^o)\underline{b}^o = (6, -6, 3)$, a $\underline{b}$ -ra merőleges összetevő pedig $\underline{a} - (\underline{a}\underline{b}^o)\underline{b}^o = (-3, 0, 6)$. (Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a két összetevő valóban merőleges egymásra.)

Gyakorlatilag azonban egyszerűbb, ha megjegyezzük, hogy a $\underline{b}$ -
ral párhuzamos összetevő

$$\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{b} \cdot \underline{b}} \underline{b} \text{ és a rá merőleges } \underline{a} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{b} \cdot \underline{b}} \underline{b},$$

és ezzel számolva rövidebben adódnak a vektorok: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 27$,
 $\underline{b} \cdot \underline{b} = 9$, $\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{b} \cdot \underline{b}} = 3$, $3\underline{b} = (6, -6, 3)$ és $\underline{a} - 3\underline{b} = (-3, 0, 6)$.

91. A $\underline{v}$ -ra párhuzamos összetevő: $(\frac{395}{441}, \frac{316}{441}, -\frac{1580}{441})$,
a rá merőleges összetevő: $(\frac{928}{441}, \frac{2330}{441}, \frac{698}{441})$.

$$92. \left| -\frac{24}{31} \right|.$$

93. Az $|\underline{a}| \underline{b}$ és $|\underline{b}| \underline{a}$ vektorok egyenlő hosszúak ezért
összegük a paralelogramma szabály miatt (rombusz!) felezi
szögüket, tehát $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szögét is. Mivel $|\underline{a}| = 9$, $|\underline{b}| = 24$,
 $|\underline{a}| \underline{b} = (-45, 36, 180)$, $|\underline{b}| \underline{a} = (-24, 84, 168)$ és így a szögfelező
vektor: $|\underline{a}| \underline{b} + |\underline{b}| \underline{a} = (-69, 120, 348)$ vagy megfelel bármely ez-
zel párhuzamos vektor is, pl.: $(-11, 20, 58)$.

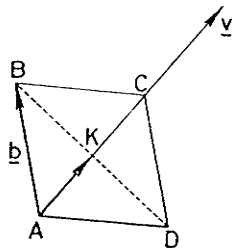
Megjegyzés: $\underline{a}^\circ + \underline{b}^\circ$ is szögfelező vektor.

$$94. z = 10, D(-1, 12, 7).$$

95. Mivel $\vec{AB} = (-1, 2, 2)$ és $\underline{v}$ erre merőleges, $\underline{v} \cdot \vec{AB} =$
 $= -1 + 4 + 4 = 7$, $z = 4$ és így $\underline{v} = (4, -2, 4)$. $|\vec{AB}| = 3$, $|\underline{v}| = 6$,
ezért $\underline{v}^\circ = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ennél fogva a $\underline{v}$ -ral párhuzamos oldal-
vektorok $3\underline{v}^\circ$ -ral egyenlők, koordinátáik $(2, -1, 2)$ s a másik
két négyzetcsúcs $C(6, 5, 1)$, $D(7, 3, -1)$.

A négyzet oldalvektora azonban $-3\underline{v}^\circ(-2, 1, -2)$ is lehet,
ezért a $C_1(2, 7, -3)$, $D_1(3, 5, -5)$ csúcsok is kielégítik a fela-
dat feltételeit.

96. A rombusz oldalhossza: $|\underline{a}| = 9$; mivel $|\underline{b}| = 3$, a
másik oldalvektor $3\underline{b} = (6, -3, 6)$, a negyedik csúcs helyvek-
tora $\underline{a} + 3\underline{b} = (10, 4, 2)$. A rombusz csúcsai tehát $(0, 0, 0)$,
 $(4, 7, -4)$, $(10, 4, 2)$, $(6, -3, 6)$.



97.

97. Az A-ból a rombusz K középpontjába mutató vektor $\underline{b}$ -nak $\underline{v}$ -ral párhuzamos összetevője, azaz $\frac{bv}{v^2} \underline{v}$. Mivel $bv = 36$, $v^2 = 144$, $\frac{bv}{v^2} = \frac{1}{4}$, $\frac{bv}{v^2} \underline{v} = (2, -1, 2)$.

Ennélfogva B koordinátái $(2, 3, 7)$, a K középponté $(4, -1, 3)$, B-nek K-ra vonatkozó tükörképe $D(6, -5, -1)$ és mivel $\vec{AC} = 2\vec{AK} =$

$= (4, -2, 4)$, C koordinátái $(6, -2, 5)$.

98. Használjuk fel a szorzás disztributív törvényét és azt a tényt, hogy kollineáris vektorok vektoriális szorzata $\underline{0}$.

$$99. \sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{24} = 0,98.$$

100. Valamennyi párhuzamos egy az $\underline{n}$ -ra merőleges síkkal.

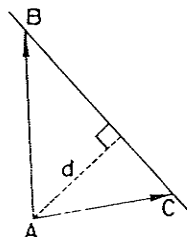
101. A megadott két egyenlőség különbséget képezve rendezés után kapjuk, hogy $(\underline{a} - \underline{d}) \times (\underline{b} - \underline{c}) = \underline{0}$, ami éppen azt jelenti, hogy $\underline{a} - \underline{d}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ kollineárisak.

102. A három pont akkor és csak akkor kollineáris, ha $\underline{a} - \underline{c}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ kollineáris vektorok, azaz $(\underline{a} - \underline{c}) \times (\underline{b} - \underline{c}) = \underline{0}$, ami kifejtve éppen a bizonyítandót adja.

103. $\underline{a} - \underline{c}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ a sík két vektora, a normálvektor ezek vektoriális szorzatával párhuzamos. $(\underline{a} - \underline{c}) \times (\underline{b} - \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} - \underline{c} \times \underline{b} - \underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}$.

104. Az első egyenlőségéből $\underline{a} \times \underline{b} - \underline{b} \times \underline{c} = \underline{0}$, $(\underline{a} + \underline{c}) \times \underline{b} = \underline{0}$ adódik, ezért $\underline{a} + \underline{c}$ kollineáris $\underline{b}$ -vel, azaz $\underline{a} + \underline{c} = \lambda \underline{b}$. $\underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}$ -ből $\lambda \underline{b} \times \underline{c} = \lambda \underline{c} \times \underline{a}$ és $(\underline{a} + \underline{c}) \times \underline{c} = \lambda \underline{c} \times \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{c} = \lambda \underline{c} \times \underline{a}$ adódik, amiből $\lambda = -1$, tehát $\underline{a} + \underline{c} = -\underline{b}$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$.

Megfordítva: ha $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$, ezt az egyenletet $\underline{b}$ -ral majd $\underline{c}$ -ral vektoriálisan szorozva kapjuk, hogy $\underline{a} \times \underline{b} + \underline{c} \times \underline{b} = \underline{0}$ és $\underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c} = \underline{0}$, ami éppen azt jelenti, hogy $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}$.



105.

105. Az A pont BC egyenesből mért távolsága az ABC háromszög A-hoz tartozó magasságának a hossza, ami ABC kétszeres területének és a BC oldalnak a hányadosa. Mivel $2t_{ABC} = |(\underline{b} - \underline{a}) \times (\underline{c} - \underline{a})| = |\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}|$ és $BC = |\underline{b} - \underline{c}|$,

$$d = \frac{|\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}|}{|\underline{b} - \underline{c}|}.$$

106. a) A paralelogramma területe $|\underline{a} \times \underline{b}|$. Mivel $\underline{a} \times \underline{b} = (3, 38, -13)$, $t = |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{3^2 + 38^2 + (-13)^2} = \sqrt{1622} = 40,27$.

b) $\sqrt{972} = 31,18$;

c) 19.

107. a) $\frac{1}{2} \sqrt{1880} = 21,68$.

b) Mivel $t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ és $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -4, 4)$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (36, -18, -9)$, $t = \frac{1}{2} \sqrt{36^2 + (-18)^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1701} = 20,62$.

c) 7,5.

d) 0.

108. $t = \frac{1}{2} |\underline{a} \times \underline{b}|$. Mivel $\underline{a} \times \underline{b} = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1)$, $t = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

109. A magasság a kétszeres terület és a BC oldal hányadosa: 5.

110. $\underline{x}$ párhuzamos az $\underline{a} \times \underline{b}(-7, -5, -1)$ vektorral, tehát

$(7\lambda, 5\lambda, \lambda)$ alakú, ezért $\underline{c}x = 7\lambda + 10\lambda - 7\lambda = 10$, $\lambda = 1$, ennélfogva $\underline{c} = (7, 5, 1)$.

141. Mivel $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges $\underline{a}$ -ra is és $\underline{b}$ -ra is és $\underline{a} \times \underline{b} = (-7, -5, 8)$ $\underline{c} = 2\underline{a} \times \underline{b} = (-14, -10, 16)$.

$$142. \pm \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a}|}.$$

143. Ha a két csúcs helyvektorai $\underline{a}(1, 4, 8)$, $\underline{b}(8, -4, 1)$ akkor a harmadik csúcs helyvektora $\underline{a} \times \underline{b}$ -ral kollineáris.

$\underline{a} \times \underline{b} = (36, 63, -36)$. $(\underline{a} \times \underline{b})^0 = (\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{4}{9})$. A kocka élhossza: $|\underline{a}| = 9$, ezért a harmadik élvektor $\pm 9(\underline{a} \times \underline{b})^0$, azaz $(4, 7, -4)$ vagy $(-4, -7, 4)$.

144. A magasság irányát az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 10, 3)$ vektor adja. Mivel ennek hossza $\sqrt{110}$, ezt a vektort $\frac{5}{\sqrt{110}}$ -zel kell

megszoroznunk, hogy az $\overrightarrow{AA'}$ -t kapjuk: $\overrightarrow{AA'} = (\frac{5}{\sqrt{110}}, \frac{50}{\sqrt{110}}, \frac{15}{\sqrt{110}})$

ugyanaz az A' három koordinátája is. Mivel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}$ és

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}$, a B, illetve C koordinátái: $B(\frac{5}{\sqrt{110}} + 4, \frac{50}{\sqrt{110}} -$

$-4, \frac{15}{\sqrt{110}} + 2)$, $C(\frac{5}{\sqrt{110}} + 3, \frac{50}{\sqrt{110}}, \frac{15}{\sqrt{110}} - 1)$. A feladat egy

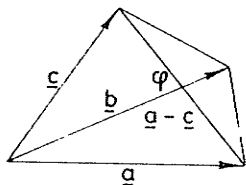
másik megoldását kapjuk, ha a fenti $\overrightarrow{AA'}$ helyett ellentettjét szerepeltetjük.

145. A harmadik él irányát az $\underline{a} \times \underline{b}(-2, 2, -1)$ vektor adja (a másik megoldását a $\underline{b} \times \underline{a}$), mivel ennek hossza 3, a harmadik élvektor $3\underline{a} \times \underline{b} = (-6, 6, -3)$, ebből a csúcsok az alapon: $(0, 0, 0)$, $(-1, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 2)$; a fedőlapon: $(-6, 6, -3)$, $(-7, 6, 1)$, $(-5, 7, -3)$, $(-6, 7, -1)$.

146. A harmadik élvektor irányát az $\underline{a} \times \underline{b}(-20, -24, 8)$ vektor adja, a testátlóvektor a három élvektor összege, tehát $\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma(\underline{a} \times \underline{b})$, ezt koordinátákra kiírva háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldása $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -\frac{1}{4}$, tehát a harmadik élvektor $-\frac{1}{4}(\underline{a} \times \underline{b}) = (5, 6, -2)$.

117. A síkok hajlásszöge normálvektoraik hajlásszögével egyenlő; a normálvektorokat két-két síkbeli vektor vektoriális szorzataként állítjuk elő. Az ABC sík normálvektora $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-12, -24, 8)$, az ACD síké $\vec{AC} \times \vec{AD} = (42, -70, -28)$. Mivel ezeknek csak az állása lényeges, a számolás egyszerűsítése céljából a velük párhuzamos $\vec{n}_1(-3, -6, 2)$, $\vec{n}_2(3, -5, -2)$ vektorokkal is dolgozhatunk. Ezek szögére:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{17}{7\sqrt{38}}, \quad \varphi = 66,80^\circ.$$



118.

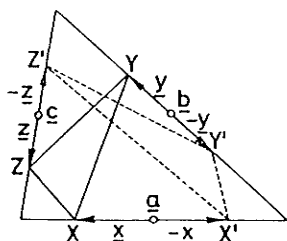
118. Az ábra jelöléseit használva a négyszög területe az $\vec{a}$ és $\vec{b}$, illetve $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok által kifeszített háromszögek területeinek az összege, azaz $2t = |\vec{a} \times \vec{b}| + |\vec{b} \times \vec{c}|$, mivel azonban $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{b} \times \vec{c}$ egyirányú vektorok, $2t = |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{b}| = |(\vec{a} - \vec{c}) \times \vec{b}|$, vagyis a két átlóvektor vektoriális szorzatának abszolút értéke.

Ha $|\vec{b}| = e$, $|\vec{a} - \vec{c}| = f$, akkor valóban megkapjuk a mondott területszámítási képletet.

119. A feladat megoldása azonos a 69. feladatével, csak merőlegesség helyett mindenütt párhuzamosságot, skaláris szorzás helyett pedig vektoriális szorzást kell mondanunk.

120. Legyenek az A csúcsból a többi csúcsba vezető vektorok $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. $t_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c}|$, $t_{ABC}^2 = \frac{1}{4} (\vec{b} \times \vec{c})^2$, hasonlóan $t_{ACD}^2 = \frac{1}{4} (\vec{c} \times \vec{d})^2$, $t_{ADB}^2 = \frac{1}{4} (\vec{d} \times \vec{b})^2$. Viszont $t_{BCD} = \frac{1}{2} |(\vec{b} - \vec{d}) \times (\vec{c} - \vec{d})| = \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{d} + \vec{d} \times \vec{b}|$. Az abszolút értéken belüli három vektor páronként merőleges egymásra, mert merőleges síkok normálvektorai, ezért bármely kettejük skaláris szorzata 0, így

$$t_{BCD}^2 = \frac{1}{4} [(b \times c)^2 + (c \times d)^2 + (d \times b)^2] = t_{ABC}^2 + t_{ACD}^2 + t_{ADB}^2.$$



121.

121. Az oldalfelező pontok helyvektorai legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ ezekből az X, Y, Z csúcsokba rendre az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$, az X', Y', Z' csúcsokba pedig a $-\underline{x}, -\underline{y}, -\underline{z}$ vektorok vezetnek, a háromszögcúscok helyvektorai így $\underline{a} + \underline{x}$, $\underline{b} + \underline{y}$, $\underline{c} + \underline{z}$, illetve $\underline{a} - \underline{x}$, $\underline{b} - \underline{y}$, $\underline{c} - \underline{z}$. XYZ területe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\vec{XY} \times \vec{XZ}|, X'Y'Z' \text{ területe: } \frac{1}{2} |\vec{X'Y'} \times \vec{X'Z'}| \quad \vec{XY} \times \vec{XZ} = \\ = (\underline{b} - \underline{a} + \underline{y} - \underline{x}) \times (\underline{c} - \underline{a} + \underline{z} - \underline{x}) = (\underline{b} - \underline{a}) \times (\underline{c} - \underline{a}) + \\ + (\underline{y} - \underline{x}) \times (\underline{z} - \underline{x}) + (\underline{b} - \underline{a}) \times \underline{z} + \underline{y} \times (\underline{c} - \underline{a}) + \underline{x} \times (\underline{b} - \underline{c}), \\ \vec{X'Y'} \times \vec{X'Z'} = (\underline{b} - \underline{a} + \underline{x} - \underline{y}) \times (\underline{c} - \underline{a} + \underline{x} - \underline{z}) = (\underline{b} - \underline{a}) \times \\ \times (\underline{c} - \underline{a}) + (\underline{y} - \underline{x}) \times (\underline{z} - \underline{x}) - (\underline{b} - \underline{a}) \times \underline{z} - \underline{y} \times (\underline{c} - \underline{a}) - \\ - \underline{x} \times (\underline{b} - \underline{c}). \text{ Az utolsó három tag mindkét összegben } \underline{0}, \text{ mert} \\ \text{párhuzamos vektorok szorzata, ezért a két terület valóban e-} \\ \text{gyenlő.} \end{aligned}$$

122. Mivel $\underline{abc} = (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ szöge 60° -os,
 $\underline{abc} = |\underline{a} \times \underline{b}| |\underline{c}| \cos 60^\circ = |\underline{a}| |\underline{b}| |\underline{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$

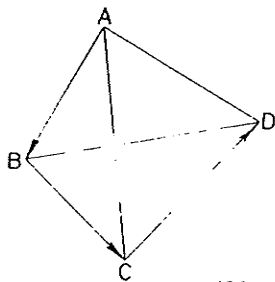
123. Mivel $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőlegesek és $\underline{a} \times \underline{b}$ párhuzamos $\underline{c}$ -ral,
 $\underline{abc} = (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c} = [|\underline{a}| |\underline{b}| \sin 90^\circ] |\underline{c}| \cdot \cos 0^\circ = |\underline{a}| |\underline{b}| |\underline{c}|.$

124. Mivel $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nem komplanárisak, $\underline{abc} \neq 0$. Vizsgáljuk meg az adott három vektor vegyesszorzatát: $(2\underline{a} + 3\underline{b}) \times (5\underline{b} - 4\underline{c}) (\underline{c} - \underline{a}) = [(2\underline{a} + 3\underline{b}) \times (5\underline{b} - 4\underline{c})] (\underline{c} - \underline{a}) = [10\underline{a} \times \underline{b} - 8\underline{a} \times \underline{c} - 12\underline{b} \times \underline{c}] (\underline{c} - \underline{a}) = 10 \underline{abc} + 12 \underline{bca} = 22 \underline{abc} \neq 0.$

125. A térfogat a három vektor vegyesszorzatával egyenlő: $V = 3.$

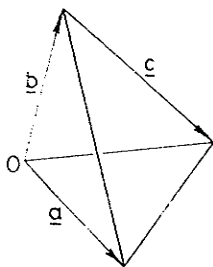
126. Az A pontot a többivel összekötő élek vegyesszorzatának a hatodrésze: a) 3; b) 6.

427. Legyen $D(0, y, 0)$. A tetraédert kifeszítő három élvektor $\vec{AB}(1, -1, 2)$, $\vec{AC}(0, -2, 4)$, $\vec{AD}(-2, y-1, 1)$. Ezek vegyeszorzata 30 vagy -30, ebből a D csúcs koordinátái $D_1(0, 8, 0)$ vagy $D_2(0, -7, 0)$.



128.

428. A tetraédert az $\vec{AB}$, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ vektorok feszítik ki. Ezek vegyeszorzatának hatodrésze a térfoga $V = 8$.



129.

429. a) Az ábra jelöléseit használva: a tetraéder térfogatának hatszorosa az O csúcsból induló élek vegyeszorzata, azaz $6V = \underline{ab}(b + c) = \underline{abb} + \underline{abc} = \underline{abc}$. Alkalmazzuk most a feladatban megjelölt térfogatszámítási módot, mivel az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ élvektorú kitérőélek távolsága $\frac{(\underline{a} \times \underline{c})b}{|\underline{a} \times \underline{c}|} =$

$$= \frac{\underline{abc}}{|\underline{a}| |\underline{c}| \sin(\underline{a}, \underline{c})},$$

$$6V = \frac{\underline{abc}}{|\underline{a}| |\underline{c}| \sin(\underline{a}, \underline{c})} |\underline{a}| |\underline{c}| \sin(\underline{a}, \underline{c}) = \underline{abc}, \text{ amit bizonyítanunk}$$

kellett.

b) A szakaszok mozgatása közben a térfogatszámításnál használt adatok nem változnak meg.

430. a) igen; b) nem; c) igen.

434. El kell dönteni, hogy az egyik pontot a másik hárommal összekötő vektorok komplanárisak-e, azaz vegyesszorzatuk 0-e vagy sem.

a) igen; b) nem.

432. A három vektor vegyesszorzata, azaz a koordinátáiból készített determináns értéke 0, ebből $z = \frac{17}{3}$.

433. A magasság a hatszoros térfogatnak és az ABC háromszög területének a hányadosa; $m = 11$.

434. Ha az eredeti paralelepipedont az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok feszítik ki, a lapátlóvektorok $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$. Ezek vegyesszorzata a 435.b) feladat szerint $2\underline{abc}$, tehát kétszerese az eredetinek.

435. Pl. b)-t a következő módon igazolhatjuk:

$$(\underline{a} + \underline{b})(\underline{b} + \underline{c})(\underline{c} + \underline{a}) = [(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{b} + \underline{c})](\underline{c} + \underline{a}) = \\ = [\underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}](\underline{c} + \underline{a}) = \underline{abc} + \underline{bca} = 2\underline{abc}.$$

436. A bal oldalt részletesen kiírva: $(\underline{a} \times \underline{b})^2 = |\underline{a} \times \underline{b}|^2 = a^2 b^2 \sin^2 \varphi$, $(\underline{ab})^2 = a^2 b^2 \cos^2 \varphi$, $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ miatt az állítás közvetlenül adódik.

Megjegyezzük, hogy azonosságunkat a 443. feladat a) azonosságából közvetlenül megkaphatjuk $\underline{c} = \underline{a}$, $\underline{d} = \underline{b}$ helyettesítéssel is.

437. Szorozzuk meg az $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{d}$ egyenlet mindkét oldalát rendre a $\underline{b} \times \underline{c}$, $\underline{c} \times \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorokkal, kapjuk, hogy $\alpha \underline{abc} = \underline{dbc}$, $\beta \underline{bca} = \underline{dca}$, $\gamma \underline{cab} = \underline{dab}$, ebből felcserélési tételt figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\alpha = \frac{\underline{dbc}}{\underline{abc}}, \quad \beta = \frac{\underline{adc}}{\underline{abc}}, \quad \gamma = \frac{\underline{abd}}{\underline{abc}}.$$

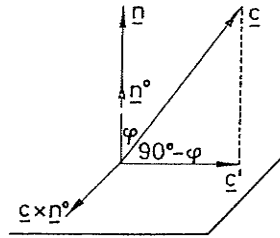
438. Ha a kocka csúcsainak koordinátái egészek, az élvektorok koordinátái is egészek és így a kocka térfogata - azaz három élvektorának a vegyesszorzata - is egész, hiszen γ egészelemű determináns értéke. A távolságképlet miatt az $\sqrt{3}$ -hossz négyzete is egész. Ebből már következik - mivel a térfogat az élhossz köbe - hogy az élhossz két egész szám na-

nyadosa, azaz racionális szám, amelynek a négyzete egész. De a racionális számok között csak az egészeknek egész a négyzete, ezért az élhossz egész szám.

139. A kifejtési tételt alkalmazva: $(-18, 19, -6)$.

140. A kifejtési tételt alkalmazva kapjuk, hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = \underline{a}^2 \underline{b} - (\underline{a}\underline{b})\underline{a}$, de $\underline{a}\underline{b} = 0$, ezért $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = \underline{a}^2 \underline{b}$.

141. A kifejtési tétel háromszori alkalmazásával az azonosság közvetlenül adódik.



142.

142. a) A $\underline{c} \times \underline{n}^0$ benne van a síkban és hossza $|\underline{c}| \sin \varphi = |\underline{c}| \cos(90^\circ - \varphi)$ éppen a $\underline{c}$ síkon levő vetületének a hosszával egyenlő. Ha viszont $\underline{n}^0$ -t $\underline{c} \times \underline{n}^0$ -ral vektoriálisan megszorozzuk, $\underline{c} \times \underline{n}^0$ 90°-kal elfordul, így éppen $\underline{c}'$ -t, a vetületi vektort kapjuk, tehát $\underline{c}' = \underline{n}^0 \times (\underline{c} \times \underline{n}^0)$.

Az egyszerűbb számolás céljára

alkalmazzuk erre a kifejtési tételt:

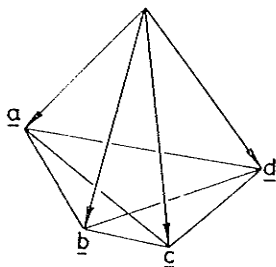
$$\underline{c}' = \underline{n}^0 \times (\underline{c} \times \underline{n}^0) = \underline{c} - (\underline{c}\underline{n}^0)\underline{n}^0 = \underline{c} - \frac{\underline{c}\underline{n}}{n^2} \underline{n}, \text{ amiből látszik,}$$

hogy $\underline{c}'$ a $\underline{c}$ $\underline{n}$ -ral párhuzamos összetevője.

Mivel $\underline{c}\underline{n} = -9$, $\underline{n}^2 = 9$, $\underline{c}' = \underline{c} + \underline{n} = (5, 2, -4)$.

143. a) Alkalmazzuk a felcserélési tételt az $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra, majd a kifejtési tételt, kapjuk, hogy $(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = [(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}] \underline{d} = [(\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\underline{c})\underline{a}] \underline{d} = (\underline{a}\underline{c})(\underline{b}\underline{d}) - (\underline{b}\underline{c})(\underline{a}\underline{d})$.

b) Legyenek a gúla egy csúcsból kiinduló élvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$; az oldallapok normálvektorai $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{b} \times \underline{c}$, $\underline{c} \times \underline{d}$, $\underline{d} \times \underline{a}$, az átlósíkoké $\underline{a} \times \underline{c}$ és $\underline{b} \times \underline{d}$. A síkok merőlegességére normálvektoraik merőlegességével egyenértékű. Azt kell tehát



143.

bizonyítani, hogy $(\underline{a} \times \underline{c})(\underline{b} \times \underline{d}) = 0$. A feltétel szerint:

$(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = 0$ és $(\underline{b} \times \underline{c})(\underline{a} \times \underline{d}) = 0$. Végezzük el itt az a) alatti

átalakításokat:

$$(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{ac})(\underline{bd}) - (\underline{bc})(\underline{ad}) = 0$$

$$(\underline{b} \times \underline{c})(\underline{a} \times \underline{d}) = (\underline{ba})(\underline{cd}) - (\underline{ca})(\underline{bd}) = 0.$$

E két egyenlőség összege éppen a bizonyítandót adja.

144. a) A síkok metszésvonala merőleges mindkét sík normálvektorára, tehát $\underline{a} \times \underline{b}$ -ra és $\underline{c} \times \underline{d}$ -ra is, ezért párhuzamos a normálvektorok vektoriális szorzatával.

b) Alkalmazzuk a kifejtési tételt úgy, hogy először az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c} \times \underline{d}$ vektorokra, majd az $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra.

c) A b)-nél kapott eredmény átrendezésével adódik az állítás bizonyítása.

145. Tegyük fel, hogy a paralelogrammát az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok feszítik ki, ezek vetületei legyenek $\underline{a}'$ és $\underline{b}'$; $t = |\underline{a} \times \underline{b}|$ és $t' = |\underline{a}' \times \underline{b}'|$ a vetületet tartalmazó sík normálvektora legyen az $\underline{n}$ egységvektor. A 142.a) feladat eredménye szerint $\underline{a}' = \underline{a} - (\underline{an})\underline{n}$, $\underline{b}' = \underline{b} - (\underline{bn})\underline{n}$, ebből $\underline{a}' \times \underline{b}' = \underline{a} \times \underline{b} - \underline{n} \times [(\underline{an})\underline{b} - (\underline{bn})\underline{a}]$. Szorozzuk meg skalárisan $\underline{n}$ -ral ennek az utóbbi egyenletnek mind a két oldalát $\underline{n}$ -ral, (a jobb oldal második tagja 0 lesz, mert merőleges $\underline{n}$ -ra):

$$(\underline{a}' \times \underline{b}')\underline{n} = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{n}, \text{ s vegyük figyelembe, hogy } \underline{a}' \times \underline{b}' \text{ párhuzamos } \underline{n}\text{-ral, ebből } |\underline{a}' \times \underline{b}'| = |\underline{a} \times \underline{b}| \cos \alpha, \text{ azaz } t' = t \cos \alpha.$$

$$146. -4x + 2y = -24.$$

147. Az egyenesek hajlásszöge normálvektoraik hajlásszögével egyenlő.

$$\begin{aligned} & \text{a) } 45^\circ; \text{ b) } 90^\circ; \text{ c) } 0 \text{ (párhuzamosok); d) } \cos \varphi = \\ & = \frac{11}{\sqrt{13} \sqrt{29}}, \quad \varphi = 55,49^\circ \end{aligned}$$

148. a) igen; b) nem; c) igen.

149. a) Az egyenes normálegyenletébe helyettesítve P koordinátáit, megkapjuk P-nek az egyenestől mért előjeles távolságát. A normálegyenletben szereplő normálvektor egységvektor. Az egyenes normálegyenlete:

$$\frac{3x - 4y - 5}{5} = 0, \text{ ezért a távolság: } \left| \frac{3(-4) - 4 \cdot 7 - 5}{5} \right| = 9.$$

$$b) \frac{137}{13}; \quad c) \frac{12}{\sqrt{58}}.$$

150. a) 2,5; b) 3,5.

154. Az egyenes normálegyenlete $\frac{45x}{17} - \frac{8y}{17} - 2 = 0$, ezért az origótól mért távolsága 2.

152. Az egyenesek normálegyenleteiből kiolvasható, hogy az origónak ugyanazon az oldalán helyezkednek el és az origótól mért távolságaik 1 és 2, tehát a két egyenes távolsága 1.

153. Az egyenes normálegyenlete $\frac{45x}{17} - \frac{8y}{17} - 2 = 0$, tehát az origótól két egységnyi távolságra vannak. A keresett egyenesek origótól mért távolsága ezért 8, illetve -4 egység, ezért egyenleteik: $\frac{45x}{17} - \frac{8y}{17} - 8 = 0$, $\frac{45x}{17} - \frac{8y}{17} + 4 = 0$.

$$154. a) 4x + 1 = 0, 8y + 13 = 0;$$

$$b) 4x - 4y + 3 = 0, 2x + 2y - 7 = 0;$$

$$c) 14x - 8y - 3 = 0, 64x + 112y - 23 = 0.$$

$$155. a) x = -1 - 4t, y = 3 + 2t, z = 7 + 6t;$$

$$b) x = t, y = -1 + 7t, z = 2 - 9t;$$

$$c) \frac{x-9}{6} = \frac{z+3}{2}, y = 8;$$

$$d) x = -11 + 3t, y = 9 + 2t, z = 1 - t \text{ (a } \underline{v}_1(3, 2, -1)$$

is megfelel irányvektornak).

156. Az egyenes irányvektorának x koordinátája 0.

157. Mindkettőn rajta van.

158. a) $x = 3, y = -4 + t, z = 5;$

b) $x = t, y = t, z = t$, vagy: $x = y = z;$

c) $x = t, y = 0, z = 0.$

159. Az egyenes irányvektora $\underline{v}(a,b,0)$ alakú. Az egyenletrendszer: $x = -3 + at, y = 7 + bt, z = 5.$

160. a) Az egyenes irányvektora a két pont összekötővektora, tehát helyvektoraik különbsége: $\underline{v}(9,-6,-3)$, vagy minden vele kollineáris vektor, tehát pl. $\underline{v}_1(3,-2,-1)$. Az egyenletrendszer $x = -2 + 3t, y = 5 - 2t, z = 6 - t.$

b) $x = 5 - 40t, y = 4, z = 2 + t;$

c) $x = 9t, y = 44t, z = -t;$

d) $x = 3 + t, y = -4 - t, z = t.$

161. Az a) és b) alatti egyenesek azonosak, mivel irányvektorai kollineárisak, mindkettő tartalmazza az $(5,-7,2)$ pontot, mert az a) esetben a $t = 0$ paraméterértékhez tartozik, a b) esetben pedig az egyenletrendszerbe helyettesítve koordinátáit $-2 = -2 = -2$ adódik. Ugyanúgy: a d) alatti egyenes azonos az a) és b) alattival, a c) viszont különbözik tőlük.

162. $x = 4 + 5t, y = -7 - 44t, z = -2.$

163. A két pontot összekötő egyenes egyenletrendszere: $x = -6 + 3t, y = 6 - 2t, z = -5 + t.$ Az xy síkkal való metszéspontra $z = 0$, tehát $t = 5$, ezért a metszéspont koordinátái: $M_{xy}(9,-4,0)$. Hasonlóan: $M_{yz}(0,2,-3), M_{zx}(3,0,-2).$

164. Az adott egyenes $(7,-4,0)$ pontját C -re tükrözve a $(-45,46,2)$ pontot kapjuk, ezen átmegy a tükrözött egyenes és párhuzamos az eredeti egyenessel, ezért egyenletrendszere: $x = -45 - 8t, y = 46 + 6t, z = 2 + 9t.$

165. Az egyenesek irányvektorai komplanárisak.

166. Metszi; $t = -2$ esetében az egyenes $(0,0,-2)$ pontjához jutunk, ami rajta van a z tengelyen.

167. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+2}{7}.$

$$168. \frac{x-1}{-4} = \frac{y+8}{8} = \frac{z-2}{-2} \quad \text{és} \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-2}{-4}.$$

169. A szögfelező irányvektora pl. a szomszédos oldalak egységvektorainak az összege. $x = 1 + t$, $y = 2 - 3t$, $z = -7 - 8t$.

170. a) Párhuzamosak, mert irányvektoraik kollineárisak és az $(5, 0, 7)$ pont csak az egyik egyenesen van rajta.

b) Párhuzamosak nem lehetnek, mert irányvektoraik sem azok. Tegyük fel, hogy metszők és a metszésponthoz az egyik egyenesen a t_1 , a másikon a t_2 paraméterérték tartozik, ekkor teljesülnie kell a következő egyenletrendszernek:

$$2t_1 = -2 + 2t_2,$$

$$13 + 5t_1 = 2 - t_2,$$

$$-13 - 7t_1 = 4 + 3t_2.$$

Az első két egyenletből $t_1 = -2$, $t_2 = -4$, ezek kielégítik a harmadik egyenletet is, tehát a velük előállított $D(-4, 3, 4)$ pont mindkét egyenesen rajta van, az egyenesek metszők.

c) A b)-hez hasonló módszerrel nyerhetjük, hogy az egyenesek kitérők. Más módszer: az egyenesek $\underline{v}_1(1, 2, 4)$, $\underline{v}_2(2, -1, -2)$ és egy-egy pontjukat összekötő $\underline{r}(5, 4, 2)$ vektorok vegyesszorzata nem 0, tehát a két egyenes nem lehet egy síkban, kitérők.

d) Metszők, a metszéspont: $(2, 5, -1)$.

171. Az egyenesek irányvektorainak és az egy-egy pontjukat összekötő vektornak a vegyesszorzata 0, ebből $a = 3$.

172. Az egyenesek irányvektorai: $\underline{v}_1(1, -1, 2)$ és $\underline{v}_2(2, -3, -1)$ nem párhuzamosak, tehát egyenesek sem azok. Az egyenletrendszerből kivasható $(1, 4, 3)$ és $(-1, 7, 4)$ pontjaik összekötővektora $\underline{r}(-2, 3, 1)$. E három vektor vegyesszorzata 0, tehát egy síkúak, ennél fogva egyenesek is, és mivel nem párhuzamosak: metszők.

173. Metszők.

174. I. megoldás: Legyen az egyenes keresett pontja

$P(4 + 8t, -8t, 6 - 14t)$, a távolságképlet szerint $PD^2 = (-4 + 8t)^2 + (-8t + 4)^2 + (7 - 14t)^2 = 27^2 = 729$, ebből $t^2 - t - 2 = 0$ és $t_1 = 2$, $t_2 = -1$, tehát a keresett pontok: $P_1(20, -16, -22)$, $P_2(-4, 8, 20)$.

II. megoldás: az egyenes egység-irányvektora:

$\underline{v}(\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{7}{9})$. Az A helyvektorához $27\underline{v}^0$ -t, illetve $-27\underline{v}^0$ -t hozzáadva a keresett pontok helyvektorait kapjuk.

175. Az egyenesek hajlásszöge irányvektoraik hajlásszögével egyenlő:

$$a) 60^\circ; b) 45^\circ; c) 90^\circ; d) \cos \varphi = \frac{16}{\sqrt{485}}, \varphi = 43,40^\circ;$$

$$e) \cos \varphi = \frac{14}{\sqrt{550}}, \varphi = 53,35^\circ.$$

176. I. megoldás: Az egyenes irányvektora $\underline{v}(1, 4, 1)$, az M-ből ráállított merőleges talppontja legyen D, D koordinátái $(2 + t, 4 + 4t, 4 + t)$. Az $\overrightarrow{MD}$ koordinátái: $(-2 + t, 8 + 4t, -12 + t)$. $\underline{v} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$ a merőlegesség miatt ezért $1(-2 + t) + 4(8 + 4t) + 1(-12 + t) = 0$, ebből $t = -1$, és így D koordinátái: $D(1, 0, 3)$. A merőleges MD egyenes: $x = 1 - 3t$, $y = 4t$, $z = 3 - 13t$.

II. megoldás: Az adott egyenes egy pontja $P(2, 4, 4)$; a merőleges egyenes $\underline{w}$ irányvektora a $\overrightarrow{PM}$ $\underline{v}$ -ra merőleges összetevője, ha a másik összetevő $\underline{v}$ -ral párhuzamos, azaz

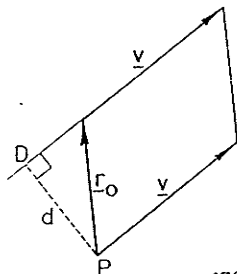
$$\underline{w} = \overrightarrow{PM} - \frac{\underline{v} \cdot \overrightarrow{PM}}{\underline{v}^2} \underline{v}.$$

Mivel $\overrightarrow{PM}(2, -8, 12)$, $\underline{w} = (3, -4, 13)$, az egyenletrendszer már felírható.

III. megoldás: Az M-et tartalmazó és az adott egyenesre merőleges sík egyenlete $x + 4y + z = 4$, ezt az adott egyenes a $D(1, 0, 3)$ pontban metszi, a keresett egyenes M és D összekötő egyenese.

177. $x = 2 + 4t$, $y = 1 + t$, $z = -3 - 7t$. (A megoldás módszere azonos a 176. feladatével.)

478. $x = 3 + 3t$, $y = 4 + 45t$, $z = -3 + 49t$.
(Lásd az előző feladatot!)



179.

479. I. megoldás: A P egyenestől mért d távolsága annak a paralelogrammának a magassága, amelynek alapja az egyenes $\underline{v}$ irányvektorával esik egybe, másik oldalvektora pedig $\underline{P}$ -t az egyenes egy P_0 pontjával összekötő vektor. Mivel a paralelogramma területe $|\underline{r}_0 \times \underline{v}| = |\underline{v}|d$, $d =$

$$= \frac{|\underline{r}_0 \times \underline{v}|}{|\underline{v}|}. \text{ Mivel } \underline{r}_0 = \overrightarrow{PP_0} = (0, -5, 6), \underline{v} = (6, 9, 2), |\underline{v}| = 11,$$

$$|\underline{r}_0 \times \underline{v}| = \sqrt{64^2 + 36^2 + 30^2} = \sqrt{6292}, d = \frac{\sqrt{6292}}{11} = \sqrt{52} = 7,21.$$

II. megoldás: Ha $\underline{r}_0$ -t $\underline{v}$ -ral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre bontjuk, d éppen a merőleges összetevő hossza, azaz

$$d = \left| \underline{r}_0 - \frac{\underline{r}_0 \cdot \underline{v}}{\underline{v} \cdot \underline{v}} \underline{v} \right|.$$

III. megoldás: P-n át $\underline{v}$ -ra merőleges sík egyenlete $6x + 9y + 2z = 36$, az egyenesnek ezzel a síkkal alkotott D döféspontja P-ből az egyenesre állított merőleges talppontja. D koordinátái $(\frac{40}{11}, \frac{16}{11}, \frac{6}{11})$, és így PD a távolságképlettel $d = 7,21$.

IV. megoldás: A D pontot abból a feltételből is meg lehet határozni, hogy a PD-nak a $\underline{v}$ -ra merőlegesnek kell lennie. (Lásd a 476. feladatot.)

480. a) A két párhuzamos távolsága az egyik egy pontjának a másik egyenestől mért távolságával egyenlő. (Lásd a 479. feladatot.) Ennek alapján a távolság 3.

$$b) \sqrt{\frac{44}{49}} = 0,86.$$

484. Kiszámítjuk P-ből az egyenesre állított merőleges talppontjának koordinátáit, majd erre tükrözzük P-t, a tü-

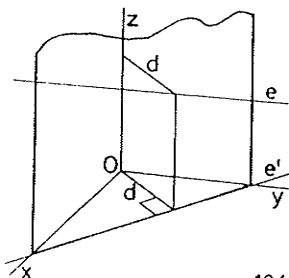
körkép: $P'(\frac{19}{11}, -\frac{12}{11}, -\frac{23}{11})$.

182. a) $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4}$, $z=0$, vagy: $4x-5y=23$,

$z=0$;

b) $x=2-3t$, $y=4+9t$, $z=0$, vagy: $3x+y=10$, $z=0$.

183. Válasszuk paraméternek pl. az y koordinátát, ekkor az $x-2y=15$ egyenletből $y=\frac{x-15}{2}$, a $3y-z=10$ egyenletből pedig $y=\frac{z+10}{3}$, így az egyenletrendszer:
 $x=15+2t$, $y=t$, $z=-10+3t$.



184.

184. Egy e egyenes z tengelytől mért távolsága egyenlő xy síkon levő e' vetületének az origótól mért távolságával. Az adott egyenes vetületének az egyenlete az xy koordinátarendszerben

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-3}, \text{ azaz}$$

$$3x+4y+10=0, \text{ ennek normálalakja:}$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2 = 0, \text{ tehát az origótól mért távolsága } 2.$$

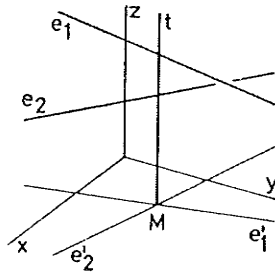
185. a) Az egyenesek távolsága egyenlő az egy-egy pontjukat összekötő vektornak a normáltranszverzális irányán levő vetületével. A normáltranszverzális irányát az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata szolgáltatja. Az irányvektorok: $\underline{v}_1(-1,3,4)$, $\underline{v}_2(1,5,1)$, $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2(-17,5,-8)$. Az egyenesek egy-egy pontja: $(8,2,0)$, $(-3,0,1)$, összekötővektoruk: $\underline{r}(11,2,-1)$, a távolság:

$$\left| \frac{\underline{r}(\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)}{|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2|} \right| = \left| \frac{-169}{\sqrt{378}} \right| = 8,69.$$

b) $\frac{2\sqrt{13}}{13} = 2,5$;

$$c) \frac{\sqrt{22}}{154} = 0,030;$$

d) 0, (metszők).



186.

186. Legyen az e_1 és e_2 egyenesek xy síkon levő vetülete e_1' és e_2' , ezek metszéspontjában z -vel húzott párhuzamos a keresett t transzverzális (186. ábra). Az adott egyenesek vetületeinek egyenletei az xy koordináta-rendszerben: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+6}{8}$,

$$\text{azaz } 2x - y = 12 \text{ és } x + 1 = \frac{y-18}{-2}, \text{ azaz } 2x + y = 16,$$

ezen metszéspontja: $M(7, 2)$, ezért a transzverzális egyenletrendszere $x = 7$, $y = 2$, $z = t$.

187. I. megoldás: Az e_1 paraméterét t_1 -gyel e_2 -ét t_2 -vel jelölve az egyenes tetszőleges szerinti két pontjának összekötő vektora $(5 - 6t_1 - 2t_2, -3t_1 - 3 - t_2, -8 + 4t_1 + t_2)$ alakú. Olyan t_1 és t_2 értékeket keresünk, amelyekre ez a vektor párhuzamos $\underline{c}$ -ral, azaz

$$5 - 6t_1 - 2t_2 = -11\lambda,$$

$$-3 - 3t_1 - t_2 = -11\lambda,$$

$$-8 + 4t_1 + t_2 = 2\lambda.$$

Ennek megoldása $t_1 = 2$, $t_2 = 2$, $\lambda = 1$. (Tulajdonképpen csak t_1 -re vagy t_2 -re van szükségünk.) Így a transzverzális pontja e_1 -en $(-7, -6, 9)$, ezért egyenletrendszere $x = -7 - 11t$, $y = -6 - 11t$, $z = 9 + 2t$.

II. megoldás: Megkeressük az e_1 -en átmenő $\underline{c}$ -ral párhuzamos síknak és e_2 -nek a dőléspontját, ezen megy át a transzverzális.

188. Az egyenesek irányvektorai: $\underline{v}_1(3, -2, 3)$, $\underline{v}_2(1, 2, -1)$, a normáltranszverzális mindkettőre merőleges, ezért a

$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2(-4, 6, 8)$ vektorral párhuzamos, helyette azonban a számolás egyszerűsítése céljából a $\underline{v}(-2, 3, 4)$ vektorral is számolhatunk. A normáltranszverzálissal való metszéspontok paramétereit az egyes egyeneseknél t_1 -gyel, illetve t_2 -vel jelölve kapjuk, hogy a két metszéspont összekötő vektora $\underline{v}$ -ral párhuzamos, azaz van olyan λ , hogy

$$-8 + 3t_1 - t_2 = -2\lambda,$$

$$12 - 2t_1 - 2t_2 = 3\lambda,$$

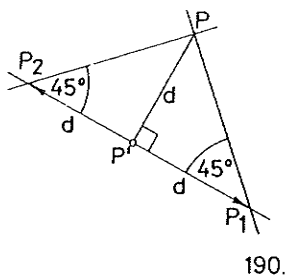
$$16 + 3t_1 + t_2 = 4\lambda;$$

az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $t_1 = t_2 = 0$, a metszéspontok tehát $M_1(-7, 4, 4)$, $M_2(1, -8, -12)$, a normáltranszverzális egyenletrendszere:

$$\frac{x+7}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{4},$$

hossza, azaz a két kitérő egyenes távolsága: $M_1M_2 = \sqrt{464}$. Megjegyezzük, hogy két kitérő egyenes távolsága a normáltranszverzális előállítás nélkül is megoldható. (Lásd a 185. feladatot!)

$$189. \quad x - 2 = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 2}{3}.$$



190. A megoldás alapgondolata az ábráról leolvasható. A P pontból az egyenesre állított merőleges P' talp-pontjának a koordinátáit a 176. feladat alapján határozhatjuk meg, $P'(2, 0, 1)$. A PP' a távolságképlettel 6-nak adódik. Az egyenes irány-egységvektora:

$$\underline{v}^0\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ ennélfogva}$$

$\overrightarrow{P'P_1} = 6\underline{v}^0 = (2, -4, 4)$, és így P_1 koordinátái: $P_1(4, -4, 5)$; $\overrightarrow{PP_1} = (2, 8, -2)$, tehát a PP_1 egyenes egyenletrendszere: $x = 6 + 2t$, $y = 4 + 8t$, $z = 3 - 2t$. Hasonlóan adódik a PP_2 egyenesé: $x = 6 + t$, $y = 4$, $z = 3 + t$.

194. I. megoldás: Az A pontra illeszkedő $\underline{d}$ -ra merőleges sík: $6x - 2y - 3z = -1$, ennek és az adott egyenesnek a közös pontja: $P(1, -1, 3)$; a keresett egyenes azonos az AP-vel: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$.

II. megoldás: Az A-t az adott egyenes $(1, -1, 3)$ pontjával összekötő vektor: $\underline{r}(2, -3, 6)$, az adott egyenes irányvektora $\underline{v}_1(3, 2, -5)$, az előállítandó egyenesé $\underline{v}_2(a, b, c)$. $\underline{v}_2$ merőleges $\underline{a}$ -ra, ezért $6a - 2b - 3c = 0$; a metszés miatt viszont

$$\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_1 \cdot \underline{r} = 0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix},$$

amiből $-3a - 28b - 13c = 0$. Mivel az a, b, c koordinátáknak csak az aránya lényeges, feltehetjük, hogy pl. $a = 2$. Akkor $b = -3$ és $c = 6$ és így a keresett egyenes:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

192. Az adott egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata az új egyenes irányvektora, ezért egyenletrendszer: $x = -1 + 3t$, $y = 2 - 9t$, $z = -4t$.

193. a) $-3x + 2y + 11z = -25$; b) $9x + y + 7z = -11$;

c) $x + z = 7$; d) $-2x + 9y + 9z = 0$; e) $z = -7$.

194. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

195. $y = 8$; $y = -8$.

196. Normálvektorának valamelyik koordinátája 0, mivel párhuzamos az egyik koordinátasíkkal.

197. A sík egyenlete: $ax + by = c$.

198. $2x + 3y = 0$.

199. A sík normálvektora $\underline{n}(-4, 5, 2)$, átmegy a $P(-4, 5, 2)$ ponton, tehát egyenlete: $-4x + 5y + 2z = 45$.

200. A sík normálvektora $\underline{a} \times \underline{b}(-1, -4, -7)$, egyenlete: $x + 4y + 7z = -16$.

201. $x - y - z = 0$.

202. Az $\vec{AB}(1,0,-3)$ és $\vec{AC}(-1,1,0)$ a sík két vektora, a sík normálvektora ezek vektoriális szorzata: $\vec{AB} \times \vec{AC} = (3,3,1)$, a sík egyenlete: $3x + 3y + z = 8$.

203. A sík két vektora: az origóból az egyenes egy pontjához mutató $(3,-7,0)$ vektor és az egyenes $\underline{v}(2,1,1)$ irányvektora. A sík normálvektora ezek vektoriális szorzata: $(-7,-3,17)$, ezért a sík egyenlete: $7x + 3y - 17z = 0$.

204. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.

205. A sík a koordinátatengelyeket rendre a $(6,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,3)$ pontokban metszi, a tetraéder origóból kiinduló éleinek hossza tehát: $6,4,3$ ezért térfogata: 12 .

206. Az a) és c) alattiak párhuzamosak.

207. a) $x - 4y + 3z = 0$; b) $9x + 6y - 4z = -50$.

208. A sík normálvektora $\vec{AB}(4,-12,-6)$, AB felezőpontja $F(-1,1,3)$, ezért a sík egyenlete: $2x - 6y - 3z = -17$.

209. A sík normálvektora az egyenes irányvektora: $\underline{v}(2,6,5)$, a sík egyenlete: $2x + 6y + 5z = 11$.

210. $2y - 3z + 7 = 0$.

211. A sík normálvektora az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata: $(1,-25,9)$, ezért egyenlete: $x - 25y + 9z = -63$.

212. Az xy síkot: $3x + 17y = 2, z = 0$; az yz síkot: $17y + 8z = 2, x = 0$; a zx síkot $3x + 8z = 2, y = 0$.

213. Az előállítandó sík normálvektora merőleges az adott sík $\underline{n}(1,-2,5)$ normálvektorára és az adott egyenes $\underline{v}(2,1,4)$ irányvektorára, tehát ezek vektoriális szorzata: $\underline{n} \times \underline{v} = (-13,6,5)$, a sík egyenlete: $-13x + 6y + 5z = 56$.

214. Az előállítandó síkban benne van az $\vec{AB}(2,2,3)$

vektor és az adott sík $\underline{n}_1(1, -2, 3)$ normálvektora, ezért normálvektora ezek vektoriális szorzata: $(12, -3, -6) \sim (4, -1, -2)$; a sík egyenlete $4x - y - 2z = 9$.

245. A sík normálvektora mindkét adott sík normálvektorára merőleges, tehát azok vektoriális szorzata, ezért az egyenlet: $7x - y - 5z = 0$.

$$246. \quad 6x - 20y - 11z + 1 = 0.$$

247. A sík normálvektora az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata, egyenlete: $9x + 11y + 5z - 16 = 0$.

$$248. \quad 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$

249. Az egyik egyenesen a $P(1, -1, 7)$ a másikon a $Q(-5, 2, -3)$ pontot választjuk ki, a PQ szakasz $F(-2; 0, 5; 2)$ felezőpontján megy át a sík, normálvektora az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata, egyenlete: $9x + 11y + 5z + 2,5 = 0$.

220. a) Két sík hajlásszöge normálvektoraik hajlásszögével egyenlő. Mivel a normálvektorok: $\underline{n}_1(1, -\sqrt{2}, 1)$, $\underline{n}_2(1, \sqrt{2}, -1)$,
 $\cos(\underline{n}_1, \underline{n}_2) = \frac{\underline{n}_1 \underline{n}_2}{|\underline{n}_1| |\underline{n}_2|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

A két vektor itt tompaszöget zár be, ezért a hegyesszögű hajlásszög koszinusza $\frac{1}{2}$, ezért a φ hajlásszög 60° ;

$$b) \quad 45^\circ;$$

$$c) \quad 90^\circ;$$

$$d) \quad \cos \varphi = \frac{2}{15}, \quad \varphi = 82,34^\circ;$$

$$e) \quad 90^\circ.$$

$$221. \quad a) \quad -\frac{10x}{27} + \frac{2y}{27} - \frac{25z}{27} - 2 = 0;$$

$$b) \quad \frac{3x}{26} - \frac{4y}{26} + \frac{z}{\sqrt{26}} = 0;$$

$$c) \quad \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0.$$

Az origótól mért távolságok rendre: $2, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

222. Előállítjuk a sík normálegyenletét úgy, hogy végigcsztjuk egyenletét normálvektora hosszával. Mivel $|\underline{n}| =$

$$= \sqrt{6^2 + 1^2 + 18^2} = 19, \text{ a normálegyenlet } \frac{6x}{19} - \frac{y}{19} + \frac{18z}{19} - 1 = 0.$$

A pont helyettesítési értéke az egyenlet baloldalába szolgáltatja az (előjeles) távolságot:

$$\frac{24}{19} + \frac{3}{19} + \frac{36}{19} - 1 = \frac{44}{19} = 2,32.$$

223. a) 3; b) $\frac{6}{\sqrt{41}}$; c) 0; d) 2; e) 3.

224. 4.

225. A pont koordinátahármasa $(0, b, 0)$ alakú, a sík normálegyenlete $\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

A pont siktól mért távolsága $\left| \frac{2b}{3} - \frac{2}{3} \right| = 4$, ebből $b_1 = 7$, $b_2 = -5$, tehát a két pont: $(0, 7, 0)$ és $(0, -5, 0)$.

226. A síkot úgy kaphatjuk meg, hogy az adott síkot a C pontból felére kicsinyítjük, tehát úgy is ehhez a síkhoz jutunk, ha a C és a sík tetszőleges pontja által meghatározott szakasz felezőpontján át az adott síkkal párhuzamos síkot fektetünk. A sík egy tetszőleges pontja: $P(3, 0, 0)$, PC felező pontja $(4, -4, 2)$, a sík egyenlete: $2x - 9y + 5z = 61,5$.

227. I. megoldás: Az adott síkok normálegyenletei:

$$\frac{3x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{z}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} = 0 \text{ és } \frac{3x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{z}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}} = 0.$$

Az origóból mért távolságaik különbsége ezért $\left| -\frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}} \right| =$

$= \frac{4}{\sqrt{14}}$, ez egyúttal a két sík távolsága is. A keresett sík a síkoktól ezért $\frac{2}{\sqrt{14}}$ távolságra van, ezért a normálegyenletében

szereplő állandó értéke $\frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$, ezért az egyenlete $3x + 2y - z + 1 = 0$.

II. megoldás: Válasszunk ki a síkokon egy-egy pontot; legyenek ezek $(0, 0, 3)$ és $(0, 0, -1)$; az ezeket összekötő szakasz felezőpontja $(0, 0, 1)$, ezen halad át az adottakkal párhuzamos sík, tehát egyenlete: $3x + 2y - z = -1$.

228. a) I. megoldás: Az első sík normálegyenlete:

$\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} - 4 = 0$. A második sík egy pontja: $P(6,0,0)$, ennek helyettesítési értéke az egyenlet baloldalán -2 , tehát a pont-sík távolság és ezzel együtt a két sík távolsága 2 .

II. megoldás: A második sík normálegyenlete:

$\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} - 2 = 0$. A normálegyenletekből tehát kiolvasható, hogy az origónak a síkokból mért előjeles távolságai: 4 és 2 , azonos előjelük miatt az origó azonos oldalán van, tehát a két sík távolsága 2 .

b) $3,5$.

229. Az adott sík normálegyenlete: $\frac{4x}{6} - \frac{4y}{6} - \frac{2z}{6} + \frac{1}{2} = 0$ alakú, a keresett síkoké pedig: $\frac{4x}{6} - \frac{4y}{6} - \frac{2z}{6} - p = 0$. Mivel az adott sík origótól mért távolsága: $\frac{1}{2}$, az előállítandó síkoké: $-\frac{1}{2} + 2$, illetve $-\frac{1}{2} - 2$, tehát $p_1 = \frac{3}{2}$, $p_2 = -\frac{5}{2}$, a síkok egyenletei: $4x - 4y - 2z - 9 = 0$, $4x - 4y - 2z + 15 = 0$.

230. Ha a síkok normálegyenleteit $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ szimbolikus alakokkal jelezzük, mivel a szögfelező síkokra az jellemző, hogy pontjaik mindkét síktól egyenlő távolságra vannak, ezért ha P rajta van valamelyik szögfelező síkon $|N_1(P)| = |N_2(P)|$, ami azt jelenti, hogy $N_1(P) = \pm N_2(P)$, tehát a szögfelező síkok pontjai az $N_1 + N_2 = 0$, illetve $N_1 - N_2 = 0$ egyenleteknek tesznek eleget. Mivel a két adott sík normálegyenlete $\frac{x}{\sqrt{14}} - \frac{3y}{\sqrt{14}} + \frac{2z}{\sqrt{14}} - \frac{5}{\sqrt{14}} = 0$ és $\frac{3x}{\sqrt{14}} - \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{z}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} = 0$, a szögfelező síkok: $4x - 5y + z - 2 = 0$ és $-2x - y + 3z - 8 = 0$.

231. Az s_1 és s_2 párhuzamos síkok, ezért ha s_1 egy tetszőleges P pontját tükrözzük s_2 egy tetszőleges Q pontjára, a P' tükrörkép rajta lesz a tükrözött s_1' síkon, és s_1' párhuzamos s_1 -gyel. Legyen $P(3,0,0)$, $Q(-7,0,0)$, a tükrözött pont: $P'(-17,0,0)$, és így s_1' egyenlete: $2x - 8y + 3z + 34 = 0$.

232. A feladatot megoldhatjuk például úgy, hogy az adott

sík három pontját (kettőt lehetőleg a metszésvonalon) tükrözzük. A tükrökép: $8x + 4y - z - 16 = 0$.

233. A metsző sík párhuzamos az AB és CD élekkel, normálvektora az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = (2, -1, 5)$, egyenlete: $2x - y + 5z = 3$.

234. a) I. megoldás: Az egyenes egyenletéből $y = -2x + 4$ és $z = 6x - 6$, ezt a sík egyenletébe helyettesítve $2x + 3(-2x + 4) + (6x - 6) - 4 = 0$, a metszéspont x koordinátája innen $x = 2$, ezért $y = -3$, $z = 6$, tehát a metszéspont $M(2, -3, 6)$.

II. megoldás: Ha az egyenletrendszer paraméteres alakban adott, vagy azt arra átírtuk: $x = 1 + t$, $y = -1 - 2t$, $z = 6t$, a koordinátákat a sík egyenletébe helyettesítve t -re a $2(1 + t) + 3(-1 - 2t) + 6t - 4 = 0$ egyenletet kapjuk, ebből $t = 1$, és így a dőféspont koordinátái $(2, -3, 6)$.

b) $(\frac{15}{11}, \frac{9}{11}, \frac{6}{11})$; c) $(5, 4, 16)$;

d) az egyenes párhuzamos a síkkal, nincs dőféspont;

e) az egyenes benne van a síkban.

235. Az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának a skaláris szorzata 0.

236. $m = -3$.

237. $a = 3$, $d = -23$.

238. A keresett pont z koordinátája 0, ezt a síkok egyenleteibe helyettesítve a $2x + y - 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$ egyenletrendszert kapjuk, ennek megoldása $x = 2$, $y = -1$, a pont: $(2, -1, 0)$.

239. a) I. megoldás: Keressünk a síkokon két közös pontot (egyszerűség kedvéért koordinátasíkban fekvő pontokat). Ha $x = 0$, z -re -4 és y -ra -8 adódik, tehát $M_1(0, -8, -4)$ a metszésvonal egy pontja: ha $z = 0$, a kapott pont $M_2(2, -1, 0)$. Az M_1M_2 metszésvonal irányvektora $\underline{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = (2, 7, 4)$, ezért a metszésvonal egyenletrendszere $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.

II. megoldás: A metszésvonal irányvektora a síkok normálvektorainak vektoriális szorzata, mert a metszésvonal mindkét normálvektorra merőleges. Mivel $\underline{n}_1(1, -2, 3)$ és $\underline{n}_2(3, 2, -5)$ vektoriális szorzata $(4, 14, 8) \sim (2, 7, 4)$. Ugyanúgy, mint az előző megoldásban, itt is kiszámítunk egy közös pontot, ennek és az irányvektornak a birtokában a metszésvonal egyenletrendszerét már felírhatjuk.

III. megoldás: Kiszöböljük ki a két egyenletből először az x -et, majd az y -t (az együtthatók egyenlővételeével, majd kivonással): $4y - 7z + 4 = 0$ és $2x - z - 4 = 0$, e két egyenletből pedig z -t kifejezve kapjuk, hogy $z = 2x - 4$ és

$z = \frac{4y + 4}{7}$, tehát $2x - 4 = \frac{4y + 4}{7} = z$, ezt még a szokásos alak-
ra hozhatjuk, ha az egyenletrendszert 4-gyel végigosztjuk:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{7} = \frac{z}{4}.$$

$$b) \ x - 3 = \frac{y - 2}{2} = z; \quad c) \ \frac{x}{-5} = \frac{y + 1}{12} = \frac{z - 1}{13},$$

$$d) \ \frac{x - 5}{-1} = \frac{y - 4}{7} = \frac{z}{3}.$$

240. A három egyenletből álló egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, a közös pont: $M(1, -2, 2)$.

241. I. megoldás: Normálvektoraik vegyesszorzata 0, ez azt jelenti, hogy komplanárisak, tehát a metszésvonalak mindegyike merőleges a normálvektorok síkjára, ezért párhuzamosak, vagy esetleg egybe is eshetnek. Ezt az utóbbit kizárhatjuk azzal, hogy kiszámítjuk két síknak egy közös pontját és megmutatjuk, hogy ez nincs rajta a harmadikon. Vegyük észre, hogy a síkok között nincs párhuzamos.

II. megoldás: Számolással meggyőződhetünk róla, hogy a három egyenletből álló egyenletrendszernek nincs megoldása, tehát a három síknak nincs közös pontja.

$$242. \ a) \ a \neq 7; \quad b) \ a = 7, \ b = 3; \quad c) \ a = 7, \ b \neq 3.$$

243. Egy egyenesre illeszkednek.

244. Ha a feltétel teljesül, akkor a három sík biztosan egy

egyenesre illeszkedik, mert az S_1 és S_2 bármely közös pontja rajta van S_3 -on is. Legyen ugyanis $M(a,b,c)$ S_1 és S_2 metszésvonalának egy pontja, ekkor ez kielégíti S_1 és S_2 egyenletét, tehát $S_1(a,b,c) = 0$ és $S_2(a,b,c) = 0$, tehát $S_3(a,b,c) = \alpha S_1(a,b,c) + \beta S_2(a,b,c) = 0$, tehát S_3 egyenletét is kielégíti.

Ha viszont az S_3 sík átmegy S_1 és S_2 metszésvonalán, legyen $P(d,e,f)$ S_3 -nak a metszésvonalon nem fekvő egy pontja és legyen $\alpha = S_2(d,e,f)$, $\beta = -S_1(d,e,f)$, α és β tehát nem 0-k. Az $\alpha S_1(x,y,z) + \beta S_2(x,y,z) = 0$ egyenlet az előzőek szerint S_1 és S_2 metszésvonalán átmenő sík egyenlete, de α és β választása miatt $\alpha S_1(d,e,f) + \beta S_2(d,e,f) = S_1(d,e,f)S_2(d,e,f) - S_1(d,e,f)S_2(d,e,f) = 0$, tehát tartalmazza P -t, ami azt jelenti, hogy csakis S_3 lehet, ezért $S_3(x,y,z) = \alpha S_1(x,y,z) + \beta S_2(x,y,z)$.

245. I. megoldás: Meghatározzuk az első két sík két közös pontját és megmutatjuk, hogy ezek rajta vannak a harmadik síkon is.

II. megoldás: Ha a síkok egyenletei rendre $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, akkor láthatjuk, hogy $S_3 = 2S_1 - 3S_2$, ami előző feladatunk alapján éppen azt jelenti, hogy egy egyenesre illeszkednek.

246. I. megoldás: Számítsuk ki a két sík metszésvonalán két pont koordinátáit, e két ponton és a P -n átmenő sík egyenletét kell felírunk.

II. megoldás: A 245. feladat II. megoldása szerint a keresett sík egyenlete $\alpha(x - y + 3z - 8) + \beta(2x + y - z + 2) = 0$ alakú, ahol α a $P(-2, 1, 3)$ koordinátáinak helyettesítési értéke a második, $-\beta$ pedig az első egyenletbe, tehát $\alpha = -4$, $\beta = 2$, tehát a sík egyenlete: $3y - 7z + 18 = 0$.

247. $y + z - 18 = 0$.

248. a) A sík $\underline{n}(1,9,4)$ normálvektorának és az egyenes $\underline{v}(4,1,9)$ irányvektorának a szöge pótiszöge a sík és egyenes φ hajlásszögének:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{|\underline{n}\underline{v}|}{|\underline{n}||\underline{v}|} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}, \quad 90^\circ - \varphi = 60^\circ, \\ \varphi = 30^\circ.$$

$$b) 0^\circ; c) 90^\circ; d) \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{5}{21},$$

$$\varphi = 13,78^\circ.$$

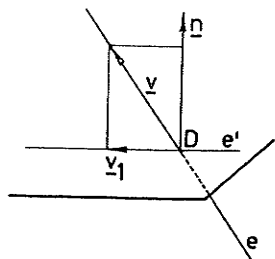
249. Az AB felező merőleges síkjának és az egyenesnek a dőléspontja a keresett pont: $P(-2,2,2)$.

250. A ponton át a síkra emelt merőleges irányvektora a sík $\underline{v}(2,-1,3)$ normálvektorával azonos, ezért egyenletrendszere $x = 5 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 3t$. Ennek a síkkal alkotott dőléspontja a vetületi pont: $P'(\frac{53}{7}, \frac{5}{7}, \frac{20}{7})$.

251. P-ből merőlegest állítunk a síkra, és ennek dőléspontjára tükrözzük P-t, a tükrökép: $(-5,1,0)$.

$$252. (1,-2,2).$$

$$253. (2,-3,-5).$$



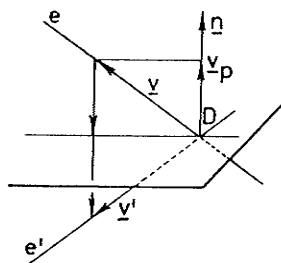
254.

254. Először kiszámítjuk az adott egyenes és sík dőléspontjának a koordinátáit: $D(1,2,-1)$. A vetületi egyenes irányvektora $\underline{v}_1$, az adott egyenes $\underline{v}$ irányvektorának $\underline{n}$ -re merőleges összetevője,

$$\underline{v}_1 = \underline{v} - \frac{\underline{n}\underline{v}}{\underline{n}\underline{n}} \underline{n} = (-1,-2,-1),$$

a vetület egyenletrendszere

$$\text{re tehát } x - 1 = \frac{y - 2}{2} = z + 1.$$



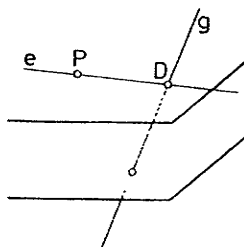
255.

255. Az egyenes és a sík dőlés-pontja: $D(6, -4, -2)$. Ha az egyenes irányvektora a $\underline{v}(7, -8, -5)$, a sík normálvektora $\underline{n}(1, 1, 1)$, az ábráról leolvasható, hogy a tükrözött egyenes $\underline{v}'$ irányvektorára $\underline{v}' = \underline{v} - 2\underline{v}_p$, ahol $\underline{v}_p$ a $\underline{v}$ $\underline{n}$ -ral párhuzamos összetevője, tehát

$$\underline{v}_p = \frac{\underline{n} \cdot \underline{v}}{\underline{n} \cdot \underline{n}} \underline{n} = (-2, -2, -2),$$

$\underline{v}' = (11, -4, -1)$, így a tükrökép egyenletrendszere:

$$\frac{x - 6}{11} = \frac{y + 4}{-4} = \frac{z + 2}{-1}.$$



256.

256. A keresett e egyenes benne van a P-n át az adott síkkal párhuzamosan fektetett síkon, ennek egyenlete $2x - y + 5z + 1 = 0$. Az adott g egyenes ezt a síkot a $D(1, -12, -3)$ pontban metszi. Az e egyenes irányvektora $\underline{PD} = (4, -17, -5)$ és így egyenletrendszere:

$$\frac{x + 3}{4} = \frac{y - 5}{-17} = \frac{z - 2}{-5}.$$

257. A keresett egyenes merőleges a sík $\underline{n}(2, 1, -8)$ normálvektorára és az adott egyenes $\underline{v}(4, 2, 1)$ irányvektorára, ezért irányvektora $\underline{v}_1 = \underline{n} \times \underline{v} = (17, -34, 0) \sim (1, -2, 0)$, tehát egyenletrendszere: $x = -3 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = 1$.

$$258. 13x - 14y + 11z + 51 = 0.$$

259. A sík egy pontjaként az egyenes egy pontját választhatjuk, normálvektora pedig az egyenes irányvektorá-

nak és az adott sík normálvektorának a vektoriális szorzata. A sík egyenlete: $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

260. A transzverzális párhuzamos a síkok metszésvonalával (lásd a 187. feladatot!), egyenletrendszere: $x = -3 + 8t$, $y = -1 - 3t$, $z = 2 - 4t$.

261. Az egyenes a síkok metszésvonalával (normálvektorok vektoriális szorzatával) párhuzamos.

$$262. \frac{x - \frac{50}{41}}{2} = \frac{y + \frac{25}{41}}{4} = \frac{z - \frac{25}{41}}{-1}.$$

263. A sík átmegy az első egyenes $P(3, 0, -1)$ pontján és normálvektora a két egyenes irányvektorainak vektoriális szorzata: $(-19, 2, 9)$, tehát egyenlete: $-19x + 2y + 9z + 66 = 0$.

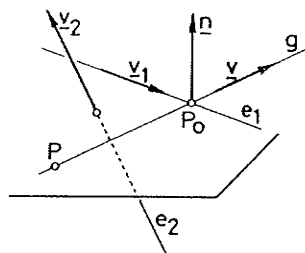
264. γ tartalmazza az α sík $\underline{n}(2, -1, 1)$ normálvektorát és e $\underline{v}(2, 1, 0)$ irányvektorát, ezért γ normálvektora $\underline{n} \times \underline{v} = (-1, 2, 4)$, egyenlete: $-x + 2y + 4z = 4$.

265. Az y tengely az α síkot a $P(0, 4, 0)$ pontban metszi. g irányvektora merőleges az e $\underline{v}(1, 3, -1)$ irányvektorára és a sík $\underline{n}(5, -1, 3)$ normálvektorára, ezért

$$\underline{n} \times \underline{v} = (-8, 8, 16) \sim (-1, 1, 2)$$

adja az irányát, tehát g egyenletrendszere: $x = -t$, $y = 4 + t$, $z = 2t$.

266. Az előállítandó sík tartalmazza az egyenes $\underline{v}(-3, 1, -1)$ irányvektorát és párhuzamos az adott síkok metszésvonalával, azaz a síkok $\underline{n}_1(1, -8, 1)$, $\underline{n}_2(2, 1, 1)$ normálvektorainak $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ vektoriális szorzatával. Ezért normálvektora $(\underline{n}_1 \times \underline{n}_2) \times \underline{v} = (\underline{n}_1 \underline{v}) \underline{n}_2 - (\underline{n}_2 \underline{v}) \underline{n}_1 = -12\underline{n}_2 + 6\underline{n}_1 = (-18, -60, -6) \parallel (3, 10, 1)$, egy pontja az adott egyenes $(5, 0, -1)$ pontja, így egyenlete: $3x + 10y + z = 14$.



267.

267. I. megoldás: A g egyenes benne van P és e_1 síkjában, ezért g irányvektora, $\underline{v}$, merőleges a sík $\underline{n}$ normálvektorára és e_2 -nek $\underline{v}_2$ normálvektorára is, tehát $\underline{v} = \underline{n} \times \underline{v}_2$. P -ből az egyenes egy pontjához mutató $\underline{r} = (4, 0, -2)$ és $\underline{v}_1$ vektoriális szorzata $\underline{n}$, tehát $\underline{v} = (\underline{r} \times \underline{v}_1) \times \underline{v}_2 =$

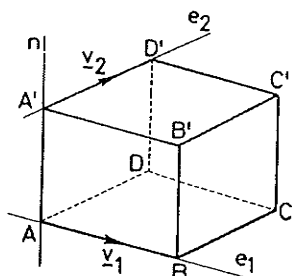
$$= (\underline{r} \underline{v}_2) \underline{v}_1 - (\underline{v}_1 \underline{v}_2) \underline{r} = -22\underline{v}_1 - 4\underline{r} = (-60, -22, -14) \sim (30, 11, 7),$$

ezért

$$g : \frac{x+1}{30} = \frac{y}{11} = \frac{z-3}{7}.$$

II. megoldás: P -t az $e_1(3+2t, t, 1+t)$ pontjaival összekötő vektor $(4+2t, t, -2+t)$ alakú és ha ez éppen $\underline{v}$ -ral azonos, $\underline{v}_2$ -ral szorozva 0-t kapunk, tehát $-2(4+2t) + t + 7(-2+t) = 0$, ebből $t = 5,5$, tehát e_1 -nek a $P_0(14; 5,5; 6,5)$ pontját kell összekötnünk P -vel, hogy g -t kapjuk. A PP_0 egyenes egyenletrendszere azonos az előző megoldásban nyerttel.

268. Az adott síkok normálegyenletei $\frac{x-8y+4z}{9} - 1 = 0$ és $\frac{4x+20y-5z}{21} - 2 = 0$. A keresett egyenes benne van pl. az első síktól egységnyi távolságra levő (vele párhuzamos) síkban, ezek egyike az $\frac{x-8y+4z}{9} - 5 = 0$ sík. A második síkból a $\frac{4x+20y-5z}{21} - 5 = 0$ sík 3 egységre van. Ezek metszésvonala kielégíti a feladat feltételeit.



269.

269. Mivel e_1 és e_2 kitérő éleken vannak (nem párhuzamosak), e két egyenes normáltranszverzálisa tartalmazza az egyik oldalélét. Ezért először a e_1 és e_2 normáltranszverzálison levő A , illetve A' pontját

határozzuk meg. Legyenek ezek koordinátái $A(-5 + 4t, 6 + 4t, -15 + 7t)$ és $A'(5 + t', -7 + 4t', 20 + 8t')$, ezért az $\overrightarrow{AA'} = (10 - 4t + t', -13 - 4t + 4t', 35 - 7t + 8t')$, ezt a $\underline{v}_1(4, 4, 7)$ és $\underline{v}_2(1, 4, 8)$ vektorokkal szorozva 0-t kapunk, tehát

$$\begin{aligned} 4(10 - 4t + t') + 4(-13 - 4t + 4t') + 7(35 - 7t + 8t') &= 0 \\ (10 - 4t + t') + 4(-13 - 4t + 4t') + 8(35 - 7t + 8t') &= 0. \end{aligned}$$

Ebből a t, t' -re nézve kétismeretlenes egyenletből $t' = -2$, $t = 1$, tehát a metszéspontok: $A(-1, 10, -8)$, $A'(3, -15, 4)$. Mivel $|\underline{v}_1| = |\underline{v}_2| = 9$, $\overrightarrow{AB} = 2\underline{v}_1$ és $\overrightarrow{AD} = \pm 2\underline{v}_2$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, az egyik megoldás ($2\underline{v}_1$ és $2\underline{v}_2$ vektorokkal számolva): $A(-1, 10, -8)$, $B(7, 18, 6)$, $C(9, 26, 22)$, $D(1, 18, 8)$, $A'(3, -15, 4)$, $B'(-11, -7, 18)$, $C'(5, -7, 20)$, $D'(13, 1, 34)$.

$$270. \text{ a) } x = x' - 4, y = y' + 6, z = z' - 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x - 8y + 2z + 6 &= x' - 4 - 8(y' + 6) + \\ &+ 2(z' - 1) + 6 = x' - 8y' + 2z' - 48 = 0. \end{aligned}$$

271. Tegyük fel, hogy az origót a $\underline{v}(a, b, c)$ vektorral toltuk el, ekkor az áttérés egyenletei: $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$; tehát

$$\begin{aligned} 3x - 4y + z + 9 &= 3(x' + a) - 4(y' + b) + (z' + c) = \\ &= 3x' - 4y' + z' + 3a - 4b + c + 9, \end{aligned}$$

ennek meg kell egyeznie a megadott transzformált egyenlettel, tehát

$$3x' - 4y' + z' + 3a - 4b + c + 9 = 3x' - 4y' + z' - 17, \text{ ebből}$$

$$3a - 4b + c + 26 = 0,$$

ami azt jelenti, hogy a lehetséges új origók $[xyz]$ rendszerbeli koordinátái az előbbi egyenletnek tesznek eleget, azaz egy síkon vannak.

$$272. \text{ a) } x = \frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}, y = \frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}.$$

$$\text{b) } x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}, y = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}.$$

$$c) x = -y', y = x'.$$

$$d) x = y', y = -x'.$$

$$e) x = -x', y = -y'.$$

273. Az áttérés egyenletei: $x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'$,
 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'$, ezért $0 = x^2 - y^2 - 4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)^2 -$
 $- \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)^2 - 4 = -2x'y' - 4 = 0$, tehát $x'y' = -\frac{4}{2}$.

$$274. -30^\circ.$$

275. Az új tengelyek egységvektorai a régi rendszerben: $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ és $\left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$.

Ezért a transzformáció egyenletei:

$$x = \frac{5x'}{13} - \frac{12y'}{13},$$

$$y = \frac{12x'}{13} + \frac{5y'}{13}.$$

276. Toljuk el először a koordinátarendszert, az áttérés egyenletei: $x = x' + 4$, $y = y' + 8$, az eltolt koordinátarendszerben az egyenlet: $4(x' + 4) - 3(y' + 8) - 4 =$
 $= 4x' - 3y' - 9 = 0$. Alkalmazzuk most erre a 30° -os elforgatást, ennek egyenletei:

$$x' = \frac{x''\sqrt{3}}{2} - \frac{y''}{2}, y' = \frac{x''}{2} + \frac{y''\sqrt{3}}{2}, \text{ ezért}$$

$$4x' - 3y' - 9 = 2(x''\sqrt{3} - y'') - 3\left(\frac{x''}{2} + \frac{y''\sqrt{3}}{2}\right) - 9 =$$

$$= (2\sqrt{3} - 1,5)x'' - \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)y'' - 9 = 0.$$

277. Az eltolásnál végezzük el az $x \rightarrow x + 2$, $y \rightarrow y + 3$ helyettesítést:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 - 5(x + 2)^2 + 4(x + 2)(y + 3) +$$

$$+ 8(y + 3)^2 - 32(x + 2) - 56(y + 3) + 80 = 5x^2 + 4xy + 8y^2 -$$

$$- 36.$$

Az elforgatás transzformációs egyenletei:

$$x \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} x + \frac{1}{\sqrt{5}} y, \quad y \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}} x + \frac{2}{\sqrt{5}} y$$

Az elforgatott koordinátarendszerben az egyenlet így alakul:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 \rightarrow 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y\right) + 8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y\right)^2 - 36 = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

A végeredmény:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ (ellipszis egyenlete).}$$

$$278. \frac{x - \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z}{-2}, y = 0.$$

$$279. x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, z = z'.$$

$$280. x = \frac{2x'}{11} + \frac{9y'}{11} + \frac{6z'}{11}, y = \frac{6x'}{11} - \frac{6y'}{11} + \frac{7z'}{11}, z = \frac{9x'}{11} + \frac{2y'}{11} - \frac{6z'}{11}.$$

281. Az új koordinátarendszer egységvektorai:

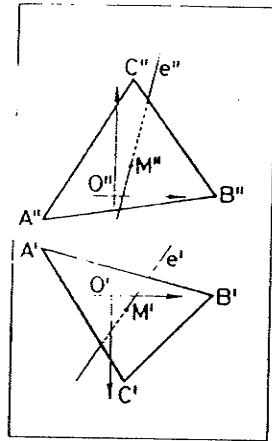
$\underline{a}^0(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \underline{b}^0(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), \underline{c}^0(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ezért az elforgatásnak megfelelő helyettesítések:

$x \rightarrow \frac{2x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{z}{3}, y \rightarrow -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3}, z \rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{2z}{3}$. E helyettesítéseket elvégezve az egyenlet így alakul:

$6x^2 + 3y^2 + 12x = 0$. Az eltolásnak megfelelő helyettesítések $x \rightarrow x + 1, y \rightarrow y, z \rightarrow z$; a helyettesítést elvégezve kapjuk:

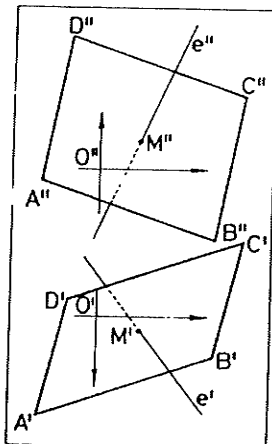
$2x^2 + y^2 = 2$, azaz $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ (ellipszis alapú henger egyenlete).

282. A dőléspont: $M(1,1,2)$.
A szerkesztés eredménye az ábrán.



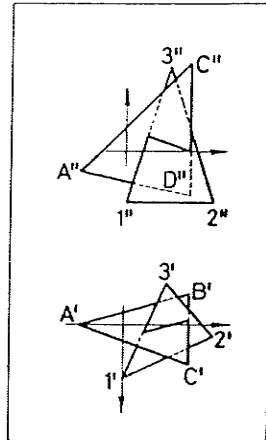
282.

283. A sík egyenlete: $16x + 9y + 11z = 65$; a dőléspont: $M(1,3,2)$. A szerkesztés eredménye az ábrán.



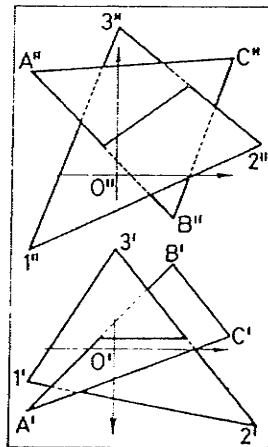
283.

284. A síkok egyenletei: $6x + y - 3z = 3$ és $2x + y + z = 7$, metszésvonaluk:
 $x = 4 + t$, $y = 3 - 3t$,
 $z = 2 + t$. A szerkesztés eredménye az ábrán.

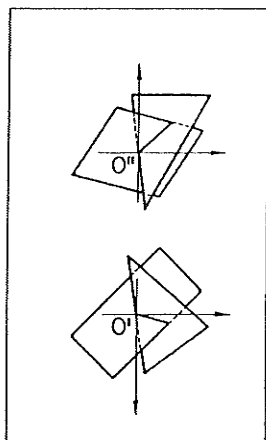


284.

285. A síkok egyenletei: $5x + 2y - 3z = -13$, $11x - 6y + 9z = 13$, a metszésvonal:
 $x = -1$, $y = -4 + 3t$, $z = 2t$. A szerkesztés eredménye az ábrán.

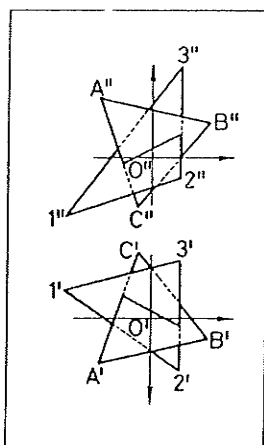


285.



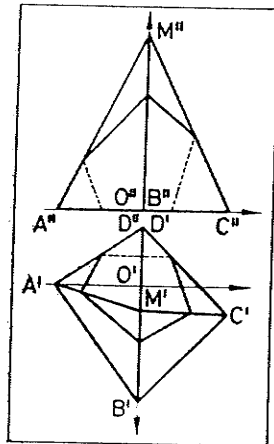
286.

286. A síkok egyenletei: $7x + 5y - 8z = 0$, $44x - 40y + 39z = 0$; a metszésvonal: $x = t$, $y = 5t$, $z = 4t$. A szerkesztés eredménye az ábrán.



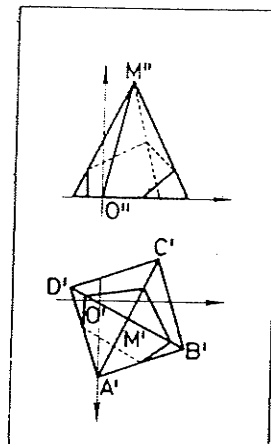
287.

287. A síkok egyenletei: $-x + z = 2$ és $x - y + z = 0$, a metszésvonal: $x = -1 + t$, $y = 2t$, $z = 1 + t$. A szerkesztés eredménye az ábrán.



288.

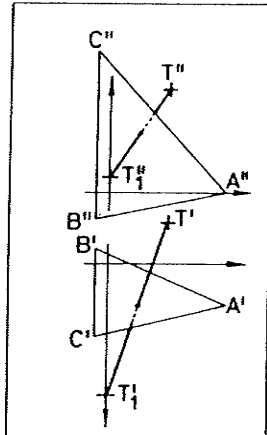
288. A gúlaéleken levő metszéspontok: $AD(-2, -3, 0)$; $CD(-2, 2, 0)$; $CM(2, \frac{10}{3}, \frac{49}{3})$, $BM(4, 0, 8)$, $AM(\frac{4}{7}, -\frac{34}{7}, \frac{24}{7})$.
A szerkesztés eredménye az ábrán.



289.

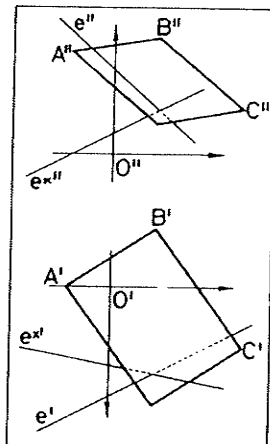
289. A gúlaéleken levő dőféspontok: $AD(4, -2, 0)$, $AB(8, 6, 0)$, $BM(5, 10, 4)$, $CM(-2, 6, 8)$, $DM(-4, -2, 4)$.
A síkmetszet az ábrán látható.

290. A tükörkép: $T_4(9,0,1)$.
A szerkesztés eredménye az ábrán.



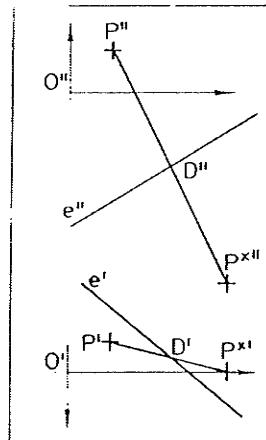
290.

291. Az M metszéspont: $(6,3,3)$,
az egyenes $E(10,-5,10)$
pontjának tükörképe:
 $E^{\pi}(4,-7,-2)$, a tükrözött
egyenes, e^{π} : $x = 6 - 2t$,
 $y = 3 - 10t$, $z = 3 - 5t$.
A szerkesztés eredménye az ábrán.



291.

292. A tükörkép: $P^{\pi}(0, 11, -13)$;
a szerkesztés eredménye
az ábrán.



292.

293. A tükörkép egyenlete: $-11x + 7y - 10z + 28 = 0$.

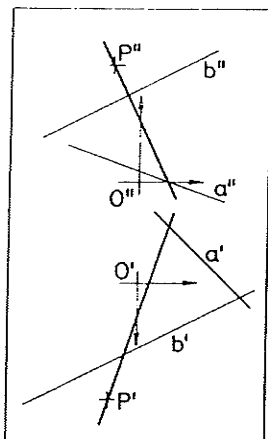
294. A tükrözött sík: $x - y - z = -2$.

295. Az elforgatott egyenes úgy is előállítható, hogy minden pontját tükrözzük $\underline{b}$ -re (gyakorlatilag két pont is elég). Az elforgatott egyenes: a^{π} : $x = 2 + 8t$, $y = -7 + 6t$, $z = -2 + 8t$. Gyakorlatilag azonban egy pont tükrözése is elég, ha észrevesszük, hogy $\underline{b}$ irányvektora az $\underline{a}$ és $\underline{a}^{\pi}$ irányvektorának szögfelezője.

296. A transzverzális:

$$x = 8 - 3t, y = -2 + t,$$

$z = 8 - 2t$. A szerkesztés
eredménye az ábrán.

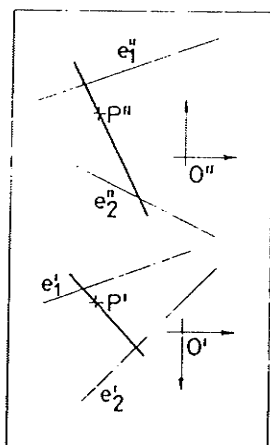


296.

297. A transzverzális:

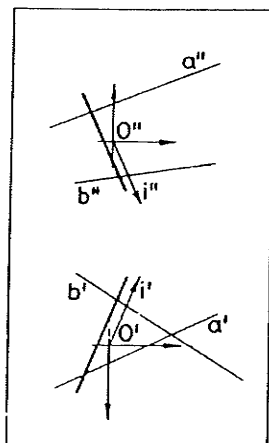
$$x = -2 - t, y = -6 - t,$$

$z = 3 + 2t$. A szerkesztés
eredménye az ábrán.



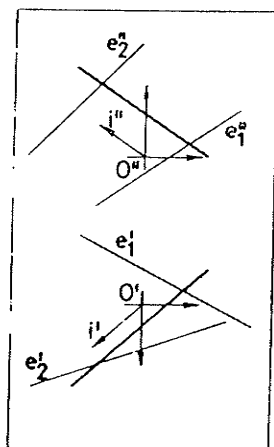
297.

298. A transzverzális egyenletrendszer: $x = 4 - 10t$,
 $y = -3 + 4t$, $z = 4 - 9t$;
a szerkesztés eredménye az ábrán.



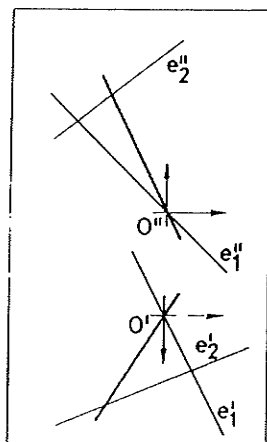
298.

299. A transzverzális: $x = 4 + 5t$,
 $y = -3 - 6t$, $z = 5 + 4t$.
A szerkesztés eredménye az ábrán.



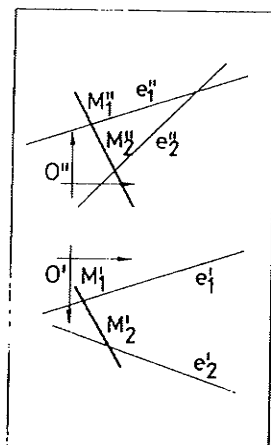
299.

300. A transzverzális: $x = 6 - 3t$,
 $y = -4 + 2t$, $z = 8 - 4t$;
a szerkesztés eredménye az
ábrán.



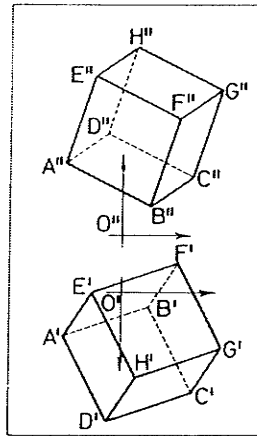
300.

301. A transzverzális: $x = 3 + 3t$,
 $y = 1 + 2t$, $z = 4 - 3t$.
A metszéspontok: $M_1(3, 1, 4)$,
 $M_2(6, 3, 1)$, távolságuk: $\sqrt{22}$.
A szerkesztés eredménye az
ábrán.



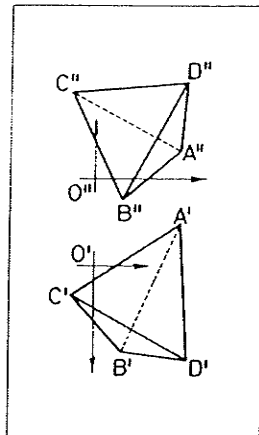
301.

302. A kockacsúcsok: $A(3, -4, 5)$,
 $C(7, 5, 4)$, $E(0, -2, 11)$,
 $F(-2, 4, 8)$, $G(4, 7, 10)$,
 $H(6, 1, 13)$. A szerkesztés
 eredménye az ábrán.



302.

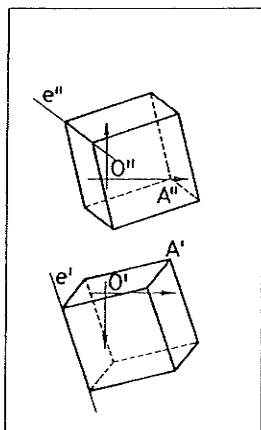
303. $D(13, 13, 13)$; a szerkesztés
 eredménye az ábrán.



303.

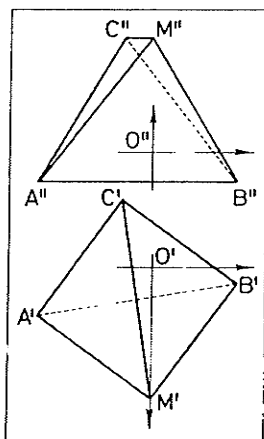
304. A feladat tetraédere azonos az előző feladatával.

305. A lehetséges két megoldás közül az egyik: $A(-5, 9, 0)$, $B(-2, -3, 4)$, $C(2, -6, 8)$, $D(-1, 6, 12)$, $E(7, 13, -3)$, $F(10, 1, -7)$, $G(14, -2, 5)$, $H(11, 10, 9)$. A megszerkesztett kocka az ábrán.



305.

306. $M(9, 0, 8)$. A szerkesztés eredménye az ábrán.



306.

307. $\underline{m}(-17, 4, 5)$.

308. Mivel $\vec{OA}$ koordinátái $(1, 2, 0)$, $\underline{m}_O = \vec{OA} \times \underline{v} =$
 $= (2, -1, -1)$, $\underline{m}_P = \vec{PA} \times \underline{v} = (4, -2, -2)$.

309. $\underline{vm} = 0$ -ből $z = 2$.

310. $\underline{m}_O(20, -9, -13)$, $\underline{m}_A(22, 3, -10)$.

311. Annak feltétele, hogy a $[\underline{v}_1, \underline{m}]$ vektorpár egy kötött vektor két vektorkoordinátája legyen, hogy a $\underline{vm} = 0$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ feltételek teljesüljenek; az a, b, e alattiak kötött vektorok.

312. $\underline{m} = (3, 5, 0) \times (-1, 3, 5) = (25, -15, 14)$.

313. A hatásvonal egy pontjának helyvektora:

$\underline{r}_O = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2} = (-13, -2, 3)$, $x = -13 + t$, $y = -2 - 2t$, $z = 3 +$
 $+ 3t$.

314. 0-ból a hatásvonalra állított merőleges vektor
 $\frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2} = (6, 3, -5)$, ennek hossza a kérdéses távolság: $\sqrt{70}$.

315. $z = 3$. 0-ból a hatásvonalra állított merőleges
vektor $\frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2}$, ezért a távolság $\left| \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2} \right| = \sqrt{1344}$.

316. $\underline{m}' = \underline{m} - \vec{OO'} \times \underline{v} = (-5, 31, -4)$.

317. a) párhuzamosok; b) metszők; c) kitérők.

318. Az egyenes irány-egységvektora: $\underline{w}^0(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7})$, $\underline{v}$ -
nak az egyenes $A(1, -2, 3)$ pontjára vonatkozó nyomatéka:
 $\underline{m}(\frac{3}{6}, -3, -6)$ és így az egyenesre vonatkozó nyomaték: $\underline{mw}^0 =$
 $= \frac{6}{7}$.

319. Az X-tengelyre: 1; az Y-tengelyre: -2; a Z-ten-
gelyre: 1, az OE egyenesre vonatkozó nyomaték 0.

320. Az 0 origóra vonatkozó $\underline{m}_0$ nyomaték:

$$\underline{m}_0 = \underline{m} - \vec{AO} \times \underline{v} = (19, 12, -6).$$

A rendszer saját nyomatéka: $\underline{v}\underline{m} = \underline{v}\underline{m}_0 = 8$.

321. Az A pontból a centrális tengely egy pontjához mutató vektor $\underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2} = (1, -\frac{1}{2}, 2)$, ugyanebbe a pontba 0-ból az $\vec{OA} + \underline{r}_0 = (3, \frac{1}{2}, 0)$ vektor mutat, a $P_0(3, \frac{1}{2}, 0)$ tehát rajta van a centrális tengelyen, ezért egyenletrendszere: $x = 3 + t$, $y = \frac{1}{2} - 2t$, $z = -t$.

322. Az origóból a centrális tengely egy pontjához mutató helyvektor: $\underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2} = (-\frac{45}{49}, \frac{30}{49}, -\frac{30}{49})$, ezért a tengely egyenletrendszere: $x = -\frac{45}{49} + 2t$, $y = \frac{30}{49} + 6t$, $z = -\frac{30}{49} + 3t$.

323. $\underline{v}(0, 2, 0)$, $\underline{m}(-4, 0, 40)$. A centrális tengely origótól mért távolsága: $\left| \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2} \right| = \sqrt{29}$.

324. A vektorpár két olyan ellentett vektorból áll, amelyek merőlegesek $\underline{m}$ -ra. Ezek közül az egyiket (a merőlegességtől eltekintve), - ha más kikötés nincs - szabadon választhatjuk. Legyen ezért $\underline{v}_1 = (0, 2, 1)$ és hatásvonala menjen át az origón. Akkor szükségképpen $\underline{m}_1 = \underline{0}$ és így következtetésképpen $\underline{v}_2 = -\underline{v}_1(0, -2, -1)$, $\underline{m}_2 = \underline{m}(9, 2, -4)$.

$\underline{v}_1$ hatásvonala: $x = 0$, $y = 2t$, $z = t$. $\underline{v}_2$ hatásvonalának egy pontja az

$$\underline{r} = \frac{\underline{v}_2 \times \underline{m}}{\underline{v}_2^2}$$

helyvektorral adható meg: $\underline{r}(2, -\frac{9}{5}, \frac{18}{5})$ ezért hatásvonala: $x = 2$, $y = -\frac{9}{5} - 2t$, $z = \frac{18}{5} - t$.

325. Az eredővektorok, illetve eredőnyomatékok:

$\underline{v}_I = (3, -2, 4)$, $\underline{m}_I = (1, 4, -3)$; $\underline{v}_{II} = (3, -2, 4)$, $\underline{m}_{II} = (1, 4, -3)$, tehát a két rendszer egyenértékű.

326. Legyenek a vektorok $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ a K -ra vonatkozó nyomatékaik $\underline{m}_1 = \underline{m}_2 = \dots = \underline{m}_n = \underline{0}$, a vektorrendszer eredője $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n$, $\underline{m} = \underline{0}$, tehát egyenértékű egyetlen a K -n átmenő egyenesű $\underline{v}$ kötött vektorral.

327. A T pontra vonatkozó nyomaték a feladat szerint $\underline{m}_T = 50\underline{v}^0 = 50(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = (\frac{50}{3}, \frac{100}{3}, -\frac{100}{3})$; $\underline{m}_0 = \underline{m}_T + \vec{OT} \times \underline{v} = (\frac{20}{3}, \frac{142}{3}, -\frac{73}{3})$.

328. Az eredővektor, illetve nyomaték: $\underline{v}(4, 4, 0)$, $\underline{m}(-8, 8, 8)$; a centrális tengely egyenletrendszere: $x = 1 + t$, $y = -1 + t$, $z = 2$.

329. Az adott vektorok koordinátái és egyenesük egy-egy helyvektora: $\underline{v}_1(0, 0, -1)$, $\underline{r}_1(1, 0, 0)$; $\underline{v}_2(-1, 0, 0)$, $\underline{r}_2(0, 1, 0)$; $\underline{v}_3(0, -1, 0)$, $\underline{r}_3(0, 0, 1)$. A megfelelő (O -ra vonatkozó) nyomatékok: $\underline{m}_1(0, 1, 0)$, $\underline{m}_2(0, 0, 1)$, $\underline{m}_3(1, 0, 0)$. Az eredővektor: $\underline{v}(-1, -1, -1)$, az eredőnyomaték: $\underline{m}(1, 1, 1)$. Ezek szerint O rajta van a centrális tengelyen, mert a rá vonatkozó nyomaték és eredővektor párhuzamosak, a tengely irányvektora $\underline{v}$, tehát a tengely azonos az OE testátló egyenesével.

330. Az origóra vonatkozó vektorkoordináták: $\underline{v}(-\frac{7}{2}, -1, 5)$, $\underline{m}(12, -\frac{21}{2}, 0)$. A saját nyomaték: $\underline{v}\underline{m} = -\frac{63}{2}$. A P pontra vonatkozó nyomatéka: $\underline{m}'(4, 10, -\frac{3}{2})$. A centrális tengely egyenletrendszere: $x = \frac{70}{51} - 7t$, $y = \frac{80}{51} - 2t$, $z = \frac{65}{51} + 10t$. A vektorrendszer általános típusú, helyettesíthető egy vektorpárral és egy kötött vektorral.

331. $\underline{v}(-3, -9, 6)$, $\underline{m}(18, -18, -9)$; a sajátnyomaték: $\underline{v}\underline{m} = 54$. A centrális tengely egyenletrendszere: $x = \frac{3}{2} - 3t$, $y = \frac{9}{14} - 9t$, $z = \frac{12}{7} + 6t$.

332. Az eredők: $\underline{v}(0, 0, 0)$, $\underline{m}(-4, 12, 4)$; a rendszer egy vektorpárral helyettesíthető.

333. A $\underline{v}_1(0, a, 0)$, $\underline{v}_2(-a, 0, 0)$, $\underline{v}_3(0, 0, -a)$ vektorok eredője: $\underline{v}(-a, a, -a)$, az O -ra vonatkozó nyomatékok: $\underline{m}_1(0, 0, a^2)$, $\underline{m}_2(0, -a^2, a^2)$, $\underline{m}_3 = \underline{0}$, ezért $\underline{m} = \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = (0, -a^2, 2a^2)$. A C -re vonatkozó nyomaték, mivel $\vec{OC} = (0, a, 0)$, $\underline{m}_C = \underline{m} - \vec{OC} \times \underline{v} = (a^2, -a^2, a^2)$. A rendszer sajátnyomatéka: $\underline{m}\underline{v} = -3a^3$.

334. $\underline{v} = (0, 1, 0)$, $\underline{m}_O = (-\frac{2}{3}, 0, 1)$. A sajátnyomaték: $\underline{v}\underline{m}_O = 0$. A centrális tengely egyenlete: $x = 1$, $y = t$, $z = \frac{2}{3}$. A rendszer olyan kötött vektorral helyettesíthető, amelynek hatásvonala a centrális tengely.

335. Az eredővektor: $\underline{v} = \underline{0}$, az eredőnyomaték: $\underline{m} = (4, -4, 4)$. A vektorrendszer olyan erőpárral helyettesíthető, amelynek nyomatékvektora $\underline{m}(4, -4, 4)$; ilyen pl. az origó kezdőpontú $\underline{v}_1(2, 0, -2)$ és a $B(2, 2, 0)$ kezdőpontú $-\underline{v}_1(-2, 0, 2)$ vektorpár.

336. $\underline{v} = \underline{0}$, $\underline{m}_O = \underline{m}_A = \underline{0}$, egyensúlyi vektorrendszerről van szó.

337. A centrális tengely vektoregyenlete $\underline{r} = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{v^2} + t\underline{v}$, ezért a tengely egy tetszőleges O' pontjára számított nyomaték:

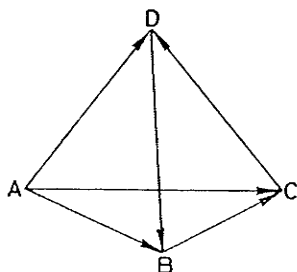
$$\begin{aligned} \underline{m}' &= \underline{m} - \vec{OO'} \times \underline{v} = \underline{m} - \underline{r} \times \underline{v} = \underline{m} - \frac{(\underline{v} \times \underline{m}) \times \underline{v}}{v^2} = \\ &= \underline{m} - \frac{v^2 \cdot \underline{m} - (\underline{v}\underline{m})\underline{v}}{v^2} = \frac{(\underline{v}\underline{m})}{v^2} \underline{v}, \end{aligned}$$

tehát O' tetszőleges választása mellett a nyomaték $\underline{v}$ -nak

$\frac{\underline{v}\underline{m}}{v^2}$ - szerese. Feladatunkban ez az arányszám: $\frac{1}{11}$.

338. Legyen a három vektor $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, a feltevés szerint bármely vonatkoztatási pontra $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$ és $\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = \underline{0}$. Mivel $\underline{v}_3 = -\underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ komplanári-

sak; ha $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ párhuzamosak, $\underline{v}_3$ is párhuzamos velük, $-\underline{v}_3$ a $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ vektorrendszer eredője, s mint ilyen, benne van $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ hatásvonalának síkjában. Mivel $\underline{v}_3 \underline{m}_3 = 0 = \underline{v}_1 \underline{m}_2 + \underline{v}_2 \underline{m}_1$, $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ hatásvonala metszi egymást egy M pontban, M-re vonatkoztatva $\underline{m}_1 = \underline{m}_2 = 0$, tehát $\underline{m}_3 = -(\underline{m}_1 + \underline{m}_2) = 0$, tehát a $\underline{v}_3$ egyenese is átmegy M-en és a komplanaritás miatt benne van $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ egyeneseinek síkjában.



339. Az A pontra vonatkozó vektorkoordináták: $\underline{v} = \underline{AB} + \underline{AC} + \underline{AD} + (\underline{BC} + \underline{CD} + \underline{DB}) = \underline{AB} + \underline{AC} + \underline{AD}$
 $\underline{m}_A = \underline{AB} \times \underline{BC} + \underline{AC} \times \underline{CD} + \underline{AD} \times \underline{DB} = (\underline{AC} + \underline{CB}) \times \underline{BC} + \underline{AC} \times \underline{CD} + (\underline{AC} + \underline{CD}) \times \underline{DB} = \underline{AC} \times (\underline{BC} + \underline{CD} + \underline{DB}) + \underline{CB} \times \underline{BC} + \underline{CD} \times \underline{DB} = \underline{CD} \times \underline{DB}$.
 Az AC tengelyre vonatkozó nyomaték $(\underline{DC} \times \underline{DB}) \underline{AC}^0 =$

$= \frac{\underline{CD} \cdot \underline{DB} \cdot \underline{AC}}{|\underline{AC}|}$. A számlálóban levő vegyesszorzat akkor 0, ha A, B, C, D egy síkban vannak.

340. Legyenek a két rendszernek az origóra vonatkozó koordinátái: $\underline{v}, \underline{m}_0$ és $\underline{v}', \underline{m}'_0$, és a két rendszernek a nem egy egyenesbe eső A, B, C pontokra vonatkozó nyomatékai: $\underline{m}_A, \underline{m}_B, \underline{m}_C$, illetve $\underline{m}'_A, \underline{m}'_B, \underline{m}'_C$. A feltevés szerint $\underline{m}_A = \underline{m}'_A$, $\underline{m}_B = \underline{m}'_B$ és $\underline{m}_C = \underline{m}'_C$, ezért

$$\underline{m}_A = \underline{m}_0 + \underline{v} \times \underline{OA} = \underline{m}'_A = \underline{m}'_0 + \underline{v}' \times \underline{OA},$$

$$\underline{m}_B = \underline{m}_0 + \underline{v} \times \underline{OB} = \underline{m}'_B = \underline{m}'_0 + \underline{v}' \times \underline{OB},$$

$$\underline{m}_C = \underline{m}_0 + \underline{v} \times \underline{OC} = \underline{m}'_C = \underline{m}'_0 + \underline{v}' \times \underline{OC}.$$

Ebből:

$$\underline{v} \times (\underline{OA} - \underline{OB}) = \underline{v}' \times (\underline{OA} - \underline{OB}),$$

$$\underline{v} \times (\underline{OB} - \underline{OC}) = \underline{v}' \times (\underline{OB} - \underline{OC}),$$

tehát $(\underline{v} - \underline{v}') \times (\underline{OA} - \underline{OB}) = 0$ és $(\underline{v} - \underline{v}') \times (\underline{OB} - \underline{OC}) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\underline{v} - \underline{v}'$ párhuzamos két nem kollineáris vektorral, tehát csak nullvektor lehet, tehát valóban $\underline{v} = \underline{v}'$ és így a felírt egyenlőségek bármelyikéből $\underline{m}_0 = \underline{m}'_0$.

G Ö R B É K

Ruletták

1. Adott a sugarú kör csúszás nélkül gördül egy egyenes mentén. Irjuk fel a kör egy rögzített kerületi pontja által leírt pálya egyenletét (ciklois).

2. Adott a sugarú kör csúszás nélkül gördül egy egyenesen. Irjuk fel egy olyan pont pályájának az egyenletét, amely a kör középpontjától d távolságra van és a mozgás közben a körhöz viszonyított helyzete nem változik ($d < a$ esetén nyújtott, $d > a$ esetén hurkolt ciklois).

3. Állítsuk elő a kör lefejtésének paraméteres egyenletrendszerét, azaz egy mozdulatlan kör alakú tárcsára szorosan feltekert fonál végpontja által leírt görbe egyenletét, miközben a fonalat feszesen tartva legombolyítjuk (kör-evolvens).

4. Tekintsünk egy adott a sugarú kör kerületén csúszás nélkül gördülő egyenest, amelyhez egy rá merőleges, d hosszúságú szakaszt rögzítettünk. Irjuk fel a szakasz végpontja által leírt görbe egyenletét! Milyen görbét kapunk $d = a$ esetén?

5. Egy r sugarú kör csúszás nélkül végiggördül a mozdulatlan R sugarú körön mindig kívülről érintve azt. Irjuk fel a gördülő kör egy rögzített kerületi pontja által leírt pálya egyenletét (epiciklois).
Milyen görbe adódik $r = R$ esetén?

6. Egy r sugarú kör csúszás nélkül végiggördül az $R > r$ sugarú kör kerületén mindig belülről érintve azt. Irjuk fel a gördülő kör egy rögzített kerületi pontja által leírt pálya egyenletét (hipociklois).
Milyen görbe adódik az $R = 4r$ és az $R = 2r$ esetekben?

7. Egy $2r$ sugarú kör kerületén végiggördül egy r suga-

rú kör mindig belülről érintve azt. Mutassuk meg, hogy a gördülő körhöz képest rögzített helyzetű, de nem a kerületén fekvő pont ellipszist ír le.

8. Bizonyítsuk be, hogy a ciklois tetszőleges pontjában húzott normális áthalad a cikloist előállító kör legalsó, az érintő pedig a legfelső pontján (lásd az 1. feladatot!). Ezt a tulajdonságát felhasználva szerkesszük meg a ciklois tetszőleges pontjához tartozó normálisát és érintőjét.

9. Bizonyítsuk be, hogy az

$x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ körrevolvens összes normálisának a koordinátarendszer origójából mért távolsága egyenlő.

10. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

asztroid érintőjének a koordinátatengelyek közé eső szakasza az érintési ponttól függetlenül a hosszúságú.

Görbék egyenlete, érintő

Adjuk meg a görbét az $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ függvénnyel, ekkor az érintőegyenes egyenletrendszere

$$\underline{R} = \underline{r} + \tau \dot{\underline{r}} \quad \text{vagy} \quad \frac{X - x}{\dot{x}} = \frac{Y - y}{\dot{y}} = \frac{Z - z}{\dot{z}},$$

ahol $\underline{R} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ az érintő futó pontjának helyvektora.

11. Ha egy pont egyenletes körmozgást végez egy bizonyos egyenes körül, és ugyanakkor egyenletes egyenesvonalú mozgással halad az egyenessel párhuzamosan, akkor a pályáját hengeres csavarvonalnak nevezzük. Válasszuk z tengelynek az adott egyenest és írjuk fel a hengeres csavarvonalat előállító vektor-skalár függvényt.

Határozzuk meg a csavarvonalnak a koordinátasíkokra

eső merőleges vetületeit!

12. Viviani-féle görbének nevezzük egy gömbfelületnek és egy olyan körhengerfelületnek a metszésvonalát, amelynek egyik alkotója áthalad a gömb középpontján és átmérője a gömb sugarával egyenlő. Adjuk meg ezt a görbét egy vektor-skalár függvényvel.

Mutassuk meg, hogy a Viviani görbe illeszkedik egy olyan kúpfelületre is, amelynek csúcsa a henger- és gömbfelület érintési pontja és tengelye a henger tengelyével párhuzamos.

13. A z tengelyt hegyes szögben metsző egyenes állandó szögsebességgel forog a z tengely körül. Írjuk fel annak a pontnak a pályaegyenletét, amely ezen egyenes mentén állandó sebességgel mozog (kúpos csavarvonal).

14. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \sin t \cos t + \underline{j} a \sin^2 t + \underline{k} a \cos t$$

görbe egy origó középpontú, a sugarú gömbfelületre illeszkedik.

15. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos^3 t + \underline{j} a \sin^3 t + \underline{k} a \cos 2t$$

görbe egy asztroid vezérgörbéjü, z tengelyü hengerfelület véges darabján helyezkedik el.

16. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + t^2 \underline{j} + t^3 \underline{k}$$

görbének a koordinátasíkokra eső merőleges vetületeit.

17. Írjuk fel az

$$\underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + t^2 \underline{k}$$

térgörbe érintőjének egyenletrendszerét a $t = 1$ paraméterű pontjában.

18. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a(t - \sin t) + \underline{j} a(1 - \cos t) + \underline{k} 4a \sin \frac{t}{2}$$

görbe $t = \frac{\pi}{2}$ pontjához tartozó érintőjének egyenletrendszerét. Mekkora szöget zár be ez az érintő a z tengellyel?

19. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{t^4}{4} \underline{i} + \frac{t^3}{3} \underline{j} + \frac{t^2}{2} \underline{k}$$

térgörbe azon érintőit, amelyek párhuzamosak az $x + 3y + 2z = 0$ egyenletű síkkal.

20. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (3t - t^3) \underline{i} + 3t^2 \underline{j} + (3t + t^3) \underline{k}$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben az érintő párhuzamos a $3x + y + z + 2 = 0$ egyenletű síkkal!

21. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyekben a hengeres csavarvonal érintői az xy koordinátasíkot metszik (lásd a 14. feladatot!).

22. Milyen görbét alkotnak az

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + t^2 \underline{j} + t^3 \underline{k}$$

görbe érintőinek az xy koordinátasíkkal való metszéspontjai?

23. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t - \underline{j} a \sin t + \underline{k} b e^t$$

görbe érintői az xy koordinátasíkot metszik.

24. Irjuk fel azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a(\sin t + \cos t) + \underline{j} a(\sin t - \cos t) + \underline{k} b e^{-t}$$

görbe érintői az xy koordinátasíkot metszik.

25. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t + \underline{j} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t + \underline{k} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$$

görbe illeszkedik az

$$x^2 + y^2 = z^2$$

kúpfelületre és annak minden alkotóját 45° -os szögben metszi. (Ezt a görbét kúpos spirálisnak nevezik.)

26. Határozzuk meg a Viviani-féle görbe érintőinek az őt tartalmazó hengerfelület alkotóival bezárt legkisebb szögét. (lásd a 42. feladatot!).

27. Irjuk fel az $x^2 + y^2 - 8 = 0$ és az $xy - z + 2 = 0$ felületek metszésvonalának érintővektorát a $P(2, 2, 6)$ pontban.

28. Irjuk fel a $z^2 + 2x - y^2 = 0$, $3x + y - z = 0$ egyenletrendszerrel adott görbe $P(0, 1, 1)$ pontjában az érintőegyenest egyenletrendszerét.

Ivhossz

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe t_1 és t_2 paraméterű pontjai köré eső darabjának ivhossza

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}| dt.$$

29. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab} t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}$$

térgörbe $0 \leq t \leq 1$ szakaszának az ivhosszát.

30. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + \underline{k} b t$$

hengeres csavarvonal tetszőleges pontja és a $t = 0$ paraméterű pontja közé eső darabjának az ivhosszát.

31. Irjuk fel a hengeres csavarvonal paraméteres egyenletrendszerét, ha az ivhosszat választjuk paraméternek.

32. Irjuk fel a kör paraméteres egyenletét úgy, hogy az ívhossz legyen a paraméter.

33. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(s) = \underline{i} \sin \frac{s}{3} + \underline{j} \cos \frac{s}{3} + \underline{k} \frac{\sqrt{8}}{3} s$$

térgörbe paraméterezése a természetes paraméter.

34. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(s) = \underline{i} \frac{s}{\sqrt{3}} \cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \underline{j} \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \underline{k} \frac{s}{\sqrt{3}}$$

térgörbe paraméterezése a természetes paraméter.

35. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos t + \underline{j} \sin t + \underline{k} \operatorname{ch} t$$

térgörbe egyenletét a $t = 0$ paraméterű ponttól mért ívhossz függvényében.

36. Irjuk fel a körevolvens egyenletét természetes paraméterezésben (lásd a 3. feladatot!).

Kisérő triéder

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe kísérő triéderének élvektorai az érintő, a főnormális és a binormális egységvektor, amelyek a következőképpen számíthatók ki:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|}, \quad \underline{n} = \frac{(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}}{|(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}|}, \quad \underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}.$$

A kísérő triéder síkjai áthaladnak a görbe adott pontján. A simulósík normálisa párhuzamos az $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}$, a normálsík az $\dot{\underline{r}}$, a rektifikáló sík pedig az $(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}$ vektorral, és ezen vektorok ismeretében a síkok egyenlete felírható.

37. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = 3t^2 \underline{i} + (2t + 3) \underline{j} + 3t^3 \underline{k}$$

térgörbe kísérő triéderének élvektorait és síkjainak egyen-

letét a görbe $t = -1$ paraméterű pontjában.

38. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} t \sin t + \underline{j} t \cos t + \underline{k} t e^t$$

görbe kísérő triéderének élvektorait a koordinátarendszer kezdőpontjában.

39. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} t \cos t - \underline{j} t \sin t + \underline{k} t$$

görbe simulósíkjának az egyenletét a $t = 0$ paraméterű pontjában.

40. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{t^3}{3}\underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ paraméterű pontjában a kísérő triéder síkjainak egyenletét.

41. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + e^t\underline{k}$$

térgörbe $t = 0$ paraméterű pontjában a kísérő triéder éle-
egyeneseinek egyenletrendszerét.

42. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{2}{t}\underline{i} + \ln t \underline{j} + t^2\underline{k}$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben a binormális párhuzamos az $x - y + 8z + 2 = 0$ egyenletű síkkal.

43. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos^2 t + \underline{j} \frac{1}{2} \sin 2t + \underline{k} \cos t$$

görbe $t = 0$ paraméterű pontjához tartozó simulósíkjának az origótól mért távolságát.

44. Bizonyítsuk be, hogy a hengeres csavarvonal kísérő triéderének élvektorai a csavarvonal tengelyével állandó szöget alkotnak (lásd a 44. feladatot!).

45. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} e^t \cos t + \underline{j} e^t \sin t + \underline{k} e^t$$

egyenletű kúpos spirális kísérő triéderének élvektorai állandó szöget zárnak be a z tengellyel.

46. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 2t)\underline{i} + (3t - 5)\underline{j} - (t^2 + 2)\underline{k}$$

függvény síkgörbét állít elő, és írjuk fel a görbe síkjának egyenletét!

47. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \frac{1+t}{1-t} \underline{i} + \frac{1}{1-t^2} \underline{j} + \frac{t}{1+t} \underline{k}$$

függvénnyel előállított görbe síkgörbe, és írjuk fel a síkjának egyenletét!

48. Mutassuk meg, hogy a Viviani-féle görbe normálsíkjai áthaladnak a görbét tartalmazó gömb középpontján (lásd a 42. feladatot!).

49. A hengeres csavarvonal főnormálisaira állandó hosszúságú szakaszokat mérünk fel. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a szakaszoknak a végpontjai egy másik hengeres csavarvonalon helyezkednek el (lásd a 44. feladatot!).

50. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$$

görbe $O(0,0,0)$ pontbeli $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ vektorai egybeesnek a koordinátatengelyek egységvektoraival. Írjuk fel a görbének az O pontbeli kísérő triéder síkjaira eső merőleges vetületeinek egyenletét.

51. Írjuk fel az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ és az $x^2 - y^2 = 3$ felületek metszésvonalaként adódó görbe simulósíkjának az egyenletét az $M(2,1,2)$ pontban.

52. Írjuk fel az $x = y^2$ és $x^2 = z$ felületek metszésvonalának $M(1,1,1)$ pontjában a főnormális és a binormális egye-

nesek egyenletrendszerét.

Görbület, torzió, Frenet képletek

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe görbülete
a $G = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}$ képlettel, a torziója pedig a $T = \frac{\ddot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|^2}$

képlettel számítható ki.

A Frenet képletek a következők:

$$\underline{t}' = G\underline{n},$$

$$\underline{n}' = -T\underline{t} + G\underline{b},$$

$$\underline{b}' = -T\underline{n},$$

ahol a vessző a természetes paraméter (ív hossz) szerinti deriválást jelöli.

53-57. Számítsuk ki az alábbi görbék görbületét és torzióját a megadott pontban:

$$53. \quad \underline{r}(t) = (t^2 - 1)\underline{i} + (t + 2)\underline{j} + (t^3 - t)\underline{k}, \\ t = 1.$$

$$54. \quad \underline{r}(t) = 2t\underline{i} + \ln t \underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t = 1.$$

$$55. \quad \underline{r}(t) = e^t\underline{i} + e^{-t}\underline{j} + \sqrt{2}t \underline{k}, \quad t = 0.$$

$$56. \quad \underline{r}(t) = \underline{i} t \cos t + \underline{j} t \sin t + \underline{k} at, \quad t = 0.$$

$$57. \quad \underline{r}(t) = \underline{i} \sin 2t + \underline{j}(1 - \cos 2t) + \underline{k} 2 \cos t, \\ t = \frac{\pi}{2}.$$

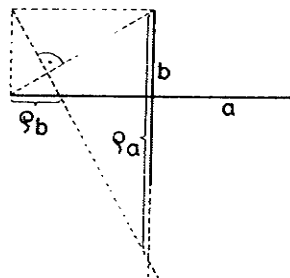
58. Mutassuk meg, hogy az $y = f(x)$ függvénnyel adott görbe görbülete

$$G = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

képlettel számítható minden olyan pontban, amelynek környezetében a függvény kétszer folytonosan differenciálható.

59. Számítsuk ki az $y^2 = 2px$ parabola görbületét a csúcspontjában.

60. Bizonyítsuk be, hogy az ellipszis nagy- és kistengelyének végpontjában a görbületi sugarak az alábbi ábra szerint szerkeszthetők:



61. Számítsuk ki a hengeres csavarvonal görbületét és torzióját a görbe tetszőleges pontjában (lásd a 42. feladatot!).

62. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = (3t - t^3) \underline{i} + 3t^2 \underline{j} + (3t + t^3) \underline{k}$$

görbe görbülete és torziója tetszőleges paraméterértékre egymással egyenlő.

63. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos^3 t + \underline{j} \sin^3 t + \underline{k} \cos 2t$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbületnek lokális minimuma van.

64. Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a(t - \sin t) + \underline{j} a(1 - \cos t) + \underline{k} 4a \cos \frac{t}{2}$$

görbe görbületi sugarának lokális minimuma van.

65. Határozzuk meg a Viviani-féle görbének azokat a

pontjait, amelyekben a görbületének szélsőértéke van (lásd a 42. feladatot!).

66. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{t} \underline{i} + t^2 \underline{j} + (2 + t^2) \underline{k}$$

térgörbe görbületi középpontját a $t = 1$ paraméterű pontban.

67-69. Irjuk fel az alábbi térgörbék tetszőleges pontjaihoz tartozó görbületi középpontok helyvektorát:

$$67. \underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + \underline{k} b t$$

hengeres csavarvonal.

$$68. \underline{r}(t) = \underline{i} e^t \cos t + \underline{j} e^t \sin t + \underline{k} e^t$$

kúpos spirális.

$$69. \underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + \sqrt{2}t \underline{k}.$$

70. Bizonyítsuk be, hogy a ciklois görbületi középpontjai az eredetivel egybevágó cikloist alkotnak (lásd az 4. feladatot!).

71. Számítsuk ki az $x^2 - 3y^2 - z = 0$ felület és az $x + y + z - 4 = 0$ sík metszésvonalának görbületét a $P(2, 1, 1)$ pontban.

72. Számítsuk ki az $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ és az $y^2 - 2x + z = 0$ felületek metszésvonalának görbületét és torzióját a $P(1, 1, 1)$ pontban.

73. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \operatorname{ch} t + \underline{j} a \operatorname{sh} t + \underline{k} at$$

görbe természetes egyenleteit.

74. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}(2t - \sin 2t) + \underline{j} \cos 2t + \underline{k} 4 \sin t$$

görbe $t = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontjában a $\underline{t}'$, $\underline{n}'$, $\underline{b}'$ vektorokat.

75. Írjuk fel a Frenet-képleteket az

$$\underline{r}(t) = \frac{t^2}{2} \underline{i} + \frac{2t^3}{3} \underline{j} + \frac{t^4}{4} \underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ paraméterű pontjában.

76. Írjuk fel az

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 1)\underline{i} + (t + 2)\underline{j} + (t^3 - t)\underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ pontjában a Darboux-féle vektort.

77. Bizonyítsuk be, hogy ha a térgörbét az $\underline{r}(s)$ ív-hossz szerint paraméterezett vektor-skalár függvény határozza meg, akkor a görbe tetszőleges pontjában teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$\underline{r}' \cdot \underline{r}''' = -G^2,$$

$$\underline{t} \underline{b} \underline{b}' = T,$$

$$\underline{r}'' \cdot \underline{r}''' = G \cdot G'.$$

F E L Ü L E T E K

Felületek egyenletei, lefejtethető vonalfelületek

A vonalfelületet az $\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + v\underline{l}(u)$ vektor-egyenlettel adhatjuk meg, ahol $\underline{r}(u)$ a vezérgörbe egyenlete, $\underline{l}(u)$ pedig az alkotóegyenés irányvektora. A vonalfelületet lefejtethetőnek nevezzük, ha mindegyik pontjában $\dot{\underline{r}}\dot{\underline{l}} = 0$ teljesül, ahol

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{du} \quad \text{és} \quad \dot{\underline{l}} = \frac{d\underline{l}}{du}.$$

78. Irjuk fel az $A(2, 3, 5)$, $B(4, 5, -6)$, $C(1, 3, 2)$ pontokra illeszkedő sík két paraméteres vektoregyenletét.

[79-81.] Irjuk fel a hengerfelület paraméteres egyenletrendszerét és implicit egyenletét, ha adott a vezérgörbéje és az alkotóegyeneseinek $\underline{a}$ irányvektora:

79. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = 4 \cos^3 u \underline{i} + 4 \sin^3 u \underline{j}$,
 $\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$.

80. vezérgörbe: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$, $\underline{a} = \underline{k}$.

81. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{j} 2 \cos u + \underline{k} 3 \sin u$,
 $\underline{a} = \underline{i}$.

[82-84.] Irjuk fel a kúpfelület egyenletét paraméteres és implicit alakban, ha adott a vezérgörbéje és a csúcspontja:

82. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i} \cos u + \underline{j} \sin u$, $C(0, 0, 1)$.

83. vezérgörbe: $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $z = 0$, $C(2, 5, -3)$.

84. vezérgörbe: $z = x^2$, $y = -1$, $C(2, 3, -4)$.

[85-86.] Írjuk fel annak a kúpfelületnek a két-paraméteres vektoregyenletét, amelynek adott a vezérgörbéje és a csúcspontja:

85. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = 2(\sin u - u \cos u)\underline{i} + 2(\cos u + u \sin u)\underline{k}$, $C(0, -8, 0)$.

86. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i} R \cos^2 u + \underline{j} R \cos u \sin u + \underline{k} R \sin u$, $C(0, 0, 0)$.

[87-97.] Írjuk fel a forgásfelület egyenletét, ha adott a meridiángörbéje és a forgástengelye:

87. meridiángörbe az xz koordinátasíkban elhelyezkedő, $A(a, 0, 0)$ középpontú, b sugarú kör ($a > b > 0$), forgástengely a z tengely.

88. meridiángörbe az xz koordinátasíkban elhelyezkedő origó középpontú, R sugarú kör, forgástengely az x tengely.

89. meridiángörbe: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$, $z = 0$, forgástengely az y tengely.

90. meridiángörbe: $2y - 3z = 7$, $x = 0$, forgástengely az y tengely.

91. meridiángörbe: $z = y^2 + 4$, $x = 0$, forgástengely a z tengely.

92. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = (3 + 2\cos u)\underline{i} + (4 + 2\sin u)\underline{j}$, forgástengely az y tengely.

93. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i} 5\cos^3 u + \underline{k} 5\sin^3 u$, forgástengely a z tengely.

94. meridiángörbe: hiperbola, forgástengely a képzetes tengely.

95. meridiángörbe: hiperbola, forgástengely a valós tengely.

96. meridiángörbe: $z = \sin y$, forgástengely az y tengely.

97. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = (2\cos u - \cos 2u)\underline{i} + (2\sin u - \sin 2u)\underline{j}$, forgástengely az x tengely.

98. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u) = u\underline{i} + u^2\underline{j} + u^3\underline{k}$$

görbe érintőegyenesei által alkotott felület kétparaméteres vektoregyenletét.

99. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u) = \underline{i} R \cos^2 u + \underline{j} R \cos u \sin u + \underline{k} R \sin u$$

egyenletű Viviani görbe érintőegyenesei által alkotott vonalfelület kétparaméteres vektoregyenletét.

100. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}a \cos t + \underline{j}a \sin t + b\underline{k}$$

hengeres csavarvonal binormálisai által alkotott felület kétparaméteres vektoregyenletét. Állapítsuk meg, hogy lefejtethető-e a kapott vonalfelület.

[101-106.] Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények milyen felületet határoznak meg és milyen görbék a paramétervonalak:

$$101. \underline{r}(u, v) = u\underline{i} + v\underline{j} + uv\underline{k}.$$

$$102. \underline{r}(u, v) = \underline{i}v \cos u + \underline{j}v \sin u + \underline{k}v.$$

$$103. \underline{r}(u, v) = \underline{i}v \cos u + \underline{j}v \sin u + \underline{k}u.$$

$$104. \underline{r}(u, v) = (u + \sin v)\underline{i} + (u + \cos v)\underline{j} + (u + a)\underline{k}.$$

$$105. \underline{r}(u, v) = \underline{i}a \cosh u \cos v + \underline{j}b \cosh u \sin v + \underline{k}c \sinh u, (a, b, c > 0).$$

$$406. \underline{r}(u,v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}u^2.$$

407. Bizonyítsuk be, hogy egy térgörbe érintőegyeneseiből álló vonalfelület lefejthető felület.

408. Bizonyítsuk be, hogy egy vonalfelület pontosan akkor lefejthető, ha minden érintősíkja egy-egy alkotóegyenese mentén érinti.

409. Bizonyítsuk be, hogy bármely lefejthető vonalfelület vagy hengerfelület, vagy kúpfelület, vagy egy térgörbe érintőegyeneseiből áll.

Felületi normális, érintősík

Az $\underline{r}(u,v)$ kétparaméteres vektorfüggvénnyel adott felület normálvektora $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$, az érintősík egyenlete pedig $(\underline{R} - \underline{r}) \cdot \underline{r}_u \underline{r}_v = 0$, ahol $\underline{R}(X,Y,Z)$ a sík futó pontjának koordinátái.

$z = f(x,y)$ függvénnyel adott felület normálvektora $\underline{m}(-p,-q,1)$, érintősíkjának egyenlete $Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$, ahol

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ha a felületnek az $F(x,y,z) = 0$ alakú implicit egyenletét ismerjük, akkor a felületi normális $\underline{m}(F'_x, F'_y, F'_z)$, az érintősík egyenletét pedig $(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0$ alakban írhatjuk fel.

410. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + (1+u)\cos v \underline{j} + (1+u)\sin v \underline{k}$$

felület $u = 1$, $v = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontján áthaladó paramétervonalainak egyenletét és számítsuk ki a paramétervonalak érintőinek hajlásszögét az adott pontban.

411. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + \cos u \sin v \underline{j} + \cos u \cos v \underline{k}$$

egyenletű felület $u = \frac{\pi}{4}$, $v = \frac{\pi}{3}$ pontjában a paramétervonalainak érintői által bezárt szöget.

112. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = (2u - v)\underline{i} + (u^2 + v^2)\underline{j} + (u^3 - v^3)\underline{k}$$

egyenletű felület $P(3,5,7)$ pontjában a paramétervonalak érintőegyeneseinek egyenletrendszerét.

113. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 - v^2)\underline{i} + 2uv\underline{j} + (u^2 + v^2)\underline{k}$$

egyenletű felület $u = 1, v = 2$ paraméterű pontjában a felületi normális egyenesének egyenletrendszerét.

[114-124.] Irjuk fel az alábbi felületek megadott pontjában az érintősík egyenletét:

$$114. \underline{r}(u,v) = (u^3 - 2v^2)\underline{i} + uv^2\underline{j} + (u^2v - u)\underline{k};$$

$$u = 1, v = -2.$$

$$115. \underline{r}(u,v) = (\cos u - v \sin u)\underline{i} + (\sin u - v \cos u)\underline{j} + (u + v)\underline{k}; \quad u = 0, v = 1.$$

$$116. \underline{r}(u,v) = u^4\underline{i} + 3uv^2\underline{j} + v^3\underline{k}; \quad u = 2, v = 1.$$

$$117. \underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + (u^2 + v^2)\underline{j} + (u^3 + v^3)\underline{k};$$

$$u = 2, v = 2.$$

$$118. \underline{r}(u,v) = u\underline{i} + (u^2 - 2v)\underline{j} + (u^3 - 3uv)\underline{k};$$

$$P(1,3,4).$$

$$119. xy^2 + z^3 = 12; \quad P(1,2,2).$$

$$120. z = x^3 + y^3; \quad P(1,2,9).$$

$$121. x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0; \quad P(3,1,-1).$$

$$122. x^2 + y^2 + z^2 = 169; \quad M(3,4,12).$$

$$123. \underline{r}(u,v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} av; \quad u = u_0,$$

$$v = v_0.$$

$$124. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad P(x_0, y_0, z_0).$$

125. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = (u + v)\underline{i} + (u - v)\underline{j} + uv \underline{k}$$

felületnek az $x + 2y + 2z = 32$ síkkal párhuzamos érintősíkját.

126. Mutassuk meg, hogy a $xyz = a^3$ felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal állandó térfogatú tetraéde-
reket alkotnak.

127. Irjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z - 3 = 0$ síkkal párhuzamos érintősíkjának az egyenletét.

128. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{x^{2/3}}{a^{2/3}} + \frac{y^{2/3}}{a^{2/3}} + \frac{z^{2/3}}{a^{2/3}} = 1$$

felület érintősíkjai által a koordinátatengelyekből ki-
metszett szakaszok négyzetösszege állandó.

129. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

egyenletű felület érintősíkjai a koordinátatengelyek-
ből állandó összegű darabokat vágnak le.

130. Az $x^n + y^n + z^n = a^n$ egyenletű felület
 $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősík messe a koor-
dinátatengelyeket rendre az A, B, C pontokban.
Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x_0}{OA} + \frac{y_0}{OB} + \frac{z_0}{OC} = 1$$

teljesül, ahol O a koordinátarendszer kezdőpontja.

134. Bizonyítsuk be, hogy a csavarvonal érintő-
egyenesei által előállított vonalfelület normálisai a
z-tengellyel állandó szöveget zárnak be.

432. Bizonyítsuk be, hogy a $z = \operatorname{tg} xy$ és az $x^2 - y^2 = a$ felületek érintősíkjai a két felület metszésvonalának pontjaiban merőlegesek egymásra.

Felületi görbék görbülete

Az $\underline{r}(u, v)$ kétparaméteres vektorfüggvénnyel elő-
állított felület normálmetszetéhez jutunk, ha az
 $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$ felületi normálisra és az $\frac{\dot{u}}{v}$ hányadossal
jellemzett $\underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$ érintőirányra illeszkedő nor-
málisikkal metsszük a felületet. A normálmetszet
görbülete

$$\frac{1}{R_n} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}.$$

Ugyenerre az érintőirányra illeszkedő ferdemetszet
görbülete

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{R_n},$$

ahol φ a ferdemetszet síkjának a normálmetszet sík-
jával alkotott hajlásszöge.

A képletekben szereplő Gauss-féle főmennyiségek a
következők:

$$E = \underline{r}_u^2, \quad F = \underline{r}_u \underline{r}_v, \quad G = \underline{r}_v^2,$$

$$L = \underline{m}^0 \underline{r}_{uu}, \quad M = \underline{m}^0 \underline{r}_{uv}, \quad N = \underline{m}^0 \underline{r}_{vv},$$

ahol

$$\underline{m}^0 = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|}.$$

433. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = e^u \underline{i} + e^v \underline{j} + (u - v) \underline{k}$$

felület $u = 0$, $v = 0$ paraméterű pontjában az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 2$

érintőirányra illeszkedő, a normálisikkal $\varphi = 30^\circ$ -os
szöget alkotó síkban fekvő ferdemetszet görbületét.

134. Adott a $z = 2x^2 + 4,5 y^2$ felület. Számítsuk ki a koordinátarendszer kezdőpontjában az x tengellyel 45° -os szöget bezáró érintőirányú normálmetszet görbületi sugarát.

135. Adott az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 + v^2)\underline{i} + (u^2 - v^2)\underline{j} + uv \underline{k}$$

felületen a $P(u = 1, v = 1)$ pont. Számítsuk ki a P pontban az

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{1}{2}$$

hányadossal jellemzett érintőirányhoz tartozó normálmetszet görbületét.

136. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 - 2uv)\underline{i} + (u^2 v^2 - v^3)\underline{j} + (u^4 - 2v^2)\underline{k}$$

felület $u = 1, v = -1$ pontjában az $\underline{i}(2, -11, z)$ érintővektorú normálmetszet görbületét.

137. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i} \cosh u \cos v + \underline{j} \sinh u \sin v + \underline{k} \tanh u$$

felület $u = 0, v = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontján áthaladó, az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 2$ hányadossal és $\varphi = 45^\circ$ -os szöggel jellemzett ferdemetszet görbületét.

138. Számítsuk ki a $z = \sqrt{2xy}$ felület $P(2, 4, 4)$ pontján áthaladó, az $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = 1$ hányadossal és $\varphi = 120^\circ$ -os szöggel jellemzett ferdemetszet görbületét.

139. Számítsuk ki a gömbfelület tetszőleges pontjában az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \lambda$ hányadossal jellemzett érintőirányú normálmetszetének és a $\varphi < 90^\circ$ -os szöggel jellemzett ferde metszetének görbületét. (Lásd a 88. feladatot.)

Főgörbületek, főirányok

A felület adott pontján áthaladó normálmetszetek görbületeinek $\frac{1}{R_1}$ és $\frac{1}{R_2}$ szélsőértékeit (ha léteznek) a

pontbeli főgörbületeknek, azokat az érintőirányokat pedig, amelyekben ezek fellépnek, főirányoknak nevezzük. Az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}}$ főirányok a

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

egyenletből határozhatók meg. A főgörbületek szorzatát és összegét a

$$K = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

képletekkel számíthatjuk ki.

A felület gömbi pontján áthaladó összes normálmetszet görbülete egyenlő (és nem zérus), ezért $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$

és minden irány főirány. Az olyan pontot, amelyen áthaladó összes normálmetszet görbülete zérus, planáris pontnak nevezik.

140. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = (u + v)\underline{i} + (u - v)\underline{j} + uv \underline{k}$$

egyenletű felület $u = 1$, $v = 1$ paraméterű pontjában a főirányokat és a főgörbületeket.

141. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} u$$

kúp felület $u = 1$, $v = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontjában a főirányokat és a főgörbületeket.

142. Számítsuk ki a

$$z = x^3 - y^3$$

felület $P(2, -1, 9)$ pontjában az összeg- és szorzatgörbületet.

143. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i} \cos u + \underline{j} v + \underline{k} \sin u$$

hengerfelület tetszőleges pontjában a főirányok megegyeznek a paramétervonalak érintőirányával.

144. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 + v^2)\underline{i} + 2uv\underline{j} + (u - v)\underline{k}$$

felület $u = -1, v = -1$ paraméterű pontjában a főirányok a paramétervonalak szögfelezői. Irjuk fel a főirányokra illeszkedő normálmetszetek síkjainak (fősíkok) egyenletét.

145. Mutassuk meg, hogy a

$$z = e^{-(x^2 + y^2)}$$

egyenletű felületnek az $A(0,0,1)$ pontja gömbi pont.

146. Forgassuk meg az $y = \sin x$ görbét az x tengely körül és keressük meg az így előálló felület gömbi pontjait.

147. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} v$$

csavarfelület tetszőleges pontjában az összeggörbület zérus. Állapítsuk meg, hogy hogyan helyezkednek el azok a pontok, amelyekben a szorzatgörbület állandó.

148. Forgassuk meg az $y = \cosh x$ egyenletű láncgörbét az x tengely körül és mutassuk meg, hogy az így keletkező katenoid minden pontjában az összeggörbület zérus.

149. Forgassuk meg az $x = a \sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u)$ egyenletrendszerű traktrixot a z tengely körül és számítsuk ki az így keletkező pszeudoszféra szorzatgörbületét a felület tetszőleges pontjában.

150. Keressük meg a

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}$$

hiperbolikus paraboloidnak azokat a pontjait, amelyekben az összeggörbület zérus.

Felületi pontok osztályozása

A felületnek azt a pontját, ahol $K > 0$, elliptikus pontnak, ahol $K < 0$, hiperbolikus pontnak és ahol $K = 0$, parabolikus pontnak nevezzük. K előjele megegyezik az $LN - M^2$ kifejezés előjelével, a $z = f(x, y)$ függvényvel való megadás esetén pedig az

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

kvadratikus forma előjelével.

[151-153.] Határozzuk meg az alábbi felületek megadott pontjának típusát:

$$151. \underline{r}(u, v) = (u^2 + v^2) \underline{j} + uv \underline{j} + \cos u \cos v \underline{k},$$

$$u = \frac{\pi}{2}, v = 0.$$

$$152. \underline{r}(u, v) = e^u \underline{i} + e^v \underline{j} + (u - v) \underline{k},$$

$$u = 0, v = 1.$$

$$153. z = 4x^2y - 2xy^2, \quad P(1, 0, 0).$$

[154-162.] Állapítsuk meg, hogy milyen jellegű pontjai vannak az alábbi felületeknek:

154. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}(a + b\cos u)\cos v + \underline{j}(a + b\sin u)\sin v + \underline{k} b\sin u$, $(a > b > 0)$ tórusz.

155. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}(u^2 + 1)$
forgáspárolloid.

156. $\underline{r}(u,v) = (2\cos u + v)\underline{i} + (2\sin u + v)\underline{j} + v\underline{k}$
hengerfelület.

157. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}v$
csavarfelület.

158. $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus párolloid.

159. $xyz = 1$.

160. $z = e^{-(x^2 + y^2)}$.

161. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

162. $z = \sin^2 \sqrt{x^2 + y^2}$.

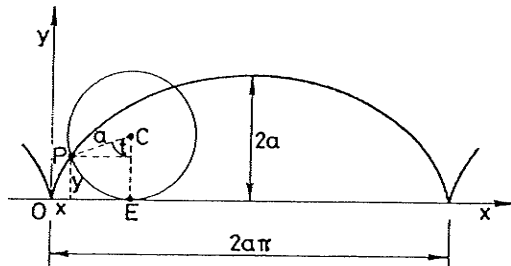
163. Határozzuk meg az

$\underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + uv\underline{j} + (u^3 + v^3)\underline{k}$
felület parabolikus pontjainak mértani helyét.

164. Határozzuk meg az

$\underline{r}(u,v) = v^3\underline{i} + u^2\underline{j} + (u + v)\underline{k}$
felület parabolikus pontjainak mértani helyét.

A FELADATOK MEGOLDÁSAI



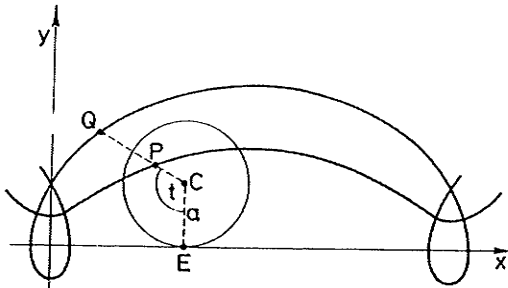
1. Válasszuk x-tengelynek a rögzített egyenest, és tegyük fel, hogy a P pont a koordináta-rendszer kezdőpontjából indul. Vegyük észre, hogy az OE szakasz hossza megegyezik a P

és E pontok közötti körív hosszával. A görbe P futó pontjának koordinátáit az 1. ábra segítségével írjuk fel:

$$x = a(t - \sin t),$$

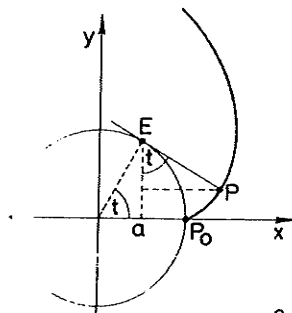
$$y = a(1 - \cos t).$$

2. $d < a$ esetén P, $d > a$ esetén pedig Q jelöli a görbe futó pontját (2. ábra).



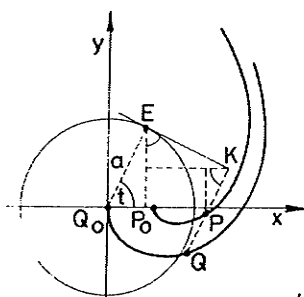
$$x = at - d \sin t,$$

$$y = a - d \cos t.$$



3.

3. Legyen a koordinátarendszer kezdőpontja a kör középpontjában és tegyük fel, hogy a P pont a P_0 pontból indul. Használjuk fel, hogy $EP = \widehat{EP}_0 = at$ (3. ábra), ekkor $x = a(\cos t + t \sin t)$,
 $y = a(\sin t - t \cos t)$.



4.

4. Helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját a kör középpontjába (4. ábra). Az E és K pontoknál megjelölt szögek megegyeznek a t szöggel, $KP = d$ és az EK érintőszakasz hossza at . A P pont koordinátái:

$$x = (a - d)\cos t + at \sin t,$$

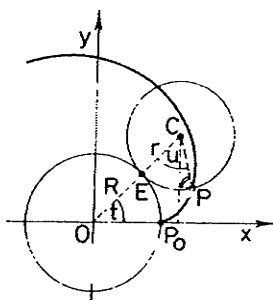
$$y = (a - d)\sin t - at \cos t.$$

$d = a$ esetén a Q pont pályája

arkhimeszesi spirális, amelynek egyenlete $x = at \sin t$,

$$y = -at \cos t.$$

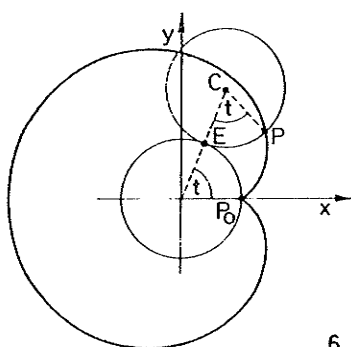
Olyan polárkoordinátarendszerben pedig, amelynek tengelye $a - y$ tengely, $r(\varphi) = a\varphi$ adódik.



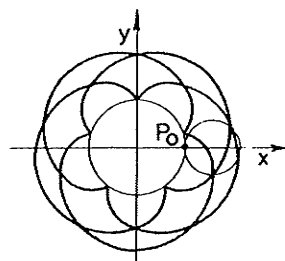
5.

5. A koordinátarendszer kezdőpontját helyezzük a mozdulatlan kör középpontjába. Tegyük fel, hogy a P pont a P_0 pontból indul ki, amely a kiindulási helyzetben egybeesik a két kör érintkezési pontjával (5. ábra). Mivel $\widehat{EP}_0 = \widehat{EP}$, azaz $Rt = r \cdot u$, $u = \frac{R}{r}t$.

A P csúcspontú megjelölt szög



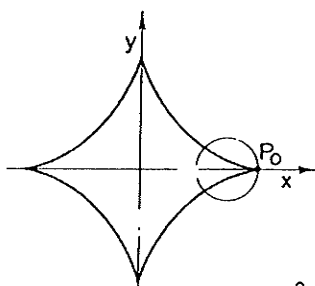
6.



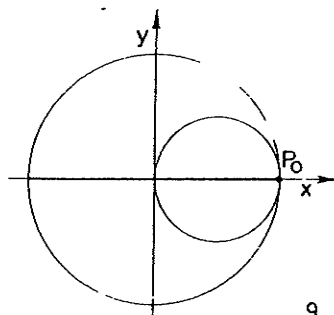
7.

$\pi - (t + u) = \pi - \frac{R+r}{r}t$, ezért a P pont koordinátái a következők: $x = (R+r)\cos t - r \cos \frac{R+r}{r}t$, $y = (R+r)\sin t - r \sin \frac{R+r}{r}t$. $r = R$ esetén kardioidot kapunk (6. ábra).

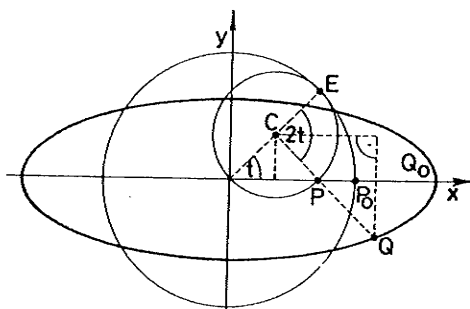
6. $x = (R-r)\cos t + r \cos \frac{R-r}{r}t$, $y = (R-r)\sin t - r \sin \frac{R-r}{r}t$. $R = 4r$ esetén asztroidot kapunk (8. ábra), $R = 2r$ esetén egyenes szakaszt (9. ábra).



8.



9



7. Tegyük fel, hogy a Q pont a Q_0 ponttól indul és $CQ = d$ állandó (10. ábra). A P kerületi pont t tetszőleges értékére az x tengelyen van (lásd a 6. feladatot), ezért Q koordinátái:

$$x = (r + d)\cos t \quad \text{és} \\ y = (r - d)\sin t.$$

10.

8. Egy rögzített t_0 pontban a ciklois érintőjének irányvektora $\vec{i}(t_0) = \hat{i} a(1 - \cos t_0) + \hat{j} a \sin t_0$.
A normális egyenes egyenlete:

$$a(1 - \cos t_0) [X - a(t_0 - \sin t_0)] + a \sin t_0 [Y - a(1 - \cos t_0)] = 0,$$

amelyet az $E(at_0, 0)$ pont (1. ábra) valóban kielégít. Az érintőre vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

9. A normális egyenletének Hesse-féle normálalakja

$$Y \sin t + X \cos t - a = 0.$$

A normálisnak az origótól mért távolsága minden t -re a .

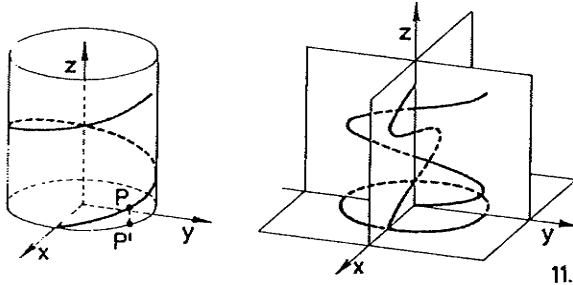
10. Megjegyzés: A 6. feladat megoldásaként felírt egyenletrendszerbe $R = 4r = a$ helyettesítés után trigonometrikus azonosságok felhasználásával az itt felírt egyenletrendszert kapjuk.

11. $\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + \underline{k} bt$ (11. ábra).

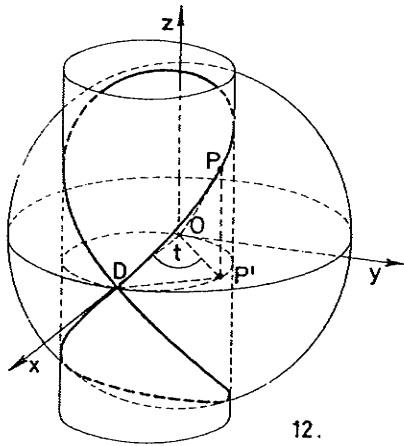
A vetületek: $x^2 + y^2 = a^2$;

$$y = a \sin \frac{z}{b};$$

$$x = a \cos \frac{z}{b}.$$



11.



12.

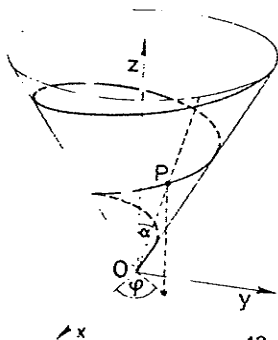
12. Ha a koordinátarendszert a 12. ábrán látható módon választjuk, a görbe egyenletrendszere $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, $x^2 + y^2 - Rx = 0$. Válasszuk paraméternek azt a t szöget, amelyet a P pont xy koordinátasíkra eső merőleges vetületének helyvektora a pozitív x tengellyel zár be. Mivel DOP' és POP' egybevágó derékszögű háromszögek, POP'

szög megegyezik a t szöggel. A P pont koordinátái tehát

$$x = R \cos^2 t, \quad y = R \cos t \sin t, \quad z = R \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

A P pont akkor illeszkedik a D csúcspontú, z tengellyel párhuzamos tengelyű kúpfelületre, ha a $\vec{DP}$ vektornak a $\underline{k}$ egységvektorral alkotott hajlásszöge állandó. Ez pedig teljesül

$$(\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}).$$



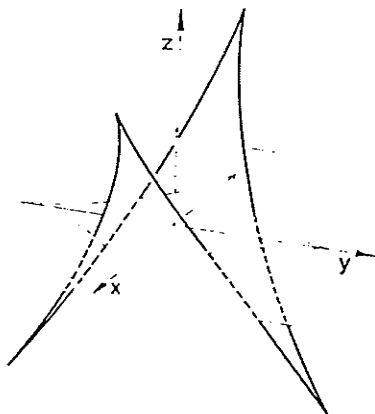
13.

13. Az egyenesnek a z tengellyel bezárt szöge legyen α . (13. ábra) A P pontnak az origótól mért távolságára $r = ct$, az xy síkra eső merőleges vetületére pedig $\varphi = \omega t$ teljesül, ahol c az egyenes menti egyenletes mozgás sebessége, ω pedig a z tengely körüli egyenletes forgómozgás szögsebessége. A P pont koordinátái tehát $x = ct \sin \alpha \cos \omega t$, $y = ct \sin \alpha \sin \omega t$, $z = ct \cos \alpha$. Az $a = \frac{c}{\omega} \sin \alpha$ és $b = \frac{c}{\omega} \cos \alpha$ állandók és a $t = \omega t$ paraméter bevezetése után a görbét leíró vektor-skalár függvény:

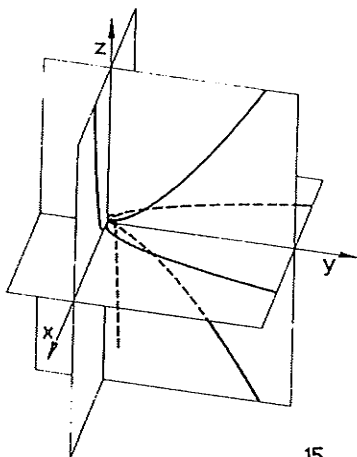
$$\underline{r}(t) = \underline{i} at \cos t + \underline{j} at \sin t + \underline{k} bt.$$

14. A görbe tetszőleges pontja kielégíti az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ egyenletet.

15. A görbe tetszőleges pontjának az xy síkra eső merőleges vetülete illeszkedik az $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ egyenletrendszerű asztroidra és $-a \leq z \leq a$ is teljesül.

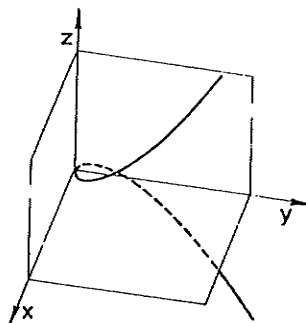


14.



15.

$$16. \begin{aligned} y &= x^2, z = 0; \\ z &= x^3, y = 0; \\ z^2 &= y^3, x = 0. \end{aligned}$$



17. A görbe érintővektora

$$\dot{\underline{r}}(t) = e^t \underline{i} - e^{-t} \underline{j} + 2t \underline{k},$$

az adott helyen

$$\dot{\underline{r}}(1) = e \underline{i} - \frac{1}{e} \underline{j} + 2 \underline{k}.$$

Az érintő áthalad az

$$\underline{r}(1) = e \underline{i} + \frac{1}{e} \underline{j} + \underline{k}$$

helyvektorú ponton, egyenletrendszere tehát

$$\frac{x-e}{e} = 1 - ey = \frac{z-1}{2}.$$

$$18. x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} z; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

19. A feltétel szerint a görbe érintővektora merőleges a sík normálvektorára, azaz $\dot{\underline{r}}(t) \cdot \underline{n} = 0$, ahol

$$\underline{n} = \underline{i} + 3 \underline{j} + 2 \underline{k}$$

a sík normálvektora. Ezért $t^3 + 3t^2 + 2t = 0$.

Innen $t_1 = -1$, $t_2 = -2$ ($t = 0$ esetén a derivált zérus vektor). A megfelelő érintőegyenesek egyenletrendszerei:

$$\frac{1}{4} - x = y + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - z, \quad \text{illetve}$$

$$\frac{x-1}{-8} = \frac{y+\frac{8}{3}}{4} = \frac{z-2}{-2}.$$

20. $P_1(-2, 12, 14)$, $P_2(-4, 3, -4)$.

21. A csavarvonal tetszőleges t paraméterű pontjához tartozó érintő egyenletrendszere

$$X = a \cos t - a \tau \sin t$$

$$Y = a \sin t + a \tau \cos t$$

$$Z = bt + b\tau.$$

A $Z = 0$ feltételből $\tau = -t$ adódik, az érintőnek az xy síkkal alkotott M metszéspontjára tehát

$$X_0 = a \cos t + a t \sin t,$$

$$Y_0 = a \sin t - a t \cos t,$$

$$Z_0 = 0$$

teljesül. Ha a pont végigfut a csavarvonalon, a megfelelő M pontok körevolvenst irnak le (lásd a 3. feladatot!).

22. Az érintők az xy síkot az $y = \frac{3}{4} x^2$ parabola pontjaiban metszik.

$$23. x^2 + y^2 = 2a^2.$$

$$24. x^2 + y^2 = 4a^2.$$

25. A görbe tetszőleges pontja kielégíti a kúpfelület egyenletét. A görbe t paraméterű pontján áthaladó kúpalkotó irányvektora $\underline{r}(t)$, amelynek a pontbeli $\dot{\underline{r}}(t)$ érintővektorral alkotott γ szögére minden t paraméterértékre $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ teljesül.

26. Az érintővektor a görbe t paraméterű pontjában $\dot{\underline{r}}(t) = -\underline{i} R \sin 2t + \underline{j} R \cos 2t + \underline{k} R \cos t$, amelynek a z tengellyel párhuzamos hengeralkotóval bezárt szögére

$$\cos^2 \gamma = \frac{\cos^2 t}{1 + \cos^2 t}$$

adódik. A γ szög abszolút értéke akkor a legkisebb, ha a $\frac{\cos^2 t}{1 + \cos^2 t}$ tört értéke a legnagyobb. Ez $\cos^2 t = 1$ esetén,

azaz $t = 0$ és $t = \pi$ értékre teljesül. Mindkét esetben a $D(R, 0, 0)$ pont adódik, amelyen a Viviani-féle görbe kétszer

halad át (lásd a 12. ábrát).

A $t = 0$ értékre $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ adódik, ahonnan $\gamma = \pm \frac{\pi}{4}$,

a $t = \pi$ értékre pedig $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ahonnan $\gamma = \pm \frac{3\pi}{4}$.

27. A $t = x$ paraméter választással a két felület metszészonalát $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ vektor-skalár függvény írja le, ahol $y(t)$ és $z(t)$ a két felület egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása. Az érintővektor $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \dot{z}(t)\underline{k}$. Az $\dot{y}(t)$ és $\dot{z}(t)$ differenciáhányadosok kiszámításához deriváljuk mindkét egyenletet x szerint:

$$2x + 2y\dot{y} = 0$$

$$y + x\dot{y} - \dot{z} = 0.$$

Helyettesítsük be a P pont koordinátáit, ekkor a

$$4 + 4\dot{y} = 0$$

$$2 + 2\dot{y} - \dot{z} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása $\dot{y} = -1$, $\dot{z} = 0$, tehát az érintővektor az adott P pontban $\dot{\underline{r}} = \underline{i} - \underline{j}$.

28. A $t = x$ paraméterválasztás esetén az egyenletek x szerinti deriválásával a

$$2z\dot{z} + 2 - 2y\dot{y} = 0$$

$$3 + \dot{y} - \dot{z} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek az adott pontban nincs megoldása, vagyis az $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ vektor-skalár függvény az adott pontban nem deriválható.

Válasszuk most paraméternek a z változót és deriváljuk mindkét egyenletet z szerint. Ekkor a

$$2z + 2\dot{x} - 2y\dot{y} = 0$$

$$3\dot{x} + \dot{y} - 1 = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelyből az adott pontban $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$ adódik. Mivel az $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + t\underline{k}$ függvény deriváltja az $\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \underline{k}$ vektor, a keresett érintővektor koordinátái $\dot{\underline{r}}(0, 1, 1)$.

Az érintőegyenes egyenletrendszere $x = 0$, $y = z$.

$$29. \quad \underline{\dot{r}}(t) = a\underline{i} + 2\sqrt{3ab} \, t\underline{j} + 6bt^2\underline{k}$$

$$|\underline{\dot{r}}(t)| = a + 6bt^2$$

$$s = \int_0^1 (a + 6bt^2) dt = a + 2b.$$

$$30. \quad s = \sqrt{a^2 + b^2} \, t.$$

$$31. \quad \underline{r}(s) = \underline{i} \, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{j} \, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \\ + \underline{k} \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{lásd az előző feladatot!}).$$

$$32. \quad x = R \cos \frac{s}{R}, \quad y = R \sin \frac{s}{R}.$$

33. Azt kell megmutatni, hogy

$$|\underline{r}'(s)| = \left| \frac{d\underline{r}}{ds} \right| = 1 \quad \text{teljesül.}$$

34. Lásd az előző feladatot!

35. A görbe tetszőleges pontjának a $t = 0$ paraméterű ponttól mért ívhossz-távolsága

$$s(t) = \int_0^t |\underline{\dot{r}}(t)| \, dt = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{sh}^2 t} \, dt = \\ = \int_0^t \operatorname{ch} t \, dt = \operatorname{sh} t.$$

Az $s(t) = \operatorname{sh} t$ függvény inverze $t(s) = \operatorname{arsh} s$. Ha végrehajtjuk ezt a paramétertranszformációt, a görbének az

$\underline{r}(s) = \underline{i} \cos(\operatorname{arsh} s) + \underline{j} \sin(\operatorname{arsh} s) + \underline{k} \sqrt{1 + s^2}$ egyenletére jutunk.

$$36. \quad R^2 = 2as.$$

37. Az érintő irányába mutató egységvektor

$$\underline{t} = -\frac{6}{11} \underline{i} + \frac{2}{11} \underline{j} + \frac{9}{11} \underline{k},$$

a főnormális $\underline{n} = -\frac{7}{11} \underline{i} + \frac{6}{11} \underline{j} - \frac{6}{11} \underline{k}$,

a binormális $\underline{b} = -\frac{6}{11} \underline{i} - \frac{9}{11} \underline{j} - \frac{2}{11} \underline{k}$.

A kísérő triéder síkjai áthaladnak az $\underline{r}(-1) = 3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$ helyvektorú ponton.

A simulósík egyenlete $6x + 9y + 2z - 21 = 0$, rektifikáló síké $7x - 6y + 6z + 3 = 0$, a normálsík pedig $6x - 2y - 9z - 43 = 0$.

$$38. \underline{t} = \frac{\underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{2}}, \quad \underline{n} = \frac{2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{6}}, \quad \underline{b} = \frac{\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}}{\sqrt{3}}.$$

$$39. x - z = 0.$$

$$40. \text{A simulósík } x - 3z + 2 = 0, \text{ a rektifikáló sík } 3x - 10y + z + \frac{68}{3} = 0, \text{ a normálsík } 3x + y + z + \frac{2}{3} = 0.$$

$$41. \text{Az érintő } x = t, y = 0, z = 1 + t, \text{ a binormális } \frac{x}{-2} = -y = \frac{z-1}{2}, \text{ a főnormális } -x = \frac{y}{4} = z - 1.$$

$$42. A(1, \ln 2, -4).$$

$$43. \underline{\dot{r}}(t) = -\sin 2t \underline{i} + \cos 2t \underline{j} - \sin t \underline{k}$$

$$\underline{\ddot{r}}(t) = -2\cos 2t \underline{i} - 2\sin 2t \underline{j} - \cos t \underline{k}$$

$$\underline{\dot{r}}(0) = \underline{j}$$

$$\underline{\ddot{r}}(0) = -2\underline{i} - \underline{k}.$$

A simulósík Hesse-féle normálegyenlete:

$$-\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2z}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.$$

$$\text{Az origó és a simulósík távolsága } |d| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$44. \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t \underline{i} + a \cos t \underline{j} + b\underline{k}),$$

$$\underline{n} = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j},$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t \underline{i} - b \cos t \underline{j} + a \underline{k}).$$

A csavarvonal tengelyének irányvektora a $\underline{k}$ vektor.

$$\cos(\underline{t}, \underline{k}) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos(\underline{n}, \underline{k}) = 0, \quad \cos(\underline{b}, \underline{k}) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$45. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\underline{i}(\cos t - \sin t) + \underline{j}(\sin t + \cos t) + \underline{k}],$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\underline{i}(\sin t + \cos t) + \underline{j}(\cos t - \sin t)],$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{6}} [\underline{i}(\sin t - \cos t) - \underline{j}(\sin t + \cos t) + 2\underline{k}].$$

$$\cos(\underline{t}, \underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos(\underline{n}, \underline{k}) = 0, \quad \cos(\underline{b}, \underline{k}) = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

46. Ha a görbe binormálisa állandó, akkor simulósíkja a görbe minden pontjában ugyanaz, tehát a görbe síkgörbe. A görbe síkjának normálvektora $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = -6\underline{i} - 4\underline{j} - 6\underline{k}$, egy pontja például az $\underline{r}(0) = -5\underline{j} - 2\underline{k}$ helyvektorú pont, az egyenlete tehát $3x + 2y + 3z + 16 = 0$.

47. A feladat megoldását úgy is elvégezhetjük, mint a 46. feladatét. Most más megoldást mutatunk. Válasszuk ki a görbe három tetszőleges pontját és írjuk fel a három pont által meghatározott sík egyenletét ($x - 4y - 2z + 3 = 0$). Ezután mutassuk meg, hogy a görbe tetszőleges t paraméterértékhez tartozó pontja kielégíti ennek a síknak az egyenletét.

Megjegyzés: Egy görbéről úgy is beláthatjuk, hogy síkgörbe, hogy kiszámítjuk a torzióját a t paraméterű tetszőleges pontjában. Ha az eredmény zérus, a görbe síkgörbe.

48. Írjuk fel a görbe t paraméterű pontjában a normál-sík egyenletét (az érintővektort lásd a 26. feladat megoldásában) és igazoljuk, hogy az $O(0,0,0)$ pont kielégíti ezt az egyenletet.

49. A főnormális egységvektor

$$\underline{n} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Ha a felmért szakaszok hossza λ , akkor a végpontok a

$\underline{r}(t) = (a - \lambda)\cos t \underline{i} + (a - \lambda)\sin t \underline{j} + b\underline{k}$
vektor-skálár függvény által leírt hengeres csavarvonalon
helyezkednek el.

50. $\underline{t} = \underline{i}$, $\underline{n} = \underline{j}$, $\underline{b} = \underline{k}$.

A vetületek egyenletét lásd a 46. feladat megoldásánál!

54. $4x - y + z - 9 = 0$.

52. A főnormális egyenletrendszere $\frac{x-1}{34} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$,
a binormálisé $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$.

53. $\dot{\underline{r}}(t) = 2t\underline{i} + \underline{j} + (3t^2 - 1)\underline{k}$

$\ddot{\underline{r}}(t) = 2\underline{i} + 6t\underline{k}$

$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{k}$

$\dot{\underline{r}}(1) = (2, 1, 2)$

$\ddot{\underline{r}}(1) = (2, 0, 6)$

$\ddot{\underline{r}}(1) = (0, 0, 6)$

$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = (6, -8, -2)$

$G = \frac{2\sqrt{26}}{27}$, $T = \frac{-3}{26}$.

54. $G = \frac{2}{9}$, $T = \frac{-2}{9}$.

55. $G = -T = \frac{1}{2}$.

56. $G = \frac{2}{a^2 + 1}$, $T = \frac{3a}{2(a^2 + 1)}$.

57. $G = \frac{1}{2}$, $T = -\frac{3}{8}$.

58. Utmutatás: Állítsuk elő a görbét a $t = x$ paraméter
választással az $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j}$ vektor-skálár függvénnyel

és helyettesítsünk a $G = \frac{|\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}|}{|\dot{\underline{x}}|^3}$ képletbe.

$$59. G = \frac{1}{p}.$$

60. Az ellipszis paraméteres vektoregyenlete

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} b \sin t.$$

A görbület a nagytengely végpontjában $G(0) = \frac{b}{a^2}$, a kistengely végpontjában pedig $G(\frac{\pi}{2}) = \frac{a}{b^2}$, amiből az ábrán látható szerkesztési eljárás közvetlenül adódik.

$$61. G = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad T = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

$$62. G = T = \frac{1}{3(t^2 + 1)^{3/2}}.$$

63. A keresett pontok a $t = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) paraméterértékeknek felelnek meg. (A görbét lásd a 14. ábrán).

64. A keresett pontok a $t = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) paraméterértékeknek felelnek meg.

65. A görbület a görbe futópontjában

$$G(t) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{5 + 3 \cos^2 t}{(1 + \cos^2 t)^3}}.$$

Mivel a $G^2(t)$ függvénynek ugyanott van lokális szélsőértéke, mint a $G(t)$ függvénynek, a

$$\frac{dG^2(t)}{dt}$$

differentiálhányadost készítjük el, amelynek számlálójában $3(1 + \cos^2 t)^2(4 + 2\cos^2 t) \sin 2t$ áll, a nevezője pedig mindig pozitív.

A $\frac{dG^2(t)}{dt}$ zérushelyei $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ($0 \leq t < 2\pi$) és ezeken a helyeken előjelet is vált. A görbületnek tehát a $D(R, 0, 0)$ pontban lokális minimuma, a $(0, 0, \pm R)$ pontokban pedig lokális maximuma van.

66. Az adott pontban a főnormális egységvektor
 $\underline{n} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (4\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})$, a görbület $G = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

A görbületi középpont helyvektora

$$\begin{aligned}\underline{\rho} &= \underline{r}(1) + \frac{1}{G} \underline{n} = \underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} (4\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) = \\ &= 4\underline{i} + \frac{7}{4} \underline{j} + \frac{15}{4} \underline{k}.\end{aligned}$$

67. Használjuk fel a 39. feladat megoldását

$$\lambda = \frac{1}{G} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

helyettesítéssel (lásd az 57. feladatot!).

68. A főnormális egységvektor a görbe futópontjában

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\underline{i}(\cos t + \sin t) + \underline{j}(\cos t - \sin t)],$$

a görbület $G = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$, tehát a görbületi középpontok a

$$\begin{aligned}\underline{\rho}(t) &= -e^t \left(\frac{1}{2} \cos t + \frac{3}{2} \sin t \right) \underline{i} + e^t \left(\frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t \right) \underline{j} + \\ &\quad + e^t \underline{k}\end{aligned}$$

egyenletű görbén helyezkednek el.

69. A főnormális egységvektor

$$\begin{aligned}\underline{n} &= \frac{1}{(e^t + e^{-t})^2} \left[\sqrt{2}(e^t + e^{-t}) \underline{i} + \sqrt{2}(e^t + e^{-t}) \underline{j} + \right. \\ &\quad \left. + (e^{-2t} - e^{2t}) \underline{k} \right],\end{aligned}$$

a görbület

$$G = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

A görbületi középpontok helyvektora tehát

$$\underline{\rho}(t) = (2e^t + e^{-t}) \underline{i} + (e^t + 2e^{-t}) \underline{j} + \sqrt{2} \left(t - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} \right) \underline{k}.$$

70. A cikloist előállító függvény

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a (t - \sin t) + \underline{j} a (1 - \cos t).$$

A t paraméterű pontban a görbület

$$G = \frac{1}{a \sqrt{2(1 - \cos t)}}, \text{ a főnormális}$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos t)}} (\underline{i} \sin t - \underline{j}(1 - \cos t)).$$

A görbületi középpontok által alkotott görbét tehát a

$$\underline{q}(t) = \underline{r}(t) + \frac{1}{G} \underline{n}(t) = \underline{i} a (t + \sin t) + \underline{j} a (-1 + \cos t)$$

állítja elő, amelyből $\tau = t - \pi$ helyettesítéssel

$\underline{q}(t) = \underline{r}(t) + a \pi \underline{i} - 2a \underline{j}$ adódik, vagyis az eredetiből eltolással keletkező ciklois.

71. Válasszuk paraméternek az x változót és deriváljuk x szerint mindkét egyenletet.

Az első deriválás után a $2x - 6y\dot{y} - \dot{z} = 0$

$$1 + \dot{y} + \dot{z} = 0,$$

a második deriválás után a $2 - 6\dot{y}^2 - 6y\ddot{y} - \ddot{z} = 0$

$$\ddot{y} + \ddot{z} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk.

Az adott pontban az első egyenletrendszer megoldása

$\dot{y} = 1$, $\dot{z} = -2$, a másodiké pedig $\ddot{y} = -\frac{4}{5}$, $\ddot{z} = \frac{4}{5}$.

Tehát a derivált vektorok koordinátái $\underline{\dot{r}}(1, 1, -2)$ és

$\underline{\ddot{r}}(0, -\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$.

Innen a görbületre a $G = \frac{\sqrt{2}}{45}$ értéket kapjuk.

$$72. G = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad T = 1.$$

$$73. \text{ A görbe tetszőleges pontjában } G = T = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}.$$

A futópontnak a $t = 0$ paraméterű ponttól mért ívhossz-távolsága

$$s = \int_0^t |\dot{\underline{x}}| dt = \int_0^t \sqrt{2}a \operatorname{ch} t dt = \sqrt{2}a \operatorname{sh} t.$$

Az $s(t) = \sqrt{2}a \operatorname{sh} t$ függvény inverze $t = \operatorname{arsh} \frac{s}{a\sqrt{2}}$.

Ezt a paramétertranszformációt végrehajtva

$$G = T = \frac{a}{2a^2 + s^2}$$

adódik.

74. Helyettesítsük be a Frenet-formulákba az adott pontban kiszámított

$$\underline{t} = \underline{i}, \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{k}, \quad \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{k}$$

vektorokat és a $G = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $T = 0$ értékeket.

Igy $\underline{t}' = \frac{1}{4} \underline{j} - \frac{1}{4} \underline{k}$, $\underline{n}' = -\frac{\sqrt{2}}{4} \underline{i}$ és $\underline{b}' = \underline{0}$ adódik.

$$75. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2, 1)$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1)$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1)$$

$$G = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad T = \frac{1}{3}$$

$$\underline{t}' = (-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6})$$

$$\underline{n}' = \frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$$

$$\underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}).$$

76. A Darboux-féle vektor $\underline{d} = T\underline{t} + G\underline{b}$.

Mivel az adott pontban $\underline{t} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{26}} (3, -4, -1)$,

$$G = \frac{2\sqrt{26}}{27} \quad \text{és} \quad T = -\frac{3}{26}, \quad \underline{d} = (\frac{2}{9} - \frac{1}{13})\underline{i} - (\frac{8}{27} + \frac{1}{26})\underline{j} - (\frac{2}{27} + \frac{1}{13})\underline{k}.$$

Megjegyzés: A Darboux-féle vektor a görbén egységnyi sebességgel mozgó ponthoz tartozó kísérő triéder pillanatnyi szögsebességvektora és segítségével a Frenet-féle képletek a következő képpen írhatók:

$$\underline{t}' = \underline{d} \times \underline{t}, \quad \underline{n}' = \underline{d} \times \underline{n}, \quad \underline{b}' = \underline{d} \times \underline{b}.$$

77. A Frenet-képletek felhasználásával

$$\underline{r}'' = (\underline{G}\underline{n})' = \underline{G}'\underline{n} + \underline{G}\underline{n}' = \underline{G}'\underline{n} - \underline{G}^2\underline{t} + \underline{G}\underline{T}\underline{b}.$$

Ha ezt a vektort skalárisan megszorozzuk az $\underline{r}' = \underline{t}$ vektorral, az első állítást kapjuk.

Mivel $\underline{t}\underline{b}\underline{b}' = -\underline{T}\underline{t}\underline{b}\underline{n}$ és $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ jobbrendszer alkotnak, $\underline{t}\underline{b}\underline{n} = -1$.

Az $\underline{r}'''$ vektornak és az $\underline{r}'' = \underline{t}' = \underline{G}\underline{n}$ vektornak a skaláris szorzata valóban $\underline{G} \cdot \underline{G}'$.

78. A sík tetszőleges pontjának helyvektora

$$\underline{r}(u, v) = \vec{OA} + u \cdot \vec{AC} + v \cdot \vec{AB}$$

alakban állítható elő. Az adatok behelyettesítésével

$$\underline{r}(u, v) = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k} + u(-\underline{i} - 3\underline{k}) + v(2\underline{i} + 2\underline{j} - 4\underline{k})$$

adódik, rendezés után az

$$\underline{r}(u, v) = (2 - u + 2v)\underline{i} + (3 - 2v)\underline{j} + (5 - 3u - 4v)\underline{k}$$

egyenletet kapjuk.

79. A hengerfelület futó pontjának helyvektora

$\underline{r}(u, v) = \underline{r}_1(u) + v\underline{a}$ alakban állítható elő, ahol $\underline{r}_1(u)$ a vezérgörbe egyenlete (itt asztroid), $\underline{a}$ pedig az alkotó irányvektora. Eszerint az adott hengerfelület vektor-egyenlete a következő:

$$\underline{r}(u, v) = 4\cos^3 u \underline{i} + 4\sin^3 u \underline{j} + v(3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}), \text{ vagyis}$$

$$\underline{r}(u, v) = (4\cos^3 u + 3v)\underline{i} + (4\sin^3 u + 2v)\underline{j} + 4v\underline{k}.$$

$$\text{Ha az } x = 4\cos^3 u + 3v,$$

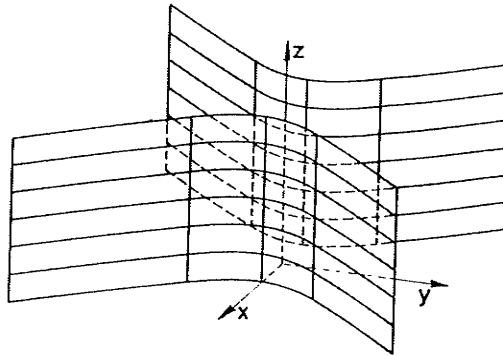
$$y = 4\sin^3 u + 2v,$$

$$z = 2v$$

egyenletrendszerből kiküszöböljük az u és v paramétereket, a felület $(2x - 3z)^{2/3} + (2y - 2z)^{2/3} = 4$ alakú implicit egyenletét kapjuk.

$$-2 \leq u \leq 2$$

$$0 \leq v \leq 3$$



16.

80. Az adott hiperbola paraméteres vektoregyenlete

$$\underline{r}_1(u) = \underline{i} \operatorname{ch} u + \underline{j} \operatorname{sh} u.$$

A hengerfelület vektoregyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} \operatorname{ch} u + \underline{j} \operatorname{sh} u + \underline{k} v,$$

illetve

$$x^2 - y^2 = 4.$$

84. Az adott vezérgörbe ellipszis. A keresett egyenletek

$$\underline{r}(u, v) = v \underline{i} + 2 \cos u \underline{j} + 3 \sin u \underline{k}$$

és

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

82. Ha $\underline{r}(u)$ a vezérgörbét leíró függvény, $\underline{c}$ pedig a csúcs helyvektora, akkor a kúpfelület tetszőleges pontjába mutató vektor

$$\underline{r}(u, v) = \underline{c} + v(\underline{r}(u) - \underline{c}).$$

Az adatok behelyettesítésével

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} v \cos u + \underline{j} v \sin u + \underline{k} (1 - v)$$

adódik. $0 \leq v \leq 1$ értékeire a kúpfelületnek az adott egyéskör és a csúcs közé eső darabját kapjuk.

Az implicit egyenlet $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$.

Megjegyzés: A kúpfelület vektoregyenlete az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + v(\underline{c} - \underline{r}(u))$$

alakban is előállítható.

83. A vezérgörbe kör, amelynek paraméteres vektoregyenlete $\underline{r}(u) = 2\cos u \underline{i} + (2 + 2\sin u) \underline{j}$.

A keresett egyenletek

$$\underline{r}(u, v) = (2 + 2v \cos u - 2v) \underline{i} + (5 + 2v \sin u - 3v) \underline{j} + (3 - 3v) \underline{k},$$

illetve

$$(3x - 2z)^2 + 9(y - 2 - z)^2 - 4(3 - z)^2 = 0.$$

84. Az adott parabola előállítható pl. az

$$\underline{r}(u) = u \underline{i} - \underline{j} + u^2 \underline{k}$$

vektoregyenlettel.

A kúpfelület egyenletei

$$\underline{r}(u, v) = (2 + uv - v) \underline{i} + (3 - 4v) \underline{j} + (-4 + u^2 v + 4v) \underline{k},$$

illetve

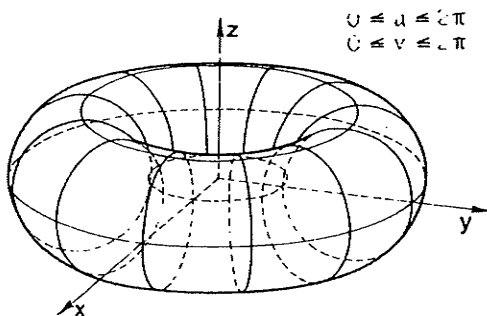
$$(2x - y - 4)^2 + (3 - y)^2 - (z + 4)(3 - y) = 0.$$

85. A vezérgörbe körevolvens.

$$\underline{r}(u, v) = 2v(\sin u - u \cos u) \underline{i} + 8(v - 4) \underline{j} + 2v(\cos u + u \sin u) \underline{k}.$$

86. A vezérgörbe a Viviani görbe (lásd a 12. ábrát).

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} R v \cos^2 u + \underline{j} R v \cos u \sin u + \underline{k} R v \sin u.$$



17.

87. A meridián-görbe paraméteres vektoregyenlete

$$\underline{r}(u) = (a + b \cos u) \underline{i} + b \sin u \underline{k}.$$

Forgassuk a kört a z tengely körül po-

zitiv irányban és válasszuk v paraméternek a meridián-görbe síkjának az xz koordinátasíktól való elfordulásának szögét. Ekkor a keletkező tórusz vektoregyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k} b \sin u \quad (0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi).$$

88. A megforgatott kör vektoregyenlete

$$\underline{r}(u) = \underline{i} R \cos u + \underline{k} R \sin u.$$

Ha v a pozitív irányban elforgatott kör síkjának az xz koordinátasíkkal bezárt szöge, akkor

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} R \cos u + \underline{j} R \sin u \sin v + \underline{k} R \sin u \cos v \quad (0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi).$$

A paraméterek kiküszöbölésével a gömb ismert

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

egyenletét kapjuk.

89. A meridiángörbe az

$$\underline{r}(u) = (3 + 2 \cos u) \underline{i} + 2 \sin u \underline{j}$$

egyenletű kör. A keletkező tórusz egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(3 + 2 \cos u) \cos v + \underline{j} 2 \sin u + \underline{k}(3 + 2 \cos u) \sin v \quad (0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi),$$

illetve

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 13)^2 + 36y^2 - 144 = 0.$$

90. Az adott egyenes paraméteres egyenletrendszere pl.

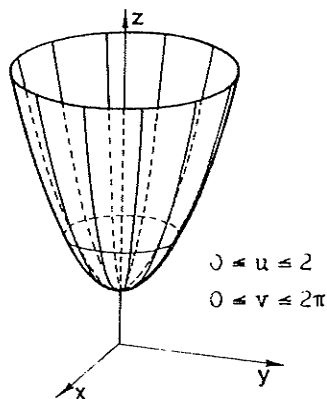
$$x = 0, \quad y = 3t + 2, \quad z = 2t - 1$$

A forgatással keletkező kúpfelület egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(2u - 1) \sin v + \underline{j}(3u + 2) + \underline{k}(2u - 1) \cos v,$$

ahol v a meridiánsíknak az yz koordinátasíktól mért elfordulási szöge. Ennek a kúpfelületnek az implicit egyenlete

$$9x^2 + 9z^2 - (2y - 7)^2 = 0.$$



18.

91. Az adott parabolát a tengelye körül forgatjuk meg, így forgásparaboloid keletkezik, amelynek egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}(u^2 + 1),$$

ahol v az elforgatott meridiángörbe síkjának az xz síkkal bezárt szöge. A felület implicit egyenlete

$$x^2 + y^2 = z - 1,$$

amelyhez közvetlenül is eljuthatunk. Legyen a forgásparaboloid tetszőleges pontja $P(X, Y, Z)$, amely az adott parabola $P'(0, y, z)$ pontjának a z tengely körüli elforgatásával keletkezik. A koordináták között a következő összefüggések írhatók fel: $X^2 + Y^2 = y^2$, $Z = z$.

Mivel $z = y^2 + 1$ teljesül, ezért a felület futó pontjának koordinátái az $X^2 + Y^2 = Z - 1$ egyenletet elégítik ki, amely éppen a felület fent felírt egyenlete.

92. A meridiángörbe kör, a keletkező tórusz egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(3 + 2\cos u)\cos v + \underline{j}(4 + 2\sin u) + \underline{k}(3 + 2\cos u)\sin v.$$

93. A meridiángörbe asztroid, a felület egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} 5\cos^3 u \cos v + \underline{j} 5\cos^3 u \sin v + \underline{k} 5 \sin^3 u,$$

illetve

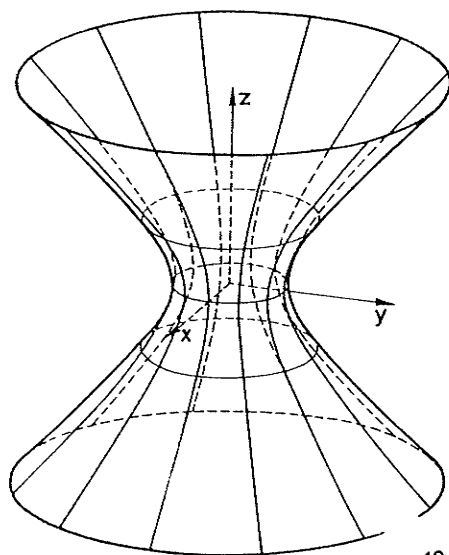
$$\left[\left(\frac{x}{5} \right)^2 + \left(\frac{y}{5} \right)^2 \right]^{1/3} + \left(\frac{z}{5} \right)^{2/3} = 1.$$

94. Legyen a meridiángörbe az xz koordinátságban

$$\underline{r}(u) = \underline{i}a \cosh u + \underline{k}c \sinh u$$

és a forgástengely a z tengely.

A keletkező felület egyköpenyű forgáshiperboloid.



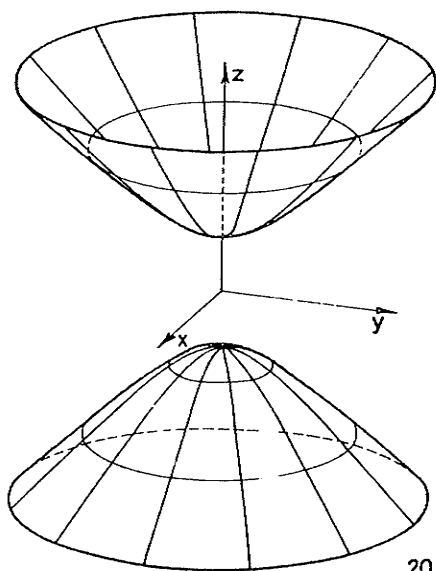
19.

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}a \cosh u \cos v + \underline{j}a \cosh u \sin v + \underline{k}c \sinh u,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$-2 \leq u \leq 2$$

$$0 \leq v \leq 2\pi$$



20.

95. Legyen a meridián-görbe az xz koordináta-síkban $\underline{r}(u) = \underline{i}a \sinh u + \underline{k}c \cosh u$ és a forgástengely a z tengely. A keletkező felület kétköpenyű forgáshiperboloid.

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}a \sinh u \cos v + \underline{j}a \sinh u \sin v + \underline{k}c \cosh u,$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

$$-2 \leq u \leq 2, 4$$

$$0 \leq v \leq 2\pi$$

96. $\underline{r}(u, v) = \underline{i} \sin u \cos v + \underline{j} u + \underline{k} \sin u \sin v.$

97. A meridiángörbe kardioid (lásd a 6. ábrát).

$$\underline{r}(u, v) = (2\cos u - \cos 2u)\underline{i} + (2\sin u - \sin 2u)\cos v \underline{j} + (2\sin u - \sin 2u)\sin v \underline{k}.$$

98. A felület futó pontjának helyvektora

$$\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + v \cdot \underline{\dot{r}}(u).$$

Igy

$$\underline{r}(u, v) = (u + v)\underline{i} + (u^2 + 2uv)\underline{j} + (u^3 + 3u^2v)\underline{k}.$$

99. $\underline{r}(u, v) = R(\cos^2 u - v \sin 2u)\underline{i} + R(\sin u \cos u + v \cos 2u)\underline{j} + R(\sin u + v \cos u)\underline{k}.$

100. $\underline{r}(u, v) = (a \cos u + vb \sin u)\underline{i} + (a \sin u - vb \cos u)\underline{j} + (bu + av)\underline{k}.$

Megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$\underline{\dot{r}}\underline{\dot{r}} = 0$$

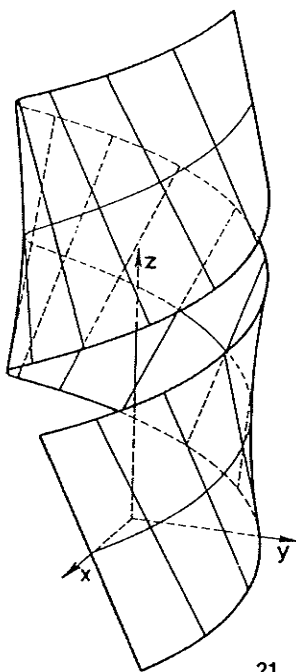
feltétel, ahol

$$\underline{r}(u) = \underline{i}a \cos u + \underline{j}a \sin u + \underline{k}bu,$$

$$\underline{l}(u) = \underline{i}b \sin u - \underline{j}b \cos u + \underline{k}a.$$

Mivel $\underline{\dot{r}}\underline{\dot{r}} = b^3 + a^2b \neq 0$, ha $b \neq 0$, a felület nem lefejthető.

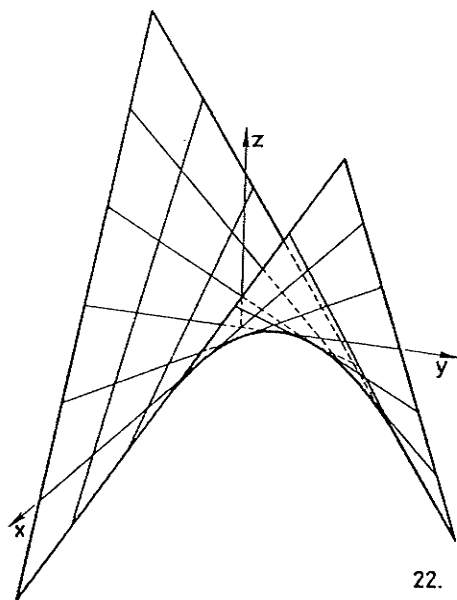
A $b = 0$ esetben a csavarvonal körre fajul el, a szóbanforgó felület hengerfelület, amely lefejthető.



21.

$$0 \leq u \leq 2,5\pi$$

$$-1 \leq v \leq 1$$



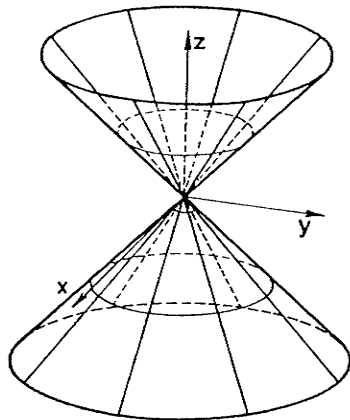
101. A paramétervonalak egyenesek, a felület hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület)

$$z = xy.$$

22.

$$-3 \leq u < 3$$

$$-3 \leq v \leq 3$$



102. A felület másodrendű kúp

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

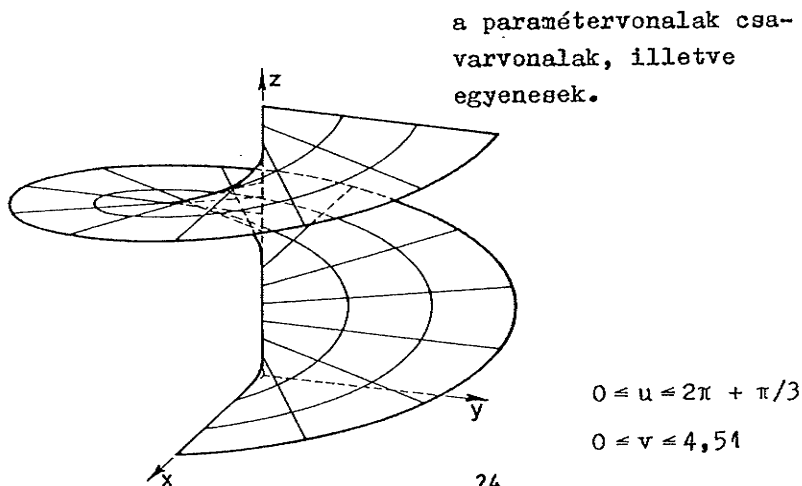
a paramétervonalak körök, illetve egyenesek.

23.

$$0 \leq u \leq 2\pi$$

$$-3 \leq v \leq 3$$

103. A felület zárt, laposmeneti csavarfelület,



104. A felület ferde körhenger, melynek alkotóránnya $\underline{a}(1,1,1)$. A paramétervonalak egyenesek, illetve körök.

105. A felület egyköpenyű hiperboloid,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

A paramétervonalak hiperbolák, illetve ellipszisek.

106. A felület forgásparaboloid,

$$z = x^2 + y^2.$$

A paramétervonalak parabolák, illetve körök.

107. Az $\underline{r}(u)$ görbe érintői által alkotott felület az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\underline{\dot{r}}(u)$$

vektorfüggvénnyel állítható elő, amelyre nyilvánvalóan teljesül, hogy $\underline{\dot{r}}\underline{\dot{r}} = 0$, ahol $\underline{l}(u) \equiv \underline{\dot{r}}(u)$.

108. Egy alkotó különböző pontjaihoz tartozó érintősíkok akkor esnek egybe, ha a felületi normálisok párhuzamosak az alkotó mentén. Felirjuk, hogy az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + v \underline{l}(u)$$

vektoregyenlettel előállított vonalfelületnek az $u = u_0$, $v = 0$ és $u = u_0$, $v = v_0$ paraméterű pontjaiban kiszámított felületi normálisai párhuzamosak.

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = (\dot{\underline{r}}(u) + v \dot{\underline{l}}(u)) \times \underline{l}(u)$$

$$\underline{m}(u_0, 0) = \dot{\underline{r}}(u_0) \times \underline{l}(u_0)$$

$$\underline{m}(u_0, v) = \dot{\underline{r}}(u_0) \times \underline{l}(u_0) + v \dot{\underline{l}}(u_0) \times \underline{l}(u_0).$$

Ez a két vektor akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk zérus (az u_0 paraméter kiírását elhagyjuk):

$$(\dot{\underline{r}} \times \underline{l}) \times (\dot{\underline{r}} \times \underline{l} + v \dot{\underline{l}} \times \underline{l}) = v \underline{l}(\dot{\underline{r}} \times \underline{l}) = 0,$$

ami pedig pontosan akkor teljesül, ha $\dot{\underline{r}} \times \underline{l} = 0$, vagyis a felület lefejtethető.

1. Megjegyzés: A vonalfelület lefejtethetősége definiálható a feladatban megfogalmazott feltétellel.

2. Megjegyzés: A vonalfelület pontosan akkor lefejtethető, ha bármely pontjában a szorzatgömbület zérus.

Ezért használatos a következő definíció: Az olyan felületeket, amelyekeken mindeütt $K = 0$, lefejtethető felületnek nevezzük.

109. A vonalfelületet előállító $\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + v \underline{l}(u)$ függvényben az első paraméter legyen a vezérgörbe természetes paramétere ($u = s$) és $\underline{l}(u)$ az alkotóirányú egységvektor. A lefejtethetőség feltétele $\underline{r}' \underline{l}' \underline{l} = 0$, vagyis a három vektor lineárisan függő az s tetszőleges értékére, azaz

$$(*) \quad \alpha(s) \underline{r}'(s) + \beta(s) \underline{l}'(s) + \gamma(s) \underline{l}(s) = 0.$$

A továbbiakban felhasználjuk, hogy $\underline{l}^2(s) \equiv 1$ deriválásával $\underline{l}' \cdot \underline{l} = 0$, vagyis $\underline{l}' \perp \underline{l}$ adódik.

1. eset Legyen $\alpha(s) \equiv 0$.

A (π) egyenletet skalárisan megszorozzuk $\underline{l}(s)$ -sel, így a $\gamma(s)\underline{l}^2(s) = 0$ összefüggést kapjuk, amely szerint $\gamma(s) \equiv 0$. (π) -ből $\underline{l}'(s) = 0$ adódik, vagyis $\underline{l}(s)$ állandó, a vonalfelület tehát henger.

2. eset Legyen $\alpha(s) \neq 0$.

Ekkor (π) -ből $\underline{r}'(s)$ kifejezhető:

$$\underline{r}'(s) = \lambda(s)\underline{l}'(s) + \mu(s)\underline{l}(s),$$

$$\text{ahol } \lambda(s) = -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \text{ és } \mu(s) = -\frac{\gamma(s)}{\alpha(s)}.$$

Átrendezéssel

$$\underline{r}'(s) - \lambda(s)\underline{l}'(s) = \mu(s)\underline{l}(s).$$

Vonjuk ki mindkét oldalból a $\lambda'(s)\underline{l}(s)$ szorzatot, így

$$\frac{d}{ds}(\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s)) = (\mu(s) - \lambda'(s))\underline{l}(s)$$

írható. Most két eset lehetséges: vagy $\mu(s) - \lambda'(s) = 0$ és ekkor $\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s) = \underline{c}$ állandó. A vonalfelület egyenletét $\underline{r}(s, v) = \underline{r}(s) + v\underline{l}(s) = \underline{c} + (v + \lambda(s))\underline{l}(s)$ alakba írva kúpfelületet kaptunk.

Ha $\mu(s) - \lambda'(s) \neq 0$, akkor a $\frac{d}{ds}(\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s))$

vektor és az $\underline{l}(s)$ vektor párhuzamosak. Ebben az esetben a lefejtethető vonalfelület egyenlete $\underline{r}(s, v) = \underline{a}^\pi(s) + \sigma(s, v)(\underline{a}^\pi(s))'$ alakban írható, tehát a vonalfelület az $\underline{a}^\pi(s) = \underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s)$ görbe érintőegyeneseiből álló felület.

Az $\underline{a}^\pi(s)$ görbét a felület oromvonalának vagy gerincvonalának nevezik.

110. Az adott ponton áthaladó paramétervonalak vektoregyenletei:

$$\underline{r}(u, \frac{\pi}{3}) = u\underline{i} + \frac{1}{2}(1+u)\underline{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+u)\underline{k} \quad (\text{egyenes})$$

$$\text{és } \underline{r}(1, v) = \underline{i} + \underline{j} 2\cos v + \underline{k} 2\sin v \quad (\text{kör}).$$

A paramétervonalak érintővektorai az

$$\underline{r}_u = \underline{i} + \underline{j} \cos v + \underline{k} \sin v \quad \text{és az}$$

$$\underline{r}_v = -\underline{j}(1+u)\sin v + \underline{k}(1+u)\cos v$$

derivált vektorok. Az adott pontban

$$\underline{r}_u = (1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \underline{r}_v = (0, -\sqrt{3}, 1)$$

és mivel $\underline{r}_u \underline{r}_v = 0$, az általuk bezárt szög 90° .

$$111. \varphi = 90^\circ.$$

112. Először meghatározzuk az adott ponthoz tartozó paraméterértékeket. A

$$2u - v = 3$$

$$u^2 + v^2 = 5$$

egyenletrendszer megoldásai ($u = 2, v = 1$) és

($u = \frac{2}{5}, v = -\frac{11}{5}$), ezek közül azonban csak az első elégíti ki az $u^3 - v^3 = 7$ egyenletet.

Az $\underline{r}_u, \underline{r}_v$ derivált vektorokat tehát az $u = 2, v = 1$ paraméterű helyen számítjuk ki: $\underline{r}_u = (2, 4, 12), \underline{r}_v = (-1, 2, -3)$. Az u -paramétervonal érintőegyenésének egyenletrendszere

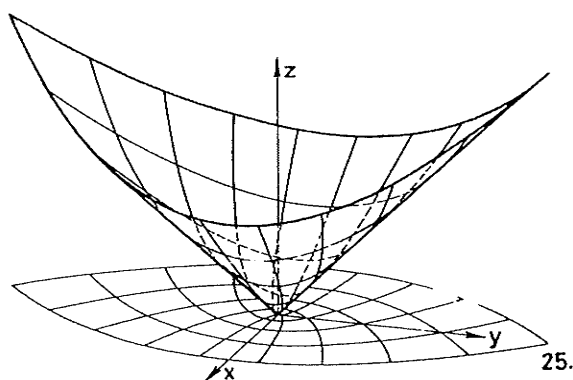
$$x - 3 = \frac{y - 5}{2} = \frac{z - 7}{6}, \quad \text{a } v\text{-paramétervonalé pedig } 3 - x = \frac{y - 5}{2} = \frac{7 - z}{3}.$$

113. A felület adott pontjának helyvektora

$$\underline{r}(1, 2) = -3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k}.$$

$$\underline{r}_u = 2u\underline{i} + 2v\underline{j} + 2u\underline{k},$$

(A 25. ábrán a felület egy darabja az xy -síkra eső merőleges vetületével együtt látható.)



$$-2,25 \leq u \leq 2,25$$

$$\underline{r}_v = -2v\underline{i} + 2u\underline{j} + 2v\underline{k},$$

$$-2,25 \leq v \leq 2,25$$

$$\underline{r}_u(1,2) = (2,4,2),$$

$$\underline{r}_v(1,2) = (-4,2,4).$$

A felületi normális $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = 12\underline{i} - 16\underline{j} + 20\underline{k}$.

A normális egyenes egyenletrendszerét az $\frac{1}{4}\underline{m}$ irányvektorral írjuk fel:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{4-y}{4} = \frac{z-5}{5}.$$

114. Az adott paraméterértékekhez tartozó felületi pont $P(-7,4,-3)$. Az érintősík normálvektora

$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$ felületi normális.

$$\underline{r}_u = 3u^2\underline{i} + v^2\underline{j} + (2uv - 1)\underline{k},$$

$$\underline{r}_v = -4v\underline{i} + 2uv\underline{j} + u^2\underline{k}.$$

Az adott pontban

$$\underline{r}_u(1,-2) = (3,4,-5),$$

$$\underline{r}_v(1,-2) = (8,-4,1).$$

$$\underline{m} = -16\underline{i} - 43\underline{j} - 44\underline{k}.$$

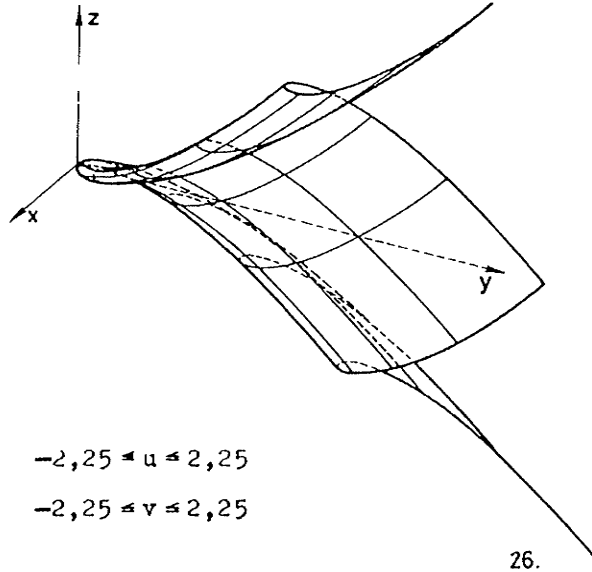
Az érintősík egyenlete tehát

$$16(x+7) + 43(y-4) + 44(z+3) = 0.$$

$$115. \quad 2x + y + z - 2 = 0.$$

$$116. 3x - 32y + 128z + 16 = 0.$$

117. Nincs
érintő-
sík.
(26.ábra)



$$-2,25 \leq u \leq 2,25$$

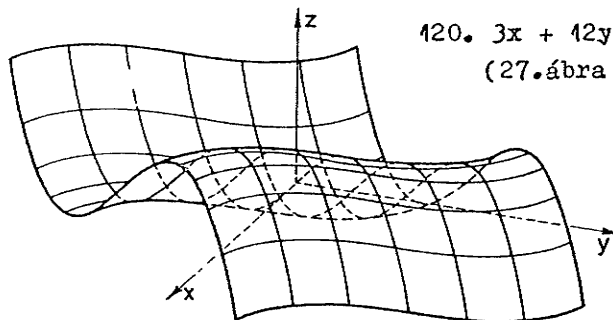
$$-2,25 \leq v \leq 2,25$$

$$118. 6x + 3y - 2z - 7 = 0.$$

$$119. F'_x = y^2, F'_y = 2xy, \\ F'_z = 3z^2.$$

Az adott pontban $F'_x = 4$,
 $F'_y = 4$, $F'_z = 12$. Az érintő-
sík egyenlete:
 $x + y + 3z - 9 = 0.$

$$120. 3x + 12y - z - 18 = 0. \\ (27.ábra)$$



$$-2 \leq x \leq 2$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

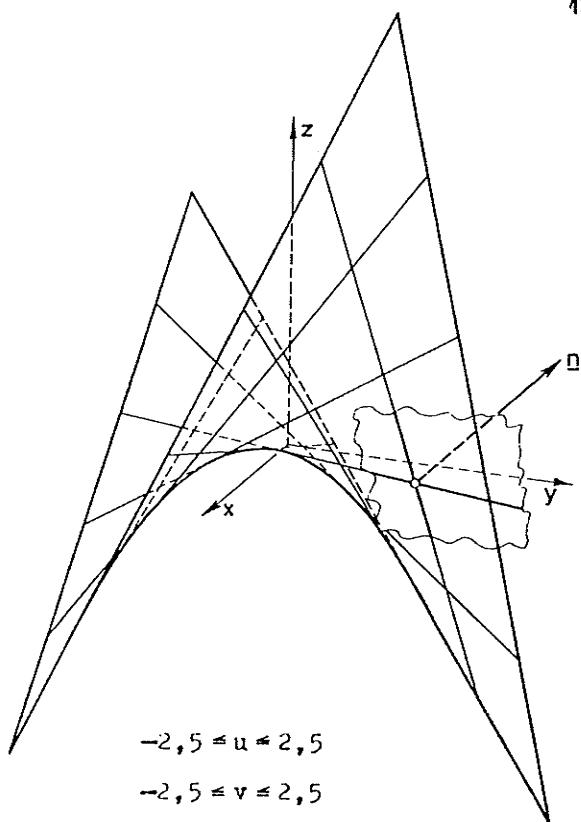
$$121. 3x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

$$122. 3x + 4y + 12z - 169 = 0.$$

$$123. xa \sin v_0 - ya \cos v_0 + zu_0 - au_0 v_0 = 0.$$

$$124. \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

125.



28.

A felületi normális $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (u + v)\underline{i} + (v - u)\underline{j} - 2\underline{k}$ csak úgy lehet párhuzamos az adott sík normálvektorával, ha annak (-1) -szerese. Ez az $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{3}{2}$ paraméterű $P(-1, 2, -\frac{3}{4})$ pontban teljesül.

A keresett érintőssík egyenlete tehát

$$2x + 4y + 4z - 3 = 0.$$

126. Irjuk a felület egyenletét $z = \frac{a^3}{xy}$ alakban. Mivel $z'_x(x_0, y_0) = -\frac{a^3}{x_0^2 y_0}$ és $z'_y(x_0, y_0) = -\frac{a^3}{x_0 y_0^2}$, a $P(x_0, y_0, \frac{a^3}{x_0 y_0})$ ponton áthaladó érintősíki egyenlete

$$\frac{a^3}{x_0^2 y_0} (X - x_0) + \frac{a^3}{x_0 y_0^2} (Y - y_0) + (Z - \frac{a^3}{x_0 y_0}) = 0.$$

Az érintősík egyenletét az

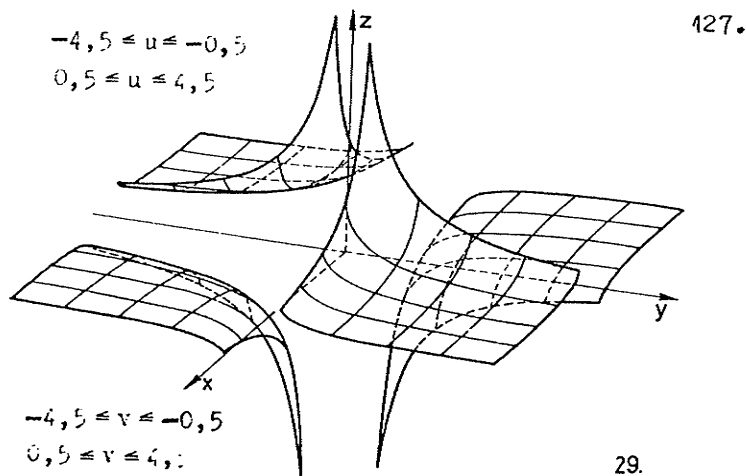
$$\frac{X}{3x_0} + \frac{Y}{3y_0} + \frac{x_0 y_0}{3a^3} Z = 1$$

alakra rendezve könnyen megállapíthatjuk, hogy az a koordinátatengelyekből $3x_0, 3y_0, \frac{3a^2}{x_0 y_0}$ hosszúságú

darabokat vág le. A keresett tetraéder térfogata tehát

$$V = \frac{27}{6}a^3$$

valóban független a P pont megválasztásától.



$$x + y + z - 3 = 0.$$

(A felületet lásd a 29. ábrán.)

128. A felület $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenlete:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x_0}} x + \frac{1}{\sqrt[3]{y_0}} y + \frac{1}{\sqrt[3]{z_0}} z = a^{2/3}.$$

A tengelymetszetek rendre

$$\sqrt[3]{x_0} \cdot a^{2/3}, \quad \sqrt[3]{y_0} \cdot a^{2/3} \quad \text{és} \quad \sqrt[3]{z_0} \cdot a^{2/3}$$

hosszúságú szakaszok, amelyeknek négyzetösszege valóban állandó (a^2).

129. A felület $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenlete

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}.$$

A tengelymetszetek rendre $\sqrt{x_0 a}$, $\sqrt{y_0 a}$, $\sqrt{z_0 a}$, amelyeknek összege $\sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$, valóban állandó.

130. A felület $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenlete:

$$x_0^{n-1} x + y_0^{n-1} y + z_0^{n-1} z = a^n.$$

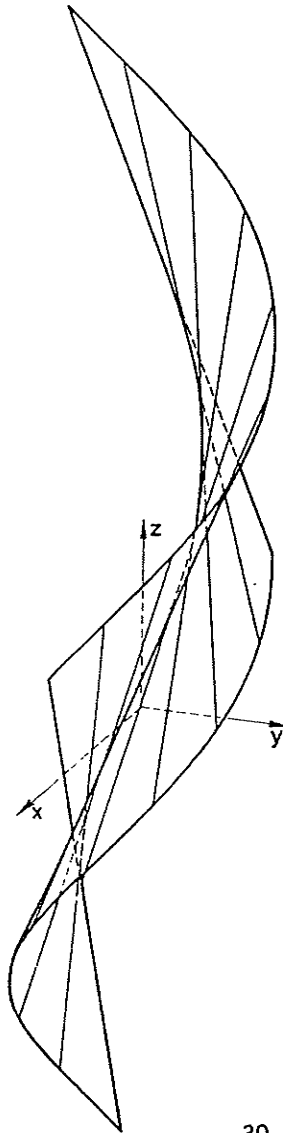
Az $OA = \frac{a^n}{x_0^{n-1}}$, $OB = \frac{a^n}{y_0^{n-1}}$, $OC = \frac{a^n}{z_0^{n-1}}$ tengelymetszetek összege 1, vagyis az állítás igaz.

131. A felületet előállító kétparaméteres vektorfüggvény

$$\underline{r}(u, v) = a(\cos u - v \sin u) \underline{i} + a(\sin u + v \cos u) \underline{j} + b(u + v) \underline{k}.$$

A felületi normális

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (-abv \sin u, abv \cos u, -a^2 v).$$



30.

Ha $v = 0$, akkor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \underline{z}$.
 Ha $v \neq 0$, akkor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v \parallel a$
 $(-b \sin u, b \cos u, -a)$ vektorral, amelynek a $\underline{k}$ egységvektorral bezárt szögére

$$\cos \varphi = \frac{-a}{\sqrt{b^2 + a^2}},$$

a felületi pont megválasztásától független érték.

132. A $z = \operatorname{tg} xy$ felület normálisa

$$\left(\frac{-y}{\cos^2 xy}, \frac{-x}{\cos^2 xy}, 1 \right). \text{ Az}$$

$x^2 - y^2 = a^2$ felület kétparaméteres vektoregyenlete

$\underline{r}(u, v) = \underline{i} a \operatorname{ch} u + \underline{j} a \operatorname{sh} u + \underline{k} v$,
 a felületi normálisa tehát

$\underline{n}_2(a \operatorname{ch} u, -a \operatorname{sh} u, 0)$. Számítsuk ki az $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2$ skalárszorzatot a két felület közös pontjaiban, vagyis az $x = a \operatorname{ch} u$, $y = a \operatorname{sh} u$ helyen:

$$\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = 0.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$$

$$-2 \leq v \leq 2$$

133. A deriváltvektorok az adott helyen a következők:

$$\underline{r}_u(1, 0, 1), \quad \underline{r}_v(0, 1, -1),$$

$$\underline{r}_{uu}(1, 0, 0), \quad \underline{r}_{uv}(0, 0, 0), \quad \underline{r}_{vv}(0, 1, 0),$$

$$\underline{m}^0\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A Gauss-féle főmennyiségek a következők:

$$E = 2, \quad F = -1, \quad G = 2, \quad L = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

innen $\dot{u} = 2, \quad \dot{v} = 1$ választással

$$\frac{1}{R\varphi} = -\frac{1}{3}$$

adódik.

134. Az $x = u, y = v$ paraméterezéssel a felület vektoregyenlete $\underline{r}(u, v) = u\underline{i} + v\underline{j} + (2u^2 + 4,5v^2)\underline{k}$,
 $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 1, \quad R = \frac{2}{13}.$

$$135. \quad \frac{1}{R} = \frac{2}{49\sqrt{5}}.$$

136. A normálmetszet érintővektorát felírjuk az adott pontban kiszámított $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként. Mivel $\underline{r}_u(4, 2, 4)$ és $\underline{r}_v(-2, -5, 4)$, az első két koordináta felhasználásával

$$\dot{\underline{r}} = 2\underline{r}_u + 3\underline{r}_v.$$

Eszerint $\dot{u} = 2, \quad \dot{v} = 3$ és az $\dot{\underline{r}}$ vektor harmadik koordinátája 20.

$$\underline{m}^0 \left(-\frac{7}{\sqrt{104}}, -\frac{6}{\sqrt{104}}, \frac{4}{\sqrt{104}} \right),$$

$$E = 36, \quad F = -2, \quad G = 45, \quad L = -\frac{46}{\sqrt{104}}, \quad M = \frac{10}{\sqrt{104}},$$

$$N = -\frac{32}{\sqrt{104}}, \quad \frac{1}{R} = \frac{-352}{525\sqrt{104}}.$$

$$137. \quad \frac{1}{R} = \frac{8\sqrt{2}}{(5 + \pi^2)\sqrt{4 + \pi^2}}.$$

$$138. \quad E = 2, \quad F = \frac{1}{2}, \quad G = \frac{5}{4}, \quad L = -\frac{1}{6}, \quad M = \frac{1}{12},$$

$$N = -\frac{1}{24}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{54}.$$

139. A gömbfelület vektoregyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} R \cos u + \underline{j} R \sin u \sin v + \underline{k} R \sin u \cos v,$$

ahol R a gömb sugara.

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{R \cos \varphi}.$$

140. A deriváltvektorok az adott pontban

$$\underline{r}_u(1,1,1), \underline{r}_v(1,-1,1), \underline{r}_{uu}(0,0,0), \underline{r}_{uv}(0,0,1), \\ \underline{r}_{vv}(0,0,0), \underline{m}^0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$A \begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ egyenletből } \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \pm 1, \text{ vagyis}$$

$$\dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_u + \underline{r}_v = (2,0,2) \text{ és } \dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_u - \underline{r}_v = (0,2,0).$$

Mivel $|\underline{r}_u| = |\underline{r}_v|$, a főirányok éppen a paramétervonalak szögfelezői.

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$141. \quad A \begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ egyenletből } 2\dot{u}\dot{v} = 0,$$

tehát a főirányok a következők:

$$\dot{u}_1 = 0, \quad \dot{v}_1 = 1 \text{ esetén } \dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_v,$$

$$\dot{u}_2 = 1, \quad \dot{v}_2 = 0 \text{ esetén } \dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_u.$$

Ez azt jelenti, hogy a főirányok a paramétervonalak érintői, a paramétervonalak adott pontbeli görbületei pedig a főgörbületek.

Megjegyzés: A paramétervonalak akkor és csak akkor főgörbületi vonalak, ha a felület minden pontjában $F = 0$ és $M = 0$ áll fenn (ami itt teljesül).

$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{R_2} = 0$ az adott ponton áthaladó paralel-kör és alkotóegyenes görbülete.

$$142. \quad H = \frac{45}{7\sqrt{454}}, \quad K = \frac{18}{5929}.$$

143. A felület tetszőleges pontjában $E = 1$,
 $F = 0$, $G = 1$, $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$.
 Vagy a 141. feladat megoldásánál kimondott tételre
 hivatkozunk, amely szerint $F = 0$, $M = 0$ miatt a fel-
 adat állítása igaz, vagy felírjuk a főirányok megha-
 tározására szolgáló egyenletet:

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ ahonnan } \dot{u}\dot{v} = 0 \text{ adódik.}$$

Tehát $\dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_u$, $\dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_v$, vagyis az állítás igaz.

144. Az adott pontban $\underline{r}_u(-2, -2, 1)$, $\underline{r}_v(-2, -2, -1)$
 és $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \pm 1$. Mivel $|\underline{r}_u| = |\underline{r}_v|$, az

$$\dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_u + \underline{r}_v = (-4, -4, 0) \text{ és az}$$

$$\dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_u - \underline{r}_v = (0, 0, 2) \text{ vektorok az } \underline{r}_u \text{ és } \underline{r}_v$$

szögének, illetve mellékszögének szögfelezői.

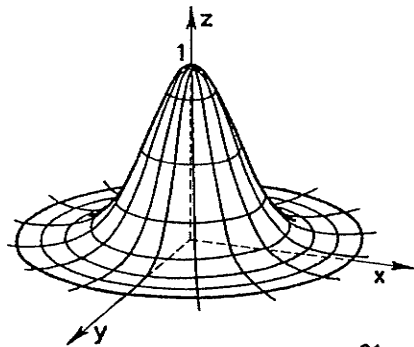
Az $\dot{\underline{r}}_1$ és az $\underline{m}$ vektorokra illeszkedő fősíkok $\dot{\underline{r}}_1 \perp \dot{\underline{r}}_2$ és
 $\underline{m} \perp \dot{\underline{r}}_2$ miatt merőleges az $\dot{\underline{r}}_2$ vektorra, továbbá átha-
 lad a felület $\underline{r}(-1, -1) = 2\underline{i} + 2\underline{j}$ helyvektorú pontján.
 Az egyenlete tehát $z = 0$. A másik fősíkok normálvektora
 pedig az $\dot{\underline{r}}_1$, az egyenlete $x + y = 4$.

145. A Gauss-féle fő-
 mennyiségek az adott pont-
 ban $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$,
 $L = -2$, $M = 0$, $N = -2$. A
 főirányok meghatározására
 szolgáló

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet $\dot{u}$ és $\dot{v}$ értékétől
 független $0 = 0$ azonosság,
 vagyis az adott pontban
 minden irány főirány, és

mivel $\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = 4 > 0$, az adott pont gömbi pont.



146. Az $u = x$ paraméterezéssel a meridiángörbe egyenlete $\underline{r}(u) = u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j}$, a forgásfelület vektor-egyenlete pedig $\underline{r}(u,v) = u\mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} + \sin u \sin v \mathbf{k}$ alakban írható. A felület tetszőleges pontjában $E = 1 + \cos^2 u$, $F = 0$, $G = \sin^2 u$, $L = \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}}$, $M = 0$,

$$N = \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}}. \text{ A főirányok meghatározására szolgáló}$$

egyenlet szerint $u\mathbf{v} \cdot \sin u \cdot 2\cos^2 u = 0$. Minden irány akkor főirány, ha $u = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ (ezek a gömbi pontok) és $u = \pm k\pi$, amelyek viszont planáris pontok.

Tehát a felület gömbi pontjai az $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) pontok megforgatásával keletkeznek.

$$147. H = 0, \quad K = -\frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}, \text{ az állandó szor-}$$

zatgörbületű pontok csavarvonalon helyezkednek el.

148. Az $\underline{r}(u,v) = u\mathbf{i} + \cosh u \cos v \mathbf{j} + \cosh u \sin v \mathbf{k}$ forgásfelület pontjában

$$E = \cosh^2 u, \quad F = 0, \quad G = \cosh^2 u,$$

$$L = -\frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}}, \quad H = 0.$$

$$149. \underline{r}(u,v) = \mathbf{i}a \sin u \cos v + \mathbf{j}a \sin u \sin v + \mathbf{k}a(\ln \tanh \frac{u}{2} + \cosh u). \quad K = -\frac{1}{a^2}.$$

150. Ha az x és y változókat választjuk paraméternek, a felület vektoregyenlete:

$$\underline{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}\right)\mathbf{k}.$$

$$\text{Lível } E = 1 + x^2, \quad F = -\frac{xy}{3}, \quad G = 1 + \frac{y^2}{9},$$

$$L = \frac{1}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{1}{3|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|}, \quad \text{a } H = 0$$

feltételből $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ adódik. A keresett pontok

tehát e hiperbola felett helyezkednek el, amely pontok a felületnek a $z = 1$ síkkal alkotott metszéspontjai.

151. A Gauss-féle másodrendű főmennyiségek helyett elegendő az $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \cdot L = D \cdot L$,
 $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| M = DM$ és $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| N = DN$ mennyiségeket kiszámítani. Mivel

$$D^2(LN - M^2) = \pi^2 > 0,$$

az adott pont elliptikus.

152. Hiperbolikus.

153. Hiperbolikus.

154. A tórusz tetszőleges pontjában $L = b$,
 $M = 0$, $N = (a + b \cos u) \cos u$. $LN - M^2 = b(a + b \cos u) \cos u$.
 Az $a > b$ kikötés miatt $a + b \cos u > 0$, tehát $LN - M^2$ előjele $\cos u$ előjelével egyezik meg. Ezek szerint ha $u = \pm \frac{\pi}{2}$, a felületi pontok parabolikusak, ha $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ (külső tórusz), akkor elliptikusak és ha $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ (belső tórusz), akkor hiperbolikusak.

155. Minden pont elliptikus.

156. Minden pont parabolikus.

157. Minden pont hiperbolikus.

158. Minden pont hiperbolikus.

159. $z''_{xx} z''_{yy} - z''_{xy}{}^2 = \frac{3}{x^4 y^4} > 0$, ezért minden pont elliptikus.

160. A felület a $z = e^{-x^2}$ görbe z tengely körüli forgatásával áll elő.
 $z''_{xx} z''_{yy} - z''_{xy}{}^2 = e^{-2(x^2+y^2)} [(-2 + 4x^2)(-2 + 4y^2) - 16x^2 y^2] = e^{-2(x^2+y^2)} [4 - 8x^2 - 8y^2] \geq 0$,

ha $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$.

A felület elliptikus pontjai az origó középpontú, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú körtartomány belseje felett, a parabolikus pontok a körvönal felett, a hiperbolikus pontok pedig a körön kívüli síkrész felett helyezkednek el.

161. Minden pont hiperbolikus.

162. Ha $\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{46} < x^2 + y^2 < \frac{k^2 \pi^2}{4}$ ($k = 1, 2, \dots$),

akkor a pont hiperbolikus.

Ha $x^2 + y^2 = \frac{k^2 \pi^2}{46}$, akkor a pont parabolikus.

Ha $\frac{k^2 \pi^2}{4} < x^2 + y^2 < \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{46}$, akkor a pont elliptikus.

163. $D^2(LN - M^2) = -9(u - v)^3$

A felület pontja tehát az $u = v$ feltétel mellett parabolikus, ezek az $\underline{r}(u) = 2u\underline{i} + u^2\underline{j} + 2u^3\underline{k}$ felületi görbe pontjai.

164. $D = \sqrt{4u^2 + 9v^2(1 + 4u^2)}$, ezért az $u = 0$, $v = 0$ paraméterű pontot ki kell zárni.

$DL = 6v^2$, $M = 0$, $DN = 12uv$

$D^2(LN - M^2) = 72uv^3$.

A felület parabolikus pontjai tehát az $u = 0$, $v \neq 0$ és a $v = 0$, $u \neq 0$ paramétervonalak pontjai.

TARTALOMJEGYZÉK

VEKTORALGEBRA	3
Vektorok összeadása, kivonása; szorzás számmal; koordináták; lineáris függetlenség	3
Vektoriális szorzat	15
Többszoros vektorszorzatok; vegyesszorzat, kifejtési tétel	19
AZ EGYENES ÉS A SÍK ANALITIKUS GEOMETRIÁJA	23
Az egyenes a kétdimenziós koordinátarendszerben	23
Az egyenes a háromdimenziós koordinátarendszerben	24
Sík és egyenes, vegyes feladatok	36
Koordináta-transzformáció	40
Térgeometriai feladatok analitikus és ábrázoló geometriai megoldása	43
Kötött vektor, vektorrendszerek	48
A FELADATOK MEGOLDÁSAI	56
GÖRBÉK	121
Ruletták	121
Görbék egyenlete, érintő	127
Kísérő triéder	126
Görbület, torzió, Frenet képletek	129

FELÜLETEK	133
Felületek egyenletei, lefejtethető vonalfelületek .	133
Felületi normális, érintősík	136
Felületi görbék görbülete	139
Főgörbületek, főirányok	141
Felületi pontok osztályozása	143
A FELADATOK MEGOLDÁSAI	145