



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Vermes Imre

GEOMETRIA
Útmutató és példatár



Műegyetemi Kiadó, 2007

(Tizenharmadik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **0410661**



A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 23,5 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 6376/07

Előszó

A jegyzet célja, hogy hallgatóinknak segítséget nyújtson a tárgy tanulásában. A levelező oktatásban a tanórák szűkre szabott kiméréte miatt, a szóbeli előadásokat és gyakorlatokat igyekszik pótolni az elméleti részek (fogalmak, tételek) bizonyítás nélküli összefoglalásával, számos kidolgozott feladat bemutatásával. Kidolgozatlan feladatokat is közlünk, illetve hivatkozunk Dr. Reiman István és Dr. Nagyné dr. Szilvási Márta: Geometriai feladatok c. példatárára (J4-1007) azzal a céllal, hogy a tananyagot kellően begyakorolhassák hallgatóink. A módszertani útmutató alapjául Dr. Strommer Gyula: Geometria című tankönyve szolgál. E tankönyv megírásakor a szerző a szokásos tananyagot meghaladó, de a gyakorló mérnökök számára olykor igen fontos ismeretek tárgyalását is fontosnak tartotta. A tudományos igényességgel megírt könyvek használatában járatlan hallgatóknak azáltal szeretnénk segíteni, hogy az egyes tananyagrészek végén kijelöljük a Geometria tankönyvben áttanulmányozandó anyagrészeket.

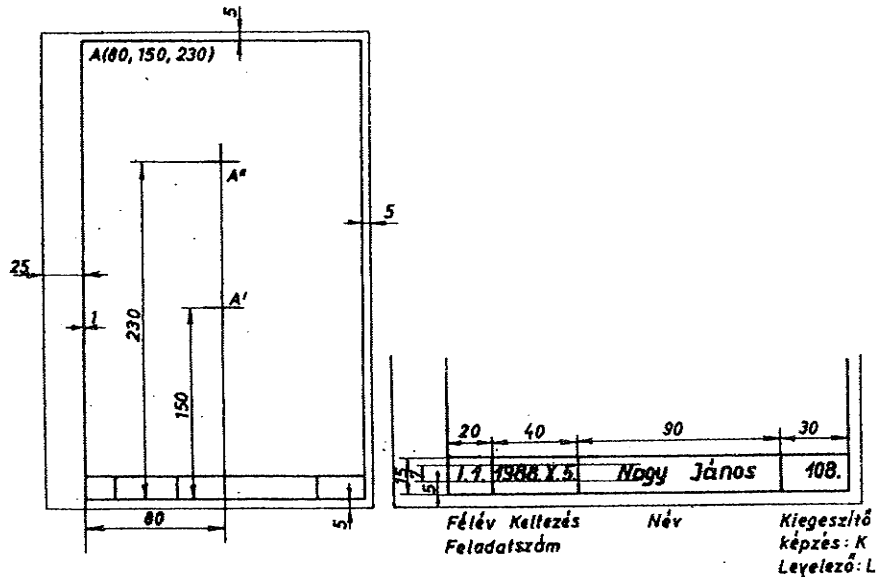
A heti rajzfeladatok szövegét és adatait minden félév elején sokszorosításban kapják a levelező és kiegészítő képzésben résztvevő hallgatóink. A beadási határidőket pontosan meg kell tartani.

A rajzfeladatokat A/4-es, azaz 210x297 mm-es nagyságú, fehér „DIPA”-jellegű rajzlapon ceruzával kell elkészíteni. A rajzok keretezése és felírása 1 mm-es vonalvastagsággal, minden esetben tussal készítenéd. A felíráshoz használt szabványírás: 7 mm-es nagybetű (5 mm-es kisbetű) nagyságot kell használni. A rajzok keretezési és felírási mintáját a mellékelt ábra mutatja. Egyúttal föltüntetjük rajta azt is, hogy mit kell érteni egy feladatban megadott A(80,150,230) koordinátákon. E koordinátákat csak a pontok kitűzésére adjuk meg, ezért a rajzlapon való föltüntetésük zavaró és fölösleges.

A rajzfeladatok szerkesztését 2H-3H keménységű, jól hegyezett ceruzával végezzük. A kiinduló pontokat vonalzóval rajzolt kis keresztekkel tüntessük fel, a szerkesztés során adódó pontokat külön jelölni nem kell. A szerkesztési vonalakat a rajzból nem szabad kiradírozni, a szerkesztés menetének jól követhetőnek kell lenni. A szerkesztés eredményét 0,6 mm vastagságú egyenletes, fekete vonallal, kb. B puhaságú ceruzával kell kihúzni. A szagatott vonalak 0,3 mm-es vonalvastagságúak legyenek. A megszerkesztett pontokat betűvel jelölhetjük, ez esetben 3,5 mm-es szabvány nagybetűket használjunk. Hallgatóink az

egyéb tudnivalókról a foglalkozásokon szóbeli úton, vagy a Geometria Tanszék H épület II. emeleti hirdetőtábláról értesülhetnek.

Az előszóhoz mellékeljük a rajzlapok keretezésének előírási formáját, illetve a Magyar Szabvány szerinti tömbírás betűit.



aābcdeēfghiijk
 lmnopōööpqrst
 uüüvwxyz
 AABCDEEF GHIJ
 KLMNOOÖÖPQR
 STUÜÜÜVWXYZ
 1234567890⁵/₈VIII

1. TÉRGEOMETRIA

Az alábbiakban egy rövid összefoglalást adunk a térgeometria azon fogalmairól és tételeiről, amelyeket a későbbiekben lépten-nyomon alkalmazni fogunk.

Egyenesek kölcsönös helyzete: Két különböző egyenes vagy metsző, vagy párhuzamos, vagy kitérő. Két egyenes akkor párhuzamos, ha nincs közös pontjuk és egysíkuak. Két egyenes akkor kitérő, ha nincs közös síkjuk.

Sík helyzetének megadása: Egy síkot egyértelműen meghatároz:

- a) Három pont, amelyek nincsenek egy egyenesen.
- b) Egy egyenes és egy rajta kívül fekvő pont.
- c) Két metsző egyenes.
- d) Két párhuzamos egyenes.

Sík és egyenes kölcsönös helyzete: Egy egyenes és egy sík párhuzamosak, ha nincs közös pontjuk. Egy egyenes vagy párhuzamos egy adott síkkal, vagy egy pontban metszi a síkot, vagy a síkban van. Sík és egyenes párhuzamosságát a következő tétel alapján szoktuk megállapítani: Egy egyenes párhuzamos a síkkal, ha párhuzamos a sík egy egyenesével.

Két sík kölcsönös helyzete: Két síknak vagy van közös pontja, vagy nincs. Ha a két síknak van közös pontja, akkor a két sík metszi egymást, közös pontjaik egy egyenesen, a metszésvonalon vannak. Ha két síknak nincs közös pontja, akkor azokat párhuzamosoknak nevezzük. Két sík párhuzamosságát a következő tétellel tudjuk eldönteni: Két sík akkor párhuzamos, ha az egyikben van két metsző egyenes, amely a másik síkkal (annak két megfelelő egyenesével) párhuzamos.

Két egyenes hajlásszöge: Két metsző egyenes a síkjukat négy szögtartományra bontja, e szögek közül kettő-kettő egyenlő. A két szög közül a kisebbiknek a mértékét nevezzük a két egyenes hajlásszögének. (Merőleges egyenesek a síkot négy egybevágó részre osztják.)

Bebizonyítható, hogy a térben is érvényes az egyál-lású szögekre vonatkozó tétel: Ha két szög szárai párhuzamosak és egyirányúak, akkor egyenlők is.

Ennek alapján definiálható két kitérő egyenes hajlásszöge: Két kitérő egyenes hajlásszöge a velük párhuzamos, két metsző egyenes hajlásszögével egyenlő (függetlenül attól, hogy hol vesszük fel a térben a két metsző egyenes metszéspontját).

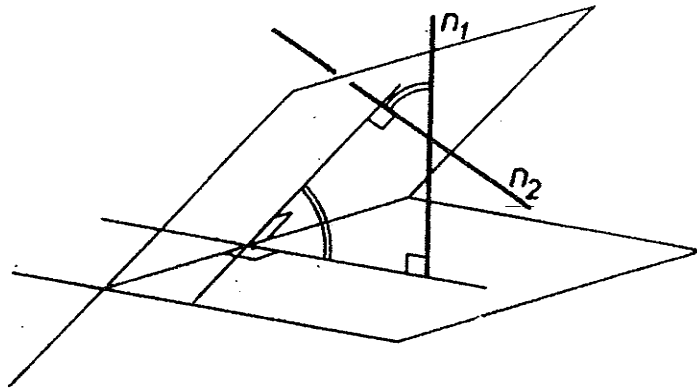
Síkra merőleges egyenes: Egy egyenes merőleges a síkra, ha merőleges annak minden egyenesére. A merőlegességet a következő tétel alapján könnyen eldönthetjük: Egy egyenes merőleges a síkra, ha annak két metsző egyenesére merőleges.

Egy adott síkra a tér minden pontjából pontosan egy merőleges egyenes állítható.

Egy adott egyenesre merőlegesen egy adott ponton át pontosan egy merőleges sík fektethető.

A síkra merőleges egyenest a sík normálisának mondjuk. A sík normálisai egymással párhuzamosak.

Két sík hajlásszöge: Két metsző sík hajlásszöge a síkokban a metszévonalra (ugyanazon pontban) állított merőleges egyenesek hajlásszögével egyenlő. Bebizonyítható, hogy ez a szög egyenlő a két sík normálisainak (n_1 , n_2) hajlásszögével. (1.1. ábra)

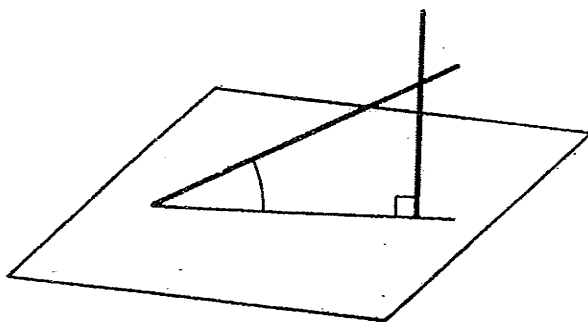


1.1. ábra.

Két sík merőlegessége: Két sík merőleges, ha hajlásszögük derékszög. Két sík merőlegességére vonatkozó tétel: Két sík akkor merőleges egymásra, ha az egyikben van olyan egyenes, amely merőleges a másik síkra.

Sík és egyenes hajlásszöge: A síkot metsző egyenesnek a síkra való merőleges vetületével bezárt szöge a sík és egyenes hajlásszöge.

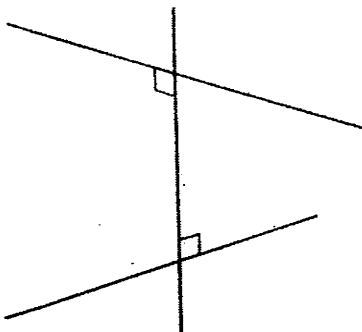
A hajlásszög meghatározását úgy is elvégezhetjük, hogy a sík normálisának és az egyenesnek a hajlásszögét határozzuk meg. Ezt a szöveget derékszöggé kiegészítő szög a sík és egyenes hajlásszögével egyenlő. (1.2. ábra.)



1.2. ábra.

Két kitérő egyenes távolsága: Két kitérő egyenes távolsága az a legrövidebb szakasz, amely a két egyenes egy-egy pontját összeköti.

Bebizonyítható, hogy a két egyenes távolságát adó szakasz olyan egyenesen van, amely a két kitérő egyenest merőlegesen metszi: normál transzverzális. (1.3. ábra)



1.3. ábra.

Térgeometriai szerkesztések: A síkgeometriai szerkesztésekhez hasonlóan a térgeometriában is feladatainknak egy része abból áll, hogy megadott térelemekből, bizonyos megengedett lépések véges sokszori alkalmazásával előírt tulajdonságú térelemeket kapunk. Tetszőleges pontok felvételét megengedve az alapszerkesztési lépések a következők:

1. Egy sík akkor van megszerkesztve, ha ismertek meghatározó adatai.

2. Ha adott két metsző sík, akkor metszésvonaluk is adott.

3. Ha adott egy sík, akkor ebben minden síkgeometriai szerkesztés elvégezhető.

A térgeometriai szerkesztések csak gondolatban „végezhetők el”.

Szerkesztési példák

- || 1) Adva az a egyenes és a rajta kívül fekvő A pont. Szerkesszünk olyan b egyenest, amelyik A ponton átmegy és párhuzamos az a egyenessel.

Megoldás: A pont és az a egyenes által meghatározott síkban A -n át az a -val párhuzamos egyenest szerkesztünk.

- || 2) Adott az α sík és a síkon kívül fekvő P pont. Szerkesztendő a P ponton áthaladó α síkkal párhuzamos β sík.

Megoldás: Vegyünk α síkban két metsző egyenest, a -t és b -t. Az a egyenes és P pont síkjában P -n át a -val párhuzamos c egyenest szerkesztünk. Hasonlóan P -n át b -vel párhuzamos d egyenest szerkesztünk. A c és d egyenesek a keresett síkot adják.

- || 3) Adva vannak az a és b kitérő egyenesek. Szerkesszünk olyan α és β párhuzamos síkokat, melyek közül α tartalmazza az a egyenest, β pedig a b egyenest.

Megoldás: Az a egyenesen tetszőlegesen felvett A ponton át szerkesszünk b -vel párhuzamos c egyenest (l. előzők). Ugyanúgy a b egyenes egy tetszőleges B pontján át a -val párhuzamos d egyenest. Az a és c egyenesek síkja a keresett α sík, a b és d egyenesek síkja pedig β .

- || 4) Szerkesszük meg egy adott a egyenes metszéspontját egy adott α síkkal.

Megoldás: Vegyünk fel az α síkon egy tetszőleges P pontot. (P pont nincs az a egyenesen.) Az adott a egyenes és P pont síkja β . Az α és β síkok metszészvonala egy b egyenes. β síkban adódik a és b egyenesek A metszéspontja, ami éppen a keresett metszéspont.

Transzverzálisnak nevezzük kitérő egyenesek közös metszőjét.

- || 5) Adva vannak az a és b kitérő egyenesek és a mindkettőn kívül fekvő P pont. Szerkesszük meg azt a t egyenest, amelyik átmegy P -n és metszi a -t és b -t. (Ponton áthaladó transzverzális.)

Megoldás: A P ponton átmenő és b egyenest metsző egyenesek között (vagyis a P pont és b egyenes által meghatározott síkban) van a keresett egyenes. Ezt a síkot az a egyenes metszi egy A pontban (l. 4. feladat). Az A pont és P pont által meghatározott egyenes általában metszi a b egyenest egy B pontban. AB egyenes a keresett transzverzális. (Mikor nincs a feladatnak megoldása?)

- ||6) Adott három, páronként kitérő egyenes a , b és i . Szerkesszünk olyan t egyenest, amely i -vel párhuzamos és metszi az a és b egyeneseket.

Megoldás: Az a egyenest metsző i -vel párhuzamos egyenesek az a -t tartalmazó i -vel párhuzamos síkban vannak. Ezt a síkot megkapjuk, ha az a egyenes tetszőleges P pontján át i -vel párhuzamos i_1 egyenest szerkesztünk. Az a és i_1 egyenesek által meghatározott síkot általában metszi a

b egyenes. A fentiek szerint megszerkesztjük b -nek és a síknak B metszéspontját. Ezen a B ponton át i -vel párhuzamos egyenest szerkesztve, ez általában metszi az a egyenest egy A pontban. Az AB egyenes a keresett transzverzális. (Mikor nincs a feladatnak megoldása?)

- ||7) Adott három, páronként kitérő egyenes: a , b és c . Szerkesszünk olyan egyenest, amely mindhármát metszi.

Megoldás: Az egyik egyenes egy tetszőleges pontján át a másik két egyeneshez szerkeszthető transzverzális (l. 5. feladat).

- ||8) Adott az a és b kitérő egyenespár és az egymást metsző α és β sík. Szerkesszünk az a és b kitérő egyenesekhez olyan transzverzális, amely α síkkal is és β síkkal is párhuzamos.

Megoldás: A transzverzális iránya nyilvánvalóan az α és β síkok metszészvonala. Ezáltal a feladat megoldása a 6. feladatra vezethető vissza.

- ||9) Adott az A pont és az a egyenes. Szerkesszünk az A ponton át az a egyenesre merőleges α síkot.

Megoldás: a) Az A pont az a egyenesen van. Fekesszünk az a egyenesre két tetszőleges síkot: β -t és γ -t.

Szerkesszünk β -ban és γ -ban az a -ra merőleges A ponton áthaladó b , illetve c egyenest. A keresett sík a b és c egyenesek síkja.

b) Az A pont az a egyenesen kívül van. Ekkor szerkesztünk az a egyenes tetszőleges X pontján át az a egyenesre merőleges ε síkot, majd az A ponton át a korábbi módon párhuzamos síkot szerkesztünk az ε síkkal. (Gondoljuk meg a feladat direkt megoldását is, amikor nem az a) esetre vezetjük vissza.)

- ||10) Adott az ε sík és az A pont. Szerkesszünk az A ponton át ε síkra merőleges n egyenest.

Megoldás: Vegyünk fel az ε síkban két metsző egyenest a -t és b -t. Az előző feladat szerint az A ponton át az a egyenesre merőleges α síkot és a b egyenesre merőleges β síkot szerkesztünk. E két sík A ponton áthaladó metszészvonala nyilván merőleges lesz a -ra és b -re, így az ε síkra is.

- 11) Adott az α sík, a síkra nem merőleges a egyenes és az A pont. Szerkesszünk olyan e egyenest, amely átmegy A-n, párhuzamos α síkkal és merőleges az a egyenesre.

Megoldás: Az A-n át az a egyenesre merőleges sík tartalmazza a keresett egyenest és a 9. feladat szerint megszerkeszthető. A keresett e egyenes benne van az A ponton át α -val párhuzamosan haladó és a 2. feladat szerint megszerkeszthető síkban. E két sík metszésvonala éppen a keresett e egyenes, amely általában nem metszi az a egyenest.

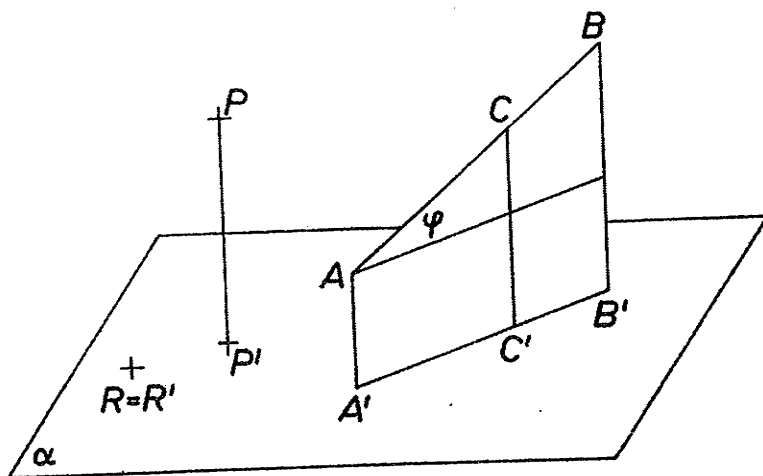
- 12) Adott az egymást metsző α és β sík, továbbá mindkettőn kívül fekvő P pont. Szerkesszünk a P ponton át olyan γ síkot, amely az adott α és β síkokat egymással párhuzamos a, illetve b egyenesben metszi.

Megoldás: Az α és β síkok m metszésvonalával párhuzamos m_1 egyenest szerkesztünk a P ponton át. Az m_1 egyenest tartalmazó síkok — az α , illetve β síkokkal párhuzamos síkok kivételével — mindkét síkból az m_1 -gyel párhuzamos egyeneseket metszenek ki.

Az eddig tárgyalt térgeometriai szerkesztések bevezető példaként szolgálnak egyszerű térgeometriai feladatok megoldására. A későbbiekben előforduló geometriai feladatok megoldását is hasonló módon, az ún. térgeometriai megoldás átgondolásával (esetleg vázlatban való rögzítésével) kell kezdenünk. Egy helyes térgeometriai megoldásra épülhet csak a feladat kidolgozása, ami ábrázoló geometriai feladatnál szerkesztést, analitikus geometriai feladatnál pedig tervszerűen végrehajtott számítást jelent.

Merőleges (vagy derékszögű) vetítés

A tér pontjainak síkon való ábrázolására az egyik és a leggyakrabban alkalmazott módszer a merőleges vetítés. A P pont α síkon levő merőleges vetülete a P -ből az α -ra állított merőleges P' talppontja. Az α sík a képsík, a P' pont a P pont képe. (Az α síkban levő R pont képe önmagára.) A PP' egyenes a P pont vetítőegyenese. (1.4. ábra)



1.4. ábra.

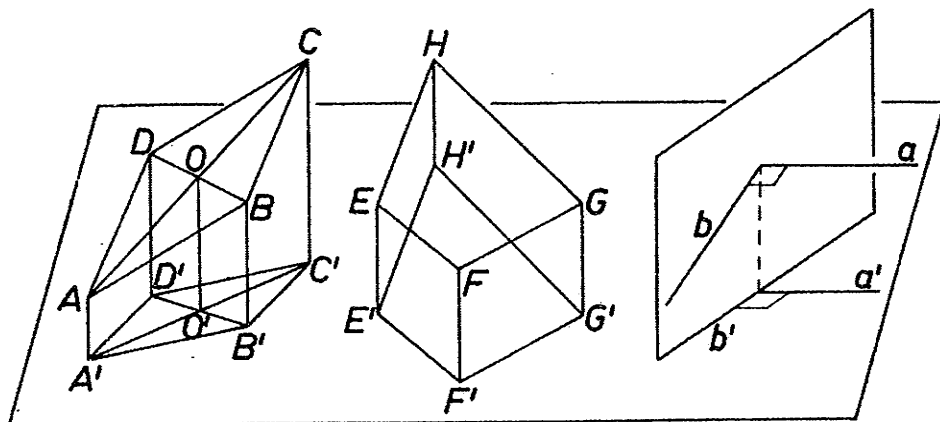
a) A merőleges vetítés egyértelmű leképezés: a tér egy pontjához egyértelműen tartozik a képpont. Ez megfordítva nem igaz, mert ugyanazon képpontnak végtelen sok térbeli pont felel meg.

b) A merőleges vetítés egyenestartó: egyenes képe egyenes (csak a vetítőegyenese képe pont). AB egyenesdarab $A'B'$ képe általában rövidebb az AB szakasznál, csak akkor egyenlők, ha az AB szakasz párhuzamos a képsíkkal; $A'B' = AB \cdot \cos \varphi$.

c) A leképezés aránytartó: ha ABC egy egyenes három pontja, amelyeknek képe $A'B'C'$, akkor a megfelelő szakaszok aránya térben és a képen ugyanaz: $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$. Tehát szakasz felezéspontjának képe a képszakasz felezőpontja.

d) Parallelogramma képe parallelogramma — feltéve, hogy síkjá nem merőleges a képsíkra —, azaz nincs vetítőtörzse.

Ebből következik, hogy a leképezés párhuzamosságtartó. (1.5. ábra)



1.5. ábra.

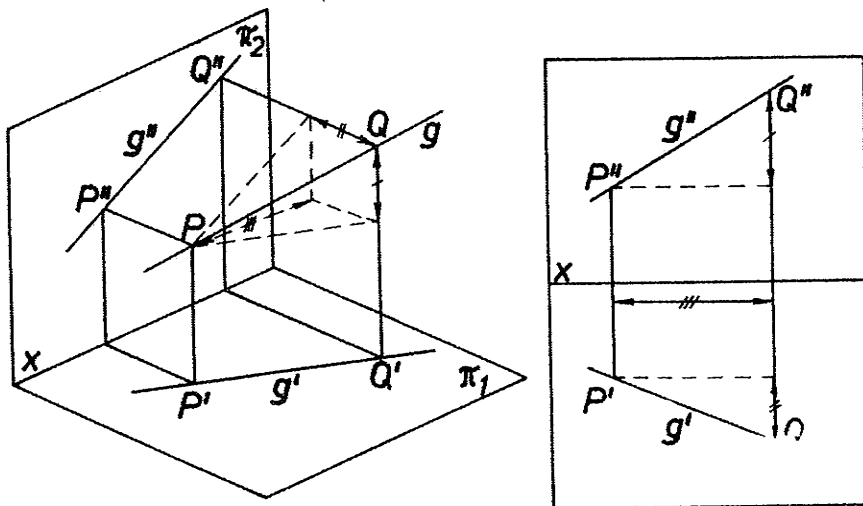
e) Képsíkkal párhuzamos síkban fekvő alakzatok képe a térbelivel egybevágó. Vetítősíkban levő alakzat képe a vetítősík és a képsík metszészonalába esik.

f) Szögek nagysága a merőleges vetítés során kisebbé is és nagyobbá is válhat. Derékszög vetületére igaz a következő tétel: Ha egy derékszög egyik szára párhuzamos a képsíkkal, akkor a derékszög vetülete is derékszög.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 1-8. és 15-35. pontjai.

2. A KÉTKÉPSIKOS ÁBRÁZOLÁS PONT ÉS EGYENES ÁBRÁZOLÁSA

Mint hogy az egy képsíkra való merőleges vetületből nem lehet megállapítani a pontok térbeli helyzetét, ezért két, egymásra merőleges helyzetű képsíkra vetítjük a pontokat, majd a két képsíkot az x metszésvonaluk (képsíktengely) körül egyesítjük. (2.1. ábra)



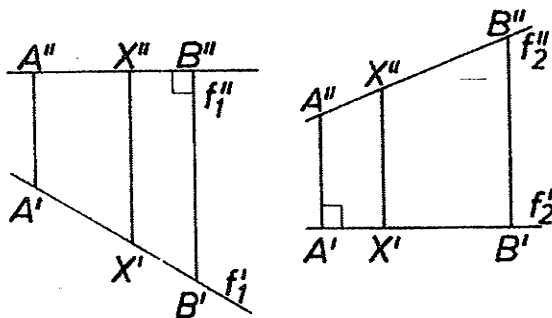
2.1. ábra.

A pontok első, illetve második (π_1 , ill. π_2) képsíkon keletkezett (P' , P'' , ill. Q' , Q'') képeit összekötő egyenesek a képsíktengelyre merőlegesek, tehát egymással párhuzamosak. (l. 2.1. ábra) Az első képen leolvasható a pontok második képsíktól való távolsága: a P' és Q' pontok x képsíktengelytől való távolsága. Ugyanígy az ábrázolt pontok első képsíktól mért távolsága a P'' és Q'' pontok x képsíktengelytől való távolságaként kapható meg. Ennek alapján a képsíkrendszerhez viszonyítva meg tudjuk állapítani a pontok térbeli helyzetét. A gyakorlatban erre nem szokott ilyen formában szükség lenni. Az ábrán bejelölt nyilak meghatározzák a pontok relatív helyzetét. Az egy vesszővel jelölt nyíl a P és Q pontok ún. első képsíktávolság-különbségét jelöli, a két vesszővel jelölt

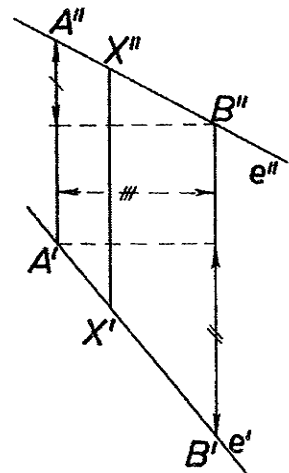
nyíl a pontok második képsíktávolság-különbségét mutatja, míg a három vesszővel jelölt nyíl azt mutatja meg, hogy a pontok közül melyik van a másikhoz viszonyítva jobbra és mennyivel. E három távolság ismeretében az egyik pont tetszőleges térbeli elhelyezéséhez a másik pont térbeli helyzete már egyértelműen meghatározható; több pont esetén az összes többi pont meghatározása is egyértelmű. A képsíktengely ennél a visszaállítási módszernél nem játszik szerepet, ezért a továbbiakban nem is fogjuk azt megrajzolni (természetesen, ha valakinek könnyebbé jelent a képsíktengely használata, nyugodtan berajzolhatja).

Egyenes ábrázolása

Két pont ábrázolásával összekötő egyenesüket is megrajzolhatjuk (2.1. ábrán g egyenes). Ha az előbbieken tárgyalt három távolság közül egyik sem 0, akkor az AB egyenes általános helyzetű. (2.2. ábra)



2.3. ábra.



2.2. ábra.

Ha a három távolság közül az egy, illetve két vesszővel jelölt távolság 0, akkor első képsíkkal párhuzamos, illetve második képsíkkal párhuzamos egyeneseket kapunk (első fővonal, második fővonal). (2.3. ábra)

Ha a három vesszővel jelölt távolság 0, akkor olyan egyeneshez jutunk, amely mindkét képsíkra merőleges, ún. profil síkban van. Az ilyen egyeneseket profil egyeneseknek nevezzük. (2.4. ábra)

A profil egyenest csak két pontjának megadásával lehet megadni. (A többi egyenest képeinek megrajzolásával is meg lehet adni.)

Ha a szóbanforgó három távolság közül kettőt-kettőt veszünk 0-nak, akkor mindkét képsíkkal párhuzamos egyenest (2.5. ábra), illetve az első vagy a második képsíkra merőleges első vetítőegyenest, illetve második vetítőegyenest kapunk (2.6. ábra). Az első vetítőegyenest első képe egyetlen pont, hasonlóan a második vetítőegyenest második képe. (Eddigi áttekintésünkkel ki is merítettük az összes lehetséges egyenes típust.)

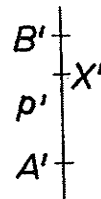
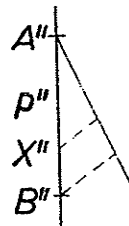
(Az f_1 , f_2 , a , t , r egyenesek legálább az egyik képsíkkal párhuzamosak, ezért a rajtuk felvett AB szakasz valódi méretében leolvasható.)

Az egyenesen levő pont képe az egyenes megfelelő képén van. Ezt mutatja be a 2.2. - 2.6. ábrák egyenessein levő, X -szel

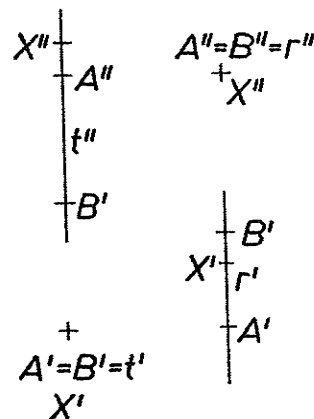
jelölt pontok ábrázolása. Profil egyenes esetében ez az ábrázolás egy arányos szerkesztéssel lehetséges, felhasználva a merőleges vetítés aránytartó tulajdonságát. (A második kép mellé a ferro egyenesre az első képhosszakat másoltuk.)

Sík ábrázolása

A sík ábrázolása a meghatározó adataival történik, mivel a sík pontjainak képe általában teljes egészében befedné a képsíkot. A 2.7. ábrán három, nem egy egyenesen levő A, B, C ponttal adtuk meg egy általános helyzetű síkot. A 2.8. ábrán két (a, b) metsző egyenes, a 2.9. ábrán két párhuzamos (c, d) egyenes, végül a 2.10. ábrán

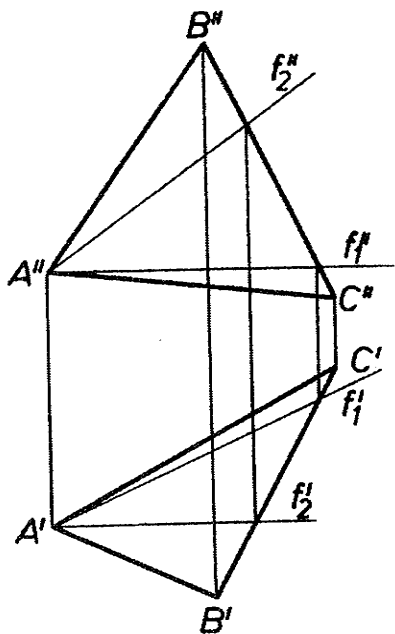


2.4. ábra.

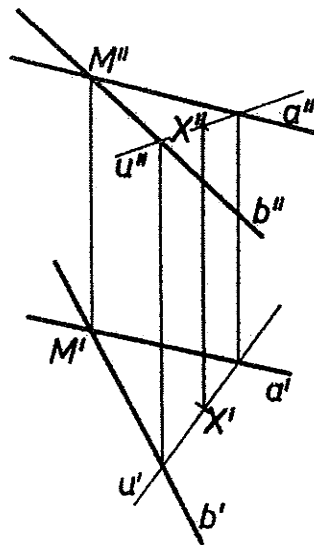


2.6. ábra.

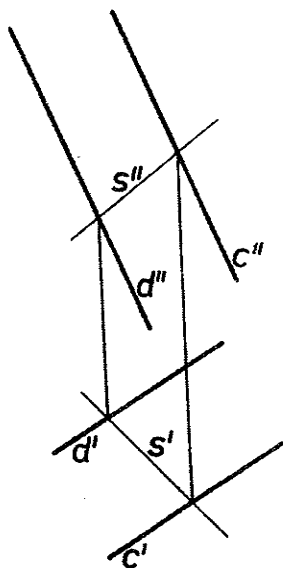
egy e egyenes és egy P pont által meghatározott általános helyzetű síkot ábrázoltunk. (Egyúttal bemutattuk a metsző



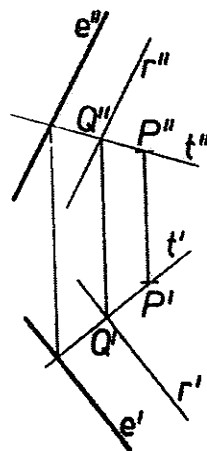
2.7. ábra.



2.8. ábra.



2.9. ábra.



2.10. ábra.

és párhuzamos egyenesek ábrázolását is.)

Síkban fekvő egyenes és pont ábrázolása

A 2.9. ábrán az s'' képével megadott egyenes első képét úgy határozzuk meg, hogy az a c és d egyenesek síkjában legyen. A szerkesztést az s egyenes és a c, illetve d egyenesek metszéspontjának kijelölésével végeztük el.

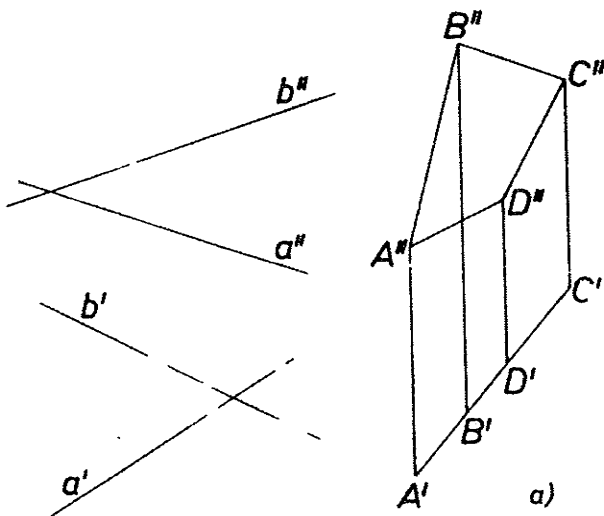
A 2.10. ábrán egy olyan r' képeggyenes adott, amely e' -vel párhuzamos. Az r'' -t úgy határozzuk meg, hogy az r egyenes a (P, e) síkban legyen. Ezért előbb a P pontot az e egyenes egy pontjával összekötő t egyenest vesszük fel. A t és r közös Q pontjának ismeretében r'' az e'' -vel párhuzamosan megrajzolható.

A 2.8. ábrán bemutatjuk, hogy hogyan lehet síkban fekvő pontot ábrázolni. Legyen adva a síkban fekvő X pont első képe. Ezen a ponton át felvesszünk egy síkban haladó u egyenest (első majd második képével) és u'' -n kijelöljük X'' -t.

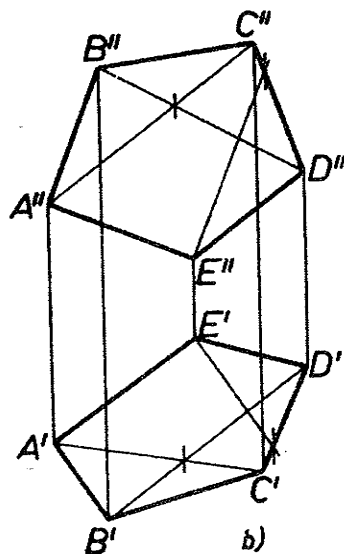
A 2.7. ábrán az ABC sík egy első és egy második fővonalának megszerkesztését láthatjuk.

Az eddigiekből nyilvánvaló, hogy két kitérő egyenes nem lehet egy síkban, tehát első, illetve második képein adódó metszéspontjaik nincsenek egy rendezőn. (2.11. ábra)

A következő 2.12. ábrán egy általános síkötszöget ábrázolunk. A síksokszög egyik képe tetszés szerint megadható, de másik képéből csak három csúcsponthoz vehető fel. Ha az utóbb választott három pont egy egyenesre esik, úgy a sokszög síkja vetítősík, és a többi pont is erre az egyenesre fog kerülni (2.12.a). Ha a választott három pont nem esik egy egyenesre, akkor az általuk meghatározott síkban fekvő pontokként kell a többi pont második képét szerkeszteni (2.12.b).



2.11. ábra.

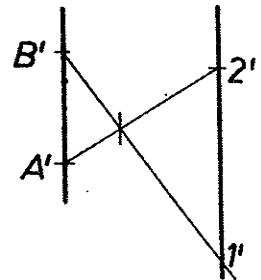
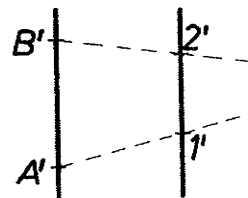
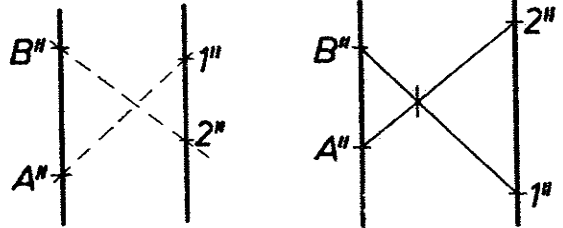


2.12. ábra.

Az ABCDE ötszög első képe és az ABC pontok második képe volt adva. D'' -t a metsző helyzetű AC és BD átlókkal, az E'' -t AB-vel párhuzamos segédegyenessel szerkesztettük.

A 2.13. ábra két kitérő profil egyenest mutat be. Ennek kimutatása azáltal történik, hogy a profil egyeneseket meghatározó két-két pont összekötő egyenesei kitérők.

A 2.14. ábra két párhuzamos profil egyenest ábrázol. Itt az $AB21$ négy-szög átlói metszik egymást.



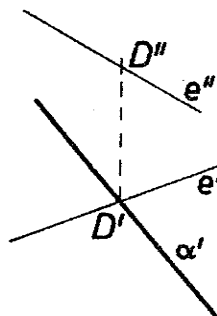
2.13. ábra.

2.14. ábra.

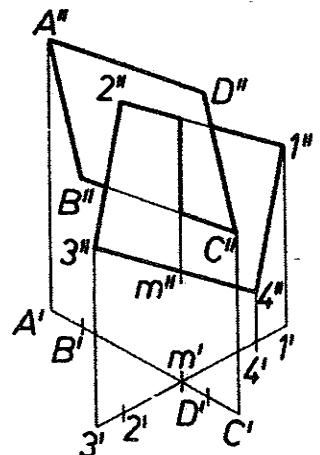
Sík és egyenes metszéspontja. Két sík metszészvonala

A metszési alapszerkesztések bizonyos esetekben olyan egyszerűen végezhetők el, hogy szinte önmaguktól adódnak. Ilyen például a 2.15. ábrán adott α első vetítősík és e egyenes D metszéspontjának megszerkesztése.

Két első vetítősík metszészvonala a 2.16. ábrán határoztuk meg, feltüntetve az ABCD és 1234 paralelogramma lemezek láthatósági viszonyait. A két sík metszészvonala első vetítőegyenese.



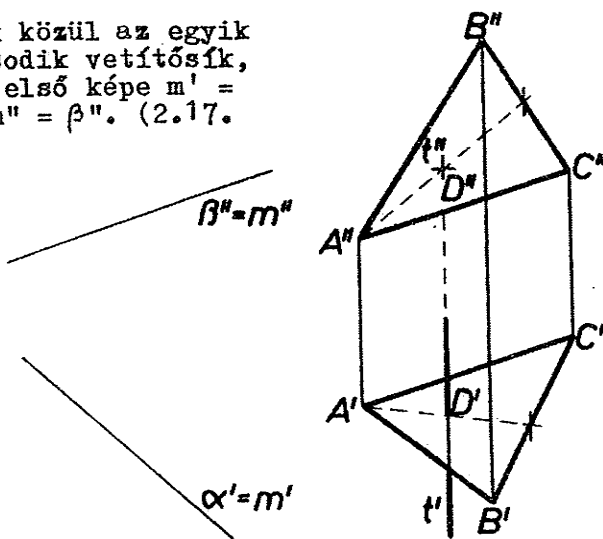
2.15. ábra.



2.16. ábra.

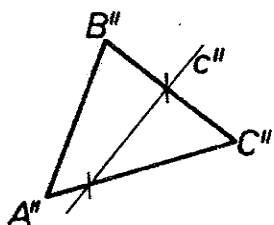
Ha két vetítősík közül az egyik α első, a másik β második vetítősík, akkor metszésvonaluk első képe $m' = \alpha'$ és második képe $m'' = \beta''$. (2.17. ábra)

Általános helyzetű ABC sík és a t második vetítőegyenest metszéspontját a 2.18. ábrán szerkesztettük meg. A D metszéspont második képe a t'' -vel azonos, az első képét pedig az ABC síkbeli pont első képeként szerkesztjük.



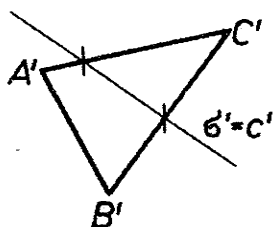
2.17. ábra.

2.18. ábra.

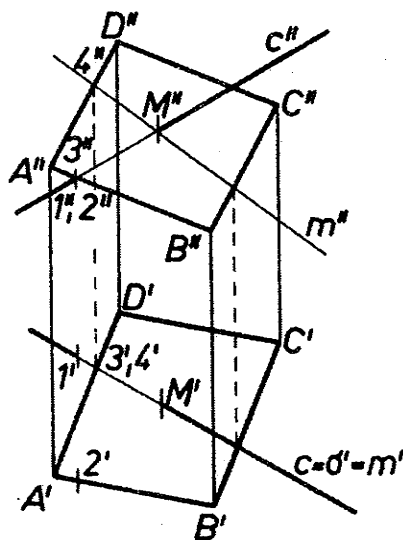


2.19. ábra.

Az ABC háromszög síkjának és a σ első vetítősíknak c metszésvonalát úgy kapjuk, hogy $\sigma' = c'$ és ebből meghatározzuk a második képét. (2.19. ábra)



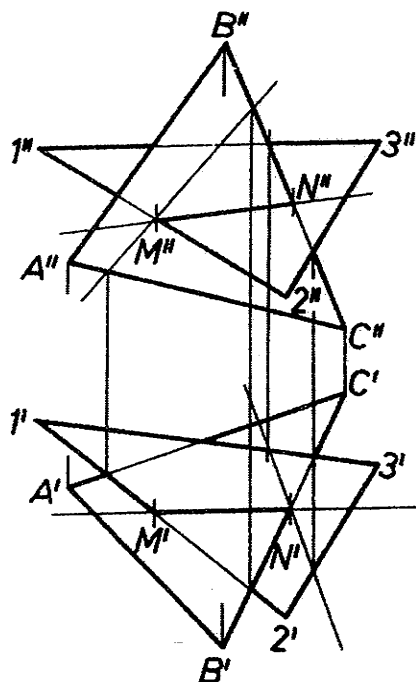
Ennek alapján már meg tudjuk szerkeszteni általános helyzetű sík (ABCD paralelogramma) és a c egyenes metszéspontját. (2.20. ábra)



2.20. ábra.

Eljárásunkban a térgeometriai szerkesztésekben alkalmazott módszert követjük: A c egyenesre fektetett σ első vetítősíknak megszerkesztjük az ABCD síkkal való m metszésvonalát, amely a második képen kijelöli a c egyenes és a sík M metszéspontját. A láthatóságot fedőpontokkal lehet megállapítani, pl. a második képen 1 és 2-vel jelölt pontok közül az AB egyenesen levő 2 pont fedi a c egyenes 1-es pontját, mivel a 2 van π_2 -től távolabb. Ugyanúgy az első képen levő 3 és 4-gyel jelölt pontok közül a 4-es pont (AD oldal) fedi a 3-as pontot (c egyenes).

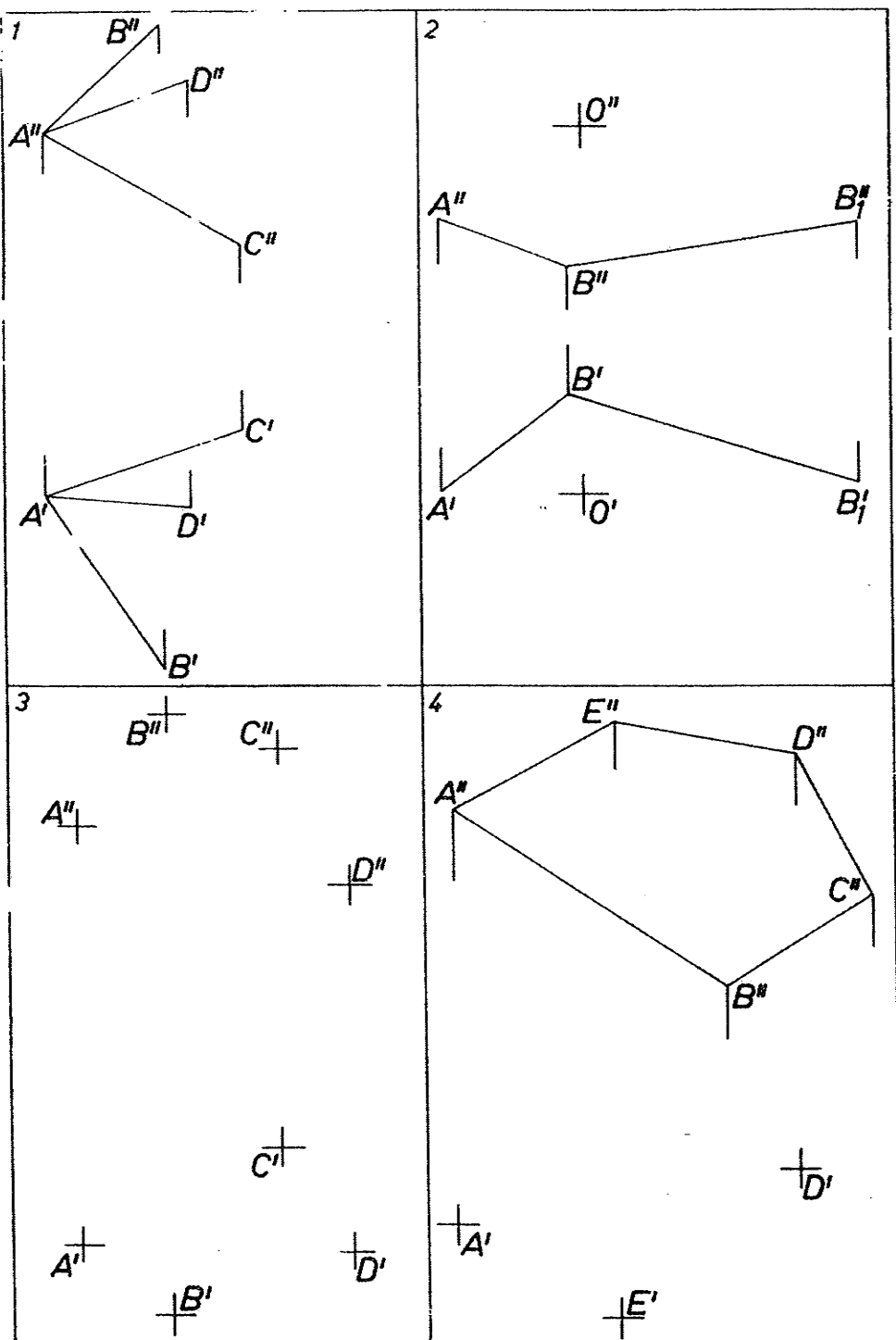
Két sík metszésvonalának meghatározása: A 2.21. ábrán szerkesszük meg az ABC háromszög és az 123 háromszög síkjának metszésvonalát! Az előző szerkesztés szerint meghatározzuk az 12 egyenesnek és az ABC síknak az M metszéspontját, illetve a BC egyenesnek az 123 síkkal való N metszéspontját. A két pont összekötő egyenese a két sík metszésvonala. A metszésvonalnak csak az a darabja látható, amelyik egyidejűleg mindkét síkidomon rajta van. A láthatóság feltüntetésénél a fedőpontos módszert használjuk fel.



2.21. ábra.

Az illeszkedési feladatok gyakorlására oldjuk meg (A/4-es méretű lapon) a 2.22. ábrán felvételi vázlattal megadott példákat.

- 1) Adott egy paralelepipedon A csúcsából kiinduló három éle. Szerkesszük meg a paralelepipedon két képét.
- 2) Egy hatoldalú hasáb alaplapja szabályos hatszög. Ábrázoljuk a hatoldalú hasábot, ha adott az alaplap O középpontja és két szomszédos csúcsa, A és B, továbbá a BB_1 oldalél.
- 3) Döntsük el, hogy egy síkban van-e az ABCD pontnégyes.
- 4) Adott az ABCDE síköttség második képe és az A, E, D csúcsok első képe. Szerkesszük meg az ötszög első képét.



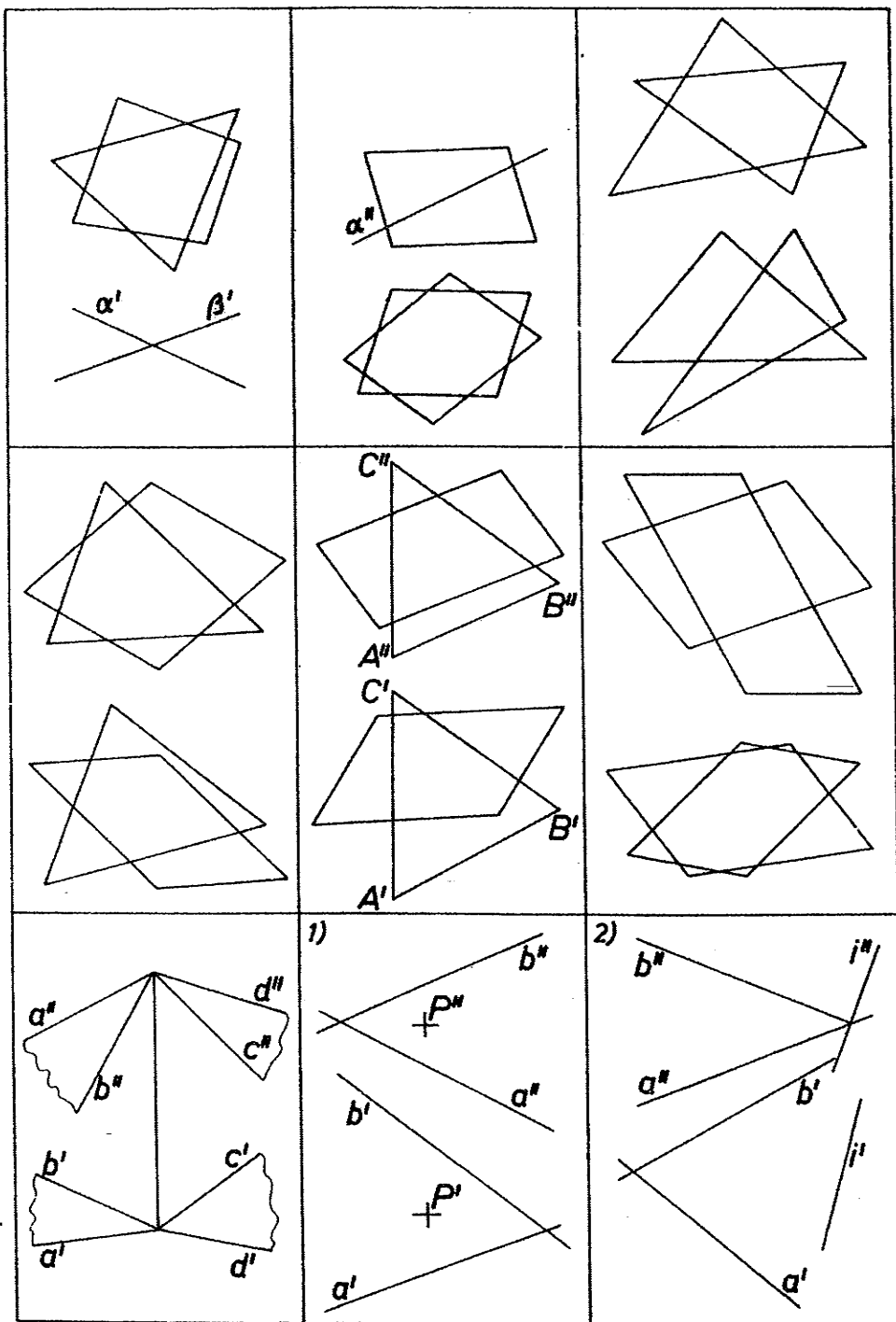
2.22. ábra.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 2.23. ábrán vázlatban megadott síkok metszésvonalát. (A feladat megoldásához nagyítsuk fel A/4-es méretre a feladatokat.) Az ábrán szereplő két utolsó feladat:

1) Szerkesszük meg az a és b egyenesek P ponton áthaladó transzverzálisát.

2) Szerkesszük meg az a és b egyenesek i iránnyal párhuzamos transzverzálisát.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 53-67. és 72-74. pontjai.



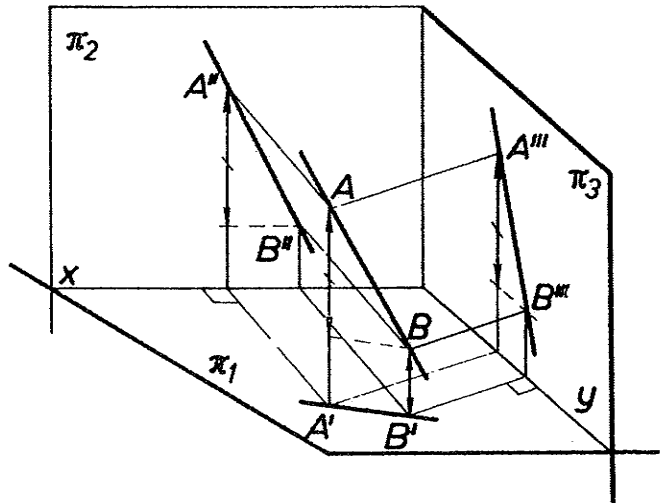
2.23. ábra.

3. ÚJ KÉPSÍK BEVEZETÉSE TRANSZFORMÁCIÓ

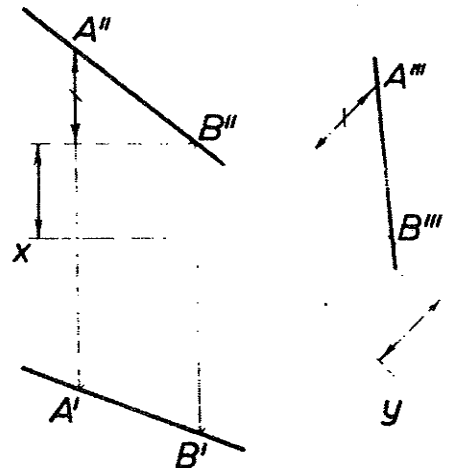
Feladataink megoldása egyszerűbb lehet, ha az ábrázolt alakzat az alkalmazott képsíkhöz viszonyítva speciálisabb helyzetű. Ez a speciális helyzet nem mindig garantálható, de lehetőség van arra, hogy pl. a második képsík helyett egy, az első képsíkra merőleges, új, ún. harmadik képsíkot (π_3) vezessünk be. (3.1. ábra)

A π_3 alkalmas választásával sokszor egyszerűbbé válik a szerkesztés. Az ábrán jól látható, hogy az ábrázolt A és B pontnak az első képsíktól mért távolsága a második és harmadik képen egyaránt leolvasható az x, illetve y képsíktengelyektől mért távolságokként. Ugyanakkor az is látható, hogy az A és B pontok első képsíktól mért távolság-különbsége lemérhető a második, ill. harmadik képen. Ha a képsíkokat egyesítjük, akkor a képsíktengelyek megrajzolása helyett a rájuk merőleges rendezőirányt rajzoljuk meg. (3.2. ábra)

Az AB egyenes harmadik képét úgy kapjuk meg, hogy a B pont új rendezőjén tetszőlegesen kijelöljük a harmadik képét B''' -t. A''' -t az első képsíktávolság-különbséggel jelöljük ki.



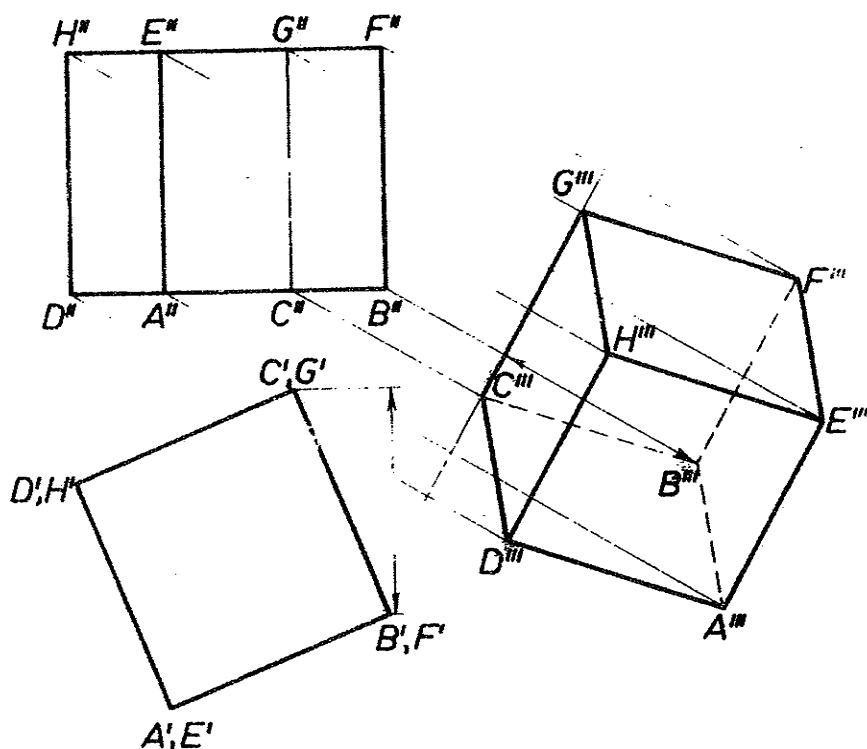
3.1. ábra.



3.2. ábra.

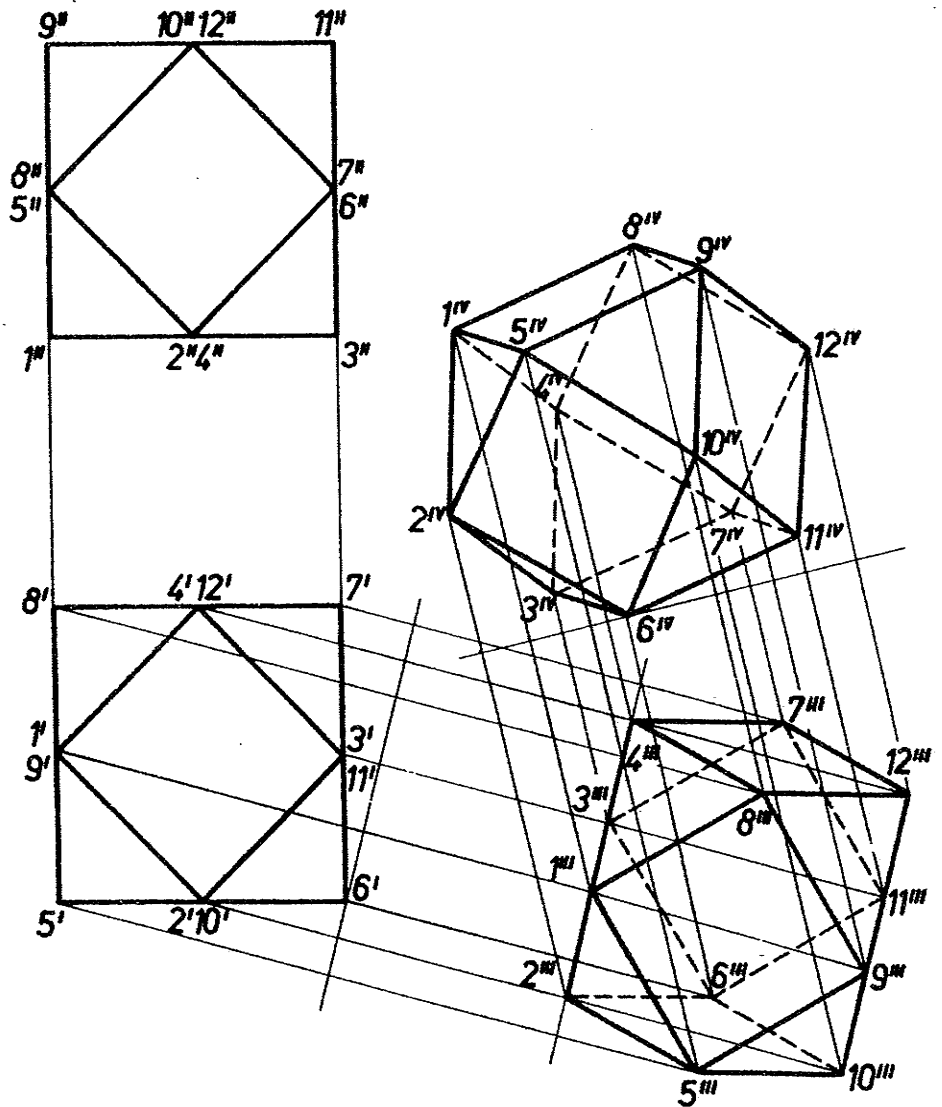
Ezt az eljárást, amellyel új képsíkrendszerre térünk át, képsík-transzformációnak nevezzük. A második képsíkra merőleges új képsíkot is bevezethetünk, sőt egy megszerkesztett harmadik képhez rendezett negyedik kép is az eddigiekhez hasonlóan szerkeszthető meg.

A 3.3. ábrán ábrázolt kockáról szemléletes képet kaphatunk, ha a második képsíkra merőleges új képsíkot vezetünk be. A C pont harmadik képét vettük fel az új rendezőirányon tetszőlegesen, a többi pontot a második képsíktól mért távolság-különbségekkel határoztuk meg. A C' ponton át meghúzott vízszintes egyenestől mértük az első képen a képsíktávolság-különbségeket, míg a harmadik képen a C''' ponton át az új rendezőkre merőleges egyenestől mértük a megfelelő távolságokat. Ezeket az egyeneseket képsíktengelyeknek is tekinthetjük.



3.3. ábra.

A 3.4. ábrán egy összetett síklapú test első és második képén igen speciális vetületeit adtuk meg. Két egymás utáni transzformációval a test képies képéhez jutunk. A transzformáció lépései, a képek megrajzolása és ezek láthatóságának eldöntése az előző példa megoldási menetével azonos. (A láthatóság feltüntetésénél jól felhasználhatók a fedőpontok.)



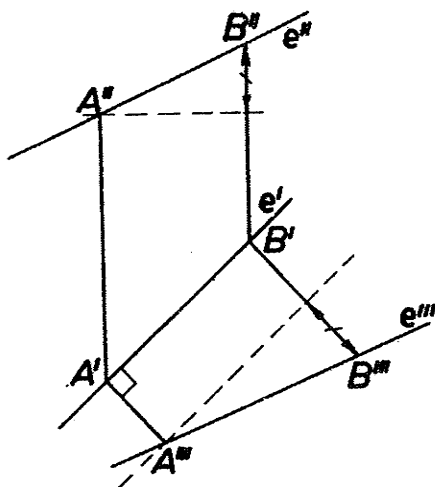
3.4. ábra.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogyan lehet az új képsíkot úgy megválasztani, hogy az egyenesek, illetve síkok az új képsíkhöz viszonyítva speciálisabb helyzetűek legyenek.

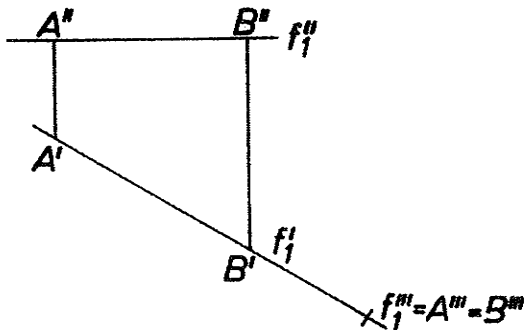
Egyenes transzformációja

A 3.5. ábrán egy általános helyzetű e egyenest ábrázoltunk, és az egyenes első vetítősíkjával párhuzamos harmadik képsíkot vettük fel. Ekkor a harmadik képsíknak az első képsíkkal való metszésvonala e' -vel párhuzamos, tehát az új rendezőirány e' -re merőleges.

Az e egyenesen felvett A és B pontok transzformációjával adódik a harmadik kép. (Az AB szakasz a harmadik képen valódi nagyságban látszik.)



3.5. ábra.



3.6. ábra.

A 3.6. ábrán egy f_1 első fővonalat ábrázoltunk és felvettünk egy új képsíkot az f_1 -re merőlegesen. Az f_1 -re merőleges sík nyilván az első képsíkra is merőleges és az első képsíkkal alkotott metszésvonala f_1' -re merőleges,

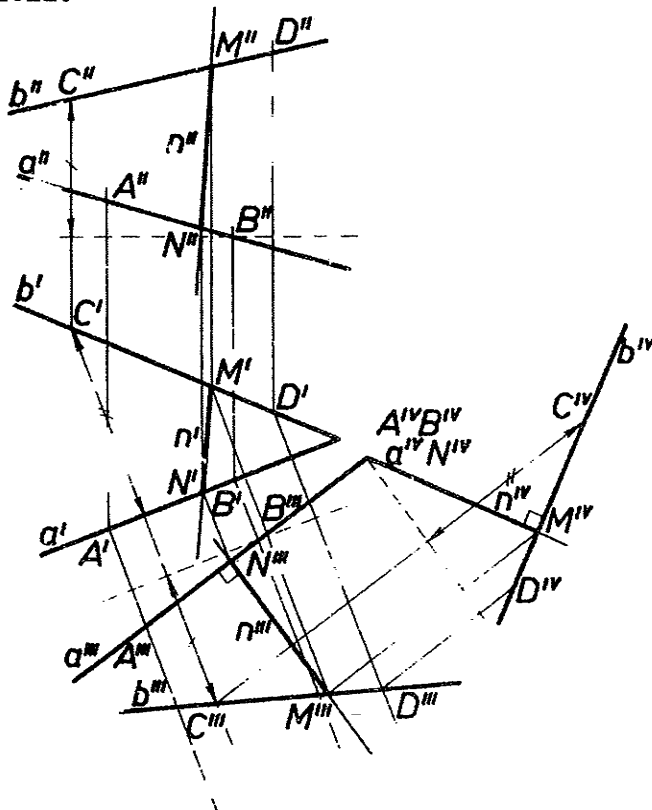
tehát az új rendezőirány f_1' -vel párhuzamos. Az egyenes valamennyi pontjának harmadik képe ugyanaz a pont.

Egyetlen transzformációval általános helyzetű egyenes vetítőegyenessé nem transzformálható, de két lépésben már lehetséges; azaz először az általános helyzetű egyenest fővonallá transzformáljuk, majd a kapott fővonalat egy további transzformációval vetítőegyenessé transzformáljuk.

Erre mutatunk példát a következő feladatban:

Szerkesszük meg az a és b kitérő helyzetű egyenesek normál transzverzálisát (3.7. ábra).

Az a egyenest vetítőegyenessé transzformáltuk. A IV. képen az n normál transzverzális vetülete a b'' -re merőleges, mivel az n a -ra is merőleges, és így párhuzamos a negyedik képsíkkal. Ugyanezért a harmadik képen a''' -re merőleges n''' . Az n egyenesnek a -val, illetve b -vel közös pontjait N , illetve M jelöli.

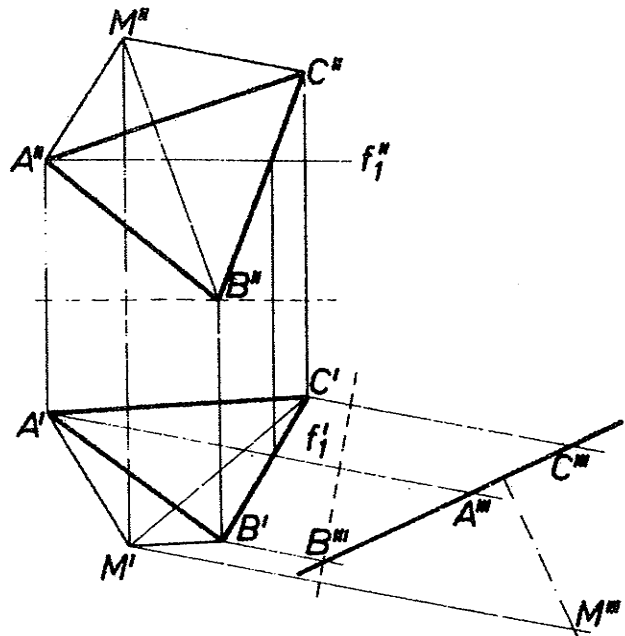


37. ábra.

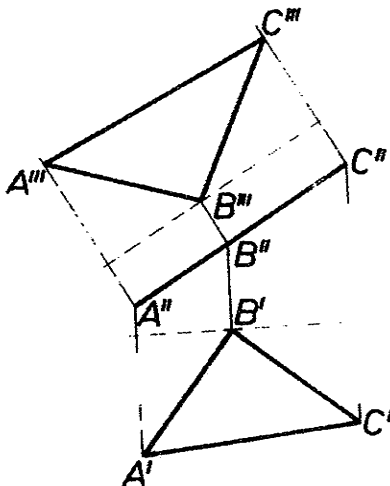
A sík transzformációja

Egy sík biztosan vetítősík, ha tartalmaz vetítőegyenest, ezért egy általános helyzetű síkot így transzformálunk vetítősíkká, ha egyik főegyenest vetítőegyenessé transzformáljuk úgy, mint a 3.6. ábrán.

A 3.8. ábrán felvett ABCM három-
oldalú gúla ABC
síkját transzfor-
máljuk vetítősíkká.
Az ABC síkban fel-
vett első fővonal
első képe adja meg
a transzformáció
irányát. A harmadik
képen leolvasható
az M pont és az
ABC sík távolsága.

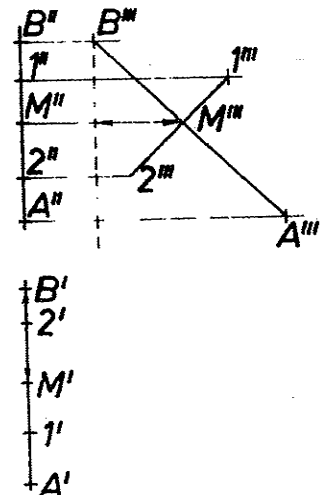


3.8. ábra.



3.9. ábra

3.10. ábrán bemutatjuk, hogyan
lehet két profil egyenes metszéspont-
ját megszerkeszteni a transzformáció
eljárásával. Az AB és az 12 profil
egyenesei metszéspontja M.

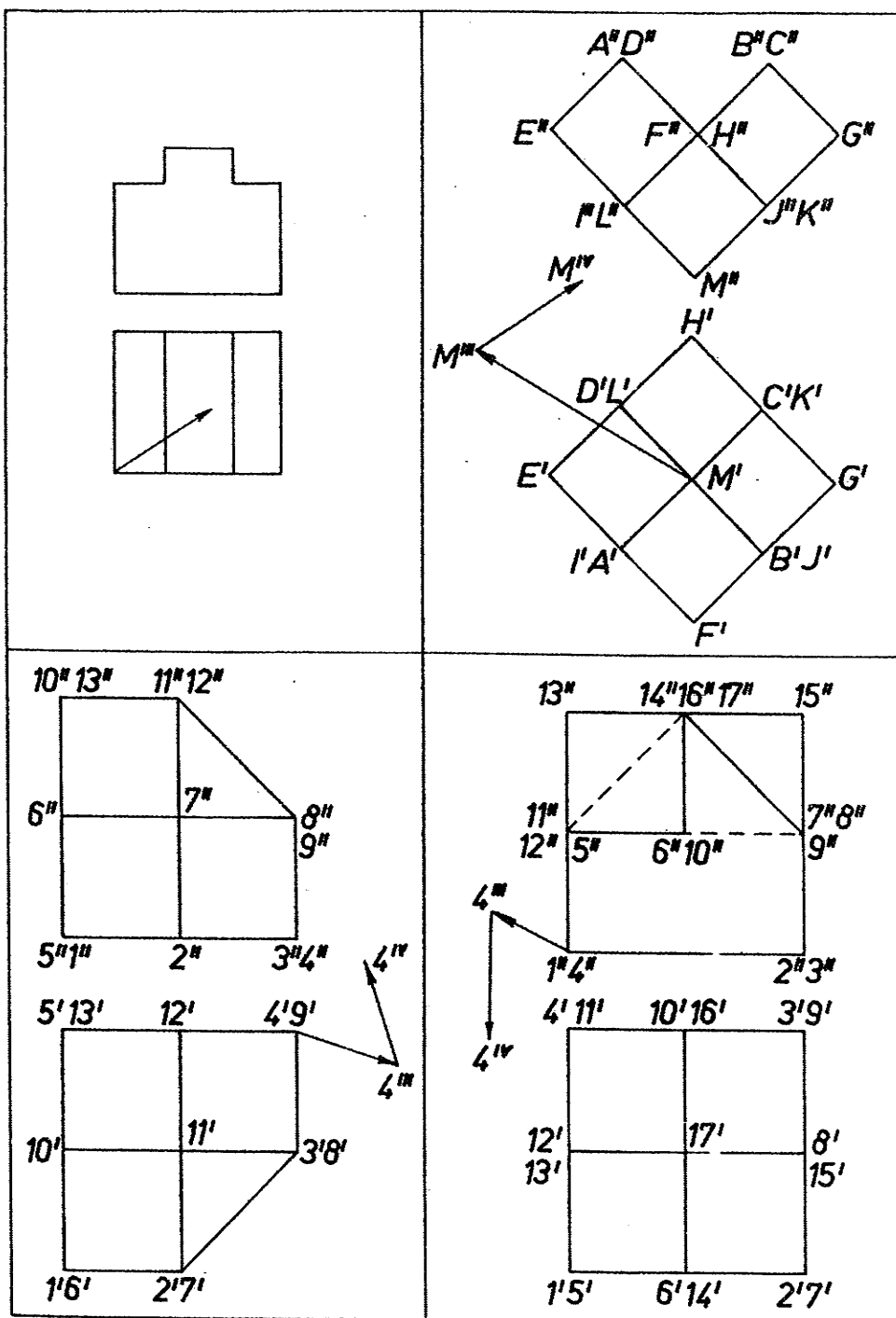


3.10. ábra

A transzformáció eljárásának gyakorlására szerkesszük meg a 3.11. ábrán szereplő feladatokat. A harmadik, illetve negyedik képek megszerkesztéséhez a vázlatokon megadtuk a transzformációhoz az új rendezőirányokat. Ezeket a feladatokat is A/4 méretű lapon dolgozzuk ki.

Szerkesszük meg továbbá a 3.8. ábrán megadott tetraéder ABC és MBC síkjainak hajlásszögét a transzformáció eljárásával.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 69-71. pontok.



3. 11. ábra.

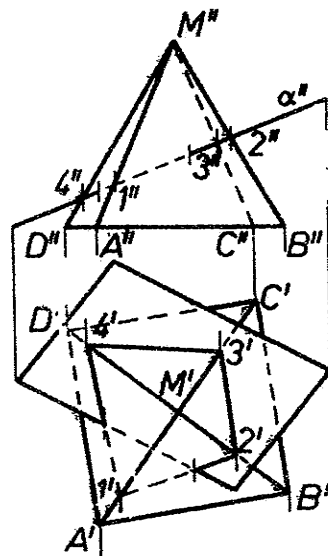
4. POLIÉDEREK (SIKLAPOKKAL HATÁROLT TESTEK)

SIKMETSZETE

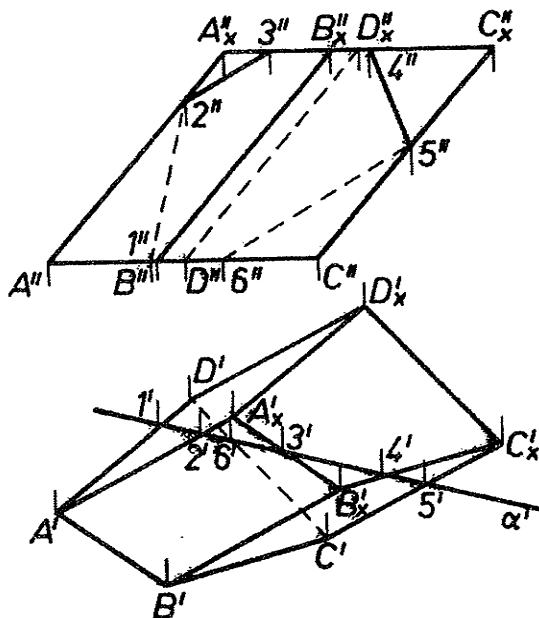
Egy poliéder (pl. hasáb, gúla, téglatest, kocka, paralelepipedon) síkmetszete egy olyan sokszög, amelynek oldalai a poliéder oldallapjai és a metszősík metszésvonalaként jönnek létre. E sokszög csúcspontjai a poliéder éleinek a metszősíkkal való metszéspontjai.

A síkmetszet akkor szerkeszthető a legegyszerűbben, ha a metszősík vetítő sík.

A 4.1. ábrán egy szabályos négyoldalú gúlát metszünk el az α második vetítő síkban levő paralelogramma lemezzel. A gúla oldalélei az α síkot az 1, 2, 3, 4 pontokban metszik, de a láthatóság feltüntetésénél a kimetszett négyszögnek csak egy része jön tekintetbe.



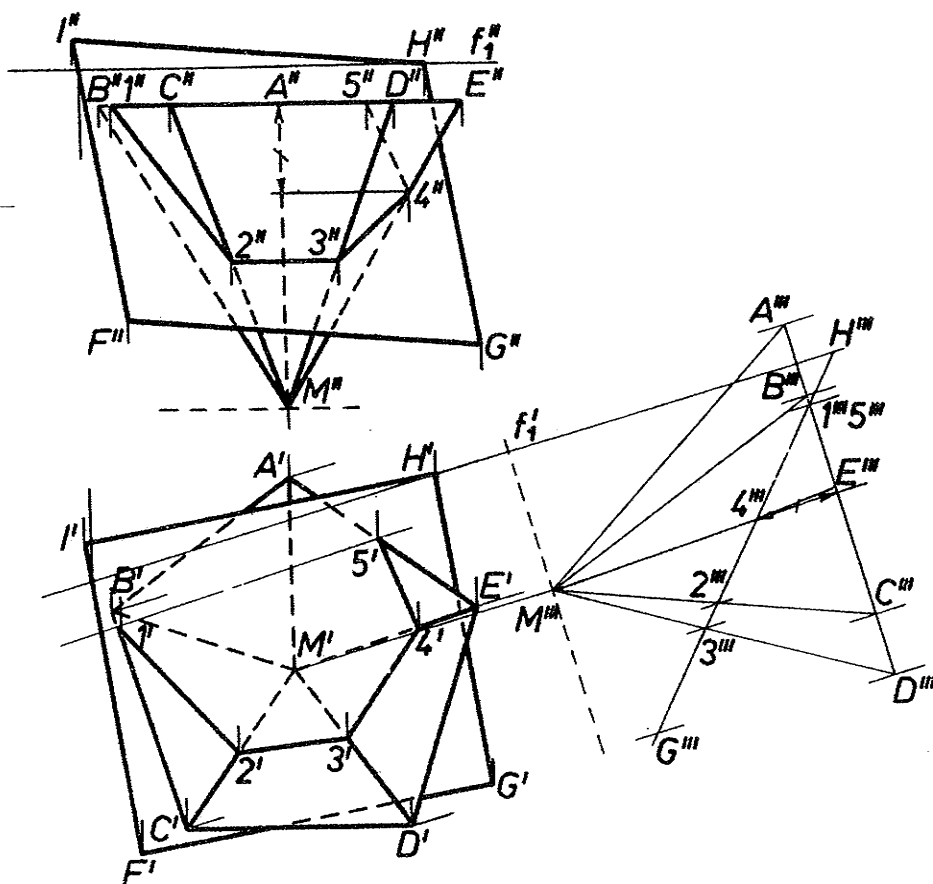
4.1. ábra.



4.2. ábra.

A 4.2. ábrán az ABCD alapú négyoldalú ferdehasábnak az α első vetítő síkkal képezzük a metszetét. A kimetszett hatszög 1, 6 oldala a hasáb alapsíkjaiban, 3, 4 oldala pedig a fedőlap síkjában van. A láthatóságot úgy tüntettük fel, mintha a metszet-sokszög a hasábra rá lenne rajzolva.

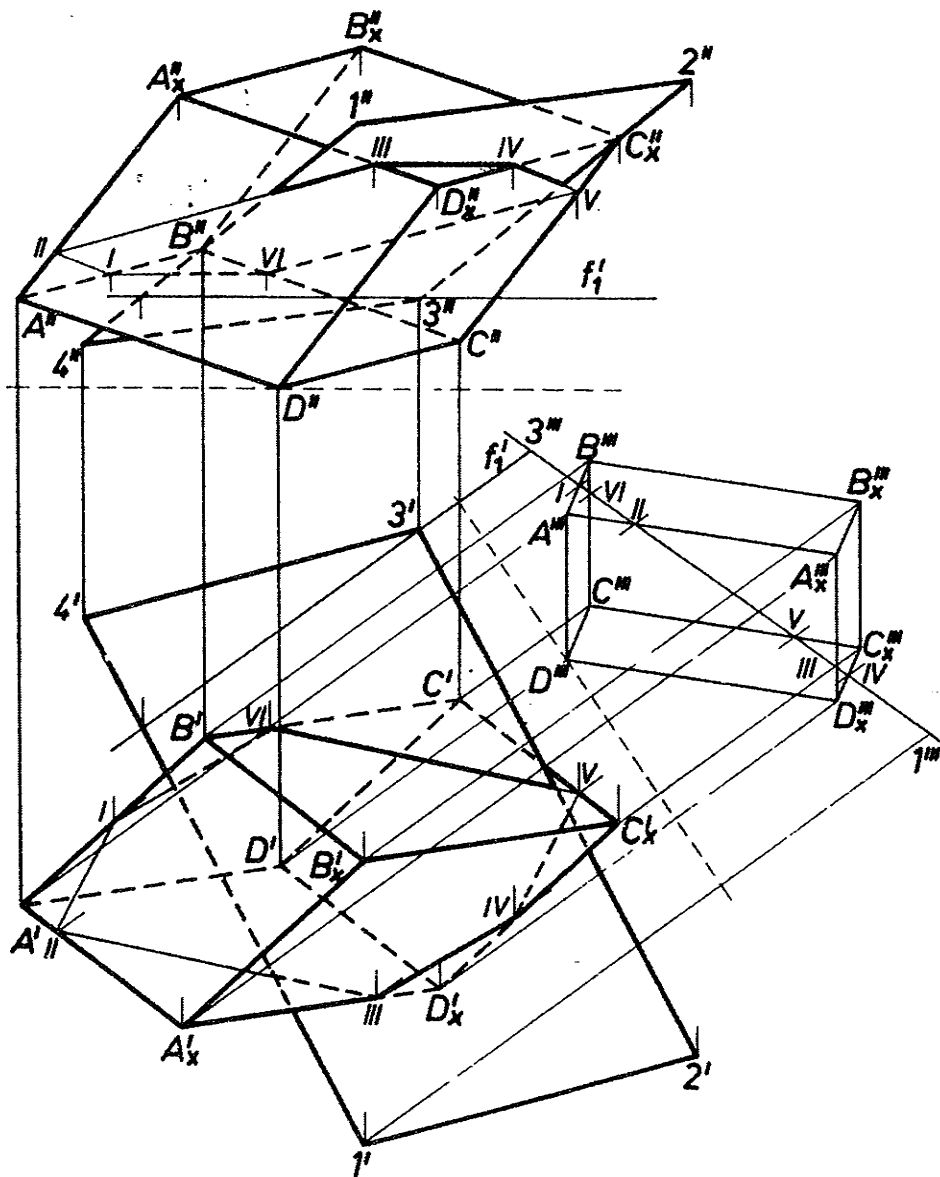
Ha egy poliédert általános helyzetű síkban levő határolt síklemezzel metszünk el, akkor célszerű itt is először a teljes síkkal való metszetet megszerkeszteni, és csak utána megvizsgálni, hogy ennek mely része van a síklemezen. Ezt tesszük a 4.3. ábra megszerkesztésénél is: a szabályos östoldalú MABCDE gúla és az FGHI paralelogramma metszetét szerkesztjük meg. A metszet könnyebb megszerkesztése céljából az FGHI síkot vetítősíkká transzformáljuk; a harmadik képsíkot az első képsíkra merőlegesen vesszük fel, ennek megfelelően az új rendezőirányt a paralelogramma síkjának f_1 első fővonala adja meg. A harmadik képen a metszősík képe egyetlen egyenes, tehát a gúla éleivel alkotott metszéspontok (1-5) közvetlenül leolvashatók a harmadik képen és elvben könnyen (ti. rendezők meghúzásával) az első majd a második képre átvihetők. Vannak azonban olyan élek, mint pl. az ME él, amelyen a 4 pont első képe ezzel a módszerrel nem határozható meg. Itt a második képet határozzuk



4.3. ábra.

meg a transzformáció eljárásával, ugyanis a 4.E pontok első képsíktól mért távolságkülönbsége mind a harmadik, mind pedig a második képen ugyanakkora. A 4 pont második képéből az első kép már rendezővel kijelölhető. A láthatóságot úgy tüntetjük fel, hogy a gúla ABCDE lapja le van véve és a lemezből készített gúlába a felülnézetben belelátunk.

A 4.4. ábrán egy paralelepipedon és egy paralelogramma lemez metszetét szerkesztjük meg. A paralelogramma sík-

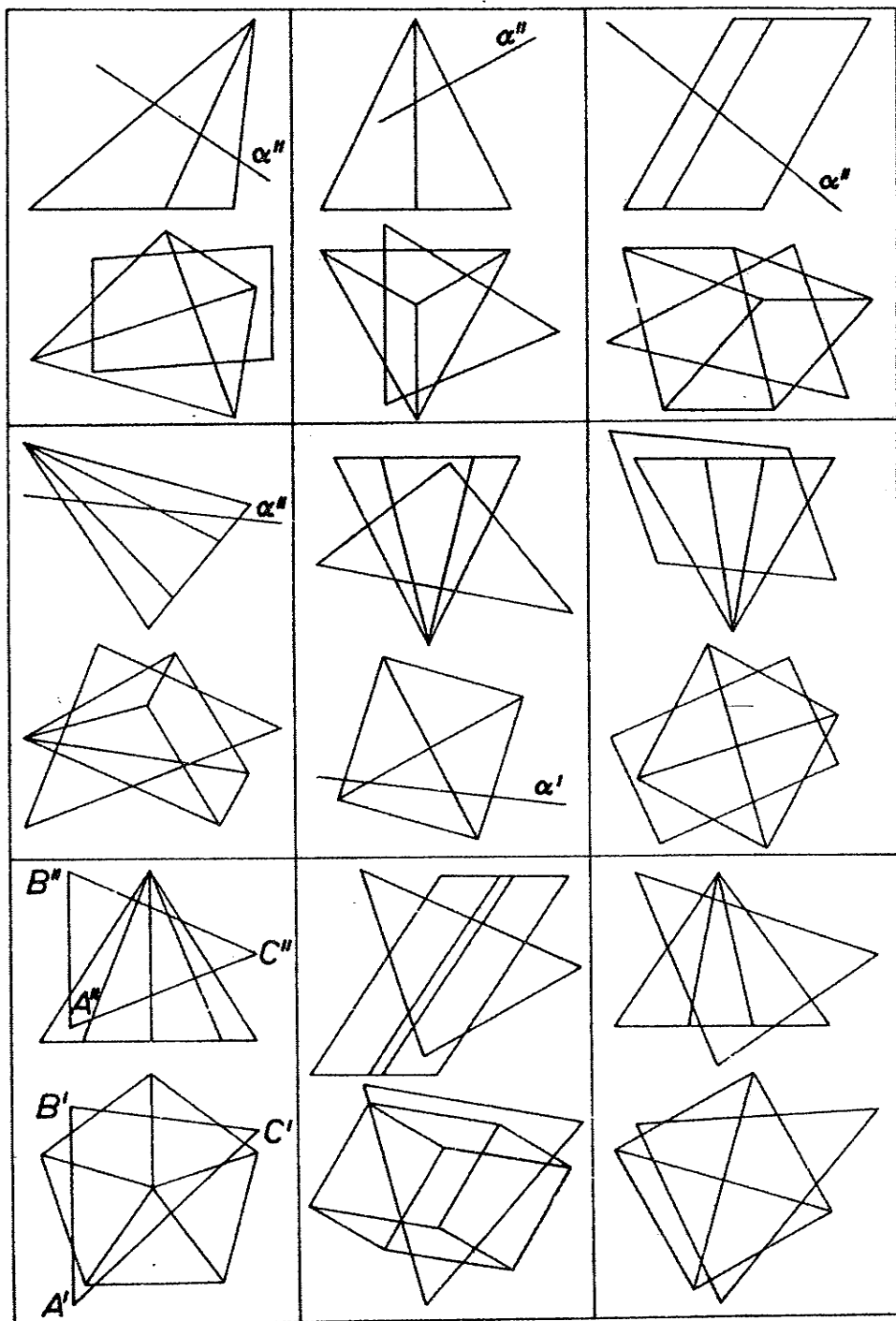


4.4. ábra.

jának f_1 első fővonalát felvesszük és az első képpel rendezett helyzetű harmadik képet az f_1' -vel párhuzamos rendezőiránnyal határozzuk meg. Az 1234 paralelogramma síkja harmadik vetítősík, tehát a harmadik képen a paralelepipedonból kimetszett hatszög csúcsai (I-VI) közvetlenül adódnak. E csúcspontokat az első majd második képen kijelölve megrajzoljuk a hatszög mindkét képét. Látható, hogy a hatszög a 23 és 14 oldalakat metszi, e metszéspontok első és második képeinek — pontos szerkesztés esetén — közös rendezőkön kell lenni. Ennek ellenőrzése után tüntetjük fel a láthatóságot.

Gyakorlás: Nagyítsuk fel A/4 méretre a 4.5. ábrán szereplő feladatvázlatokat és szerkesszük meg az egyes poliédereknek a megadott síkokkal való metszetét, majd tüntessük fel a láthatósági viszonyokat.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 85-89. pontok.



4.5. abra.

5. POLIÉDEREK ÁTHATÁSA

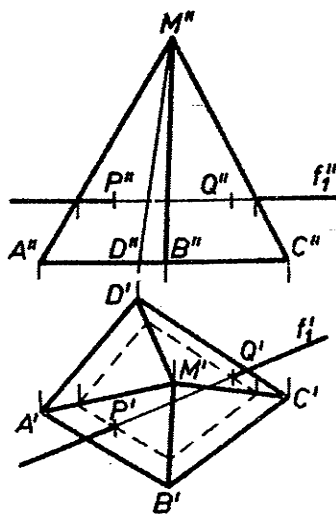
Két poliéder áthatása úgy jön létre, hogy az egyik test lapjait metszik a másik test lapjai. Feladatunk most az, hogy eljárást találjunk két metsződő poliéder metszészonalának meghatározására. Két poliéderfelület közös része síkidomok metszészonalaiból, tehát egymáshoz csatlakozó egyenesszakaszokból áll, ez az ún. áthatási poligon.

E poligon csúcsai általában nincsenek egy síkban, hanem egy (esetleg több) térbeli sokszöget alkotnak. Ennek a sokszögnek a csúcsai ott vannak, ahol az egyik poliéderrel a másik poliéderbe metsz. Két poliéder áthatásának megszerkesztésénél először megszerkesztjük az egyik poliéder éleinek a másik lapjaival képezett metszéspontjait, majd a másik poliéder éleinek az első lapjaival alkotott metszéspontjait. E pontok képezik az áthatási poligon (vagy poligonok) csúcspontjait. E pontokat megfelelő sorrendben összekötve az áthatási poligonhoz jutunk.

Két csúcspont összekötő szakasza csakis akkor tartozhat az áthatási poligonhoz, ha egyik poliéder belsejében sem halad. Tehát két áthatási csúcspontot akkor köt össze az áthatási poligon egy éle, ha a két pont egyidejűleg mindkét poliédernek ugyanazon lapján van.

Az elvi részek összefoglalása után most lássunk néhány előkészítő feladatot.

Az 5.1. ábrán az első képsíkkal párhuzamos síkon álló MABCD négyoldalú gúla és az f_1 első fővonal metszéspontjait szerkesztjük meg. Az f_1 fővonalra a gúla alapsíkjával párhuzamos síkot fektetünk, és az AM éllel alkotott metszéspont első képének kijelölése után megszerkesztjük a gúlából kimetszett négyszöget, amelynek oldalai a gúla alapéleivel párhuzamosak (a gúla ABCD alaplapja és a kimetszett négyszög hasonlóak). A kimetszett négyszög az f_1 egyenesen kijelöli a P és Q metszéspontokat.

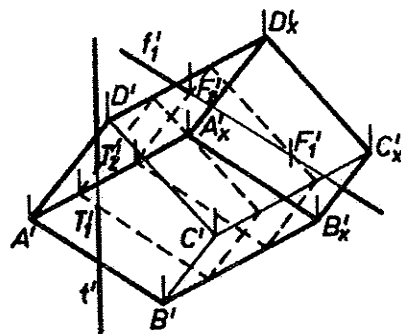
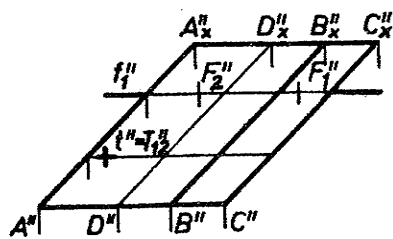


5.1. ábra.

Az ABCD alapú ferdehasáb az első képsíkkal párhuzamos síkon áll. (5.2. ábra)

Megszerkesztjük a t második vetítőegyenes és az f_1 első fővonal metszéspontjait az említett hasábbal. Mindkét egyenesre egy-egy első képsíkkal párhuzamos síkot fektetünk, ezek az AA_x élen kije-

lölnek egy-egy pontot. Ezekből a pontokból kiindulva és az alapélekkel rendre párhuzamosot húzva, az alaplappal egybevágó négyszögeket kapunk. Az egyik négyszög a t egyenesen jelöli ki a T_1 , T_2 metszéspontokat, míg a másik négyszög az f_1 egyenesen levő F_1 , F_2 metszéspontokat tűzi ki.

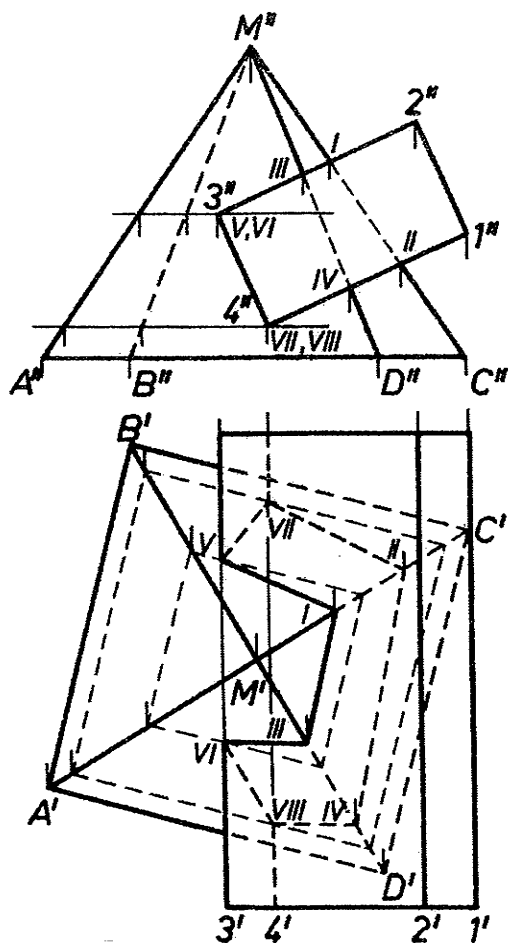


5.2. ábra.

Az 5.3. ábrán egy első képsíkkal párhuzamos síkon álló szabályos négyoldalú MABCD gúlát és egy második vetítőegyenes élekkel meghatározott négyoldalú hasábot ábrázoltunk (a hasáb oldalélei az 1, 2, 3, 4 egyenesek). Ebben a helyzetben a két poliéder áthatása jól áttekinthető, mivel közvetlenül adódnak a gúla éleinek a hasáb lapjaival való metszéspontjai. A hasáb éleinek a gúla lapjaival alkotott metszéspontjait pedig az imént tárgyalt előkészítő feladatok mintájára szerkesztjük meg. A metszéspontokat római számokkal jelöltük (I-VIII) és egy táblázatban feljegyeztük, hogy melyik pont mely lapokon van. Nyilvánvaló, hogy a gúla MC élén levő I pont az MC élet tartalmazó BCM és CDM lapokon van; ugyanúgy a hasáb 3 élén levő V. áthatási pont a hasáb 2,3 és 3,4 lapjain van.

Az áthatási poligon meghatározásában az I pontból indultunk el és olyan pontot kerestünk a táblázatban, amely szintén rajta van a BCM és 2,3 lapokon. Ilyen pontnak adódott az V. pont. Tovább csak úgy juthatunk az áthatási poligonon, ha most BCM és 3,4 lapokon levő pontot keresünk. Ilyen a VII. pont. A VII. ponttól a BCM és 1,4 lapokon levő pontba tudunk tovább menni, ilyen a II. pont. Innen CDM és 1,4 lapokon levő pontba megyünk tovább, vagyis a IV pontba. Ez az eljárás folytatható, míg a kiindulási pontba visszajutunk. Ha valamennyi áthatási pontot felhasználunk, akkor egyetlen zárt térbeli sokszög az áthatási poligon.

Ha maradnak még pontok, akkor ez azt jelenti, hogy az áthatás két (esetleg több) különálló poligonból áll, tehát



	Gúla	Hasáb
I	BCM CDM	23
II	BCM CDM	14
III	ADM CDM	23
IV	ADM CDM	14
V	BCM	23 34
VI	ADM	23 34
VII	BCM	14 34
VIII	ADM	14 34

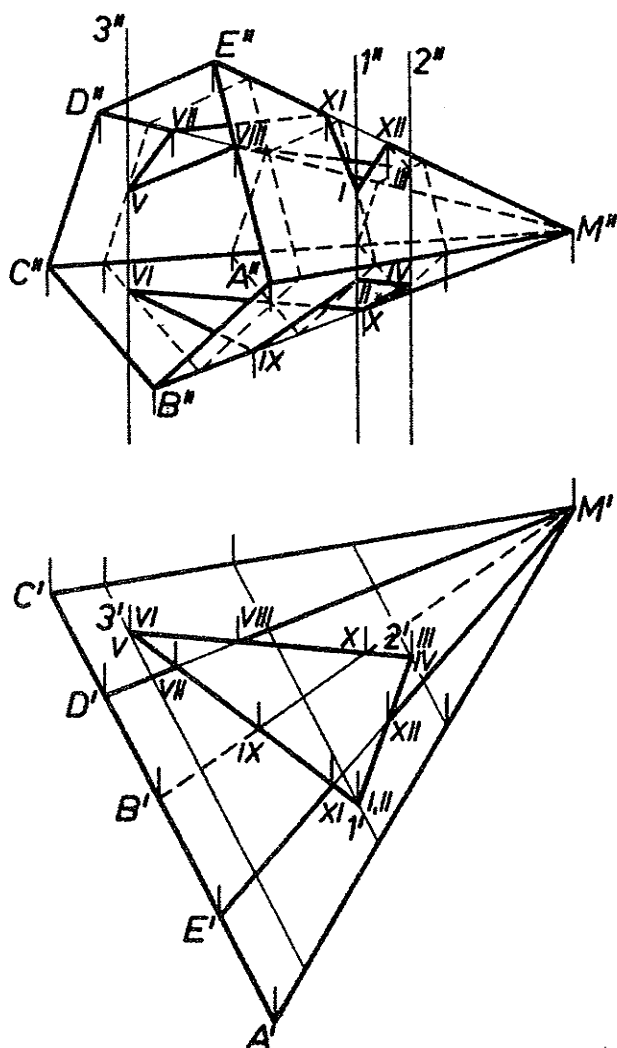
I - V - VII - II - IV - VIII - VI - III - I

53. ábra.

a maradék pontok összekötését az ismertetett eljárás szerint végezhetjük. (Erre mutat példát az 5.4. ábra.) Az 5.3. ábrán az áthatási poligon megrajzolása után feltűntettük a láthatóságot. (A fedőpontok itt is alkalmazhatók.) Az áthatási poligonnak csak azok az oldalai láthatók, melyek mindkét testnek látható lapján vannak.

Az 5.4. ábrán egy ABCDE ötszög alapú gúlát ábrázoltunk, amelynek alaplapja első vetítősíkban van, hatodik csúcsát M-mel jelöltük. Szerepel az ábrán még egy háromoldalú hasáb, amelynek oldalélei 1, 2, 3 első vetítőegyenesei.

Először a hasáb élein levő metszéspontokat határozzuk meg, lényegében azzal a módszerrel, amelyet az 5.1., illetve az 5.2. ábrán bemutatott előkészítő feladatokban már megismertünk. Az 1 élen át az ABCDE első vetítősíkjával párhuzamos síkot felvéve, ez a sík a gúlából az alapötszög-



	Gúla	Hasáb
I	AEM	12 13
II	ABM	12 13
III	DEM	12 23
IV	ABM	12 23
V	DCM	13 23
VI	BCM	13 23
VII	DCM DEM	13
VIII	DCM DEM	23
IX	ABM BCM	13
X	ABM BCM	23
XI	AEM DEM	13
XII	AEM DEM	12

I - XII - III - VIII - V - VII - XI - I

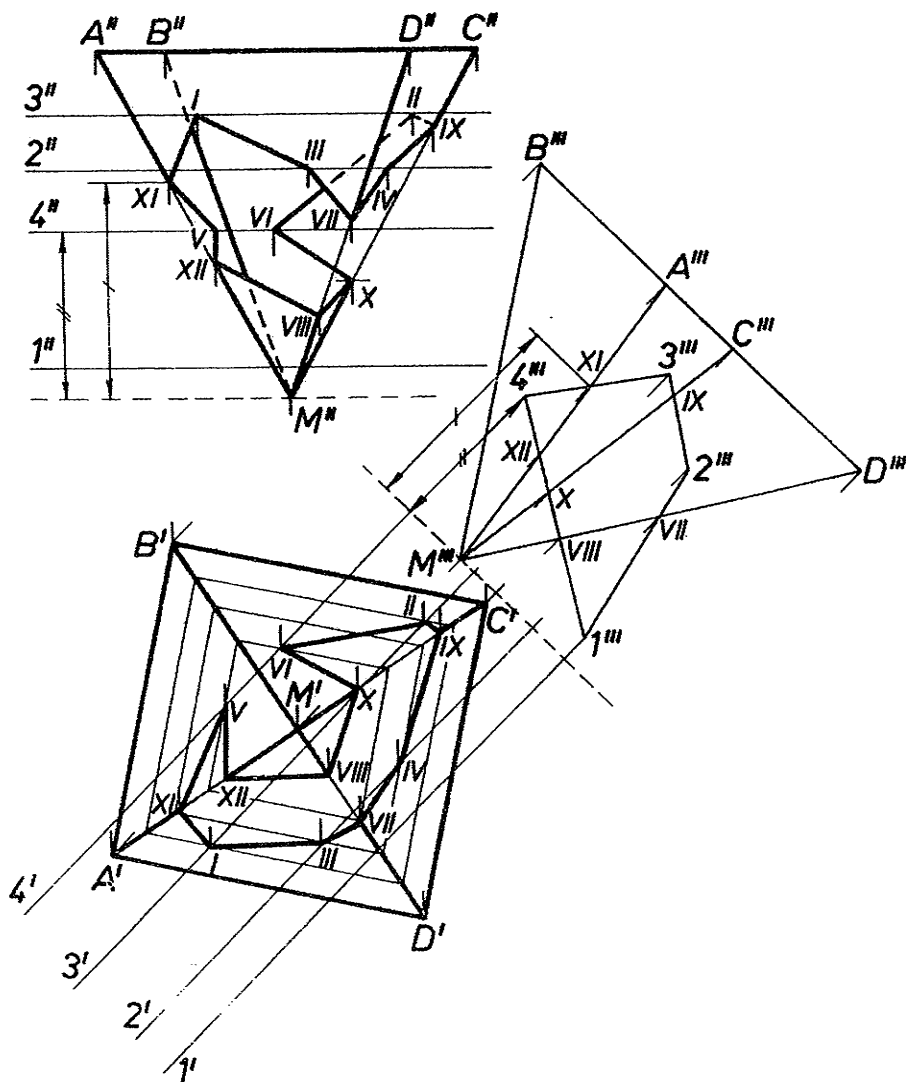
II - IV - X - VI - IX - II

54. ábra.

höz hasonló ötszöget metsz ki. A kimetszett ötszög és az 1 él közös I és II pontjai az áthatási sokszög csúcsait adja. Teljesen hasonlóan szerkeszthetők meg a 2. és 3. élen levő III, IV, illetve V, VI metszéspontok. A gúla éleinek a hasáb lapjaival alkotott metszéspontjait az első képen vetítősík és egyenes metszéspontjaiként közvetlenül kapjuk (VII-XII pontok). Az összekötéshez az előző feladatban ismertetett módon elkészítjük a táblázatot. Az áthatási pontok összekötésénél két térbeli sokszöget kapunk. Ennek az az oka, hogy a hasáb „átfúrja” a gúlát, az egyik sokszög az átfúrásnál a bemenetnek, a másik a kimenetnek felel meg. A láthatóságot azon feltételekkel tüntettük fel,

hogy a hasábot és a lemezből készült gúla alaplapját az áthatás megszerkesztése után eltávolítottuk.

Az 5.5. ábrán az ABCD alapú szabályos négyoldalú gúlának és az 1, 2, 3, 4 első fővonalakkal megadott hasábnak az áthatását szerkesztettük meg. (A gúla ötödik csúcsa M az alaplap síkja alatt van.) A feladat könnyebb áttekinthetősége céljából a hasáb éleit vetítőegyenesekké transzformáljuk. A harmadik képen a gúla és hasáb áthatása olyan helyzetben mutatkozik, mint az 5.3. ábra feladatában. A hasábéleken levő metszéspontokat az 5.1. ábrán bemutatott módszerrel határozzuk meg (I-VI pontok). A gúla élein levő



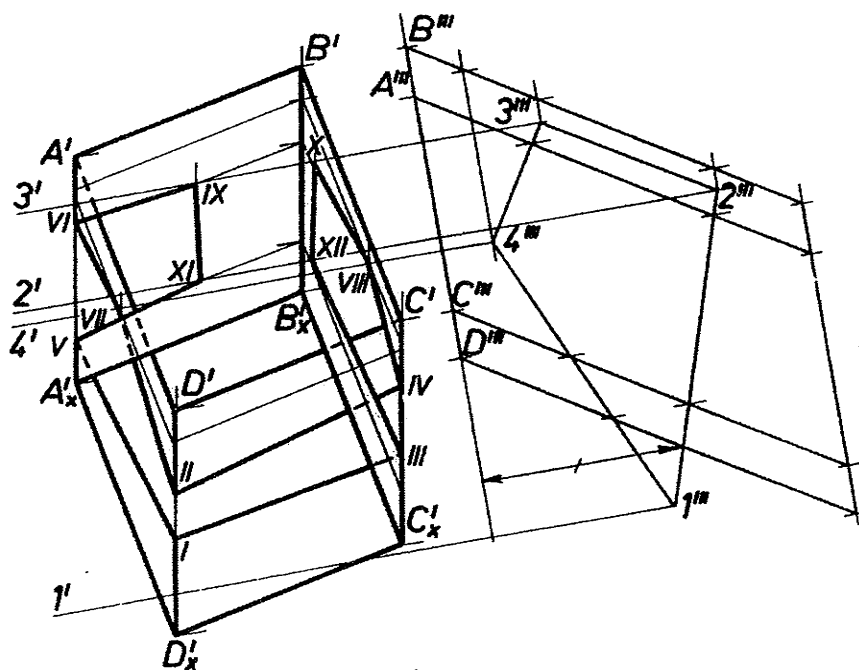
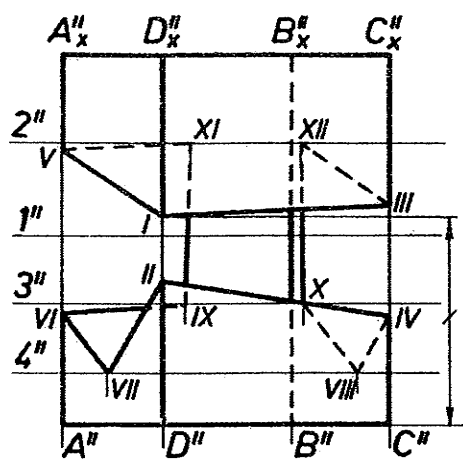
5.5. ábra.

metszésponatok a harmadik képen közvetlenül adódnak, azonban az első, majd a második képen való kijelölésük nem mindig lehetséges csak a rendezők segítségével. Példánkban az MA, illetve MC éleken levő metszésponatok első képének kijelölése az ún. „hegyes metszés” miatt igen pontatlan lenne. Ezt úgy tudjuk kiküszöbölni, hogy a transzformáció eljárásának alkalmazásával az MA és MC élen adódó ponatok második képét jelöljük ki előbb, majd ezután az első képüket. Az ábrán egy vesszővel megjelölt nyíl mutatja a XI. pont második képének transzformációs kijelölését. A megszerkesztett ponatok összekötését a korábban megismert eljárás szerint végezzük el, a láthatóság feltüntetésénél pedig a hasábot és a lemezből készült gúla ABCD lapját eltávolítjuk.

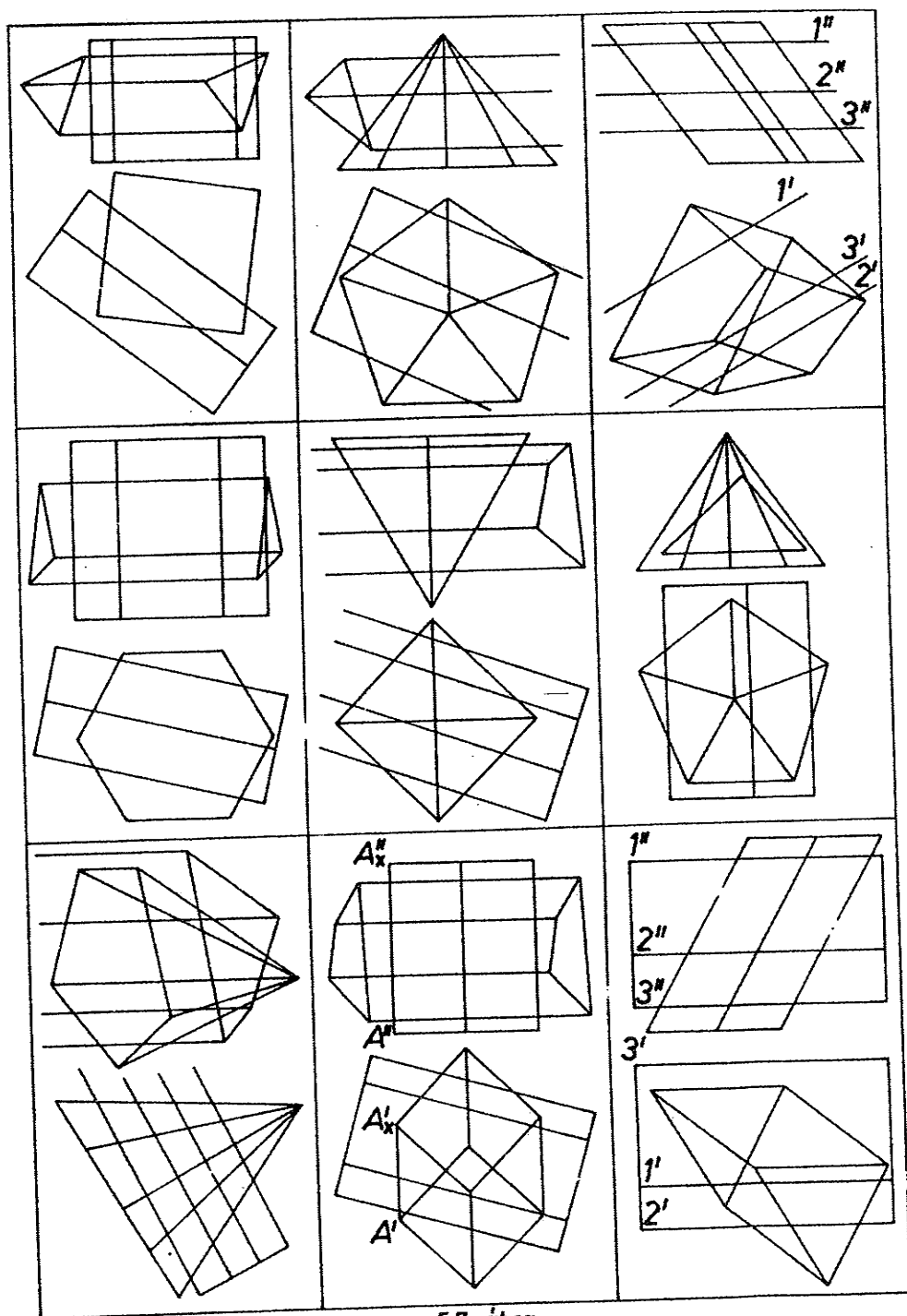
Az 5.6. ábrán két hasáb áthatását szerkesztettük meg. Az egyik hasáb alaplapja az ABCD négyszög és oldalélei profil egyenesek, amelyeket az $A_x B_x C_x D_x$ fedőlappal egyértelműen meghatároztunk. A másik hasáb oldalegyeneseivel van megadva, ezek az 1, 2, 3, 4 első főegyenese. Feladatunk megoldását most is azzal kezdjük, hogy a főegyenes élű hasábot ún. vetítőhasábbá transzformáljuk. A másik hasáb harmadik képét is elkészítjük. Az AA_x , CC_x és DD_x éleken levő metszésponatok a harmadik képről az elsőre rendezővel kijelölhetők, de második képük meghatározásához ismét a transzformáció eljárását használjuk. Az ábrán az I pont kijelöléséhez felhasznált magasságkülönbséget egy vesszővel jelölt nyíllal szemléltettük. A 2, 3 és 4 éleken levő metszésponokat a harmadik kép felhasználásával, az 5.2. ábrán bemutatott módszerrel szerkesztettük meg. Második képük rendezővel kijelölhető. Az áthatási poligont a már ismert módon határozzuk meg, majd föltüntetjük a láthatóságot azon feltetelek mellett, hogy az álló hasáb lemezből van, fedőlapját és a fekvő hasábot az általa kimetszett résszel együtt eltávolítjuk.

Gyakorlásul szerkesszük meg az 5.7. ábrán megadott áthatási feladatokat. Mindegyik feladatot A/4 méretű lapra felnagyítva szerkesszük meg.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 91-94. pontok.



5.6. ábra.



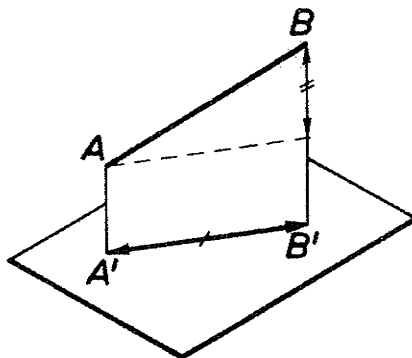
5.7 ábra.

6. MÉRETES SZERKESZTÉSEK. TÁVOLSÁGOK ÉS HAJLÁSSZÖGEK SZERKESZTÉSE. MÉRETES ADATAIVAL MEGADOTT TESTEK ÁBRÁZOLÁSA

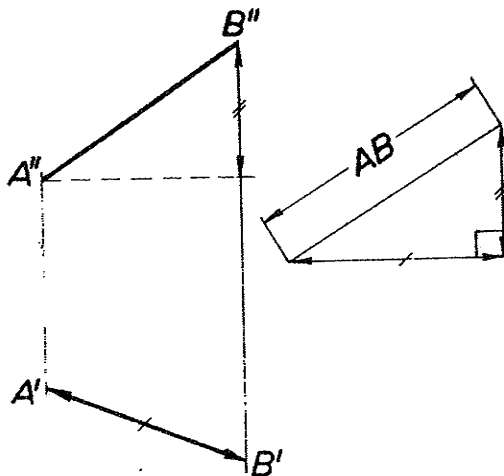
A) Két pont távolsága. Adott félegyenesre adott hosszúságú szakasz felmérése

Két pont által meghatározott egyenes ábrázolásánál látuk, hogy a két pont egymáshoz viszonyított helyzetének megállapításánál jelentős szerepe van a pontok képsíktól mért távolság-különbségeinek.

A 6.1. ábrából látható, hogy az AB szakasz hosszát meg tudjuk határozni egy olyan derékszögű háromszögből, amelynek egyik befogója a szakasz egyik képe, másik befogója pedig a szakasz két végpontjának a képsíktól mért távolság-különbsége.



6.1. ábra.



6.2. ábra.

Ha az $A'B'$ első képből indulunk ki, akkor az A és B pontok magasságkülönbsége a második képen olvasható le, és a két szakaszból szerkesztett derékszögű háromszög átfogója megadja az AB szakasz hosszát.

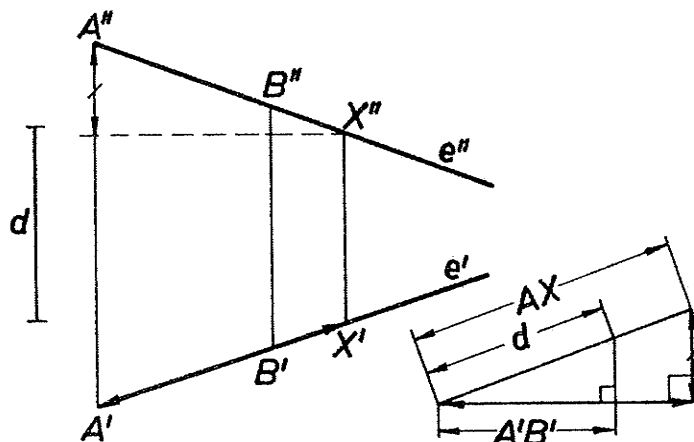
(6.2. ábra)

Már a 2.3., 2.5. és 2.6. ábrákkal kapcsolatosan említettük, hogy a képsíkkal párhuzamos egyenesen levő szakasz hossza a megfelelő képen valódi nagyságában látszik. (Profil egyenesen levő szakasz hosszát ugyanúgy szerkesztjük meg, mint az általános helyzetű egyenesen levő szakaszhosszt, csupán arra kell ügyelni, hogy profil egyenesen levő sza-

kasznál a két végpont magasságkülönbsége megegyezik a szakasz másik képhosszával.)

Ha adott egy A pontból kiinduló e félegyenes és egy adott d szakasz, akkor a félegyenesen meg tudjuk határozni azt a B pontot, amely az A ponttól d távolságra van. Szerkesztésün-

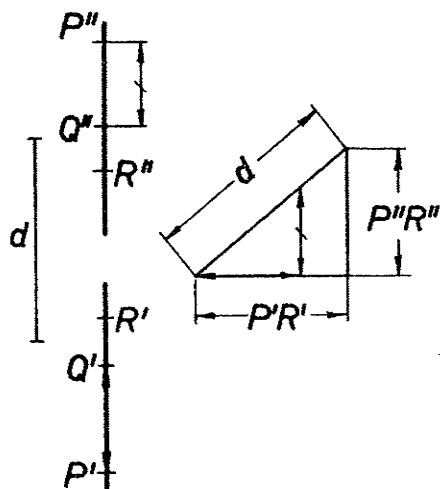
ket arra az észrevételre alapoztuk, hogy egy egyenesen levő bármely szakasz hosszának meghatározásánál keletkező derékszögű háromszög megfelelő szögei egyenlők, vagyis e háromszögek hasonlóak. Tehát az A pontból kiinduló e félegyenesen felve-



6.3. ábra.

szünk egy tetszőleges X pontot (6.3. ábra) és meghatározzuk az AX szakasz hosszát. A kapott derékszögű háromszög átfogójára felmérjük a d szakaszt, majd a háromszöggel hasonlót szerkesztve megkapjuk a d hosszúságú szakasz első képhosszát, illetve a második befogón az A és B pontok magasságkülönbségét. Ennek ismeretében a B pont képei meghatározhatók.

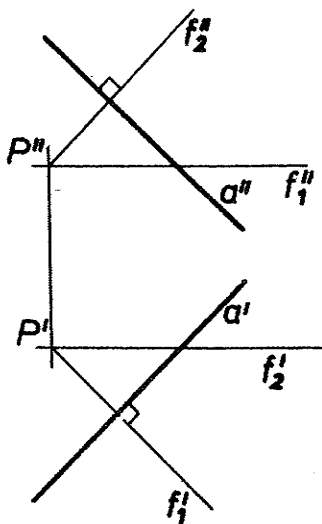
A 6.4. ábrán a PQ profil egyenesre mértünk fel egy megadott d szakaszt az általános elvek pontos követésével. A P ponttól felmért d szakasz másik végpontja az R pont. Ha egy egyenes valamelyik képsíkkal párhuzamos, akkor a szakasz felmérése közvetlenül a képen elvégezhető.



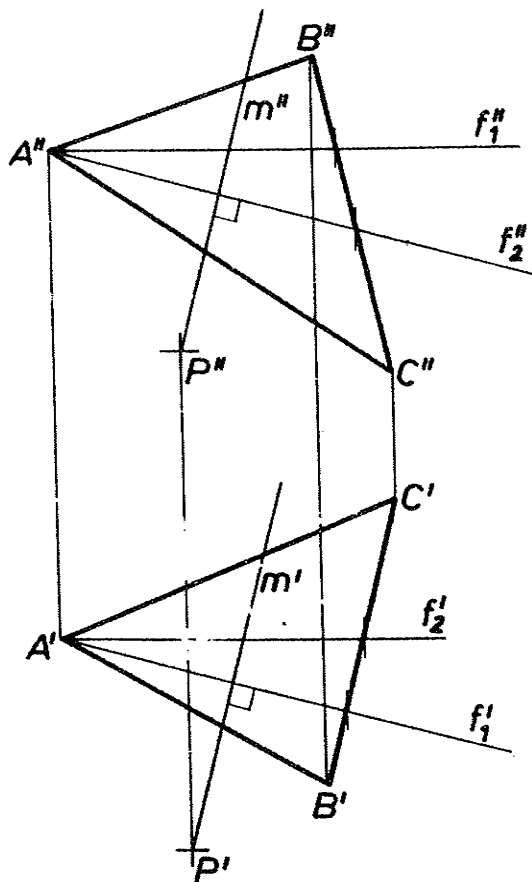
6.4. ábra.

B) Adott egyenesre adott ponton át merőleges sík szerkesztése. Adott síkra adott ponton át merőleges egyenes szerkesztése

Ha az adott P ponton át az adott a egyenesre merőleges síkot kell szerkeszteni, akkor elegendő a P ponton át két olyan egyenest szerkeszteni, amelyek merőlegesek az a egyenesre, ugyanis e két egyenes — térgeometriai ismereteink alapján — az a egyenesre merőleges síkot határozza meg. A merőleges vetítés tulajdonságaiból viszont tudjuk, hogy két merőleges egyenes vetülete pontosan akkor merőleges egymásra, ha közülük az egyik párhuzamos a képsíkkal. Ennek alapján (6.5. ábra) a P ponton át felvett f_1 első főegyenes pontosan akkor merőleges az a egyenesre, ha első képe merőleges az a egyenes első képére: $f_1' \perp a'$. Ugyanígy a P ponton keresztül haladó f_2 második fővonál pontosan akkor merőleges az a egyenesre, ha $f_2'' \perp a''$. Az f_1 és f_2 egyenesek által meghatározott sík tehát merőleges az a egyenesre. A fordított feladat — ti. amikor adott ponton át adott síkra merőleges egyenest kell szerkeszteni — megoldása már kiolvasható az eddigiekből. Az ABC síkra a P ponton át merőleges egyenest akarunk állítani. (6.6. ábra)



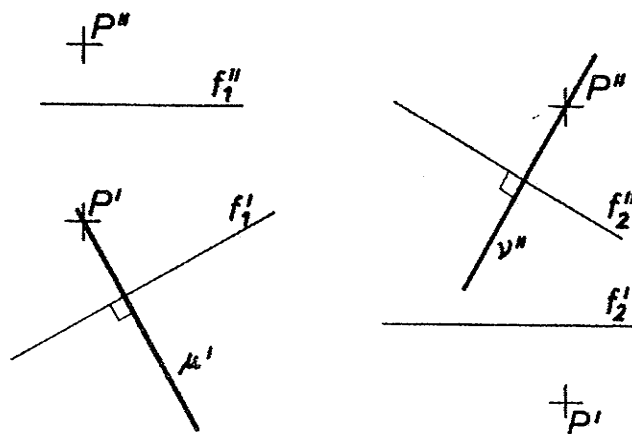
6.5. ábra.



6.6. ábra.

Az ABC síkban f_1 első és f_2 második fővonalat felvéve a P' ponton át az f_1' -re merőleges m' egyenest, továbbá a P'' ponton át az f_2'' -re merőleges m'' egyenest megrajzolva a kapott m egyenesre az előbbieket szerint merőleges az f_1 és f_2 egyenesek által meghatározott sík. Ez a sík azonban azonos az ABC síkkal, tehát az m egyenes és az ABC sík egymásra merőlegesek.

A 6.7. ábrán mutatjuk be azt a könnyen belátható tényt, hogy f_1 első főegyenesre merőleges μ sík első vetítősík, amelynek első képe f_1' -re merőleges. Ugyanúgy az f_2 második főegyenesre merőleges ν sík második vetítősík, $f_2'' \perp \nu''$. Megfordítva: vetítősíkra merőleges egyenes főegyenes.



6.7. ábra.

Megjegyezzük még, hogy vetítőegyenesre merőleges a megfelelő képsík vagy azzal párhuzamos sík.

C) Sík leforgatása képsíkkal párhuzamos helyzetbe és a sík megszerkesztett pontjainak visszaforgatása

A sík leforgatása alapvetően fontos szerkesztési eljárás, amellyel a síkot egy egyenesre körül elforgatva képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozzuk. Ezáltal a síkban levő alakzat valódi méreteiben látszik, tehát e síkalakzat pontjaiból kiindulva a leforgatott helyzetben a szükséges szerkesztések elvégezhetők.

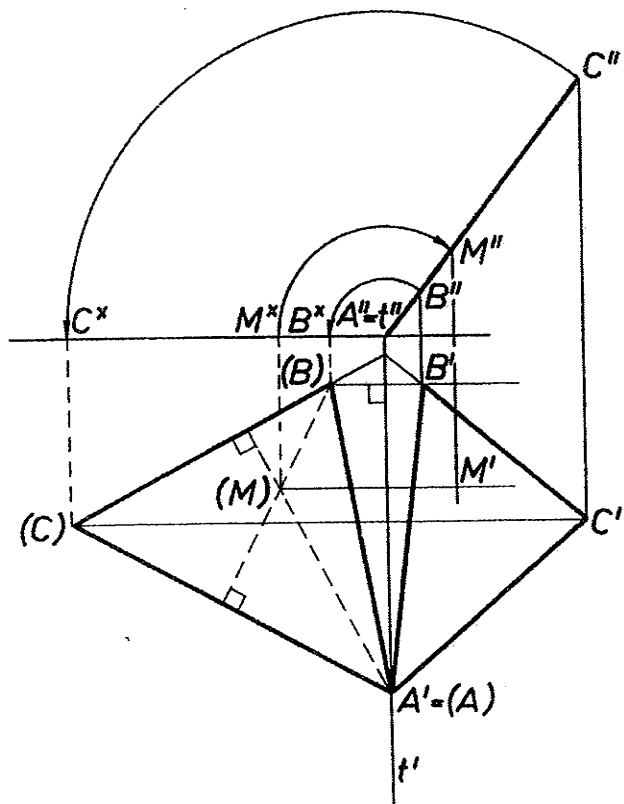
A szerkesztések eredményeként adódó pontokat (a leforgatás megfordításával) az ún. visszaforgatással tudjuk a vetületekben (első és második képen) meghatározni.

Az eljárás ismertetését vetítősík leforgatásának és visszaforgatásának megszerkesztésével kezdjük.

A 6.8. ábrán a második vetítősíkban levő ABC háromszög magasságpontját akarjuk megszerkeszteni. A második vetítősíkot első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk. Forgástengelynek a sík első képsíkkal párhuzamos egyenese, azaz egy második vetítőegyenesre választható.

Legyen ez a második vetítőegyenes az A ponton áthaladó t egyenes.

A leforgatásnál a forgástengely minden pontja helyben marad, tehát az A pont is. A B és C pontok a t egyenesre merőleges síkban — tehát a második képsíkkal párhuzamos síkban — olyan köríven mozdulnak el, amelynek középpontja a forgástengelyen van. E körívek a második képen körnek látszanak, míg első képük a B' ill. C' pontokból a t' -re merőleges egyenesen lesz. A B és C pontok a t'' -n keresztül a rendezőirányra merőlegesen megrajzolt, első képsíkkal párhuzamos síkba kerülnek:



6.8. ábra.

B^* , ill. C^* . B^* , ill. C^* pontokon áthaladó rendezők kijelölik az első képen a leforgatott (B) és (C) pontokat. A leforgatott helyzetben az (A)(B)(C) háromszögnek minden oldala és szöge valódi méretében látszik. E helyzetben megszerkeszthető a háromszög (M) magasságpontja, amelynek visszaforgatását a leforgatási eljárás megfordításával szerkesztjük meg: (M) ponton át a t forgástengelyre merőlegest állítunk, ezen az egyenesen lesz M' ; (M)

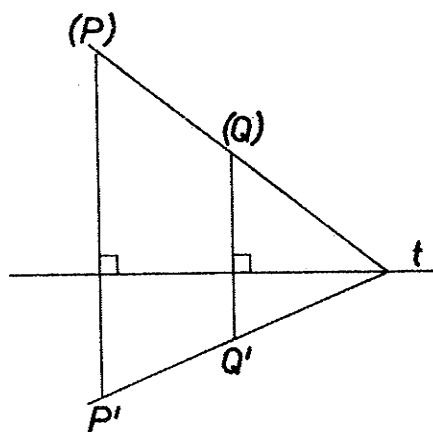
ponton át rendezővel kijelöljük az M^* pontot, majd megfelelő körívvel az M'' -t. Az M'' -n áthaladó rendezővel kijelöljük az M' -t. Ezzel az eljárással a vetítősík tetszőlegesen sok pontja leforgatható, illetve visszaforgatható.

Az első kép és a leforgatott között azonban felismerhetünk egy egyszerű síkgeometriai kapcsolatot, az ún. merőleges affinitást.

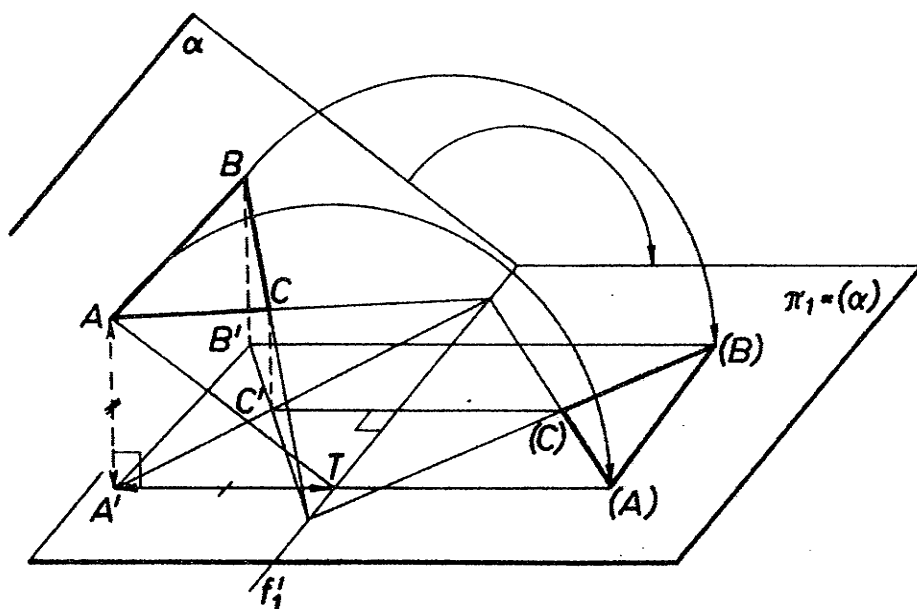
- 1) Egy pont első képét és leforgatottját összekötő egyenes merőleges a t' tengelyre (affinitás tengelye).
- 2) Az affinitás tengelyének minden pontja önmagának a megfelelője, azaz helyben marad.
- 3) Egy egyenes képe (pl. $B'C'$) és leforgatottja (B)(C) egymást a t' tengelyen metszik, vagy párhuzamosak a ten-

gellyel. Ha ismerjük egy P pont képét és leforgatottját, akkor a fentiek alapján a 6.9. ábra szerint egy tetszőleges Q pont leforgatottját (vagy (Q) -ből a Q' -t) meg tudjuk szerkeszteni.

Általános helyzetű sík és a benne levő ABC háromszög leforgatását szemlélteti a 6.10. ábra. A forgástengely — amennyiben első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatunk — az α sík egy f_1 első főegyenese lehet. Az egyszerűség ked-



6.9. ábra.



6.10. ábra.

véért a képsíkot fektessük az f_1 egyenesre. Ekkor a leforgatott (α) sík maga a π_1 képsík.

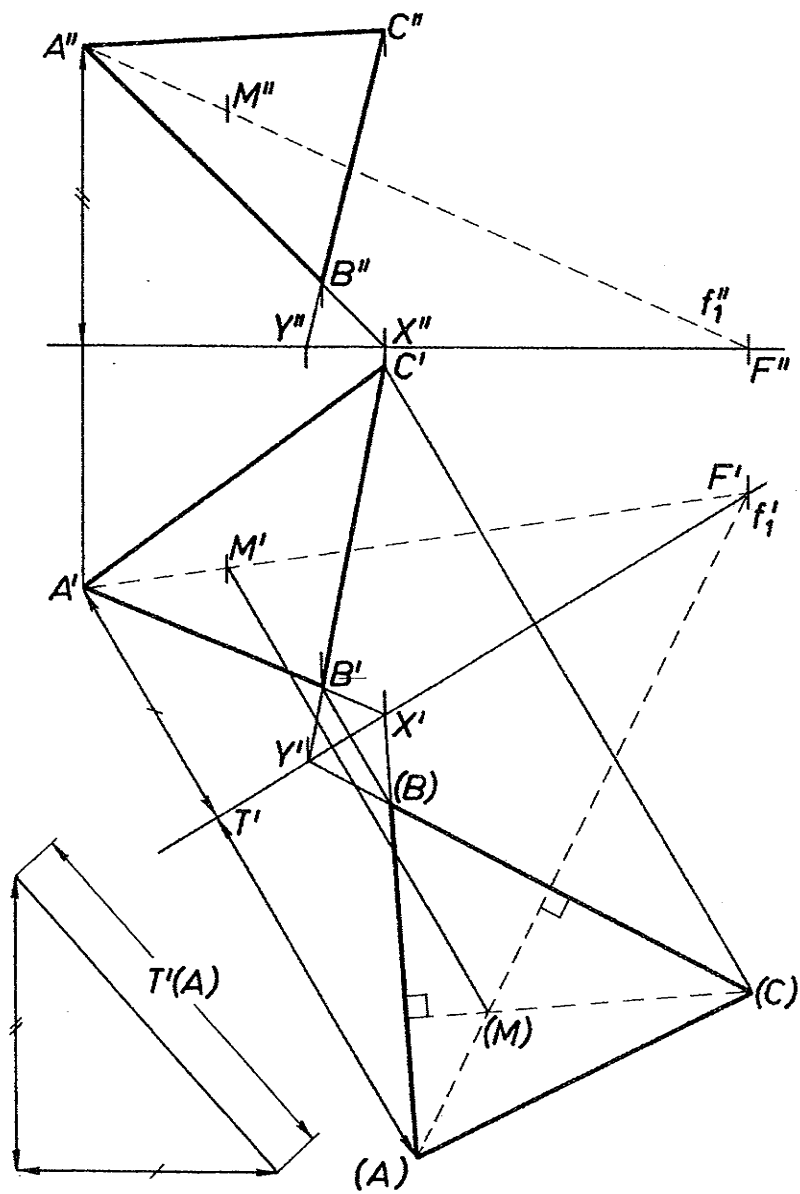
A pontok elfordulása az f_1 első főegyenésre merőleges első vetítősíkokban történik. E vetítősíkok első képei az f_1 -re merőleges egyenesek, amelyek a megfelelő A' , B' , C' , illetve (A) , (B) , (C) pontokat kötik össze. Az A pont leforgatásánál a pont egy olyan körívet ír le, amelynek középpontja a T pont, sugara pedig az $AA'T$ derékszögű három-

szögből határozható meg. E derékszögű háromszög egyik befogója az $A'T'$ az A' pontnak az f_1' -től mért távolsága, a másik befogó pedig az A pont és az f_1 egyenes magasságkülönbsége, amely a második képen olvasható le. A derékszögű háromszög átfogója megadja a leforgatott (A) pont és f_1' távolságát. A sík egyes pontjainak leforgatásánál adódó derékszögű háromszögek egymáshoz hasonlóak, mivel egyik szögük mindig a sík és a képsík hajlásszögével egyenlő. Az ábrán is látható, hogy az első kép és a leforgatott közötti kapcsolat merőleges affinitás, amelynek tengelye az f_1' .

A 6.11. ábrán ugyanazt a feladatot végezzük el, amit a vetítősík leforgatásánál bemutatunk, vagyis az adott ABC háromszög magasságpontjának meghatározását. Elsőnek az ABC sík egy első fővonalát, az f_1 egyenest vesszük fel, amelynek második képe a rendezőirányra merőleges, első képét pedig az AB , illetve BC egyenesekkel alkotott X , illetve Y metszéspontok segítségével jelöljük ki. Az A' , B' , C' pontokból az f_1' -re merőleges egyeneseken lesznek az (A) , (B) , (C) pontok. Az (A) meghatározásához megszerkesztjük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója az A' pontnak az f_1' -től való távolsága, másik befogója pedig az A pont és f_1 főegyenes magasságkülönbsége. Az átfogó megadja az (A) pontnak az f_1' -től való távolságát. Minthogy az első kép és a leforgatott közti kapcsolat merőleges affinitás, ezért az $(A)X'$ egyenes kijelöli a (B) pontot az $Y'(B)$ egyenes pedig a (C) pontot a korábbi f_1' -re merőlegesen meghúzott egyeneseken.

A háromszög leforgatott helyzetében megszerkesztjük az M magasságpontot, amelynek első képét a merőleges affinitás segítségével határozzuk meg. Az M'' -t az AM síkbeli egyenesen jelöljük ki: AM az F pontban metszi az f_1 egyenest, az F'' pont kijelölésével az AM egyenes második képét meg tudjuk rajzolni és ezen rendezővel tűzzük ki az M'' pontot.

Megjegyzés: a leforgatást a sík bármelyik első fővonal körül végrehajthatjuk. Most azért választottuk meg így a forgástengelyt, hogy az első képet a leforgatottól jobban szétválasszuk. Ez a továbbiakban általában nem valósítható meg, de kellő gyakorlat után nincs is rá szükség.

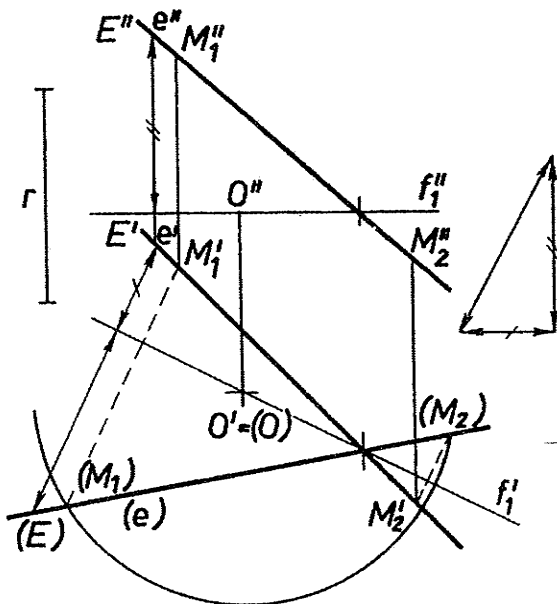


6.11. ábra.

A leforgatás eljárásának gyakorlására oldjunk meg néhány feladatot:

- 1) Adott egy O pont és egy e egyenes, valamint egy r távolság. Szerkesszük meg az e egyenesen azokat a pontokat, amelyek az O ponttól r távolságra vannak.
(A megszerkesztendő pontok tulajdonképpen az O középpontú, r sugarú gömbnek és az e egyenesnek a metszéspontjai.)

A 6.12. ábrán ábrázoltuk az O pontot, az e egyenest, és megadtuk az r távolságot. A feladat megoldásához az O pont és az e egyenes által meghatározott síkban az O ponton át vettük fel az f_1 első főegyenest forgástengelynek. Az O pont leforgatáskor helyben marad. Az e egyenes egy tetszőleges E pontjával megszerkesztjük a leforgatottját, így az (e) egyenes az (E) pontot az e egyenesnek a forgástengellyel alkotott metszéspontjával összekötő egyenesvonal lesz. Az (O) körül r sugarral rajzolt kör kijelöli az (M_1) és (M_2) pontokat, amelyeknek első, majd második képe az e egyenes képein meghatározható.

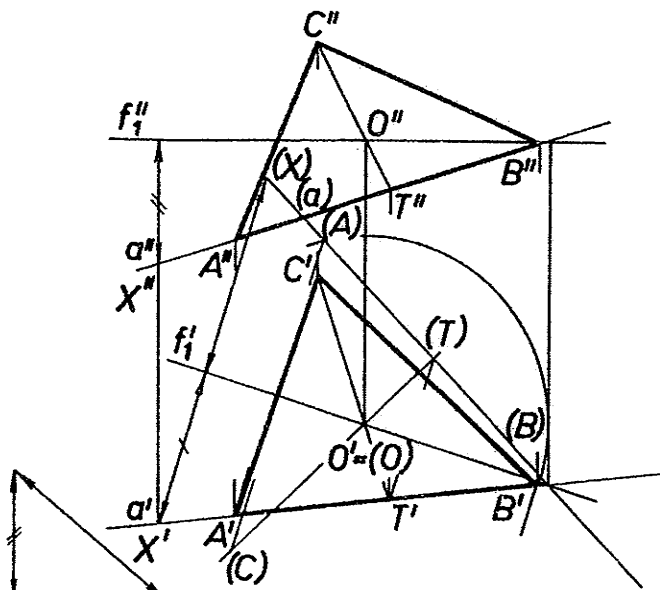


6.12. ábra.

- 2) Adott egy a egyenes és egy O pont.
Szerkesszük meg azt a szabályos háromszöget, amelynek középpontja az O pont, egyik éle az a egyenesen van.

A 6.13. ábrán az O ponton át felvesszük az O pont és az a egyenes által meghatározott sík f_1 első főegyenest. Az f_1 egyenes körül a síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk: megszerkesztjük az a egyenes tetszőleges X pontjának a leforgatottját, ezáltal az (a) egyenes is megrajzolható. Az $(O) = O'$ pontból (a) -ra állított merőleges egyenes talppontja (T) . Az $(O)(T)$ távolság kétszerese a szabályos háromszög köré írt kör sugara. Ennek is-

meretében az (O)(T) egyenesen kijelöljük a (C) pontot, illetőleg az (a) egyenesen az (A) és (B) pontokat. (A) és (B) pontok visszaforgatása az a egyenes képeinek ismeretében már kézenfekvő. A(C) képet a (T) pont visszaforgatásával tudjuk meghatározni, és ezután a T'O' egyenesen, illetve a T''O'' egyenesen jelöljük ki C'-t, illetve C''-t.



6.13. ábra.

Távolságok és hajlásszögek megszerkesztése

A méretes alapszerkesztések egyik alkalmazási területe a kétképsíkos ábrázolásban megadott térelemek távolságainak, illetve szögeinek megszerkesztése. A következőkben ilyen szerkesztési feladatokat mutatunk be. Ezek áttanulmányozása és önálló kidolgozása után — a térgeometriai ismeretek alapján — valamennyi ilyen jellegű szerkesztést viszonylag könnyen el tudunk végezni.

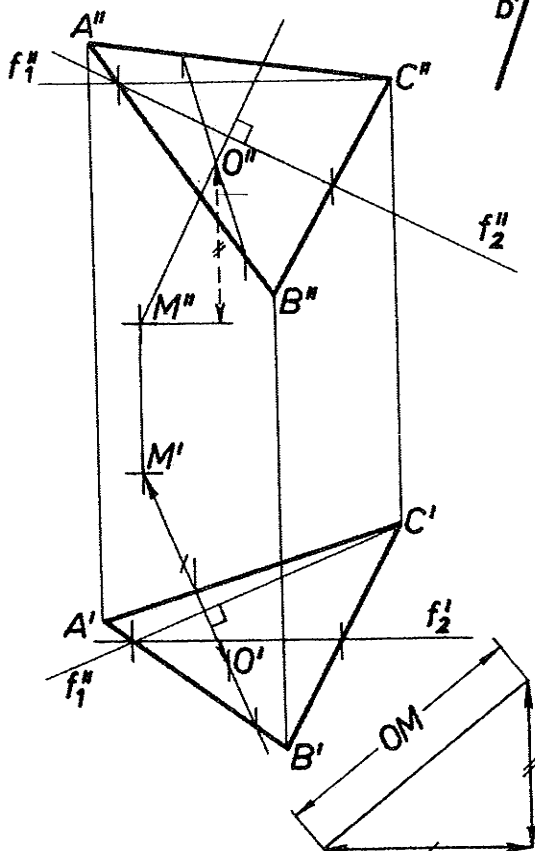
|| 1) Szerkesszük meg az a és b kitérő egyenesek hajlásszögét.

A 6.14. ábrán megadott a és b egyenesekkel párhuzamos egyeneseket szerkesztünk egy tetszőleges P ponton át: a_1 , b_1 . Az a_1 és b_1 egyenesek által meghatározott síkban felvett f_1 főegyenes körül leforgatjuk a sík P pontját és a_1 , illetve b_1 egyenseit, a leforgatottban kapjuk a φ hajlásszöget.

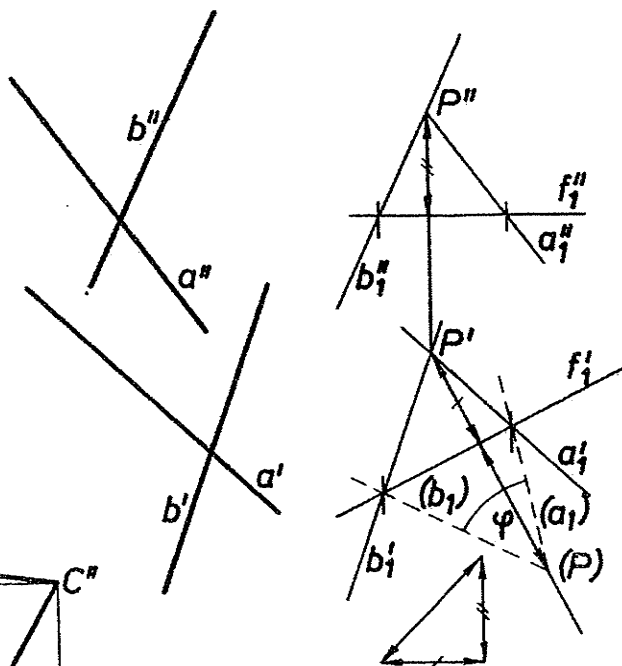
|| 2) Szerkesszük meg az ABC sík és az M pont távolságát.

A 6.15. ábrán megszerkesztettük az ABC sík f_1 első és f_2 második főegyenesét, ezek ismeretében az M pontból

merőlegest állítottunk az ABC síkra. Megszerkesztve a merőleges és az ABC sík O metszéspontját, a kapott MO szakasz az M pont és az ABC sík távolsága. Végül előállítottuk az MO szakasz valódi nagyságát.



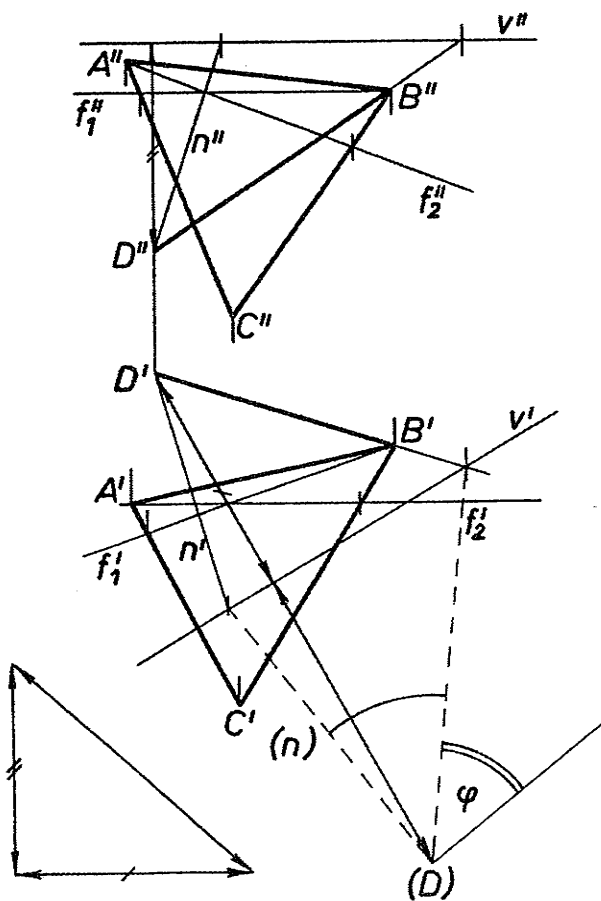
6.15. ábra.



6.14. ábra.

3) Szerkesszük meg a 6.16. ábrán két képével adott ABC sík és DB egyenes hajlásszögét.

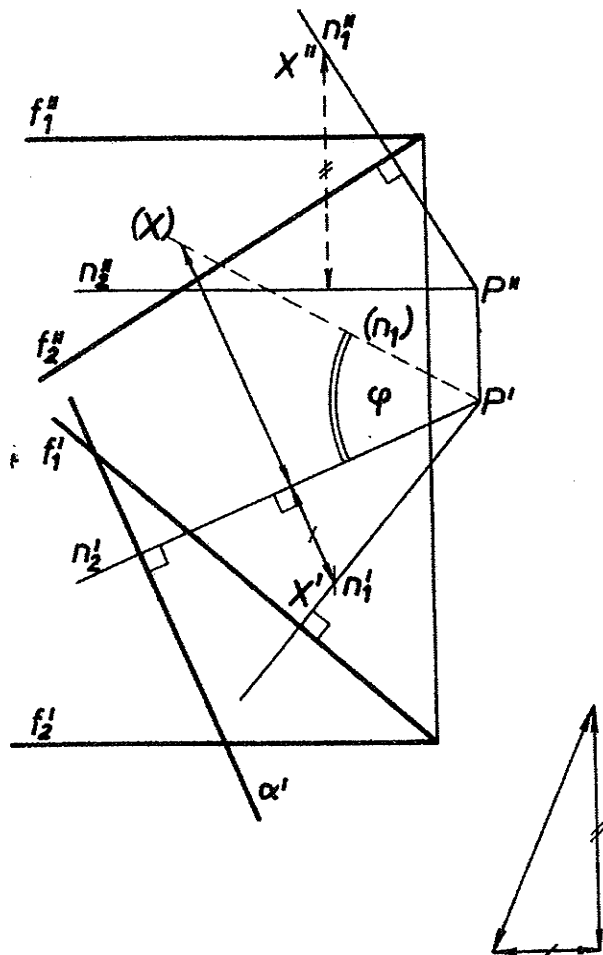
A sík és egyenes hajlásszöge a sík egy normálisa és az egyenes által bezárt szög pótszöge. Ezért a D pontból az ABC síkra (ennek f_1 és f_2 fővonalát felhasználva) merőleges n egyenest szerkesztünk. Az n egyenes és a DB egyenes által meghatározott síkban felvesszük a v első fővonalat. A v főegyenes körül leforgatjuk ezt a síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe. A (D) pontot az n és DB egyeneseknek v forgástengelyén helybenmaradó pontjaival összekötjük, így megkapjuk a normális és a DB egyenes szögét. Ezt a szöget derékszöggé kiegészítő φ szög a sík és a DB egyenes hajlásszöge.



6.16. ábra.

- 4) A 6.17. ábrán megadtunk egy α első vetítősíkot és egy általános helyzetű síkot f_1, f_2 fővonalaival. Szerkesszük meg a két sík hajlásszögét.

A térgeometriából ismeretes, hogy két sík hajlásszögét — a tér egy tetszőleges pontjából — a két síkra állított normálisok hajlásszöge adja meg. Ezért egy tetszőlegesen felvett P ponton át megszerkesztjük az (f_1, f_2) általános sík n_1 normálisát, majd az α első vetítősík n_2 normálisát. Az n_2 normális első fővonal, amelynek első képe merőleges α' -re. A normálisok síkját ebben az esetben az n_2 normális körül képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk. Elég az n_1 normális egy tetszőleges X pontjának a leforgatottját megszerkesztteni. Az (n_1) és n_2' által bezárt szög a két sík φ hajlásszöge.



6.17. ábra.

Méretes adataival megadott testek ábrázolása

A méretes alapszerkesztések másik alkalmazási körét képezik azok a feladatok, amelyekben egy általában szabályos tulajdonságokkal rendelkező test (gúla, hasáb, kocka, stb.) néhány megadott adatából megszerkesztjük a test rendezett vetületeit. Az ilyen típusú feladatokat természetesen nem lehet térgeometriai alapokon nyugvó megoldási gondolatmenet nélkül megszerkeszteni. A megoldási „tervet” célszerű egy alkalmas szabadkézi vázlattal kezdeni. E szabadkézi vázlaton igyekszünk a megszerkesztendő testet lehetőleg képiesen megrajzolni, feltüntetve rajta a megadott adatokat. Ezután a feladatot gondolatban megoldjuk, vagyis a szerkesztést olyan lépésekre bontjuk le, hogy minden egyes lépésben egy-egy ábrázoló geometriai alapszerkesztés szerepeljen. Ezután, ha szükséges, le is írjuk a feladat megoldásának lépéseit, majd azokat sorban végrehajtjuk. A szerkesztés végén a láthatóság feltüntetése zárja a feladat megoldását.

(Megjegyzés: Az alapszerkesztéseket természetesen nem kizárólag ilyen feladatok megoldására lehet alkalmazni. Az alapszerkesztések képezik az ábrázoló geometriai tananyag gerincét, amelyek nélkül a görbevonalak és felületek ábrázolását, a velük kapcsolatos metszési és áthatási, valamint síkba-terítési feladatokat sem tudjuk megoldani.)

- || 1) A 6.18. ábrán megadtuk az A pontot, az e egyenest és az m távolságot. Szerkesszük meg annak a szabályos háromoldalú hasábnak a képeit, amelyeknek egyik alapéle az e egyenesen van, az alaplap csúcsa az A pont és a hasáb magassága m.

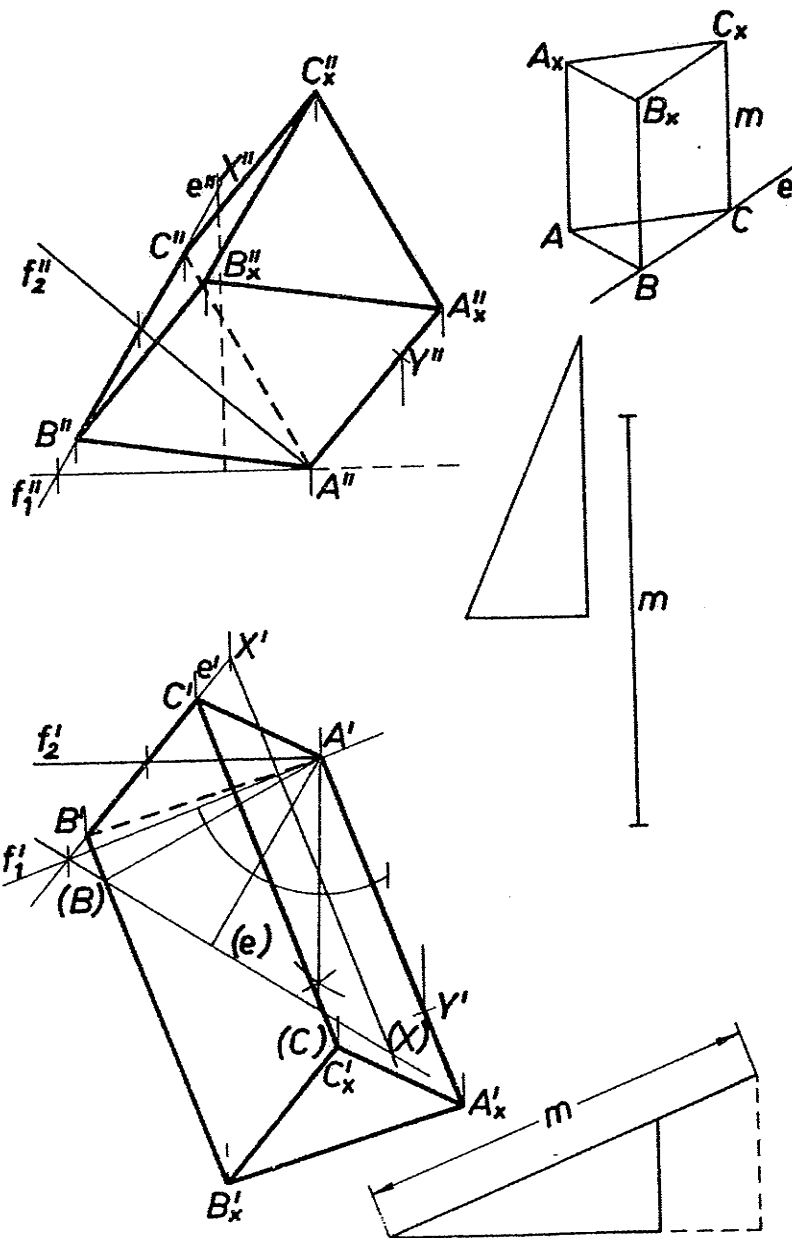
A feladat megoldása:

- a) Az (Ae) síkot f_1 első fővonala körül leforgatjuk: (X),
(e). Megszerkesztjük a szabályos ABC háromszöget, B és C pontokat visszaforgatjuk.
b) A sík f_2 második fővonalát is felvéve az alapsíkra merőleges oldalélek egyeneseseit megszerkesztjük.
c) Az oldalélekre felmérjük az m magasságot.
d) Láthatóság feltüntetése.

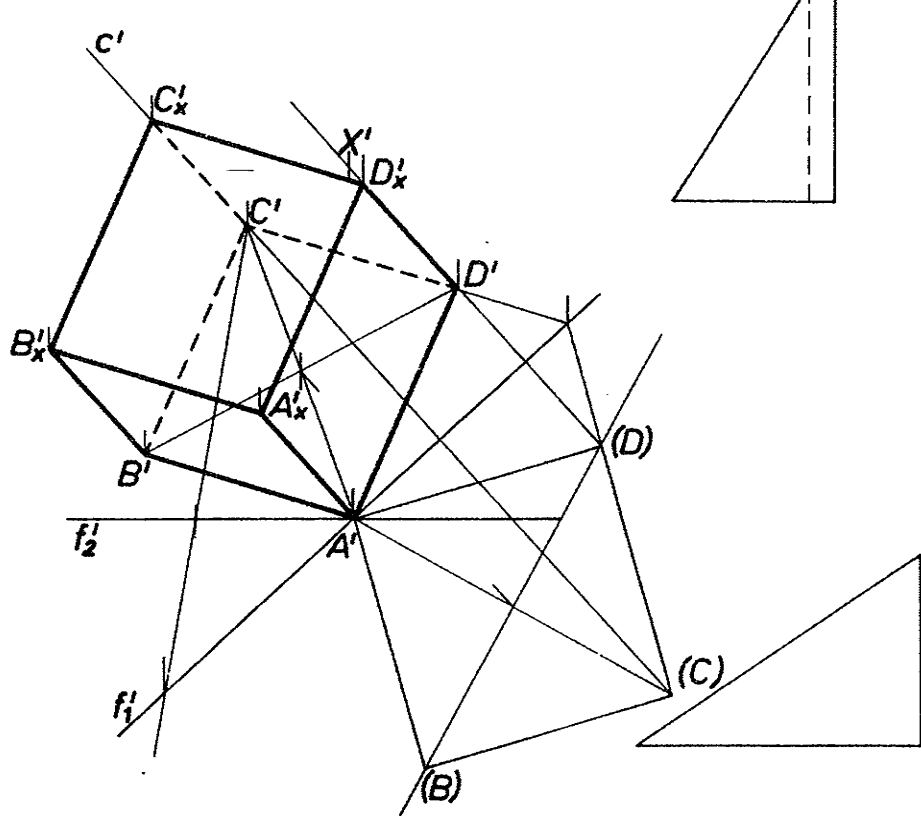
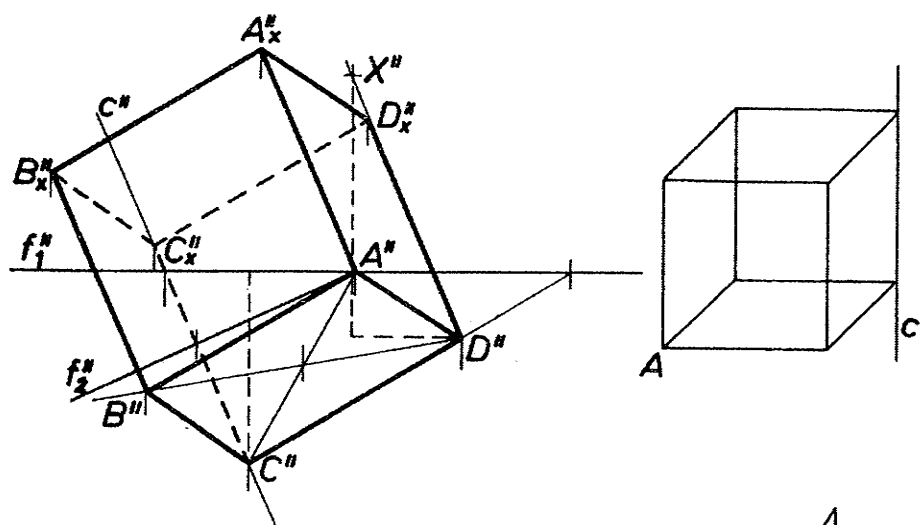
- || 2) A 6.19. ábrán megadtuk az A pont és a c egyenes képeit. Szerkesszük meg azt a kockát, amelynek A pont alaplapjának egy csúcsa, a c egyenes pedig a kocka A-val szemköztes oldaléle (l. vázlat).

A feladat megoldása:

- a) A ponton át a c egyenesre merőleges síkot szerkesztünk: (f_1, f_2).
b) Az (f_1, f_2) sík és c egyenes metszéspontját meghatározzuk: C.
c) Az (f_1, f_2) síkot leforgatjuk: $A' = (A), (C)$. Megszerkesztjük az ABCD négyzetet a leforgatott helyzetben,



6.18. ábra.



6.19. ábra.

majd visszaforgatjuk.

- d) A kocka oldalélei c -vel párhuzamosak. A D pontból kiinduló oldalélre a kocka élhosszát felmérjük (X segédponttal): D_X .

- e) Láthatóság feltüntetése.

3) A 6.20. ábrán megadtuk a g egyenes és a P pont két képét, valamint az m távolságot. Szerkesszük meg azt a szabályos négyoldalú gúlát, amelynek tengelye a g egyenes, alaplapjának egy csúcsa a P pont és magassága m .

A feladat megoldása:

- a) P ponton át g egyenesre merőleges síkot szerkesztünk: (f_1, f_2) .
b) Az (f_1, f_2) sík és g egyenes metszéspontjának meghatározása: M .
c) Az (f_1, f_2) sík leforgatása: (M) , $P' = (P)$. Megszerkesztjük a PQRS alapnégyzet leforgatottját, majd visszaforgatjuk.
d) A G segédpont alkalmazásával a g egyenesre M pontból felmérjük az m távolságot: T .
e) A láthatóságot úgy tüntetjük fel, hogy a lemezből levő gúlának az alaplapját eltávolítjuk.

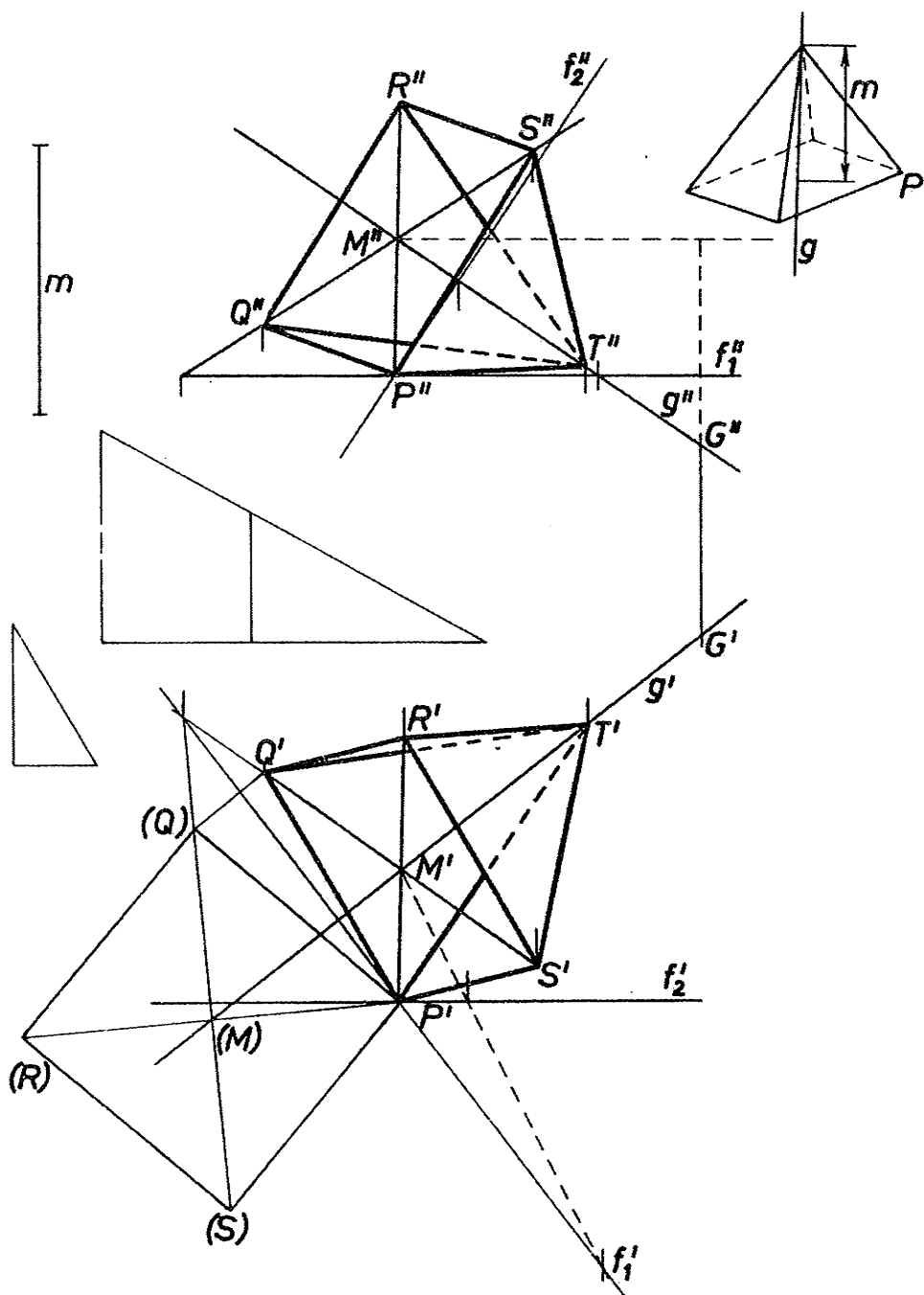
4) A 6.21. ábrán megadtuk az a egyenes és az O pont két képét. Szerkesszük meg azt a szabályos tetraédert, amelynek egyik alapéle az a egyenesen van, az alaplap középpontja az O pont.

A feladat megoldása:

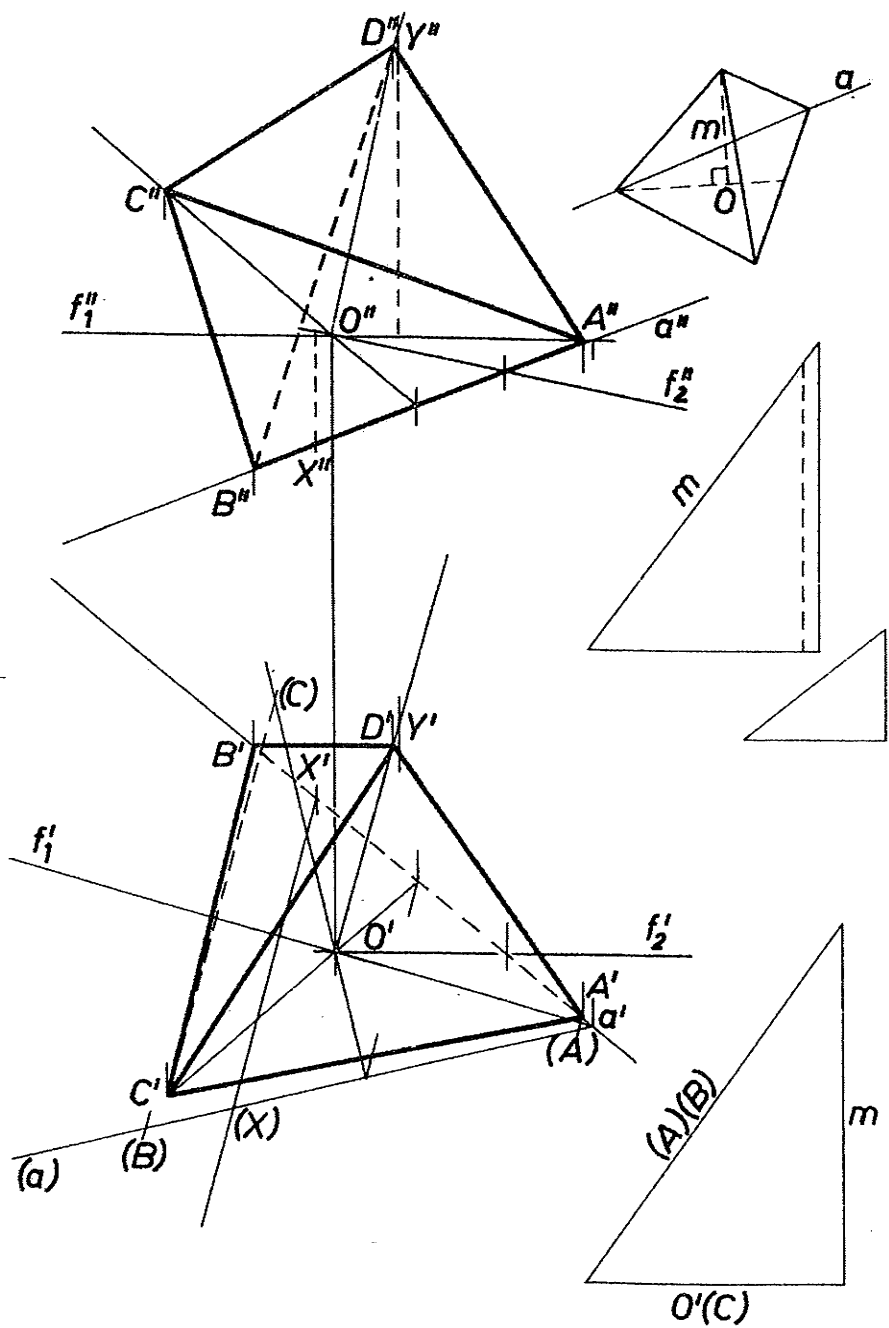
- a) Az O pont és a a egyenes síkját az f_1 fővonal körül leforgatjuk: $O' = (O)$, (X) , (a) . Az ABC szabályos háromszög szerkesztése és visszaforgatása.
b) Az (Oa) sík f_2 fővonalának felvétele és O ponton át síkra merőleges egyenes szerkesztése.
c) A szabályos tetraéder magasságának megszerkesztése (l. ábra).
d) A merőleges egyenesre az Y segédpont alkalmazásával, a magasság felmérése.
e) A láthatóság feltüntetése.

Gyakorlásra javasoljuk a 6.22. és 6.23. ábrán felvételi vázlattal megadott feladatok önálló kidolgozását (A/4 lapon).

- 1) Szerkesszük meg azt az egyenes hasábot, amelynek alaplapja az adott ABCD paralelogramma, magassága pedig az m távolság.
2) Szerkesszük meg annak a szabályos négyoldalú gúlának a két képét, amelynek adott t tengelye, a rajta levő M csúcs és az alap egyik csúcsa.



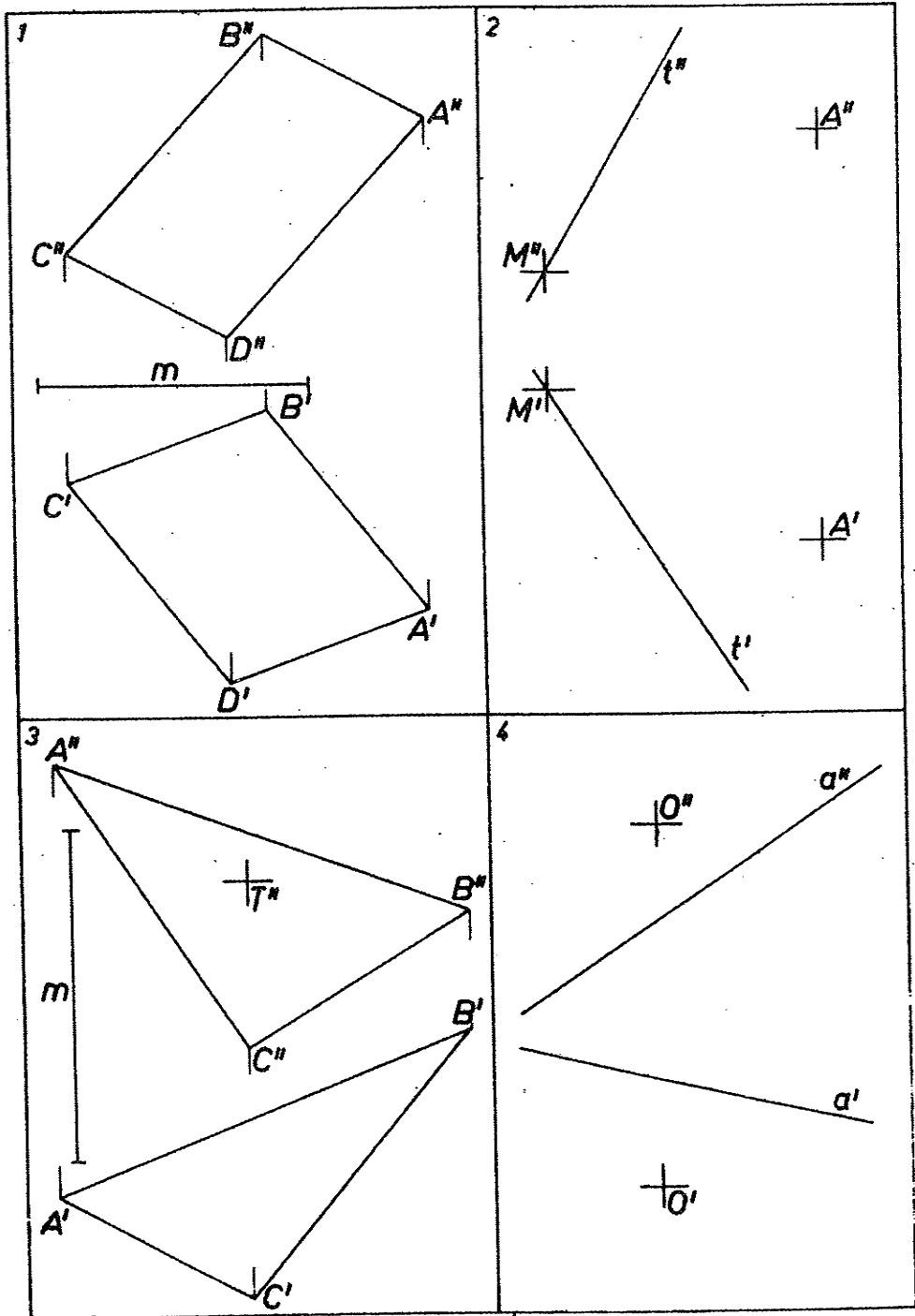
6.20. ábra.



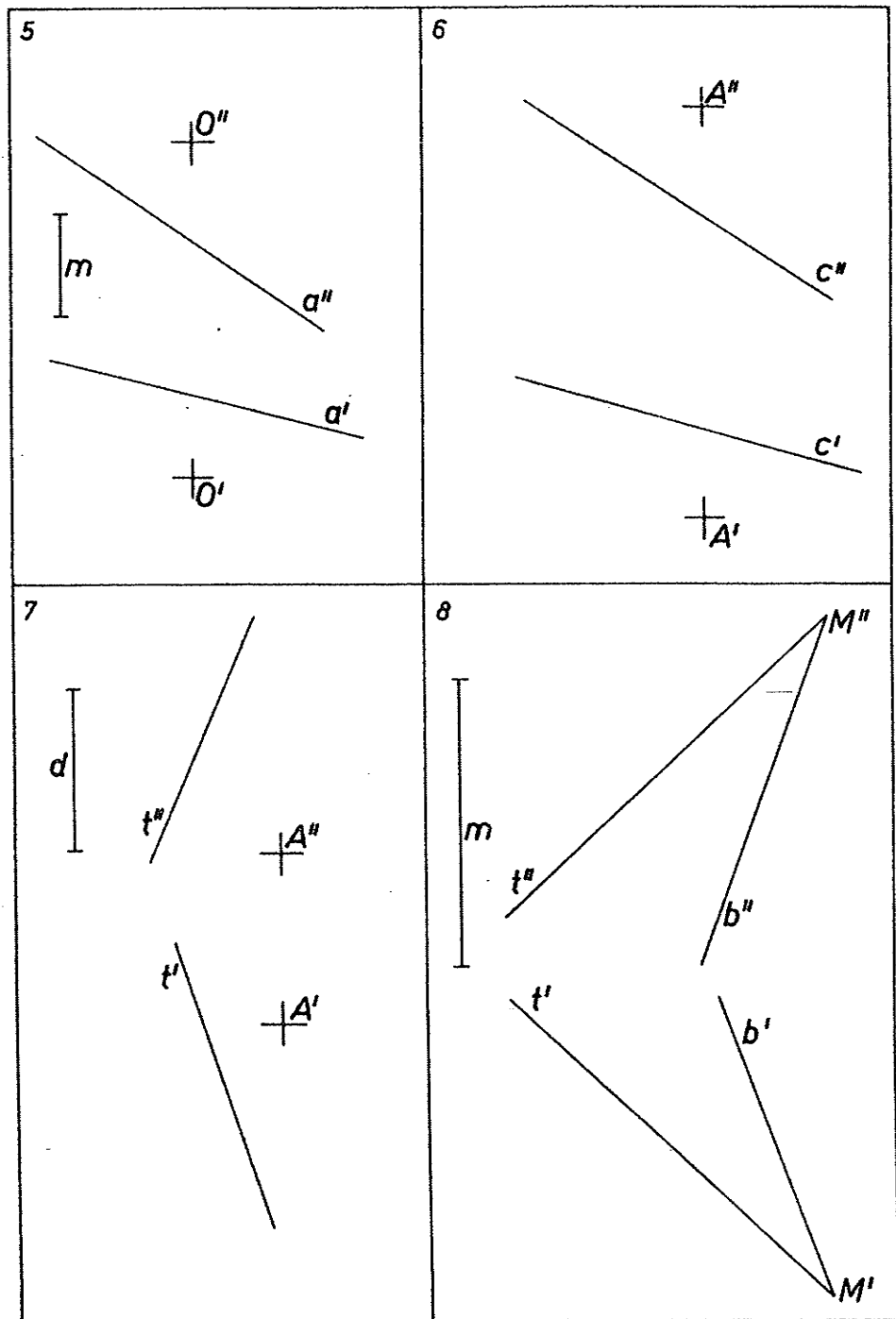
6.21. ábra.

- 3) Szerkesszük meg annak a tetraédernek a két képét, amelynek alaplapja az adott ABC háromszög, magasságának hossza m , és a magasság talppontja T .
- 4) Szerkesszük meg annak a kockának a két képét, amelynek egyik lapközéppontja O , és a lap egyik éle az adott a egyenesen van.
- 5) Adott az a egyenes, O pont és az m távolság. Szerkesztendő az a szabályos hatoldalú hasáb, amelynek egyik alapéle az a egyenesen van, alaplapjának középpontja az O pont, magassága m .
- 6) Adott a c egyenes és az A pont. Szerkesszük meg annak a kockának a képeit, amelynek alaplapja a (c, A) síkban van, A a kocka egyik csúcsa, c egyenes pedig az alaplap átlója.
- 7) Adott az A pont, t egyenes és a d távolság. Szerkesszük meg annak a szabályos háromoldalú gúlának a képeit, amelynek t a tengelye, A pont az alaplap egyik csúcsa és a gúla magassága a d távolság.
- 8) Szerkesszük meg azt a szabályos háromoldalú gúlát, amelynek tengelye t egyenes, egyik oldalélének egyenese a b egyenes, a gúla magassága pedig a megadott m távolság.

Elméleti tananyag: Tankönyv 75-80. és 83-84. pontjai.



6.22. ábra.



6.23. ábra.

7. VEKTOROK, VEKTORMŰVELETEK ÉS GEOMETRIAI ALKALMAZÁSAIK

Vektor fogalma: Vektornak mondunk egy irányított szakaszt, amelyet nagysága (hossza) és iránya ad meg. Két vektort azonosan egyenlőnek tekintünk, ha párhuzamos egyeneseken vagy közös egyenesen helyezkednek el és nagyságuk, valamint irányuk is megegyezik. A vektorok jelölése: vagy aláhúzott kisbetűvel (pl. $\underline{a}$), vagy a szakasz kezdő és végpontjának egymás után írásával, felül nyíllal (pl. $\overrightarrow{AB}$). A szakasz irányítását rajzban szintén nyíllal jelöljük.

Vektor abszolút értéke a vektor hossza; jelölése $|\underline{a}|$.

Nullvektor: Olyan vektor, amelynek hossza 0, iránya pedig megállapodás alapján tetszőleges, azaz bármely vektorral párhuzamos.

Vektorok összeadása: $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok összegét úgy kapjuk meg, hogy az $\underline{a}$ vektor végpontjából indítjuk a $\underline{b}$ -t. Az $\underline{a} + \underline{b}$ az $\underline{a}$ kezdőpontjából $\underline{b}$ végpontjába mutató vektor (7.1. ábra).

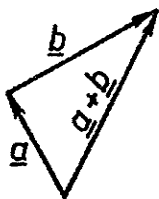
Ezzel egyenértékű a paralelogramma szabály szerinti összeadás: az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ -t közös P pontból indítjuk, és az általuk meghatározott paralelogramma P pontból kiinduló átlóvektora $\underline{a} + \underline{b}$ (7.2. ábra).

Az összeadás tulajdonságai:

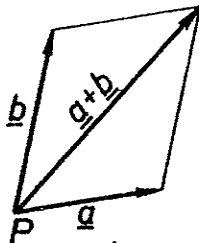
$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \quad (\text{kommutatív})$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) \quad (\text{asszociatív}).$$

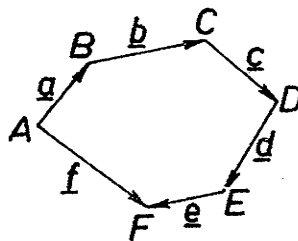
Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{e}$ vektorok összege az az $\underline{f} = \overrightarrow{AF}$ vektor, amely az összeadandó vektorok által alkotott ABCDEF törött vonalat zárttá teszi (7.3. ábra).



7.1. ábra.

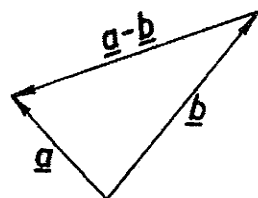


7.2. ábra.



7.3. ábra.

Vektorok különbsége: az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok különbségén azt az $\underline{a} - \underline{b}$ vektort értjük, amelyhez $\underline{b}$ -t adva az $\underline{a}$ -t kapjuk: $\underline{b} + (\underline{a} - \underline{b}) = \underline{a}$. Ezek szerint úgy kapjuk meg az $\underline{a} - \underline{b}$ -t, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokat egy pontból indítjuk, és $\underline{a}$ $\underline{b}$ (utóbbi) végpontjából az $\underline{a}$ (elsőbbi) végpontjába mutató vektor az $\underline{a} - \underline{b}$ (7.4. ábra).



74. ábra.

Vektor ellentettje: a vektor ellentettje az $\underline{a}$ vektor, amelyhez $\underline{a}$ -t adva nullvektort kapunk. Jelölése: $-\underline{a}$. Egy vektor és ellentettje ellentétes irányú, abszolút értékük egyenlő. $\underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} - \underline{b}$. Nullvektor ellentettje önmaga. $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$; $\underline{0} - \underline{a} = -\underline{a}$; $\underline{a} - \underline{a} = \underline{0}$.

Vektor számmal való szorzása: Egy vektort a tetszőleges λ valós számmal szorozva vektort kapunk. A $\lambda \underline{a}$ vektor az $\underline{a}$ vektorral párhuzamos, hossza $|\lambda||\underline{a}|$, iránya az $\underline{a}$ irányával megegyezik, ha $\lambda > 0$, az $\underline{a}$ -val ellentett irányú, ha $\lambda < 0$. Ha $\lambda = 0$, akkor a $\lambda \underline{a}$ nullvektor.

Egységvektor: az $\underline{a}$ vektorral egyirányú egységnyi hosszúságú $\underline{a}^0$ vektor.

$$\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}.$$

A számmal való szorzás tulajdonságai:

$$\mu(\lambda \underline{a}) = \lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda \mu) \underline{a}$$

$$(\lambda + \mu) \underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a} \quad (\text{első disztributív szabály})$$

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b} \quad (\text{második disztributív szabály}).$$

Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamos (nem kollineáris) vektorok és

$$\lambda \underline{a} = \mu \underline{b}, \quad \text{akkor} \quad \lambda = \mu = 0.$$

$$\text{Ha } \underline{a} \neq \underline{0} \text{ és } \lambda \underline{a} = \mu \underline{a}, \quad \text{akkor} \quad \lambda = \mu.$$

Két vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontosan akkor kollineáris, ha

$$\underline{a} = \lambda \underline{b}$$

alakban állítható elő.

Vektorok lineáris kombinációja: Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjának nevezik a

$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n$ alakú összeget ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valós számok.

Lineáris függetlenség, lineárisan függő vektorok: Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$ egyenlőség csakis $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ esetén állhat fenn.

Ha a $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$ egyenlőség fennáll úgy, hogy nem mindegyik $\lambda_i = 0$, akkor a vektorok lineárisan függők. Ha pl. $\lambda_n \neq 0$, akkor a $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$ egyenlőségből $\underline{a}_n$ a következő alakban írható fel:

$$\underline{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \underline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} \underline{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \underline{a}_{n-1}.$$

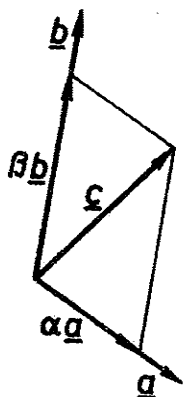
Ez azt jelenti, hogy a lineárisan függő vektorok közül legalább az egyik előállítható a többi lineáris kombinációjaként.

Geometria jelente: Két vektor lineárisan függő, ha párhuzamosak (kollineárisak), lineárisan független, ha nem párhuzamosak.

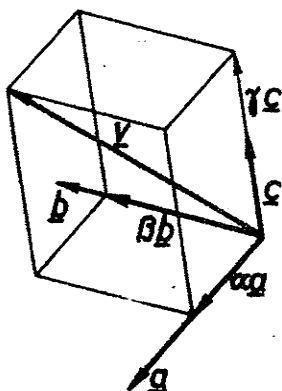
Egysíkú (komplanáris) vektorok: olyan vektorok, amelyek egy síkkal párhuzamosak. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két (nem kollineáris) vektor, akkor az $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ alakú vektorok $\underline{a}$ -ral és $\underline{b}$ -ral komplanárisak.

Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egysíkú vektorok, és az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok

nem párhuzamosak, akkor $\underline{c}$ egyértelműen állítható elő $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként (7.5. ábra), $\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ előállításban α és β egyértelműen meghatározott számok. Egysíkú vektorok közül legfeljebb kettő lehet lineárisan független.



7.5. ábra.



7.6. ábra.

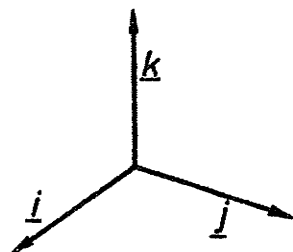
Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nem egysíkú vektorok, akkor $\underline{a}$ tér minden $\underline{v}$ vektora egyértelműen állítható elő $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként. $\underline{v} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$ előállításban α, β és γ egyértelműen meghatározott számok (7.6. ábra).

A térben legfeljebb három lineárisan független vektor lehet.

Vektorok koordinátái: Válasszunk a térben három, páronként egymásra merőleges egységvektort: $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ (7.7. ábra). Alkosson e három vektor jobb-rendszerét, azaz $\underline{k}$ -ral szembe nézve $\underline{i}$ -t a $\underline{j}$ -ba 90° -os, az óra járásával ellentétes (vagyis pozitív) forgás viszi. Az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ alapvektorok lineáris kombinációjaként a tér bármely $\underline{v}$ vektora egyértelműen állítható elő:

$$\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}.$$

Az (x, y, z) számhármast a $\underline{v}$ vektor Descartes-féle derékszögű koordinátáinak nevezzük az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ koordinátarendszerben. Az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ alapvektorok koordinátái: $\underline{i}(1, 0, 0)$, $\underline{j}(0, 1, 0)$, $\underline{k}(0, 0, 1)$.

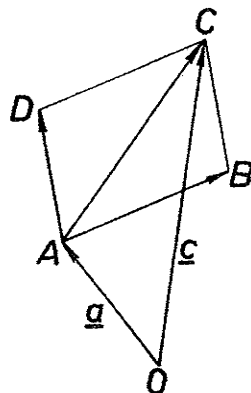


7.7. ábra.

Vektorműveletek koordinátákkal: Az $\underline{a}$ vektor koordinátái (a_1, a_2, a_3) , a $\underline{b}$ vektor koordinátái (b_1, b_2, b_3) . A két vektor összegének $\underline{a} + \underline{b}$ -nak a koordinátái $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. A két vektor különbségének $\underline{a} - \underline{b}$ -nak a koordinátái $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$. Ha λ valós szám, akkor a $\lambda \underline{a}$ koordinátái $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Helyvektor. Térbeli pont koordinátái: Ha a térben rögzítjük az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ alapvektorok közös O kezdőpontját az origót, akkor a tér minden pontjához egy meghatározott O -ból kiinduló vektor, ún. helyvektor mutat. Ha a P pontba mutató $\vec{OP}$ helyvektor koordinátái (p_1, p_2, p_3) , akkor a P pont koordinátáinak az $\vec{OP}$ helyvektor koordinátáit nevezzük. Ha A pont helyvektora $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ és a B pont helyvektora $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$, akkor az $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Példa: Legyen adva az $A(2, 1, 3)$, $B(-1, 2, 5)$, $D(1, 2, 1)$ pont. Határozzuk meg az $\vec{AB}$ és $\vec{AD}$ vektort (7.8. ábra). Ha az A pont helyvektora $\underline{a}$, a B pont helyvektora $\underline{b}$ és a D pont helyvektora $\underline{d}$, akkor $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}(-3, 1, 2)$ és $\vec{AD} = \underline{d} - \underline{a}(-1, 1, -2)$. Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma C csúcsának koordinátáit. Nyilvánvaló, hogy $\underline{c}$ pont $\underline{c}$ helyvektora $\underline{c} = \underline{a} + \vec{AB} + \vec{AD}$ alakban



7.8. ábra.

áll elő. A paralelogramma átlóvektora $\vec{AB} + \vec{AD}(-4, 2, 0)$, tehát $c(-2, 3, 3)$ adódik.

Másik példánkban állítsuk elő a $v(12, 11, 4)$ vektort az $a(1, 2, 0)$, $b(2, 3, 1)$, $c(5, -1, 2)$ vektorok lineáris kombinációjaként. $v = \alpha a + \beta b + \gamma c$ koordinátás alakban α , β , γ -ra egy egyenletrendszert ad.

$$12 = \alpha + 2\beta + 5\gamma$$

$$11 = 2\alpha + 3\beta - \gamma$$

$$4 = \beta + 2\gamma.$$

A harmadik egyenlet kétszeresét az elsőből és háromszorosát a másodikból kivonva:

$$4 = \alpha + \gamma$$

$$-1 = 2\alpha - 7\gamma \quad \text{innen } -9 = -9\gamma.$$

Tehát $\gamma = 1$, akkor pedig $\alpha = 3$ és $\beta = 2$.
Tehát a v vektor komponensei: $3a(3, 6, 0)$, $2b(4, 6, 2)$, $c(5, -1, 2)$.

Ha az AB szakaszt a P pont két szakaszra osztja (7.9. ábra), amelyek aránya $\frac{AP}{PB} = \frac{\mu}{\lambda}$, akkor a P pont helyvektora az A és B pontok helyvektoraival a következő alakban fejezhető ki:

$$p = \frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}.$$

(Ez az előállítás kiterjeszthető az AB egyenes AB szakaszon kívül levő pontjaira is. Ekkor az egyenesen egy irányítást kell felvenni, és ennek

megfelelően a $\frac{\mu}{\lambda}$ arány a -1 kivételével minden valós számot felvehet.

Kimutatható továbbá, hogy az AB egyenes pontjai pontosan akkor állíthatók elő $p = \alpha a + \beta b$ alakban, ha $\alpha + \beta = 1$.) Az AB szakasz felezőpontjába mutató vektor:

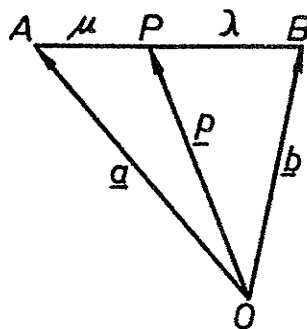
$$\frac{a + b}{2}.$$

Súlypont: Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokból álló pontrendszer súlypontja az S pont, amelynek s helyvektora

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

ahol a_i az A_i helyvektora. A súlypont független az origó választásától, és a súlypontból a pontokba vezető vektorok összege 0.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok: 1-48. feladatait.



7.9. ábra.

Vektorok skaláris szorzata

Ha két vektorhoz $\underline{a}$ -hoz és $\underline{b}$ -hoz a következő definíció szerint egy számot rendelünk, akkor ezt a műveletet a két vektor skaláris szorzásának mondjuk. Jelölése: $\underline{a}\underline{b}$.

Definíció: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzatának az $\underline{a}\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\varphi$ számot (skaláris mennyiséget) nevezzük, ahol φ a két vektor által bezárt kisebbik szög (7.10. ábra).

Megjegyezzük, hogy $\underline{a}\underline{b} > 0$ esetén a vektorok hegyesszöget, $\underline{a}\underline{b} < 0$ esetén tompaszöget és $\underline{a}\underline{b} = 0$ esetben derékszöget zárnak be.

A skaláris szorzás fontosabb tulajdonságai:

$$\underline{a}\underline{b} = \underline{b}\underline{a} \quad (\text{kommutatív})$$

$$\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{c} \quad (\text{disztributív})$$

$$(\lambda \underline{a})\underline{b} = \underline{a}(\lambda \underline{b}) = \lambda(\underline{a}\underline{b})$$

$$\underline{a}\underline{a} = \underline{a}^2 = |\underline{a}|^2.$$

A skaláris szorzásra az asszociativitásnak nincs értelme.

Skaláris szorzás elvégzése koordinátákkal: Az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

$$\underline{a}\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Az $\underline{a}$ vektor irányába mutató egységvektor:

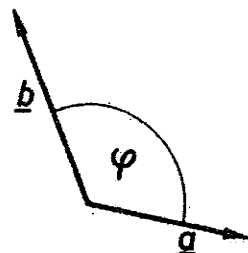
$$\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}, \text{ tehát } \underline{a}^2 = |\underline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \text{ alapján kiszá-}$$

mítható $|\underline{a}|$, és így az $\underline{a}^0$ vektor koordinátái $(\frac{a_1}{|\underline{a}|}, \frac{a_2}{|\underline{a}|}, \frac{a_3}{|\underline{a}|})$.

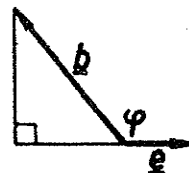
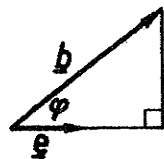
Ezek a koordináták az $\underline{a}^0$ és $\underline{i}$ ill. $\underline{j}$ ill. $\underline{k}$ alapvektorok által bezárt szögek koszinuszai.

Az $\underline{e}$ egységvektor és a $\underline{b}$ vektor skaláris szorzata $\underline{b} \cdot \underline{e} = |\underline{b}||\underline{e}|\cos\varphi = |\underline{b}|\cos\varphi$, ennek geometriai jelentése a $\underline{b}$ vektor $\underline{e}$ irányított egyenesén adódó előjeles merőleges vetülete (7.11. ábra). Ezen észrevétel alapján vezethető le a következő:

A $\underline{b}$ vektor felbontása adott $\underline{a}$ vektorral párhuzamos és reá merőleges összetevőkre: E felbontáson a következőket értjük: a két vektort közös kezdőpontúnak gondolva, az általuk meghatározott síkban a $\underline{b}$ vektor végpontjából az $\underline{a}$ vektor egyenesére állított merőleges $\underline{1}$ talppontja jelöli ki az $\underline{a}$ -ral párhuzamos $\underline{b}_p$ összetevő végpontját.



7.10. ábra.



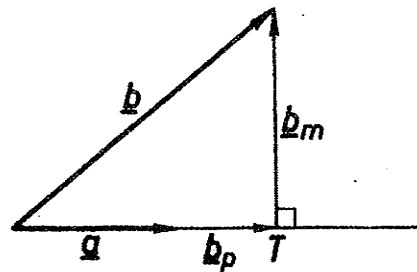
7.11. ábra.

Az $\underline{a}$ -ra merőleges összetevő kezdőpontja a T talppont, végpontja pedig a $\underline{b}$ végpontjával közös; jele: $\underline{b}_m$ (7.12. ábra).

A $\underline{b}_p$, illetve $\underline{b}_m$ összetevők:

$$\underline{b}_p = (\underline{a}^0 \underline{b}) \underline{a}^0 = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a}^2} \underline{a},$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_m &= \underline{b} - \underline{b}_p = \underline{b} - (\underline{a}^0 \underline{b}) \underline{a}^0 = \\ &= \underline{b} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a}^2} \underline{a}. \end{aligned}$$



7.12. ábra.

Könnyen belátható, hogy az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ vektor koordinátái az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ alapvektorok által meghatározott koordinátarendszerben $a_1 = \underline{a} \cdot \underline{i}, a_2 = \underline{a} \cdot \underline{j}, a_3 = \underline{a} \cdot \underline{k}$ skaláris szorzással is kiszámíthatók.

Két vektor hajlásszögének kiszámítására is alkalmas a skaláris szorzás, ui. a definíció alapján kapjuk a

$$\cos \varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|}$$

összefüggést.

Példák:

- || 1) Számítsuk ki $\underline{a}(3, 2, -1)$ és $\underline{b}(2, -1, 3)$ vektorok skaláris szorzatát. Határozzuk meg a két vektor hajlásszögének koszinuszát.

Megoldás: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$

$$|\underline{a}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{14}.$$

- || 2) Számítsuk ki az 5 hosszúságú $\underline{a}$ és 3 hosszúságú $\underline{b}$ skaláris szorzatát, ha hajlásszögük 30° .

Megoldás: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 5 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$

- || 3) Adott az $\underline{a}(-1, 2, 2)$ vektor és a $\underline{b}(-5, 5, 6)$ vektor. Bontsuk fel a $\underline{b}$ vektort $\underline{a}$ -ral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

Megoldás: $\underline{a}^2 = 1+4+4=9, \underline{a} \cdot \underline{b} = 5+10+12 = 27.$ Ezek szerint $\underline{b}_p = \frac{27}{9} \underline{a} = 3\underline{a}(-3, 6, 6), \underline{b}_m = \underline{b} - \underline{b}_p(-2, -1, 0).$

- 4) Adott az $\underline{a}(2,3,5)$ és $\underline{b}(1,-4,z)$ vektor. Határozzuk meg z értékét úgy, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egymásra merőlegesek legyenek.

Megoldás: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 - 12 + 5z = 0$, innen $z = 2$.

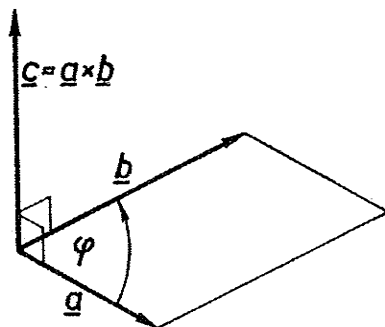
Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok 49-97. feladatait.

Vektorok vektoriális szorzata

Ha két vektorhoz $\underline{a}$ -hoz és $\underline{b}$ -hoz a következő definíció szerint egy $\underline{c}$ vektort rendelünk, akkor ezt a műveletet a két vektor vektoriális szorzásának mondjuk. Jelölése:

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}.$$

Definíció: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata a $\underline{c}$ vektor, ha $|\underline{c}| = |\underline{a}||\underline{b}|\sin\varphi$, ahol φ a két vektor által meghatározott kisebbik szög, továbbá $\underline{c}$ merőleges $\underline{a}$ -ra és $\underline{b}$ -ra mégpedig úgy, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkotnak, azaz $\underline{c}$ -ral szembe nézve $\underline{a}$ -t a $\underline{b}$ -ba óramutató járásával ellentétes φ szögű forgás viszi át (7.13. ábra).



7.13. ábra.

Megjegyzés: $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor abszolút értéke az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma területével egyenlő. Két vektor vektoriális szorzata pontosan akkor $\underline{0}$, ha a két vektor párhuzamos (kollineáris).

A definícióból következik, hogy a vektoriális szorzás nem kommutatív művelet.

A vektoriális szorzat fontosabb tulajdonságai:

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \quad (\text{a vektoriális szorzat alternáló})$$

$$\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b})$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$$

$$\underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{c} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{b} \quad (\text{disztributív})$$

Az asszociatív tulajdonság a vektoriális szorzásra sem teljesül.

Néhány szó a determinánsokról: A determinánsok elméletével az algebra foglalkozik, ezért a determinánsok általános definícióját sem adjuk meg. Kizárólag a másod- és a harmadrendű determinánsokkal foglalkozunk.

Másodrendű determináns az $a_1b_2 - a_2b_1$ kéttényezős szorzatok különbsége. A jobb áttekinthetőség kedvéért az ilyen szorzatkülönbségek értékének jelölésére az

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

alakban való felírást vezetjük be. Nyilvánvaló, hogy a másodrendű determináns értéke 0, ha megegyezik két sora ($a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$) vagy két oszlopa ($a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$). A determináns értékének (-1) -szeresét adja a sorok felcserélésével keletkező determináns.

Harmadrendű determináns: Az a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) elemekből 3 sorban (sorindex i) és 3 oszlopban (oszlopindex k) elrendezett számok által az alábbiak szerint meghatározott számot harmadrendű determinánsnak nevezzük:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ez a harmadrendű determináns első sor szerinti kifejtése.

Vektoriális szorzás elvégzése koordinátákkal: Az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzatát $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ alapvektorokkal a következő determináns alakban lehet felírni:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Nyilvánvaló, hogy $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$.

Példák:

- || 1) Határozzunk meg olyan vektort, amely az $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$ háromszög síkjára merőleges.

Határozzuk meg a háromszög területét.
Megoldás: $\overline{AB}(-6, -3, 2)$, $\overline{AC}(-3, 2, -6)$. A háromszög síkjára merőleges vektor:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 14\underline{i} - 42\underline{j} - 21\underline{k}.$$

A háromszög területe az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területének a fele:

$$t = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| \quad \overline{AB} \times \overline{AC} = 7(2\underline{i} - 6\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = 7 \cdot \sqrt{4+36+9} = 49.$$

Tehát a háromszög területe $\frac{49}{2}$.

- || 2) Legyen az a egyenes az $A(-4, 4, -1)$ ponton áthaladó, $\underline{a}(2, -1, -2)$ vektorral párhuzamos, b egyenes a $\underline{B}(-5, 5, 5)$ ponton áthaladó $\underline{b}(4, -3, -5)$ vektorral párhuzamos.

||Számítsuk ki a két egyenes távolságát (7.14. ábra).

Megoldás: A normál transzverzálissal párhuzamos vektor az $\underline{a} \times \underline{b}$, ennek irányába mutató egységvektor

$$\frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|}.$$

A $\overrightarrow{BA}$ vektornak e vektorra való merőleges vetületének a hossza adja a két egyenes d távolságát:

$$d = \left| \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} \cdot \overrightarrow{BA} \right|$$

$$\overrightarrow{BA}(1, -1, -6)$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k}$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \overrightarrow{BA} = -1 - 2 + 12 = 9, \text{ tehát } d = 3.$$

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok 98-121. feladatait.

Többszörös vektorszorzatok. Kifejtési tétel. Vegyesszorzat

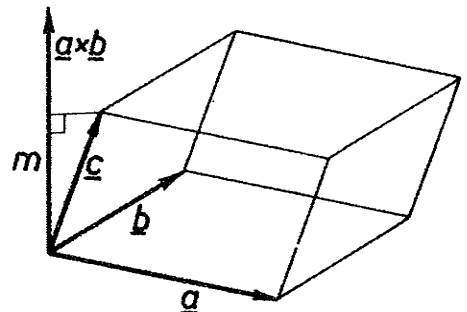
Kifejtési tétel: Ha két vektor vektoriális szorzatát egy harmadik vektorral vektoriálisan összeszorozzuk, akkor ennek könnyebb kiszámítására bebizonyítható a következő (kifejtési tételnek nevezett) összefüggés:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a}$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}.$$

Három vektor vegyesszorzata: Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok skaláris szorzata: $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$.

A vegyesszorzat geometriai jelentését tekintve $\underline{a} \times \underline{b}$ az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon $\underline{a}$, $\underline{b}$ oldallapjának normálvektora, amelynek abszolút értéke a lap területével egyenlő (7.15. ábra). A normálvektor irányába mutató egységvektort $\underline{c}$ -ral skalárisan szorozva a test e lapjához tartozó m előjeles magasságot kapjuk.



7.15. ábra.

Ez a magasság pozitív, ha $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ szöge derékszögnél nem nagyobb; negatív, ha $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ szöge derékszögnél nagyobb. Az első esetben azt mondjuk, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, a második esetben balrendszert alkotnak.

Az elmondottakból következik, hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c}$ vegyesszorzat az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát adja, amely aszerint pozitív vagy negatív, amint $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok jobb- vagy balrendszert alkotnak.

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkotó vektorhármas elemeit ebben a sorrendben ciklikusan felcserélve szintén jobbrendszert alkotó $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{a}$, illetve $\underline{c}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorhármascskat kapunk. Tehát a paralelepipedon térfogata kiszámítható az

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c} = (\underline{b} \times \underline{c}) \underline{a} = (\underline{c} \times \underline{a}) \underline{b}$$

alakokban. Mivel a skaláris szorzás kommutatív, ezért

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c} = \underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}), \text{ ugyanígy } (\underline{b} \times \underline{c}) \underline{a} = \underline{b}(\underline{c} \times \underline{a}) \text{ és}$$

$$(\underline{c} \times \underline{a}) \underline{b} = \underline{c}(\underline{a} \times \underline{b}).$$

Ez azt mutatja, hogy a három vektor vegyesszorzatának kiszámításánál a szorzat értéke független attól, hogy egy megadott sorrend esetén melyik két vektort szorozzuk össze vektoriálisan. Ez az ún. felcserélési tétel.

Ezért az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzatát szokás $\underline{abc}$ -vel jelölni. Tehát

$$\underline{abc} = \underline{bca} = \underline{cab}.$$

Ha azonban az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ sorrendben két egymás után következő vektort cserélünk fel, akkor a vektoriális szorzat alternáló tulajdonsága miatt a vegyesszorzat előjelet vált:

$$\underline{abc} = -\underline{bac} = -\underline{acb} = -\underline{cba}.$$

A vegyesszorzatra érvényesek a következő tulajdonságok:

$$(\lambda \underline{a}) \underline{bc} = \lambda \underline{abc}.$$

Az $\underline{abc} = 0$ pontosan akkor, ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysíkú (komplanáris) vektorok.

$$[(\underline{a} + \lambda \underline{b}) \times \underline{b}] \underline{c} = \underline{abc}.$$

Az $\underline{abc}$ vegyesszorzat kiszámítása koordinátákkal: Az

$\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\underline{c}(c_1, c_2, c_3)$ vektor vegyesszorzata:

$$\underline{abc} = \underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{a} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ harmadrendű}$$

determinánssal történik.

A vegyesszorzat tulajdonságaiból következik a harmadrendű determináns néhány tulajdonsága, amelyek a determináns értékének kiszámításánál jól felhasználhatók:

Ha a harmadrendű determináns két sorát felcseréljük, akkor a determináns előjele megváltozik.

Ha a determináns két sora megegyezik, akkor értéke 0.

Ha a determináns egyik sorában csupa 0 áll, akkor a determináns értéke is 0.

Ha a determináns egyik sorához a másik sor λ -szorosát ($\lambda \neq 0$) hozzáadjuk, akkor a determináns értéke nem változik meg.

Példák:

||1) Számítsuk ki az $O(0,0,0)$, $A(3,2,0)$, $B(1,4,0)$, $C(2,2,5)$ csúcspontokkal adott tetraéder térfogatát.

Megoldás: Az $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának $1/6$ része a tetraéder térfogata.

$$\vec{OA} \vec{OB} \vec{OC} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 60 - 10 = 50.$$

Tehát a tetraéder térfogata $\frac{50}{6} = \frac{25}{3}$.

||2) Döntsük el, hogy az $a(-1,3,2)$, $b(4,-6,2)$ és $c(-3,12,11)$ vektorok lineárisan függetlenek-e vagy függők.

Megoldás: Ha a három vektor lineárisan függő, akkor komplanárisak, és az általuk meghatározott „paralelepipedon” élei egy síkban vannak, a térfogat és az $\underline{abc}$ vegyeszorzat értéke 0. Ha a három vektor független, akkor az $\underline{abc}$ vegyeszorzat értéke $\neq 0$.

$$\underline{abc} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 90 - 150 + 60 = 0.$$

Tehát $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineárisan függők.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok 122-145. feladatait.

Koordinátatranszformáció

Ugyanazokat a pontokat, alakzatokat különböző koordinátarendszerben vizsgálhatjuk. Ugyanannak a pontnak a koordinátái különböző koordinátarendszerekben más-más értékek, de köztük matematikai formába önthető kapcsolat van, amit koordinátatranszformációnak mondunk.

Koordinátarendszer eltolása: Ha a koordinátarendszert a $v(a, b, c)$ vektorral eltoljuk (a megfelelő koordinátategyek párhuzamosak maradnak), akkor az első koordinátarendszerben (x, y, z) koordinátájú pont a másodikban (x', y', z') koordinátájú lesz, és a transzformáció formulái:

$$x = x' + a, y = y' + b, z = z' + c.$$

Koordinátarendszer elforgatása: Ha az origó rögzítve marad, de az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok az $\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}'$ helyzetbe elfordulnak, akkor a P pont (x, y, z) koordinátáiról (x', y', z') koordinátáira való áttérés formulái

$$x' = x \cos(\underline{i}, \underline{i}') + y \cos(\underline{j}, \underline{i}') + z \cos(\underline{k}, \underline{i}')$$

$$y' = x \cos(\underline{i}, \underline{j}') + y \cos(\underline{j}, \underline{j}') + z \cos(\underline{k}, \underline{j}')$$

$$z' = x \cos(\underline{i}, \underline{k}') + y \cos(\underline{j}, \underline{k}') + z \cos(\underline{k}, \underline{k}'), \text{ illetve}$$

$$x = x' \cos(\underline{i}', \underline{i}) + y' \cos(\underline{j}', \underline{i}) + z' \cos(\underline{k}', \underline{i})$$

$$y = x' \cos(\underline{i}', \underline{j}) + y' \cos(\underline{j}', \underline{j}) + z' \cos(\underline{k}', \underline{j})$$

$$z = x' \cos(\underline{i}', \underline{k}) + y' \cos(\underline{j}', \underline{k}) + z' \cos(\underline{k}', \underline{k}).$$

A formulákban szereplő pl. $(\underline{k}, \underline{i}')$ szimbólum a $\underline{k}$ és $\underline{i}'$ egy-ségvektorok szögét jelenti.

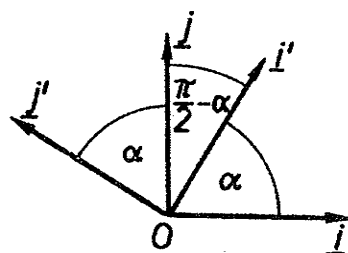
Síkbeli koordinátarendszer α szöggel való elforgatása esetén az áttérés formulái a következők-re egyszerűsödnek: (7.16. ábra)

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \text{ illetve}$$

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$



7.16. ábra.

Javasolt gyakorlati anyag:
Geometriai feladatok 270-281.
feladatok.

Elméleti tananyag: Tankönyv 150-162., 166., 168-173.
pontok.

8. EGYENES ÉS SIK KOORDINÁTAGEOMETRIÁJA

Geometriai feladatainkat nemcsak szerkesztéssel, hanem számolással is meg kell tudni oldani. Ez oly módon történik, hogy koordinátarendszer segítségével jellemezzük az egyeneseket, síkokat és más összetettebb alakzatokat. Akkor mondjuk, hogy egy alakzat egyenletével vagy egyenletrendszerével van jellemezve, ha ezeket kizárólag az alakzat pontjai elégítik ki.

Egyenes egyenletrendszere: Legyen adva egy koordinátarendszerben egy egyenes $P_0(x_0, y_0, z_0)$

pontjába mutató $\underline{r}_0$ helyvektor és az egyenes $\underline{v}(a, b, c)$ irányvektora. Ezek egyértelműen meghatározzák az egyenest a térben (8.1. ábra). Ha $\underline{r}$ az egyenes egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjába mutató helyvektor, akkor az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor és a $\underline{v}$ irányvektor párhuzamosak, tehát $\underline{r} - \underline{r}_0 = \underline{v} \cdot t$, ahol t egy valós szám. Ez az egyenlőség az egyenes minden pontjára — alkalmas t esetén — fennáll, az egyenesen kívül levő pontokra nem teljesülhet, tehát az egyenes vektoregyenlete $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t$ alakú. Koordinátákkal felírva:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct,$$

így az egyenes paraméteres egyenletrendszerét kapjuk; a paraméter t . A paraméter kiküszöbölésével ez az

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

alakban írható fel.

Ha pl. $c = 0$, akkor ez a felírás az

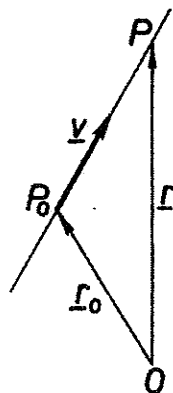
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad z = z_0$$

alakra módosul.

Középiskolai tanulmányokból ismeretes, hogy az egyenes síkbeli koordinátarendszerben az

$$Ax + By + C = 0$$

alakú egyenlettel jellemezhető, ahol az egyenesre merőleges $\underline{n}$ normálvektor koordinátái $\underline{n}(A, B)$, míg az egyenes $\underline{v}$ irány-



8.1. ábra.

vektora a $\underline{v}(B, -A)$ koordinátákkal adható meg. Az (x_0, y_0) ponton áthaladó $\underline{n}(A, B)$ normálvektorú egyenes egyenlete

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

A sík egyenlete: A térben egy síkot egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontja és $\underline{n}(A, B, C)$ normálvektora egyértelműen meghatározzák (8.2. ábra), minthogy egyetlen olyan sík van, amely a P_0 ponton átmegy és a $\underline{n}$ irányra merőleges. Legyen a sík egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora $\underline{r}$, a P_0 pont helyvektora $\underline{r}_0$. Az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor a sík valamilyeni pontjára nézve az $\underline{n}$ -ra merőleges, a síkon kívül fekvő pont-ra azonban ez nem áll fenn, tehát a sík pontjait a következő skaláris szorzat jellemzi:

$$\underline{n}(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0.$$

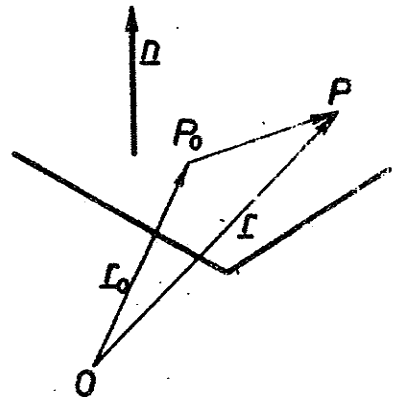
Ez a sík vektoregyenlete. Koordinátás alakban

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ vagy}$$

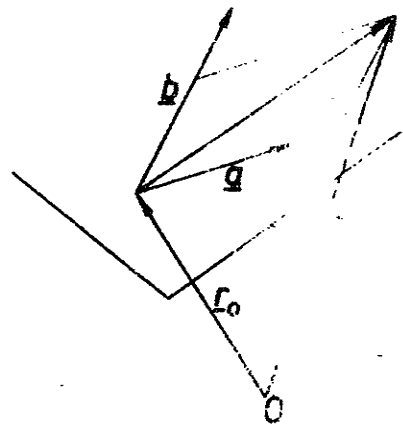
$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

alakú, amit még $Ax + By + Cz + D = 0$ alakban is felírhatunk, ahol $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

A sík jellemzésére alkalmas másik mód lehet, ha a síkot egy pontjának $\underline{r}_0$ helyvektorával és két $\underline{a}$, $\underline{b}$ nem kollineáris síkbeli vektorral adjuk meg (8.3. ábra). A sík pontjai az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációival elérhetők, tehát a sík egy tetszőleges $\underline{r}$ helyvektorú pontja $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{a}u + \underline{b}v$ alakban állítható elő. Az u és v értékek — mint paraméterek — változtatásával a sík valamilyen pontjába eljuthatunk. Az ilyen alakú vektoregyenlet is felírható koordinátás alakban. Az u és v paraméterek kiküszöbölésével a sík egyenletének szokásos alakját kapjuk.



8.2. ábra.



8.3. ábra

Pont és sík távolsága úgy kapható meg, ha a sík egy pontját és az adott pontot összekötő vektort merőlegesen rávetítjük a normálvektor irányára. Ha a pontba az $\underline{r}$ helyvektor mutat, a sík egy pontjának helyvektora pedig $\underline{r}_0$, továbbá a normálvektor irányú egységvektor $\underline{n}^0$, akkor a vetület előjeles hosszát az $\underline{n}^0(\underline{r} - \underline{r}_0)$ skaláris szorzata adja.

A sík egyik oldalán levő pontokra az érték pozitív, a másik oldalon levőkre negatív, a sík pontjaira természetesen 0.

Az $\underline{n}^0(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$ síkegyenletet a Hesse-féle normál-egyenletnek nevezzük, és koordinátáisan az

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

alakban írható fel, amely alkalmas pont és sík távolságának a kiszámítására.

Példák:

|| 1) Irjuk fel a $P(5, -3, 2)$ ponton áthaladó $v(-1, 3, 5)$ irányvektorú egyenes egyenletrendszerét.

Megoldás: A vektoregyenletből kapjuk az $x = 5 - t$, $y = -3 + 3t$, $z = 2 + 5t$ alakot, illetve ebből az

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{5}$$

egyenletrendszert.

|| 2) Határozzuk meg az $x = 5 - t_1$, $y = -3 + 3t_1$, $z = 2 + 5t_1$ és az $x = 1 - 2t_2$, $y = 3 + t_2$, $z = -1 - 5t_2$ egyenesek hajlásszögét. Állapítsuk meg két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének feltételét.

Megoldás: A két egyenes irányvektora: $\underline{v}_1(-1, 3, 5)$, $\underline{v}_2(-2, 1, -5)$. Hajlásszögük koszinusza:

$$\cos \varphi = \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{|\underline{v}_1| |\underline{v}_2|} \quad \begin{aligned} \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 &= 2 + 3 - 25 = -20 \\ |\underline{v}_1| &= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35} \\ |\underline{v}_2| &= \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30} \end{aligned}$$

tehát $\cos \varphi = \frac{-20}{\sqrt{35}\sqrt{30}}$, ebből a két egyenes hajlásszöge megállapítható.

Két egyenes akkor merőleges, ha irányvektoraik skaláris szorzata 0.

Két egyenes akkor párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. (Ekkor a két egyenes egybe is eshet.)

|| 3) Állapítsuk meg két kitérő egyenes távolságát.

Megoldás: Ezt a feladatot a vektoriális szorzásnál bemutatott feladatok között lényegében bemutattuk.

Két egyenes kölcsönös helyzetét ennek alapján már eldönthetjük: láttuk párhuzamosságuk feltételét, s ha nem párhuzamosak, és távolságukra 0 adódik, akkor csak metszők lehetnek.

- 4) Határozzuk meg az $x = -t_1$, $y = 6 + 2t_1$, $z = 8 + 3t_1$ és az $x = 13 + 5t_2$, $y = 2 + t_2$, $z = -3 - t_2$ egyenesek metszéspontját.

Megoldás: Ha a két egyenes metszi egymást, akkor a t_1 és t_2 paraméterek megfelelő értékeire ugyanaz az (x, y, z) számhármasság adódik. Ebből a feltételezésből három egyenlet írható fel:

$$-t_1 = 13 + 5t_2, \quad 6 + 2t_1 = 2 + t_2, \quad 8 + 3t_1 = -3 - t_2.$$

Ennek az egyenletrendszernek két egyenletéből kepezett egyenletrendszerből $t_1 = -3$, $t_2 = -2$ adódik. Ez azonban még nem jelenti azt, hogy a két egyenes metszi egymást. A harmadik egyenletbe ezeket az értékeket behelyettesítve, ha ott is egyenlőség adódik, akkor a két egyenes valóban metszi egymást (különben nem metsződők az egyenesek). Ez a módszer tehát alkalmas segédeszköz két egyenes kölcsönös helyzetének megállapítására.

Esetünkben a kapott $t_1 = -3$ és $t_2 = -2$ értékek mindhárom egyenletet kielégítik, tehát a két egyenes metsző. A metszéspont koordinátái a kapott paraméterértékek megfelelő egyenletrendszerbe helyettesítésével adódnak és a két egyenes $M(3, 0, -1)$ metszéspontját adják.

- 5) Irjuk fel az $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ és $C(5, 2, 6)$ pontok által meghatározott sík egyenletét.

Megoldás: A sík két vektora $\vec{AB}(2, -2, -3)$ és $\vec{AC}(4, 0, 6)$. A sík normálvektora: $\vec{AB} \times \vec{AC}(-12, -24, 8)$, helyette vehetjük a sík normálvektorának az $\vec{n}(3, 6, -2)$ vektort is; a sík egy pontja A, tehát a sík egyenlete

$$3(x - 1) + 6(y - 2) - 2z = 0, \text{ illetve}$$

$$3x + 6y - 2z - 15 = 0.$$

- 6) Adott a $P(1, 2, 3)$ pont és a következő két egyenes:
a egyenes: $x = -4 + 2t_1$, $y = 4 - t_1$, $z = -1 - 2t_1$,
b egyenes: $x = -5 + 4t_2$, $y = 5 - 3t_2$, $z = 5 - 5t_2$.
Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely a P ponton átmegy és párhuzamos az a és b egyenesekkel.

Megoldás: a keresett sík normálvektorát az egyenesek $\vec{v}_1(-2, -1, -2)$ és $\vec{v}_2(4, -3, -5)$ irányvektorainak a vektoriális szorzata adja: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2(-1, 2, -2)$. Tehát a sík egyenlete:

$$-(x - 1) - 2(y - 2) - 2(z - 3) = 0, \text{ illetve}$$

$$-x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

|| 7) Adott a $P(1,2,3)$ pont és az $x = -4 + 2t$, $y = 4 - t$,
 $z = -1 - 2t$ egyenes. Irjuk fel a P pont és az egye-
 nes által meghatározott sík egyenletét.

Megoldás: A sík normálvektorát a P pontot az egyenes
 egy $R(-4,4,-1)$ pontjával összekötő vektor és az irányvek-
 tor vektoriális szorzata adja. $\overline{PR}(-5,2,-4)$; $\underline{v}(2,-1,-2)$,
 $\underline{n} = \overline{PR} \times \underline{v}(-8,-18,1)$. A sík egyenlete

$$-8(x - 1) - 18(y - 2) + (z - 3) = 0.$$

|| 8) Adott a $P(1,2,3)$ pont és az $x = -4 + 2t$, $y = 4 - t$,
 $z = -1 - 2t$ egyenes. Irjuk fel a P pontot tartalma-
 zó és az egyenesre merőleges sík egyenletét.

Megoldás: A sík normálvektora az egyenes irányvektora
 $(2,-1,-2)$. Tehát a sík egyenlete: $2(x - 1) - (y - 2) -$
 $- 2(z - 3) = 0$.

|| 9) Adott a $2x - 5y + 2z + 7 = 0$ egyenletű sík és az
 $x = 3 - t$, $y = -2 + 3t$, $z = 1 - 4t$ egyenletrendsze-
 rű egyenes. Határozzuk meg a sík és az egyenes haj-
 lásszögét.

Megoldás: Először a sík normálvektorának $\underline{n}(2,-5,2)$ és
 az egyenes $\underline{v}(-1,3,-4)$ irányvektorának a szögét állapítjuk
 meg:

$$\cos \varphi = \frac{\underline{n} \cdot \underline{v}}{|\underline{n}| |\underline{v}|}$$

$$|\underline{n}| = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$$

$$\underline{n} \cdot \underline{v} = -2 - 15 - 8 = -25,$$

tehát

$$\cos \varphi = \frac{-25}{\sqrt{33}\sqrt{26}}.$$

Mint hogy φ értéke tompaszög, ezért a sík és az egyenes haj-
 lásszöge $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

|| 10) Állapítsuk meg két sík hajlásszögét.

Megoldás: Erre a feladatra külön számpéldát nem dol-
 gozunk ki. Két sík hajlásszöge (amely legfeljebb derékszög
 lehet) normálvektoraik hajlásszögéből számítható.

Két sík nyilván akkor párhuzamos, ha normálvektoraik
 is párhuzamosak.

|| 11) Határozzuk meg a $3x - y + 2z = 3$ és a $7x - 3y +$
 $+ 5z = 5$ egyenletű síkok metszésvonalát.

Megoldás: A metszésvonal $\underline{v}$ irányvektora mindkét sík
 normálvektorára merőleges, tehát azok vektoriális szorza-
 tából számolható:

$$\underline{n}_1(3,-1,2), \underline{n}_2(7,-3,5) \text{ tehát } \underline{v} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2(1,-1,-2).$$

A metszésvonal egy pontját megkapjuk, ha annak egyik koor-
 dinátáját tetszőlegesen választjuk; legyen pl. $z = 0$. Ek-
 kor a síkok egyenleteiből származó $3x - y = 3$ és $7x - 3y =$
 $= 5$ egyenletrendszerből $x = 2$, $y = 3$ adódik, így a metszés-

vonal egy M pontja: $M(2,3,0)$. A metszésvonal egyenletrendszere tehát:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-2}.$$

12) Határozzuk meg a $7x - 3y + 5z = 5$ egyenletű síknak és az $x = 4 - t$, $y = 5 - 3t$, $z = -3 + t$ egyenletrendszerű egyenesnek a metszéspontját.

Megoldás: Ha a t paraméter valamely értékére az egyenes egyenletrendszeréből olyan (x, y, z) számhármas adódik, amely a sík egyenletét kielégíti, akkor ez a számhármas éppen a keresett metszéspont három koordinátája. A megfelelő t értéket úgy keressük, hogy a sík egyenletébe behelyettesítjük az egyenes egyenletrendszerét:

$$7(4 - t) - 3(5 - 3t) + 5(-3 + t) = 5.$$

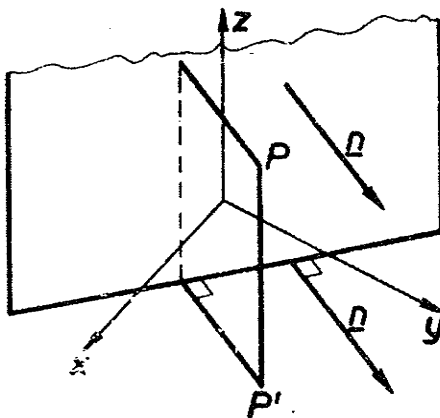
A kapott egyenletet t -re megoldva $t = 1$ -et kapunk. Ebből a metszéspont $M(3,2,-2)$. Ha az egyenletnek t -re végtelen sok megoldása van, akkor az egyenes benne fekszik a síkban, ha nincs az egyenletnek megoldása, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal.

Egyébként sík és egyenes párhuzamosságát (beleértve, hogy az egyenest tartalmazza a sík) eldönthetjük a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának merőlegességéből is, ekkor a két vektor skaláris szorzata 0.

Pont és sík távolságának kiszámítására a Hesse-féle normálegyenlet szolgál. Számítsuk ki a $P(2,1,8)$ pontnak az $n(3,4,0)$ normálvektorú $Q(-3,1,6)$ ponton áthaladó síktól való távolságát. A sík egyenlete a Hesse-féle normál alakban ($|n| = 5$):

$$\frac{3x + 4y + 5}{5} = 0, \text{ tehát a távolság } d = \frac{15}{5} = 3.$$

A legutolsó feladatnak még további tanulsága is van. Mínthogy a sík $n(3,4,0)$ normálvektora az xy síkkal párhuzamos (8.4. ábra), ezért a sík az xy síkra merőleges, tehát a sík egyenlete megegyezik az xy síkkal alkotott metszésvonalának egyenletével, sőt a sík és a metszésvonal normálvektora is azonos. A $P(2,1,8)$ pont tehát ugyanolyan távol van a síktól, mint az xy síkon levő $P'(2,1,0)$ merőleges vetülete a metszésvonaltól. Ebből azonnal következik, hogy a sík koordináta geometriájában az egyenesnek is van Hesse-féle normálegyenlete, mégpedig az $Ax + By + C = 0$ egyenes normálegyenlete:



8.4. ábra.

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

ennek felhasználásával a síkban levő pontoknak az egyenesből mért távolsága könnyen számítható.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometria feladatok 146-269. és 282-306. feladatait.

Elméleti tananyag: Tankönyv 174-180, 182-188, 191-194. pontok.

9. KÖTÖTT VEKTOROK. VEKTORRENDSZEREK

Két vektor egyenlőségének értelmezését leszűkítjük arra az esetre, hogy két vektort hosszuk és irányuk egyenlősége esetén csakis akkor tekintünk egyenlőnek, ha ugyanazon az egyenesen vannak. Az ilyen vektorokat nevezzük kötött vektoroknak. Egyes mechanikai problémáknál ezek a vektorok igen fontos szerephez jutnak. A vektor egyenlőség hatásvonala.

Kötött vektor jellemzése vektorkoordinátaival: Ha a $\underline{v}$ egyenesen levő $\underline{v}$ vektor A kezdő-pontjába mutat a tér egy tetszőleges (g egyenesen kívül fekvő) O pontjából az $\underline{a}$ vektor, akkor az $\underline{m} = \underline{a} \times \underline{v}$ vektort a $\underline{v}$ vektor O pont-ra vonatkozó nyomatékának nevezzük (9.1. ábra). Ez a nyomaték vektor független attól, hogy a g egyenesen hol választjuk az A pontot. Az $\underline{m}$ mindig merőleges az O pont és g egyenes síkjára, hossza pedig annak a paralelogrammának a területével egyenlő, amelyet a g egyenesen levő $|\underline{v}|$ szakasz és az O pont meghatároznak. E paralelogramma magassága az O pont és a g egyenes távolsága, egyik oldala $|\underline{v}|$ hosszúságú, tehát területe valóban független attól, hogy a g egyenesen hol fekszik a $\underline{v}$ vektor.

Az O pont általában a koordináta-rendszer origója; a vonatkoztatási pontra való tekintettel $\underline{m}$ -t gyakran $\underline{m}_0$ -ral jelöljük.

Határozzuk meg az $A(2,3,1)$ ponton áthaladó $\underline{v}(1,-1,2)$ vektornak az origóra vonatkozó nyomatékát.

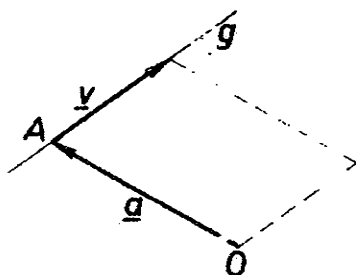
$\underline{m} = \underline{a} \times \underline{v}$ ahol $\underline{a}(2,3,1)$, $\underline{v}(1,-1,2)$ tehát

az O -ra vonatkozó nyomaték $(7,-3,-5)$.

A $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettőst a $\underline{v}$ kötött vektor O pontra vonatkozó vektorkoordinátáinak mondjuk.

Megjegyzés: Egy kötött vektornak a tér különböző pontjaira vonatkozó nyomatéka más-más vektor, de mindig merőleges a $\underline{v}$ -re, $\underline{v} \cdot \underline{m} = 0$. Egy kötött vektor nyomatéka kizárólag akkor 0 , ha a hatásvonala átmegy a vonatkoztatási ponton.

Minden $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettős $\underline{v} \neq 0$ és $\underline{v} \cdot \underline{m} = 0$ esetén egyértelműen meghatároz egy kötött vektort, ha adott az O vonatkoztatási pont. Ha $\underline{r}_0$ -ral jelöljük az O pontból a $\underline{v}$ hatásvonalának egy pontjába merőlegesen érkező vektort, ak-



9.1. ábra.

kor nyilván $\underline{m} = \underline{r}_0 \times \underline{v}$. Mindkét oldalt balról vektoriálisan szorozva $\underline{v}$ vektorral, $\underline{v} \times \underline{m} = \underline{v} \times (\underline{r}_0 \times \underline{v})$ adódik. A kifejtési tétel alkalmazásával $\underline{v} \times \underline{m} = \underline{v}^2 \underline{r}_0$ -t kapunk, mivel $\underline{v} \underline{r}_0 = 0$. Innen $\underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2}$, a $\underline{v}$ vektor hatásvonalának egy pontját adja.

Határozzuk meg a $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettős hatásvonalának $\underline{r}_0$ pontját, ha $\underline{v}(-1, 2, -1)$ és $\underline{m}(3, 2, 1)$.

Látható, hogy $\underline{v} \underline{m} = -3 + 4 - 1 = 0$, tehát a vektorkettős kötött vektort határoz meg, amelynek hatásvonalába mutató $\underline{r}_0$ vektor $\underline{v} \times \underline{m}_0(4, -2, -8)$, $\underline{v}^2 = 6$ -ból kapható $\underline{r}_0(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

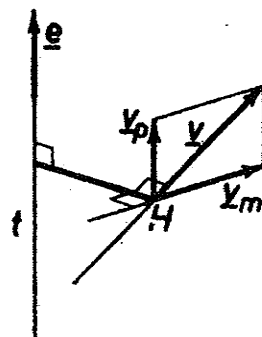
Ha az 0 vonatkoztatási pont helyett egy O' vonatkoztatási pontra akarjuk kiszámítani a vektorkoordinátákat, akkor $\underline{v}$ változatlan marad. Az O -ra vonatkozó $\underline{m}$ nyomaték és az O' -re vonatkozó $\underline{m}'$ nyomaték között az $\underline{m} = \underline{m}' + \underline{OO}' \times \underline{v}$, illetve $\underline{m}' = \underline{m} - \underline{OO}' \times \underline{v}$ összefüggés áll fenn.

Határozzuk meg a $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettős ($\underline{v}(-1, 2, -1)$, $\underline{m}(3, 2, 1)$) $O'(2, -1, 1)$ pontra vonatkozó vektorkoordinátáit.

$\underline{m}' = \underline{m} - \underline{OO}' \times \underline{v}$, ahol $\underline{OO}'(2, -1, 1)$ és $\underline{OO}' \times \underline{v} = -\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}$, tehát $\underline{m}'(4, 1, -2)$; $\underline{v}' = \underline{v}$.

Tengelyre vonatkozó nyomaték: Ha egy t egyenes irányát egy $\underline{e}$ egységvektorral adjuk meg, akkor egy $\underline{v}$ vektornak a t egyenesre (tengelyre) vonatkozó nyomatékát úgy számítjuk ki, hogy a $\underline{v}$ vektornak t egy tetszőleges pontjára vonatkozó (vektor) nyomatékát skalárisan szorozzuk az $\underline{e}$ -ral. Ilyen módon látható, hogy a tengelyre vonatkozó nyomaték egy szám, amely szoros kapcsolatban van a mechanikai forgatónyomatékkal.

A t tengely és a $\underline{v}$ vektor hatásvonala két kitérő egyenes. Vegyük normál transzverzálisukat, ennek a $\underline{v}$ hatásvonalával közös pontja legyen H . A H kezdőpontú $\underline{v}$ vektort $\underline{e}$ -ral párhuzamos és reá merőleges összetevőkre bontva ($\underline{v} = \underline{v}_p + \underline{v}_m$), a $\underline{v}_p$ nem forgatja a tengelyt, a $\underline{v}_m$ forgatónyomatékát pedig a normál transzverzális hosszának és $|\underline{v}_m|$ szorzata adja. Ennek számértéke a $\underline{v}$ vektor t tengelyre vonatkozó nyomatékának abszolút értéke. A tengelyen megadott irány csupán azt befolyásolja, hogy a tengelyen jobb vagy bal irányú forgatóhatás észlelhető (9.2. ábra).



9.2. ábra.

Számítsuk ki a $[\underline{v}, \underline{m}_0]$ vektorkoordinátákkal adott $(\underline{v}(-1, 2, -1), \underline{m}_0(3, 2, 1))$ kötött vektornak az $A(2, 2, -1)$ ponton áthaladó $\underline{e}(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ egységvektorral irányított tengelyre vonatkozó nyomatékát.

Egy korábbi feladatunknál láttuk, hogy a szóban forgó kötött vektor hatásvonalának egy pontja $\underline{r}_0(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ helyvektorú. Az $\underline{AR}_0$ tehát $(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$, ezek szerint az A pontra vonatkozó nyomaték $\underline{AR}_0 \times \underline{v}(3, -1, -5)$. A tengelyre számított nyomaték $(\underline{AR}_0 \times \underline{v})\underline{e} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} - \frac{10}{3} = -1$.

Bebizonyítható, hogy valamely $(\underline{v} \neq 0)$ kötött vektornak az $\underline{e}$ egységvektorral irányított t tengelyre vonatkozó nyomatéka pontosan akkor 0, ha a $\underline{v}$ hatásvonala metszi a t tengelyt, vagy párhuzamos vele.

A $[\underline{v}_1, \underline{m}_1]$ és $[\underline{v}_2, \underline{m}_2]$ vektorkoordinátákkal jellemzett hatásvonalak $(\underline{v}_1 \underline{m}_1 = 0, \underline{v}_2 \underline{m}_2 = 0)$ pontosan akkor vannak egy síkban, ha

$$\underline{v}_1 \underline{m}_2 + \underline{v}_2 \underline{m}_1 = 0.$$

Ugyanis az $\underline{r}_1$, illetve $\underline{r}_2$ helyvektorú pontokon áthaladó $\underline{v}_1$, illetve $\underline{v}_2$ vektorok hatásvonalai pontosan akkor vannak egy síkban, ha $(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)\underline{v}_1 \underline{v}_2 = 0$, vagyis $\underline{r}_1 \underline{v}_1 \underline{v}_2 - \underline{r}_2 \underline{v}_1 \underline{v}_2 = 0$.

Míthogy $\underline{r}_1 \times \underline{v}_1 = \underline{m}_1$ és $\underline{r}_2 \times \underline{v}_2 = \underline{m}_2$, ezért az előbbi vegyes-szorzatokba a nyomatékvektorokat beírva éppen $\underline{m}_1 \underline{v}_2 + \underline{v}_1 \underline{m}_2 = 0$ adódik.

Vektorrendszer

A $[\underline{v}_1, \underline{m}_1], [\underline{v}_2, \underline{m}_2], \dots, [\underline{v}_k, \underline{m}_k]$ kötött vektorok (a nyomatékok u.azon 0 pontra vonatkoznak) egy halmazát vektorrendszernek nevezzük. A vektorrendszer eredővektorát, illetve eredő nyomatékát a következő összegekként definiáljuk:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n \text{ az ún. eredő vektor,}$$

$$\underline{m} = \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \dots + \underline{m}_n \text{ az ún. eredő nyomaték.}$$

Ezt az eljárást a vektorrendszer 0 pontra való redukálásának is nevezzük.

Ha a fenti vektorrendszernek más vonatkoztatási pontra, pl. O' -re vonatkozó $\underline{v}'$ eredő vektorát és $\underline{m}'$ eredő nyomatékát kell meghatározni, akkor $\underline{v}' = \underline{v}$ és $\underline{m}' = \underline{m} - \underline{OO}' \times \underline{v}$ összefüggés alapján számolunk.

A két egyenlőség megfelelő oldalait skalárisan összeszorozva kapjuk, hogy az eredő vektor és az eredő nyomaték skaláris szorzata független a vonatkoztatási pont megválasztásától: $\underline{v} \underline{m} = \underline{v}' \underline{m}'$.

Ezt az állandó, és csakis a vektorrendszerre jellemző $V = \mathbf{v} \cdot \mathbf{m}$ szorzatot a vektorrendszer skalárinvariánsának (vagy saját nyomatékának) nevezzük.

Vektorpár

A vektorpár $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ két ellentett kötött vektorból álló vektorrendszer, amelyek hatásvonala párhuzamos. Eredő nyomatékuk független a vonatkoztatási ponttól és merőleges a vektorpár síkjára. A vektorpár eredő vektora $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. A vektorpár nyomatékának hossza a két vektor által meghatározott paralelogramma területével egyenlő.

Állítsunk elő egy olyan vektorpárt, amely a $[0, \mathbf{m}]$ vektorrendszert állítja elő, ha $\mathbf{m}(2, -3, 1)$.

Az egyik pl. $\mathbf{v}_1$ vektor lehet az origón áthaladó $\mathbf{v}_1(-1, 0, 2)$, amely láthatóan merőleges $\mathbf{m}$ -re. Ennek az origóra vonatkozó nyomatéka 0 .

A másik vektor $\mathbf{v}_2(1, 0, -2)$ kell legyen, és az origóra vonatkozó nyomatéka $\mathbf{m}(2, -3, 1)$. Tehát a $\mathbf{v}_2$ vektor hatásvonalának egy pontja $\mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{m}}{\mathbf{v}_2^2}$ helyvektorú.

$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{m}(-6, -5, -3)$; $\mathbf{v}_2^2 = 5$, tehát $\mathbf{r}_2(-\frac{6}{5}, -1, -\frac{3}{5})$.

Vektorrendszerek egyenértékűsége: Két vektorrendszer egyenértékű, ha eredővektoraik és ugyanazon tetszőleges pontra számított eredőnyomatékaik egyenlők.

Vektorrendszer helyettesítése: Akkor beszélünk egy vektorrendszer helyettesítéséről, ha a vektorrendszerrel egyenértékű — lehetőleg kevés kötött vektorból álló — vektorrendszert állítunk elő. A vektorrendszerek áttekinthetése és egyszerűbb helyettesítési lehetőségének megállapítására a $V = \mathbf{v} \cdot \mathbf{m}$ skalárinvariáns értékét vizsgáljuk.

Ha $V = 0$, akkor ez többféleképpen teljesülhet:

- Ha $\mathbf{v} = 0$ és $\mathbf{m} = 0$, akkor egyensúlyi vektorrendszerrel beszélünk.
- Ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $\mathbf{m} = 0$, akkor a vonatkoztatási ponton áthaladó $\mathbf{v}$ irányú hatásvonalban fekvő $\mathbf{v}$ vektor a vektorrendszer legegyszerűbb helyettesítése.
- Ha $\mathbf{v} = 0$ és $\mathbf{m} \neq 0$, akkor a vektorrendszer vektorpárral helyettesíthető. Ilyen helyettesítést láttunk a vektorpárok tárgyalásánál bemutatott példában.
- Ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $\mathbf{m} \neq 0$, akkor a vektorrendszer egyetlen $\mathbf{v}$ kötött vektorral helyettesíthető, amelynek hatásvonala

az $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}}{\mathbf{v}^2}$ helyvektorú ponton áthaladó $\mathbf{v}$ irányú egyenes.

Ha $V \neq 0$, akkor általános vektorrendszerrel beszélünk. Ebben az esetben a $[\underline{v}, \underline{m}]$ által meghatározott vektorrendszert felbontjuk két vektorrendszerre azáltal, hogy az $\underline{m}$ eredő nyomatékknak vesszük a $\underline{v}$ -ral párhuzamos $\underline{m}_1$ és a $\underline{v}$ -ra merőleges $\underline{m}_2$ összetevőit. A vektorrendszer felbontása:

$$[\underline{v}, \underline{m}] = [\underline{v}, \underline{m}_2] + [0, \underline{m}_1]$$

A $[\underline{v}, \underline{m}_2]$ vektorrendszer egy olyan kötött vektorral helyettesíthető, amely az $\underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{v^2}$ helyvektorú pontból kiinduló $\underline{v}$ vektorból áll. Ugyanis könnyen belátható, hogy $\underline{v} \times \underline{m} = \underline{v} \times \underline{m}_2$, mivel $\underline{v} \times \underline{m} = \underline{v} \times (\underline{m}_1 + \underline{m}_2) = \underline{v} \times \underline{m}_1 + \underline{v} \times \underline{m}_2$, ahol $\underline{v}$ és $\underline{m}_1$ párhuzamossága folytán $\underline{v} \times \underline{m}_1 = 0$.

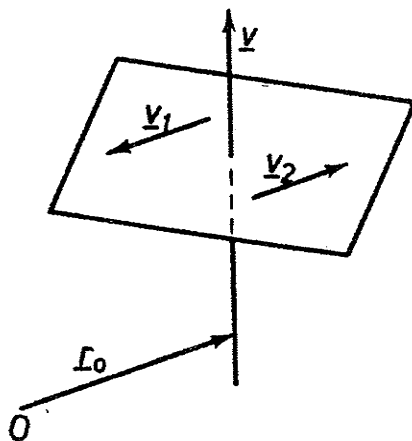
Centrális egyenes: A $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorrendszer centrális egyenesének (vagy centrális tengelyének) nevezzük az $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{v^2} + \underline{v}t$ vektoregyenletű egyenest. A centrális tengely azáltal is kitüntetett szerepű egyenes, hogy kizárólag a centrális tengely pontjaira vonatkozóan számított eredő nyomatékvektor párhuzamos a rendszer eredő vektorával.

Az általános vektorrendszer felbontásában szereplő $[0, \underline{m}_1]$ vektorrendszer pedig nyilván egy olyan vektorpár, amelynek síkja az $\underline{m}_1$ vektorral párhuzamos centrális egyenesre merőleges. (Vektorpár konkrét előállítását már korábban láttuk.)

Ezek szerint egy $[\underline{v}, \underline{m}]$ általános vektorrendszer mindig helyettesíthető a centrális egyenesben ható $\underline{v}$ vektorral és a centrális egyenesre merőleges síkban levő vektorpárral (9.3. ábra). Az általános vektorrendszer ilyen előállítása ún. vektorcsavart ad.

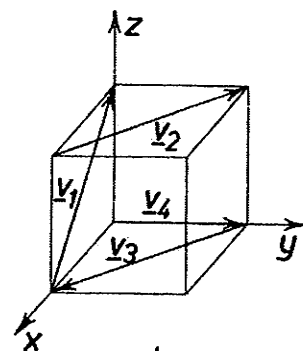
Más, inkább elvi jelentőségű helyettesítési lehetőséget kapunk az általános vektorrendszerre, ha azt a vonatkoztatási ponton áthalladó $\underline{v}$ vektorral és az $\underline{m}$ eredő nyomatékknak megfelelő vektorpárral helyettesítjük.

További helyettesítési lehetőség: Egy általános vektorrendszer mindig helyettesíthető két kötött vektorral, amelyek közül az egyik szabadon választható. (Hatásvonalaiik kitérő egyenesek.)



9.3. ábra.

Példaként vegyük a 9.4. ábrán megadott vektorrendszert, ahol az ábrázolt kocka élhossza 1 egység. Számítsuk ki a vektorrendszer origóra vonatkozó eredő nyomatékát és eredő vektorát. Állapítsuk meg, hogy milyen típusú vektorrendszer és mivel helyettesíthető. Írjuk fel a centrális egyenes egyenletrendszerét.



9.4. ábra.

Legyenek a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vektorok hatásvonalához vezető helyvektorok rendre $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, \underline{r}_4$. Ekkor

$\underline{r}_1(1,0,0)$	$\underline{v}_1(-1,0,1)$	$\underline{m}_1(0,-1,0)$
$\underline{r}_2(1,0,1)$	$\underline{v}_2(-1,1,0)$	$\underline{m}_2(-1,-1,1)$
$\underline{r}_3(1,0,0)$	$\underline{v}_3(1,-1,0)$	$\underline{m}_3(0,0,-1)$
$\underline{r}_4(0,0,0)$	$\underline{v}_4(0,1,0)$	$\underline{m}_4(0,0,0)$
Az eredők:	$\underline{v}(-1,1,1)$	$\underline{m}(-1,-2,0)$

A rendszer skalárinvariánsa $V = \underline{v} \cdot \underline{m} = 1 - 2 = -1$.

A vektorrendszer tehát vektorcsavárt ad, amely a centrális egyenesben ható $\underline{v}$ vektorral és a centrális egyenesre merőleges síkban fekvő megfelelő vektorpárral helyettesíthető. A centrális tengely egyenletrendszere:

$$\underline{v} \times \underline{m}(2, -1, 3), \quad \underline{v}^2 = 3, \quad \underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2} \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right).$$

Innen a centrális egyenes az

$$x = \frac{2}{3} - t, \quad y = -\frac{1}{3} + t, \quad z = 1 + t$$

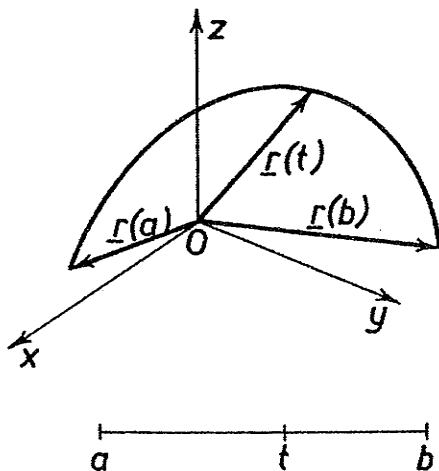
egyenletrendszerű egyenes.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok: 307-340. feladatait.

Elméleti tananyag: Tankönyv 234-241. pontok.

10. GÖRBÉK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

A térben mozgó pont pályája általában valamilyen görbe, amelyet ha koordináta-geometriai eszközökkel akarunk jellemezni, akkor megadjuk a pont r helyvektorát a különböző időpillanatokban. Ezáltal a t idő és a helyvektorok között egy $r = r(t)$ függvénykapcsolatot létesítettünk (10.1. ábra). Az ilyen függvényt vektor-skalár függvénynek nevezzük. A görbéket ilyen függvényekkel fogjuk vizsgálni. Minthogy azonban nem minden vektor-skalár függvény ír le görbét, ezért először e függvényekkel kapcsolatos fogalmakat és összefüggéseket foglaljuk össze.



10.1. ábra.

Egyváltozós (vagy egy-paraméteres) vektor-skalár függvényt kapunk, ha a valós számok egy $a \leq t \leq b$ halmazának minden pontjához hozzárendelünk egy $r(t)$ vektort.

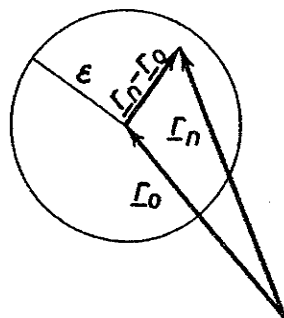
A vektor-skalár függvényt általában koordinátafüggvényeivel, vagyis a következő alakban adjuk meg:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}x(t) + \underline{j}y(t) + \underline{k}z(t).$$

A vektoroknak egy $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n, \dots$ halmazát vektorsorozatnak nevezzük.

Az $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n, \dots$ vektorsorozat konvergencia és határértéke (limesze) az $\underline{r}_0$ vektor (jelölése: $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{r}_n = \underline{r}_0$), ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $N(\varepsilon)$ szám, hogy $|\underline{r}_n - \underline{r}_0| < \varepsilon$, ha csak $n > N(\varepsilon)$.

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a vektorokat közös kezdőpontból indítva a vektorsorozat $n > N(\varepsilon)$ indexű elemei az $\underline{r}_0$ vektor végpontja körüli ε sugarú gömb belsőjébe mutatnak (10.2. ábra).



10.2. ábra.

Vektor-skalár függvény határértéke

A vektor-skalár függvény határértékének fogalmára két — kimutathatóan egyenértékű — definíciót adunk.

I. Az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli határértéke az $\underline{r}_0$, ha bármely olyan $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ sorozatra, ahol t_n a t_0 -hoz tart ($t_n \neq t_0$) a megfelelő $\underline{r}(t_1), \underline{r}(t_2), \dots, \underline{r}(t_n), \dots$ vektorsorozat az $\underline{r}_0$ -hoz tart.

II. Az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli határértéke az $\underline{r}_0$, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy ha $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ és $(t \neq t_0)$, akkor $|\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)| < \varepsilon$.

A határérték jelölése:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}_0$$

Vektorsorozatok és vektorfüggvények konvergenciájához kapcsolódó geometriai fogalom az alakzatok konvergenciája.

Pontok sorozata konvergál egy P ponthoz, ha a pontok helyvektorai konvergálnak a P pont helyvektorához.

Egyenesek egy sorozata konvergál egy e egyeneshez (az e egyenes az egyenessorozat határhelyzete), ha az egyenesek pontjainak, illetőleg irányvektorainak egy-egy sorozata konvergál az e egyenes egy pontjához, illetőleg irányvektorához.

Síkok egy sorozata konvergál a σ síkhoz, ha a síkok pontjainak, illetőleg normálvektorainak egy-egy sorozata konvergál a σ sík egy pontjához, illetőleg normálvektorához.

Körök egy sorozata konvergál egy k körhöz, ha a körök középpontjai, sugarai, illetve síkjai konvergálnak a k kör középpontjához, sugarához, illetve síkjához.

Vektor-skalár függvény folytonossága

Az $\underline{r}(t)$ függvényt a t_0 helyen folytonosnak mondjuk, ha a t_0 helyen van határértéke és az a függvényértékkel egyenlő: $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}(t_0)$.

Kimutatható, hogy az $\underline{r}(t)$ függvény pontosan akkor folytonos a t_0 helyen, ha koordinátafüggvényei is folytonosak a t_0 helyen.

Folytonos vektor-skalár függvények összege, különbsége, skaláris- és vektoriális szorzata, valamint folytonos skalár-függvénnyel való szorzata is folytonos.

Vektor-skalár függvény differenciálhatósága

Az $\underline{r}(t)$ függvény a $t = t_0$ helyen differenciálható (deriválható), ha a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}$$

határérték létezik. Ezt a határértéket mondjuk az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli differenciálhányadosának vagy deriváltjának.

Jelölése: $\frac{d\underline{r}(t)}{dt}$ vagy $\dot{\underline{r}}(t)$. Ha a $t = t_0$ helyen vesszük a deriváltat, akkor $\frac{d\underline{r}(t_0)}{dt}$, illetve $\dot{\underline{r}}(t_0)$ a derivált jelölése.

A derivált definíciójából következik, hogy $\underline{r}(t) = \underline{c}$ (áll.) függvény deriváltja a 0.

Levezethetők a következő differenciálási szabályok:

- a) $\frac{d}{dt}(\underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t)) = \dot{\underline{r}}_1(t) + \dot{\underline{r}}_2(t)$,
- b) $\frac{d}{dt}(c\underline{r}(t)) = c\dot{\underline{r}}(t)$ (c állandó szám),
- c) $\frac{d}{dt}[f(t)\underline{r}(t)] = \dot{f}(t)\underline{r}(t) + f(t)\dot{\underline{r}}(t)$ ($f(t)$ skalárfüggvény),
- d) $\frac{d}{dt}[\underline{r}_1(t)\underline{r}_2(t)] = \dot{\underline{r}}_1(t)\underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t)\dot{\underline{r}}_2(t)$,
- e) $\frac{d}{dt}[\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)] = \dot{\underline{r}}_1(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \dot{\underline{r}}_2(t)$.

Láncszabály

$$\text{Ha } t = t(\tau), \text{ akkor } \frac{d}{d\tau} \underline{r}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}.$$

Példaként megmutatjuk, hogy az $\underline{r}(t)$ függvényre vonatkozó differenciálási szabályok alkalmazásával hogyan lehet az $|\underline{r}(t)|$ deriváltját előállítani:

$$|\underline{r}(t)|^2 = (\underline{r}(t))^2$$

tehát

$$\frac{d}{dt}|\underline{r}(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\underline{r}(t))^2$$

azaz

$$2|\underline{r}(t)| \frac{d}{dt}|\underline{r}(t)| = 2\underline{r}(t)\dot{\underline{r}}(t).$$

Innen

$$\frac{d}{dt}|\underline{r}(t)| = \frac{\underline{r}(t)}{|\underline{r}(t)|} \dot{\underline{r}}(t) = \underline{r}^0 \dot{\underline{r}}.$$

Állítsuk elő az $\underline{r}(t) = \underline{i}\cos^2 t + \underline{j}t \sin t + \underline{k}t^2$ függvény derivált függvényét. A koordinátafüggvényeket deriválva

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(-2\cos t \sin t) + \underline{j}(\sin t + t \cos t) + \underline{k}2t$$

adódik.

Megjegyzés: A deriválás eredményeként kapott függvények folytonossága és differenciálhatósága ismét kérdés-ként merülhet fel. Ha az $\underline{r}(t)$ függvény differenciálható,

akkor második deriváltját $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ -vel s í.t. $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ -vel jelöljük a harmadik deriváltat. A gyakorlati igényeknek általában megfelel, ha a vizsgált görbéket leíró $\mathbf{r}(t)$ függvényekről feltesszük, hogy háromszor folytonosan differenciálhatók és $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ a vizsgált intervallumon.

Görbék ívhossza. Áttérés az ívhossz szerinti paraméterezésre

Az $a \leq t \leq b$ intervallumon értelmezett $\mathbf{r}(t)$ által meghatározott görbét rektifikálhatónak mondunk, ha az $a = t_0 < t_1 <$

$t_2 < \dots < t_n = b$ paraméterekhez $\mathbf{r}(t)$ által rendelt $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok (10.3. ábra) által meghatározott törött vo-

nalak $\sum_{i=0}^{n-1} P_i P_{i+1}$ hosszai-

nak létezik határértéke, amidőn a maximális $P_i P_{i+1}$

húr hossza is 0-hoz tart.

Ezt a határértéket nevezzük a megfelelő görbedarab s ív-hosszának:

$$s = \lim_{\max P_i P_{i+1} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n P_i P_{i+1}.$$

Az általunk vizsgált görbéknek van ívhosszuk és

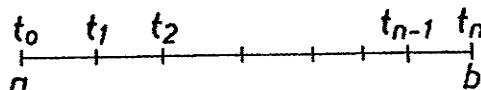
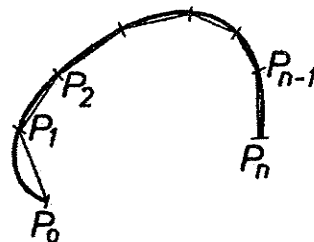
$s = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}| dt$ -ből számítható ki. A feltételeinknek eleget tevő görbék esetében az $s(t)$ ívhosszfüggvénynek van inverze, tehát létezik egy $t(s)$ függvény, amivel elvben minden $\mathbf{r}(t)$ függvényünkénél át tudunk térni az ívhossz szerinti paraméterezésre.

Az ívhossz szerinti paraméterezéssel felírt vektorfüggvény $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ alakú, a deriváltakat pedig $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$ -vel jelöljük.

Vektor-skalár függvény deriváltjának geometriai jelentése

Az $\mathbf{r}(t)$ által leírt görbe érintője az $\mathbf{r}(t_0)$ helyvektorú P görbepontban a $\overrightarrow{PQ}$ határhelyzeteként jön létre, midőn a Q pont a P -hez tart (10.4. ábra).

A $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$, tehát



10.3. ábra.

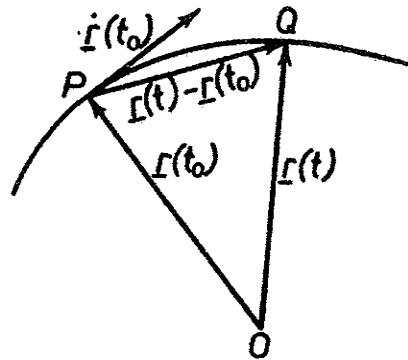
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\underline{r}}(t_0)$$

vektor az $\underline{r}(t)$ függvény deriváltja a P pontban éppen az érintővektor.

Az imént mondottak függetlenek a paraméterezéstől. Az ívhossz szerinti paraméterezés esetén megmutatható, hogy az $\underline{r}'(s)$ érintővektor abszolút értéke $|\underline{r}'(s)| = 1$, tehát a helytől függetlenül egységvektor a $\underline{t} = \underline{r}'$, amelyet általános pa-

raméterezés esetén $\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|}$

állíthatunk elő.



10.4. ábra.

Kísérő triéder

Látható, hogy $(\underline{r}')^2 = \dot{t}^2 = 1$ alapján ennek deriváltja $2\underline{r}'\underline{r}'' = 2\dot{t}\underline{t}' = 0$, ami $\underline{t}$ és $\underline{t}'$ merőlegességét jelenti. Az $\underline{r}'' = \underline{t}'$ vektor irányába mutató egységvektort a görbe $\underline{n}$ főnormális egységvektorának nevezzük.

A $\underline{t}' = G\underline{n}$ alakban állítható elő, és a G szorzószámot a görbe pontbeli görbületének nevezzük, amely az érintővektor „változási sebességét” mutatja.

A $\underline{t}$ és $\underline{n}$ vektorok síkját a görbe pontbeli simulósík-jának nevezzük. Általános paraméterezés esetén az $\underline{t}$ és $\underline{n}$ vektorok a simulósíkban vannak.

Ha a kinematikában szokásos módon az $\underline{r}(t)$ -ben szereplő t paraméter az idő, akkor a sebességvektor $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v} \cdot \underline{t}$, a gyorsulásvektor $\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a} \cdot \underline{t} + G\underline{v} \cdot \underline{n}$ alakban írható fel, ahol $\underline{v}$ a pályamenti sebességet, a $\underline{a}$ pályamenti gyorsulást és G a térgörbe görbületét jelenti. (A görbületet később tárgyaljuk.)

A $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$ szorzattal kapjuk a simulósík normális egységvektorát. A $\underline{b}$ vektort a görbe binormális egységvektorának nevezzük.

A görbe pontjaihoz rendelt $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ egységvektorok által kifeszített derékszögű triédert a görbe kísérő triéderének nevezzük.

A kísérő triéder lapsíkjai a simulósíkon kívül az $\underline{n}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott normálisík, és a $\underline{b}$ és $\underline{t}$ vektorok által meghatározott rektifikálósík.

A kísérő triéder $\underline{b}$, illetve $\underline{n}$ vektorának általános paraméterezés esetén való előállítására:

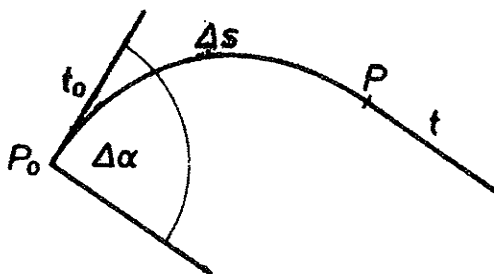
$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|} \quad \text{illetve} \quad \underline{n} = \frac{(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}}{|(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}|}.$$

Ezek ismeretében a kísérő triéder élegyeneseinek egyenletrendszerre, illetve a kísérő triéder lapsíkjaiknak egyenlete könnyen felírható.

Görbe görbülete és torziója

A simulósíkot síkok határhelyzeteként is értelmezhetjük: ha P_1, P_2, P_3 a görbe három, nem egy egyenesbe eső pontja, és az általuk meghatározott sík határhelyzetét vizsgáljuk, midőn P_1, P_2, P_3 pont a görbe P_0 pontjához tart, akkor a határhelyzet a P_0 ponthoz tartozó simulósík.

A görbe görbületét a P_0 pontban a következőképpen is értelmezhetjük: (a $t' = G$ korábbi definícióval egyenértékűen). Legyen a görbe P_0 pontbeli érintője t_0 és egy P pontbeli érintő t . Jelölje $\Delta\alpha$ a t és t_0 érintők szögét, Δs pedig a P_0P görbeív



10.5. ábra.

hosszát (10.5. ábra).

Nyilván Δs nullához tart,

ha a P ponttal a P_0 -hoz közeledünk. A görbe görbületének a $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = G$ határértéket nevezzük.

A görbületet általános paraméterek esetén a

$$G = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

kifejezésből számíthatjuk ki. Az $R = \frac{1}{G}$ -t a görbe görbületi sugarának nevezzük. Azt a kört, amelynek síkja a simulósík, középpontja pedig a főnormális irányában a görbeponttól R távolságra van, a görbe görbületi körének, a kör középpontját pedig a görbületi középpontnak nevezzük.

A görbületi középpontba mutató $\underline{c}$ helyvektor

$$\underline{c} = \underline{r}(t_0) + R\underline{n} = \underline{r}(t_0) + \frac{1}{G}\underline{n}.$$

A görbére jellemző másik mennyiség a simulósík változási sebességét mutatja. Mithogy a simulósík normálisa a binormális, és a binormális ívhossz szerinti deriváltja

$$\underline{b}' = -T\underline{n}$$

alakban írható fel, a T szorzószámot nevezzük a görbe torziójának (vagy csavarodásának).

A torzió abszolút értéke a binormális $\Delta\beta$ szögváltozása és a hozzá tartozó Δs ívhossz hányadosának határértékeként is megkapható:

$$|T| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}.$$

A torziót általános paraméterezés esetén a következő alakban írhatjuk fel:

$$T = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

Frenet formulák

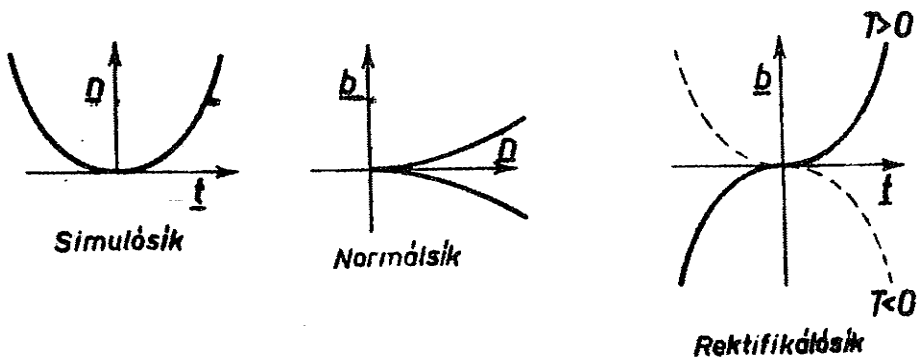
Ivhossz szerinti paraméterezés esetén a kisérő triéder élvektorainak deriváltjai a görbület és torzió segítségével az alábbi módon adódnak:

$$\underline{t}' = G\underline{n}$$

$$\underline{n}' = -G\underline{t} + T\underline{b}$$

$$\underline{b}' = -T\underline{n}.$$

A görbe pontjának környezetében való viselkedését jól szemlélteti, ha a ponthoz tartozó kisérő triéder lapjaira való merőleges vetületét megnézzük. Ezt szemlélteti a 10.6. ábra.



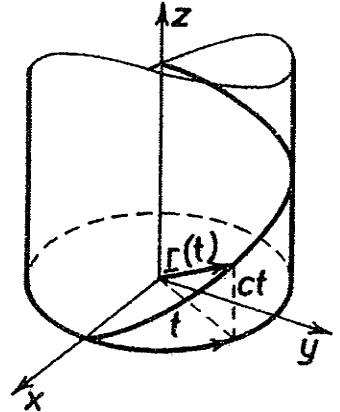
10.6. ábra.

Látható, hogy a görbe vetülete akkor csúszos görbe, ha a vetítési irány az érintővektor iránya.

A csavarvonal

A csavarvonal egy forgáshengeren mozgó pont pályagörbéje, amelynél a tengellyel párhuzamos elmozdulás arányos a tengely körüli szögelfordulással (10.7. ábra).

Eszerint az r sugarú hengerre írt csavarvonal koordinátás előállítására $x = r \cos t$; $y = r \sin t$; $z = ct$, ahol c ($c \neq 0$) az arányossági tényező. Egy menethez 2π szögelfordulás tartozik, tehát a teljes menetemelkedés $m = c2\pi$.



10.7. ábra.

Határozzuk meg a csavarvonal görbületét és torzióját:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(-r \sin t) + \underline{j}r \cos t + \underline{k}c,$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(-r \cos t) + \underline{j}(-r \sin t),$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(r \sin t) + \underline{j}(-r \cos t),$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{r^2 + c^2},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}cr \sin t - \underline{j}cr \cos t + r^2 \underline{k},$$

$$|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = \sqrt{r^2(r^2 + c^2)}, \quad \ddot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = cr^2.$$

Tehát

$$G = \frac{r}{r^2 + c^2} \quad \text{és} \quad T = \frac{c}{r^2 + c^2},$$

mindkettő független a pont helyétől, vagyis állandó.

Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = \underline{i}(t^2 - 1) + \underline{j}(t + 2) + \underline{k}(t^3 - t)$ görbe $t = 1$ pontjában a kísérő triéder élégyenesének egyenletrendszerét, a kísérő triéder lapsíkjainak egyenletét. Határozzuk meg a pontban a görbületet, a görbületi kör középpontját és a görbe torzióját.

$$\underline{r}(t) = \underline{i}(t^2 - 1) + \underline{j}(t + 2) + \underline{k}(t^3 - t) \quad \underline{r}(1) = 3\underline{j} \quad P(0, 3, 0)$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}2t + \underline{j} + \underline{k}(3t^2 - 1) \quad \dot{\underline{r}}(1) = 2\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 2\underline{i} + \underline{k}6t \quad \ddot{\underline{r}}(1) = 2\underline{i} + 6\underline{k}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{k} \quad \ddot{\underline{r}}(1) = 6\underline{k}$$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6\underline{i} - 8\underline{j} - 2\underline{k}$$

a binormális irányába mutató vektor: $(3, -4, -1)$

$$(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14\underline{i} - 16\underline{j} + 22\underline{k}$$

a főnormális irányába mutató vektor: $(-7, -8, 11)$

$$\text{Az érintő egyenes: } \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\text{A binormális egyenes: } \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$\text{A főnormális egyenes: } \frac{x}{-7} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z}{11}$$

$$\text{A simulósík: } 3x - 4(y - 3) - z = 0$$

$$\text{A normálsík: } 2x + (y - 3) + 2z = 0$$

$$\text{A rektifikálósík: } -7x - 8(y - 3) + 11z = 0$$

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad |\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$\ddot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = -12$$

Tehát a görbület $G = \frac{2\sqrt{26}}{27}$, a görbületi középpont:

$$\underline{n} = -\frac{7}{3\sqrt{26}} \underline{i} - \frac{8}{3\sqrt{26}} \underline{j} + \frac{11}{3\sqrt{26}} \underline{k} \quad \text{a főnormális egységvektor}$$

$$\frac{1}{G} \underline{n} = \frac{-189}{156} \underline{i} - \frac{216}{156} \underline{j} + \frac{297}{156} \underline{k} = -\frac{63}{52} \underline{i} - \frac{72}{52} \underline{j} + \frac{99}{52} \underline{k}$$

$$\underline{c} = -\frac{63}{52} \underline{i} + (3 - \frac{72}{52}) \underline{j} + \frac{99}{52} \underline{k}$$

$$\text{A torzió } T = \frac{-12}{104} = \frac{-3}{26}.$$

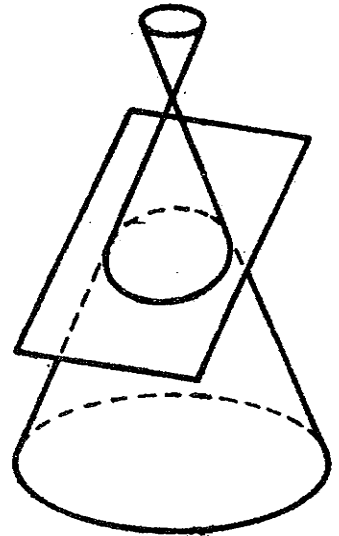
Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok: 126. old. - 132. old. 37-77. feladatokat és 122. old. - 125. old. 11-26. feladatokat.

Elméleti tananyag: Tankönyv 243-254. pontok.

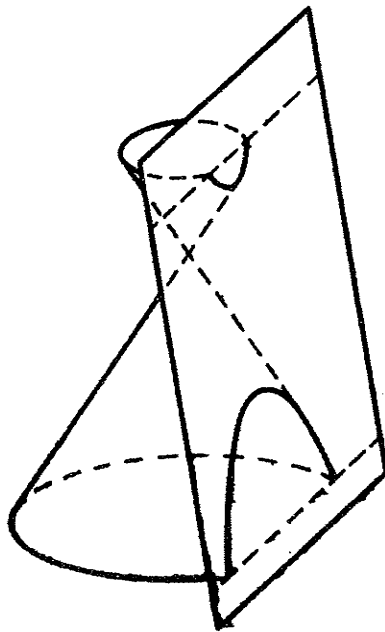
11. KÚPSZELETEK

Az ellipszist, a hiperbolát és parabolát közös néven kúpszeleteknek is szoktuk mondani. Ez az elnevezés onnan ered, hogy mindhárom görbe előállítható forgáskúp síkmetszeteként. Az összes ellipszis, hiperbola és parabola forgáskúp alkalmas síkkal való metszésével létrejön.

Ha a forgáskúpot olyan sík metszi el, amely nem megy át a kúp csúcsán és a kúp tengelyére sem merőleges, de a kúp valamennyi alkotóját metszi, akkor a metszetgörbe ellipszis (11.1. ábra).



11.1. ábra.

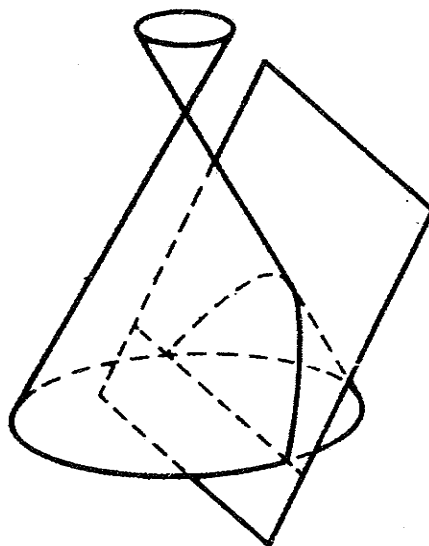


11.2. ábra.

Ha a forgáskúpot két alkotójával párhuzamos sík metszi, akkor a metszetgörbe hiperbola (11.2. ábra).

Ha a forgáskúpot olyan sík metszi el, amely csak egy kúpalkotót nem metsz, vagyis párhuzamos e kúpalkotóhoz tartozó érintősíkkal, akkor a metszetgörbe parabola (11.3. ábra).

A továbbiakban e görbék síkbeli származtatását is meg fogjuk adni, és azok alapján fogunk kúpszelet-szerkesztési feladatokat megoldani.



11.3. ábra.

Ellipszis

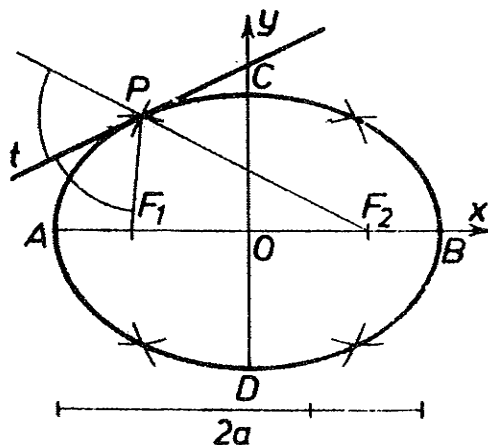
Ellipszisnek nevezzük a sík azon pontjainak összességét, amelyeknek két ponttól (az F_1 és F_2 fókuszoktól)

mért távolságösszege állandó. A távolságösszeg (jelölése: $2a$) mindig nagyobb a fókuszok F_1F_2 távolságánál (11.4. ábra). E definíció alapján szerkeszthetők az ellipszis pontjai. Az ellipszis pontjai az F_1F_2

egyenesre (nagytengetly egyenesre) és az F_1F_2

szakasz felező merőlegesére (kistengely egyenesre) szimmetrikusan adódnak. A két szimmetria tengely közös pontja az O középpont, amelyre centrálisan szimmetrikus az ellipszis.

Az ellipszisnek van két pontja A és B a nagytengetly egyenesén az O ponttól a távolságra. A kistengelyen levő ellipszis pontok az F_1 és F_2 fókuszoktól a távolságra levő C és D pontok. Az AB szakasz az ellipszis nagytengetlye, CD az ellipszis kistengelye ($CD = 2b$). Az



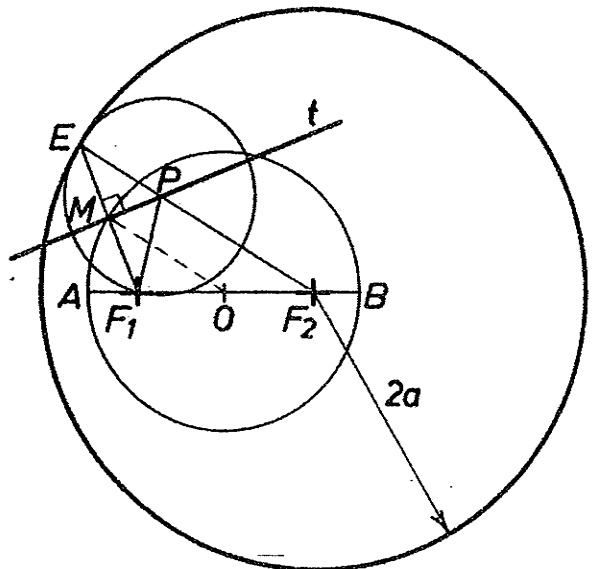
11.4. ábra.

ellipszis egy P pontját az F_1 és F_2 pontokkal összekötő szakaszok az ellipszis vezérsugarai.

Kimutatható, hogy az ellipszis P pontbeli t érintője a PF_1 és PF_2 vezérsugarak külső szögének a szögfelezője.

Ezzel a szár-maztatással egyenértékű a következő:

Az ellipszis a sík azon körközéppontjainak az összessége, amelyek egy adott F_2 középpontú $2a$ sugarú kört — az ún. ellenkört — érintenek, és átmennek a kör belsejében fekvő, de annak középpontjától különböző F_1 fókuszponton (11.5. ábra). Egy ilyen körközéppont a P pont, a hozzá tartozó kör az E ellenpontban érinti az ellenkört ($F_1P + F_2P = EP + F_2P = 2a$).



11.5. ábra

Az EF_1 szakasz felező merőlegese az ellipszis P pontbeli érintője. Az érintőnek az EF_1 szakasszal közös pontja M. Az EF_1F_2 háromszög és az MF_1O háromszög hasonló, és $EF_2 = 2MO$, tehát $MO = a$. (Az F_2 pontot az ellenkör középpontjának nevezzük.)

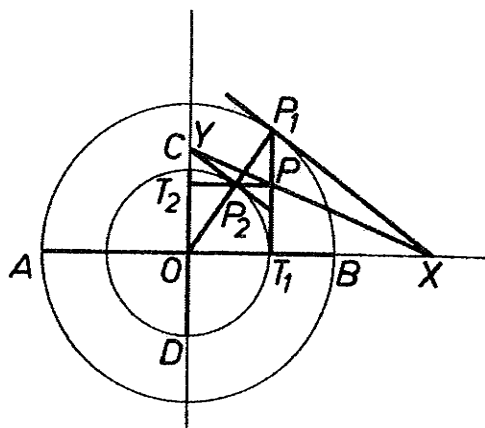
Az elmondottakból kiolvashatók az ellipszis érintőjére vonatkozó alábbi tulajdonságok:

a) Az F_1 fókuszhoz az érintőre vonatkozó tükörképe az ellenkörön levő E pont. Az E ellenpontot az ellenkör F_2 középpontjával összekötő egyenes az érintőt a P érintési pontban metszi.

b) Az F_1 fókuszhoz az érintőre állított merőleges M talppontja a középponttól $MO = a$ távolságra, tehát az O pont körüli a sugarú ún. főkörön van. A 11.5. ábrát, amelyből a fenti tulajdonságok kiolvashatók, az ellipszis alapábrájának mondjuk. Az ellipszis koordinátageometriai jellemzése a tengelyek által meghatározott x, y koordináta-rendszerben (l. 11.4. ábra) az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlettel, il-

végpont a $\bar{C}\bar{P}$ egyenes affin képével jelölhető ki. A $\bar{C}$ és C pontokban az érintők párhuzamosak az affinitás tengelyével.

A 11.8. ábrán az ellipszist AB nagy- és CD kistengelyével adtuk meg. A tengelyek fölé írt körrökkel megvalósítható a $\frac{b}{a}$ arányú zsugorítás: Vegyük a főkör egy OP_1 sugarát, amely a kistengely fölé írt ún. mellékkört a P_2 pontban metszi. A P_1 ponton át a kistengellyel, P_2 ponton át a nagytengellyel párhuzamosat húzva, a kapott P metszéspont az ellipszis pontja. A 11.8. ábrán u. is leolvasható,



11.8. ábra.

hogy $\frac{PT_1}{P_1T_1} = \frac{OP_2}{OP_1} = \frac{b}{a}$. Az ellipszisérintő a P_1X körérintő affin képe PX . Ezt a szerkesztést az ellipszispontok ún. két-körös szerkesztésének nevezzük.

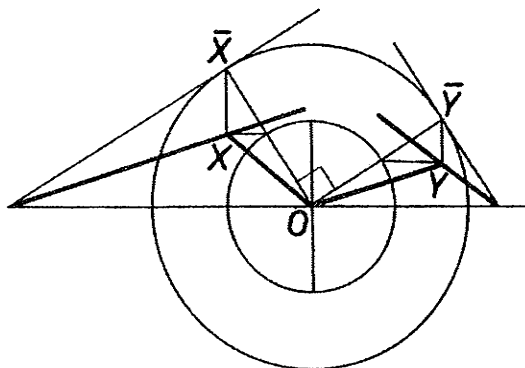
Ugyancsak a 11.8. ábrából leolvasható az is, hogy az ellipszis egy CD tengelyű affinitással is előállítható. Ebben az affinitásban a mellékkör pontjaiból nagytengely irányú, $\frac{a}{b}$ arányú nyújtással jönnek létre az ellipszis pontjai.

U. is $\frac{PT_2}{P_2T_2} = \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{a}{b}$; a mellékkör P_2Y érintőjének megfelel

az ellipszis PY érintője, vagyis az Y, P, X pontok egy egyenesen vannak.

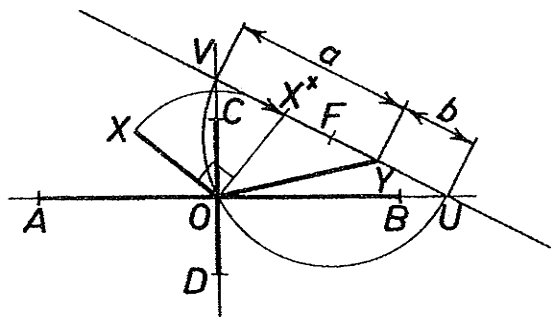
Ha $O\bar{X}$ és $O\bar{Y}$ a főkör két merőleges félátmérője, akkor ezek affin képe az ellipszis OX és OY két félátmérője. Végpontjaikban húzott érintők a másik félátmérővel párhuzamosak (11.9. ábra).

Az ilyen félátmérőket, illetve át-mérőpárt konjugált átmérőknek nevezzük.



11.9. ábra.

Az ellipszist egy konjugált átmérő-pár meghatározza. A Rytz-féle szerkesztéssel az ellipszis OX és OY konjugált féltátmérőiből az ellipszis tengelyeit megkapjuk (11.10. ábra). A szerkesztést (bizonyítása nélkül) a következőképpen végezzük el: Az OX féltátmérőt 90° -kal elfor-

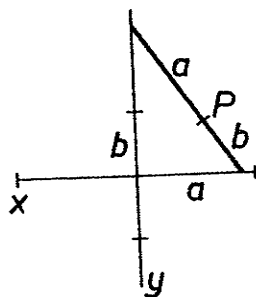


11.10. ábra.

gatjuk, a kapott X^x és az Y által meghatározott szakasz F felezéspontja körül az O ponton át kört rajzolunk, amely az X^xY egyenest az U és V pontokban metszi. Az OU, illetve OV egyeneseken lesz az ellipszis nagy-, illetve kistengelye. A félnagytengely hosszát a $VY = a$, a félkistengelyét pedig az $UY = b$ adja. Ezeket felmérve kapjuk az A, B, illetve C, D tengelyvégpontokat.

A Rytz szerkesztés elemzéséből adódik az ellipszis megrajzolására alkalmas eszköz, az ún. ellipszográf geometriai alapja (11.11. ábra).

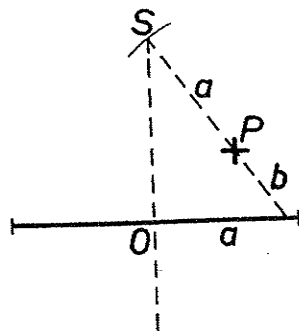
Ha az x és y egymásra merőleges egyenesekre támaszkodik egy $a + b$ hosszúságú szakasz (egyik végpontjával x-re, másik végpontjával y-ra illeszkedik), akkor a szakaszon az y egyenesen levő ponttól a távolságra levő P pont egy olyan ellipszis pontja, amelynek nagytengele a x egyenesen van és $2a$ hosszúságú, kistengelye pedig az y egyenesen van és $2b$ hosszúságú.



11.11. ábra.

Az iméntiek megfordításával meg tudjuk szerkeszteni egy olyan ellipszisnek a kistengelyét, amelynek ismert a nagytengele és egy pontja (11.12. ábra).

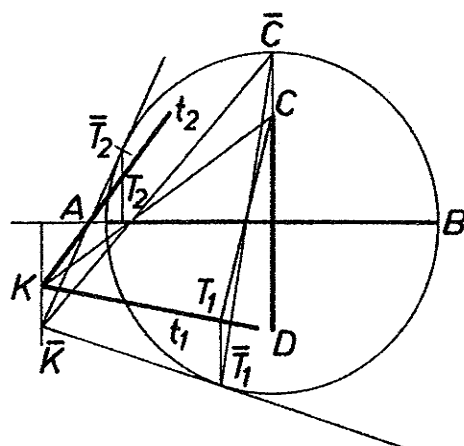
A nagytengele felező merőlegese a kistengely egyenese. Ezt a P körül a sugarú körrel metszve (S) megkapjuk a P ponton átmenő $a + b$ hosszúságú, és a tengelyekre támaszkodó szakasz SP helyzetét, amelyről lemérhető a b fél-kistengelyhossz.



11.12. ábra.

A 11.13. ábrán megadtuk az ellipszist AB nagy- és CD kistengelyével, továbbá egy K pontot. Szerkesszük meg a K pontból az ellipszishoz húzható érintőket.

Az ellipszishez az AB tengelyű affinitás egy AB átmérőjű kört rendel, C affin képe $\bar{C}$. A K affin képét a CK egyenes megfelelője jelöli ki: $\bar{K}$. A $\bar{K}$ pontból a körhöz húzott $\bar{K}\bar{T}_1$, illetve $\bar{K}\bar{T}_2$ érintők affin megfelelőit megszerkesztve kapjuk az ellipszis t_1 , illetve t_2 érintőit a T_1 , illetve T_2 érintési pontokkal.

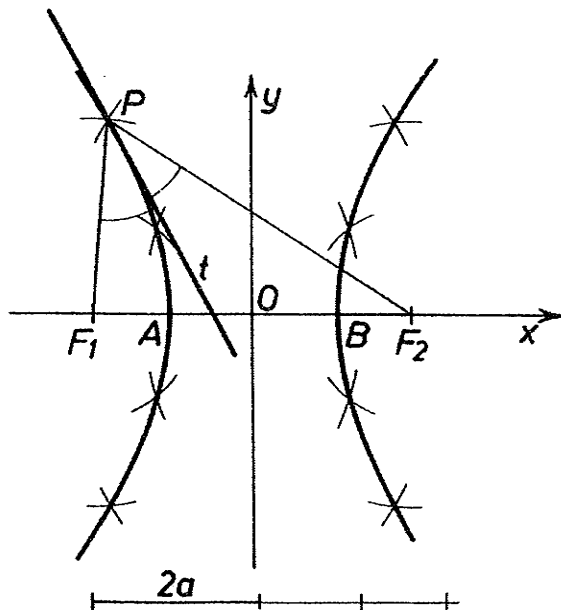


11.13. ábra.

Hiperbola

Hiperbolának nevezzük a sík azon pontjainak összességét, amelyeknek két ponttól (az F_1 és F_2 fókuszoktól) mért távolságaik különbségének abszolút értéke állandó.

Ez a távolságkülönbség (jelölése: $2a$) mindig kisebb a fókuszok F_1F_2 távolságánál (11.14. ábra). A definíció alapján szerkeszthetők a hiperbola pontjai. A hiperbola pontjai az F_1F_2 egyenesre (valós tengely egyenese) és az F_1F_2 szakasz felező merőlegesére (képzetes tengely) szimmetrikusan adódnak. A két szimmetria tengely közös pontja a hiperbola O középpontja, amelyre a hiperbola centrálisan szimmetrikus. A hiperbolának a valós tengelyen van két pontja: A és B a hi-



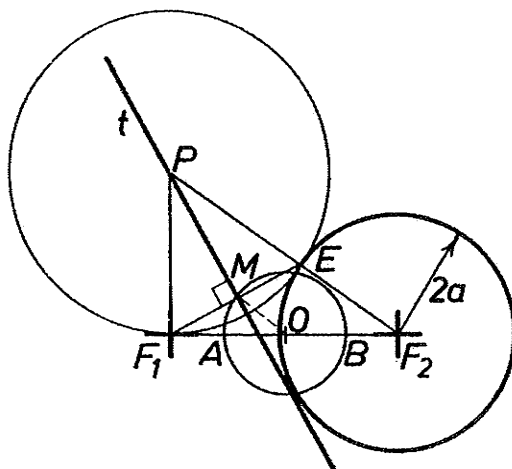
11.14. ábra.

perbola csúcspontjai, amelyek O -tól a távolságra vannak. A képzetes tengelyen nem lehet hiperbolapont. A hiperbola egy P pontját az F_1 és F_2 pontokkal összekötő szakaszokat vezérsugaraknak nevezzük.

Kimutatható, hogy a hiperbola P pontbeli t érintője a PF_1 és PF_2 vezérsugarak szögfelezője.

A hiperbola is származtatható az ellipszishez hasonló módon: A hiperbola a sík azon körközpontjainak az összessége, amelyek egy F_2 középpontú $2a$ sugarú kört érintenek, és átmennek a körön kívül fekvő F_1 fókuszpontra. Az F_2 középpontú kör a hiperbola ellenköre (11.15. ábra).

A P pont egy ilyen körnek a középpontja, a kör pedig az E ellenpontban érinti az ellenkört. ($|PF_2 - PF_1| = |PF_2 - PE| = 2a$). Az



11.15. ábra.

EF_1 szakasz felező merőlegese a hiperbola P pontbeli t érintője, amely az EF_1 szakaszt az M pontban metszi. Az EF_1F_2 háromszög és az F_1MO háromszögek hasonlóak, és $EF_2 = 2MO$, vagyis $MO = a$.

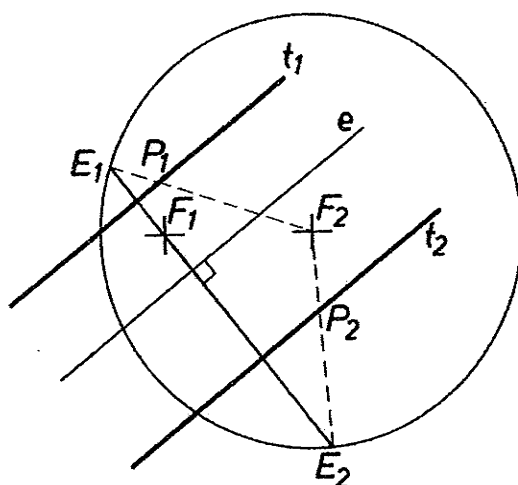
Az ellipszishöz levont következtetések a hiperbolára is teljesülnek:

- Az F_1 fókuszhoz az érintőre vonatkozó tükröképe az ellenkörtől levő E pont. Az E pontot az ellenkör F_2 középpontjával összekötő egyenes az érintőt a P érintési pontban metszi.
- Az F_1 fókuszról az érintőre állított merőleges egyenes M talppontja a középponttól $MO = a$ távolságra, tehát az O pont körül a sugarú ún. főkörön van. A 11.15. ábrát a hiperbola alapábrájának mondjuk.

Az ellipszis és hiperbola definíciójának az "ellenkörös" formába való átfogalmazása azért igen szerencsés, mert az érintővel és fókusszal kapcsolatosan ugyanolyan tulajdonságok állapíthatók meg.

Példaképpen nézzük meg, hogyan lehet egy ellenkörével és F_1 fókuszával adott kúpszelethez az adott e irány-nyal párhuzamos érintőt szerkeszteni.

A feladatot az alapábrán megadottaknak gondoljuk és látjuk, hogy az F_1 pontból (az érintőre, ill.) az érintő irányú egyenesre állított merőleges az ellenkörből olyan E ellenpontot metsz ki, hogy EF_1 felező merőlegese a kúpszelet érintőjét adja, amelyen az F_2E egyenes jelöli ki az érintési pontot. A 11. 16. ábra mutatja, hogy a feladatnak két megoldása van. Az ábrán ellipszisre szerkesztettük meg a feladatot.



11.16. ábra.

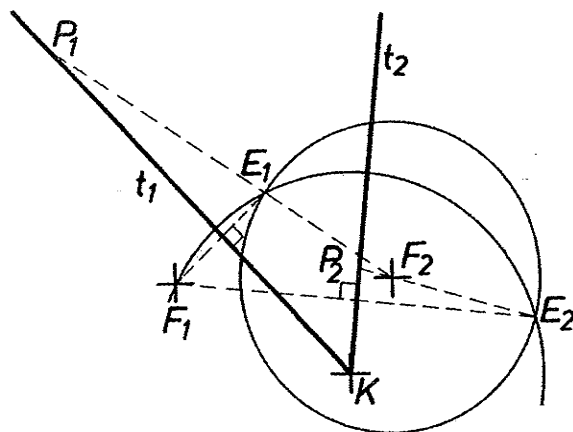
Másik példánkban az ellenkörével és F_1 fókuszával adott kúpszelethez a K pontból szerkesztünk érintőt.

Ismét az alapábrából indulunk ki, annak t érintőjére gondoljuk a K pontot. Látható, hogy a K pont egyenlő távol van az F_1

fókuszától és a P érintési ponthoz tartozó E ellenponttól. Ebből már következik feladatunk megoldása, hiszen az F_1 ponton ke-

resztülhaladó K középpontú kör

az ellenkört az E_1 és E_2 pontokban metszi. Az E_1F_1 , illetve az E_2F_1 szakaszok K ponton keresztülhaladó felező merőlegesei a t_1 , illetve t_2 érintők, amelyeken a P_1 , illetve P_2 érintési pontokat az F_2E_1 , illetve F_2E_2 egyenesek metszik ki. A 11.17. ábrán a

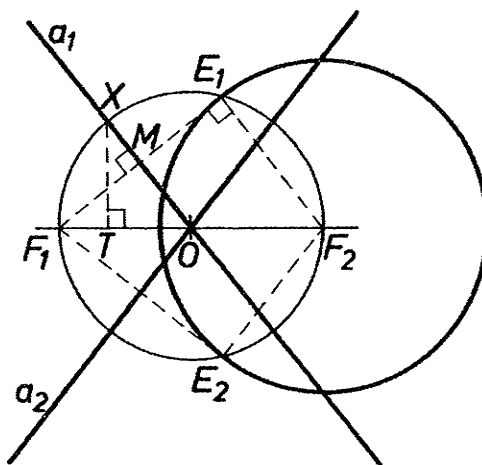


11.17. ábra.

feladatot hiperbolára oldottuk meg.

A két példa után most térjünk vissza a hiperbolához, és szerkesszünk hozzá az O középpontból érintőt (11.18. ábra).

Az előző feladat megoldása szerint az O pont körül F_1 ponton áthaladó kör az ellenkört E_1 és E_2 pontokban metszi. Az F_1E_1 , illetve F_1E_2 szakaszok O ponton áthaladó a_1 , a_2 felező merőlegesei a kere-sett érintők, amelyekkel viszont az F_2E_1 , illetve F_2E_2 egyenesek párhuzamosak, mert az E_1 és E_2 pontokat kijelölő kör egyúttal az F_1F_2 szakasz fölé írt Thalesz-kör.



11.18. ábra.

Ennek következtében az a_1 és a_2 érintőkön nincs végesben fekvő érintési pont, ellenben a hiperbola minden határon túl közeledik az a_1 , illetve a_2 egyenesekhez. Ezeket az egyeneseket a hiperbola aszimptotáinak nevezzük.

A 11.18. ábrából leolvasható, hogy az aszimptota a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

a) Az F_1 fókuszhoz az aszimptotára vonatkozó tükörképe az ellenkört olyan E pontja, amelyben az F_1E egyenes az ellenkört érinti.

b) Az F_1 fókuszhoz az aszimptotára állított merőleges M talppontja a hiperbola főkörén van, és az F_1M egyenes a főkört érinti. (U.is $F_1F_2E_1$ és F_1OM háromszögek hasonlóak, $OM = a$.)

Ha az a_1 aszimptota és az F_1F_2 szakasz fölé rajzolt O középpontú kör X metszéspontjából a valós tengelyre merőlegest állítunk, akkor a kapott T talppontról kimutatható, hogy a hiperbola csúcspontja (u.is F_1MO és XTO háromszögek egybevágók és $OM = OT = a$) a TX egyenes pedig a csúcserintő. Ennek alapján a fókuszok és csúcspontok ismeretében a hiperbola aszimptotái a következőképpen szerkeszthetők meg:

Megrajzoljuk a hiperbola 0 középpontja körül a fókuszokon áthaladó kört és legalább az egyik csúcserintőt (11.19. ábra). Ezek közös X_1 , illetve

X_2 pontját az 0 ponttal összekötő egyenesek a hiperbola aszimptotái.

Az X_1A szakasz hosszát b -vel (a hiperbola képzetes féltengelyének hossza) jelölve a hiperbola koordinátageometriai jellemzése a tengelyek által meghatározott x, y koordinátarend-

szerben az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlettel történik. Ehhez a hiper-

bolához kapcsolhatunk egy másik hiperbolát, amelynek aszimptotái az előbbivel azonosak, de valós tengelye az y tengely, a valós tengely hossza $2b$ és így a képzetes tengely $2a$ hosszúságú. Ezt az előzőhöz konjugált hiperbolának nevezzük, egyenlete pedig

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolát paraméteres előállításban vagy

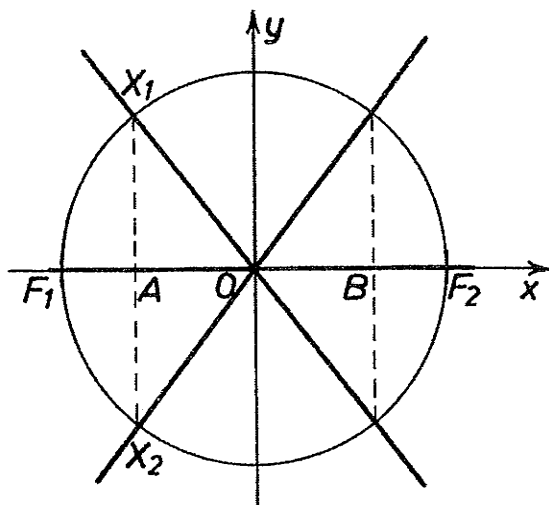
$x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \operatorname{tg} t$ ($0 \leq t < 2\pi$; $t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$) alakban,

vagy az $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$ és $x = -a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$ ($-\infty < t < \infty$) formában adhatjuk meg.

Parabola

Parabolának nevezzük a sík azon pontjainak az összegét, amelyek egy F ponttól (fókusz) és egy d egyenestől (direktrix vagy vezéregyenes) egyenlő távol vannak.

E definíció alapján szerkeszthetők a parabola pontjai. Az F ponton át d -re merőleges egyenesen egy ilyen pont van, ez a parabola C csúcspontja. A többi parabolapont a CF egyenesre szimmetrikusan adódik; a CF egyenest a parabola tengelyének nevezzük (11.20. ábra). A C ponton áthaladó d -vel párhuzamos egyenes a parabola csúcserintője. Az F fókusz és a d direktrix távolságát p -vel jelöljük, és a parabola paraméterének nevezzük.



11.19. ábra.

Egy d egyenes és egy rajta kívül fekvő F pont egyértelműen meghatározzák a parabolát. Másfelől pedig egy egyenesből és egy pontból álló alakzat hasonló egy másik egyenes és egy másik pont által meghatározott alakzathoz, mégpedig távolságaik aránya adja meg a hasonlóság arányát. Ezekből következik, hogy az egyenesek és a megfelelő pontok által meghatározott parabola is hasonló, tehát valamennyi parabola hasonló.

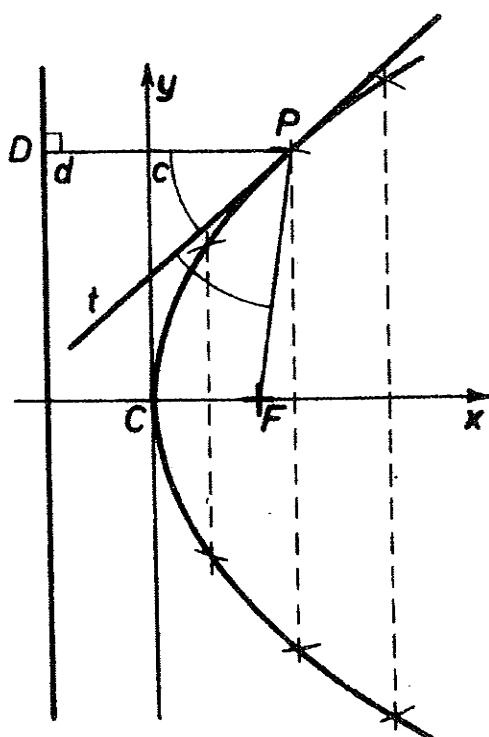
A parabola koordinátageometriai jellemzése a tengelye és csúcsérintője által meghatározott koordinátarendszerben az $y^2 = 2px$ egyenlettel adható meg.

A parabola egy P pontjához tartozó t érintőjéről kimutatható, hogy a P pontból a direktrixre állított merőleges PD egyenes és a PF által meghatározott szög felezője (l. 11.20. ábra).

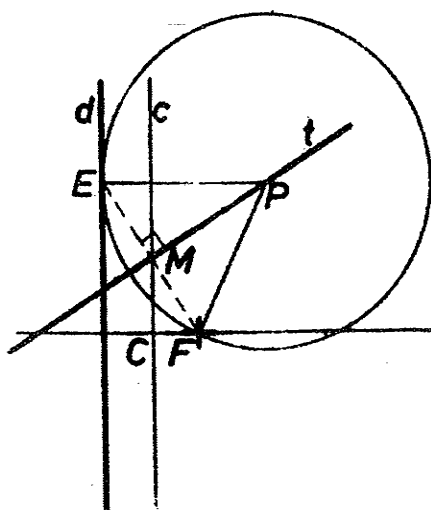
A parabola származtatása az ellipszis, illetve hiperbola ellenkörös definíciójához hasonlóan úgy történik, hogy az ellenkör, illetve főkör szerepét a direktrix, illetve csúcsérintő veszik át.

A parabola a sík azon körközepontjainak az összessége, amelyek egy d egyenest érintenek és átmennek egy azon kívül fekvő F ponton (11.21. ábra).

A P parabola pont középpontú F ponton áthaladó kör a d egyenest az E ellenpont-ban érinti. Az F fókusz középpontú $1/2$ arányú centrális hasonlóság az E ellenpontot az M pontba, a direktrixet pedig a csúcsérintőbe viszi.



11.20. ábra.



11.21. ábra.

Ezekből leolvashatók a parabolaérintők tulajdonságai:

a) Az F fókuszhoz az érintőre vonatkozó tükörképe a direktrixen levő ellenpont. Ebben az ellenpontban a direktrixre állított merőleges az érintőt az érintési pontban metszi.

b) Az F fókuszhoz az érintőre állított merőleges talppontja a csúcse érintőn van. (A 11.21. ábra a parabola alap-ábrája.)

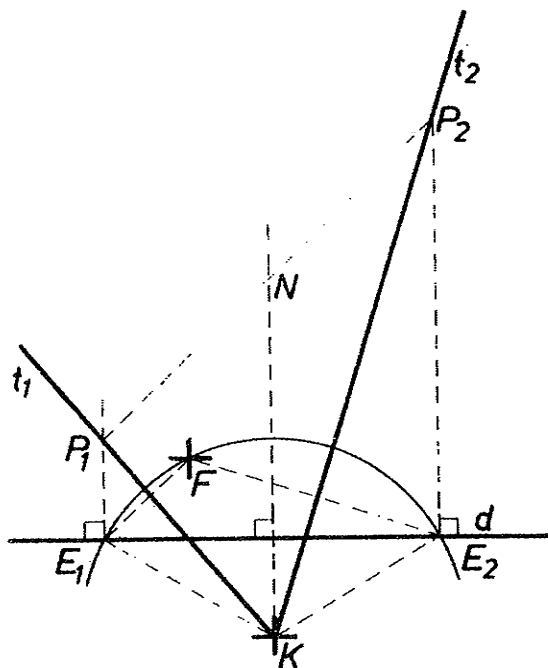
Szerkesszünk a K külső pontból a d direktrix és F fókusz által meghatározott parabolához érintőt:

Gondoljuk a K pontot az alapábra t érintőjére. Látható, hogy az E ellenpont és F egyenlő távol van K -tól. Ezért K pont körül F ponton át rajzolt körrel a d direktrixből kijelöljük az E_1 és E_2 ellenpontokat (11.22. ábra). Az E_1F , illetve E_2F szakaszok K -n átmenő felező merőlegesei t_1 , illetve t_2 érintők, amelyeken az E_1 , illetve E_2 pontban d -re merőleges egyenesek jelölik ki a P_1 , illetve P_2 érintési pontokat.

A 11.22. ábrából kiolvasható, hogy a KE_1E_2 háromszög egyen-

lőszárú, tehát a K -ból d -re állított merőleges az E_1E_2 felező merőlegese és egyben az E_1P_1 , illetve E_2P_2 egyenesek középpárhuzamosa, amely felezi e két egyenes pontjait összekötő szakaszokat, így a P_1P_2 -t is.

Tehát ha adott a parabola két érintője (t_1, t_2) az érintési pontokkal (P_1, P_2), akkor az érintők közös K pontját a P_1P_2 szakasz N felezőpontjával összekötő egyenes párhuzamos a parabola tengelyével. Ezt több parabolára vonatkozó feladatban fel tudjuk használni. A parabola tengelye



11.22. ábra.

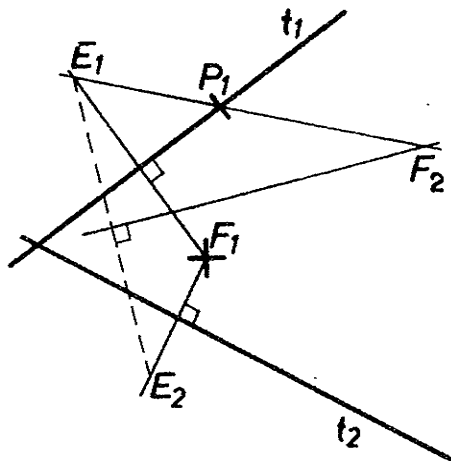
(x tengely) és csúcsérintője (y tengely) által meghatározott koordinátarendszerben a parabola egyenlete: $y^2 = 2px$ alakban írható fel, ahol p a fókusz és a diretrix távolsága. Ennek alapján a parabola paraméteres előállítása

$x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$ ($-\infty < t < \infty$) alakban írható fel.

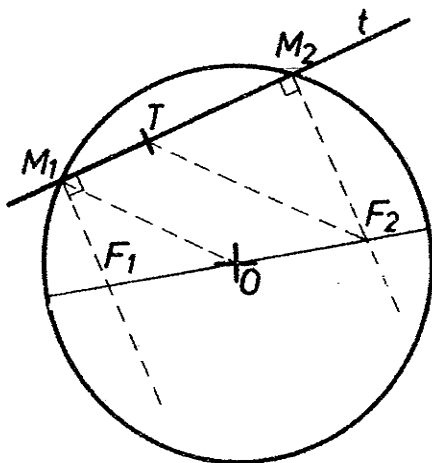
Feladatok:

- 1) Adott egy kúpszelet egyik fókusza (F_1), egyik érintője (t_1) az érintési ponttal (P_1) és egy másik érintő (t_2). Szerkesszük meg a másik fókuszot.

Megoldás: Az F_1 fókusz mindkét érintőre tükrözzük, az ellenkör E_1 , illetve E_2 pontját kapjuk (11.23. ábra). Az F_2 fókusz az E_1E_2 felező merőlegesének és az E_1P_1 egyenesnek a metszéspontja ($2a = E_1F_2$).



11.23. ábra.



11.24. ábra.

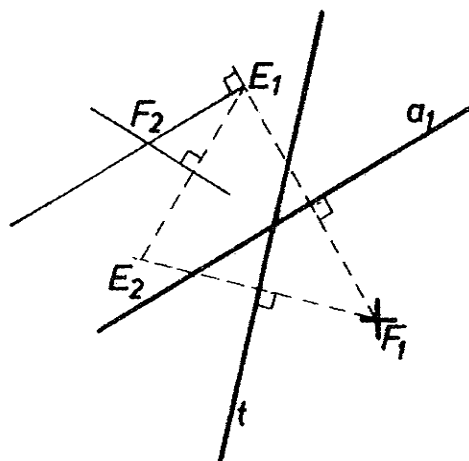
- 2) Adott egy kúpszelet O középpontja, főköre és egy t érintője a T érintési ponttal. Szerkesszük meg a kúpszelet fókuszait (11.24. ábra).

Megoldás: A főkör és az érintő M_1 , M_2 metszéspontjait t -re állított merőlegesek átmennek a fókuszokon. Az O -val párhuzamos T ponton átmenő egyenes kijelöli az F_1 fókuszot (1. alapábra).

Az O tengely kimetszi az F_2 fókuszot.

- 3) Adott egy hiperbola egyik fókusza F_1 , egyik aszimptotája (a_1) és egy érintője (t). Szerkesszük meg a másik fókust (11.25. ábra).

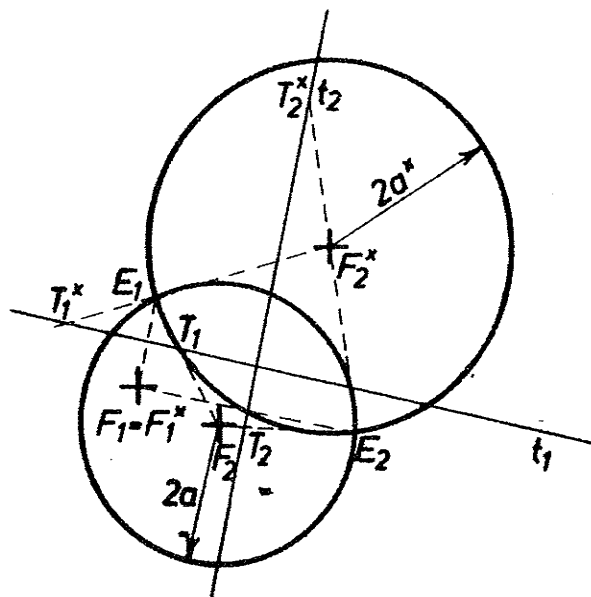
Megoldás: Az F_1 fókuszt tükrözzük a_1 -re és t -re, a kapott E_1 , illetve E_2 ellenpontok felező merőlegese, valamint az F_1E_1 -re E_1 pontban állított merőleges az F_2 fókuszban metszik egymást.



11.25. ábra.

- 4) Adott két kúpszelet, egyik fókuszuk közös $F_1 = F_1^*$, a másik fókuszok (F_2, F_2^*) körül megrajzoltuk az ellenköröket. Szerkesszük meg a két kúpszelet közös érintőit és rajtuk az érintési pontokat (11.26. ábra).

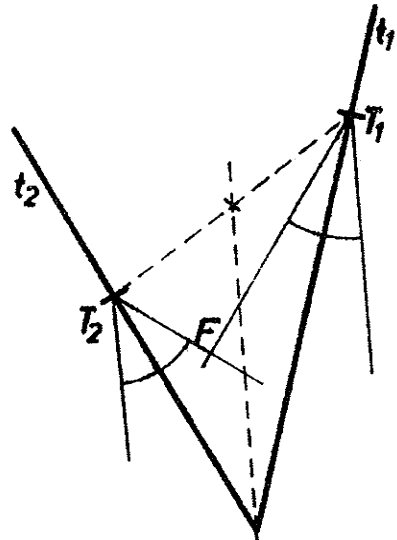
Megoldás: Közös fókuszuk közös érintőjére vonatkozó tükröképe mindkét ellenkörön rajta van, tehát a közös érintők az ellenkörök E_1 és E_2 közös pontjait F_1 -gyel összekötő szakaszok felező merőlegesei. Ezeken az érintési pontokat az E_1 -et, illetve E_2 -t, F_2 -vel, illetve F_2^* -tel összekötő megfelelő egyenesek jelölik ki.



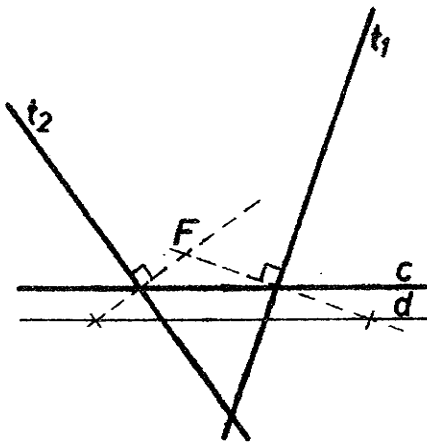
11.26. ábra.

- 5) Adott egy parabola két érintője (t_1, t_2) az érintési pontokkal (T_1, T_2). Szerkesszük meg a fókuszát (11.27. ábra).

Megoldás: A T_1T_2 felező-pontját az érintők metszéspont-jával összekötő egyenes a parabola tengelyével párhuzamos. Ezzel az iránnyal a T_1 , illetve T_2 pontokon át párhuzamost húzunk, majd tükrözzük a megfelelő érintőre. A tükröképek az F fókuszban metszik egymást.



11.27. ábra.



11.28. ábra.

- 6) Adott egy parabola két érintője t_1, t_2 , valamint a csúcsérintő. Szerkesszük meg a fókuszát és a direktrixet (11.28. ábra).

Megoldás: Az érintőknek a csúcsérintővel alkotott metszéspontjaiban az érintőkre merőleges egyenesek egymást az F fókuszban met-

szik. Az F fókusz az érintőkre tükrözve a direktrix pontjaihoz jutunk, amely a csúcsérintővel párhuzamos.

Gyakorlásra javasoljuk a következő feladatokat:

1. Adott a kúpszelet két fókusza és egy érintője. Szerkesszük meg a tengelyeket. (Hiperbola esetén az aszimptotákat is.)

2. Adott a kúpszelet egyik fókusza, két érintője és ellenkörének sugara. Szerkesszük meg a másik fókuszát és az érintőkön az érintési pontokat.

3. Adott a kúpszelet egyik fókusza, két pontja, valamint ellenkörének sugara. Szerkesszük meg a hiányzó fókuszát és a tengelyeket.

4. Adott egy kúpszelet egyik fókusza, egy érintő az érintési ponttal és a $2a$ távolság. Szerkesszük meg a másik fókuszát.

5. Adott a kúpszelet egyik fókusza és három érintője. Szerkesszük meg a másik fókuszát.

6. Adott a kúpszelet egyik fókusza, egy pontja, ezt a pontot nem tartalmazó érintője és az ellenkör sugara. Szerkesszük meg a kúpszelet másik fókuszát és tengelyeit.

7. Adott egy kúpszelet egyik fókusza, egy érintője az ellenkör sugara, továbbá a két fókusz közti távolsága. Szerkesszük meg a másik fókuszát és a tengelyeket.

8. Adott egy kúpszelet egyik fókusza, egy érintője, tengelyének egyenese és a $2a$ távolság. Szerkesszük meg a másik fókuszát, a másik tengelyt és az érintő érintési pontját.

9. Adott egy hiperbola egyik fókusza, ellenkörének sugara és egyik aszimptotája. Szerkesszük meg a csúcspontokat és a másik aszimptotát.

10. Adott a hiperbola egyik fókusza, ellenkörének sugara és a két aszimptota iránya. Szerkesszük meg a másik fókuszát, a csúcspontokat és az aszimptotákat.

11. Adott egy parabola fókusza, egy érintője és a fókusz távolsága a direktrixtől. Szerkesszük meg a csúcspontot.

12. Adott egy parabola fókusza és egy pontja az érintővel. Szerkesszük meg a direktrixet.

13. Adott a parabola fókusza, egy pontja és ezt a pontot nem tartalmazó érintője. Szerkesszük meg a direktrixet.

14. Adott a parabola direktrixe és fókusza. Szerkesszük meg adott iránnyal párhuzamos érintőt és határozzuk meg az érintési pontot.

15. Adott egy parabola direktrixe, egy pontja és ezt a pontot nem tartalmazó érintője. Szerkesszük meg a fókuszát.

16. Adott a parabola fókusza és két érintője. Szerkesszük meg a direktrixet, a tengelyt, a csúcspontot és az érintőkön az érintési pontokat.

17. Adott a parabola csúcsérintője és egy pontja az érintővel. Szerkesszük meg a tengelyt és a fókuszát.

18. Adott a parabola tengelye és egy érintője az érintési ponttal. Szerkesszük meg a csúcspontot, fókuszát és a vezéregyenest.

Elméleti anyag: Tankönyv 105-107, 109-113, 116-119, 121, 123. pontjai.

12. A KÖR ÁBRÁZOLÁSA

Ha a kör síkje nem párhuzamos a képsíkkal és nem merőleges rá, akkor bebizonyítható, hogy a kör képe ellipszis. A vetítés során csak a képsíkkal párhuzamos átmérő nem rövidül meg, ennek a képe az ellipszis nagytengelye.

A 12.1. ábrán az O középpontú α második vetítősíkban fekvő kör második képe a kör átmérőjével egyenlő $C''D''$ szakasz. A kör síkját az O ponton áthaladó t második vetítőegyenest körül első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatva az AB körátmérő a forgástengelyen van, tehát ennek első képe a képellipszis nagytengelye; látható továbbá, hogy a C és D pontok első képe a kistengely két végpontja. A beforgatott kör és az ellipszis közti kapcsolat merőleges affinitás, ennek segítségével a kör akárhány pontjának képét és benne az érintőt megszerkeszthetjük. Az ábrán a merőleges affinitást megvalósító ún. kétkörös ellipszismegszerkesztést használtuk a további ellipszispont szerkesztésére.

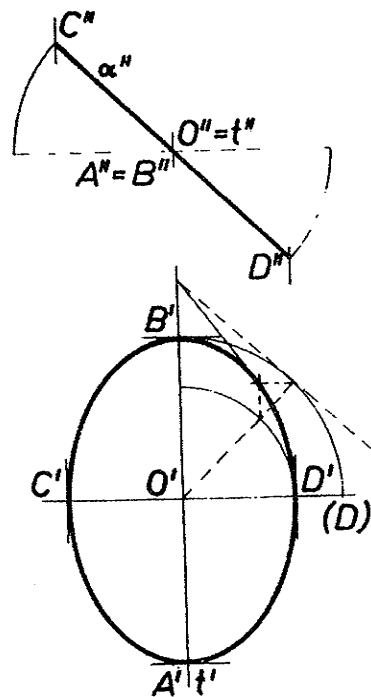
A továbbiakban általános helyzetű síkban fekvő kör képeinek megszerkesztésével foglalkozunk (12.2. ábra). Az általános helyzetű síkot f_1 és f_2 fővona-

laival adtuk meg. A benne fekvő kör középpontjának O'' második képével és a kör r sugarával határoztuk meg a kört.

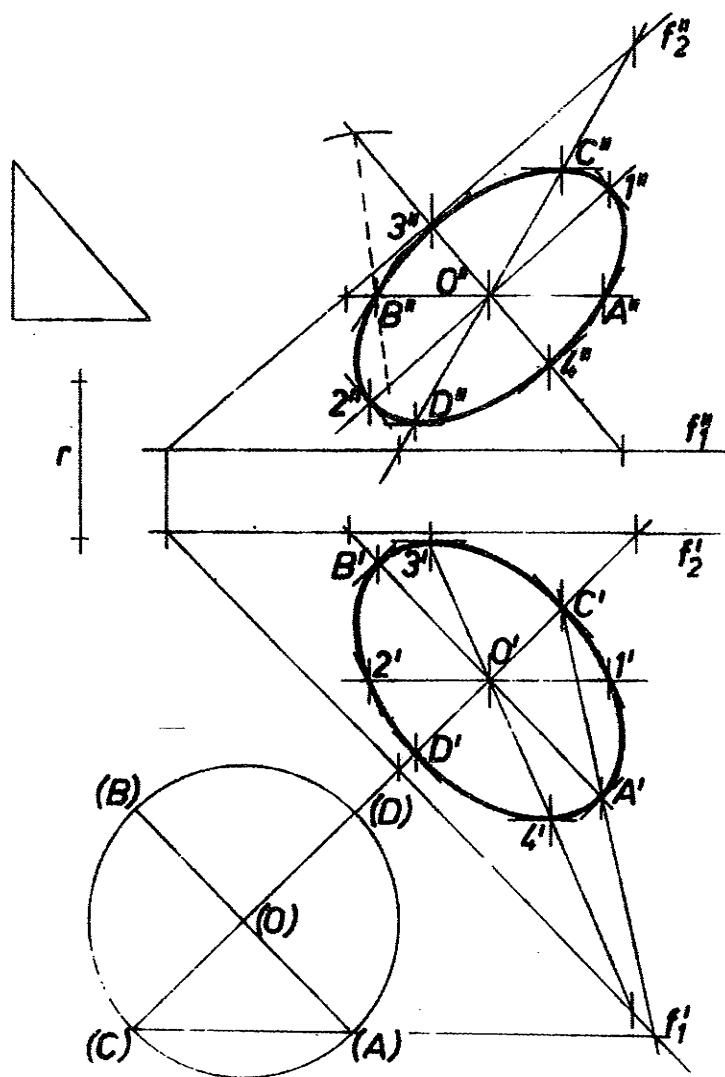
Az O' pontot a középponton áthaladó első fővonalon jelöljük ki. Erre az egyenesre szükség van, hiszen ezen van az első képellipszis nagytengelye.

Ha a síkot f_1 fővonala körül képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk, akkor az (O) körül megrajzolt r sugarú körnek bármely pontját vissza tudjuk forgatni.

Az f_1 -gyel párhuzamos $(A)(B)$ körátmérőből lesz az első képellipszis $A'B'$ nagytengelye, az erre merőleges kör-



12.1. ábra.



12.2. ábra.

átmérő (C) pontját visszaforgatva az első kép kistengely-végpontját kapjuk.

Az első kép tengelyeinek második képe a második kép-ellipszis konjugált átmérőpárja, ennek alapján az érintők meghúzhatók. Látható, hogy az első kép kistengely-végpontjainak megfelelő C'', D'' második képpontok a második kép legalsó és legfelső pontját adják.

A második kép nagytengelyét az O''-n f_2'' -vel párhuzamos egyenesen jelöljük ki, hossza $2r$, végpontjai 1'' és 2''. A

második kép kistengely egyenesét megrajzolva a kistengely hosszát a 11.12. ábra szerint a B'' pontnál határoztuk meg, a végpontok $3''$ és $4''$. E tengelyvégpontok első képét is megszerkesztjük, ott konjugált átmérőpárt adnak. Az érintők megrajzolása után látszik, hogy a második képellipszis kistengely-végpontjainak megfelelő $3'$ és $4'$ pontok az első képellipszis legalsó és legfelső pontjai.

A megszerkesztett pontok és érintők már lehetővé teszik a képellipszisek kellően pontos megrajzolását.

Gyakorlásra javasoljuk a 12.3. ábrán felvételi vázlattal megadott feladatok $A/4$ méretű lapon (nagyított méretben) való önálló kidolgozását.

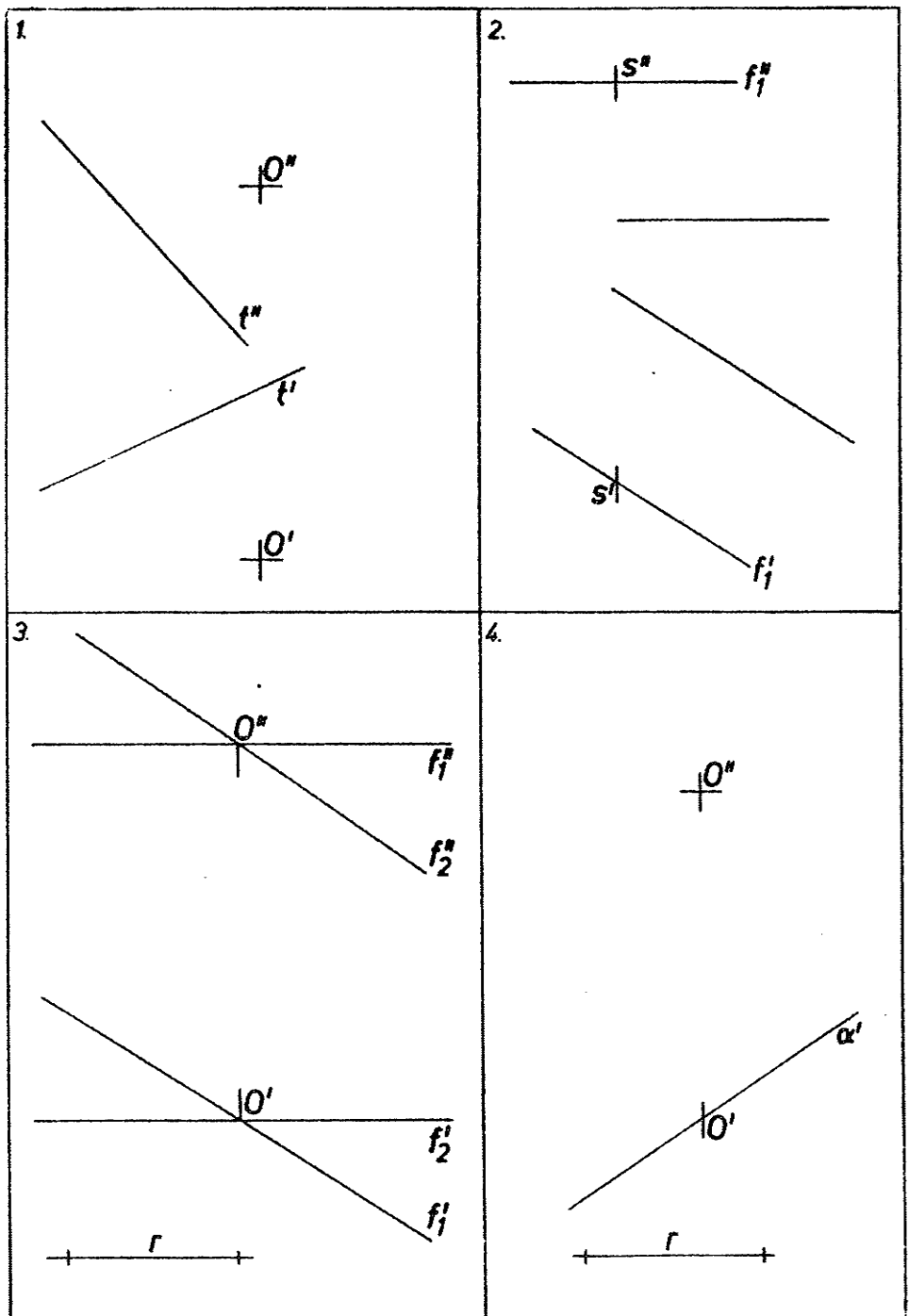
1. Szerkesszük meg annak a körnek a képeit, amelynek középpontja az O pont, érintője pedig a t egyenes.

2. Adott egy kör két párhuzamos érintője (első főegyenese) és egyiken az érintési pont (S). Ábrázoljuk a kört két képével.

3. Adott egy kör síkja a középponton áthaladó két főegyeneseivel és a kör sugara. Szerkesszük meg a kör képeinek valamennyi lényeges pontját és rajzoljuk meg a kör képeit.

4. Adott az α első vetítősíkban levő, O középpontú r sugarú kör. Szerkesszük meg a kör második képét.

Elméleti tananyag: Tankönyv 124-133. pontok.



12.3. ábra.

13. CIKLOISOK, KÖREVOLVENSEK

A közönséges ciklois görbét egy egyenesen csúszásmentesen legördülő kör egy pontja írja le. Ha a körhöz rögzített más pont pályáját tekintjük, akkor a kör középpontjától a sugárnál nagyobb távolságra levő pont ún. hurkolt-, a kör belsőjében levő pont ún. nyújtott-cikloist ír le. A kör középpontjának pályája egyenes.

Két görbe egymáson való csúszásmentes legördülése azt jelenti, hogy a síkban fix alapgörbe és a legördülő görbe közös pontjában — a legördülés bármely időpillanatában — közősek az érintők és két megfelelő pont közötti görbedarab ívhossza a két görbénél megegyezik.

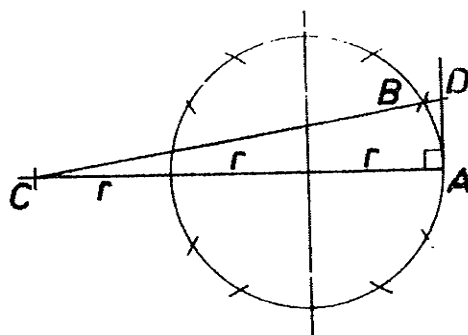
Körnek egyenesen való gördüléséhez tehát a körívekkel egyenlő szakaszokat kell az egyenesen kijelölni.

Ez a körív „kiegyenesítését” igényli. Egy olyan körív, amelyhez tartozó középponti szög 40° -nál kisebb, a 13.1. ábrán bemutatott közelítő eljárással egyenesíthető ki. Az ábrán $1/12$ körívet egyenesítettünk ki.

$\widehat{AB} \approx AD$. A közelítés igen pontos. (Snellius módszere.)

A 13.2. ábrán egy ciklois pontjainak a szerkesztését mutatjuk be. A legördülő kör területét tizenkét egyenlő részre osztottuk be. Ennek megfelelően elő-

állítottuk a tizenkettő körív hosszát és azt egymásután felmértük az egyenesre (I, II, III, ... pontok). A legördülésről tehát tizenkettő ívenként „pillanat-felvételeket” szerkesztünk meg. Ha a kiindulási helyzetben I-gyel jelölt pont pályáját szerkesztjük meg, akkor az egyes pillanatokban a 2 és II, 3 és III, 4 és IV s í.t. pontok kerülnek érintkezésbe. Az egyenessel az adott pillanatokban érintkező körre visszamérjük a tizenkettő ív egyszerűsét, kétszeresét, háromszorosát s í.t. Az így létrejövő pontok a csúcsos ciklois pontjait adják. Az érintőt úgy kapjuk meg, hogy a ponttal a pillanatnyi érintkezési pontot összekötjük és a megfelelő cikloispontban erre merőlegest állítunk.



13.1. ábra.

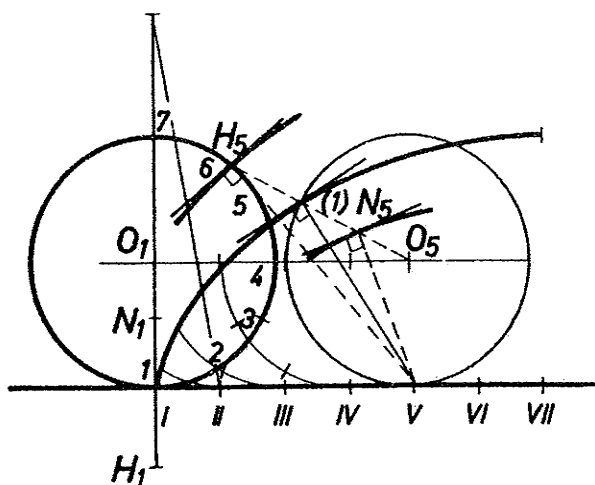
Kimutatható ugyanis, hogy a cikloisok és evolvenssek érintőre merőleges normálisai mindegyik típusú görbe esetén áthaladnak a pillanatnyi érintkezési ponton, amit a mozgás adott pillanatához tartozó momentán pólusnak nevezünk.

A 13.2. ábrán az ötödik helyzetben mutatjuk be az érintőszerkesztést, továbbá azt is, hogy a kiindulási helyzetben H_1 -,

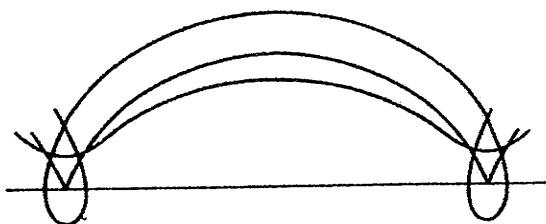
illetve N_1 -gyel jelölt pontok és bennük az érintő a különböző időpontokhoz tartozó helyzetekben hogyan szerkeszthető meg. Az ötödik helyzetben a momentán pólus az V. pont. A H_1 pont hurkolt, az N_1 pont nyújtott cikloist ír le. Ezeket szemlélteti a 13.3. ábra.

A 13.4. ábrán epicikloisok szerkesztését mutatjuk be. Az epiciklois úgy jön létre, hogy egy alapkörön (kívül) legördül egy másik kör (legördülő kör). A legördülő kör pontjai csúcsos (C_1), a legördülő körön kívül fekvő pontok (H_1) hurkolt, a körön belül fekvő (N_1) pontok nyújtott epicikloist írnak le.

A 13.4. ábrán az alapgörbe R sugarának és a legördülő kör r sugarának aránya $R:r = 3:2$. Ebben az esetben a két körön egyenlő íveket úgy tudunk létesíteni, hogy a kerületeket a sugarak arányának megfelelően osztjuk be egyenlő részekre. Esetünkben az alapkört tizenkét egyenlő részre osztó (I, II, III, ...) pontok között levő ívek egyenlők a legördülő kört nyolc részre osztó (1, 2, 3, ...) pontok közti ívekkel. A legördülő kör középpontja az alapgörbével — az O_1 ponton áthaladó — koncentrikus körön mozog. Az 0, II; 0, III; ... egyenesek jelölik ki e koncentrikus körön a legördülő kör megfelelő középpontjait.



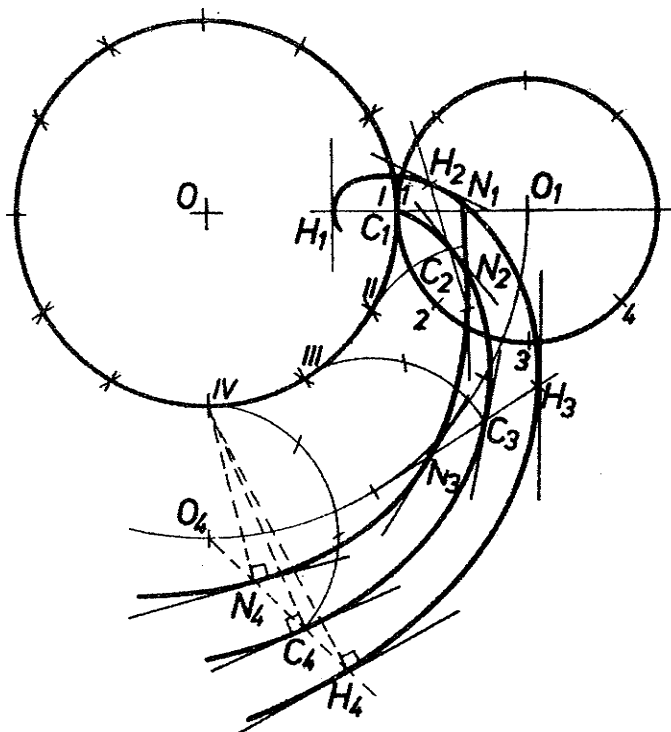
13.2. ábra.



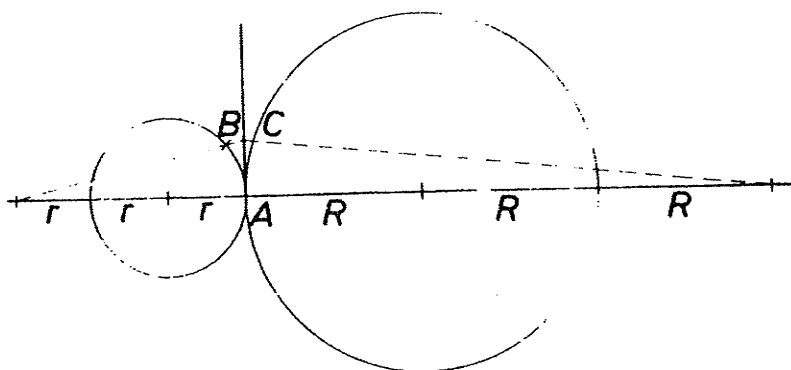
13.3. ábra.

Ezután a ciklois-pontok és érintők szerkesztése a községes cikloiséhoz teljesen hasonló módon történik. A 13.4. ábrán mutatjuk be, hogy a negyedik helyzetben az O_4C_4 egyenesen a kiindulási helyzet H_1 - illetve N_1 -gyel jelölt pontjainak H_4 , illetve N_4 megfelelői hogyan jelölhetők ki, továbbá megszerkesztjük e helyzetben a görbék érintőit a görbeponthoz a IV. momentumán pólussal összekötő egyenesekre merőlegesen.

Abban az esetben, ha a legördülő kör és az alapkör sugarainak aránya nem ismert, vagy nem olyan egyszerűen kezelhető mint az imént, akkor Snellius módszerének a 13.5. ábrán bemutatott alkalmazásával tudjuk elérni, hogy az $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ legyen. Először a kisebb sugarú körön levő ívet



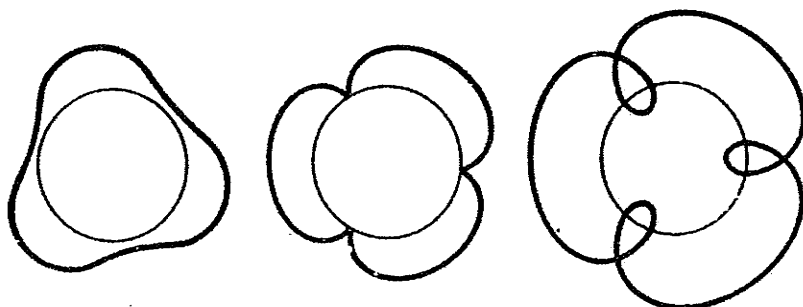
13.4. ábra.



13.5. ábra.

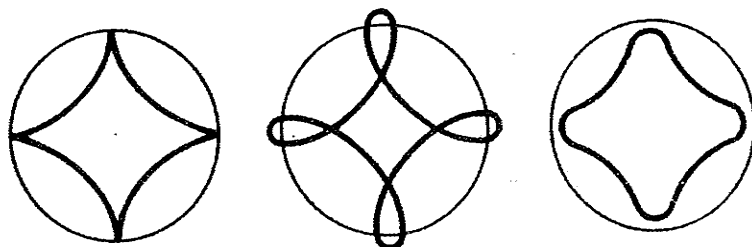
egyenessítsük ki, majd a módszer megfordításával ezt átviszszük a nagyobb sugarú körre.

A 13.6. ábrán nyújtott, csúcsos és hurkolt epicikloidosokat mutatunk be $R:r = 3:1$ sugárárány esetén.



13.6. ábra.

A hipociklois úgy jön létre, hogy egy R sugarú alapkör belsejében csúszásmentesen gördül le az r sugarú kör. A legördülő kör pontjai csúcsos hipocikloist, a legördülő körhöz rögzített külső pont hurkolt hipocikloist, a legördülő kör belső pontjai nyújtott hipocikloist írnak le. Ilyen görbéket szemléltet a 13.7. ábra $R:r = 4:1$ arány esetén.



13.7. ábra.

A görbék és érintőik szerkesztése teljesen hasonló az epicikloisok szerkesztésével.

Utolsónak a körevolvenssel foglalkozunk. A körevolvens úgy jön létre, hogy egy körön legördül (csúszásmentesen) egy egyenes. Az egyenes egy E_1 pontja csúcsos körevolvens írt le (13.8. ábra).

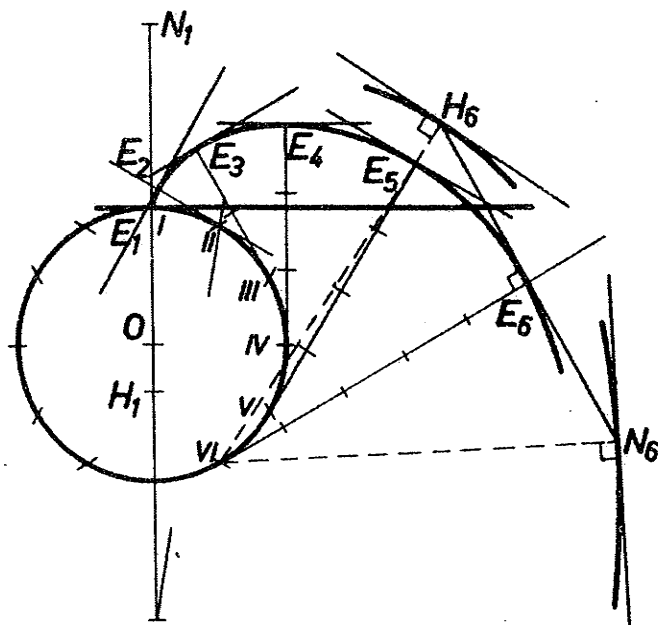
Az egyeneshez rögzített N_1 , illetve H_1 pont pedig nyújtott, illetve hurkolt körevolvensen mozog.

Snellius módszerével kijelöljük a kör tizenkettő ívének hosszát. Ennek ismeretében az alapkört I., II., III., ... pontokban érintő egyeneseken a tizenkettő körív hosszának visszamérésével ki tudjuk jelölni a csúcsos kör-

evolvens $E_1, E_2, E_3, \dots$ pontja-
it és bennük az
egyenesekre me-
rőlegesen az é-
rintőt. A hatos
helyzetben fel-
tűntettük a
hurkolt körevol-
vens H_6 pont-
ját, illetve a
nyújtott kör-
evolvens N_6
pontját. Ebben
a helyzetben a
pillanatnyi é-
rintkezési pont
(a momentán pó-
lus) a VI. pont.
Ezt a pontot H_6 ,

E_6, N_6 pontok-

kal összekötő
egyenesekre me-
rőleges egyenesek adják a hurkolt csúcsos és nyújtott evol-
vensnek érintőit.



13.8. ábra.

Gyakorlásképpen szerkesszük meg a különböző cikloisok, illetve körevolvensek pontjait és bennük az érintőt.

A Geometriai feladatok c. példatár 121-122. old. 1-10. feladatai és azok 145-148. oldalon levő megoldásainak áttanulmányozásával e görbék koordinátageometriai kezelésében is kellő jártasságot szerzünk.

Elméleti tananyag: Tankönyv 281-282., 288., 291-292. pontok.

14. CSAVARVONAL ÁBRÁZOLÁSA

A csavarvonallal a 10.7. ábrával kapcsolatosan már foglalkoztunk. Koordinátageometriai jellemzését az $\vec{r}(t) = \vec{i}r \cos t + \vec{j}r \sin t + \vec{k}ct$ -vel ($c > 0$) adtuk meg. Érintővektora: $\vec{r}'(t) = \vec{i}(-r \sin t) + \vec{j}r \cos t + \vec{k}c$. Belátható, hogy az érintővektor és a csavarvonal z tengelyének szöge

állandó. U.i.s $\cos \varphi = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{k}}{|\vec{r}'|} = \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}$; ezek szerint a φ

szög egy r és c befogókkal meghatározott derékszögű háromszög c befogón nyugvó szöge.

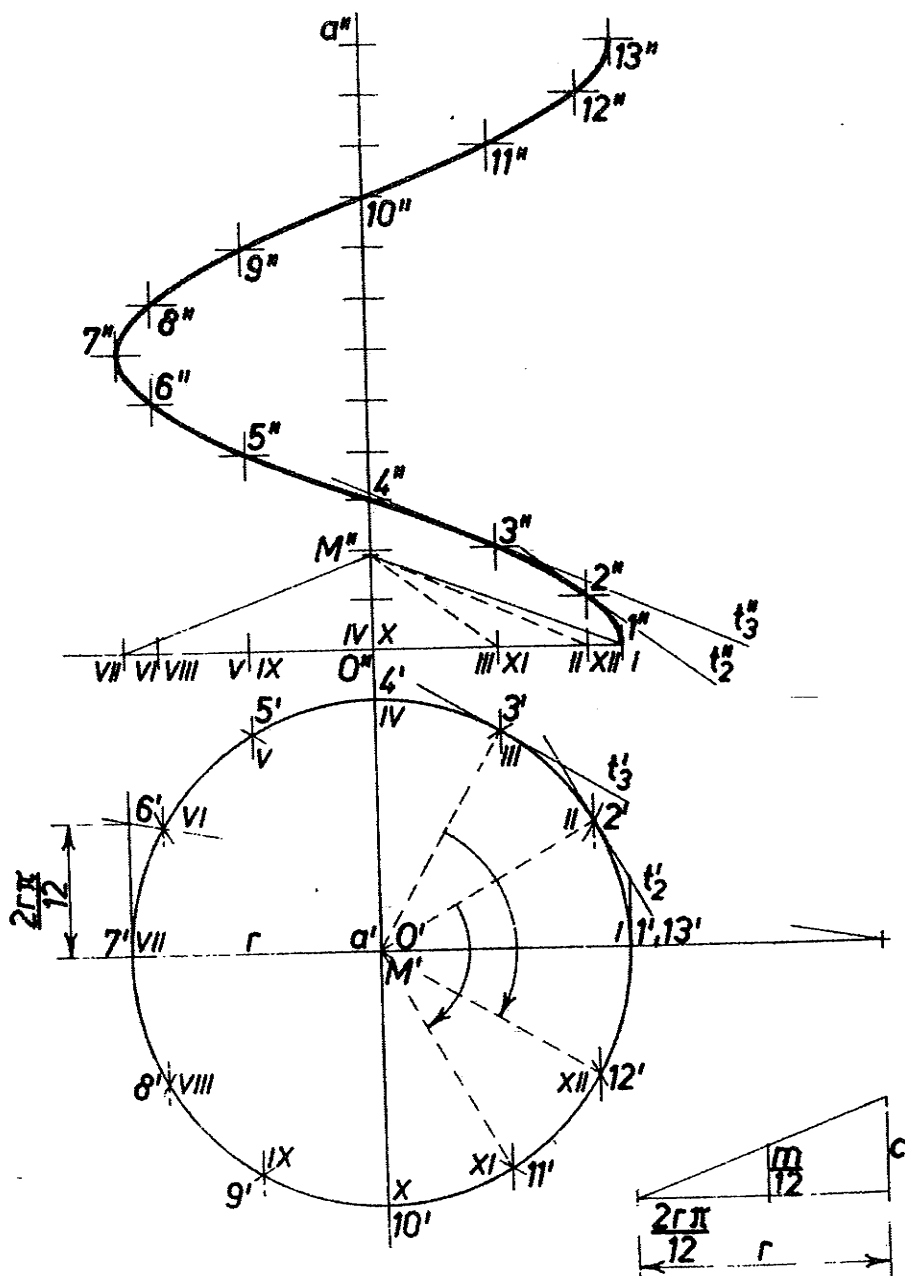
A $\frac{\pi}{2} - \varphi$ szög a csavarvonal emelkedési szöge. A c -t a csavarvonal paraméterének nevezzük.

Ha tehát a csavarvonal érintőivel a tengely egy pontján át párhuzamosokat húzunk, akkor ezek egy forgáskúp, az ún. iránykúp alkotóit adják. Az iránykúp magasságát c -nek választva a határoló körének sugara r .

A 14.1. ábrán az a első vetítőegyenestengelyű, r sugarú hengeren levő jobbmenetű csavarvonal egy menetét ábrázoltuk az m menetemelkedés tizenkettedének ismeretében. A csavarvonal első képe egy r sugarú kör. Ezt tizenkét egyenlő ívre osztva, az 1, 2, 3, ... pontok második képét az $\frac{m}{12}$ szakasz egymásutáni felmérésével, a megfelelő hengeralkotókon jelöljük ki. A csavarvonal akkor jobbmenetű, ha az 1, 2, 3, ... pontok haladási rendje az első képen az óramutató járásával ellentétes. (Ellenkező esetben balmenetű.)

Az érintők megszerkesztéséhez szükség van az iránykúp-ra. Az iránykúp alapkörének r sugara és a c paraméter által meghatározott derékszögű háromszög hasonló ahhoz a derékszögű háromszöghöz, amely a csavarvonal egy darabjának a hengeréről való lefejtésénél adódik (14.2. ábra). Egy ilyen derékszögű háromszöget kapunk, ha befogóinak a kör kerületének Snellius módszerével kiegyenesített tizenketted részét ($\frac{2r\pi}{12}$), illetve az $\frac{m}{12}$ szakaszt vesszük. A szerkesztésben tehát meghatározható a paraméter c hossza, ez lesz az iránykúp magassága:

$$c = 0''M'' = \frac{m}{2\pi}.$$



14.1. ábra.

A 14.2. ábrán látható, hogy a csavarvonal P pontjához tartozó t érintő párhuzamos az iránykúp $\overline{PM}$ alkotójával, ahol a P pont az iránykúp alapkörén a P -vel közös hengeralkotón levő P' pontot — a pontok haladási sorrendjében — 90° -os késéssel követi.

A csavarvonal t_2, t_3 érintőit a 2. és 3. pontban szerkesztettük meg. Az első képen ezek körérintők, a velük párhuzamos iránykúp alkotók az M, XI , illetve az M, XII egyenesek. Ennek alapján második képük is megrajzolható. (l. 14.1. ábra).

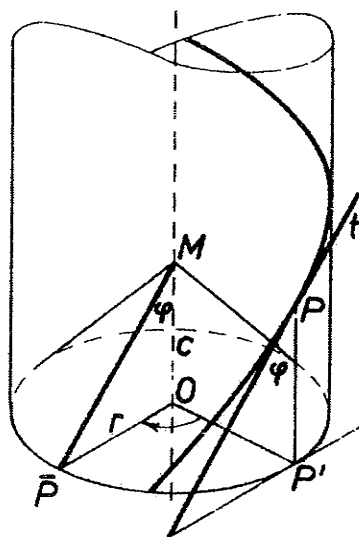
Vetítőegyenest tengelyű csavarvonal ábrázolásánál tanultakat alkalmazzuk fővonal tengelyű csavarvonal ábrázolásánál. A 14.3. ábrán megadtuk az a második fővonalat és a csavarvonal l kiindulópontját. (Az l' pontnak az a' -től mért távolsága a csavarvonal hengerének sugara.) Legyen a csavarvonal jobbmenetű, és első képe legyen csúcsos görbe.

Az ábrázolást azzal kezdjük, hogy az a egyenest vetítő egyenessé transzformáljuk, az l kiindulási ponton át felveszünk az alapkör síkját. Az alapkör harmadik képét tizenkét egyenlő részre osztjuk, az I, II, III, ... pontokat kapjuk, és a transzformáció eljárásával meghatározzuk a pontok és a belőlük induló hengeralkotók második, illetve első képét. Így a csavarvonal 1, 2, 3, ... pontjai az I, II, III, ... hengeralkotókra kerülnek. A csavarvonal akkor lesz jobbmenetű, ha a harmadik képen az 1, 2, 3, ... pontok haladási rendje az óramutató járásával ellentétes.

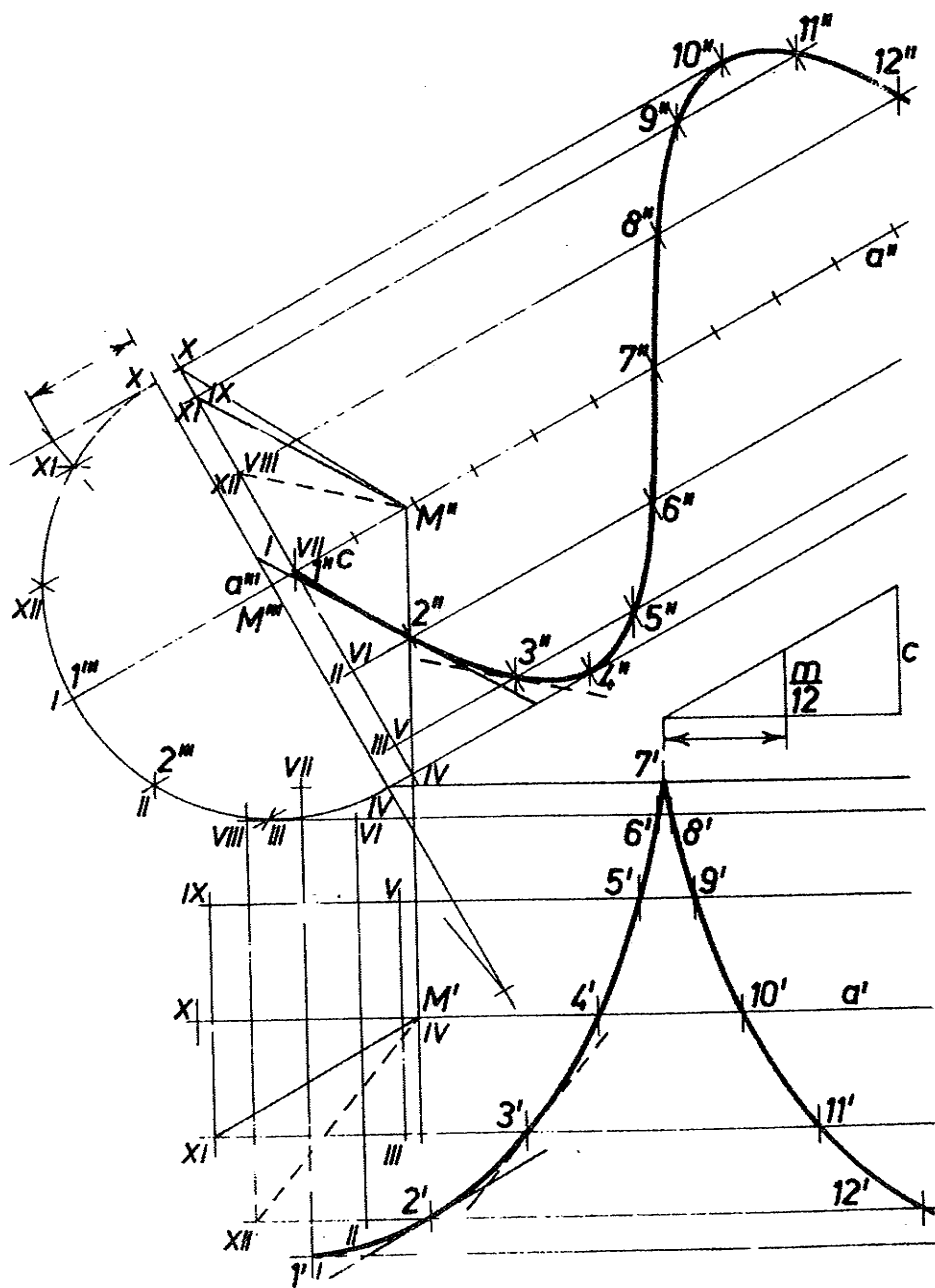
A 10.6. ábrával kapcsolatban mondottakból következik, hogy a térgörbe azon pontja lesz a vetület csúcspontja, amelyben az érintő merőleges a képsíkra. Ekkor pedig a csavarvonal iránykúpjának lesz vetítőegyenest alkotója, ami az iránykúp második képének szélső alkotója (M, IV alkotó). Ennek megrajzolása a második képen kijelöli az iránykúp c magasságát. Az alapkör tizenketted ívének kiegyenesítése után meghatározható a menetemelkedés tizenketted része. Ezáltal ábrázolhatók a csavarvonal pontjai a második és az első képen.

Az érintők szerkesztését a 2. és 3. pontokban mutatjuk be. Az érintők az M, XI , illetve M, XII iránykúpalkotókkal párhuzamosak. Az első képen a 7. pontban lesz a görbe képének csúcspontja.

Ha a csavarvonal tengelye vetítőegyenest, akkor képe kör. Ha a csavarvonal tengelye párhuzamos a képsíkkal, ak-

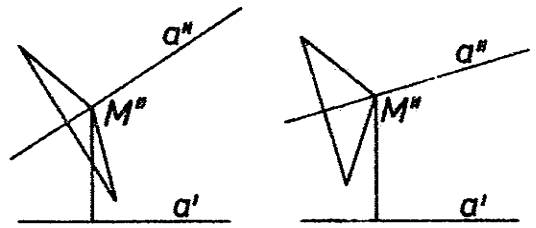


14.2. ábra.



14.3. ábra.

kor képe a szinusz-
vonalból merőleges
affinitással állítha-
tó elő. Ha a csavar-
vonal tengelye a kép-
síkhöz hajló egyenes,
akkor képe hurkolt,
csúcsos vagy nyújtott
cikloissal affin gör-
be aszerint, amint az
iránykúp csúcsából a
képsíkra állított me-
rőleges az iránykúp belsejében, az iránykúpon vagy azon
kívül halad (14.4. ábra).



14.4. ábra.

Gyakorlásul ábrázoljunk olyan fővonal tengelyű csa-
varvonalat, amelynek egyik képe hurkolt vagy nyújtott
görbe.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 352-353. pontok.

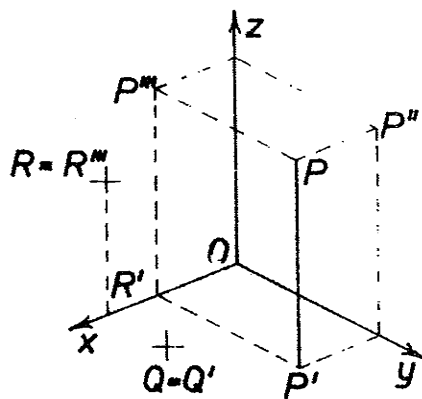
15. AXONOMETRIKUS ÁBRÁZOLÁS

Az axonometrikus ábrázolás célja az, hogy az alakzatokról képes ábrát készítsen. Az axonometriában az alakzatot egy térbeli koordináta-rendszerben elhelyezve, a koordináta-tengelyekkel együtt ábrázoljuk. Az axonometrikus képsíkra történő vetítésben nem feltétlenül merőlegesek a vetítő-sugarak. Ha a ferde — de egymással párhuzamos — sugarakkal való vetítést is megengedjük, akkor a koordináta-tengelyek képének választásánál nem kell semmilyen kikötésnek teljesülni. Bebizonyítható u.is, hogy három, egy pontból kiinduló szakasz mindig lehet egy derékszögű koordináta-rendszer tengelyeire felmért egyenlő szakaszok vetülete.

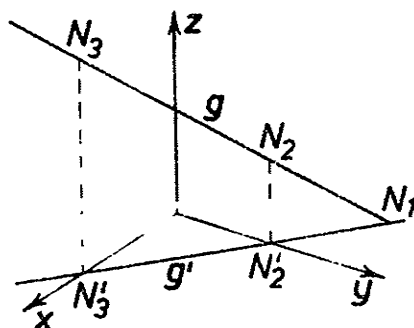
A 15.1. ábrán egy koordináta-rendszert ábrázoltunk.

A P pontot az xy , yz , xz koordinátasíkokra való merőleges vetületeivel P' , P'' , P''' pontokkal együtt ábrázoltuk. Ezeket sorrendben a P pont első, második, illetve harmadik képeinek nevezzük, a P -t pedig a P pont axonometrikus képének mondjuk. Nyilvánvaló, hogy a P , P' , P'' , P''' pontok közül bármely kettő egyértelműen meghatározza a többit. Az ábrázolt alakzatokat általában axonometrikus képpel és első képével adjuk meg. (Az axonometrikus kép ismerete még nem határozza meg a pont koordináta-rendszerbeni helyzetét.) Az ábrán szereplő Q pont az xy síkban van, az R pont pedig az xz koordinátasíkban van, így első képe az x tengelyre kerül.

A 15.2. ábrán a g egyenest axonometrikus képével és első képével adtuk meg. A g és g' metszéspontja a g egyenes xy síkkal való N_1 nyompontja. A g' ismeretében kijelölhetők a g egyenes yz és xz síkkal való N_2 és N_3 nyompontjai az

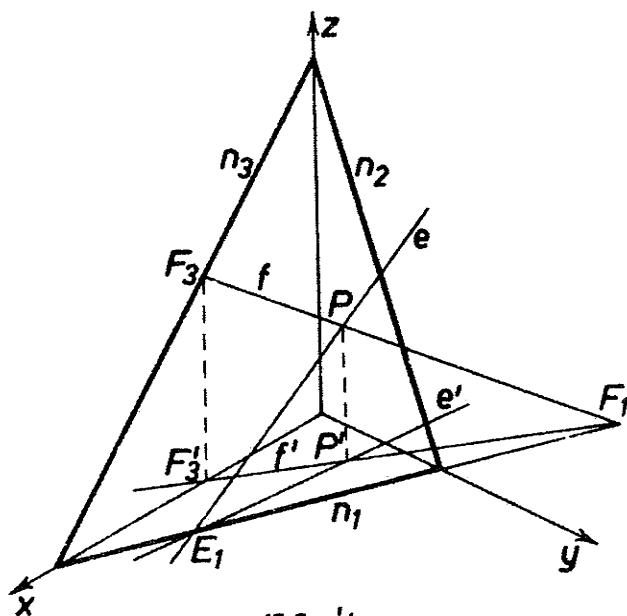


15.1. ábra.



15.2. ábra.

A 15.3. ábrán a P ponton áthaladó e és f egyenesek által meghatározott síknak a koordinátasíkokkal való metszésvonalait — az ún. nyomvonalakat és az általuk alkotott nyomháromszöget — állítottuk elő. A sík n₁ első

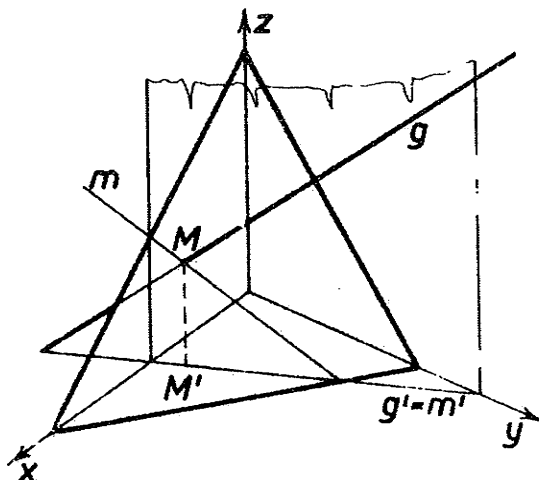


nyomvonalnak is pontja, amely átmegy az F_3 nyomponton. A nyomháromszög n_2 harmadik oldala már közvetlenül adódik. Eszerint a síkot mindig meg lehet adni nyomvonalaiával.

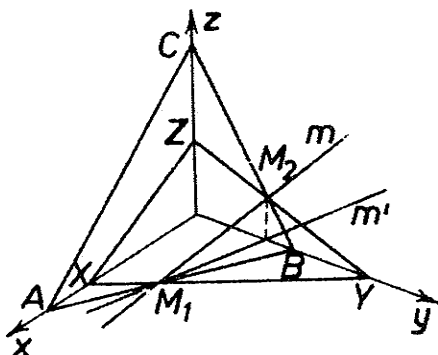
15.4. ábra.

Sík és egyenes metszéspontja. Két sík metszészvonala

A 15.5. ábrán a g egyenest axonometrikus és első képével adtuk meg, a síkot pedig nyomháromszöggel. A sík és egyenes metszéspontját a g egyenesre fektetett, xy síkra merőleges sík segítségével határoztuk meg. Ezt a síkot a g és g' egyenesek feszítik ki. Ennek a síknak és az adott síknak az m metszészvonala ($m' = g'$) jelöli a g egyenes M metszéspontját.



15.5. ábra.



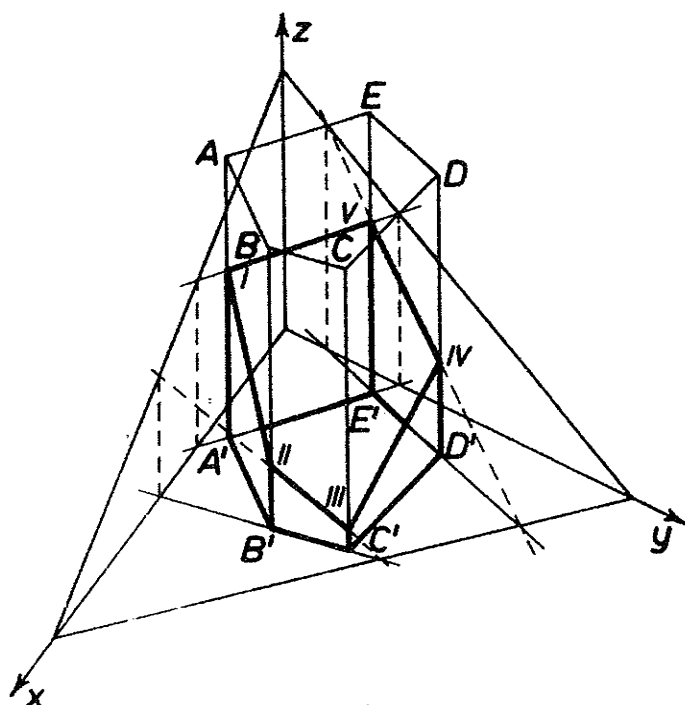
15.6. ábra.

A 15.6. ábrán két síkot adtunk meg nyomvonalai-
val, az ABC és KYZ síkot.
Az m metszészvonalaikat az
 M_1, M_2 közös nyompont-
határozzák meg.

Gúla és hasáb síkmetszetének szerkesztése

Sík és egyenes metszéspontjának szerkesztésére vezethető vissza hasáb vagy gúla síkmetszetének szerkesztése.

A 15.7. ábrán az xy síkon álló ötoldalú hasábot ábrázoltunk és megadtuk a metszősíkot nyomvonalai-
val. A hasáb oldalélelein levő metszéspontok első képei az A', B', C', D', E' pontok. Ha meghatározzuk azokat az egyeneseket, amelyek a metszősíokban vannak és első képük $A'E', B'C',$ illetve $D'E'$, akkor ezek kijelölik a megfelelő hasábéle-
ken az I és V, a II és III, illetve a IV és V metszéspontokat.

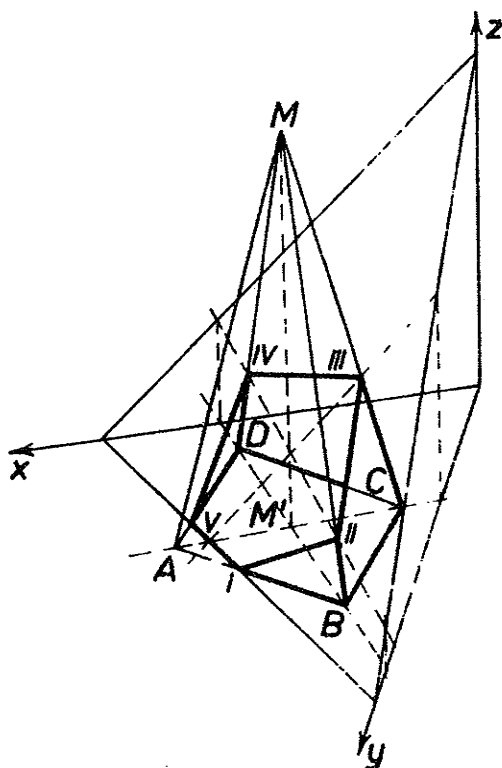


15.7. ábra.

val adott síkkal metszünk el. Azonnal látható, hogy az első nyomvonal az AB, illetve AD éleket az I és V pontokban metszi. Az MAC, illetve MBD síkok az xy síkra merőlegesek; e síkoknak az adott metszősíkkal alkotott metszésvonalai jelölik ki az MC élen a III, illetve az MB és MD éleken a II és IV metszéspontokat. Az AM szakasznak a metszősíkkal nincs közös pontja. A metszet-ötszög megrajzolása után a láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy a lemezből levő gúlának a metszősík feletti részét a metszősíkkal együtt eltávolítottuk.

Ezeket megfelelő sorrendben összekötve a metszetszöveget kapjuk. A láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy a lemezből készült hasábnak a sík feletti részét a metszősíkkal együtt eltávolítottuk.

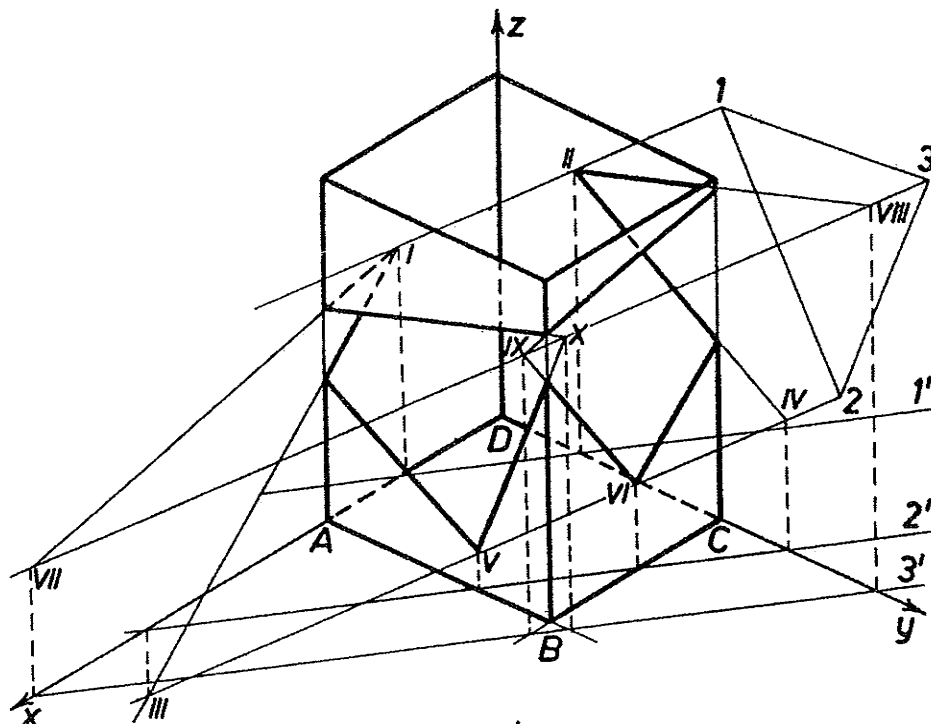
A 15.8. ábrán az xy síkon álló, ABCD alaplappal és M csúcsával megadott gúlát egy nyomvonalai-



15.8. ábra

Hasábok áthatásának szerkesztése

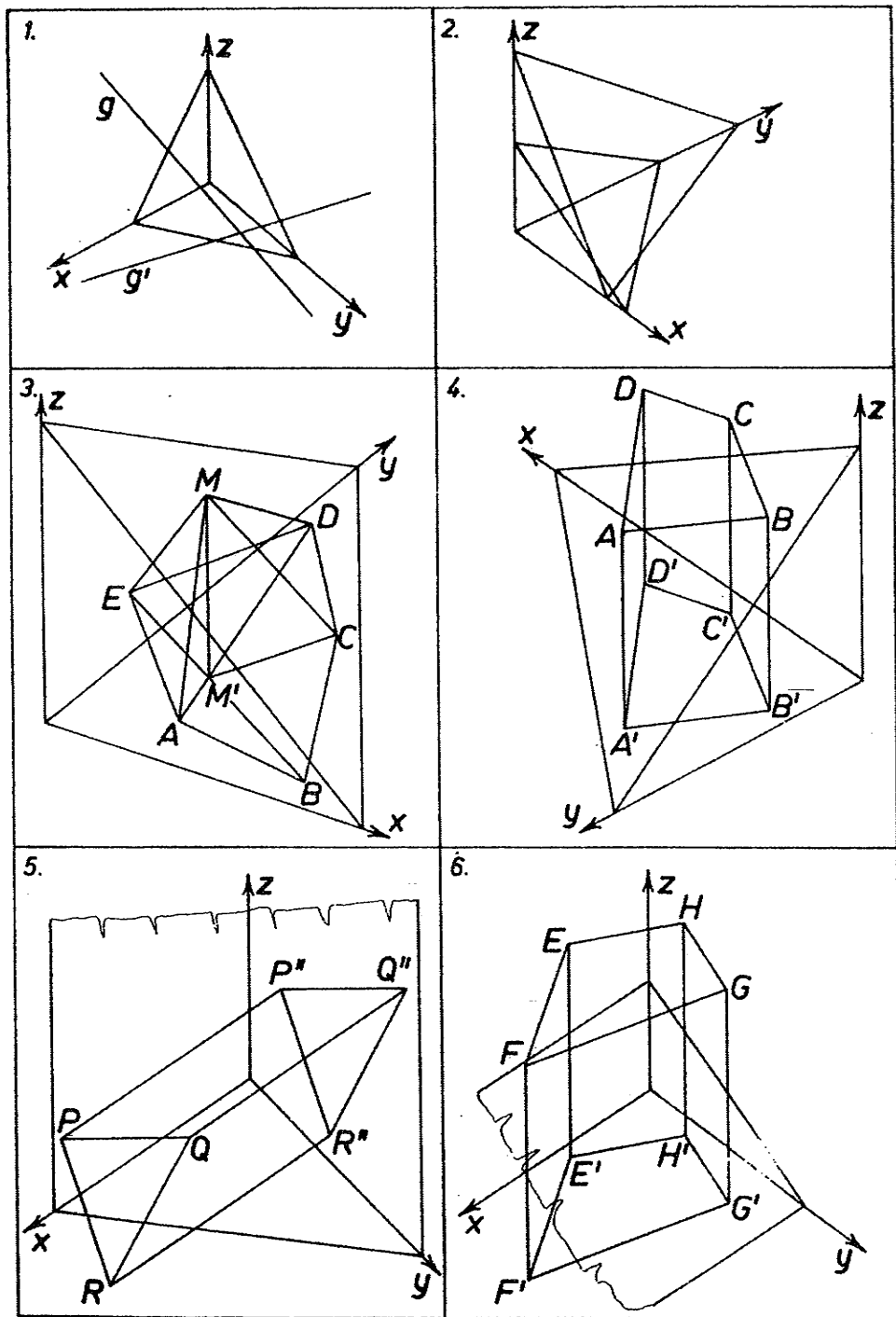
Két hasáb áthatását elő lehet állítani síkmetszetek megfelelő egyesítésével. A 15.9. ábrán az xy síkon álló



15.9. ábra.

négyszögletes hasábnak és az 1, 2, 3 oldalélek egyeneseseivel megadott ferde hasábnak az áthatását szerkesztettük meg. A ferde hasáb egyértelmű meghatározásához szükséges az oldalélek első képének a megadása ($1'$, $2'$, $3'$). A ferde hasáb élére az xy síkra merőleges síkot fektetve megkeressük az 1, 2, 3 egyeneseknek és az álló hasáb lapsíkjaiknak a metszéspontjait. Az ismert eljárással kapjuk, hogy az 1 él az AD és DC lapokat az I, illetve II pontokban metszi. A 2 él az AB és BC lapokat az V, illetve VI pontokban, az AD, illetve CD lapsíkokat a III, illetve IV pontokban metszi. A 3 él csak az oldallapok síkjait metszi: AD-t a VII, CD-t a VIII, BC-t a IX és AB-t a X pontban. Az álló hasáb lapsíkjaain kialakuló síkmetszetek egyesítéséből kapjuk a megrajzolt áthatási poligont. A láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy a ferde hasábot a kimetszett résszel együtt, valamint a lemezből készült állóhasáb fedőlapját eltávolítottuk.

Gyakorlásra javasoljuk a 15.10. ábrán vázlatban megadott feladatok A/4-es méretű nagyításban való kidolgozást.



15.10. ábra.

sát:

1. Szerkesszük meg a g egyenes és a nyomháromszögével adott sík metszéspontját.

2. Adott két sík nyomháromszögével. Szerkesszük meg a két sík metszészvonalát.

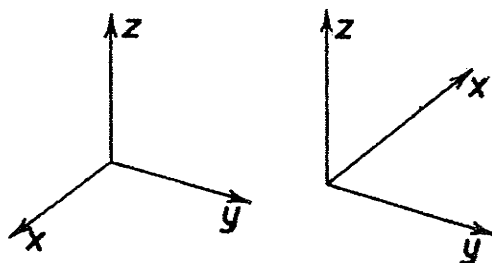
3. Szerkesszük meg az xy síkon álló gúla és a nyomháromszögével adott sík metszészvonalát, majd tüntessük fel a láthatóságot.

4.-6. Szerkesszük meg az ábrázolt hasábok és a nyomvonalaival adott síkok metszészvonalát, majd tüntessük fel a láthatóságot.

16. MERŐLEGES (ORTOGONÁLIS) AXONOMETRIA

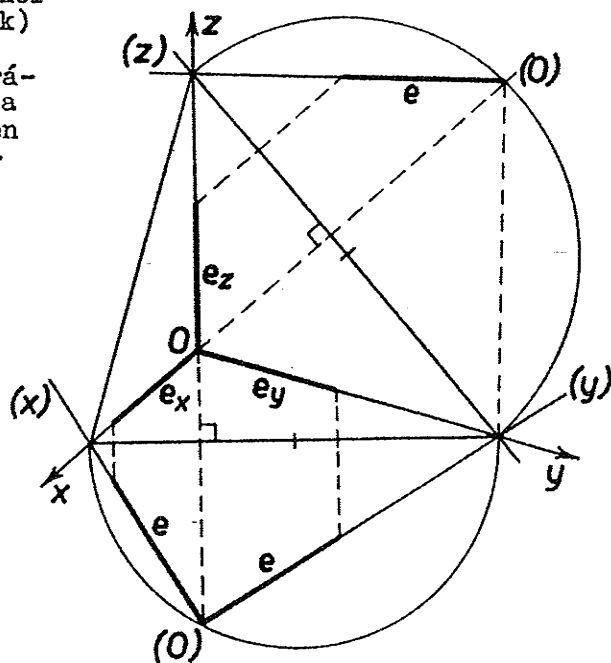
A továbbiakban olyan axonometrikus ábrázolás törvényszerűségeit vizsgáljuk, ahol a tengelyek képe (tengelykereszt) és az ábrázolt alakzat képe merőleges vetítéssel jön létre.

Kimutatható, hogy egy pontból kiinduló három félegyenes akkor lehet egy derékszögű koordinátarendszer merőleges vetülete, ha a tengelyek képei páronként tompaszöveget alkotnak (vagy kettő tompaszöveget alkot és a harmadik e tompaszög belsőjében — mindkettővel hegyesszöveget alkotva — halad; ekkor alulnézeti kép adódik) (16.1. ábra).



16.1. ábra.

Egy alakzat ábrázolásához szükséges a koordinátatengelyeken adódó rövidülési viszonyok ismerete. Minthogy a tengelykereszt merőleges vetítéssel jött létre, ezért az xy sík képsíkkal párhuzamos egyenese a képen is merőleges lesz az xy síkra a térben merőleges helyzetű z tengely képére. Hasonló áll a többi koordinátasík fővonalaira, tehát a koordinátasíkok egymáshoz csatlakozó fővonalai egy hegyesszögű háromszöget alkotnak, amelynek magasságvonalai a tengelyek képei (16.2. ábra).



16.2. ábra.

Ezt a háromszöget a képsík nyomháromszögének tekintjük, ezért röviden nyomháromszögnek nevezzük.

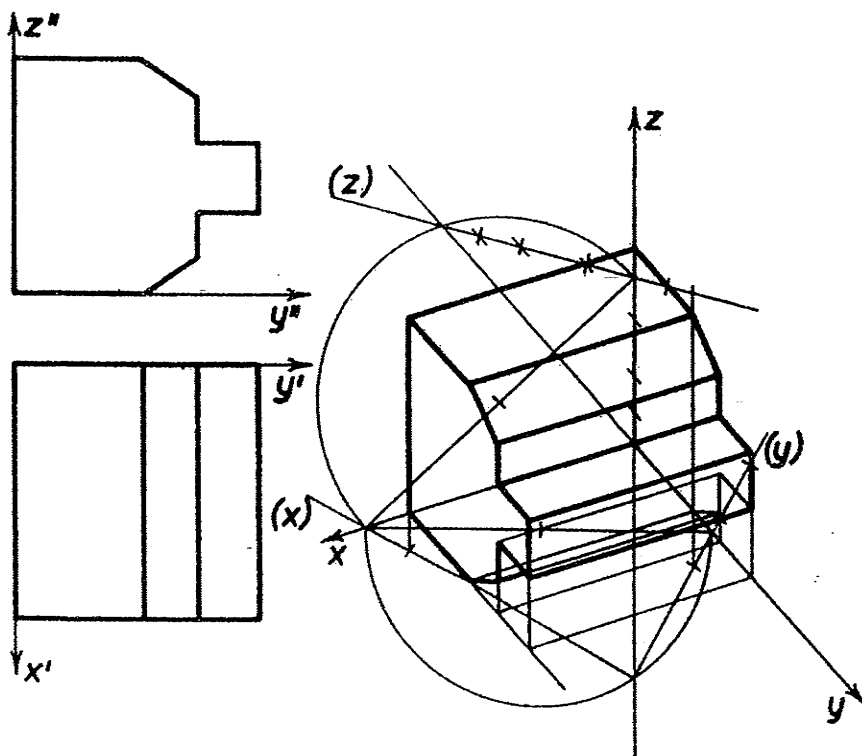
A koordinátasíkok a nyomháromszög oldalai körül képsíkba forgathatók. Az xy sík leforgatásánál az (0) pontból a nyomháromszög xy síkban levő oldala derékszögben látszik, tehát ezen oldal fölé írt Thalész-kör és O -ból a forgástengelyre állított merőleges metszéspontjaként adódik az (0) pont. Ugyanígy leforgatható a másik két koordinátasík; a 16.2. ábrán még az yz koordinátasíkot forgattuk le.

A koordinátatengelyek leforgatottjain jelöljük az e egységsszakaszokat, amelyeknek rendre e_x , e_y , e_z felel meg.

Az x , y , z tengelyirányú rövidüléseket a $q_x = \frac{e_x}{e}$, $q_y = \frac{e_y}{e}$,

$q_z = \frac{e_z}{e}$ arányok adják meg. Természetesen pl. az x irányú bármely szakasz vetülete és valódi hossza ugyanazt a q_x rövidülést állítja elő.

A rövidülések ismeretében lehetőség van arra, hogy két vetületével adott alakzatról axonometrikus képet készítsünk. A 16.3. ábrán két vetületével megadott alakzat merőleges axonometrikus képét ábrázoltuk.



16.3. ábra.

Az xy sík leforgatottjában felmértük a megfelelő tengelyeken levő távolságok valódi hosszát. Rövidültjeik meghatározása után elkészítjük az alaprajz axonometrikus képét, erre építjük fel a z irányú rövidült távolságok ismeretében az alakzatot. A z irányú rövidülteket a z tengelyen jelöltük ki az xz koordinátasík leforgatásával. A lát-hatóság feltüntetése után a merőleges vetítéssel kapott axonometrikus (szemléltető) képet nyerjük.

A szemléltetés céljaira kínálkozó másik módszer az, hogy a $q_x:q_y:q_z = k:l:m$ rövidülési arányokhoz tartozó ten-

gelykeresztet szerkesztjük meg.

Itt azonban ügyelni kell arra,

hogy $q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2$,

amiből következik — minthogy mindegyik rövidülés (így annak négyzete is) 1-nél kisebb —,

hogy a rövidülések négyzetei és a velük arányos

k, l, m mennyiségek négyzetei is kielégítik a

háromszögegyenlőtlenséget. A 16.4.

ábrán bemutatjuk a

$k:l:m=1:2:2$ rövidülési arányhoz tartozó

tengelykereszt szerkesztését: egy egyenesre felmérjük a

k^2, m^2, l^2 távolságokat, majd az m^2 szakasz végpontjai körül

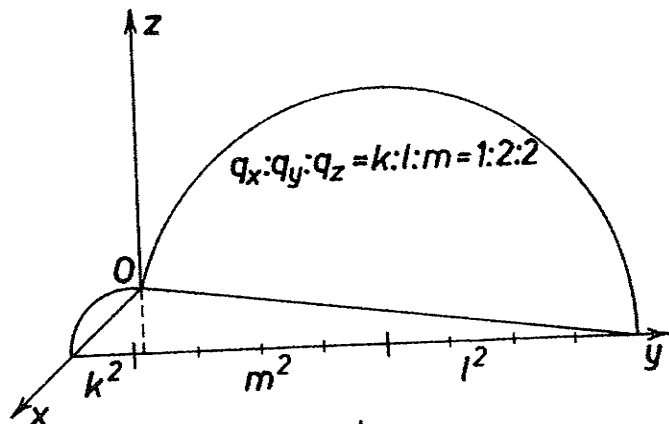
k^2 , illetve l^2 sugárral rajzolt körök metszéspontja az O origó.

A z tengely merőleges az iménti egyenesre, az x , ill.

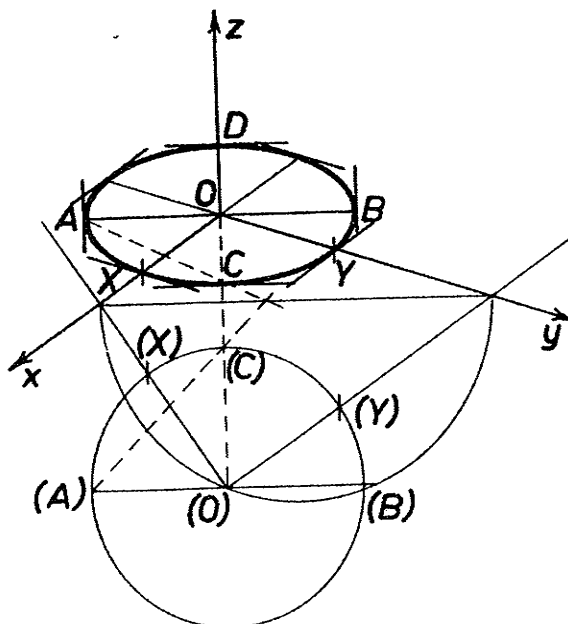
y tengely pedig az O pontot köti össze a három szakasz kezdő,

ill. végpontjával. A tengelyekre az eredeti méretek $k-, l-, m-$

szeresét mérve, az



16.4. ábra.



16.5. ábra.

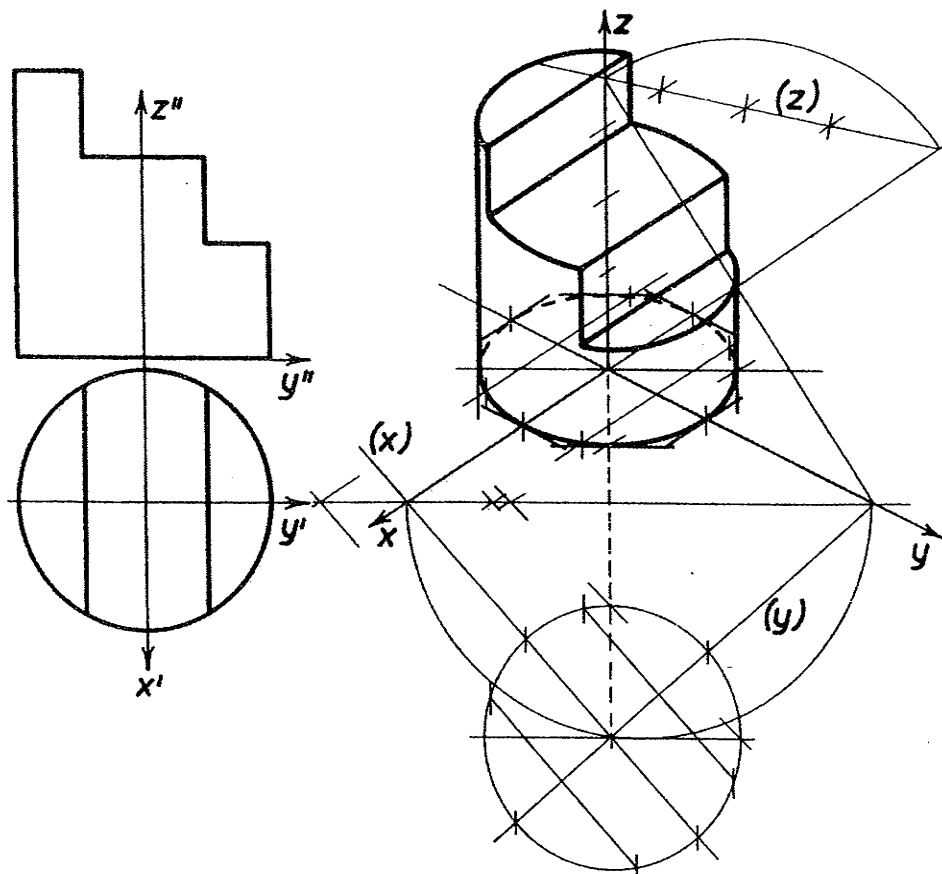
ábrázolandó alakzat merőleges axonometrikus képének felnagyítottjához jutunk.

A kör ábrázolása az axonometriában is síkjának leforgatásával szerkeszthető meg.

A 16.5. ábrán az xy síkban fekvő, origó középpontú kört ábrázoltunk. Az xy koordinátságokot leforgatva, az ábrázolandó kör leforgatottját megrajzoljuk.

Az (x) , illetve (y) -nal alkotott (X) , illetve (Y) pontok képei a képellipszis konjugált átmérőpárját állítják elő, X -ben az érintő az y tengellyel, Y -ban az érintő az x tengellyel párhuzamos. A képellipszis nagytengelye a sík fővonalával párhuzamos $(A)(B)$ körátmérő képe. A kistengely végpontja az $(A)(B)$ -re merőleges körátmérő (C) végpontjának visszaforgatásából adódik.

A 16.6. ábrán egy összetett, hengeres alakzat merőleges axonometrikus képét állítottuk elő két vetületéből. Az xy sík leforgatottjában megrajzoltuk a felülnézetet. A szükséges körpontok képét visszaforgattuk és a z irányú



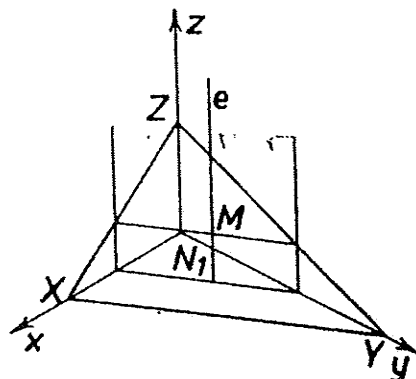
16.6. ábra.

rövidülések figyelembevételével (yz sík leforgatásából) felépítettük a csonkolt henger axonometrikus képét.

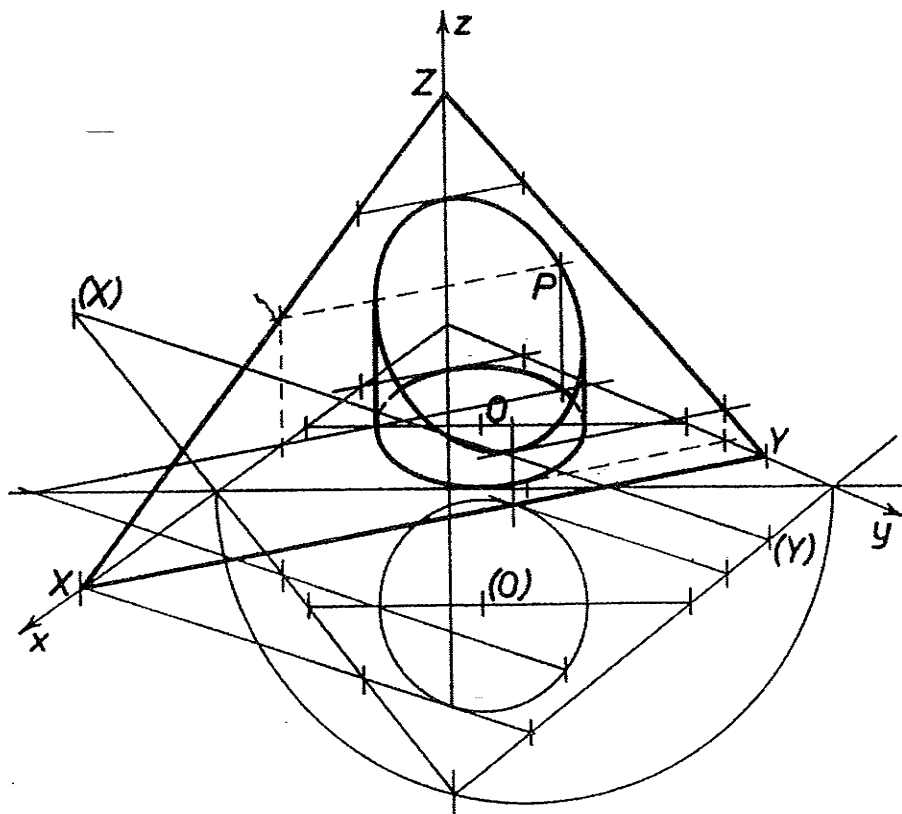
Végül forgáshenger síkmetszetének megszerkesztésével foglalkozunk. Ha a henger alkotói az xy síkra merőlegesek, akkor egy e alkotónak az XYZ nyomháromszög által megadott síkkal való M metszéspontját az N_1 nyompontra át

XY -nal párhuzamos egyenes és e által meghatározott síknak az XYZ síkkal alkotott metszévonalra jelöli ki a 16.7. ábrán bemutatott módon.

A 16.8. ábrán az xy síkon álló forgáshenger XYZ síkkal való metszetét szerkesztettük meg. Az egyes kúpalkotók kijelölésére az xy sík egy fővonala körül leforgatjuk az O középpontú alapkört és az XY egyenest.



16.7. ábra.



16.8. ábra.

Az $(X)(Y)$ egyenessel párhuzamos körérintők az alapkörön kijelölik a metszetellipszis legalsó és legfelső pontjait tartalmazó alkotókat. E pontokon kívül még egy segédsíkkal való szerkesztést tüntet fel az ábra. E segédsík nyomvonala is XY -nal párhuzamos, és kijelöli a baloldali szélső hengeralkotón levő pontot, valamint a metszetellipszis egy P pontját. A metszetgörbe helyes megrajzolásához még számos segédsíkkal kell pontokat szerkeszteni.

Elméleti tananyag: Tankönyv 95-101. pontok.

A ferde axonometria a koordinátarendszert és a benne elhelyezett testet ferde (párhuzamos) vetítéssel ábrázoljuk. Ha nem teljesen önkényesen vesszük föl a tengelykeresztet és rajtuk a rövidüléseket — amelyek értéke itt 1-nél nagyobb is lehet — akkor szemléltetésre rendkívül alkalmas, és gyors szerkesztést eredményező eljárás kapunk.

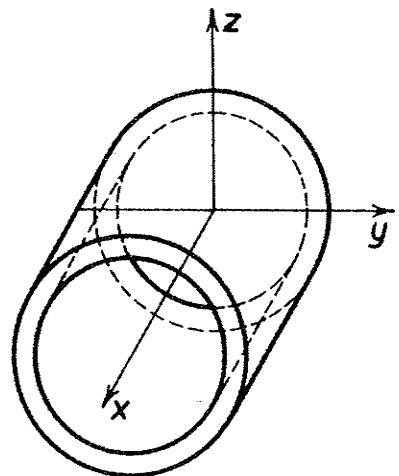
A gyakorlatban sokszor úgy veszik fel a koordinátarendszert, hogy az egyik koordinátasík a képsíkkal párhuzamos. Példáinkban az yz koordinátasík ilyen, természetesen y és z a képen is merőlegesek, $q_y = q_z = 1$. Az x tengely szokásos felvételei: 30° , 45° vagy 60° -os szöget zár be az y tengely egyenesével és q_x értéke $\frac{1}{2}$ és 1 között szokott lenni.

A 17.1. ábrán egy falvas-tagsággal rendelkező csődarabot ábrázoltunk, amelynek tengelye x . Ilyenkor az yz síkban és vele párhuzamos síkokban levő körök képe is kör.

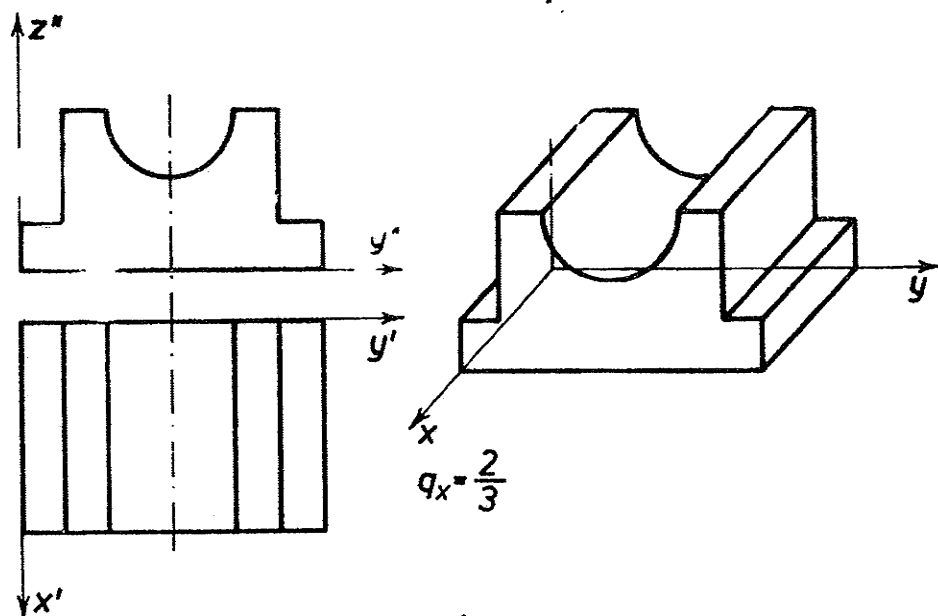
Ezt a körülményt használtuk fel a 17.2. ábrán, a két vetületével megadott alakzat ábrázolásánál is. Az alakzathoz levő félhenger záróköréi köröknek látszanak; $q_x = \frac{2}{3}$.

Itt az yz síkban levő előlnézetre építettük fel az axonometrikus képet.

Ha az xy síkban fekvő kört kell ábrázolni (17.3. ábra), akkor az y tengelyen levő kör-átmérő eredeti hosszában látszik Y_1 , Y_2 , az x tengelyen levő pedig a $q_x = \frac{3}{4}$ rövidülési aránynak megfelelően: X_1 , X_2 .

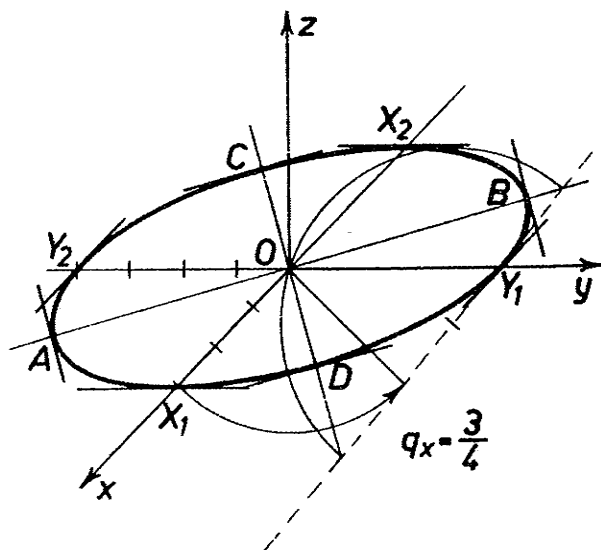


17.1. ábra.



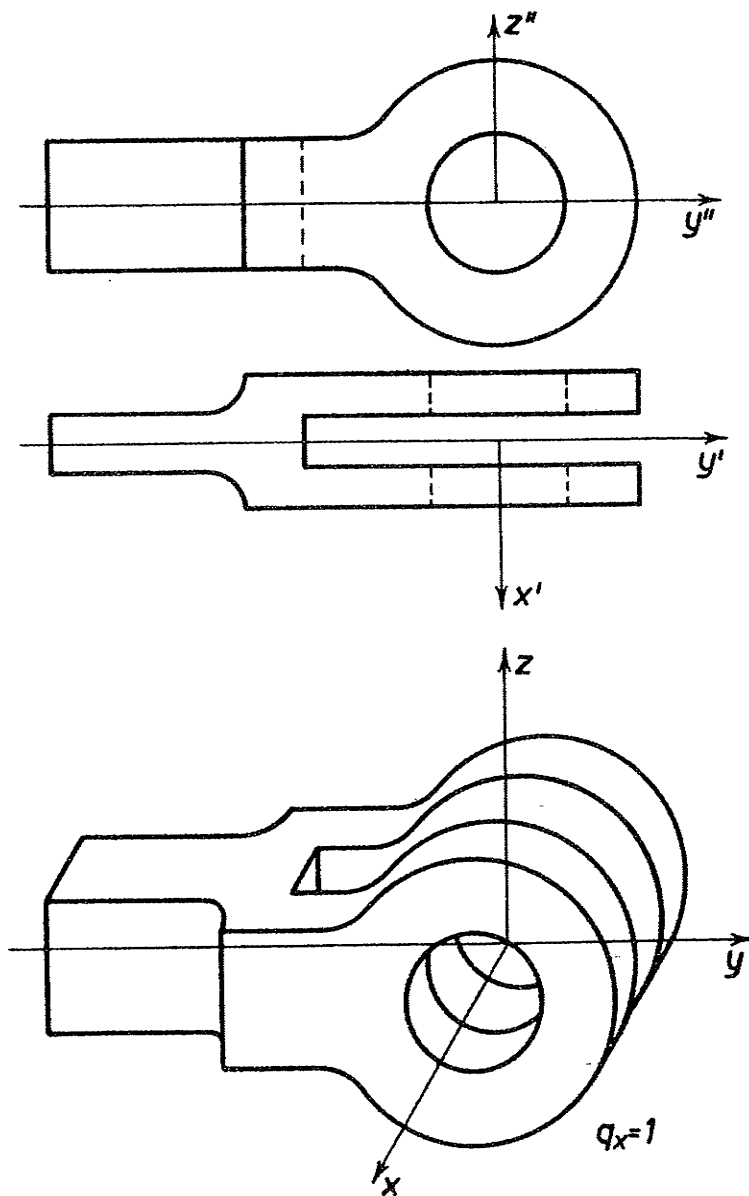
17.2. ábra.

Mint hogy kör ferde vetülete is ellipszis, ezért az Y_1 , Y_2 és X_1 , X_2 átmérők a képellipszis konjugált átmérői, amiből a Rytz-féle szerkesztéssel (1. 11. fejezet 10. ábra) a képellipszis AB, illetve CD nagy és kistengelyei megszerkeszthetők.



17.3. ábra.

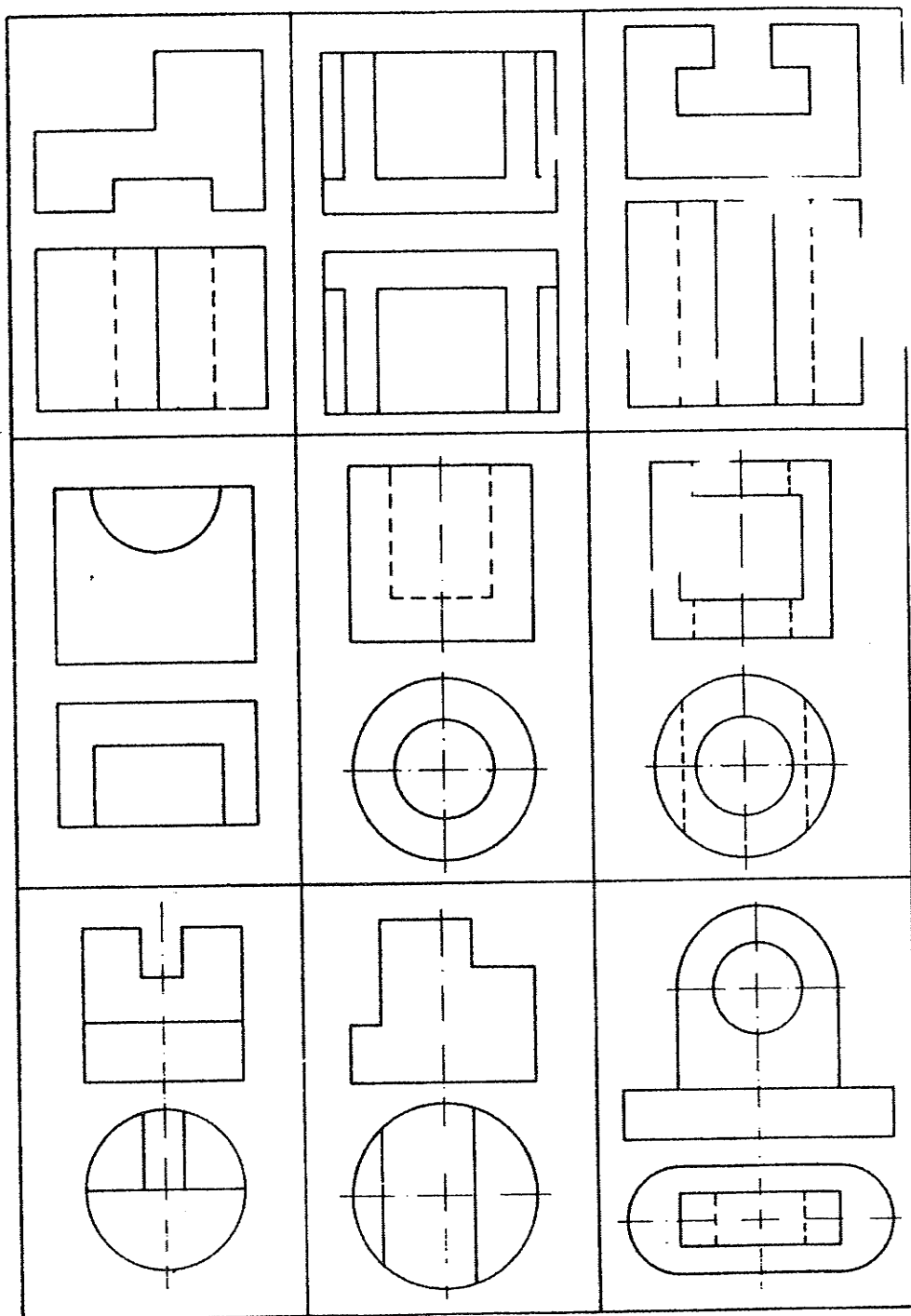
A 17.4. ábrán két vetületével adott villás felfüggesztő lemez ferde axonometrikus képét állítottuk elő; $q_x = 1$. A ferde vetítés ellenére az axonometrikus kép jól áttekinthető, képies képet ad.



17.4. ábra.

Gyakorlásul ábrázoljuk a 17.5. ábrán szereplő vázlatokban két képével adott alakzatokat merőleges- és ferde axonometriában.

Elméleti tananyag: Tankönyv 102-104. pontok.



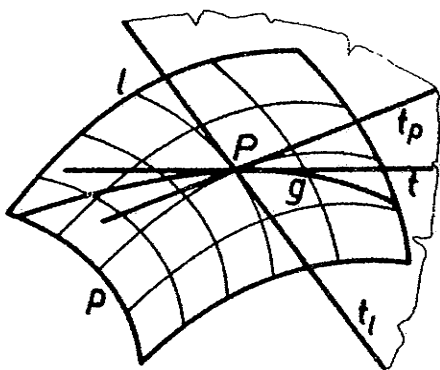
17.5. ábra.

18. FELÜLETEK ÁBRÁZOLÁSA. FORGÁSFELÜLETEK

A görbült felületek egy görbe, az ún. leíró görbe mozgásával írhatók le. A leíró görbe minden pontja egy-egy görbén mozog, ezeket a görbéket a felület pályagörbéinek mondjuk.

A vizsgált felületi pontokra feltételezzük, hogy csak egy leíró görbe és egy pályagörbe halad rajtuk át, mindkettőnek van érintője és ezek egymástól különböző egyenesek. A leíró görbe és a pályagörbe érintői a felület P pontjában meghatározzák a felület érintősíkját (18.1. ábra).

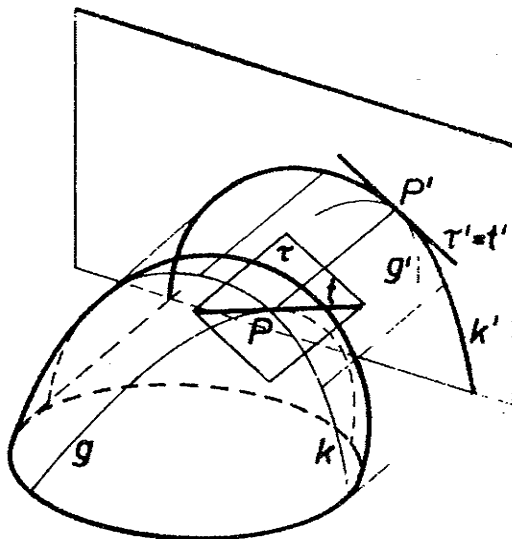
Kimutatható, hogy a P ponton áthaladó felületi görbe érintője az érintősíkban van.



18.1. ábra.

Kontúr, képhatár

Egy felület azon pontjainak összességét, amelyekben a felület érintősíkja vetítősík, a felület kontúrjának nevezzük. Ezek a pontok a felületen egy vagy több görbét alkotnak. A 18.2. ábrán a felület kontúrgörbéje k , amelynek képe a k' képkontúr görbe. Minthogy a P kontúrpontra áthaladó g felületi görbe érintője a P -hez tartozó érintősíkban van, ezért a g' és k' érintője a P' pontban megegyezik.



18.2. ábra.

Forgásfelületek

Ha egy t egyenessel egysíkú leíró görbét a t tengely körül megforgatunk, akkor minden pontja egy-egy t -re merőleges síkban fekvő körpályán az ún. paralelkörökön mozog. Forgásfelületek esetén a leíró görbét meridiángörbének nevezzük, a képsíkkal párhuzamos helyzetű síkban fekvő meridiánt főmeridiánnak mondjuk. A gömbfelületnek a középpontján áthaladó bármely egyenes tengelye lehet.

Gömb-, kúp-, henger- és tóruszfelület

Gömb

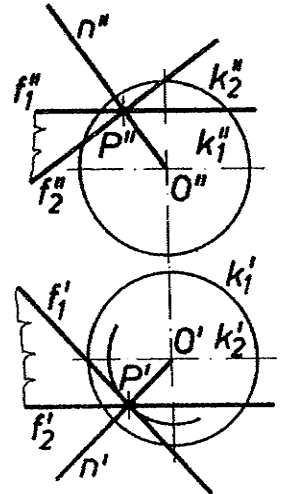
A 18.3. ábrán a O középpontú gömböt ábrázoltuk. Első képét a k_1 kör első képe, második képét a k_2 kör második képe határolja; mindkét kör sugara a gömb sugarával egyenlő. A k_1 kör pontjaiban a gömb érintősíkjai első vetítősíkok, a k_2 kör pontjaiban az érintősíkok második vetítősíkok. A gömböt mindig tekinthetjük első (illetve második) vetítőegyes tengelyű forgásfelületnek.

A 18.3. ábrán megadtuk a P'' pontot. A P' pontot úgy kell meghatározni, hogy a P pont a gömbön legyen. A gömböt első vetítőegyes tengelyűnek gondolva, P'' -n át felvett, a tengelyre merőleges sík a gömbből egy paralelkört metsz ki. Ennek sugara a második képen lemérhető, első képén pedig a P'' rendezője jelöli ki P' -t (két ilyen pont van). A gömb sugara merőleges az érintősíkra, egyenest a gömb normálisának mondjuk. Az n normálisra a P pontban szerkesztett (f_1, f_2) merőleges sík a gömb érintősíkja.

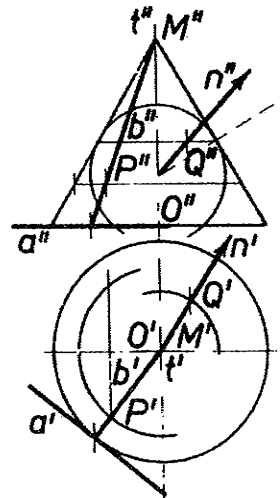
Forgáskúp

A 18.4. ábrán az M csúspontú, első vetítőegyes tengelyű, O középpontú paralelkörrel lezárt kúpot ábrázoltunk. A kúpnak első képkontúrja nincs, mert nincs olyan érintősíkja, amelyik az első képsíkra merőleges. A t egyenest tartalmazó, második képsíkkal párhuzamos síkban levő kúpalkotók a (második) kontúralkotók.

A kúpfelületen ábrázoltunk egy P'' és egy Q' -vel megadott felületi pontot. A pontok ábrázolása a ponto-



18.3. ábra.

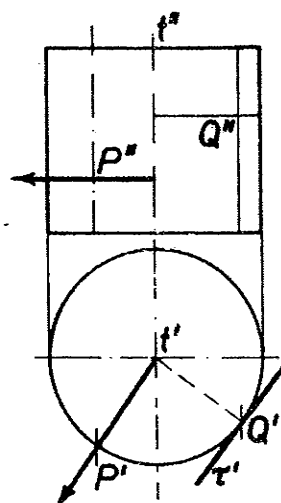


18.4. ábra.

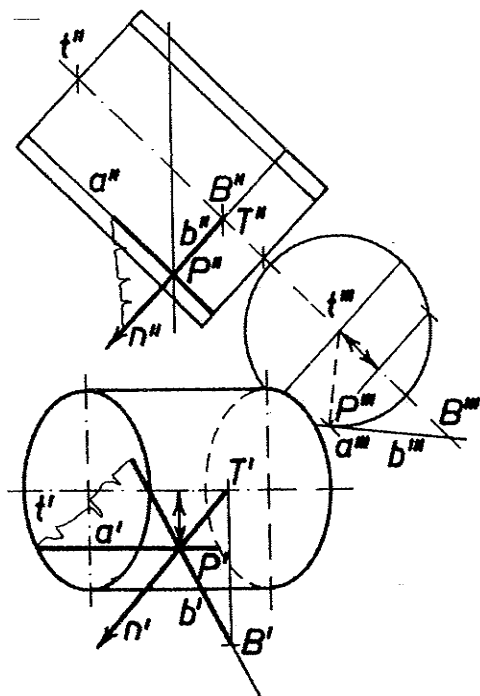
kon áthaladó paralelkörök segítségével történt. A P pontban megszerkesztettük a felület érintősíkját, amelyet a b alkotó és az a alapköri érintő határoznak meg. A Q pontban a felület normálisát állítottuk elő. A Q pontot tartalmazó párhuzamos kör mentén a kúpot érintő gömb középpontja a szélső alkotóhoz tartozó normálissal jelölhető ki. Ezen a gömbközponton átmegy a paralelkör valamennyi pontjához tartozó normális. Ennek alapján állítható elő n mindkét képe. (Általános forgásfelület esetén is ezzel a megfontolással kapjuk a felületi normálist.)

Forgáshenger

A 18.5. ábrán egy első vetítőegyenestengelyű hengert ábrázoltunk. Ennek minden pontjában első vetítősík a felület érintősíkjá, a henger első képe kör. A második képen a kontúralkotók a t egyenest tartalmazó, második képsíkkal párhuzamos síkban vannak. A P'' pontot felvéve, egyetlen rendezővel kapunk olyan P' pontot (kettőt), hogy az így ábrázolt pont a henger pontja legyen. A Q' -t felvéve a Q'' ennek rendezőjén bárhol felvehető, a Q pont a



18.5. ábra.



18.6. ábra.

henger pontja. A P pontban a felületi normálist szerkesztettük meg, ami nem más, mint a P ponton átmenő kör metszet sugara. A Q pontban a felületi érintősík első vetítősík, amelynek első képe a henger első képét érintő egyenes.

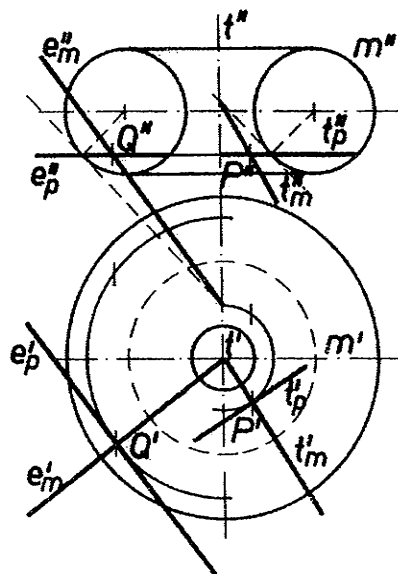
Ha a henger tengelye valamelyik képsíkkal párhuzamos — a 18.6. ábrán a második képsíkkal —, akkor a tengelyt vetítő egyenessé transzformálva, az előbbi helyzetbe jutunk. A P felületi pont ábrázolása és benne az (a,b) érintősík megszerkesztése a transz-

formáció eljárásával történik.

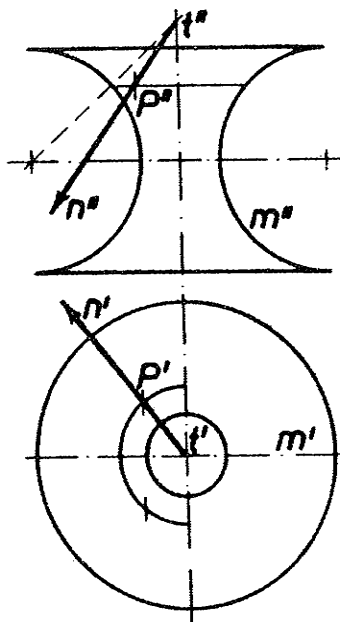
A P pontban a második képen a normális a tengelyre merőleges, és azt a T pontban metszi. T' meghatározásával az n normális első képe is adódik.

Tóruszfelület

A 18.7. ábrán egy kört a középpontját nem tartalmazó t tengely körül forgattunk meg. Az így létrejövő felületet tórusznak nevezzük. A t egyenes első vetítőegyenese. A legnagyobb illetve legkisebb sugarú paralelkör pontjaiban a felületi érintősík első vetítősík. E két kör a tórusz első kontúrja; a kisebbik kört torokkörnek, a nagyobbát ekvátorkörnek nevezzük. A tórusz második kontúrját a második képsíkkal párhuzamos főmeridiánkörök, valamint a legfelső és legalsó paralelkörök képezik; ezek pontjaiban a felület érintősíkja második képsíkra merőleges. A legfelső és legalsó paralelkörök a tóruszt két részre osztják, az egyik a



18.7. ábra.



18.8. ábra.

belső tórusz (18.8. ábra), a másik a külső tórusz.

A 18.7. ábrán megadtuk a P'', illetve Q'' pontokat. Mindkettő ugyanabban a vízszintes síkban van, amely a belső és a külső tóruszból kimetsz egy-egy kört. Ennek megfelelően a Q'' pontnak az első képen két, a P'' pontnak négy tóruszon levő pont felelne meg.

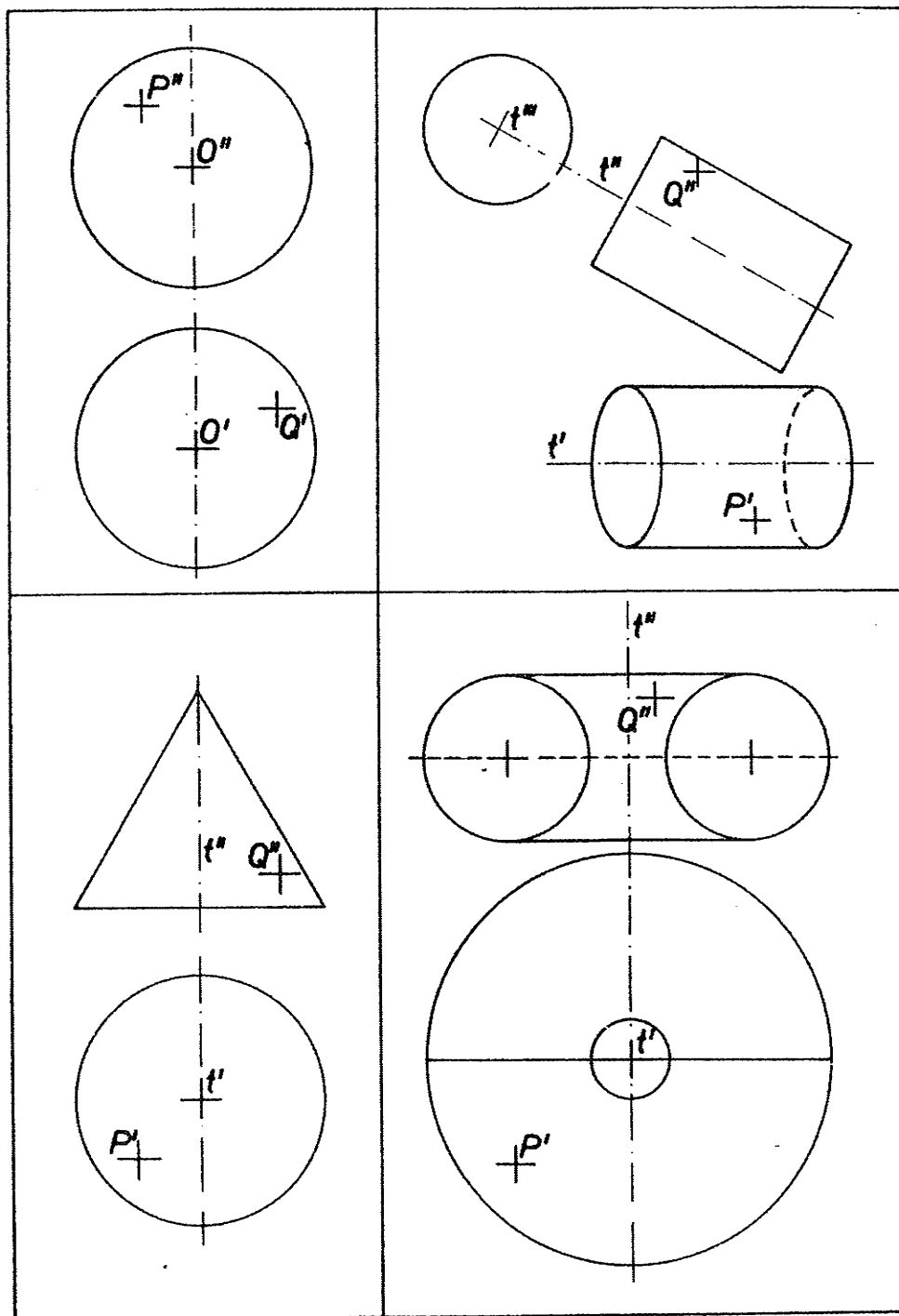
A P és Q pontban megszerkesztettük a felület érintősíkját. A pontokat főmeridián helyzetbe forgatjuk a tórusz tengelye körül. Itt meghúztuk a főmeridián érintőjét, amely P és Q esetén más-más pontban metszette a tengelyt. Viszsaforogatáskor az érintők tengelypontjai helyben maradnak, tehát ezeket a megfelelő pontokkal összekötve, a P, illetve Q-n áthaladó meridiánkörök t_m , illetve e_m érint-

tőit kapjuk. A paralelkörök t_p , illetve e_p érintői könnyen meghúzhatók. Tehát a P-beli érintősíkot a t_p , t_m egyenespár, a Q-beli érintősíkot az e_p , e_m egyenespár határozza meg.

A 18.8. ábrán megadott belső tóruszon felvett P pontban a normálist szerkesztettük meg. A P-t a főmeridiánhelyzetbe forgatjuk, ott meghúzzuk a normálist, és ahol ez a t tengelyt metszi, azt a pontot P-vel összekötő egyenes lesz a P-beli felületi normális.

Gyakorlásra javasoljuk a 18.9. ábrán megadott felületeken a kijelölt pontok ábrázolását és bennük a felületi normális, illetve érintősík megszerkesztését.

Elméleti tananyag: Tankönyv 311-313., 316-318., 327., 373-374. pontok.



18.9. ábra.

19. FORGÁSFELÜLETEK SÍKMETSZETÉNEK SZERKESZTÉSE

Forgásfelület síkmetszete az a görbe, amely a felület és a sík közös pontjaiból áll.

Forgásfelület síkmetszetének pontjait a 19.1. ábrán forgáskúpra bemutatott módszerrel szerkesztjük:

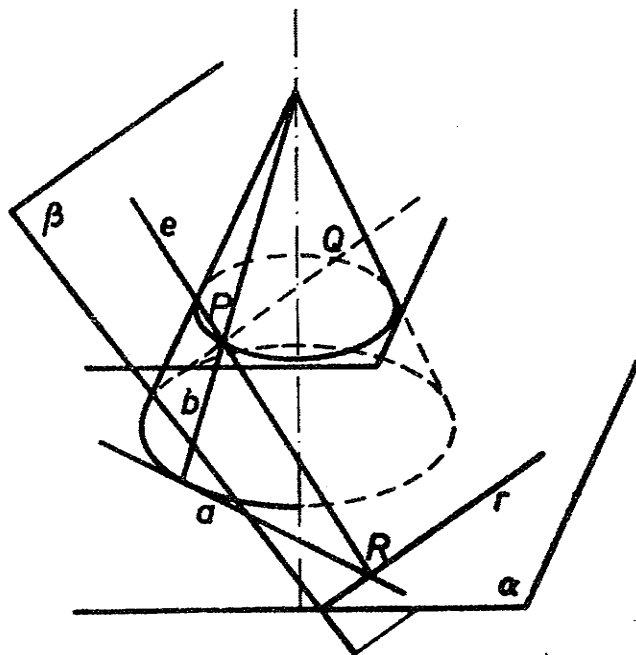
Vesszünk egy, a forgásfelület tengelyére merőleges segédsíkot, amely a kúpból (forgásfelületből) kört, a β metszősíkban pedig egy egyenest metsz ki. Ezek közös P, illetve Q pontjai a síkmetszethez tartoznak.

A P pontban bemutatjuk az érintő szerkesztését: a metszetgörbe érintője a β metsző-

síkban és a P-hez tartozó érintősíkban (a, b) egyaránt benne van, tehát az e érintő e két sík metszésvonala, amelynek egy pontja a P. A két sík további metszéspontját az a alapköri érintő és az r egyenes R metszéspontja adja, ahol r az α alapsík és β metszősík metszésvonala.

Az általános pontokon kívül ún. lényeges pontokat is szerkesztünk, ilyenek a közös szimmetriasíkban levő pontok, a kontúrponatok és a csatlakozó, illetve lezáró paralelkörökön levő pontok.

A közös szimmetriasíkra a felület is, a metszősík is szimmetrikus, tehát a felület tengelyét tartalmazó és a metszősíkra merőleges sík a szimmetriasík. Ebben levő pontok szerkesztésére alkalmazott segédsík maga a szimmetriasík.



19.1. ábra.

A kontúrpontok szerkesztésére a felület kontúrgörbéjét tartalmazó síkot használjuk fel segédsíknak.

A lezáró és csatlakozó (két vagy több felületből összetett felület esetén van ilyen) paralelkörökön levő metszéspontok szerkesztése az általános pontok szerint megy.

Gömb síkmetszete

A gömb síkmetszete kör, amelynek síkja az adott sík, középpontja a gömb középpontjából a síkra állított merőleges O_1 metszéspontja, sugara pedig annak a derékszögű háromszögnek a befogója, amelynek átfogója a gömb sugara, másik befogója pedig az OO_1 szakasz (19.2. ábra). Az ábrán az O középpontú r_G sugarú gömböt az f_1, f_2 fővonalakkal meghatározott síkkal metszettük el. Így az O_1 pont ismeretében a képellipszisek nagytengelyei kijelölhetők.

A k_1 kört

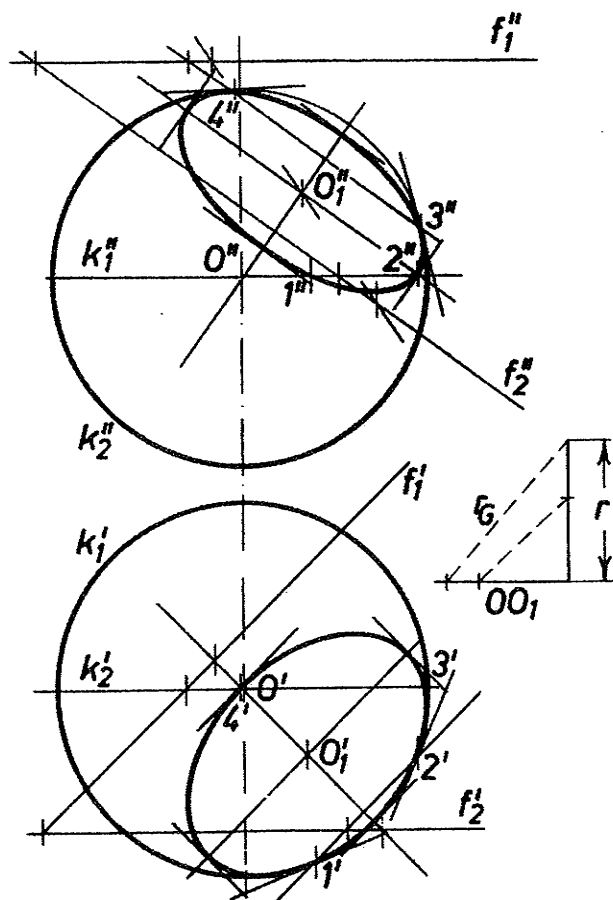
tartalmazó segédsík által a metszősíkban kimetszett egyenes kijelöli az 1, 2 első kontúrpon

tokat. A második kontúrpon

tokat (3, 4) a k_2 -t tartalmazó síkkal szerkesztjük, teljesen hasonló módon. A képellipszisnek kistengelyvégpontjait a 11. fejezetben (az ellipszográf elvének következményeként, l. 11.12. ábra) tanultak szerint határozzuk meg. A láthatóság fel

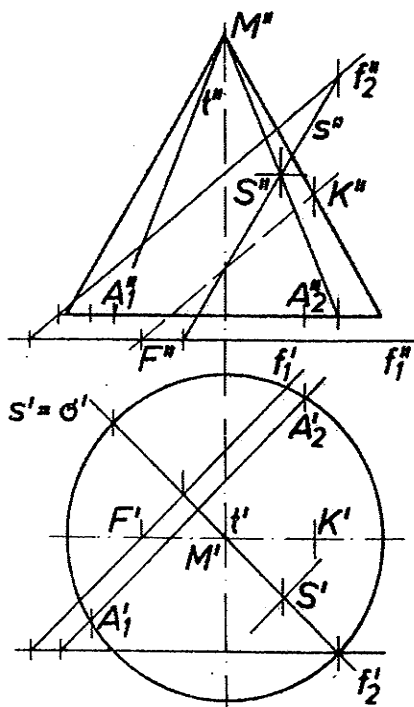
tüntetésénél a metszősík által le

metszett részt eltávolítottuk.

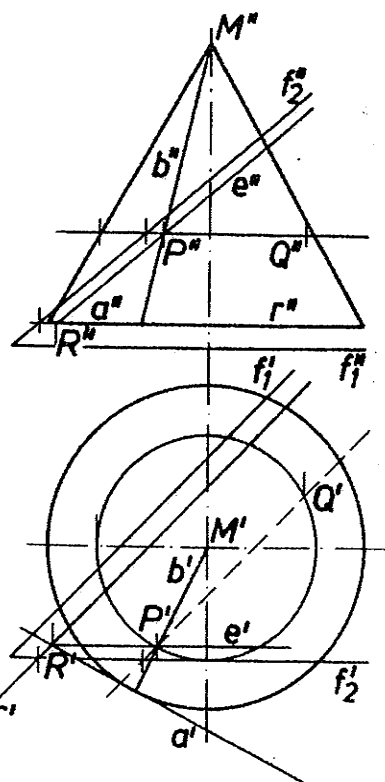


19.2. ábra.

Forgáskúp síkmetszete

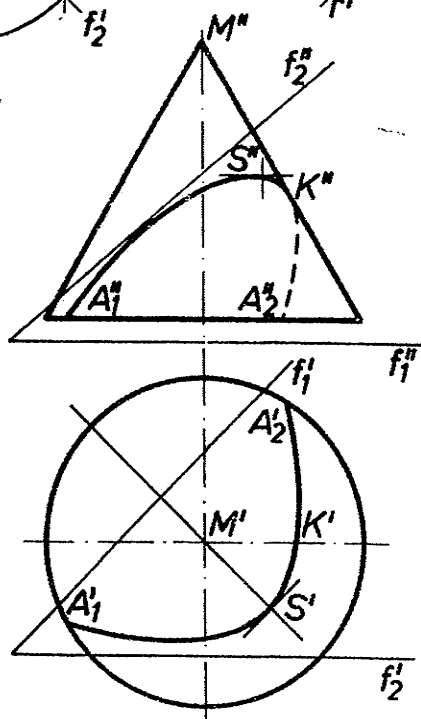


19.3. ábra.



19.4. ábra.

A 19.3.-
19.5. ábrák
ugyanannak a
forgáskúpnek
az f_1 , f_2
fővonalak ál-
tal meghatá-
rozott sík-
kal való met-
szetét mu-
tatják a
szerkesztés
különböző
fázisaiban.



19.5. ábra.

A 19.3. ábrán felvettük a δ közös szimmetriasíkot (első vetítősík). Ez a metszősíkot az s egyenesben, a kúpot pedig két alkotóban metszi. Ezek közös pontja az S pont, amelyben az érintő — a szimmetriaviszonyok miatt — a δ -ra merőleges első fővonal. Az alapkör síkját véve segédsíknak, ez a metszősíkból egy f_1 egyenessel párhuzamos egyenest metasz ki, amely kijelöli az A_1 és A_2 alapköri pontokat.

A kúp főmeridiánsíkját használva segédsíknak — ezt f_1 az F pontban metszi — a kapott f_2 -vel párhuzamos metszésvonal kijelöli a szélső kúpalkotón a K kontúrponthoz.

A 19.4. ábrán felvett segédsíkkal a P és Q általános pontok adódnak. P -ben az (a, b) érintősík és (f_1, f_2) sík metszésvonala RP adja az e érintőt.

A 19.5. ábrán a metszetgörbét rajzoltuk meg, mint a kúpra rajzolt görbét. A láthatóság a K pontban változik meg.

Forgáshenger síkmetszete

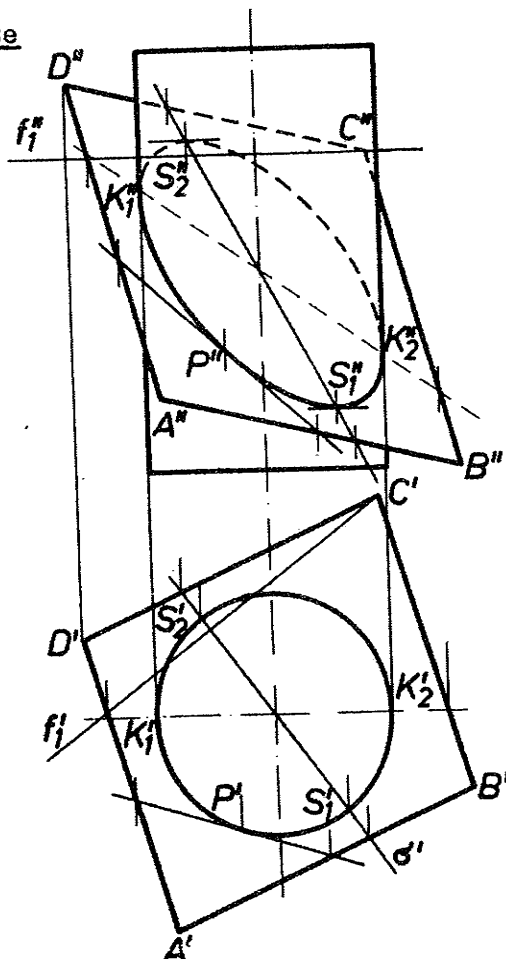
A 19.6. ábrán egy első vetítőhengert metaszunk el egy általános helyzetű síkkal. A közös szimmetriasík a henger tengelyén áthaladó, a metszősík f_1 —

első fővonalára merőleges δ első vetítősík. Ez a hengerből alkotókat, a síktól egy egyenest metasz ki, amelyek az S_1, S_2

szimmetriapontokat határozzák meg, bennük az érintő első fővonal.

A henger főmeridiánsíkja által a metszősíkból ki-metszett egyenes jelöli ki a K_1, K_2 képkörrajzi

pontokat. Minthogy a metszet első képe kör, ennek tetszőleges P' pontjában vesszük az érintőt, amely a metszősíkban fekvő egyenes. Ennek második képe a képellipszis érintője lesz, amelyen az érintési pont rendezővel jelölhető ki.

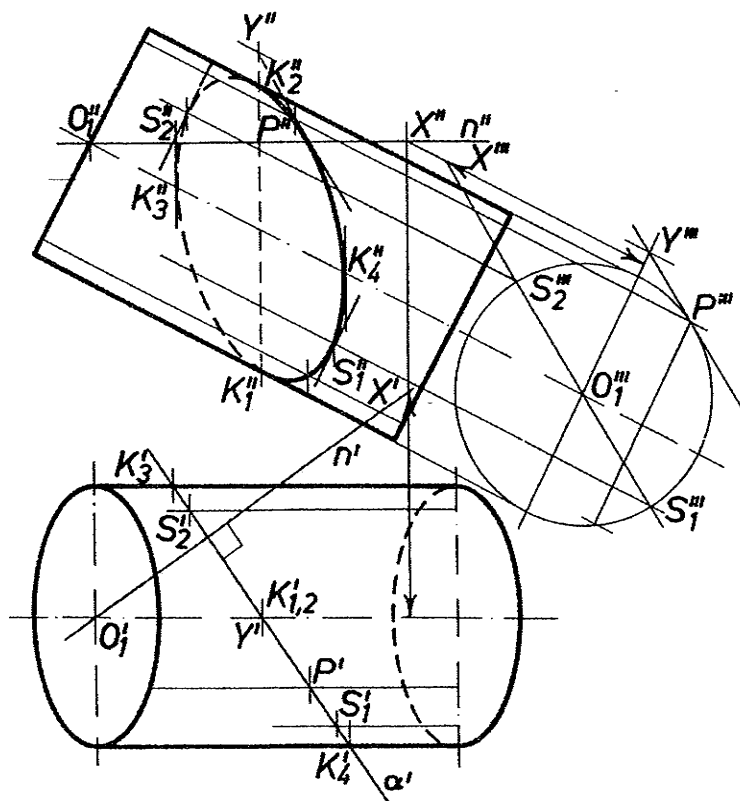


19.6. ábra.

A 19.7. ábrán a második fővonal tengelyű hengert az α első vetítősíkkal metszettük el. A K_1, K_2 második kontúr-pontok, valamint a K_3, K_4 első kontúrponatok második képe közvetlenül adódik, sőt láthatóan konjugált átmérőpárt alkotnak.

A közös szimmetriasíkot a henger tengelye és annak O_1 pontjából az α síkra állított merőleges n egyenes határozza meg. Ennek és a hengernek harmadik képét megszerkesztve az $O_1'''X'''$ egyenes a szimmetriasík harmadik képe, amely kijelöli az S_1, S_2 szimmetriapontokat. Az S_1 és S_2 második képe a transzformáció eljárásával, az első kép közbejöttével határozható meg.

A P általános pontot és benne az érintőt szintén transzformációval határoztuk meg (Y segédpont).



19.7. ábra.

Tórusz síkmetszete

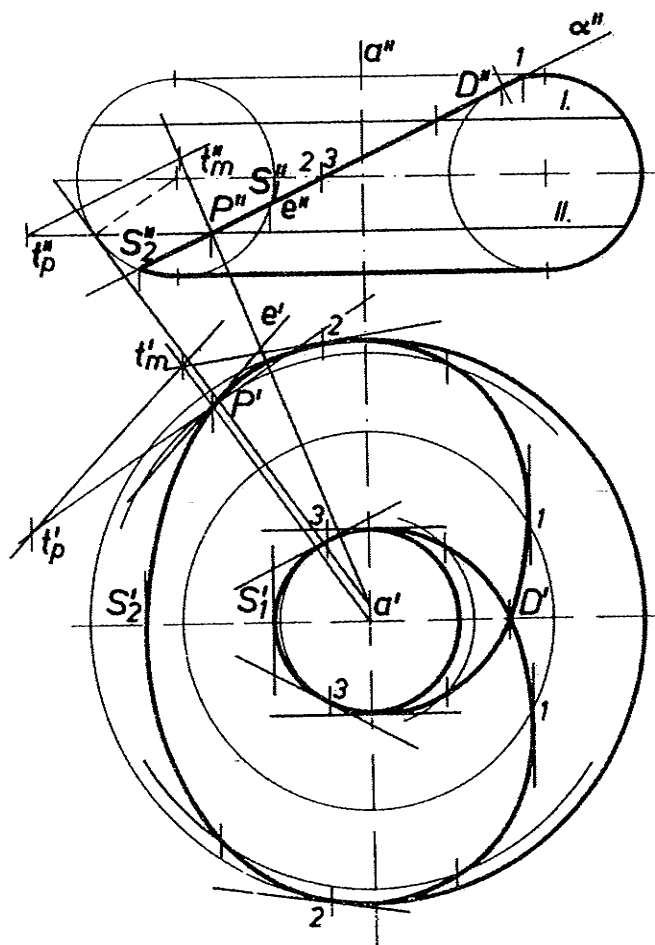
A 19.8. ábrán az a első vetítőegyenes tengelyű tóruszt az α második vetítősíkkal metszettük el. Az α sík a főmeridián kör D pontjában érinti a tóruszt. Ha a metszősík a felület érintősíkja, akkor a metszetgörbének az érintési pont ún. duplapontja (vagy kettős pontja), ami azt jelenti, hogy ezen a ponton kétszer halad át a metszetgörbe és két érintője van. (Ezek szerkesztésével nem foglalkozunk.)

A felület és az α sík közös szimmetriasíkja e feladatban a tórusz főmeridiánsíkja; a szimmetriasíkban levő S_1 , S_2 és D pontok közvetlenül adódnak, S_1 és S_2 pontokban az érintő a szimmetriasíkra merőleges második vetítőegyenes.

Képkörrajzi pontok a legfelső párhuzamos kör síkjában levő 1-gyel jelölt pontok, bennük az érintő második vetítő-

egyenes. Az első képkör-rajzi pontok a torokkör és ekvátorkör síkjában adódnak; a 2-vel jelölt pontok az ekvátorkörön, a 3-mal jelölt pontok a torokkörön vannak. Bennük az érintő első képét a megfelelő kör érintőjeként kapjuk.

Általános helyzetű pontokat az ekvátorkör síkja alatt és felett azonos távolságban felvett I és II segédsíkokkal szerkesztettünk (ezek ugyanolyan sugarú körökben metszik a tóruszt). Érintőt a P pontban szerkesztettünk.



19.8. ábra.

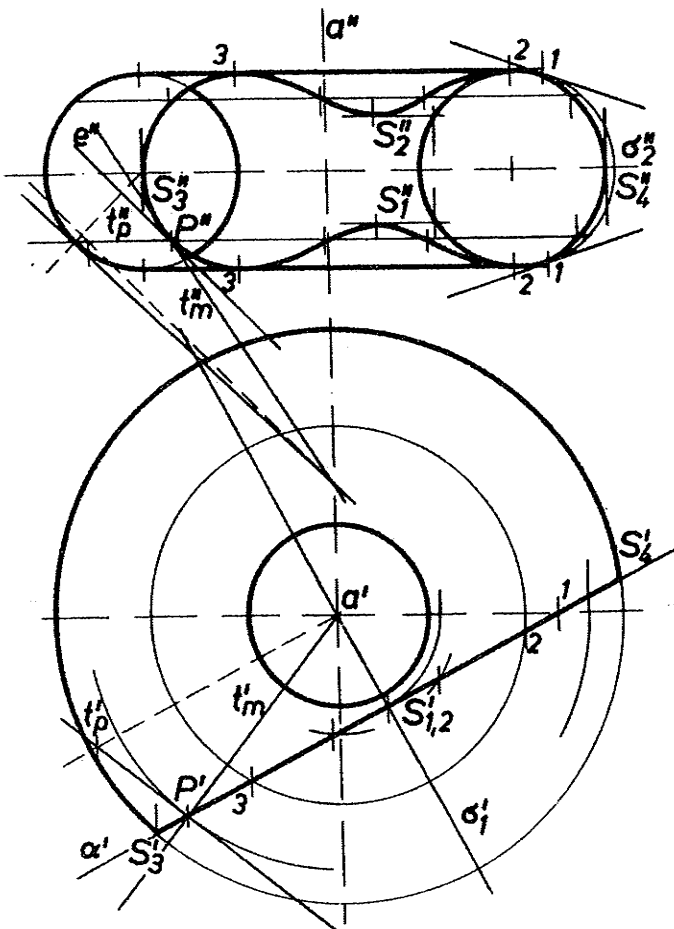
Meghatároztuk a P pontban a felület érintősíkját. Ennek és az α síknak a metszésvonala az érintő, amely a második képen $e'' = \alpha''$. Ezzel párhuzamos egyenest vettünk fel az érintősíkban, amelynek első képével P' ponton át párhuzamos e' az érintő első képe. — A láthatóságot az α sík feletti rész eltávolítása után tüntettük fel.

A 19.9. ábrán az a első vetítőegyeses tengelyű tóruszt az α első vetítősíkkal metszettük. E feladatban két közös szimmetriasík adódik. A σ_1 a tórusz tengelyét tartalmazó, α -ra merőleges sík, amely α -t egy első vetítőegyesben metszi. Ezt az egyenest a tórusz tengelye körül beforgatjuk a főmeridiánsíkba, akkor a főmeridiánkört a szimmetriasíkban levő pontok elforgatottjaiban metszi. E pontok visszaforgatásával adódó S_1 és S_2 pont a két szimmetriapont, bennük az érintő σ_1 -re merőleges, első főegyes. A másik

σ_2 szimmetriasík az ekvátorkör síkja, ebben levő S_3 és S_4 pontok közvetlenül adódnak, bennük az érintő első vetítőegyeses.

A képkörrajzi pontok: a főmeridiánsík és az α sík metszésvonala kijelöli az 1-es pontokat, bennük az érintő második képe a főmeridiánkör érintője. A legalsó, illetve legfelső paralelkörök síkjában kapjuk a 2-vel és 3-mal jelölt pontokat, ezekben az érintő első főegyeses.

Általános pontokat az ekvátorkör síkjára szimmetrikus segédsíkokkal szerkesztettünk.



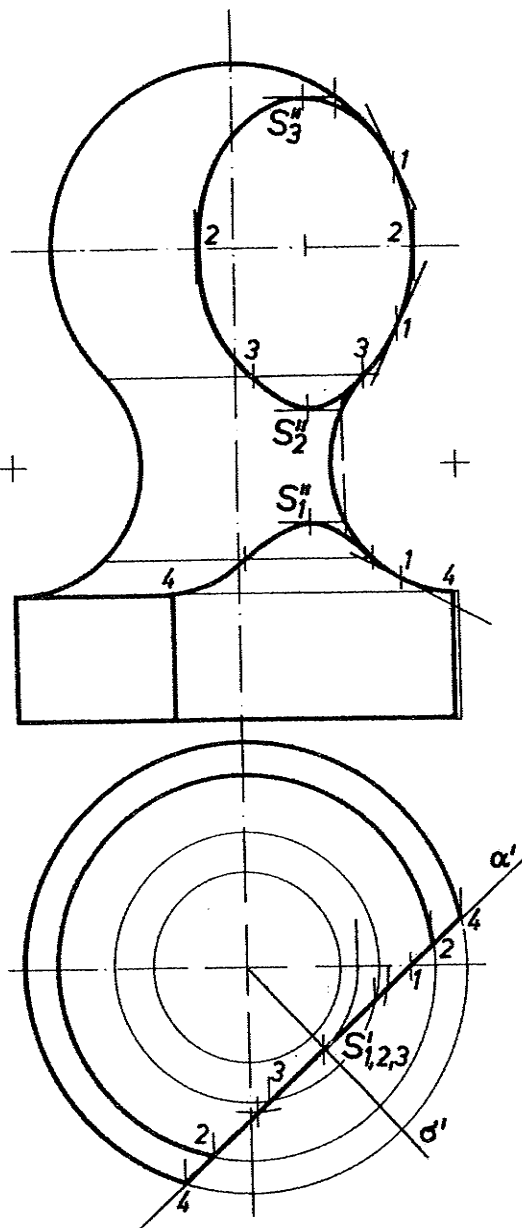
19.9. ábra.

Közülük a P pontban megszerkesztettük az érintősíkot. Az érintősík és metszősík metszévonalának szerkesztése az előző feladathoz hasonlóan történik: az α sík első képével párhuzamos egyenest veszünk fel az érintősíkban, ennek második képével párhuzamos az e érintő második képe. — A láthatóságot úgy tűntettük fel, hogy az α sík előtti részt eltávolítottuk.

Összetett forgásfelület síkmetszete

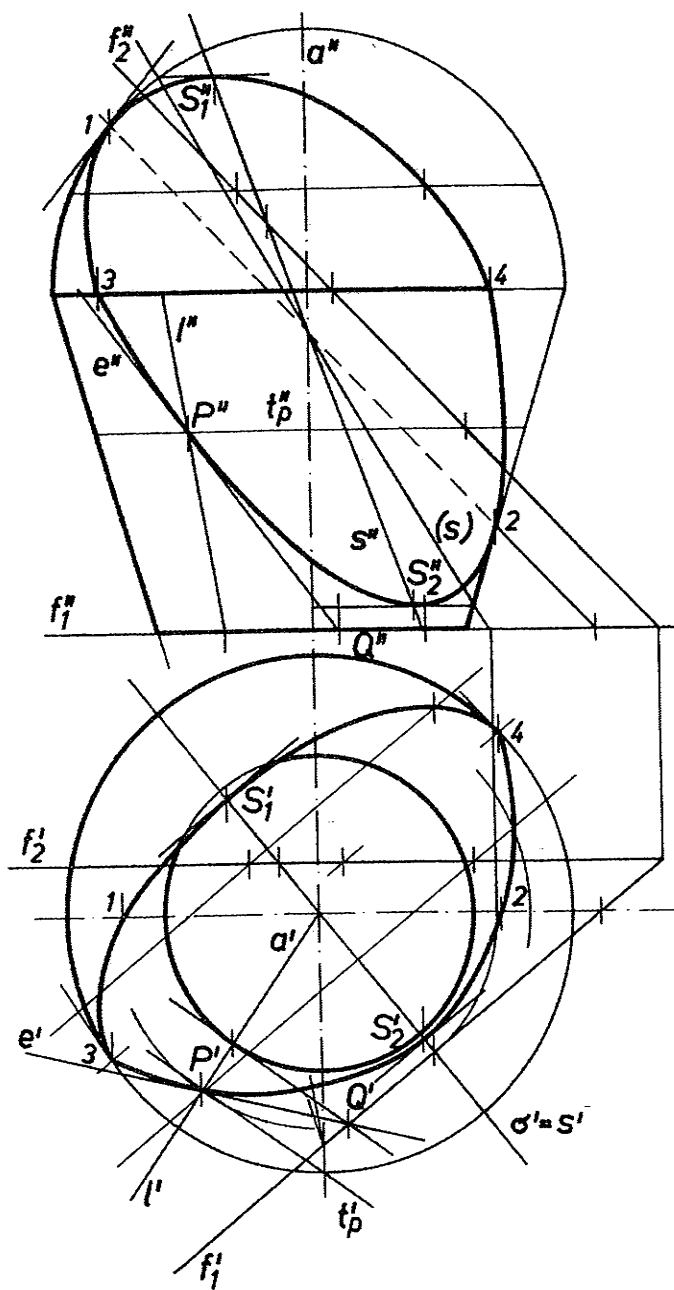
A 19.10. ábrán gömb, tórusz és hengerfelületek csatlakoztatásával kapott felületet metszettük el az α első vetítősíkkal. A közös szimmetriasík σ , az ebben levő pontokat a 19.9. ábrán bemutatott módon szerkesztjük: S_1 , S_2 , S_3 , bennük az érintő első főegyenes.

A képkörrajzi pontok közül a főmeridiánsíkon levő, 1-gyel jelölt pontok közvetlenül adódnak, érintőik II. képe a főmeridiángörbe érintői. A gömb-rész első képkörrajzán kapjuk a 2-es pontokat, érintőik első vetítőegyenesek. A 3-as pontok a gömb és tórusz-rész érintkezési paralelkörén vannak, bennük a tórusz, illetve gömbmetszet érintője megegyezik. A 4-gyel jelölt pontok a tórusz legalsó körén vannak, és egyúttal kijelölik a hengerből kimetszett alkotókat is. Itt a metszetgörbe „megtörik”, mivel ez a kör az összetett felület éle. Ezen az ábrán általános pontban nem szerkesztettünk érintőt.



19.10. ábra.

A 19.11. ábrán félgömb és csomkakúp által kialakított felületnek és az f_1 , f_2 fővonalak által meghatározott síknak a metszévonalát szerkesztettük meg.



19.11. ábra.

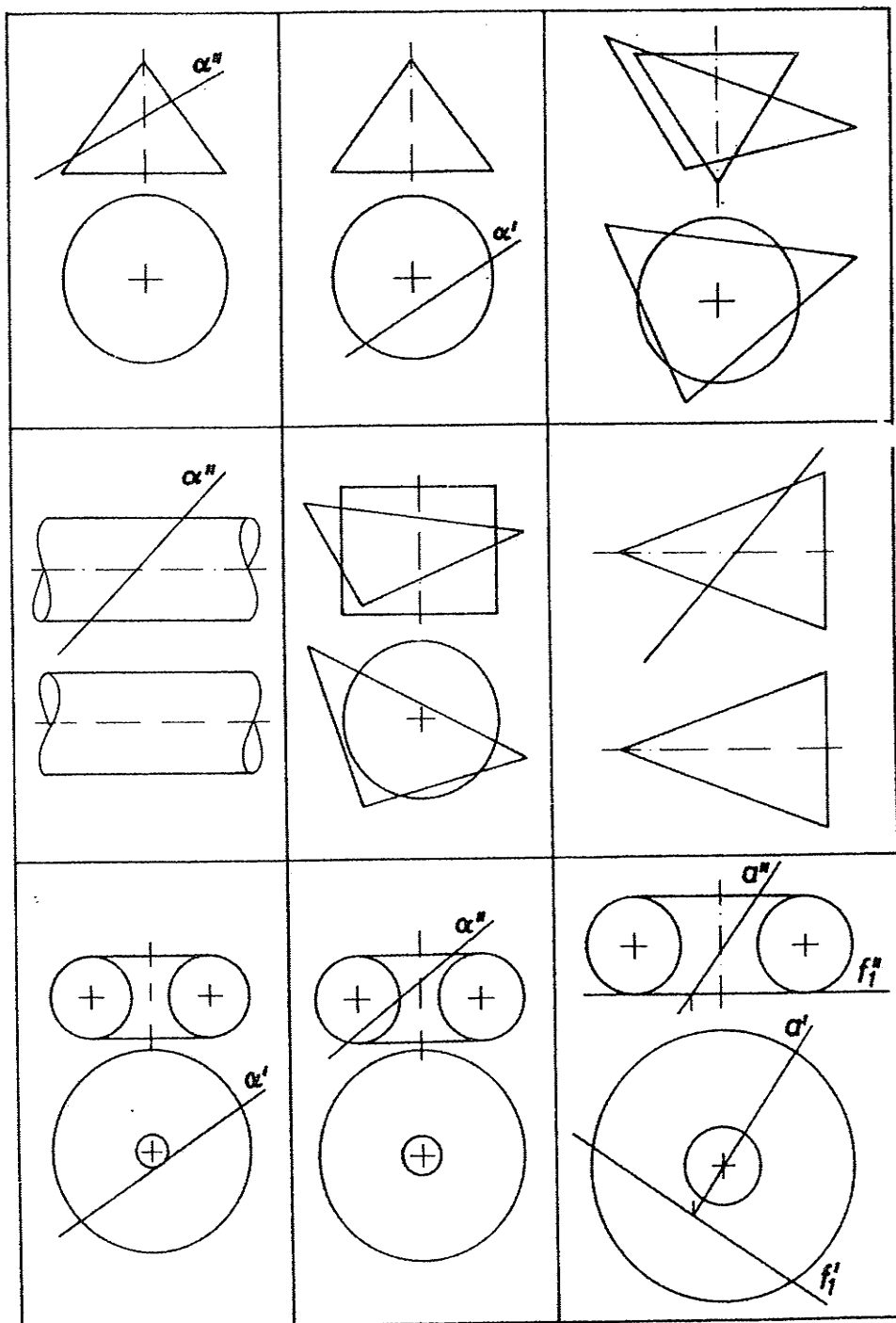
A közös szimmetriasík σ tartalmazza a felület a tengelyét, és merőleges a sík f_1 fővonalára. Ennek a metszősíkkal közös egyenese s , ezt főmeridiánhelyzetbe forgatjuk a felület tengelye körül: (s) . Ez a főmeridiánt a szimmetriasíkban levő pontok elforgatottjaiban metszi, e pontokat visszaforgatva kapjuk az S_1, S_2 szimmetriapontokat, bennük az érintő σ -ra merőleges első fővonal.

Képkörrajzi pontok: A főmeridiánsík a metszősíkból egy f_2 -vel párhuzamos egyenest metsz ki, amely a főmeridiánon az 1, 2 második képkörrajzi pontokat jelöli ki. Első képkörrajzi pontok a félgömb legalsó paralelkörén adódnak: 3, 4. Ezek a pontok a kúpon is a metszethez tartoznak, de mivel e kör a felületnek egy éle, a metszetgörbe a 3 és 4 pontokban megtörik.

Általános helyzetű pontot az a tengelyre merőleges segédsíkokkal szerkeszthetünk. Ilyen pont a P pont, benne az érintősíkot az l és t_p egyenesek határozzák meg. Az érintősík és metszősík e metszésvonalának egy Q pontját úgy állítottuk elő, hogy az f_1 egyenest tartalmazó vízszintes síkkal az érintősíkot is elmetsettük, a kapott egyenes az f_1 -t Q-ban metszi. A QP egyenes a keresett érintő.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 19.12. ábrán vázlatokban megadott síkmetszetszerkesztési feladatokat A/4-es méretű nagyításban.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 330-334., 337., 380-382. pontok.



19.12. ábra.

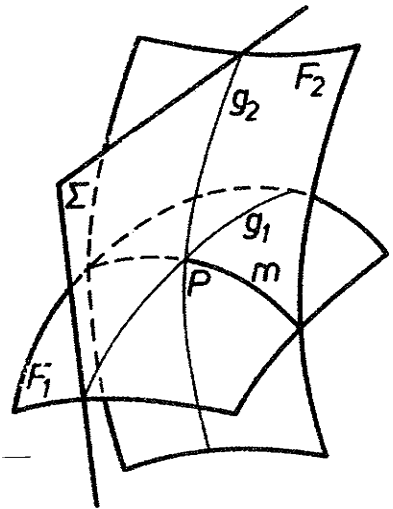
20. FORGÁSFELÜLETEK ÁTHATÁS:

Két felület, F_1 és F_2 áthatásán értjük közös pontjaik összességét, amely általában egy m görbét ad. Ennek pontjait segédsíkok (ritkábban segédgömbök) segítségével szerkesztjük (20.1. ábra). A Σ segédsík az F_1 felületből

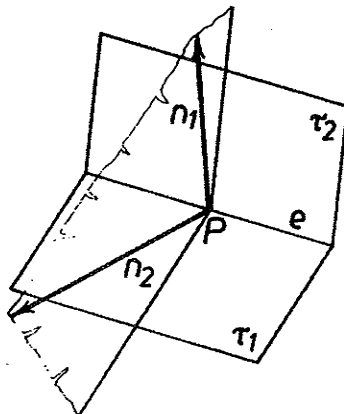
g_1 , F_2 felületből g_2 görbét metsz ki (g_1 és g_2 kör vagy egyenes), ezek közös P pontja az m áthatási görbe pontja.

Az áthatási görbe érintője a P pontban, a két felület érintősíkjaiknak (τ_1 és τ_2) metszésvonala: e . A felületek n_1 , illetve n_2 normálisai merőlegesek a τ_1 , illetve τ_2 érintősíkokra, tehát az e érintő merőleges a normálisok által meghatározott síkra (20.2. ábra).

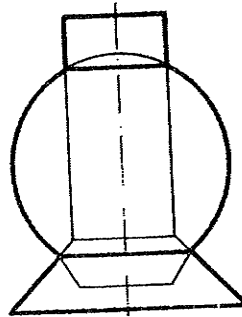
A 20.3. ábrán jól látható, hogy ha két forgásfelület tengelye egybeesik, akkor az áthatási görbe a közös paralelkörökből áll.



20.1. ábra.



20.2. ábra.



20.3. ábra.

Ha két forgásfelület tengelye párhuzamos, akkor a tengelyekre merőleges síkok a felületeket paralelkörökben metszik, amelyek közös pontjai az áthatási görbe pontjai.

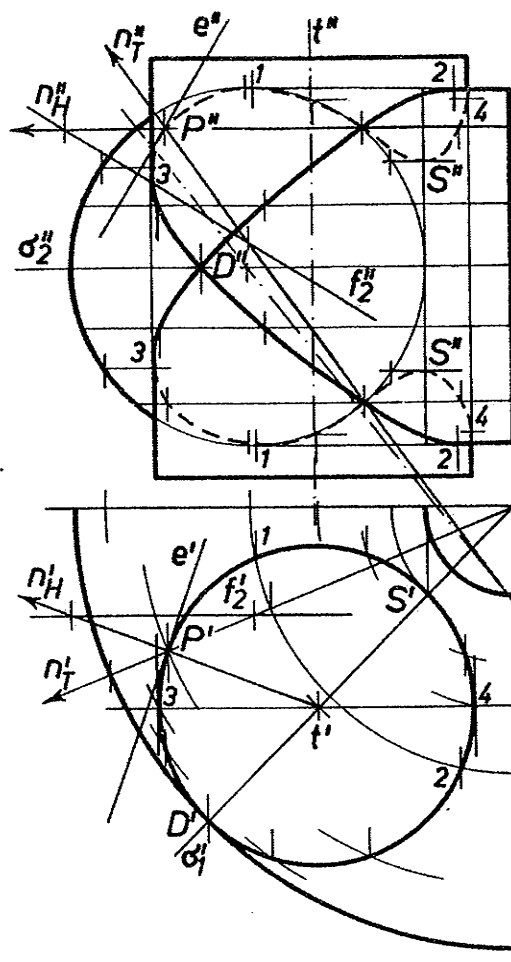
A 20.4. ábrán t első vetítőegyeses tengelyű hengert ábrázoltunk, amely az ugyan-csak első vetítőegyeses tengelyű negyedtóruszt az ekvátorkör D pontjában érinti. A felületek érintkezése miatt a D pont az áthatási görbe duplapontja. Az áthatási görbe első képe a henger első képét jelentő kör.

A tengelyek síkja σ_1 és az ekvátorkör síkja σ_2 a két felület közös szimmetriasíkjai. A σ_2 -ben csak a D áthatási pont van. A σ_1 sík a hengerből kimetsz egy D-t nem tartalmazó alkotót is, amelyet a tórusz tengelye körül a főmeridiánsíkba forgatva, az S szimmetriapontok elforgatottjait metszi ki a főmeridiánkörből. Ezek visszaforgatása után az S pontban az érintő σ_1 -re merőleges első főegyeses.

A tórusz legalsó és legfelső párhuzamos körein levő 1 és 2 pontok az első képből könnyen kijelölhetők, bennük az érintő szintén első fővonal.

A henger szélső alkotóin levő 3 és 4-es pontokat úgy állítjuk elő, hogy a megfelelő alkotókat a tórusz tengelye körül főmeridiánhelyzetbe forgatjuk, a főmeridiánkörrel alkotott metszéspontok visszaforgatottjai lesznek a 3 és 4-gyel jelölt második képkörrajzi pontok. Bennük az érintő képe a hengeralkotó lesz.

Általános helyzetű pontot az ekvátorkör síkjára szimmetrikus segédsíkokkal szerkesztettünk. A P általános helyzetű pontban az érintőt az n_H és n_T normálisok síkjára merőleges egyenes adja. A görbe megrajzolása után feltüntetjük a láthatóságot.



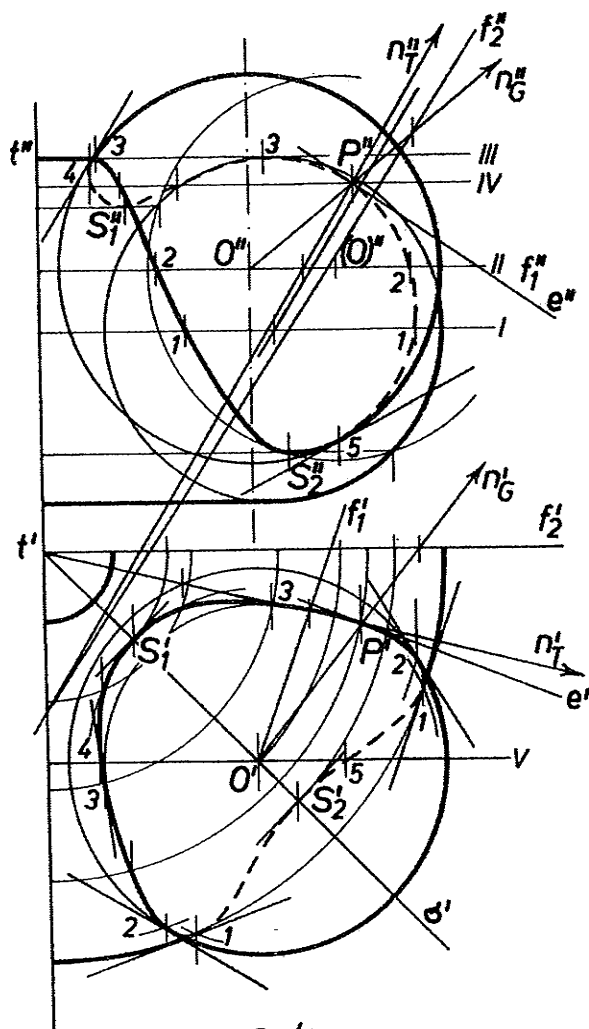
20.4. ábra.

A 20.5. ábrán egy negyedtórusz és egy gömb áthatását szerkesztettük meg. Ez a feladat is tekinthető úgy, hogy a forgásfelületek tengelyei egymással párhuzamos, első vetítőegyeneseik.

A közös szimmetriasík a t egyenes és O gömbközéppont által meghatározott σ sík. Ez a sík a gömbből egy gömbi főkört tartalmaz, a tóruszból egy meridiánkört. Tehát σ -t a t körül főmeridiánsíkba forgatva az O pont elforgatottja $(O)''$, ami körül a gömb sugarával rajzolt kör a főmeridiánon az elforgatott szimmetriapontokat metszi ki. Ezek visszaforgatottja S_1, S_2 , amelyekben az érintő a σ síkra merőleges első fővonal.

Első képkörrajzi pontok az I és II segédsíkokkal adódnak 1-gyel, illetve 2-vel jelölve. Második képkörrajzi pontok a III segédsíkkal adódnak: a 3-mal jelölt pontokban az érintő első képe könnyen meghatározható, mivel a segédsík a tórusz érintősíkja, ezért a gömbből kimetszett kör érintője lesz a két érintőzík metszésvonala. Az V síkban levő áthatási pontok nem szerkeszthetők, de az áthatási görbe első képét ismerve kijelölhetők a gömb második képkörrajzán (4 és 5 pontok).

Általános pontot a IV segédsíkkal szerkesztettünk, a felületekből kimetszett körök közös pontjaiként adódó áthatási pontok közül P -ben szerkesztettünk érintőt, ez a felületi normálisok síkjára merőleges.



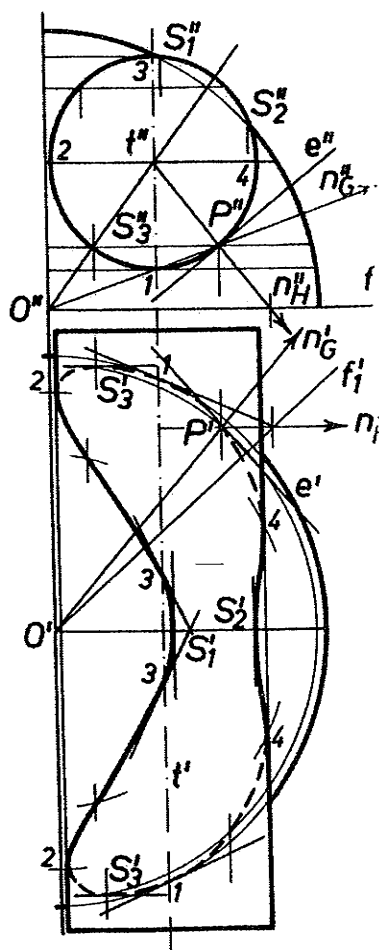
20.5. ábra.

Kitérő tengelyű forgásfelületek áthatását általában úgy próbáljuk megszerkeszteni, hogy az egyik felület tengelyére merőleges segédsíkokat alkalmazunk, vagy pedig olyan segédsíkokkal próbálkozunk, amelyek az áthatásban szereplő hengerből alkotókat metszenek ki.

A 20.6. ábrán szereplő negyedgömb és második vetítő-egyenestengelyű henger áthatásában nem feltétlenül kitérő tengelyűek a felületek, azonban úgy tűnik, hogy itt legcélszerűbb az első képsíkkal párhuzamos segédsíkokkal dolgozni. (Mintha kitérő tengelyűek lennének.)

Az áthatásnak két közös szimmetriasíkja van, az egyik az O ponton áthaladó, a henger tengelyére merőleges sík, a benne levő pontok S_1, S_2 ; a másik szimmetriasík az O pont és a henger tengelye által meghatározott sík, amely a hengerből az S_3 pontot tartalmazó alkotót metszi ki. Ezen az alkotón át felvett segédsíkban az S_3 -mal jelölt pontokon kívül még egy P általános pont is adódik, amelyben az érintőszerkesztést a normálisok módszerével hajtottuk végre.

Képkörrajzi pontok adódnak a legfelső és legalsó hengeralkotókon (3, illetve 1), ezekben az első képen az érintő a gömbből kimetszett kör érintője. A jobb és bal oldali hengeralkotókon adódnak a 2, illetve 4-gyel jelölt pontok. — Az áthatási görbe megrajzolása után feltüntettük a láthatóságot.



20.6. ábra.

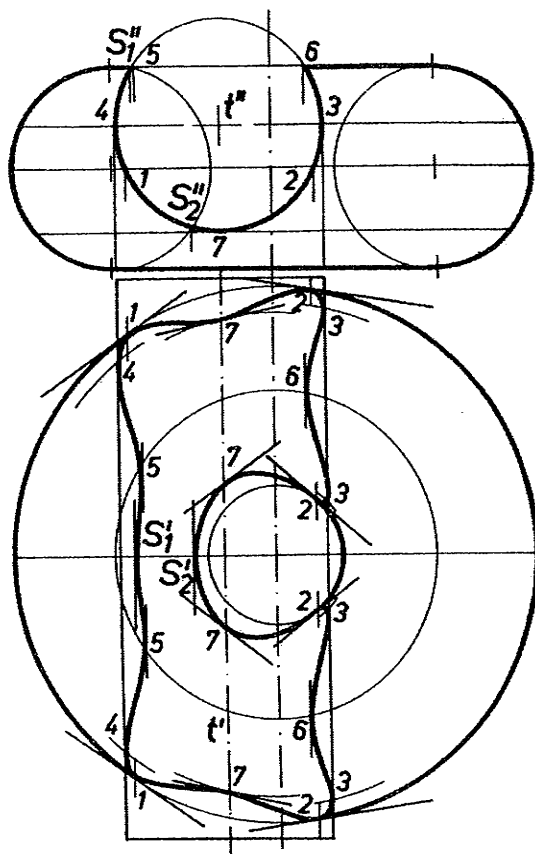
A 20.7. ábrán szereplő tórusz és henger már valóban kitérő tengelyű forgásfelületek. Az áthatási pontok a tórusz tengelyére merőleges segédsíkokkal szerkeszthetők, mivel ezek a hengerből alkotókat metszenek ki. Ezen az ábrán csak az ún. lényeges pontok szerkesztésével foglalkoztunk.

A közös szimmetriasík a tórusz főmeridiánsíkja, benne az S_1 és S_2 szimmetriapontok. — Első képkörrajzi pontok az ekvátorkör síkjával "szeletelve" adódnak az ekvátorkörön és a torokkörön: 1-gyel és 2-vel jelölve. A henger tengelyén áthaladó vízszintes sík a henger első képkörrajzán levő, 3-mal és 4-gyel jelölt pontokat adja.

Második képkörrajzi pontok a tórusz legfelső párhuzamos körén adódnak (5, illetve 6, bennük az érintő a kimetszett hengeralkotó); valamint a henger legalsó alkotóján levő pontok (7, bennük az érintők a tóruszból kimetszett körök érintői).

A 20.8. ábrán egy első vetítőegyenestengelyű kúp és egy hozzá kitérő helyzetű, első fővonal tengelyű henger áthatását szerkesztettük meg. A σ közös szimmetriasík átmege a kúp t tengelyén és merőleges a henger a tengelyére. Ez a sík a hengerből kört metsz ki, amelynek középpontját a kúp főmeridiánsíkja forgatva, az elforgatott kör a szélső kúpalkotókból az S_1 , illetve S_2 szimmetriapontok elforgatottjait metszi ki. Ezeket visszaforgatva kapjuk a szimmetriasíkban fekvő pontokat, amelyekben az érintő σ -ra merőleges első fővonal.

Képkörrajzi pontok csak a hengeren szerkeszthetők: az 1-gyel, illetve 2-vel jelölt pontok a legfelső, illetve legalsó hengeralkotókon át fektetett vízszintes segédsí-



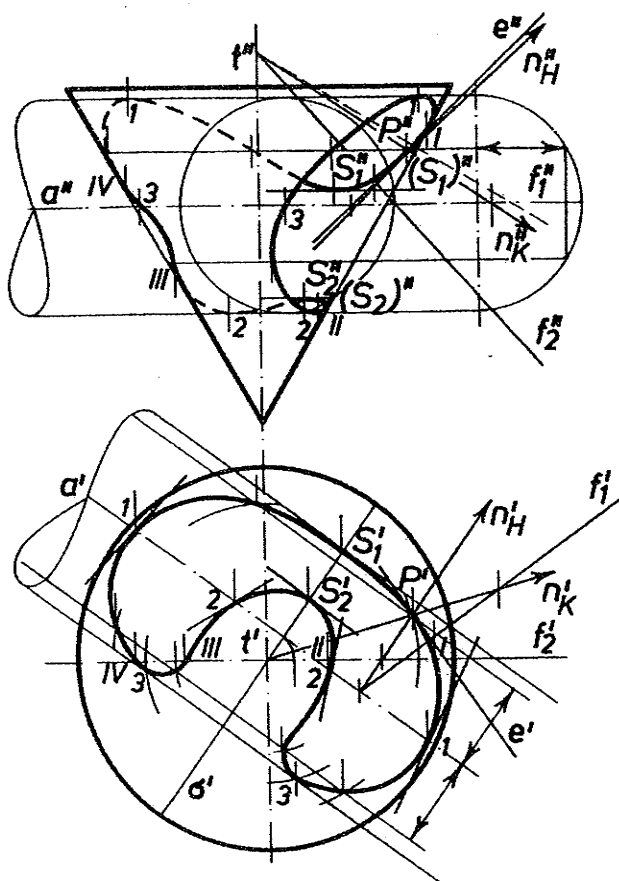
20.7. ábra.

kokkal adódnak. Az első képkör-rajzi pontok (3) a henger tengelyét tartalmazó szeletelősíkkal adódnak.

Általános helyzetű pontokat a kúp t tengelyére merőleges szeletelősíkokkal szerkesztünk. Egy ilyen sík a kúp-ból kört metsz ki, ennek sugara közvetlenül lemérhető. A hengert alkotókban metszi, ezek első képét úgy határozzuk meg, hogy a henger egy körmetszetét második képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk; a beforgatott kör középpontján áthaladó függőlegestől lemérjük a szeletelősík képén levő körpontok távolságát, ez a távolság a kimetszett alkotók első képének a tengely első képétől való távolsága. Ezen alkotók és a kúp-ból kimetszett kör metszéspontjai az áthatási görbe általános pontjai. A P pontban a normálisok módszerével megszerkesztettük az áthatási görbe érintőjét.

Az áthatási görbe első képe a kúp főmeridiánját az I, II, III, IV pontokban metszi, ezeket a második képen, a kúp szélső alkotóin jelöljük ki. E pontok — bár nem szerkeszthetők — a láthatóság helyes feltüntetésénél igen fontosak. A láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy a hengert és az általa kivágott részt eltávolítottuk.

Ha a két forgásfelület tengelyei metszik egymást, akkor a tengelyek metszéspontjai körül felvett segédgömbök mindkét felületből paralelköröket metszenek ki. A segédgömbön levő körök metszéspontjai az áthatási görbe pontjai.



20.8. ábra.

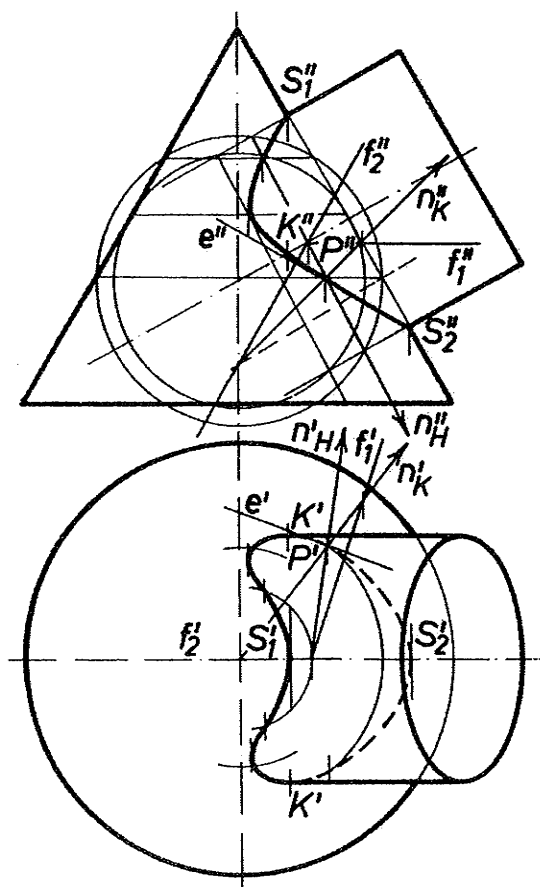
A 20.9. ábrán met-
szó tengelyű forgáskúp
és forgáshenger átha-
tását szerkesztettük
meg. Az áthatás közös
szimmetriasíkja a kúp
főmeridiánsíkja, te-
hát az áthatási görbe
második képe ún. dup-
lavetület lesz. A szim-
metriasíkban fekvő S_1
és S_2 pontok közvetle-
nül adódnak, bennük az
érintő második vetítő-
egyenes.

A második képen
megrajzoljuk a segéd-
gömböt, a felületekből
kimetszett körök egye-
nesdaraboknak látsza-
nak. Ezek metszéspon-
tjai az áthatási pontok
kettős vetületei. Első
képeiket a kúpon levő
paralelkörökön jelöl-
jük ki. Ilyen pont a
P pont is, amelyben az
érintő a normálisok
módszerével szerkeszt-
hető meg.

A legkisebb gömb,
amely még ad áthatási
pontot, a kúp érintő-
gömbje. Ebben az érin-
tő a hengerből kimet-
szett kör érintője.

A görbe második képének megrajzolása után kijelölhe-
tők a henger első képhatárán levő K pontok. — Végül fel-
tüntettük a láthatóságot.

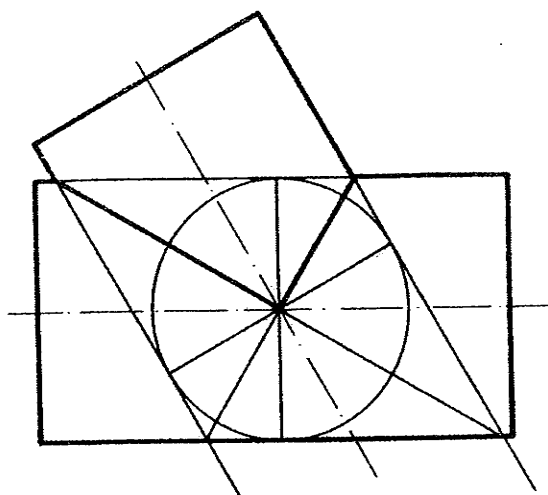
Ha kúpok és hengerek áthatásánál van a két felület-
nek közös érintőgömbje, akkor az áthatási görbe két kúp-
szeletre esik szét, ami duplavetület esetén azt jelenti,
hogy az áthatási görbe képe két egyenesdarab.



20.9. ábra.

Ezt mutatja be a 20.10. ábra, ahol cső-elágazásként tüntetjük fel a láthatóságot.

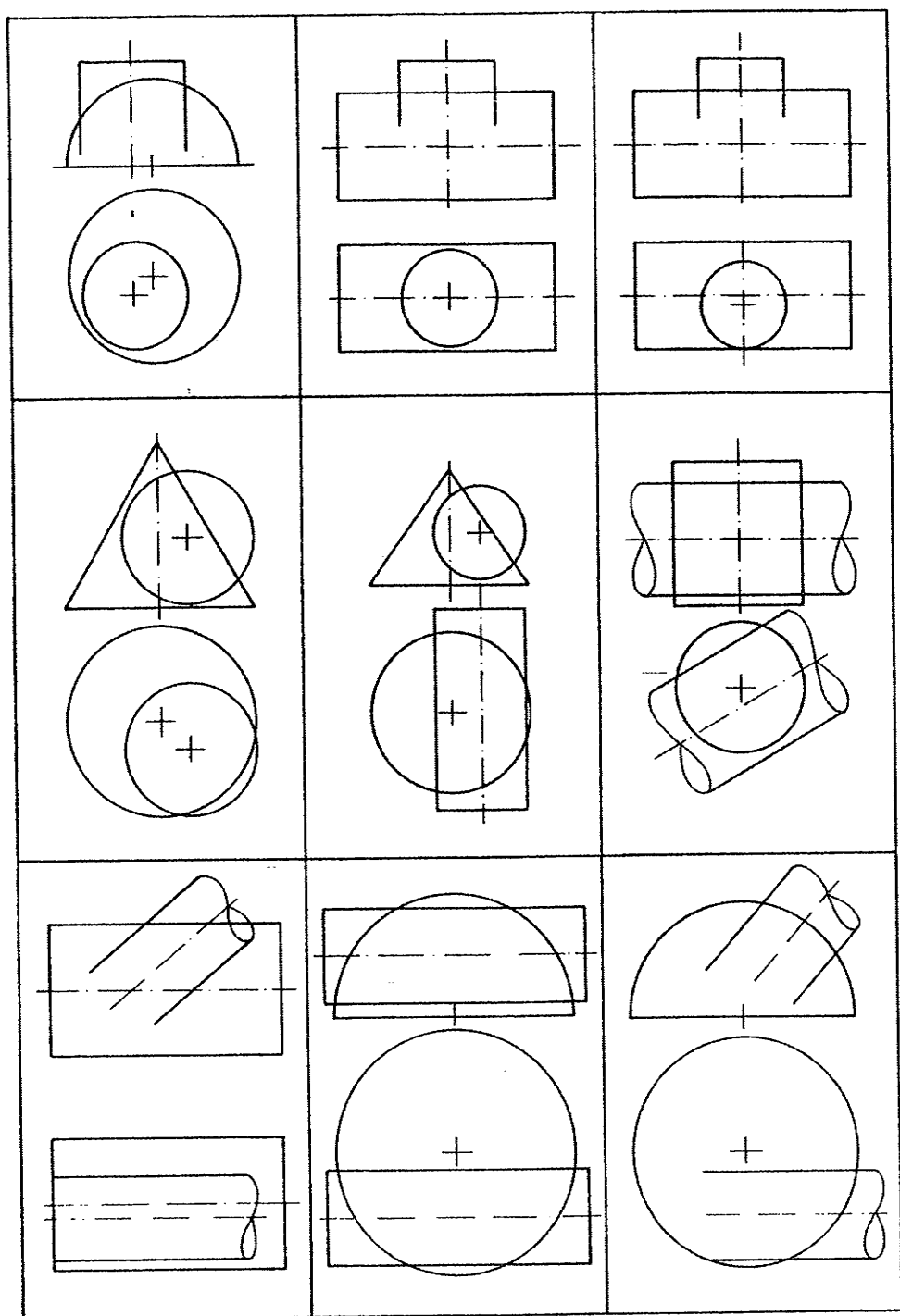
Az ilyen áthatásokat a műszaki életben gyakran alkalmazzák.



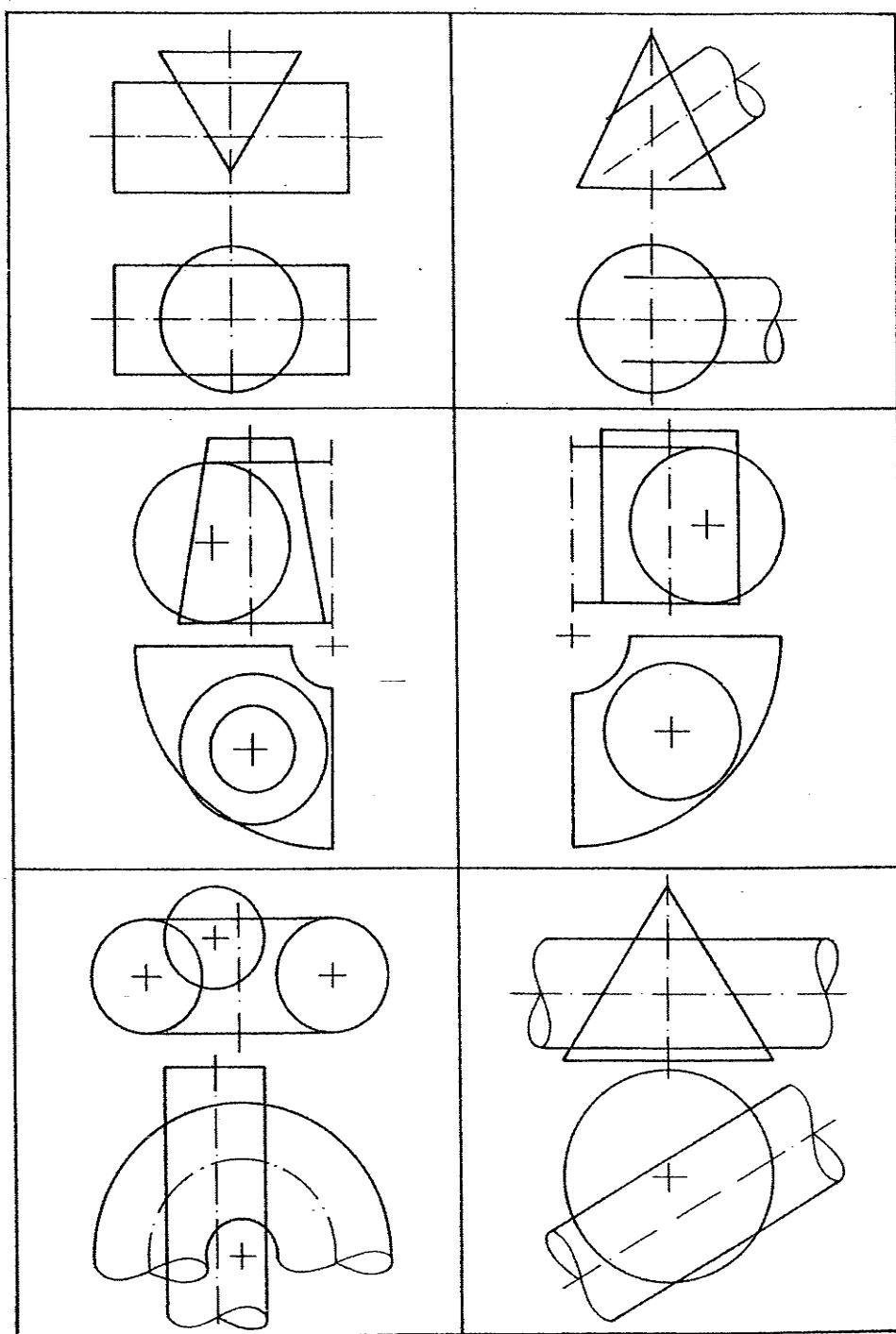
20.10. ábra.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 20.11. és a 20.12. ábrákon vázlatban megadott áthatási feladatokat A/4-es méretre való felnagyításban.

Elméleti tananyag: Tankönyv 384., 341-349. pontok.



20. 11. ábra.



20.12. ábra.

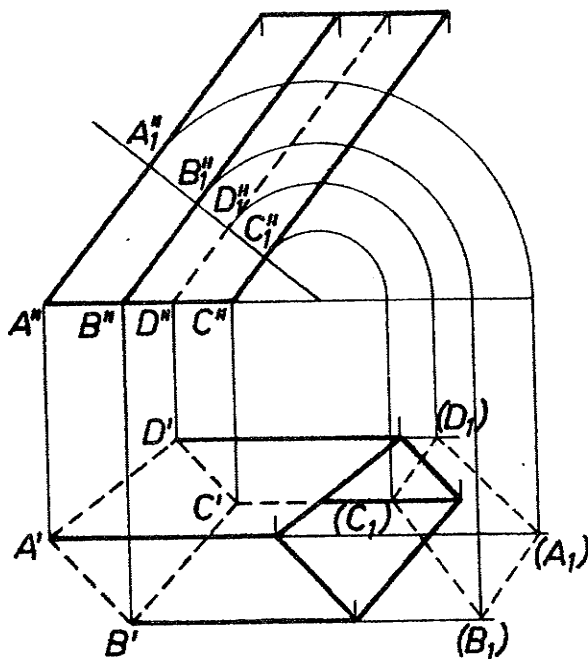
21. KÚPOK ÉS HENGEREK SÍKBA TERÍTÉSE

Poliéderek síkba terítése

A poliéder határoló lapjait olyan sorrendben rajzoljuk meg valódi méretben ugyanarra a síkra, hogy a kapott lapokat kivágva és a szomszédos lapok élei mentén összehajtogatva (ragasztással) az eredeti poliédert kapjuk meg. Könnyen látható, hogy a méretes alapszerkesztések ismeretében ez a feladat semmi problémát nem jelent. A kiterítésnél — mindig a síkba terített test külső felét rajzoljuk meg. Gúla síkba terítésénél a palástot határoló háromszögeket kell eredeti nagyságban előállítani.

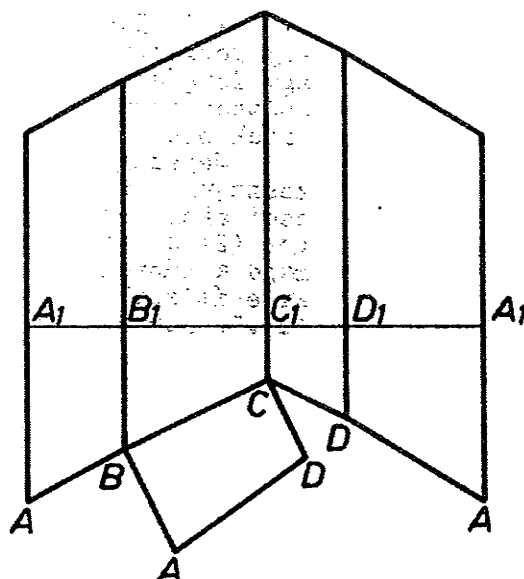
Hasáb síkba terítésénél felhasználjuk azt a szemléletes tényt, hogy a hasáb oldaléleit merőlegesen metsző síkkal létesített síkmetszet a kiterítésben az oldalélekre merőleges egyenesbe megy át.

A 21.1. ábrán megadott hasáb oldalélei második főegyenesei, egy ezekre merőleges sík az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban metszi a hasábot. E metszetet képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk, így a leforgatottban megkapjuk az oldalélek távolságát.



21.1. ábra.

A 21.2. ábrán felmérjük egy egyenesre e távolságokat. Az oldalélek normálmetszet alatti és feletti hossza a második képből lemérhető, ezáltal a hasáb lapjainak a kiterítését előállítottuk.



21.2. ábra.

Kifejthető felületek

Egy felület síkba teríthető, ha a felület egyenes mozgásával írható le, és a felület érintősíkja az egyenes minden pontjában ugyanaz a sík. Ezeket az egyeneseket a felület alkotóinak mondjuk.

Kimutatható, hogy a felületen haladó görbe (érintője) és az alkotó által bezárt szög a térben és a kiterítésben egyenlők.

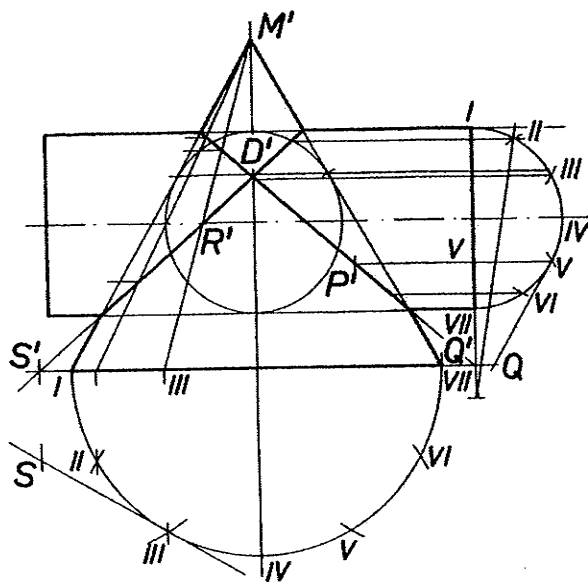
A kúpok és a hengerek kifejthető felületek.

Bár kifejthetők a kúpok és a hengerek, de síkba terítésüket az esetek többségében a beléjük írt közelítő gúla, illetve hasábok segítségével tudjuk csak megszerkeszteni. Itt azt feltételezzük, hogy a felosztás olyan sűrű, hogy a felületeket határoló görbék húrjai és a kiterítésben a határoló görbék megfelelő húrjai közötti különbség elhanyagolható.

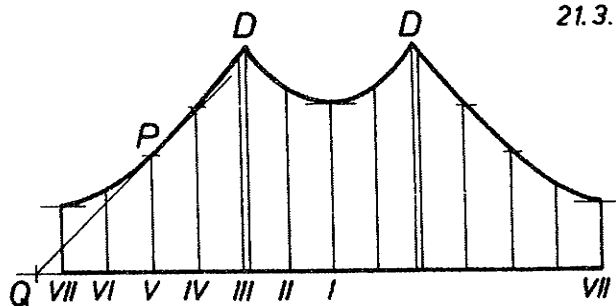
Ugyanazon a felületen haladó két görbének a felület egy alkotójával alkotott metszéspontjaiban az érintők egyazon felületi érintősíkban vannak, tehát vagy metszik egymást, vagy párhuzamosak.

A 21.3. ábrán
egy forgáskúp és
egy forgáshenger
széteső áthatását
adtuk meg.

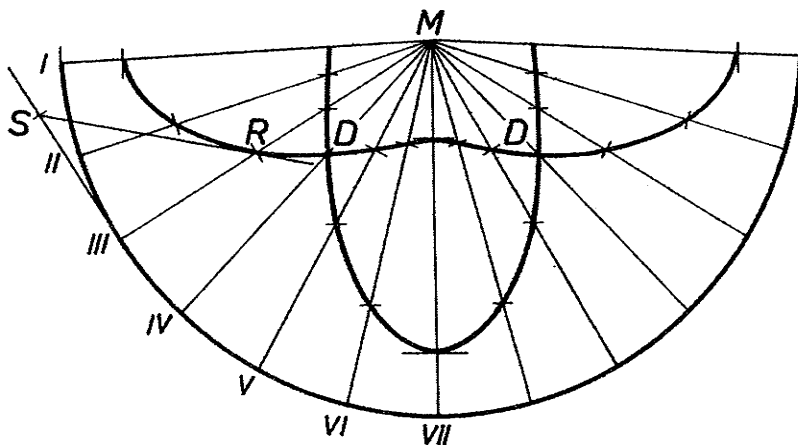
Megszer-
kesztjük a kúpba
csatlakozó hen-
ger (21.4. ábra),
majd a kúppalást
kiterítését
(21.5. ábra).



21.3. ábra.



21.4. ábra.



21.5. ábra.

A henger alapköréről (amely normálmetszet) kiegészítő vetületet készítettünk, Snellius módszerével meghatároztuk az I és II közötti ív hosszát, felvettük az alapkör kiterítését adó egyenest és a megfelelő pontokon át meghúztuk a hengeralkotókat.

A 2¹.4. ábrán az I, II, III, IV, V, VI, VII pontokat és szimmetrikus megfelelőiket jelöltük ki, a hengeralkotókra a megfelelő hossz a vetületből lemérhető, a D pontot tartalmazó hengeralkotót II és III közé iktattuk. A P pontban az érintőt a PQV háromszögből állítottuk elő, QV a kiegészítő vetületben mérhető le.

A 2¹.5. ábrán a kúppalást sugarát a szélső kúpalkotóról mérhetjük le. Az I, II, III, ... pontokat az alapkör húrjaival egyenlő szakaszokkal jelöltük ki. Az egyes alkotókon levő pontokat az alapkör síkjával párhuzamosan kivetítettük a szélső alkotóra, ahol távolságaik valódi méretben látszanak. Ezekkel a távolságokkal jelöljük ki az áthatási görbe pontjait az alkotókon. Az R és III pontban az érintőt az RSIII háromszöggel határozzuk meg. Az I és VII alkotók az áthatás szimmetriasíkjában vannak, ezért ezeken az alkotókon levő áthatási pontokban az érintő az alkotóra merőleges. Ennek megfelelően az I és VII alkotókat a kiterítésben adódó görbék is merőlegesen metszik.

Ferde körkúp kiterítése

A 2¹.6. ábrán az M csúcsú ferde körkúpot az α második vetítősíkkal metszettük el. Ennek kiterítésére felvesszük az alapkör 12 egyenlő részre osztását, a megfelelő alkotókon kijelöljük az α síkkal alkotott metszéspontokat. A P-beli érintő második képe az α sík második képe, az 5 ponthoz tartozó alapköri érintőt a Q pontban metszi. Ennek első képét kijelölve, a QP első képe adja a metszetgörbe érintőjét. — A kiterítésben a beírt gúla oldaléleit szerkesztjük meg, majd az alapkör húrjaival képezett háromszögeket sorrendben egymásután megszerkesztve kapjuk a kúp félpalástját. A szakaszhosszak meghatározását ügyesen berendezve, a metszéspontok helyét az alkotókon arányos szerkesztéssel jelöltük ki. A P és 5 pontokban az érintőt a P5Q háromszög valódi alakjának előállításából kapjuk.

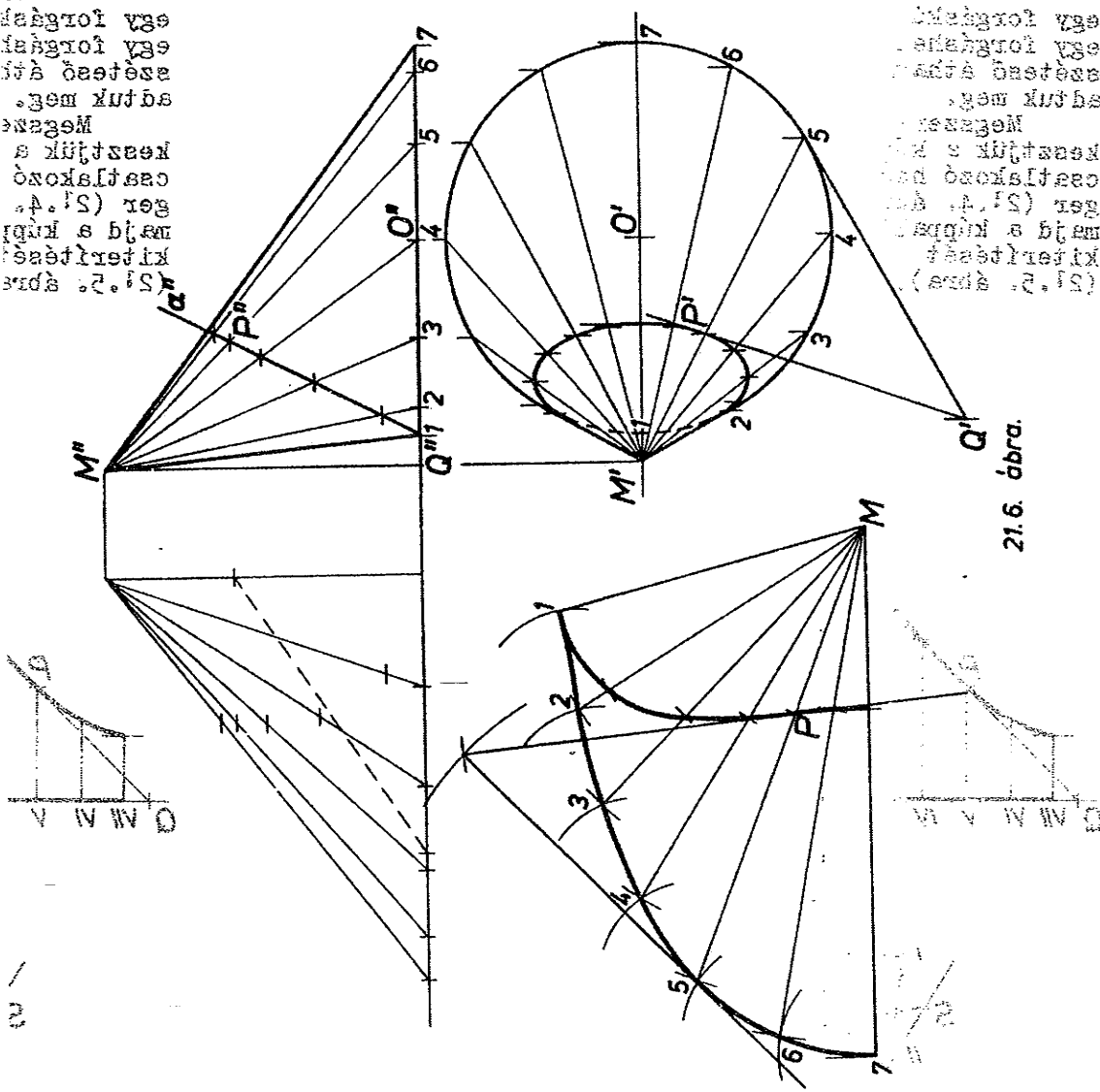
Ferde körhenger kiterítése

A 2¹.7. ábrán ferde körhengert ábrázoltunk, amelyet egy második vetítőegyenest tengelyű forgáshenger metsz el. A kiterítéshez az alapkört 12 egyenlő részre osztottuk, a megrajzolt alkotókon kijelöltük az áthatási görbe pontjait. A P pontban az érintő második képe megrajzolható, és a 3 ponthoz tartozó alapköri érintőt a Q pontban metszi. Az első képen a Q'P' egyenes adja az érintő első képét.

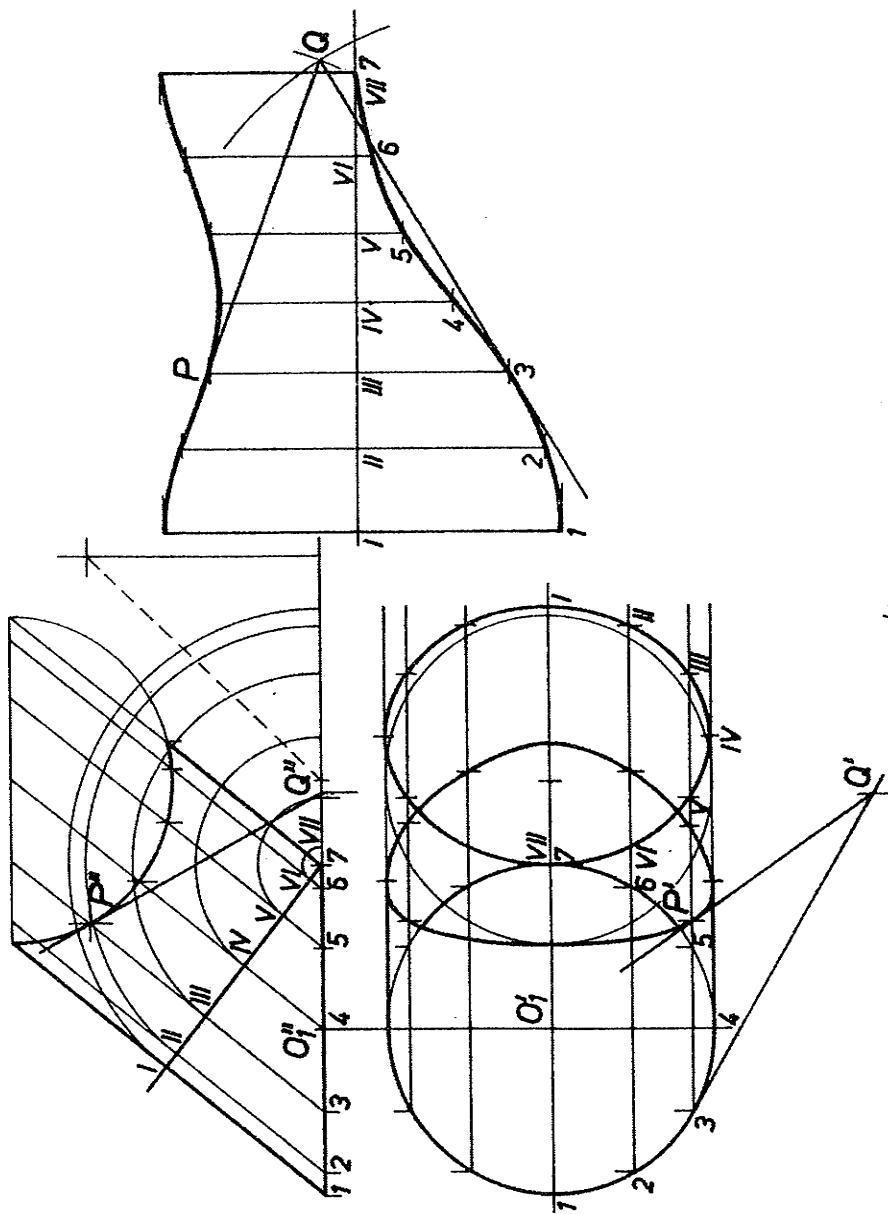
Felvesszük a ferde henger normálmetszetét, és beforgatjuk az alapkör síkjába. A kapott ellipszis húrjai lesznek a normálmetszet kiterítésében az alkotók távolságai. Az alkotók egyenesesire felmérve — a második képről — a normálmetszet alatti és feletti távolságokat, a palást ki-

A 21.6. ábra
 egy forgó
 egy forgó
 asztal
 ábrán meg.
 Mérés
 készült a
 csatlakozó
 ger (S).
 meg a kúpa
 kiterjedés
 (S).

A 21.6. ábra
 egy forgó
 egy forgó
 asztal
 ábrán meg.
 Mérés
 készült a
 csatlakozó
 ger (S).
 meg a kúpa
 kiterjedés
 (S).



21.6. ábra.

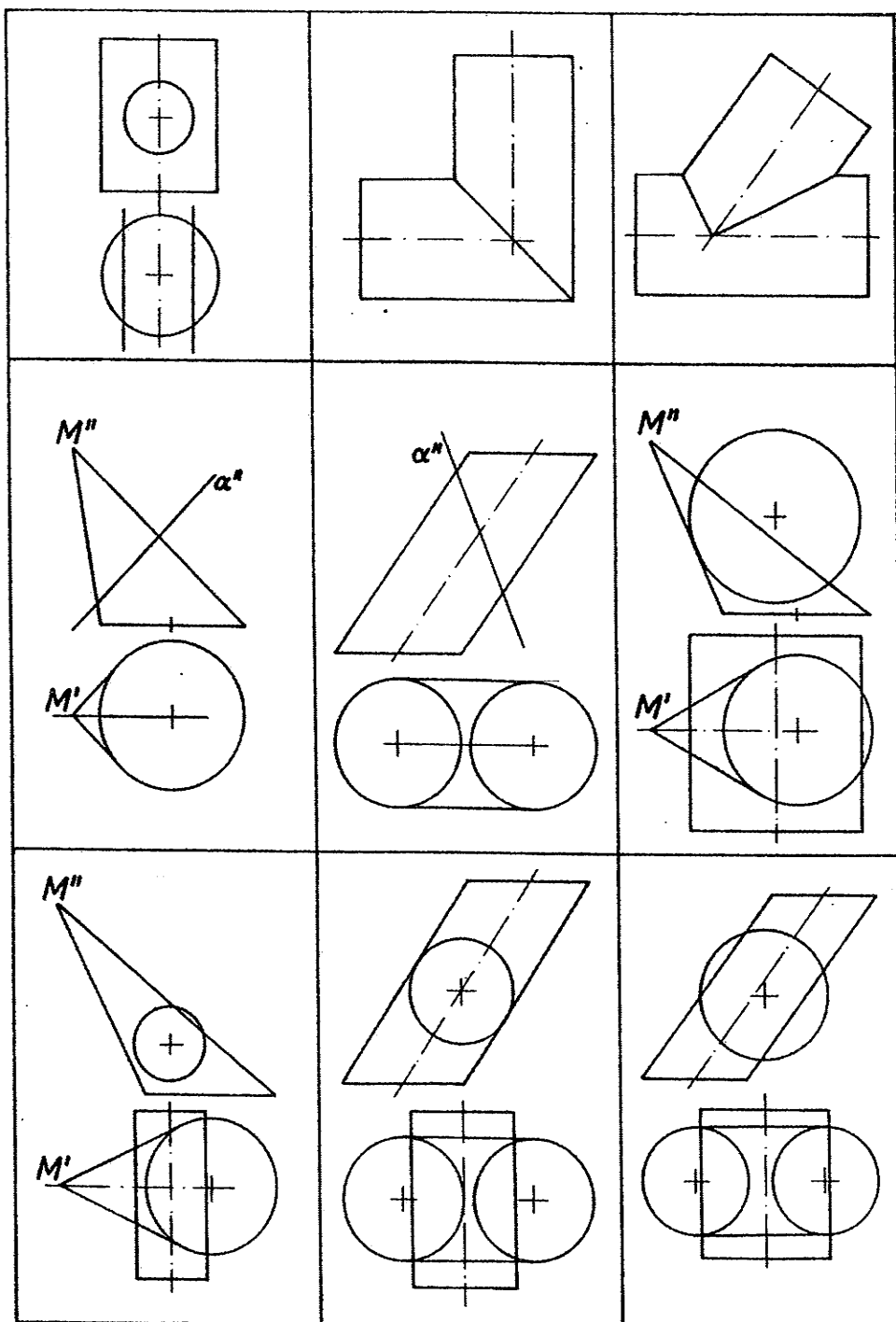


217. ábra.

terítését kapjuk. A P és 3 pontokban az érintőt a PQ3 háromszöggel szerkesztjük meg. Az 1 és 7 alkotó végpontjaiban az érintő az alkotókra merőleges.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 21.8. ábrán megadott felületek síkba terítését a rajtuk levő metszészvonallakkal együtt (A/4 méretre felnagyítva).

Elméleti tananyag: Tankönyv 329-331., 333-334. és 337. pontok.

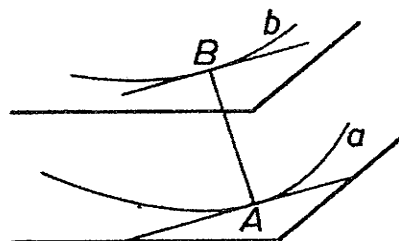


21. ábra.

22. KÉT GÖRBÉHEZ KIFEJTHETŐ FELÜLET SZERKESZTÉSE ÉS SÍKBA TERITÉSE

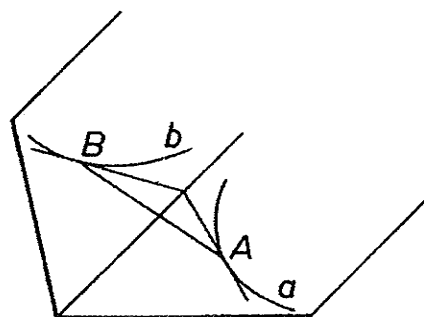
Két görbe kifejthető felületének a megszerkesztésénél a két görbe pontjait úgy kell alkotókkal összekötni, hogy az adódó felület kifejthető legyen. Minthogy a két görbe felületi görbe, tehát az egy alkotón fekvő pontjaikban vett érintőiknek az alkotóhoz tartozó felületi érintősíkban kell lenni (a kifejthetőségre vonatkozó feltételek miatt!). Tehát két görbének azokat a pontjait köti össze egy alkotó, amelyekben vett érintők egy síkban vannak, azaz párhuzamosak vagy metszők.

A 22.1. ábrán az a és b görbék párhuzamos síkokban fekszenek, tehát az A ponttal az a görbén köthető össze alkotóval, amelyben az érintő az A -beli érintővel párhuzamos.

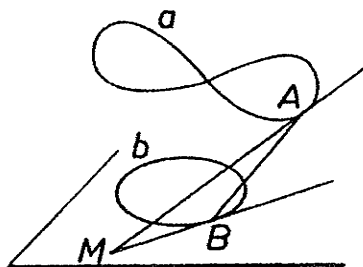


22.1. ábra.

A 22.2. ábrán két metsző síkú görbét vetünk fel; az A pontbeli érintő metszi a két sík metszésvonalát, innen a b görbéhez húzott érintő B érintési pontja lesz az AB felületi alkotó másik végpontja.



22.2. ábra.



22.3. ábra.

A 22.3. ábrán az a tér-görbe és a b síkgörbe adott.

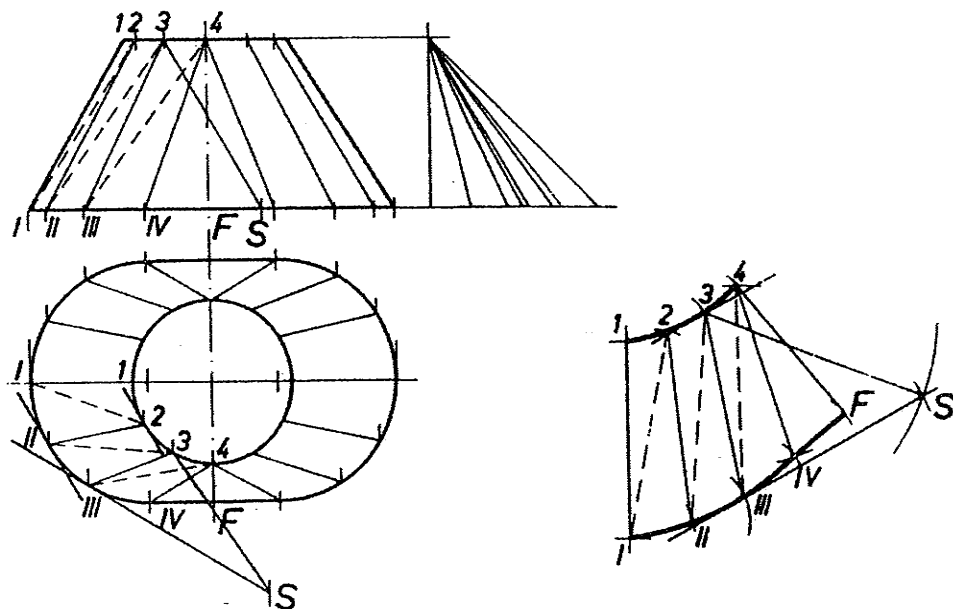
A térgörbe A pontjában szerkesztett érintő a síkgörbe síkját M pontban metszi, innen a b görbéhez húzott érintő B érintési pontja adja az AB alkotó másik végpontját.

A felület megszerkesztett alkotói közül a szomszédosak általában torznégyszöget (térbeli négyszöget) határoznak meg. Ezeket a négyszögeket átlókkal háromszögekre bontjuk. E háromszögeket valódi nagyságban előállítva egy-egy közös oldaluk mentén rendre egymás mellé illesztjük, ezáltal a felület (közelítő) kifejtését kapjuk.

Érintőt a már ismert módon, az alkotó és két érintő által meghatározott háromszög segítségével kapjuk. Ha az érintők párhuzamosak, akkor az érintő és az alkotó szögét más úton határozzuk meg. Szimmetriasíkban levő alkotó végpontjaiban az érintő az alkotóra merőleges.

Ha valamelyik görbén egyenesdarab van, akkor ehhez a felületen egy síkrész tartozik; ha valamelyik görbének töréspontja van, akkor ehhez a felületen kúprész tartozik.

A 22.4. ábrán adott kör és futópálya alakú görbe síkjai párhuzamosak, a felület alkotóit a párhuzamos érintőjű pontok jelölik ki. A futópálya egyenesdarabjához a felületen síkbeli rész tartozik.



22.4. ábra.

A felületnek egy negyedét terítettük ki, a többi negyed ezzel szimmetrikus. Az átlók és az alkotók hosszának meghatározását egyetlen derékszögben szerkesztettük meg. Az I¹ alkotó végpontjaiban az érintők merőlegesek az alkotóra. Általános pontban a III-nál szerkesztettünk érintőt a IIIIS háromszög valódi nagyságban való átmásolásával (S pont az érintő tetszőleges pontja).

The diagram illustrates the construction of a hyperbola from a circle and a rectangle. It is divided into three main sections: a top circular section, a middle rectangular section, and a bottom hyperbolic section.

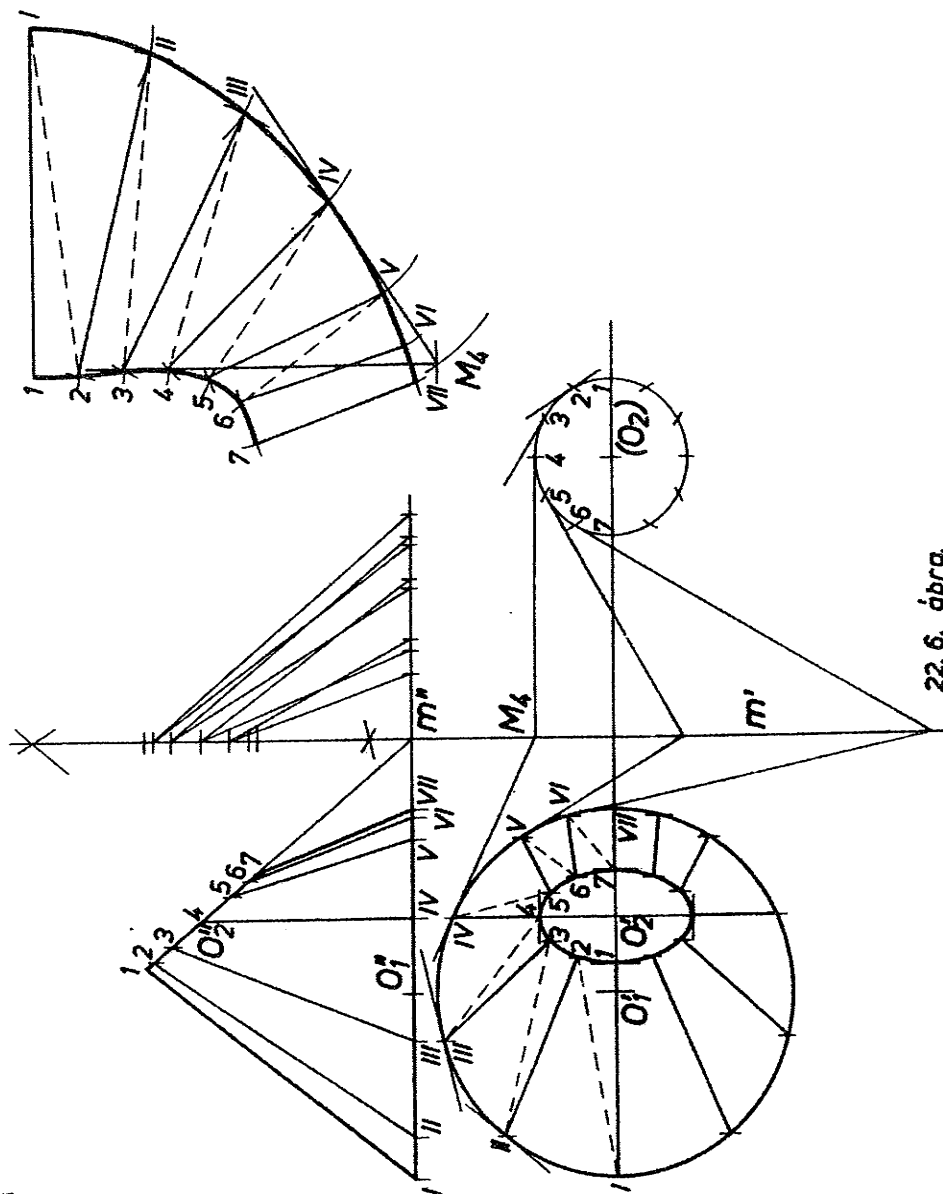
- Top Section (Circle):** A circle with center F and points A, B, C, D on its circumference. A horizontal line AD and a vertical line BC intersect at F . Points $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ are marked on the circle's circumference. Dashed lines connect F to these points. Solid lines connect A to $1, 2, 3, 4$ and B to $5, 6, 7$.
- Middle Section (Rectangle):** A rectangle with vertices A, B, C, D and center F . The same points $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ are marked on the rectangle's boundary. Dashed lines connect F to these points. Solid lines connect A to $1, 2, 3, 4$ and B to $5, 6, 7$.
- Bottom Section (Hyperbola):** A hyperbola opening horizontally with center F and vertices A, B . Points $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ are marked on the hyperbola's branches. Dashed lines connect F to these points. Solid lines connect A to $1, 2, 3, 4$ and B to $5, 6, 7$.

The construction shows how the hyperbola is defined by the intersection of lines drawn from the vertices of the rectangle to the points on the circle, and how the hyperbola's branches are tangent to the rectangle's sides.

- 188 -

kat ismét egyetlen derékszögben határoztuk meg. A kiterítésben csak a fél felületet szerkesztettük meg, az érintőt az 5 pontban az MB5 háromszög segítségével határoztuk meg.

A 22.6. ábrán egy első képsíkban levő O_1 középpontú kör és a második vetítősíkban levő O_2 középpontú kör kifejtendő felületét szerkesztettük meg.



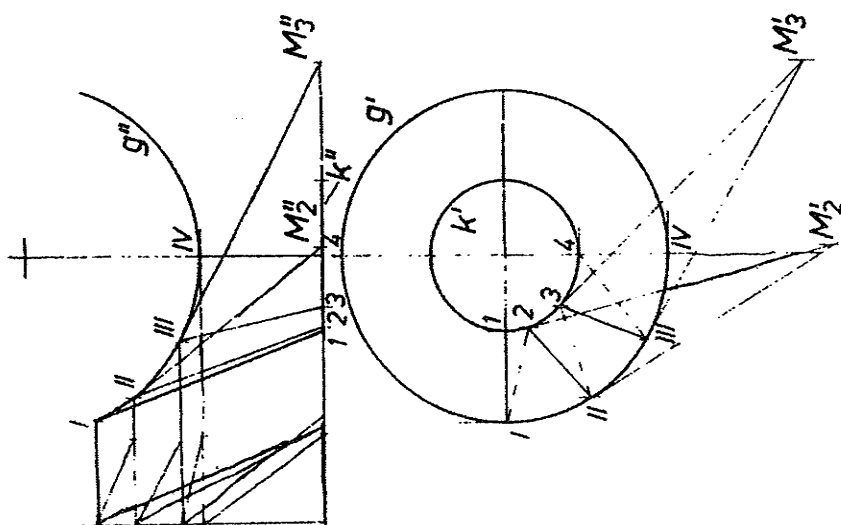
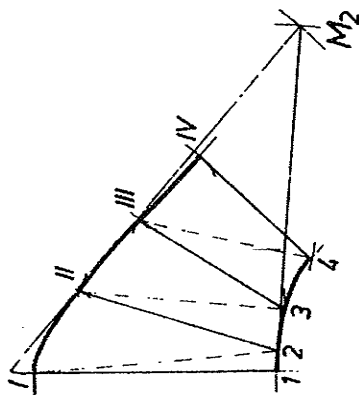
A két sík metszészvonala az m második vetítőegyenes, amely körül az O_2 középpontú kört első képsíkba forgatjuk.

(Az összetartozó pontok így is megszerkeszthetők!)

A kisebbik kört 12 egyenlő részre osztottuk, és a 22.2. ábrán bemutatott módszerrel a felület egyik felét meghatároztuk; az O_2 középpontú kört visszaforgattuk. A felület másik fele a megszerkesztetttel szimmetrikus.

A kiterítésben csak a fél felületet szerkesztettük meg, az alkotókat és átlókat alkalmas derékszögben határoztuk meg, a körök húrjai az első képről, illetve a leforgatottból mérhetők le. Érintőt a 4IV alkotó végpontjaiban a $4IVM_4$ háromszöggel szerkesztettünk; M_4IV az első képen, M_44 a leforgatottban eredeti méretben látszik.

A g térgörbe és a k kör kifejtethető felületét a 22.7. ábrán szerkesztettük meg.

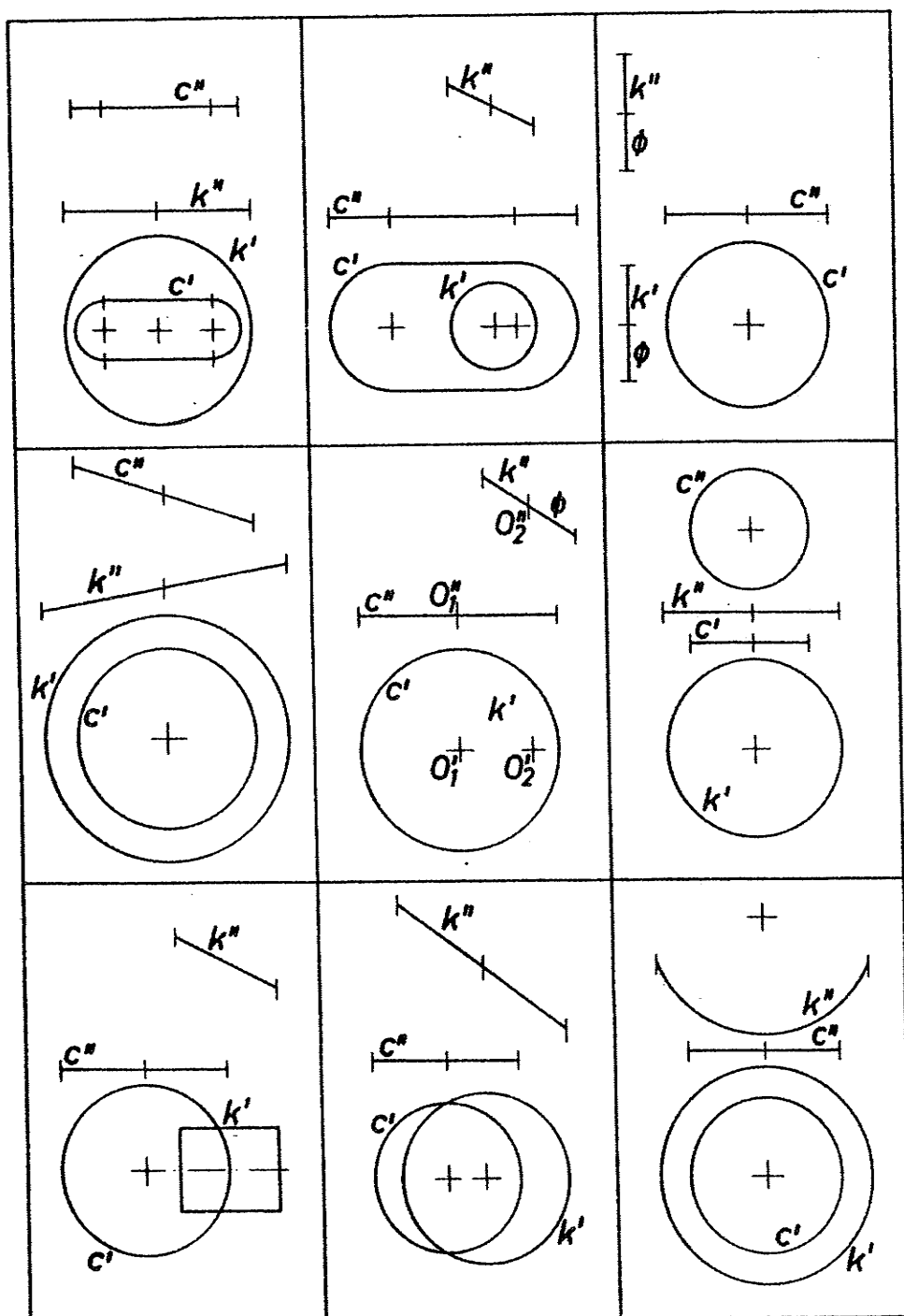


22.7. ábra.

Mivel a két görbének két, egymásra merőleges szimmetriasíkja van, ezért a felületből csak egy negyedét szerkesztünk meg. Az I^1 és IV^4 alkotó végpontjaiban a görbék érintői párhuzamosak és az alkotókra merőlegesek. A térgörbe II és III pontjaiban vett érintők a síkgörbe síkját az M_2 , illetve M_3 pontban metszik, innen a körhöz húzott érintők érintési pontja 2, illetve 3. Az alkotók közti részt átlókkal felbontva megszerkesztjük a kiterítést. A szakaszhosszak megszerkesztésére szolgáló derékszögű háromszögeknél külön kell gondolni a térgörbe húrjainak meghatározására. Érintőt a $2II$ alkotó végpontjaiban a $2IIM_2$ háromszöggel szerkesztünk.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 22.8. ábrán megadott görbék kifejthető felületét és síkba terítését ($A/4$ -es méretre felnagyítva).

Elméleti tananyag: Tankönyv 357. pont.



22. 8. ábra.

23. FELÜLETEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

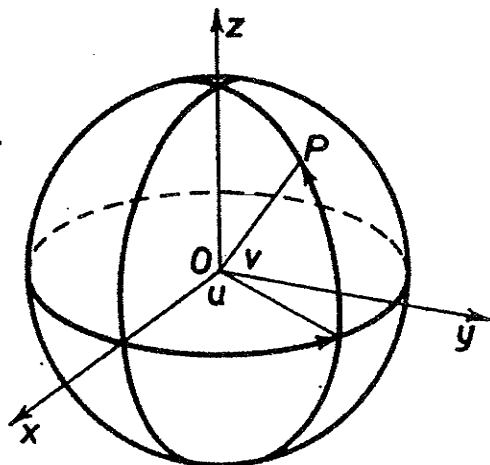
Felület analitikus megadási módjai

A felület analitikus megadását jól szemlélteti a gömbfelület pontjainak analitikus geometriai jellemzése. A földrajzi tájékozódást a földgömbön a szélességi körök és a délkörök teszik lehetővé. Ennek alapulvételével egy gömbi pont koordinátáit két szög (paraméter) segítségével határozzuk meg. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja és az egyenlítőt képzeljük az xy síkba, a délkörök közül pedig az xz síkban levő gömbi főkört tekintsük kiindulási délkörnek.

Ha a gömb sugara R és a gömbfelület egy P pontján áthaladó délkör síkja az xz síkkal u szöget (23.1. ábra), illetve az OP egyenes az xy síkkal v szöget alkot, akkor a P pont koordinátái nyilván:

$$\begin{aligned}x &= R \cos v \cos u \\y &= R \cos v \sin u \\z &= R \sin v\end{aligned}$$

és nyilván $0 < u \leq 2\pi$, illetve $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ az u és v értelmezési tartománya. A gömb pontjainak koordinátáit két változó paraméter függvényeiként kapjuk meg.



23.1 ábra.

Ugyanezt a gömböt jellemezhetjük $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ alakú egyenlettel is, valamint a $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ kétváltozós függvényvel.

A konkrét példa alapján a felületek általános megadási módjai a következők lehetnek:

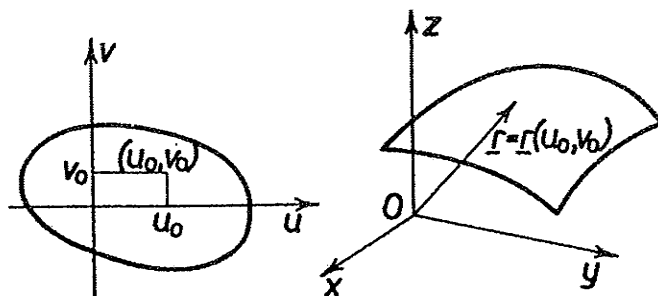
A felület Gauss-féle megadása:

Vegyünk egy u, v síkbeli derékszögű koordinátarendszerben megadott tartományt. Ennek minden pontjához tartozik egy (u_0, v_0) rendezett számpár (23.2. ábra). A tartomány (u_0, v_0) pontjához rendeljünk egy térbeli derékszögű koordinátarendszerben levő $\underline{r}$ helyvektort.

Ha a síkbeli tartomány minden pontjához elvégezzük ezt a hozzárendelést, akkor egy kétváltozós $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ vektorfüggvényt nyerünk.

Egy ilyen kétváltozós vektorfüggvény alkalmas lehet

egy felület megadására (de nem minden kétváltozós vektorfüggvényhez tartozik felület). Ha egy felületet $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \underline{i}x(u, v) + \underline{j}y(u, v) + \underline{k}z(u, v)$ alakban előállítunk, akkor ezt a megadási módot a felület Gauss-féle megadásának mondjuk. Az $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ kétváltozós függvények az $\underline{r}(u, v)$ vektorfüggvény koordinátafüggvényei.



23.2. ábra.

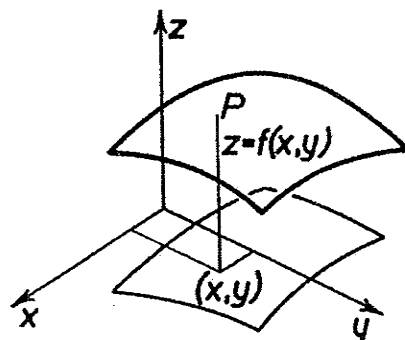
A felület Euler-Monge-féle megadása:

Ha egy felületet a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény-nyel állítunk elő, akkor a felület Euler-Monge megadásáról beszélünk. Ez a megadási mód tulajdonképpen az xy sík egy tartományának pontjaihoz rendeli a felületi pontokat (23.3. ábra).

A felület Euler-Monge-féle megadása mindig visszavezethető a kétváltozós vektorfüggvénnyel történő előállításra a következőképpen:

Az $\underline{r}(u, v)$ függvény $x(u, v)$, $y(u, v)$ és $z(u, v)$ koordinátafüggvényei:

$x = u$, $y = v$ és $z = f(u, v)$.



23.3. ábra.

A felület megadása implicit alakban:

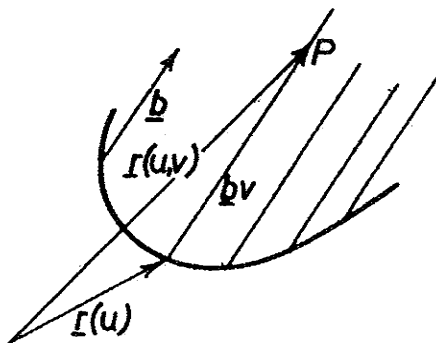
Ha egy felület pontjait $F(x, y, z) = 0$ alakú egyenlettel jellemezzük, akkor a felületet implicit alakban adjuk meg.

Leggyakrabban előforduló felületek előállítása:

1) Sík. Ha a sík egy pontjába mutató helyvektor $\underline{r}_0$ és a sík két nem párhuzamos vektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$, akkor a sík

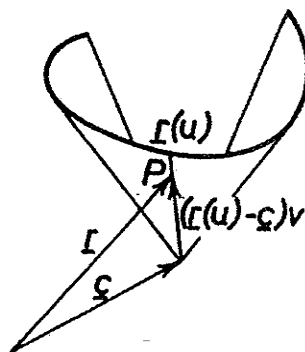
bármely pontja előállítható, az $\underline{r}(u, v) = \underline{r}_0 + \underline{a} \cdot u + \underline{b} \cdot v$ alakú kétváltozós vektorfüggvénnyel. (l. a sík egyenlete)

2) Hengerfelület. A hengerfelület úgy jön létre, hogy egy vezérgörbe pontjain át a henger alkotóinak irányával párhuzamos egyeneseket húzunk. Ennek megfelelően (23.4. ábra), ha egy henger vezérgörbéjét az $\underline{r}(u)$ vektor-skalár függvény adja meg és a henger alkotói párhuzamosak egy $\underline{b}$ vektorral, akkor a henger egy tetszőleges P pontjába mutató $\underline{r}$ helyvektor az $\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + \underline{b} \cdot v$ kétváltozós vektorfüggvénnyel jellemezhető.



23.4. ábra

3) Kúpfelület. A kúpfelület alkotói a kúp csúcsát a vezérgörbe pontjaival összekötő egyenesek. Ennek megfelelően, ha adott egy kúp C csúcsának $\underline{c}$ helyvektora, továbbá a vezérgörbét leíró $\underline{r}(u)$ vektor-skalár függvény, akkor a kúpfelület egy alkotójának a csúcspontból kiinduló irányvektorát $\underline{r}(u) - \underline{c}$ vektor adja (23.5. ábra). E kúpalkotón levő tetszőleges P felületi pont $\underline{r}$ helyvektora az $\underline{r} = \underline{c} + (\underline{r}(u) - \underline{c})v = \underline{r}(u, v)$ alakú kétváltozós vektorfüggvénnyel adható meg, ami a kúp Gauss-féle előállítás.

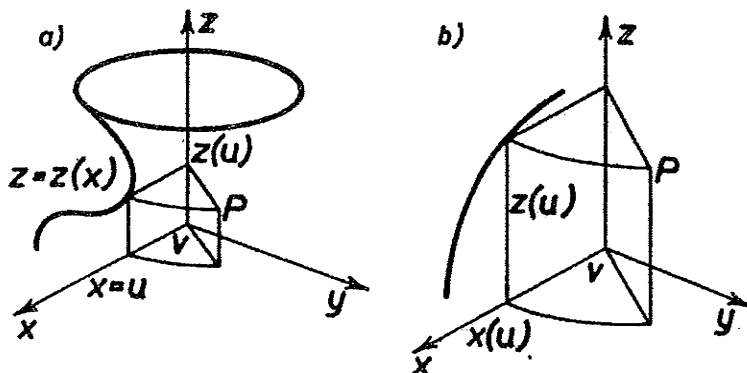


235 ábra.

4) Forgásfelület. A forgásfelületet egyértelműen meghatározza forgástengelye és ezzel egy síkban levő ún. meridiángörbe, amelynek megforgatása által létrejön a felület. A számításokban a forgástengely általában valamelyik koordinátatengely szokott lenni és a meridiángörbét a koordinátatengelyre illeszkedő koordinátasíkban adjuk meg.

Legyen a forgástengely a z koordinátatengely és a meridiángörbe legyen az xz koordinátasíkban megadva (23.6. ábra).

Ha a meridiángörbe $z = z(x)$ alakban van megadva, akkor a meridiángörbét az $\underline{r}(u) = \underline{i} \cdot u + z(u)\underline{k}$ vektor-skalár függvénnyel jellemezhetjük (23.6.a. ábra) és ennek megfelelően egy P felületi pont, amely v nagyságú szögelfordulással állt elő, az $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \underline{i} \cdot u \cdot \cos v + \underline{j} \cdot u \cdot \sin v + \underline{k} \cdot z(u)$ helyvektorral jellemezhető. Ez a felület Gauss-féle megadásának az alakja.



23.6. ábra

Ha a meridiángörbét $\underline{r}(u) = \underline{i} \cdot x(u) + \underline{k} \cdot z(u)$ vektor-skálár függvényvel adjuk meg, akkor ennek egy pontját v szöggel elforgatva, a kapott P felületi pont (23.6.b. ábra) helyvektora és a felület megadása is az $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \underline{i} \cdot x(u) \cos v + \underline{j} \cdot x(u) \sin v + \underline{k} \cdot z(u)$ alakban írható fel.

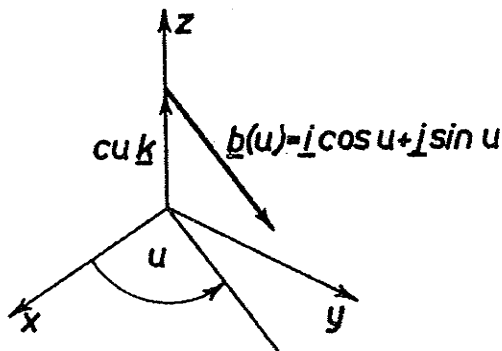
Például: ha az xz koordinátságokban levő $(r_0, 0)$ középpontú r sugarú kört forgatjuk meg a z tengely körül, akkor a kör $\underline{r}(u) = (r_0 + r \cos u) \underline{i} + r \cdot \sin u \cdot \underline{k}$ egyenlete alapján a létrejövő tóruszfelület Gauss-féle előállítás:

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(r_0 + r \cos u) \cos v + \underline{j}(r_0 + r \cos u) \sin v + \underline{k} \cdot r \cdot \sin u.$$

5) Közönséges csavarfelület. A közönséges csavarfelület úgy jön létre, hogy a z tengely — mint csavartengely — körül az x tengelyt (alkotót) csavarmozgással mozgatjuk; vagyis a z tengely körül az alkotót u szöggel elforgatva, az u -val arányos mértékben a tengely irányában elmozgatjuk (közben az alkotó az xy síkkal párhuzamos marad) (23.7. ábra).

Az alkotó irányába mutató egységvektor az u szögű elforgatás után $\underline{b}(u) = \cos u \underline{i} + \sin u \underline{j}$, az alkotó magassága pedig $c \cdot u$. Ennek megfelelően a felület tetszőleges alkotójának valamely pontjába mutató $\underline{r}$ helyvektor:

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) = c \cdot u \cdot \underline{k} + v \cdot \underline{b}(u) = v \cdot \cos u \underline{i} + v \cdot \sin u \underline{j} + c \cdot u \cdot \underline{k},$$



23.7. ábra.

ez pedig éppen a közösleges csavarfelület Gauss-féle előállítására.

Példák felületek felírására:

- 1) Irjuk fel annak a hengerfelületnek a Gauss-féle előállítását, amelynek alapgörbéje az $r(u) = (3 + 2\sin u)\underline{i} + (5 + 4\cos u)\underline{j}$ és alkotóinak irányát az $a(2, 1, 3)$ vektor adja meg.

Megoldás: Az alapgörbe nyilván egy olyan ellipszis az xy koordinátasíkjában, amelynek középpontja $(3, 5)$, nagytengelye az y tengellyel párhuzamos és 8 egység hosszúságú, kistengelye pedig x -szel párhuzamos, hossza 4:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1. \text{ A vektoregyenlet alapján a felület}$$

előállítása: $r(u, v) = (3 + 2\sin u + 2v)\underline{i} + (5 + 4\cos u + v)\underline{j} + 3v\underline{k}$.

- 2) Irjuk fel annak a kúpfelületnek az előállítását, amelynek vezérgörbéje az $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ $z = 0$ egyenletű hiperbola, csúcsa pedig a $C(1, 2, 8)$ pont.

Megoldás: A vezérgörbe a $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ azonosság alapján $r(u) = (\pm 2\cosh u)\underline{i} + (3\sinh u)\underline{j}$ paraméteres alakba írható fel, így a vektoregyenlet alapján a kúpfelület előállítása $r(u, v) = (1 + (\pm 2\cosh u - 1)v)\underline{i} + (2 + (3\sinh u - 2)v)\underline{j} + 8(1 - v)\underline{k}$.

- 3) Irjuk fel annak a forgásfelületnek az előállítását, amelynek meridiángörbéje $z = \frac{1}{x}, y = 0$ egyenletű hiperbola és a forgástengely a z tengely.

Megoldás: Jelen esetben $r(u) = u\underline{i} + \frac{1}{u}\underline{k}$ paraméteres alakban adható meg a meridiángörbe ($u \neq 0$, bármely valós szám). Tehát a felület előállítása $r(u, v) = \underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v + \underline{k}\frac{1}{u}$ alakban adódik.

- 4) Adjuk meg annak a forgásfelületnek az előállítását, amelynek meridiángörbéje $r(u) = (1 + 2\cos u)\underline{i} + (2 + \sin u)\underline{j}$ a forgástengely pedig az x tengely.

Megoldás: Ebben az esetben az $r(u)$ első koordináta-függvénye változatlan marad, mivel x a forgástengely. Tehát az előállítás:

$$r(u, v) = \underline{i}(1 + 2\cos u) + \underline{j}(2 + \sin u)\cos v + \underline{k}(2 + \sin u)\sin v.$$

- 5) Irjuk fel az $r(u)$ térgörbe érintői által meghatározott felület vektoregyenletét, majd ennek alapján az $r(u) = u\underline{i}^2 + \underline{j}u^3 + \underline{k}u^4$ görbe érintői által alkotott felület előállítását. (Legyen $u > 0$.)

Megoldás: Az $r(u)$ görbepontból egy $\vec{r}(u)$ irányú vektor vezet el a felület egy pontjához. Ennek megfelelően

$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\dot{\underline{r}}(u)$ a felület vektoregyenlete. Példánkban szereplő görbe érintővektora

$\dot{\underline{r}}(u) = i2u + j3u^2 + k4u^3$ alakú, tehát a felület előállítására:

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 + 2uv)i + (u^3 + 3u^2v)j + (u^4 + 4u^3v)k.$$

6) Írjuk át implicit alakra az $\underline{r}(u,v) = iu + ju^2\cos v + ku^2\sin v$ felületet.

Megoldás: $y^2 + z^2 = u^4(\cos^2 v + \sin^2 v)$,
tehát $y^2 + z^2 = x^4$ azaz $x^4 - y^2 - z^2 = 0$

a felület implicit megadása.

Kétváltozós vektorfüggvényekre vonatkozó alapfogalmak

Határérték: Az $\underline{r}(u,v)$ függvénynek az (u_0, v_0) helyen vett határértéke létezik és $\underline{r}_0$ vektor, ha $(u,v) \neq (u_0, v_0)$ feltételezése mellett tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|\underline{r}_0 - \underline{r}(u,v)| < \varepsilon$, ha $|u - u_0| < \delta$ és $|v - v_0| < \delta$.

Határérték jelölése: $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \underline{r}(u,v) = \underline{r}_0$

Folytonosság: Az $\underline{r}(u,v)$ függvényt az (u_0, v_0) helyen folytonosnak mondjuk, ha határértéke megegyezik a függvény értékével; azaz ha

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \underline{r}(u,v) = \underline{r}(u_0, v_0)$$

Megjegyzés: Az $\underline{r}(u,v) = i \cdot x(u,v) + j \cdot y(u,v) + k \cdot z(u,v)$ függvény akkor és csakis akkor folytonos, ha az $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ kétváltozós koordinátafüggvények folytonosak.

Differenciálhatóság: Az $\underline{r}(u,v)$ függvényt az (u,v) helyen differenciálhatónak nevezzük, ha a függvény $\Delta \underline{r}$ tetszőleges megváltozásához létezik olyan $\underline{d}_u$ és $\underline{d}_v$ vektor, amelyek segítségével a megváltozás a következő alakban írható fel:

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \underline{r}(u,v) = \underline{d}_u \Delta u + \underline{d}_v \Delta v + \underline{e}_1 \Delta u + \underline{e}_2 \Delta v,$$

ahol $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ az $u, v, \Delta u, \Delta v$ függvényei és $\Delta u \rightarrow 0$

$\Delta v \rightarrow 0$ esetén $|\underline{e}_1| \rightarrow 0$ $|\underline{e}_2| \rightarrow 0$.

Megjegyzés: $f(x,y)$ kétváltozós függvény parciális deriváltja. Az $f(x,y)$ függvényt az (a,b) helyen x , illetve y szerint parciálisan differenciálhatónak mondjuk, ha az egyváltozós $f(x,b)$, illetve $f(a,y)$ egyváltozós függvény az $x = a$, illetve $y = b$ helyen differenciálható. Az $f(x,b)$

függvény x szerinti deriváltját az $f(x,y)$ függvény (a,b) helyen vett x szerinti parciális deriváltjának mondjuk. (Hasonlóan beszélünk az $f(x,y)$ függvény (a,b) helyen vett y szerinti parciális deriváltjáról.

Jelölése: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$ illetve $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$.

A parciális deriválással nyert függvények ismét kétváltozós függvények, amelyeket lehet ismételtén parciálisan deriválni. Az így kapott parciális deriváltakat második parciális deriváltaknak mondjuk.

Jelölésük: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}$;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{yx} ,$$

illetve

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy} .$$

Tétel: Ha $f(x,y)$ olyan kétváltozós függvény, amelynél f_{xy} és f_{yx} az (a,b) hely környezetében létezik és e helyen folytonosak, akkor $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$. (Young-tétele)

A fentiekhez hasonló módon értelmezhető a kétváltozós vektorfüggvények parciális differenciálhatósága. Egy kétváltozós vektorfüggvény $\underline{r}(u,v)$ az (a,b) helyen u szerint parciálisan differenciálható, ha az $\underline{r}(u,v)$ vektor-skálár függvény a helyen deriválható.

Jelölések: $\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} = \underline{r}_u$; $\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = \underline{r}_v$,

illetve a második parciálisokra

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial u^2} = \underline{r}_{uu} ; \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial u \partial v} = \underline{r}_{vu} ;$$

$$\frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial v \partial u} = \underline{r}_{uv} ; \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial v^2} = \underline{r}_{vv} .$$

Beláthatók a következő tételek:

Ha $\underline{r}(u,v)$ függvény differenciálható az (u,v) helyen, akkor

$$\underline{d}_u = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} = \underline{r}_u \quad \text{és} \quad \underline{d}_v = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = \underline{r}_v .$$

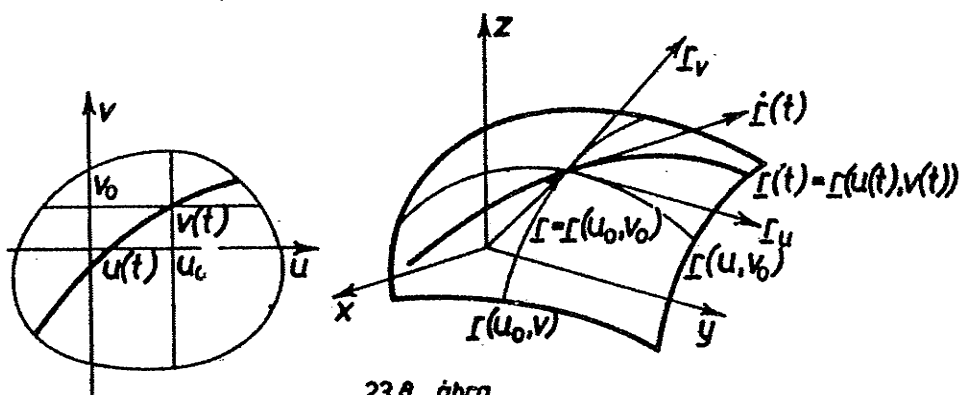
(Tehát differenciálható $\underline{r}(u,v)$ függvény első parciális deriváltjai léteznek. Igaz továbbá, hogy ha egy $\underline{r}(u,v)$ függ-

vény $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ parciális deriváltjai az (u, v) helyen léteznek és folytonosak, akkor az $\underline{r}(u, v)$ függvény differenciálható e helyen.)

Ha $\underline{r}(u, v)$ második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, akkor a második vegyes parciális deriváltnál a deriválás sorrendje felcserélhető, vagyis $\underline{r}_{uv} = \underline{r}_{vu}$.

Felületi görbe

Ha a felület előállításában szereplő paramétertartományon tekintünk egy $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméteres görbét, akkor ennek (bizonyos feltételek teljesülése esetén) az $\underline{r}(u, v)$ -vel előállított felületen egy $\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ vektor-skalár függvénnyel megadott görbe felel meg (23.8. ábra).



23.8. ábra.

E felületi görbék közül a legegyszerűbben adódnak azok, amelyek a paramétertartományon haladó $u = u_0$ és $v = v_0$ egyenesdaraboknak felelnek meg, és az $\underline{r}(u_0, v)$, illetve $\underline{r}(u, v_0)$ alakú vektor-skalár függvények alakjában állíthatók elő. Ezeket a görbéket nevezzük a felület paramétervonalainak: $\underline{r}(u, v_0)$ az ún. u paramétervonal ($v_0 = \text{konstans}$), $\underline{r}(u_0, v)$ a v paramétervonal ($u_0 = \text{konstans}$).

A térgörbék differenciálgeometriájából következik, hogy az $\underline{r}(u, v)$ u , illetve v szerinti parciális deriváltjai a paramétervonalak $\underline{r}_u$, illetve $\underline{r}_v$ érintővektorait adják.

Megjegyzés: Egyszerűség kedvéért és ezzel a gyakorlat igényeihez alkalmazkodva a továbbiakban az $\underline{r}(u, v)$ -vel előállított felületről feltételezzük, hogy első és második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ nem párhuzamosak a felület vizsgált pontjában.

Felületen haladó görbe előállítása

Egyszerű esetekben a paramétertartományon adott $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméterezésű görbének megfelelő

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$$

felületi görbe a megfelelő helyettesítéssel előállítható.

Például, ha a felület Gauss-féle előállítására

$$\underline{r}(u, v) = (u^2 - 2v)\underline{i} + (u^3 + uv)\underline{j} + uv\underline{k}$$

és a paramétertartományon az $u(t) = -2t$, $v(t) = 3t^2$ paraméterezésű görbének megfelelő felületi görbét akarjuk előállítani, akkor az u , illetve v behelyettesítésével az

$$\underline{r}(t) = (4t^2 - 6t^2)\underline{i} + (-8t^3 - 6t^3)\underline{j} + (-2t) \cdot 3t^2\underline{k},$$

vagyis az

$$\underline{r}(t) = -2t^2\underline{i} - 14t^3\underline{j} - 6t^3\underline{k}$$

térgörbe adódik.

Felületi görbe érintője. Érintősík

Ha adott a paramétertartományon egy $u = u(t)$, $v = v(t)$ görbe, amelynek $u(t)$ és $v(t)$ koordinátafüggvényei t szerint differenciálhatók, akkor a felületen haladó $\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ görbe differenciálható és érintővektora az

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$$

alakban állítható elő.

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a felület egy P pontján áthaladó felületi görbék érintői az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként állíthatók elő, vagyis a két vektor által meghatározott síkban vannak (l. 23.8. ábra). Ezt a síkot nevezzük a felület érintősíkjának.

A felület érintősíkjának a normálisa — amit a felület normálisának is mondunk — ezek szerint

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$$

vektoriális szorzattal számítható ki. Ennek ismeretében már fel tudjuk írni a felületi normális egyenesének egyenletrendszerét, illetve a felületi érintősík egyenletét.

Megjegyezzük, hogy az Euler-Monge-féle felületmegadási módban a $z = f(x, y)$ függvény parciális deriváltjait szokás a következőképpen jelölni: $p = f_x$, $q = f_y$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$. Ezekkel a mennyiségekkel is elvégezhető számításaink java része, de egy-két esettől eltekintve csak az áttekintendő „képlet”-anyagot növelnénk ezáltal. Az esetek többségében egyszerűbb a már megismert módon a Gauss-féle megadási módra átírni a felületet. Az egyik kivétel eset, amikor egyszerűsítést jelenthet a fenti jelölések alkalmazása a felületi normális-vektor előállítására, ami a következő formában lehetséges: $\underline{m}(-p, -q, 1)$. Az $F(x, y, z) = 0$ implicit alakban adott felület normális-vektora: $\underline{m}(F_x, F_y, F_z)$.

Például: tekintsük az $r(u,v) = i(u^3 - 2v^2) + juv^2 + k(u^2v - u)$ felületen haladó görbét, amely a paramétertartomány $u = t^2$, $v = -2t^3$ görbéjének felel meg. Határozzuk meg a $t = 1$ -nek megfelelő pontban a felületi görbe érintőjét!

A vizsgált pont az $u = 1$, $v = -2$ pont, a felületen a $P(-7, 4, -3)$ pont, amelyben a paramétervonalak érintői

$$\underline{r}_u = i \cdot 3u^2 + jv^2 + k(2uv - 1) \quad (3, 4, -5)$$

$$\underline{r}_v = i(-4v) + j2uv + k \cdot u^2 \quad (8, -4, 1)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2t \\ \dot{v} &= -6t^2 \end{aligned} \quad \text{a } t = 1 \text{ helyen } \dot{u} = 2, \dot{v} = -6.$$

Tehát a felületi görbe érintője a P pontban

$$\underline{\dot{r}} = 2\underline{r}_u - 6\underline{r}_v \quad (-42, 32, -16).$$

A felületi normális-vektor:

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -5 \\ 8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -16i - 43j - 44k.$$

A felületi normális egyenesének egyenletrendszere:

$$x = -7 - 16\lambda \quad y = 4 - 43\lambda \quad z = -3 - 44\lambda$$

A felület érintősíkjának egyenlete:

$$-16(x + 7) - 43(y - 4) - 44(z + 3) = 0.$$

Felületi görbék hajlásszöge:

A felület egy P pontján áthaladó felületi görbék hajlásszögét érintővektoraik hajlásszögeként számítjuk. Ennek megfelelően a felület két paramétervonalának φ hajlásszöge

$$\cos \varphi = \frac{\underline{r}_u \cdot \underline{r}_v}{|\underline{r}_u| |\underline{r}_v|}$$

összefüggés alapján számítható.

Két felület metszésvonalaként adódó térgörbe:

Az $F(x,y,z) = 0$ és $G(x,y,z) = 0$ egyenletekkel megadott felületek metszésvonalát a két egyenletből álló egyenletrendszer határozza meg. Az elmélet részletes kifejtését mellőzve, konkrét példán mutatjuk meg, hogyan lehet a metszésvonal egy pontjában a térgörbe jellemzőit (görbület, torzió, kiséző triéder stb.) meghatározni.

Legyen a két felület $F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$ és $G(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z = 0$. Vizsgáljuk a metszésvonalat a $P(-2, 1, 6)$ pontban. (Meggyőződhetünk arról, hogy ez a pont mindkét felület egyenletét kielégíti.)

A két felület metszésvonalát tekintsük olyan vektor-skalár függvénynek, amelynek paramétere valamelyik koordináta, pl. x . Ekkor az $\underline{r}(x) = x\mathbf{i} + y(x)\mathbf{j} + z(x)\mathbf{k}$. A térgörbe jellemzőinek meghatározására az $\underline{r}(x)$ függvény deriváltjait kell meghatározni a tekintett P pontban. Ekkor $\dot{\underline{r}}(x) = \mathbf{i} + \dot{y}(x)\mathbf{j} + \dot{z}(x)\mathbf{k}$, $\ddot{\underline{r}}(x) = \ddot{y}(x)\mathbf{j} + \ddot{z}(x)\mathbf{k}$ és így tovább. A koordinátafüggvények deriváltjait úgy határozzuk meg, hogy y -t és z -t az x függvényének tekintjük és eszerint deriváljuk az egyenleteket x szerint. Ekkor $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$ deriváltja $4x + 6y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$; $x^2 + 2y^2 - z = 0$ deriváltja $2x + 4y\dot{y} - \dot{z} = 0$. Az x, y, z helyébe a P pont koordinátáit helyettesítve $\dot{y}$ és $\dot{z}$ -ra egy egyenletrendszert kapunk:

$$-8 + 6\dot{y} + 12\dot{z} = 0$$

$$-4 + 4\dot{y} - \dot{z} = 0$$

Ennek megoldása $\dot{y} = \frac{28}{27}$, $\dot{z} = \frac{4}{27}$, tehát a görbe érintővektora $\dot{\underline{r}}(1, \frac{28}{27}, \frac{4}{27})$.

Az $\ddot{\underline{r}}(0, \ddot{y}, \ddot{z})$ vektor koordinátáit úgy határozhatjuk meg, hogy a $4x + 6y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$ és a $2x + 4y\dot{y} - \dot{z} = 0$ egyenleteket x szerint deriváljuk: $4 + 6\dot{y}^2 + 6y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$ és $2 + 4\dot{y}^2 + 4y\ddot{y} - \ddot{z} = 0$. Ezekbe P , illetve $\dot{\underline{r}}$ koordinátáit behelyettesítve, az $\ddot{y}$ és $\ddot{z}$ -ra kapott egyenletrendszerből számíthatjuk ki az $\ddot{\underline{r}}$ koordinátáit.

Ez az eljárás folytatható s így $\ddot{\underline{r}}$ is meghatározható. Az $\underline{r}(x)$ függvény deriváltjainak ismeretében a metszésvonal adott pontjához tartozó görbület, torzió, kíséző triéder az ismert módon számítható ki.

Felületi görbe görbülete. Adott felületi pontban a felület görbületi viszonyainak vizsgálata

A felületi görbe egy pontjában az érintővektort az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r}_u \cdot \dot{u} + \underline{r}_v \cdot \dot{v}$$

alakban nyertük. Látható, hogy $\dot{u}$ és $\dot{v}$ pontos ismerete helyett elegendő ezek arányát az $\dot{u}/\dot{v}$ hányadost ismerni, mert az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} \underline{r}_u + \underline{r}_v$ vagy $\underline{r}_u + \frac{\dot{v}}{\dot{u}} \underline{r}_v$ lineáris kombinációk az $\dot{\underline{r}}$ -tal egyirányú vektorokat, tehát a felületi görbe érintőjét állítják elő. A vizsgálat tovább folytatható, meg lehet határozni a felületi görbe kíséző triéderét, görbületét, torzióját stb.

Számunkra a felületi görbe görbületének meghatározása szükséges, mert egy felületi pontot a rajta áthaladó felületi görbékkel, illetve azok görbületi viszonyaival akarunk jellemezni.

A felületi görbe görbületét meghatározó számítások összetettsége miatt, a jobb áttekinthetőség céljából jelöléseket vezetünk be.

Például látható, hogy $\dot{r}^2 = \dot{r}_u^2 + 2\dot{r}_u\dot{r}_v + \dot{r}_v^2$ kifejezés az $\dot{r}_u^2 = E$, $\dot{r}_u\dot{r}_v = F$ és $\dot{r}_v^2 = G$ jelölések bevezetésével $E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$ alakra hozható, amelyet első alapformának és a benne szereplő E , F , G mennyiségeket Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeknek nevezünk.

Bevezetjük továbbá a $D = \sqrt{EG - F^2} = |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|$ jelölést.

A Gauss-féle másodrendű főmennyiségeket a következő definícióval adjuk meg:

$$L = \frac{1}{D} \dot{r}_{uu}\dot{r}_u\dot{r}_v \quad M = \frac{1}{D} \dot{r}_{uv}\dot{r}_u\dot{r}_v \quad N = \frac{1}{D} \dot{r}_{vv}\dot{r}_u\dot{r}_v.$$

A másodrendű főmennyiségekben a második parciális deriváltak és az első parciális deriváltak vegyes szorzatai szerepelnek. A másodrendű főmennyiségekből képezett második alapforma $L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$ alakú.

Ha egy felületi görbe érintője $\dot{r} = \dot{r}_u\dot{u} + \dot{r}_v\dot{v}$ alakban írható fel és a felületi görbe főnormális vektorának a felületi normális vektorral bezárt szöge φ , akkor a felületi görbe $\frac{1}{R}$ görbületét az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

kifejezésből számítjuk ki.

Például: vegyük a korábban tekintett felületet

$r(u, v) = i(u^3 - 2v^2) + juv^2 + k(u^2v - u)$ és ennek $P(-7, 4, -3)$ ($u = 1$, $v = -2$) pontján áthaladó $\dot{r} = 2\dot{r}_u - 6\dot{r}_v$ érintőjű felületi görbét, amelynek főnormálisa a felületi normálissal $\varphi = \frac{\pi}{3}$ szöget zár be.

A felületi görbe görbületének kiszámításához szükségünk van az első és másodrendű parciális deriváltakra, illetve a Gauss-féle főmennyiségekre:

$$\dot{r}_u = i \cdot 3u^2 + jv^2 + k(2uv - 1) \quad (3, 4, -5)$$

$$\dot{r}_v = i(-4v) + j2uv + ku^2 \quad (8, -4, 1)$$

$$E = 9 + 16 + 25 = 50$$

$$F = 24 - 16 - 5 = 3$$

$$G = 64 + 16 + 1 = 81$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-16, -43, -44)$$

$$D = \sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{4041} = 3\sqrt{449}$$

$$r_{uu} = 16u + 2v \quad (6, 0, -4) \quad r_{uu}r_u r_v = -96 + 176 = 80$$

$$r_{uv} = 2v + 2u \quad (0, -4, 2) \quad r_{uv}r_u r_v = 172 - 88 = 84$$

$$r_{vv} = 2(-4) + 2u \quad (-4, 2, 0) \quad r_{vv}r_u r_v = 64 - 86 = -22$$

$$L = \frac{80}{3\sqrt{449}} \quad M = \frac{84}{3\sqrt{449}} \quad N = \frac{-22}{3\sqrt{449}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Tehát a felületi görbe görbülete:

$$\frac{1}{R} = 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{449}} \cdot \frac{80 + 168(-3) - 22 \cdot 9}{50 + 6(-3) + 81 \cdot 9} = 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{449}} \cdot \left(\frac{-622}{761} \right)$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{1244}{2283\sqrt{449}}$$

A felületi görbe görbületének meghatározására szolgáló kifejezésből és konkrét számításainkból is kiolvashatók a következők:

a) A rögzített P felületi pontban az $r(u, v)$ függvény $r_u, r_v, r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}$ parciális deriváltjai, valamint a belőlük képezett E, F, G és L, M, N főmennyiségek állandók, függetlenül a P-n átmenő felületi görbétől.

b) A P pontban közös érintőjű felületi görbékre nézve az érintő irányát meghatározó $\dot{u}/\dot{v}$ hányados értéke állandó.

c) A P pontban közös főnormálisú felületi görbékre a főnormális és a P ponthoz tartozó felületi normális φ hajlásszöge állandó.

Ezek szerint az ilyen felületi görbék görbülete a P pontban ugyanazt az értéket adja, mint az érintő és a főnormális által kifeszített (simuló) síkkal adódó síkmetszet görbülete. — E tény lehetővé teszi, hogy egy felületi ponton áthaladó felületi görbe görbületét a felület egy síkmetszetének görbületeként állítsuk elő. Tehát a továbbiakban — a felületi térgörbék mellőzésével — csupán a felületi síkmetszetek görbületi viszonyainak vizsgálatára szorítkozhatunk.

Meusnier tétele:

Vizsgáljuk most a P felületi pontban közös érintőjű felületi síkmetszetek görbületét. Ez azt jelenti, hogy a felületi görbe görbületének képletében csupán a φ -t változtatjuk, vagyis a főnormális az érintő körül forgatjuk. $\varphi = 0$ esetén a $\cos \varphi = 1$, a főnormális és a felületi normális egybeesik és ekkor a felületi normális és az érintő

által kifeszített síkkal kapott ún. normálmetszet $\frac{1}{R_n}$ görbületét kapjuk: $\frac{1}{R_n} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{Eu^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$.

Meusnier tétele:

Közös érintőjű ferde metszet és a normálmetszet görbülete között az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_n} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \quad \text{ill.} \quad R = R_n \cdot \cos \varphi$$

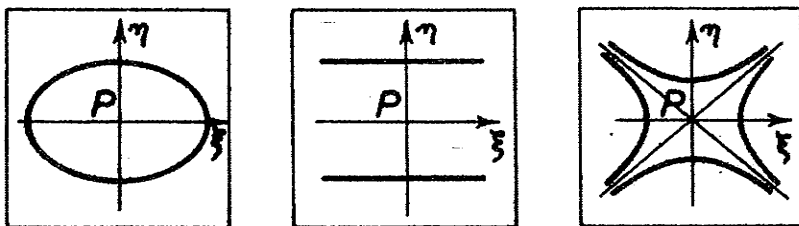
összefüggés áll fenn; vagyis a ferde metszetek görbületi sugarai a normálmetszet görbületi sugarának merőleges vetületei.

E tétel lehetővé teszi, hogy a továbbiakban csupán a normálmetszetek görbületeinek vizsgálatára szorítkozzunk.

Most a P felületi pontban a felületi normális körül forgatjuk az érintőt. Minden érintőirányhoz tartozik egy-egy normálmetszet.

Dupin-féle indikátrix

A felület P pontján áthaladó normálmetszetek a felületi érintősíkból különböző P ponton áthaladó érintőirányokat (egyeneseket) metszenek ki. E normálmetszetekhez tartozó görbületi sugár R_n , abszolút értékének négyzetgyökét a megfelelő érintőirányokra P pontból mindkét irányban felmérjük. Valamennyi érintőirányra felmérve a $\sqrt{|R_n|}$ -t a végpontokból vagy ellipszis vagy párhuzamos egyenespár, vagy konjugált hiperbolapár rajzolódik ki. Az érintősíkban így adódó görbéket a felület P pontjához tartozó Dupin-féle indikátrixának mondjuk (23.9. ábra).



23.9. ábra.

A felületi pontot elliptikusnak nevezzük, ha az indikátrix ellipszis, parabolikusnak mondjuk, ha az indikátrix párhuzamos egyenespár (elfajult parabola). Ha az indikátrix konjugált hiperbolapár, akkor a P pont hiperbolikus pont.

Főirányok, főgörbületek, főmetszetek

Az indikátrix a P felületi ponthoz tartozó érintősíkban mindhárom esetben kijelöl két egymásra merőleges érintő-

tőirányt, amelyeket a 23.9. ábrán ξ -vel, illetve η -val je-
löltünk. Ezen irányokhoz tartozó normálmetszetek (főmetsze-
tek) görbülete, illetve a görbületi sugara a P pontban
extremális tulajdonságú. Ezeket az irányokat főirányoknak
(r_1, r_2), a hozzájuk tartozó görbületeket $\frac{1}{R_1}$ és $\frac{1}{R_2}$ -t fő-
görbületeknek nevezzük.

Ha az indikátrix ellipszis, akkor a P ponthoz tartozó
valamennyi merőleges metszet, így a főmetszetek görbületei
is azonos előjelűek, ennek megfelelően az indikátrix egyen-
lete a főirányok (ξ, η) koordinátarendszerében

$$\frac{\xi^2}{|R_1|} + \frac{\eta^2}{|R_2|} = 1.$$

Ha az indikátrix két párhuzamos egyenes, akkor az e-
gyik főgörbület pl. $\frac{1}{R_1} = 0$, az indikátrix egyenlete $\eta^2 =$
 $= |R_2|$.

Ha az indikátrix két konjugált hiperbola, akkor az
egyik hiperbolához tartozó érintőirányokhoz tartozó nor-
málmetszetek görbülete pozitív, a másikhoz tartozók nega-
tívok. Az aszimptotákhoz tartozó normálmetszetek görbüle-
te 0. Az indikátrix egyenlete

$$\frac{\xi^2}{|R_1|} - \frac{\eta^2}{|R_2|} = \pm 1.$$

A főirányok meghatározása tulajdonképpen két érintőirány
előállítását jelenti az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ lineáris kombinációja-
ként, tehát csupán az $\dot{u}/\dot{v}$ vagy $\dot{v}/\dot{u}$ arányt kell kiszámí-
tani. Ez a következő determináns-alakban megadott másod-
fokú egyenletből lehetséges:

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ill. pl.} \quad \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = k \quad \text{esetén} \quad \begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

A k -ra kapott k_1 és k_2 értékekből $\dot{u}_1, \dot{v}_1$, illetve $\dot{u}_2, \dot{v}_2$
értékek meghatározhatók, és így a két főirány $\underline{r}_1 = \dot{u}_1 \underline{r}_u +$
 $+ \dot{v}_1 \underline{r}_v$, illetve $\underline{r}_2 = \dot{u}_2 \underline{r}_u + \dot{v}_2 \underline{r}_v$ alakban áll elő. Mint-
hogy a két főirány egymásra merőleges, ezért az egyik fő-
metszet normálisa a másik főirány és viszont. Ennek alap-
ján a főmetszetek síkjának egyenlete könnyen felírható.
A főgörbületek kiszámítása a főirányokat meghatározó $\dot{u}_1,$
 $\dot{v}_1$, illetve $\dot{u}_2, \dot{v}_2$ értékek alapján a normálmetszetre ko-
rábban megismert görbület-képlet segítségével is lehetsé-
ges.

A másik lehetőség az, hogy a főgörbületek szorzatára
és összegére könnyen kezelhető számítási módszer vezethető
le.

A főgörbületek szorzata: Gauss-féle vagy szorzatgörbület

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

A főgörbületek összege: Minkowski-féle vagy összeggörbület

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

A Gauss-féle görbület előjele megadja a felületi pont jellegét. A $K > 0$ elliptikus-, $K = 0$ parabolikus-, $K < 0$ hiperbolikus pontot jelent. Minthogy $EG - F^2 > 0$, tehát a pont jellegét $LN - M^2$ előjele adja meg. (Az Euler-Monge-féle felületmegadás esetén az $rt - s^2 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ előjele megegyezik a szorzatgörbület előjelével, tehát megadja a felületi pont jellegét.)

Euler-tétele: Az r_1 főiránnyal ϑ szöget alkotó érintőirányhoz tartozó normálmetszet görbülete:

$$\frac{1}{R_\vartheta} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{R_2} \sin^2 \vartheta.$$

Például: Határozzuk meg az $r(u, v) = i(u^2 + v^2) + j2uv + k(u - v)$ felület $u = -1, v = -1$ pontjában ($P(2, 2, 0)$) a főirányokat, a főmetszetek síkjainak egyenletét, a szorzat és összeggörbületet, továbbá állapítsuk meg a felületi pont jellegét.

$$\begin{aligned} r_u &= 2i + j2v + k & (-2, -2, 1) \\ r_v &= j2u + i2v - k & (-2, -2, -1) \\ r_{uu} &= 2i & (2, 0, 0) \\ r_{uv} &= 2j & (0, 2, 0) \\ r_{vv} &= 2i & (2, 0, 0) \end{aligned} \quad \begin{aligned} r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4i - 4j \\ r_u \times r_v &= (4, -4, 0) \end{aligned}$$

$$E = 9 \quad F = 7 \quad G = 9 \quad D = \sqrt{32}$$

$$L = \frac{8}{\sqrt{32}} \quad M = \frac{-8}{\sqrt{32}} \quad N = \frac{8}{\sqrt{32}}$$

A főirányok:

$$\frac{8}{\sqrt{32}} \begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ 9 & 7 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{128}{\sqrt{32}} (1 - k^2) = 0 \quad \text{innen} \quad \begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= -1 \end{aligned}$$

tehát

$$r_1 = r_u + r_v = -4i - 4j$$

$$r_2 = r_u - r_v = 2k.$$

Főmetszetek síkjai: $2z = 0$, ill. $-4(x-2) - 4(y-2) = 0$.
 Szorzat-, illetve összegörbület: $K = 0$; $H = \sqrt{2}$.

A felületi pont parabolikus pont.

Utolsó példánkban a megadott felületet nem egy pontjában, hanem az egész felületet vizsgáljuk. Ennek megfelelően a parciális deriváltakkal (és nem azok adott paraméterértékekhez tartozó behelyettesített értékeivel) számolunk:

Állapítsuk meg, hogy milyen jellegűek az

$$\underline{r}(u,v) = (u-v)\underline{i} + (u+v)\underline{j} + uv\underline{k}$$

alakban megadott felület pontjai.

A feladatnál nyilván az $LN - M^2$ előjelét kell meghatározni; minthogy azonban $LN - M^2 =$

$$= \frac{1}{D} [(r_{uu}r_{uv}r_v)(r_{vv}r_u r_v) - (r_{uv}r_u r_v)^2], \text{ és } D > 0, \text{ elegendő a zárójelben levő vegyszorzatokkal dolgozni.}$$

$\underline{r}_u = \underline{i} + \underline{j} + v\underline{k}$, $\underline{r}_v = -\underline{i} + \underline{j} + u\underline{k}$ továbbá $r_{uu} = 0$, $r_{uv} = \underline{k}$, $r_{vv} = 0$.

Látható, hogy

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix} = (u-v)\underline{i} - (u+v)\underline{j} + 2\underline{k}$$

innen

$$r_{uu}r_{uv}r_v = r_{vv}r_u r_v = 0 \text{ és } r_{uv}r_u r_v = 2.$$

$$(r_{uu}r_{uv}r_v)(r_{vv}r_u r_v) - (r_{uv}r_u r_v)^2 = -4$$

a felület valamennyi szóba jöhető pontjára, tehát a fenti felület minden pontja hiperbolikus pont.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok: 133-144. old. 78-164. feladatokat és 125. old. 27-28. feladatokat.

Elméleti tananyag: Tankönyv 256-272. pontok.

24. AZ ELEKTRONIKUS GÉPI RAJZOLÁS ALAPGONDOLATA

Az elektronikus számítógépet felhasználó ember a géppel általában egy monitor (televíziós képernyő) segítségével tartja a kapcsolatot. A képernyőn jelennek meg a beírt program sorai, illetve a gép visszajelzései is. Ha pl. egy monitoron 20 sor fér el, és soronként 30 karakterhely van, akkor bizonyos karakterhelyek valamilyen kitöltésével egy síkalakzat (mondjuk egy betűalak) áll elő. Ez az eljárás hasonló ahhoz, amikor egy négyzethálós papíron bizonyos négyzetek beszínezésével állítjuk elő ugyanazt az alakzatot. Bár az emberi szem ráismer az alakzatra, de annak ferde egyenesei, vagy görbeívei korántsem vonalak, hanem erősen lépcsőzetes követői a tulajdonképpeni vonalaknak. Ha ugyanilyen méretű alakzatot milliméterpapíron, a kis négyzetek beszínezésével ábrázolunk, akkor a szemünk sokkal elfogadhatóbbnak látja a vonalak még mindig kis lépcsőkből álló megjelenítését. Ez a finomodás az elektronika eszközeivel is elvégezhető; a számítógép ún. grafikus üzemmódjában a monitort „finom felbontásban” kezeli, mégpedig a képernyőn levő keretvonalak által meghatározott síkbeli koordinátarendszerben — annak korlátait figyelembe véve. A koordinátaival megadott, vagy előzetesen kiszámított (és a gép memóriájában elraktározott) pontokat, azok összekötő szakaszait a számítógép a monitoron meg tudja jeleníteni. Ha görbevonalat akarunk a monitorra „írni”, akkor ez úgy történhet, hogy az ábrázolandó görbe igen sok pontját (rendezett sorrendben) a számítógéppel kiszámíttatjuk, majd ezeket sorrendben összeköttetjük. Ha elegendő sűrűn vettük fel a görbe pontjait, akkor a „megrajzolt” beírt poligon görbének látszik. A képernyőn létrehozott ábrát ún. printerrel (mátrixnyomtatóval) papíron is meg tudjuk jeleníteni, de ez is finomabb lépcsőzetességeket mutat még. A finomítás tovább folytatható, de ehhez a számítógéphez kapcsolt rajzgépre (ún. plotterre) van szükség. Ennek elvi alapja is az előzőkhöz hasonló, de itt egy elektronikusan irányított rajzfej (golyóstoll v. filótoll) rajzolja le a rajzlapra tizedmilliméter (esetleg néhány századmilliméter) pontossággal az egyeneseket, illetve görbevonalak esetén a beírt poligonokat, amelyek már valódi görbéknek látszanak.

Az elektronikus gépi rajzolás másik problémája a térbeli alakzatok síkábrán történő megjelenítése.

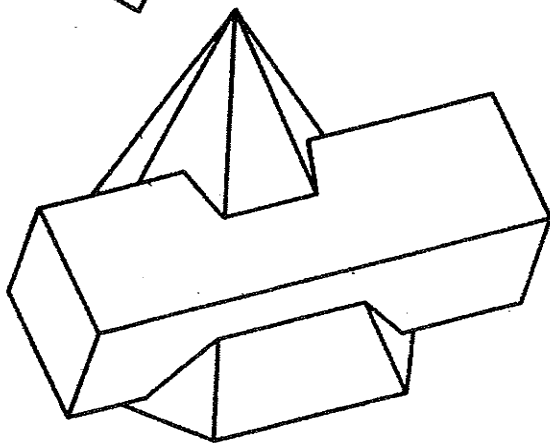
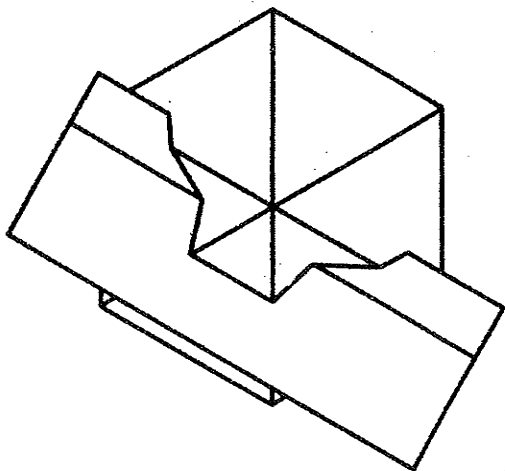
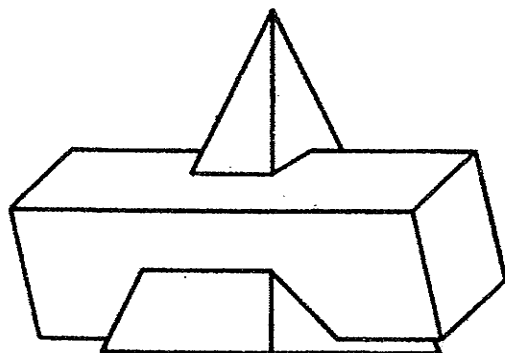
A geometria tanulása során tanult számolási eljárások szinte kivétel nélkül olyan algoritmusok, amelyekből számítógépi program készíthető. Ha az ábrázoló geometriai

módszereket megvizsgáljuk, akkor arra az eredményre jutunk, hogy ott geometriai algoritmusokat alkalmaztunk, amelyek koordináta geometriai megfontolásokra áttehetők s így számítógépre vihetők.

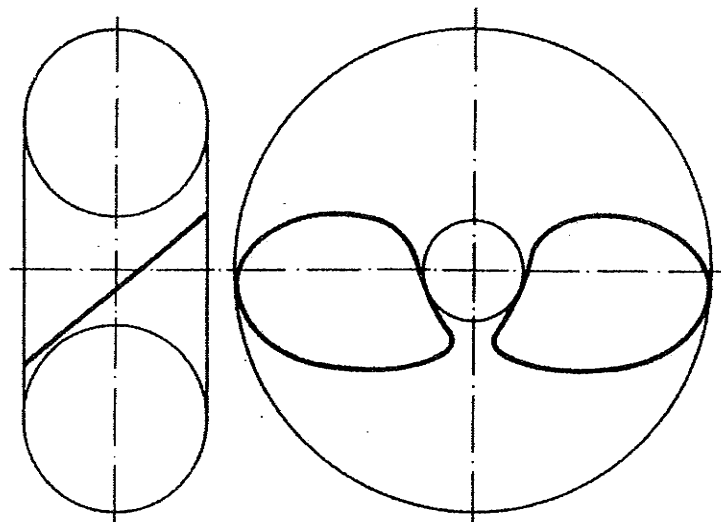
Az axonometrikus ábrázolás (ferde és merőleges), valamint a Monge-féle ábrázolás (és a többi ábrázolási módszer) a számítógépes rajzolással egyaránt megvalósítható. Alapjai tisztán geometriai ismeretek, amelyek nélkül a „legintelligensebb” gépek sem programozhatók be geometriai jellegű ábrázolásokra. Az elektronikus gépi rajzolás technikailag állandó fejlődésben van, és számos alkalmazása lesz a jövőben. (Pl. napjaink egyik újdonsága a lézerrajzoló.)

Ezen áttekintő ismertetés után néhány elektronikus rajzolással készült ábrát mutatunk be. Mindenek előtt megemlítjük, hogy a „Geometriai feladatok” jegyzet differenciálgeometriai részének ábrái ún. Digigraph elektronikus rajzgéppel készültek.

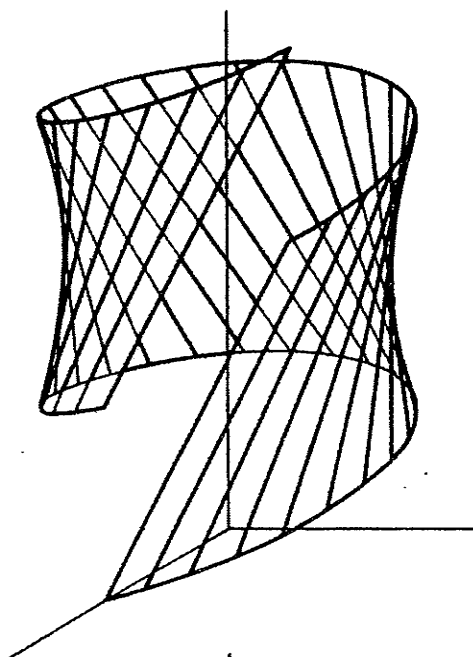
A 24.1. ábrán a két poliéder áthatását — a megfelelő program alapján — Commodore 64 személyi számítógéphez kapcsolt rajzgépen rajzoltuk meg. A 24.2. ábrán tórusz síkmetszetét, a 24.3. ábrán egy élesmenetű nyitott csavarfelületet, a 24.4. ábrán egy csavarvonal érintői által alkotott felületet rajzoltattunk meg. (Megjegyezzük, hogy a 24.4. ábrán bemutatott csavarfelület az egyetlen kifejthető csavarfelület, de technikai alkalmazásra aligha alkalmas.) A 24.5. ábrán gépi úton rajzolt hurkolt epicikloist mutatunk be.



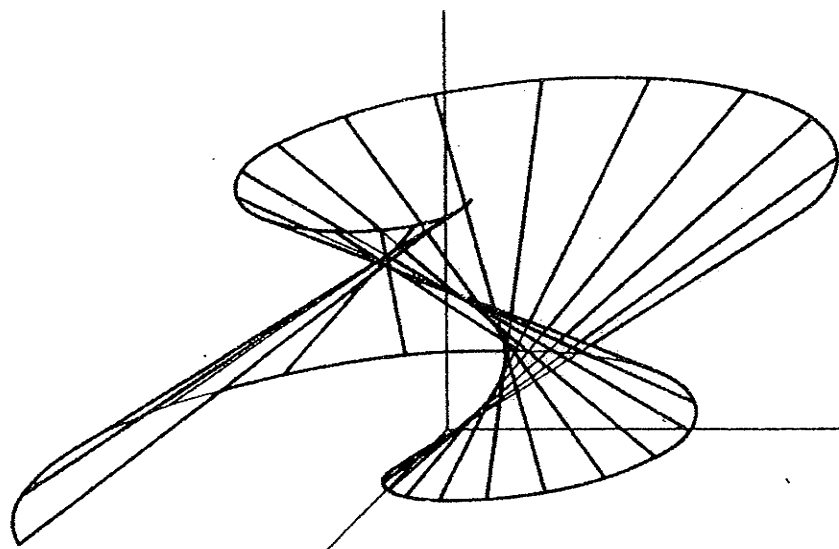
24.1. obra.



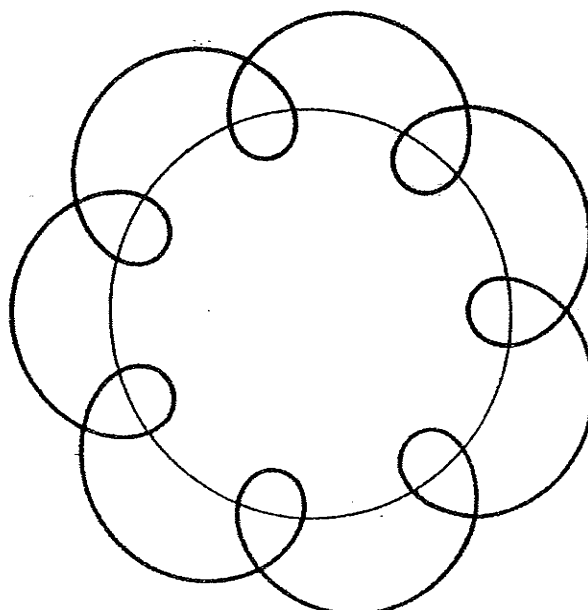
24.2. ábra.



24.3. ábra.



24.4. ábra.



24.5. ábra.

IRODALOM

- Hajós György: Bevezetés a geometriába
Tankönyvkiadó, 1961.
(ill. további változatlan kiadások)
- Kólya Dániel: Gyakorlati ábrázoló geometria
Műszaki Könyvkiadó, 1978.
- Kólya Dániel: Ábrázoló geometriai példatár
Műszaki Könyvkiadó, 1983.
- Pethes Endre: 222 ábrázoló geometriai feladat
Műszaki Könyvkiadó, 1963.
(ill. további változatlan kiadások)
- Reiman István: A geometria és határterületei
Gondolat Könyvkiadó, 1986.
- Reiman István: Ábrázoló geometria
(Gimnáziumi fakultatív tárgy tankönyve)
Tankönyvkiadó, 1986.
- Strommer Gyula: Ábrázoló geometria
Tankönyvkiadó, 1971.
(ill. második kiadása)
- Strommer Gyula: Geometria
Tankönyvkiadó, 1987.

FÜGGELÉK I.

TRANSZFORMÁCIÓK

A mátrixszámítás legfontosabb fogalmainak összefoglalása

A mátrixok közül az ún. négyzetes (általában 3×3 -as) mátrixokra, valamint a sormátrixokra, illetve oszlopmátrixokra van szükségünk.

Két mátrix egyenlősége: Az A és B mátrixok

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{illetve} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

akkor egyenlők, ha $a_{ik} = b_{ik}$ ($i=1,2,3$; $k=1,2,3$).

Mátrixok összevonása: A és B összege, illetve különbsége

$$\underline{A} \pm \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása egy számmal:

$$\lambda \underline{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása: Az A és B mátrix az A, B sorrendben összeszorozhatók, ha A oszlopainak a száma megegyezik B sorainak a számával. Ekkor azt mondjuk, hogy A és B e sorrendben konformábilis.

$$\underline{AB} = \underline{C},$$

ahol C elemei $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}$ ($i,k=1,2,3$).

(Ez a sor oszlop szorzás: c_{ik} elem az A mátrix i -edik sorának a B mátrix k -adik oszlopával való komponálásából adódik.)
Három mátrix A, B, C, amelyek A, B illetve B, C sorrendben konformábilisak, akkor e sorrendben minden csoportosításban összeszorozhatók:

$$\underline{A}(\underline{BC}) = (\underline{AB})\underline{C}$$

tehát a mátrixok szorzása asszociatív.

Példa: mátrixok szorzásának tényleges elvégzése a Falk-módszerrel:

$$\underline{A} = \begin{matrix} & \underline{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \underline{AB}$$

A oszlopösszegeinek sorát a $1 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 5$

B oszlopaival komonálva az $1 \cdot 4 - 7 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 2$

AB oszlopösszegeit adja: $1 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 11$

Oszlopösszeg-próba (alapját a mátrixszorzás disztributivitása képezi).

A mátrixok szorzása általában nem kommutatív:

$$\underline{AB} \neq \underline{BA}$$

A mátrixokra értelmezett műveletekre érvényes a disztributivitás:

$$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{AC} + \underline{BC}$$

$$\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{CA} + \underline{CB}$$

Egység mátrix:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zérus mátrix:

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Két nem zérus mátrix szorzata lehet zérus mátrix.

Szorzások sor- illetve oszlop mátrixokkal:

$$1) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$2) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & y_1 x_3 \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & y_2 x_3 \\ y_3 x_1 & y_3 x_2 & y_3 x_3 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

Mátrixtranszponáltja: Az $\underline{A}$ mátrix $\underline{A}^*$ transzponáltjához jutunk, ha $\underline{A}$ sorait $\underline{A}^*$ oszlopaiba írjuk.

Példaként:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

Négyzetes mátrix adjungáltja: Az $\underline{A}$ mátrix adjungáltja $\text{adj} \underline{A}$, ha a_{ik} helyébe a hozzá tartozó A_{ik} aldeterminánst (a sakktábla szabálya szerint előjelesen értve) tesszük:

$$\text{adj} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Mátrix inverze: Az $\underline{A}$ mátrix inverze az $\underline{A}^{-1}$ mátrix, ha az $\underline{A}$ -hoz tartozó determináns: $\det \underline{A} \neq 0$ (vagyis $\underline{A}$ reguláris mátrix) és $\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{E}$. A jobb inverz és a bal inverz megegyezik, mivel a műveletek elvégzésével belátható, hogy

$$\underline{A}(\text{adj} \underline{A}) = \det \underline{A} \underline{E} \quad \text{és} \quad (\text{adj} \underline{A})\underline{A} = \det \underline{A} \underline{E}$$

Innen már következik, hogy

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj} \underline{A}}{\det \underline{A}}.$$

A definíció alapján belátható tulajdonságok:

$$(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}; \quad (\underline{A}^{-1})^* = (\underline{A}^*)^{-1}; \quad (\underline{AB})^{-1} = \underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1}.$$

Ortogonalis mátrix definíciója: Az A mátrixot ortogonálisnak nevezzük, ha inverze a transzponáltjával egyenlő, azaz

$$AA^* = A^*A = E \text{ illetve } A^{-1} = A^*.$$

Tétel: két vagy több ortogonalis mátrix szorzata ismét ortogonalis mátrix.

Tétel: az A mátrix akkor és csak akkor ortogonalis, ha minden oszlopában az elemek négyzetösszege 1, különböző oszlopainak kompozíciója (különböző oszlopvektorok skaláris szorzata) 0. (Ami az oszlopokra fennáll, az a sorokra is igaz.)

Bizonyítás: legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ és } A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Mint hogy A ortogonalis, ezért $A^*A = AA^* = E$. Ennél fogva

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1 & \text{ illetve } & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1 & \text{ illetve } & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1 & & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0 \end{aligned}$$

Amennyiben viszont a fenti egyenlőségek fennállnak, akkor

$$A^*A = AA^* = E$$

Megjegyezzük még, hogy mátrixok szorzatának transzponáltjára fennállnak a következők:

$$\begin{aligned} (A B)^* &= B^* A^* \\ (ABC)^* &= C^* B^* A^*. \end{aligned}$$

Koordináta-transzformáció (báziscsere)

Az $\underline{i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{j} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{k} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ortonormált bázisban az $\underline{x}$ vektor az

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ koordinátákkal adható meg, vagyis felírható

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ahol az egységmátrix oszlopvektorai pontosan az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok.

Vegyük az $\underline{e}_1 \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{bmatrix}$, $\underline{e}_2 \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \\ z_{32} \end{bmatrix}$, $\underline{e}_3 \begin{bmatrix} z_{13} \\ z_{23} \\ z_{33} \end{bmatrix}$ ortonormált bázist,

azaz, $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ az origóból kiinduló, egymásra páronként merőleges egységvektorok (és e sorrendben jobbrendszert alkotnak), akkor e rendszerben az $\underline{x}$ vektor a $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$ koordinátákkal

jellemezhető, azaz $\underline{x} = f_1 \underline{e}_1 + f_2 \underline{e}_2 + f_3 \underline{e}_3$.

A kétféleképpen felírt $\underline{x}$ vektor koordinátái között a következő koordináta-transzformáció írható fel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \text{ahol } \begin{matrix} z_{11} = \cos(\underline{i}, \underline{e}_1) & z_{12} = \cos(\underline{i}, \underline{e}_2) & z_{13} = \cos(\underline{i}, \underline{e}_3) \\ z_{21} = \cos(\underline{j}, \underline{e}_1) & z_{22} = \cos(\underline{j}, \underline{e}_2) & z_{23} = \cos(\underline{j}, \underline{e}_3) \\ z_{31} = \cos(\underline{k}, \underline{e}_1) & z_{32} = \cos(\underline{k}, \underline{e}_2) & z_{33} = \cos(\underline{k}, \underline{e}_3) \end{matrix}$$

A koordináta-transzformáció mátrixának oszlopvektorai az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok transzformáltjainak koordinátáiból adódnak. Ortonormált bázisok közti transzformáció mindig ortogonális mátrix-szal adható meg, tehát a mátrix inverzét a transzponáltja szolgáltatja:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} & z_{31} \\ z_{12} & z_{22} & z_{32} \\ z_{13} & z_{23} & z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Leképzések lineáris transzformációval. Lineáris operátorok

A következőkben olyan leképezésekkel foglalkozunk, amelyek a koordinátarendszerben a $P(x, y, z)$ megadott ponthoz a $P'(x', y', z')$ pontot rendelik úgy, hogy a koordináták közötti kapcsolat lineáris transzformációval a következő alakban írható fel:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A lineáris leképezés - másnéven lineáris operátor - mátrixának oszlopvektorai az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok képei: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

Néhány egyszerű lineáris operátor mátrixa:

1. Koordináta-síkokra való tükrözés mátrixa:

xy síkra: $\underline{T}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ yz síkra: $\underline{T}_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ xz síkra: $\underline{T}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Koordináta-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixa:
pl. az x tengelyre való tükrözésnél:

$$\underline{T}_x = \underline{T}_{xz} \underline{T}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Az origóra való tükrözés mátrixa:

$$\underline{T}_0 = \underline{T}_{yz} \underline{T}_{xz} \underline{T}_{xy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Nyújtó vagy zsugorító mátrix:

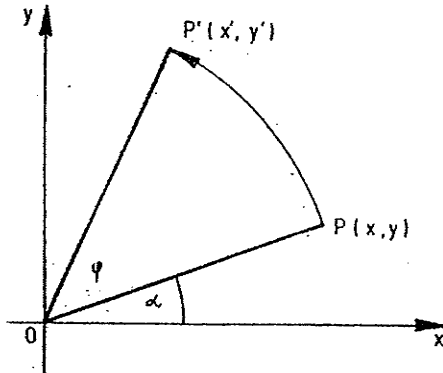
$$\underline{N} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \text{ mátrix a megadott } P(x,y,z) \text{ pont koordinátait } k_1, k_2, k_3 \text{-szorosába viszi át, tehát a pont képe: } P'(k_1 x, k_2 y, k_3 z).$$

5. Vetítő-mátrix: A tér pontjait az x, y koordinátasíkra merőlegesen vetítő leképezést a $\underline{V}$ mátrix létesíti:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tehát } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

leképezésben $x'=x$, $y'=y$, $z'=0$ adódik.

Az x, y koordinátasíkban az origó körül pozitív irányban való φ szögű elforgatás:



1. ábra

Forgassuk el a P pontot a P' helyzetbe: 1. ábra szerint

$$x = OP \cos \alpha$$

$$y = OP \sin \alpha, \text{ illetve}$$

$$x' = OP' \cos(\alpha + \varphi) \text{ és } OP' = OP.$$

$$y' = OP' \sin(\alpha + \varphi)$$

Ennek alapján

$$x' = OP \cos \alpha \cos \varphi - OP \sin \alpha \sin \varphi =$$

$$= x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = OP \sin \alpha \cos \varphi + OP \cos \alpha \sin \varphi =$$

$$= x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

tehát

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ vagyis a forgatás mátrixa}$$

$\underline{F} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$. Látható, hogy a mátrix oszlopvektoraiban az $\underline{i}$, illetve $\underline{j}$ egységvektorok φ szögű elforgatottjainak a koordinátái vannak. Az $\underline{F}$ mátrix ortogonális, $\det \underline{F} = 1$. $\underline{F}$ inverze az $\underline{F}^T$ mátrix, ami a $(-\varphi)$ -szögű elforgatást határozza meg.

E forgatómátrix ismeretében könnyen felírható a tér pontjainak a z koordinátatengely körül φ szöggel való elforgatását előállító $\underline{F}_z$ mátrix is:

$$\underline{F}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{F}_z$ mátrixról is látható, hogy ortogonális mátrix és $\det \underline{F}_z = 1$.

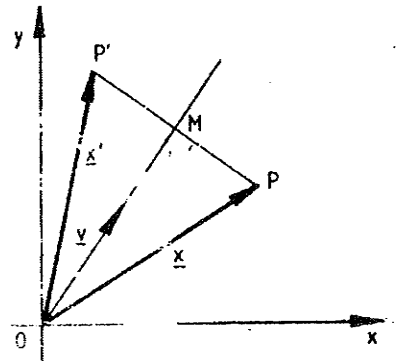
Az x, y koordinátasíkban az origón áthaladó $v(v_1, v_2)$ egységvektorral megadott egyenesre való tükrözés

P pont tükörképe a P' pont, a megfelelő helyvektorok $\underline{x}$ és $\underline{x}'$ (2. ábra.) A PP' szakasz $\underline{v}$ egyenesére eső M felezéspontjába mutató $\underline{m}$ helyvektor két-féleképpen felírható:

Egyfelől $\underline{m} = \frac{\underline{x} + \underline{x}'}{2}$, másrészt $\underline{m} = \underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{x})$, ami mátrixos felírásban $\underline{v} \underline{v}^* \underline{x}$ alakú, tehát

$$\underline{x}' = 2 \underline{v} \underline{v}^* \underline{x} - \underline{x} = [2 \underline{v} \underline{v}^* - \underline{E}] \underline{x}.$$

A $\underline{T}$ tükröző mátrix előállítását a következő



2. ábra

$$\underline{T} = 2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1^2 & 2v_1v_2 \\ 2v_1v_2 & 2v_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 & 2v_1v_2 \\ 2v_1v_2 & v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix}$$

minthogy $v_1^2 + v_2^2 = 1$. A $\underline{T}$ mátrix ortogonális és $\det \underline{T} = -1$.

Ugyanígyen elvek alapján állapítható meg térbeli koordináta-rendszer kezdőpontján áthaladó egyenesre vonatkozó tükrözés mátrixa is.

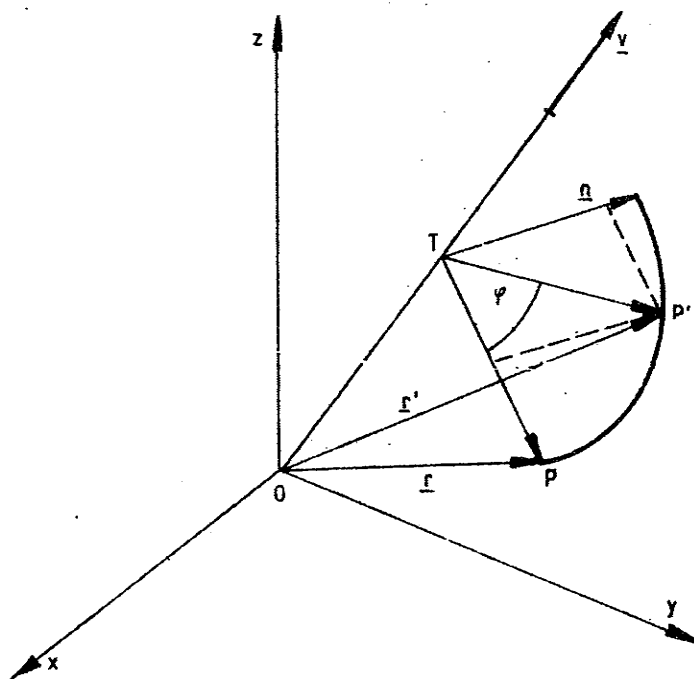
Ha a $\underline{v}$ vektort $v_1 = \cos \alpha$, $v_2 = \sin \alpha$ alakban adjuk meg, akkor $\underline{T}$ mátrix a következő alakú:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

Térbeli koordináta-rendszerben a $\underline{v}(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ és $\underline{k}$ vektorok által meghatározott síkra vonatkozó tükrözés $\underline{T}_s$ mátrixa

közvetlenül felírható: $\underline{T}_s = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Térbeli koordináta-rendszerben az origón áthaladó
 $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$ irányvektorú egyenes körül pozitív értelmű
 φ szögű forgatás



3. ábra

Mindenekelőtt tegyük fel, hogy $|\underline{v}|=1$, és a 3. ábra szerint a P pontot a P' helyzetbe φ szögű forgatás viszi át. Legyen az $\underline{OP}=\underline{r}$, ekkor $\underline{OT}=(\underline{rv})\underline{v}$ és $\underline{TP}=\underline{r}-(\underline{rv})\underline{v}$. Legyen az $\underline{n}$ vektor $\underline{n}=\underline{v} \times \underline{TP}=\underline{v} \times \underline{r}-(\underline{rv})[\underline{v} \times \underline{v}]$, vagyis $\underline{n}=\underline{v} \times \underline{r}$. (Látható, hogy $|\underline{n}|=|\underline{TP}|=|\underline{TP}'|$.) Ezek szerint a $\underline{TP}'$ vektor a következő alakban írható fel:

$$\underline{TP}'=\underline{TP}\cos\varphi+\underline{n}\sin\varphi, \text{ vagyis}$$

$$\underline{TP}'=[\underline{r}-(\underline{rv})\underline{v}]\cos\varphi+(\underline{v} \times \underline{r})\sin\varphi.$$

Ha $\underline{OP}'$ vektort $\underline{r}'$ -vel jelöljük, akkor

$$\underline{r}'=\underline{OT}+\underline{TP}'=(\underline{rv})\underline{v}+\underline{TP}', \text{ illetve}$$

$$\underline{r}'=(\underline{rv})\underline{v}+[\underline{r}-(\underline{rv})\underline{v}]\cos\varphi+(\underline{v} \times \underline{r})\sin\varphi = \\ = \underline{r}\cos\varphi+(1-\cos\varphi)(\underline{rv})\underline{v}+(\underline{v} \times \underline{r})\sin\varphi.$$

Az $\underline{r}'$ vektor az $\underline{r}$ vektor képe: $\underline{r}' = \underline{A}\underline{r}$. Tekintsük tehát azt az $\underline{A}$ mátrixú lineáris operátort, amely a v egyenese körüli forgatást végzi. Az $\underline{A}$ mátrix első oszlopába az $\underline{i}$ vektor $\underline{A}\underline{i}$ képének a koordinátái kerülnek:

$$\underline{A}\underline{i} = \underline{i}\cos\varphi + (1-\cos\varphi) [v_1^2\underline{i} + v_1v_2\underline{j} + v_1v_3\underline{k}] + (\underline{v}\times\underline{i})\sin\varphi$$

ahol

$$\underline{v}\times\underline{i} = v_3\underline{j} - v_2\underline{k}, \quad \text{tehát}$$

$$\underline{A}\underline{i} = [\cos\varphi + (1-\cos\varphi)v_1^2]\underline{i} + [(1-\cos\varphi)v_1v_2 + v_3\sin\varphi]\underline{j} + [(1-\cos\varphi)v_1v_3 - v_2\sin\varphi]\underline{k}.$$

Hasonlóan $\underline{A}$ mátrix másik két oszlopába $\underline{A}\underline{j}$, illetve $\underline{A}\underline{k}$ koordinátái kerülnek:

$$\begin{aligned} \underline{A}\underline{j} = & [(1-\cos\varphi)v_1v_2 - v_3\sin\varphi]\underline{i} + [\cos\varphi + (1-\cos\varphi)v_2^2]\underline{j} + [(1-\cos\varphi)v_2v_3 + v_1\sin\varphi]\underline{k} \\ \underline{A}\underline{k} = & [(1-\cos\varphi)v_1v_3 + v_2\sin\varphi]\underline{i} + [(1-\cos\varphi)v_2v_3 - v_1\sin\varphi]\underline{j} + [\cos\varphi + (1-\cos\varphi)v_3^2]\underline{k}. \end{aligned}$$

Tehát a forgatás $\underline{A}$ mátrixa:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi + (1-\cos\varphi)v_1^2 & (1-\cos\varphi)v_1v_2 - v_3\sin\varphi & (1-\cos\varphi)v_1v_3 + v_2\sin\varphi \\ (1-\cos\varphi)v_1v_2 + v_3\sin\varphi & \cos\varphi + (1-\cos\varphi)v_2^2 & (1-\cos\varphi)v_2v_3 - v_1\sin\varphi \\ (1-\cos\varphi)v_1v_3 - v_2\sin\varphi & (1-\cos\varphi)v_2v_3 + v_1\sin\varphi & \cos\varphi + (1-\cos\varphi)v_3^2 \end{bmatrix}$$

amely ortogonális mátrix, inverze tehát a transzponáltja, $\det A = 1$. Az $\underline{A}$ mátrix felbontható a következő mátrixok lineáris kombinációjára:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3^2 \end{bmatrix} (1-\cos\varphi) + \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \sin\varphi$$

Térbeli derékszögű koordináta-rendszer origóján áthaladó általános helyzetű síkra való merőleges vetítés

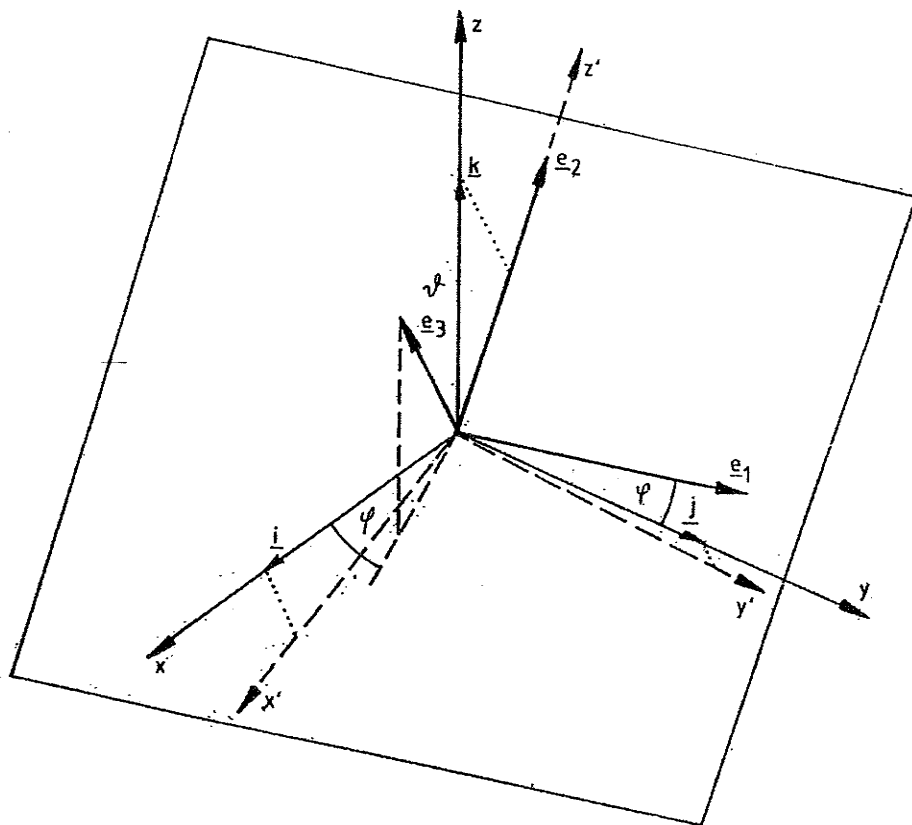
A vetítés képsíkját az $\underline{e}_3$ egységvektorra merőlegesen vesszük fel. Az $\underline{e}_3$ vektort a φ és ϑ és szögek (4. ábra) egyértelműen meghatározzák az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ ortonormált bázis által, meghatározott koordináta-rendszerben:

$$\underline{e}_3 = \sin \vartheta \cos \varphi \underline{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \underline{j} + \cos \vartheta \underline{k}$$

Legyen a képsíkot kifeszítő egyik egységvektor $\underline{e}_1$ az x, y koordinátasíkban, ekkor ez a $\underline{j}$ egységvektorral φ szöget alkot, e szerint

$$\underline{e}_1 = -\sin \varphi \underline{i} + \cos \varphi \underline{j}; \quad \text{látható, hogy } \underline{e}_1 \perp \underline{e}_3:$$

A másik képsíkbeli $\underline{e}_2$ egységvektorral, alkosson az $\underline{e}_3$ és $\underline{e}_1$ jobbsodrású ortonormált bázist, vagyis $\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1$.



4. ábra

$$\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}, \text{ tehát}$$

$$\underline{e}_2 = -\cos \vartheta \cos \varphi \underline{i} - \cos \vartheta \sin \varphi \underline{j} + \sin \vartheta \underline{k}.$$

A két ortonormált bázis közti koordináta-transzformáció $\underline{Z}$ mátrixának az oszlopvektorait az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ egységvektorok koordinátái képezik:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Ez a mátrix az $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ bázisban értelmezett koordinátákból $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ -beli koordináták előállítására szolgál. Mint-hogy $\underline{Z}$ ortogonális mátrix, ezért inverze a transzponáltja: $\underline{Z}^*$. A térbeli koordináta-rendszerben megadott pontokat $\underline{Z}^*$ mátrix-szal $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ bázisra tudjuk átszámolni.

$$\text{Most a } \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vetítő mátrix-szal a pontok vetülete-nek a}$$

koordinátáit kapjuk meg az $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ (és $\underline{e}_3$) által meghatározott koordináta-rendszerben. Ha a vetületi pontok koordinátáit az eredeti koordináta-rendszerben akarjuk ismerni, akkor még a $\underline{Z}$ által meghatározott báziscserét kell végrehajtani.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underline{Z} \underline{V} \underline{Z}^* \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Könnnyen látható, hogy az iménti eljárás alkalmas az ortogonális axonometrikus ábrázolás megvalósítására is. Legyen adott az axonometrikus képsík normál-egységvektora $\underline{n}(a,b,c)$. $\underline{e}_3 = \underline{n}$ helyettesítéssel, az axonometrikus képsík $ax+by+cz=0$ egyenletéből adódik az x, y koordinátáikkal való $ax+by=0$ metszésvonala, tehát az $\underline{e}_1$ egységvektor:

$$\underline{e}_1 \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right), \text{ ennek megfelelően } \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1,$$

vagyis

$$\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a & b & c \\ -b & a & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-ac\underline{i} - bc\underline{j} + (a^2+b^2)\underline{k}),$$

azaz

$$\underline{e}_2 \left(\frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sqrt{a^2+b^2} \right).$$

A $-n$ irányú vetítéssel az $[e_1, e_2]$ síkra merőleges vetítést nyerünk, amely az x, y, z koordináta-rendszer x', y', z' képét és a koordináta-rendszerben elhelyezett alakzat ortogonális axonometrikus képét adja. - Jelentse A azt a mátrixot, amelynek oszlopvektorait e_1, e_2, e_3 -ből képezzük, vagyis a megfelelő báziscsere mátrixát. - Ezt a leképezést a következő lineáris operáció valósítja meg:

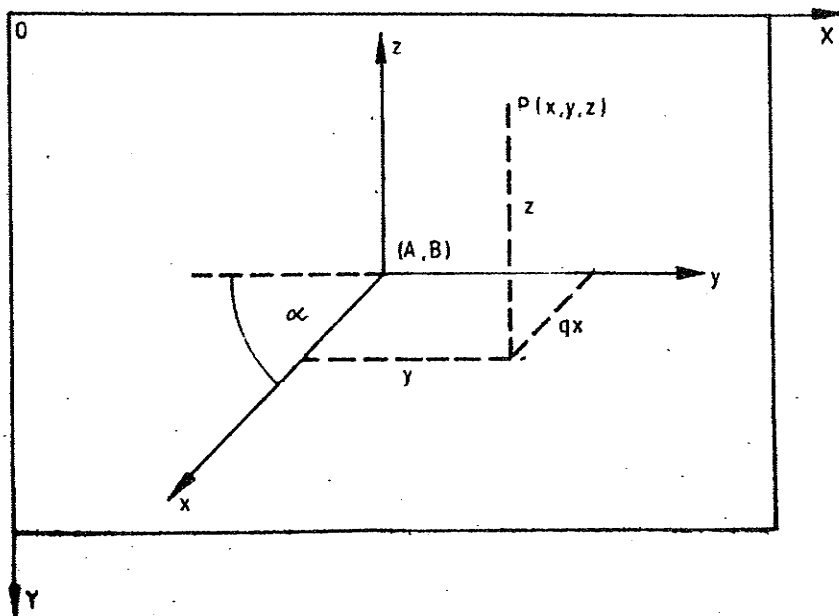
$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \underline{VA}^* \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \text{ ahol } \xi, \eta, \zeta \text{ az } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ bázisban}$$

adódó koordinátákat jelentik, természetesen $\xi = 0$,

Axonometrikus vetület előállítás képernyő-koordinátákkal

A számítógépes grafikus lehetőséget a monitor képernyőjén általában olyan derékszögű síkbeli koordináta-rendszer szolgáltatja, amelynél az origó a képernyőkeret bal felső sarka, így az y tengely lefelé mutat. A továbbiakban a képernyő-koordinátákat nagybetűkkel különböztetjük meg a többi koordinátától.

Paralel-perspektíva (kavalier axonometria) megvalósítása képernyő-koordinátákkal



5. ábra

Az X_1M , illetve Y_1M egyenesekkel húzzunk párhuzamosokat az O ponton át, XY -nál alkotott metszéspontjaikat jelöljük A , illetve B -vel. Az ábrából leolvasható, hogy $XA=AO$, illetve $BY=BO$. Az XOY háromszög X , illetve Y csúcsánál levő szögeit jelöljük α -val, illetve β -val. Nyilvánvaló, hogy

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Most forgassuk be X_1X egyenes körül az XOX_1 háromszöget a nyomháromszög síkjába. Az (O) pont az XX_1 fölé rajzolt Thales-kör és a O -ban XX_1 -re állított merőleges metszéspontja. A λ_x rövidülésre adódik az $X(O)X_1$ derékszögű háromszögből:

$$\lambda_x = \frac{OX}{(O)X} = \frac{(O)X}{XX_1}, \text{ ahonnan } \lambda_x^2 = \frac{OX}{XX_1} = \frac{OA}{r}.$$

Hasonlóan kapjuk a λ_y rövidülésre, hogy

$$\lambda_y = \frac{OY}{(O)Y} = \frac{(O)Y}{YY_1}, \text{ ahonnan } \lambda_y^2 = \frac{OY}{YY_1} = \frac{OB}{r},$$

Mint hogy $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 2$, tehát $\lambda_z^2 = \frac{AB}{z \cdot r}$ lehet.

Az $\angle AOB = \pi - 2(\alpha + \beta)$, tehát $\sin \angle AOB = \sin 2(\alpha + \beta)$.

Az ABO háromszögre alkalmazva a sinus-tételt

$$\frac{\lambda_x^2}{\lambda_y^2} = \frac{OA}{OB} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}, \quad \frac{\lambda_x^2}{\lambda_z^2} = \frac{OA}{AB} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2(\alpha + \beta)} \text{ adódik. Ebből}$$

$$\frac{\lambda_y^2 + \lambda_z^2}{\lambda_x^2} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\beta}, \text{ illetve } 1 + \frac{\lambda_y^2 + \lambda_z^2}{\lambda_x^2} = \frac{2}{\lambda_x^2} \text{ miatt.}$$

$$\lambda_x^2 = \frac{2\sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2(\alpha + \beta) + \sin 2\beta}. \text{ Analóg módon kapjuk, hogy}$$

$$\lambda_y^2 = \frac{2\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2(\alpha + \beta) + \sin 2\beta}, \text{ és } \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 2 \text{ miatt}$$

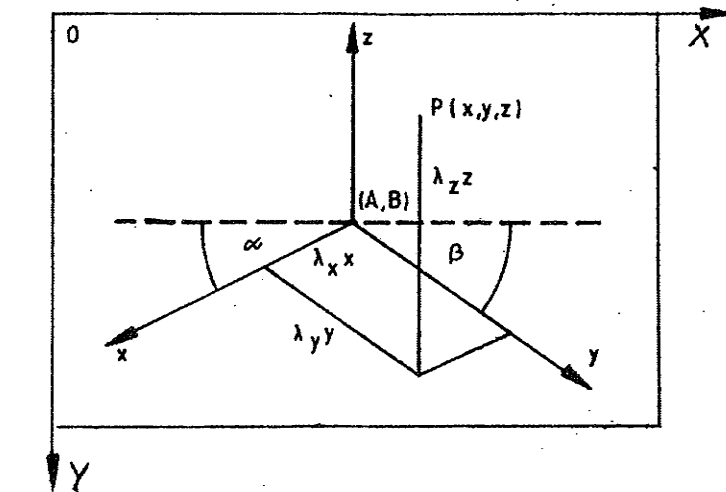
$$\lambda_z^2 = \frac{2\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2(\alpha + \beta) + \sin 2\beta}.$$

Ennek alapján a rövidülések számíthatók az x tengely, illetve az y tengely α , illetve β lehajlási szögeiből (7. ábra). Az ábrában megadtuk a tengelykeresztel együtt a $P(x, y, z)$ pont axonometrikus vetületét a rövidült koordináták feltün-

tetésével. Most már leolvasható az ábrából a képernyő-koordinátákat meghatározó transzformációs képlet:

$$X = A - \lambda_x x \cos \alpha + \lambda_y y \cos \beta$$

$$Y = B + \lambda_x x \sin \alpha + \lambda_y y \sin \beta - \lambda_z z$$



7. ábra

FÜGGELÉK II.

SIMA GÖRBÉK ÉS FELÜLETEK ELŐÁLLÍTÁSA SPLINE-FÜGGVÉNYEKSEL

Sima görbék és felületek előállítása spline-függvényekkel

Az ipari gyakorlat számos esetben olyan feladat elé állítja a konstruktöröket, hogy meghatározott sorrendben, illetve elrendezésben megadott pontokra görbék, illetve felületeket illesszenek. Ez első közelítésben jelentheti a pontokat összekötő poligont, illetve a felületi pontok által meghatározott síkrészekből álló poliédert. Nagyobb igényt támasztó feladatok esetében az a követelmény szokott fölmerülni, hogy a pontokon áthaladó, illetve azok elhelyezkedését jól követő sima görbék, vagy felületeket kell meghatározni.

Mint ismeretes, egy görbe egy intervallumban akkor sima, ha ott létezik olyan $r(t)$ előállítása (beleértve az $y=f(x)$ előállítást is), hogy a görbe minden pontjában van a görbének folytonosan változó érintője, azaz $\dot{r}(t) \neq 0$ létezik és $\dot{r}(t)$ folytonos.

Egy felület sima, ha minden pontjában létezik folytonosan változó érintősíkja. Ez pontosabban azt jelenti, hogy létezik olyan $r(u,v)$ előállítása (beleértve a $z=f(x,y)$ előállítást is), amely folytonosan differenciálható és $r_u \times r_v \neq 0$.

A szerkesztő rajzolásban a sima és egymáshoz is simán csatlakozó görbeívek megrajzolása alkalmas görbevonalzóval történik; ennek angol elnevezéséből származik a sima görbe, illetve felületillesztést megvalósító függvényeknek spline-függvény névvel történő megkülönböztetése. A spline-függvényeket a matematika különböző fejezetei más-más szempontból vizsgálják. E vizsgálatok a spline-függvények egzakt és absztrakciós definíciójától az approximációelméleti vonatkozásokig minden területre kiterjednek. A sokféle spline-függvényt a gyakorlati igények sokfélesége magyarázza. Ezek közül csak néhányat tudunk bemutatni. Tárgyalásunkban a görbék és a felületek előállítása polinomok segítségével történik, ezért ezeket a spline-okat polinomiális spline-oknak nevezzük. Hogy ténylegesen egy adott probléma megoldásánál melyik spline-függvényt alkalmazzuk, az számos egyéb körülmény - mint pl. a számítógépes grafikus rendszerünk kifejlesztése - mellett elsősorban magától a problémától függ.

Vektor-spline függvények

Definíció: Legyen adva megadott sorrendben $(n+1)$ pont, amelyek helyvektorai $p_0, p_1, \dots, p_n$, továbbá $(n+1)$ egyváltozós $f_i(u)$ ($i=0, 1, \dots, n$) függvény. Ezekből

$$p(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) p_i$$

alakban képezett függvényt egyváltozós vektor-spline függvénynek nevezzük. A $P_0, P_1, \dots, P_n$ pontokat a kapott görbe kontrollpontjainak mondjuk, míg az $f_i(u)$ függvényeket blending-függvényeknek (keverő függvények) nevezzük, amennyiben az általuk létrehozott görbe a kívánt tulajdonságokkal rendelkezik. A kontrollpontokat sorrendjüknek megfelelően összekötő poligont a görbe karakterisztikus keretének mondjuk.

Bezier-féle egyváltozós vektorfüggvényekről beszélünk, ha a blending függvények az ún. Bernstein-függvények, amelyeknek alakja a következő:

$$B_{i,n}(u) = f_i(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

(az együtthatók a binomiális együtthatók).

Első és másodfokú Bézier-függvények

A P_0, P_1 helyvektorú pontok összekötő szakaszát a

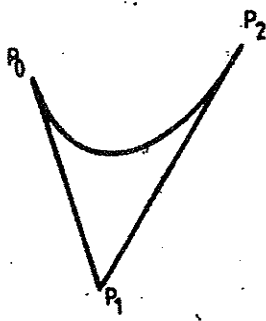
$$p(u) = (1-u)P_0 + uP_1 \quad (0 \leq u \leq 1)$$

függvény adja meg, ez az elsőfokú Bézier-függvény.

A P_0, P_1, P_2 helyvektorú pontokhoz tartozó Bézier-görbe

$$p(u) = (1-u)^2 P_0 + 2(1-u)u P_1 + u^2 P_2 \quad (0 \leq u \leq 1)$$

azt a P_0 pontból P_2 -be vezető paraboláívet határozza meg, amelynek $P_1 P_0$, ill. $P_1 P_2$ egyenesek érintői (1. ábra).



1. ábra

Megjegyzés: Két érintőjével (t_1, t_2) és érintési pontjaival (T_1, T_2) megadott parabolára ismeretes, hogy az érintési pontok által meghatározott szakasz M felezéspontját az érintők K metszéspontjával összekötő egyenes a parabola tengelyével párhuzamos (1/a) ábra). Ezen ismert összefüggés folyományaként az MK egyenesen levő T_3 parabolapontot a $T_1 K$, ill. $T_2 K$ szakaszok S_1 , ill. S_2 felezőpontjait összekötő t_3 érintő jelöli ki. Ennek általánosításaként kimutatható, hogy ha

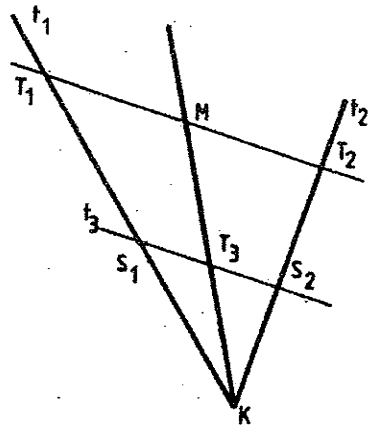
$$\frac{T_1 S_1}{S_1 K} = \frac{K S_2}{S_2 T_2} = \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

akkor az így kapott S_1S_2 szakaszt

$$\frac{S_1P}{PS_2} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

arányban osztó P pont a szóbanforgó parabola pontja és ebben a P pontban a parabola érintője az S_1S_2 egyenes.

Az 1. ábra jelöléseire visszatérve Q pont a P_0P_1 szakaszt, ill. R pont a P_1P_2 szakaszt $\frac{u}{1-u}$ arányban osztja fel, továbbá a P pont a QR szakaszt ugyanilyen arányban osztja fel, azaz



1/a ábra

$$\frac{P_0Q}{QP_1} = \frac{P_1R}{RP_2} = \frac{QP}{PR} = \frac{u}{1-u} \quad (0 \leq u \leq 1),$$

tehát a megfelelő $\underline{q}, \underline{r}, \underline{p}$ helyvektorok előállítására a következő alakú:

$$\underline{q} = (1-u)\underline{p}_0 + u\underline{p}_1 \quad \text{illetve} \quad \underline{r} = (1-u)\underline{p}_1 + u\underline{p}_2,$$

ezekből

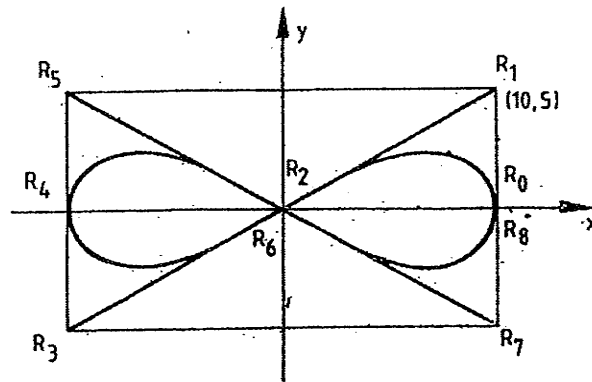
$\underline{p} = (1-u)\underline{q} + u\underline{r}$, ahova a $\underline{q}$ és $\underline{r}$ behelyettesítése után

$$\underline{p} = (1-u)^2\underline{p}_0 + (1-u)u\underline{p}_1 + (1-u)u\underline{p}_1 + u^2\underline{p}_2, \text{ tehát}$$

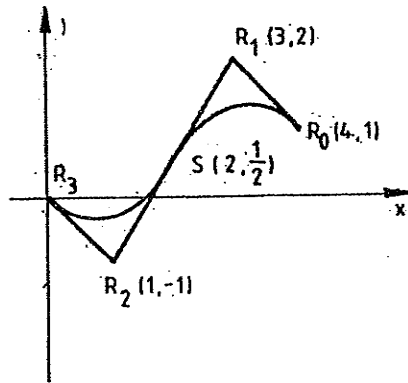
$$\underline{p}(u) = (1-u)^2\underline{p}_0 + 2(1-u)u\underline{p}_1 + u^2\underline{p}_2 \quad (0 \leq u \leq 1)$$

másodfokú Bézier-görbe adódik.

1. Példa: A 2. ábrán feltüntetett $R_0, R_1, \dots, R_8$ pontokra határozzuk meg a parabolaívvekből álló, hurkolt, záródó görbeillesztést. - Az ábrából látszik, hogy az $R_0(10,0)$, $R_1(10,5)$, $R_2(0,0)$ pontokra felírt $\underline{p}_1(u)$ vektorfüggvényhez teljesen hasonló módon írható fel a görbe további három része. (Ezt önálló gyakorlásként végezzük el!) Tehát $\underline{p}_1(u) = (1-u)^2\underline{r}_0 + 2(1-u)u\underline{r}_1 + u^2\underline{r}_2$, $0 \leq u \leq 1$, vagyis $\underline{p}_1(u) = [10(1-u)^2 + 20(1-u)u] \underline{i} + [10(1-u)u] \underline{j}$, ami végül $\underline{p}_1(u) = 10(1-u^2) \underline{i} + 10(u-u^2) \underline{j}$ alakra hozható.



2. ábra



3. ábra

2. Példa: Illesszünk a 3. ábrán megadott pontokhoz olyan másodfokú spline-függvényt, amely az R_0, R_1, R_2, R_3 pontok menetét jól követi. - Nyilvánvaló, hogy itt két parabola-ívet kell elhelyezni úgy, hogy közös pontjuk az $R_1 R_2$ szakasz S felezéspontja legyen. Ezek szerint

$$p_1(u) = (1-u)^2 \underline{r}_0 + 2(1-u)u \underline{r}_1 + u^2 \underline{s} \text{ és}$$

$$p_2(u) = (1-u)^2 \underline{s} + 2(1-u)u \underline{r}_2 + u^2 \underline{r}_3,$$

mindkét görbénél $0 \leq u \leq 1$. Minthogy a pontok helyvektorai adottak, így

$$p_1(u) = [4(1-u)^2 + 6(1-u)u + 2u^2] \underline{i} + [(1-u)^2 + 4(1-u)u + \frac{1}{2}u^2] \underline{j}, \text{ illetve}$$

$$p_2(u) = [2(1-u)^2 + 2(1-u)u] \underline{i} + [\frac{1}{2}(1-u)^2 - 2(1-u)u] \underline{j}. \text{ Végül a}$$

$$p_1(u) = (4-2u) \underline{i} + (-2,5u^2 + 2u + 1) \underline{j}, \text{ ill.}$$

$$p_2(u) = (2-2u) \underline{i} + (2,5u^2 - 3u + 0,5) \underline{j} \text{ alakot kapjuk.}$$

Bézier-féle köbös vektor-spline függvény

Vegyük fel a P_0, P_1, P_2, P_3 kontrollpontokat, amelyeknek helyvektorai $\underline{p}_0, \underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3$. E négy pont által meghatározott Bézier-féle köbös spline-függvény:

$$p(u) = (1-u)^3 p_0 + 3(1-u)^2 u p_1 + 3(1-u) u^2 p_2 + u^3 p_3 \quad (0 \leq u \leq 1). \quad (1)$$

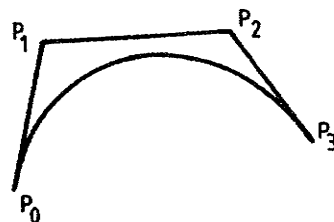
A felírt függvény a p_0 pontból a p_3 pontba vezető görbét ad meg. Vizsgáljuk meg a $p(u)$ érintőit, amit $\dot{p}(u)$ derivált-függvényből kapunk:

$$\dot{p}(u) = -3(1-u)^2 p_0 + 3(1-u)^2 p_1 - 6(1-u) u p_1 + 6(1-u) u p_2 - 3u^2 p_2 + 3u^2 p_3,$$

innen

$$\dot{p}(0) = 3(p_1 - p_0) \text{ és } \dot{p}(1) = 3(p_3 - p_2)$$

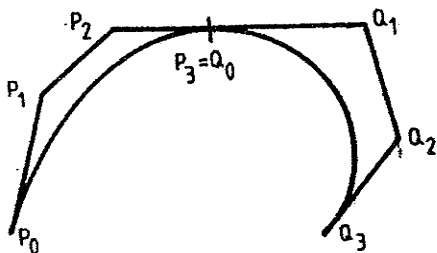
adódik, tehát a P_0 , ill. P_3 pontban a görbe érintője a $P_0 P_1$, ill. $P_2 P_3$ egyenes. A görbe nem megy át a P_1 és P_2 pontokon (4. ábra). Természetesen a gyakorlat több pont által meghatározott görbeillesztést is megkíván. Ha $(n+1)$ pont által meghatározott karakterisztikus ke-
rethez egyetlen Bézier-féle görbeív-
vel (szegmenssel) akarjuk a görbeil-
lesztést megvalósítani, akkor n -ed-
fokú spline-függvény adódik. Másik
lehetőség például az, hogy több har-
madfokú szegmensből állítjuk elő a
görbét. Ha az előbbi görbéhez olyan
 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 pontok által meghatáro-
zott (1) alakú görbeívet akarunk il-
lesztetni, hogy a görbe érintője foly-
tonosan változzék, akkor a Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 helyvektorokra telje-
sülnie kell a



4. ábra

$$p_3 = q_0 \text{ és} \quad (2)$$

$$q_1 - q_0 = \lambda(p_3 - p_2) \quad (\lambda > 0)$$



5. ábra

feltételeknek (5. ábra).
Hogyha még azt is megköve-
teljük, hogy a $p_3 = q_0$ pont-
ban a görbület is folytono-
san változzék, akkor a
 $p(u)$ és $q(u)$ görbék görbü-
lete a csatlakozási pontban
meg kell egyezzen. Ez a
 $\dot{q}(0) = \lambda \dot{p}(1)$ miatt csak úgy
érhető el, ha

$$(3) \quad |\dot{\underline{q}}(0) \times \ddot{\underline{q}}(0)| = \lambda^3 |\dot{\underline{p}}(1) \times \ddot{\underline{p}}(1)|.$$

Mint hogy e pontban a simuló sík is ua. a sík, amely tartalmazza a $\ddot{\underline{p}}(1)$ -et és $\dot{\underline{q}}(0)$ -t (ezek általában nem kollineáris vektorok), tehát

$$(4) \quad \ddot{\underline{q}}(0) = \mu \dot{\underline{p}}(1) + \nu \ddot{\underline{p}}(1) = \mu \dot{\underline{p}}(1) + \lambda^2 \ddot{\underline{p}}(1)$$

lineáris kombinációval fejezhető ki, ahol azonban (3) miatt $\nu = \lambda^2$ lesz. Mivel

$$\ddot{\underline{p}}(u) = 6(1-u)\underline{p}_0 + [-6(1-u)+6u-6(1-u)]\underline{p}_1 + [-6u+6(1-u)-6u]\underline{p}_2 + 6u\underline{p}_3$$

ezért $\ddot{\underline{p}}(1) = 6\underline{p}_1 - 12\underline{p}_2 + 6\underline{p}_3$ és $\dot{\underline{q}}(0) = 6\underline{q}_0 - 12\underline{q}_1 + 6\underline{q}_2$, tehát (2) és

$$(4) \text{ figyelembevételével } \ddot{\underline{q}}(0) = \mu \dot{\underline{p}}(1) + \lambda^2 \ddot{\underline{p}}(1) =$$

$$= 3\mu(\underline{p}_3 - \underline{p}_2) + 6\lambda^2\underline{p}_1 - 12\lambda^2\underline{p}_2 + 6\lambda^2\underline{p}_3 =$$

$$= 6\underline{p}_3 - 12\lambda\underline{p}_3 + 12\lambda\underline{p}_2 - 12\underline{p}_3 + 6\underline{q}_2 \text{ adódik, amiből } \underline{q}_2\text{-t kifejezve}$$

$$\underline{q}_2 = \lambda^2\underline{p}_1 - (2\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}\mu)\underline{p}_2 + (\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \frac{1}{2}\mu)\underline{p}_3\text{-at kapjuk.}$$

Ezek szerint a második szegmens kontrollpontjaiból a λ és μ megválasztása után csupán a $\underline{q}_3$ helyvektorú pont nem determinált, azaz tetszőlegesen felvehető.

3. Példa: Írjuk fel a $\underline{p}_0(1,1,0)$, $\underline{p}_1(3,2,2)$, $\underline{p}_2(4,5,3)$, $\underline{p}_3(2,6,5)$ kontrollpontok által meghatározott Bézier-féle köbös vektor-spline függvényt, majd illesszük hozzá (folytonos görbületet biztosítva) a $\underline{q}_0 = \underline{p}_3$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$ feltételeknek eleget tevő $\underline{q}_3(10,10,0)$ pontban végződő Bézier-szegmenst.

Megoldás: $\underline{p}(u) = (1-u)^3\underline{p}_0 + 3(1-u)^2u\underline{p}_1 + 3(1-u)u^2\underline{p}_2 + u^3\underline{p}_3$, tehát

$$\underline{p}(u) \begin{cases} (1-u)^3 + 9(1-u)^2u + 12(1-u)u^2 + 2u^3 = -2u^3 - 3u^2 + 6u + 1 \\ (1-u)^3 + 6(1-u)^2u + 15(1-u)u^2 + 6u^3 = -4u^3 + 6u^2 + 6u + 1 \\ 6(1-u)^2u + 9(1-u)u^2 + 5u^3 = 2u^3 - 3u^2 + 6u \end{cases}$$

Ezután a görbeillesztés miatt

$$\underline{q}_0(2,6,5), \quad \underline{q}_1 = \underline{q}_0 + \underline{p}_3 - \underline{p}_2 \quad (0,7,7)$$

$$\underline{q}_2 = \underline{p}_1 - 5\underline{p}_2 + 5\underline{p}_3 \quad (-7,7,12) \quad \underline{q}_3(10,10,0)$$

Ennek alapján $q(u) = (1-u)^3 q_0 + 3(1-u)^2 u q_1 + 3(1-u) u^2 q_2 + u^3 q_3$.

A Bézier-féle köbös vektor-spline függvény mátrixos formában a következő alakú:

$$(5) \quad p(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}}_3 \begin{bmatrix} p_0 p_1 p_2 p_3 \end{bmatrix}^T$$

Gyakorló feladatok:

1. Határozzuk meg az $R_0(0,3)$, $R_1(4,4)$, $R_2(3,0)$ pontok által megadott másodfokú vektor-spline függvényt.

2. Adott a 6. ábrán megrajzolt hatszög. Illesszünk a hatszöghöz olyan parabola-íveket, amelyek a hatszög oldalait felezőpontjaiban érintik.

3. A 7. ábrán 0 ponttól P pontig haladó törött-vonalat ábrázoltunk. Határozzuk meg a törött-vonal menetét jól követő másodfokú vektor-spline függvényt úgy, hogy a görbe 0 és P pontokon átmenjen és a törött-vonal minden szakaszát érintse; a görbe érintője változzék folytonosan.

4. Írjuk fel az $R_0(2,0,0)$,

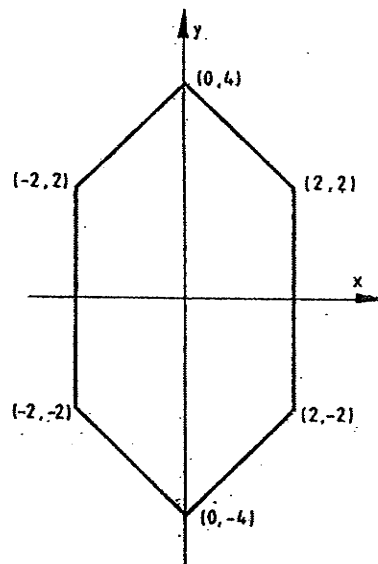
$R_1(4,3,4)$, $R_2(2,5,5)$,

$R_3(0,1,0)$ pontok által meg-

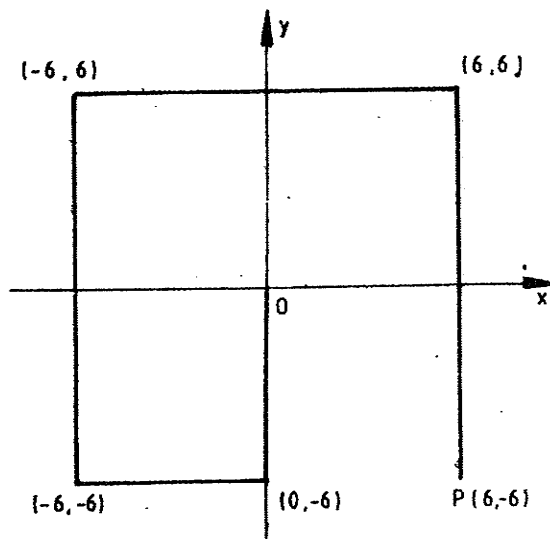
határozott Bézier-féle kö-

bös vektor-spline függvényt, majd illesszük hozzá a $Q_0=R_3$, $\lambda=2$, $\mu=4$ feltételeknek eleget tevő, $Q_3(-10,-3Q, -40)$ pontban végződő Bézier-görbét.

5. Állítsuk elő a $P_0(0,4,1)$, $P_1(-4,0,3)$, $P_2(0,-4,7)$, $P_3(4,0,1)$ pontok által meghatározott Bézier-féle köbös spline-t és illesszük hozzá az $S_0=P_3$, $\lambda=1$, $\mu=4$ feltételeknek eleget tevő $S_3(10,10,-20)$ pontban végződő görbét.



6. ábra



7. ábra

Hermite-féle egyváltozás köbös spline-függvény

Legyen adott az $[a, b]$ intervallumnak egy $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ felbontása és egy $f(x)$ függvény, amelynek értékeit, illetve deriváltjának értékeit csupán a felbontás helyein ismerjük:

$$f_i = f(x_i) \quad \text{illetve} \quad f'_i = f'(x_i) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Hermite-féle köbös spline-függvénynek mondjuk az $f(x)$ függvényt közelítő

$S_3(f; x) \equiv S_3(x)$ függvényt, ha kielégíti a következő

feltételeket:

1. az $[x_i, x_{i+1}]$ közök mindegyikére az $S_3(x)$ függvény az

$$(6) \quad S_3(x) = A_i + B_i(x-x_i) + C_i(x-x_i)^2 + D_i(x-x_i)^3$$

alakban állítható elő.

2. $S_3(x_i) = f_i$, ill. $S'_3(x_i) = f'_i$ $(i=0, 1, \dots, n)$.

Az i -edik intervallumra $[x_i, x_{i+1}]$ -re felírható a következő négy egyenlet:

$$S_3(x_i) = f_i, \quad S_3(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad S'_3(x_i) = f'_i, \quad S'_3(x_{i+1}) = f'_{i+1}.$$

A (6) és $S'_3(x) = B_i + 2C_i(x-x_i) + 3D_i(x-x_i)^2$ alapján a (2.) feltétel szerint felírt négy egyenletből kapjuk, hogy $A_i = f_i$ és $B_i = f'_i$, valamint

$$f_i' + f_i''(x_{i+1} - x_i) + C_i(x_{i+1} - x_i)^2 + D_i(x_{i+1} - x_i)^3 = f_{i+1}'$$

$$f_i' + 2C_i(x_{i+1} - x_i) + 3D_i(x_{i+1} - x_i)^2 = f_{i+1}''$$

Vezessük be a $h_i = x_{i+1} - x_i$ jelölést, ekkor az egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} C_i h_i^2 + D_i h_i^3 &= f_{i+1}' - f_i' - f_i'' h_i \\ C_i 2h_i + D_i 3h_i^2 &= f_{i+1}'' - f_i'' \end{aligned} \right\} \text{és megoldása}$$

$$C_i = 3 \frac{f_{i+1}' - f_i' - f_i'' h_i}{h_i^2} - \frac{f_{i+1}'' + 2f_i''}{h_i}$$

$$D_i = \frac{f_{i+1}'' + f_i''}{h_i^2} + 2 \frac{f_i' - f_{i+1}'}{h_i^3}$$

Tehát a tekintett intervallumon az $S_3(x)$ függvény egyértelműen meghatározott. Az $S_3(x)$ függvényt az $f_i, f_{i+1}, f_i', f_{i+1}'$ értékek segítségével és a $t = \frac{x - x_i}{h_i}$, $F_1(t) = (1-t)^2(1+2t)$, $F_2(t) = t^2(3-2t)$, $F_3(t) = t(1-t)^2$, $F_4(t) = -t^2(1-t)$ jelölések alkalmazásával az

$$(7) \quad S_3(x) = F_1(t)f_i + F_2(t)f_{i+1} + F_3(t)h_i f_i' + F_4(t)h_i f_{i+1}'$$

alakban tudjuk felírni ($0 \leq t \leq 1$), és a jelölések szerinti behelyettesítés alapján számolással kimutatható a (6) és (7) alakok ekvivalenciája.

Az $S_3(x)$ függvénynek az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumra való praktikus meghatározásához vezető algoritmus a következő:

Legyen $K_i = -2 \frac{f_{i+1}' - f_i'}{h_i} + (f_i'' + f_{i+1}'')$ és $L_i = -K_i + \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} - f_i''$, akkor

$$(8) \quad S_3(x) = S_{i3}(x) = f_i + (x - x_i) [f_i' + t(L_i + tK_i)].$$

A (8) alak és a (6), ill. (7) alakok ekvivalenciája ugyan-csak számítással verifikálható.

4. Példaképpen határozzuk meg az $S_3(x)$ Hermite-féle köbös spline-függvényt, ha a $\{-0,7; 0; 1; 2; 2,7\}$ helyekhez tartozó függvényértékek $\{1; 1,7; 2; 1,7; 1\}$, ill. a deriváltértékek $\{1,7; 0,6; 0; -0,6; -1,7\}$ adóttak. - Az adatokat és a számolások eredményeit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

i	x_i	f_i	f_i'	h_i	$f_{i+1}-f_i$	$f_{i+1}'-f_i'$	$\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}=a_i$	$-2a_i+b_i=K_i$	$-K_i+a_i-f_i'$	$=L_i$
0	-0,7	1	1,7	0,7	0,7	2,3	1	0,3	-0,3+1-1,7	-1
1	0	1,7	0,6	1	0,3	0,6	0,3	0	0+0,3-0,6	-0,3
2	1	2	0	1	-0,3	-0,6	-0,3	0	0-0,3-0	-0,3
3	2	1,7	-0,6	0,7	-0,7	-2,3	-1	-0,3	0,3-1+0,6	-0,1
4	2,7	1	-1,7							

$[-0,7;0]$ intervallumban

$$S_{03}(x) = 1+(x+0,7) \left[1,7 + \frac{x+0,7}{0,7}(-1+\frac{x+0,7}{0,7}0,3) \right]$$

$[0;1]$ intervallumban

$$S_{13}(x) = 1,7+x \left[0,6+x(-0,3+x \cdot 0) \right] = 1,7+x(0,6-0,3x)$$

$[1;2]$ intervallumban

$$S_{23}(x) = 2+(x-1) \left[0+(x-1)(-0,3+(x-1) \cdot 0) \right] = 2-0,3(x-1)^2$$

$[2;2,7]$ intervallumban

$$S_{33}(x) = 1,7+(x-2) \left[-0,6+\frac{x-2}{0,7}(-0,6+\frac{x-2}{0,7}(-0,1-0,3\frac{x-2}{0,7})) \right]$$

Gyakorló feladatok:

1. Határozzuk meg a $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ helyekhez tartozó $\{-10; -3,6; -1,2; 0; 1,2\}$ függvényértékek és a $\{10; 3,8; 1,5; 1; 1,5\}$ deriváltértékek által meghatározott Hermite-féle egyváltozós köbös spline-függvényeket az egyes intervallumokon.
2. A $\{-1, 0, 1, 2\}$ helyekhez tartozó függvényértékek $\{1,5; 1; 1,5; 3,8\}$, ill. deriváltértékek $\{-1,2; 0; 1,2; 3,6\}$. Állítsuk elő a három intervallumhoz tartozó köbös Hermite-féle spline-függvényeket.
3. Milyen lesz a $\{0, 1, 2, 3\}$ helyek által meghatározott intervallumokon a Hermite-féle köbös spline-függvények alakja, ha a megfelelő függvényértékek $\{0; 2,4; 7,2; 20\}$, a deriváltértékek pedig $\{2; 3; 7,6; 20\}$.

Ha az $a=0 < 1 < \dots < i < i+1 < \dots < n=b$ felbontásra írjuk fel az $S_3(x)$ függvényt, az $[i, i+1]$ intervallumban, akkor a $t=x-i$ és $h_i=1$, tehát az

$$(9) S_3(x) = F_1(t)f_1 + F_2(t)f_{i+1} + F_3(t)f'_1 + F_4(t)f'_{i+1}$$

alakot kapjuk. - Ha $i=0$, vagyis a $[0,1]$ intervallumra írjuk fel a Hermite-féle spline-függvényt, akkor az $S_3(x) = F_1(x)f_0 + F_2(x)f_1 + F_3(x)f'_0 + F_4(x)f'_1$ formára jutunk, és az $x=0$ helyen csak $F_1(0)=1$ a többi 0 értéket vesz fel, az $x=1$ helyen csak $F_2(1)=1$, a többi 0. E függvények deriváltjai közül az $x=0$ helyen csak $F'_3(0)=1$, a többi 0, továbbá az $x=1$ helyen csak $F'_4(1)=1$, a többi 0 értéket vesz fel.

Ferguson-féle köbös vektor-spline függvény

Ha olyan vektor-spline függvényeket kell konstruálni, amelyeknek a megadott kontrollpontokon át kell menni, és ismereteseik ezen kívül az adott pontokban a görbe érintővektorai, akkor ezt a feladatot a karakterisztikus keret szakaszaira külön-külön oldjuk meg, és a kapott görbék egymásutánja adja a kívánt görbét, amelynek az érintője folytonosan változik. Könnyen belátható, hogy a megoldás koordináta-függvényei Hermite-féle köbös spline-függvények.

A feladat egy szakaszra tehát a következő: Adott a p_0 és p_1 helyvektorú pont és a hozzájuk tartozó $\dot{p}_0$ és $\dot{p}_1$ érintővektorok. Állítsunk elő olyan $p(u)$ függvényt, amely a $0 \leq u \leq 1$ értelmezési tartományon kielégíti a $p(0)=p_0$, $p(1)=p_1$, $\dot{p}(0)=\dot{p}_0$ és $\dot{p}(1)=\dot{p}_1$ feltételeket. Verifikálással belátható, hogy a

$$(10) p(u) = F_1(u)p_0 + F_2(u)p_1 + F_3(u)\dot{p}_0 + F_4(u)\dot{p}_1 \quad (0 \leq u \leq 1)$$

ún. Ferguson-féle köbös vektor-spline függvény a fenti feltételeket kielégíti, ahol természetesen $F_1(u)=(1-u)^2(1+2u)$, $F_2(u)=u^2(3-2u)$, $F_3(u)=u(1-u)^2$, $F_4(u)=-u^2(1-u)$.

Megjegyzés: Az ilyen módon konstruált görbeívek (az ún. szegmensek) csatlakozási pontjaiban nincs garantálva a görbület folytonossága.

5. Példa: Írjuk fel a $p_0(1,0,0)$, $\dot{p}_0(2,1,0)$, $p_1(0,2,10)$, $\dot{p}_1(-2,0,1)$ adatokkal meghatározott Ferguson-féle köbös vektor-spline egy szegmensét.

Megoldás: $p(u)=p_0(1-u)^2(1+2u)+p_1u^2(3-2u)+\dot{p}_0u(1-u)^2+$
 $+\dot{p}_1(-u^2(1-u))$, tehát

$$p(u)=(2u^3-5u^2+2u+1)\underline{i}+(-3u^3+4u^2+u)\underline{j}+(-19u^3+29u^2)\underline{k} \quad (0 \leq u \leq 1).$$

A Ferguson féle köbös spline-függvény mátrixos felírása a következő alakú:

$$(11) \quad p(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \underline{UM} [p_0 p_1 \dot{p}_0 \dot{p}_1]^*$$

Tehát

$$(12) \quad \underline{F(u)} = [F_1(u) F_2(u) F_3(u) F_4(u)] = \underline{UM}$$

Gyakorló feladat:

Határozzuk meg az $r_0(0,3,1)$, $r_1(-3,0,3)$, $r_2(0,-3,7)$, $r_3(3,0,1)$ helyvektorú pontokon áthaladó Ferguson-féle köbös spline-függvényt előállító görbedarabokat, ha a megfelelő pontokban vett érintővektorok $\dot{r}_0(-1,0,1)$, $\dot{r}_1(0,-1,1)$, $\dot{r}_2(1,0,1)$, $\dot{r}_3(0,1,-1)$.

B-spline függvények

Ha adottak egy vektor-spline kontrollpontjai $p_i (i=0,1,2,\dots,n)$ és a blendingfüggvényeknek - az alábbi rekurziós definícióban meghatározott - $N_{i,k}(u)$ k-adfokú polinomokat tekintjük, akkor az így létrejövő spline-függvényt B-spline függvénynek nevezzük.

Definíció: Legyen $N_{i,0}=1$, ha $t_i \leq u \leq t_{i+1}$,
egyébként pedig a 0 értéket vegye fel.
Legyen továbbá tetszőleges $0 \leq l \leq k$ esetén

$$(13) N_{i,l}(u) = \frac{u-t_i}{t_{i+l}-t_i} N_{i,l-1}(u) + \frac{t_{i+l+1}-u}{t_{i+l+1}-t_{i+1}} N_{i+1,l-1}(u)$$

ahol

$$t_i=0, \quad \text{ha } i < k+1$$

$$t_i=i-k, \quad \text{ha } k+1 \leq i \leq n$$

$$t_i=n-k+1, \quad \text{ha } i > n, \text{ továbbá } i \text{ határait a } 0 \leq i \leq n+k+1$$

egyenlőtlenség határozza meg, és a függvény értelmezési tartománya $0 \leq u \leq n-k+1$.

A definícióból következik, hogy az értelmezési tartomány két végén többszörös alappontok alakulhatnak ki, és ezért a rekurziós képletben $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{S}{0}$ ($S \neq 0$) alakok is előfordulhatnak; ezek értelmetlen kifejezések, és kizárásukat azáltal tudjuk biztosítani, ha értékeket definíció szerint 0-nak vesszük. Az értelmezési tartományban levő belső alappontok ekvidisztans pontsört képeznek. (Uniform B-spline)

Tárgyalásunkban konkrét példán mutatjuk be a B-spline-ok létrejöttét. Vegyünk hat kontrollpontot, azaz $n=5$ és legyen

a) $k=0$. Ekkor az $N_{i,0}$ együtttha-

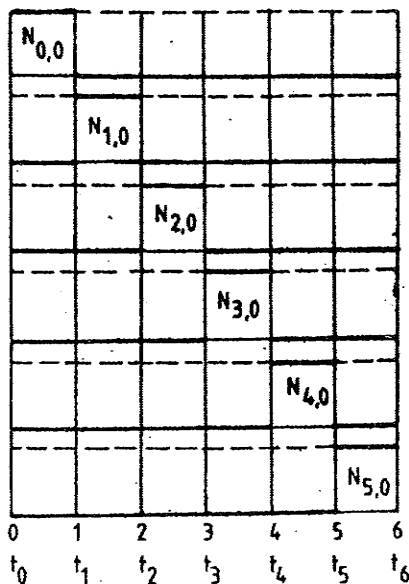
tókat és a $p(u) \sum_{i=0}^5 N_{i,k}(u) p_i$
függvényelőállítás a következőképpen kapjuk (8. ábra)
a (13) definíció alapján:

$$\begin{aligned} p(u) = & N_{0,0}(u)p_0 + N_{1,0}(u)p_1 + \\ & + N_{2,0}(u)p_2 + \\ & + N_{3,0}(u)p_3 + \\ & + N_{4,0}(u)p_4 + \\ & + N_{5,0}(u)p_5, \end{aligned}$$

vagyis a $p(u)$ függvény az egyes intervallumokban:

$$0 \leq u \leq 1 \text{ -ben } p(u) = p_0$$

$$1 \leq u \leq 2 \text{ -ben } p(u) = p_1$$



8. ábra

$$\begin{aligned}
 2 \leq u \leq 3 \text{ -ban } p(u) &= p_2 \\
 3 \leq u \leq 4 \text{ -ben } p(u) &= p_3 \\
 4 \leq u \leq 5 \text{ -ben } p(u) &= p_4 \\
 5 \leq u \leq 6 \text{ -ban } p(u) &= p_5
 \end{aligned}$$

b) Legyen $k=1$ és $n=5$. Ekkor (13) szerint az alappontok

$$t_0=t_1=0 \quad t_2=1 \quad t_3=2 \quad t_4=3 \quad t_5=4 \quad t_6=t_7=5.$$

Az $N_{i,1}$ együttthatók és a $p(u)$ függvény előállítására az alábbiak szerint történik (9. ábra):

$$N_{0,1} = (1-u)N_{1,0}$$

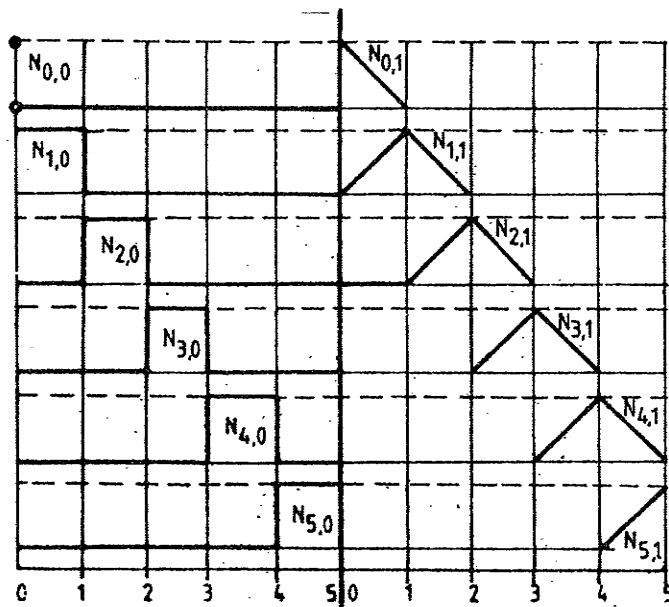
$$N_{1,1} = uN_{1,0} + (2-u)N_{2,0}$$

$$N_{2,1} = (u-1)N_{2,0} + (3-u)N_{3,0}$$

$$N_{3,1} = (u-2)N_{3,0} + (4-u)N_{4,0}$$

$$N_{4,1} = (u-3)N_{4,0} + (5-u)N_{5,0}$$

$$N_{5,1} = (u-4)N_{5,0}$$



9. ábra

tehát a $p(u)$ függvény:

$$\begin{aligned} 0 \leq u \leq 1 \text{ -ben } p(u) &= (1-u)p_0 + up_1 \\ 1 \leq u \leq 2 \text{ -ben } p(u) &= (2-u)p_1 + (u-1)p_2 \\ 2 \leq u \leq 3 \text{ -ban } p(u) &= (3-u)p_2 + (u-2)p_3 \\ 3 \leq u \leq 4 \text{ -ben } p(u) &= (4-u)p_3 + (u-3)p_4 \\ 4 \leq u \leq 5 \text{ -ben } p(u) &= (5-u)p_4 + (u-4)p_5 \end{aligned}$$

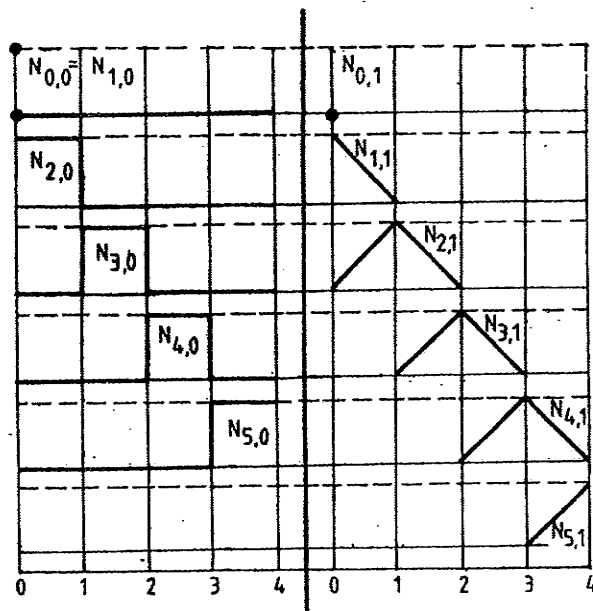
Ez a lineáris függvény lényegében a karakterisztikus keretet állítja elő. Az $N_{i,1}$ együttthatóknál jól érzékelhető az $N_{i,0}$ együttthatók szerepe: ezek a megfelelő intervallumra mintegy "bekapcsolják" a hozzájuk tartozó lineáris függvényeket. Ezért az $N_{i,0}$ -kat kapcsolóknak is nevezik, mivel k nagyobb értékei esetén is hasonló a szerepük.

c) Legyen $k=2$ és $n=5$. Ekkor az alappontok (13) szerint:

$$t_0=t_1=t_2=0 \quad t_3=1 \quad t_4=2 \quad t_5=3 \quad t_6=t_7=t_8=4.$$

Az $N_{i,2}$ együttthatók előállítására a következő fokozatokban történik (10. és 11. ábra):

$$\begin{aligned} N_{1,1} &= (1-u)N_{2,0} \\ N_{2,1} &= uN_{2,0} + (2-u)N_{3,0} \\ N_{3,1} &= (u-1)N_{3,0} + (3-u)N_{4,0} \\ N_{4,1} &= (u-2)N_{4,0} + (4-u)N_{5,0} \\ N_{5,1} &= (u-3)N_{5,0} \\ N_{0,2} &= (1-u)N_{1,1} \\ N_{1,2} &= uN_{1,1} + \frac{1}{2}(2-u)N_{2,1} \\ N_{2,2} &= \frac{1}{2}uN_{2,1} + \frac{1}{2}(3-u)N_{3,1} \\ N_{3,2} &= \frac{1}{2}(u-1)N_{3,1} + \frac{1}{2}(4-u)N_{4,1} \\ N_{4,2} &= \frac{1}{2}(u-2)N_{4,1} + (4-u)N_{5,1} \\ N_{5,2} &= (u-3)N_{5,1} \end{aligned}$$



10. ábra

Az $N_{i,2}(u)$ együttthatók, vagyis a blending-függvények a kapcsolókkal kifejezve:

$$N_{0,2}(u) = (1-u)^2 N_{2,0}$$

$$N_{1,2}(u) = \frac{1}{2}(4u-3u^2)N_{2,0} + \frac{1}{2}(2-u)^2 N_{3,0}$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{1}{2}u^2 N_{2,0} + \frac{1}{2}(6u-2u^2-3)N_{3,0} + \frac{1}{2}(3-u)^2 N_{4,0}$$

$$N_{3,2}(u) = \frac{1}{2}(u-1)^2 N_{3,0} + \frac{1}{2}(10u-2u^2-11)N_{4,0} + \frac{1}{2}(4-u)^2 N_{5,0}$$

$$N_{4,2}(u) = \frac{1}{2}(u-2)^2 N_{4,0} + \frac{1}{2}(20u-3u^2-32)N_{5,0}$$

$$N_{5,2}(u) = (u-3)^2 N_{5,0}$$

A blending-függvényeket ábrázolja a 11. ábra, amiből az is kiderül, hogy a kapcsolóknak megfelelő egyes intervallumokban az $N_{i,2}(u)$ -k felírásában megadott másodfokú függvényekből melyik lett ábrázolva.

A $p(u)$ függvény alakja a $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ kontrollpontokkal kifejezve:

$$p(u) = p_0 N_{0,2}(u) + p_1 N_{1,2}(u) + p_2 N_{2,2}(u) + p_3 N_{3,2}(u) + p_4 N_{4,2}(u) + p_5 N_{5,2}(u).$$

Ennek alapján a $p(u)$ az egyes intervallumokban a következő alakú:

$$(14) \quad 0 \leq u \leq 1 \text{ -ben } p(u) = \\ = (1-u)^2 p_0 + \frac{1}{2}(4u-3u^2)p_1 + \\ + \frac{1}{2}u^2 p_2$$

$$1 \leq u \leq 2 \text{ -ben } p(u) = \\ = \frac{1}{2}(2-u)^2 p_1 + \frac{1}{2}(6u-2u^2-3)p_2 + \\ + \frac{1}{2}(u-1)^2 p_3$$

$$2 \leq u \leq 3 \text{ -ban } p(u) = \\ = \frac{1}{2}(3-u)^2 p_2 + \frac{1}{2}(10u-2u^2-11)p_3 + \\ + \frac{1}{2}(u-2)^2 p_4$$

$$3 \leq u \leq 4 \text{ -ben } p(u) = \\ = \frac{1}{2}(4-u)^2 p_3 + \frac{1}{2}(20u-3u^2-32)p_4 + \\ + (u-3)^2 p_5.$$

A másodfokú-B-spline görbék tulajdonságai: A görbe átmege a felvett kontrollpontok közül az elsőn és az utolsón (p_0, p_n), ezekben a pontokban a görbe érintője a p_1-p_0 , ill. p_n-p_{n-1}

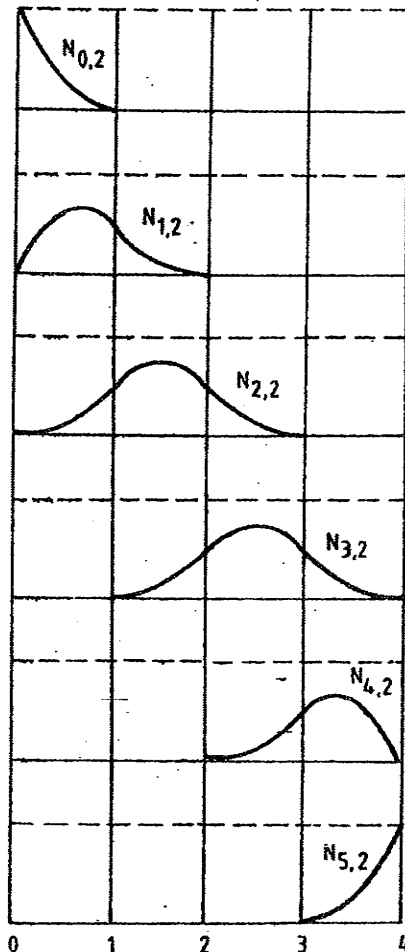
vektor, továbbá a görbe érinti a karakterisztikus keret oldalait (12. ábra).

A kontrollpontok számának növelése nem befolyásolja a görbe fokszámát, míg a Bézier-féle spline-függvények esetén a kontrollpontok számánál 1-el kisebb a görbe fokszáma.

Kidolgozott feladat:

Gyakorlásul elvégezzük a B-spline blending-függvényeinek meghatározását $n=7$ (8 db kontrollpont és $k=3$ esetén, valamint felírjuk a $p(u)$ függvényt valamennyi szóba jövő intervallumra. A (13) alapján az alappontok

$$t_0=t_1=t_2=t_3=0 \quad t_4=1 \quad t_5=2 \quad t_6=3 \quad t_7=4 \quad t_8=t_9=t_{10}=t_{11}=5,$$



11. ábra

így az értelmezési tartomány

$$0 \leq u \leq 5$$

A 0-ad és elsőfokú blending-függvényeket a 13. ábra szemlélteti, amelyek (13) szerint a következő alakban írhatók fel:

$$N_{2,1} = (1-u)N_{3,0}$$

$$N_{3,1} = uN_{3,0} + (2-u)N_{4,0}$$

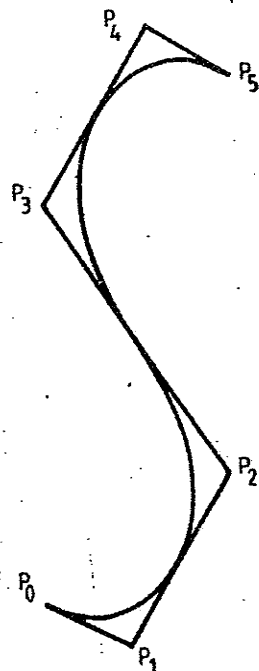
$$N_{4,1} = (u-1)N_{4,0} + (3-u)N_{5,0}$$

$$N_{5,1} = (u-2)N_{5,0} + (4-u)N_{6,0}$$

$$N_{6,1} = (u-3)N_{6,0} + (5-u)N_{7,0}$$

$$N_{7,1} = (u-4)N_{7,0}$$

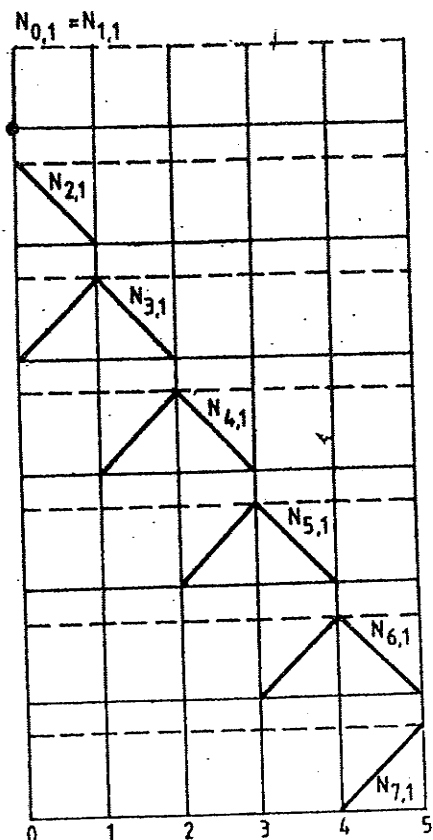
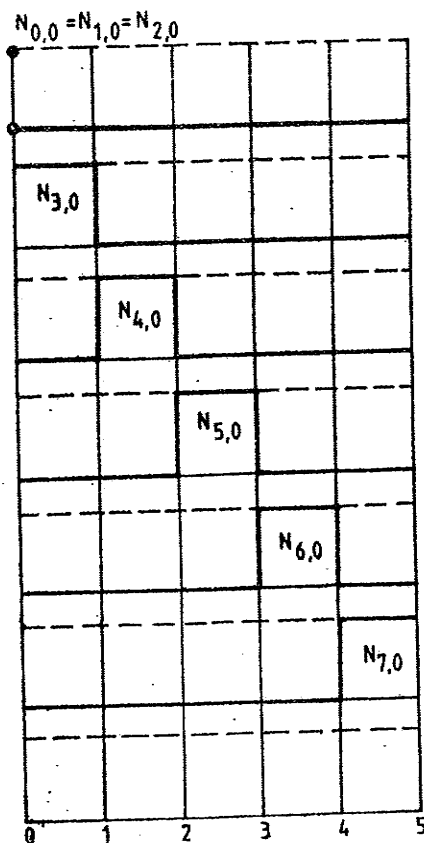
Ezután ugyancsak (13) szerint felírjuk a másodfokú blending-függvényeket, majd mindegyiket kifejezzük az $N_{i,0}$ kapcsolókkal is:



12. ábra

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= (1-u)N_{2,1} &= (1-u)^2 N_{3,0} \\ N_{2,2} &= uN_{2,1} + \frac{1}{2}(2-u)N_{3,1} &= \frac{1}{2}(4u-3u^2)N_{3,0} + \frac{1}{2}(2-u)^2 N_{4,0} \\ N_{3,2} &= \frac{1}{2}uN_{3,1} + \frac{1}{2}(3-u)N_{4,1} &= \frac{1}{2}u^2 N_{3,0} + \frac{1}{2}(6u-2u^2-3)N_{4,0} + \frac{1}{2}(3-u)^2 N_{5,0} \\ N_{4,2} &= \frac{1}{2}(u-1)N_{4,1} + \frac{1}{2}(4-u)N_{5,1} &= \frac{1}{2}(u-1)^2 N_{4,0} + \frac{1}{2}(10u-2u^2-11)N_{5,0} + \frac{1}{2}(4-u)^2 N_{6,0} \\ N_{5,2} &= \frac{1}{2}(u-2)N_{5,1} + \frac{1}{2}(5-u)N_{6,1} &= \frac{1}{2}(u-2)^2 N_{5,0} + \frac{1}{2}(14u-2u^2-23)N_{6,0} + \frac{1}{2}(5-u)^2 N_{7,0} \\ N_{6,2} &= \frac{1}{2}(u-3)N_{6,1} + \frac{1}{2}(5-u)N_{7,1} &= \frac{1}{2}(u-3)^2 N_{6,0} + \frac{1}{2}(26u-3u^2-55)N_{7,0} \\ N_{7,2} &= (u-4)N_{7,1} &= (u-4)^2 N_{7,0} \end{aligned}$$

A másodfokú $N_{i,2}(u)$ függvényeket a 14. ábra szemlélteti: A következő lépésben már a harmadfokú blending-függvényeket állítjuk elő (13) alapján:



13. ábra

$$N_{0,3} = (1-u)N_{1,2}$$

$$N_{1,3} = uN_{1,2} + \frac{1}{2}(2-u)N_{2,2}$$

$$N_{2,3} = \frac{1}{2}uN_{2,2} + \frac{1}{3}(3-u)N_{3,2}$$

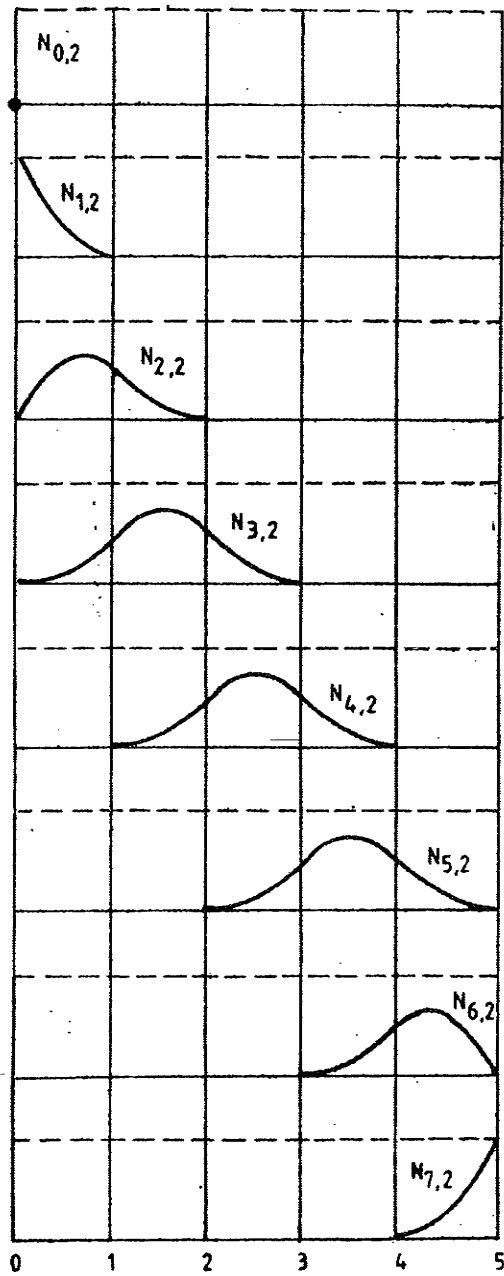
$$N_{3,3} = \frac{1}{3}uN_{3,2} + \frac{1}{3}(4-u)N_{4,2}$$

$$N_{4,3} = \frac{1}{3}(u-1)N_{4,2} + \frac{1}{3}(5-u)N_{5,2}$$

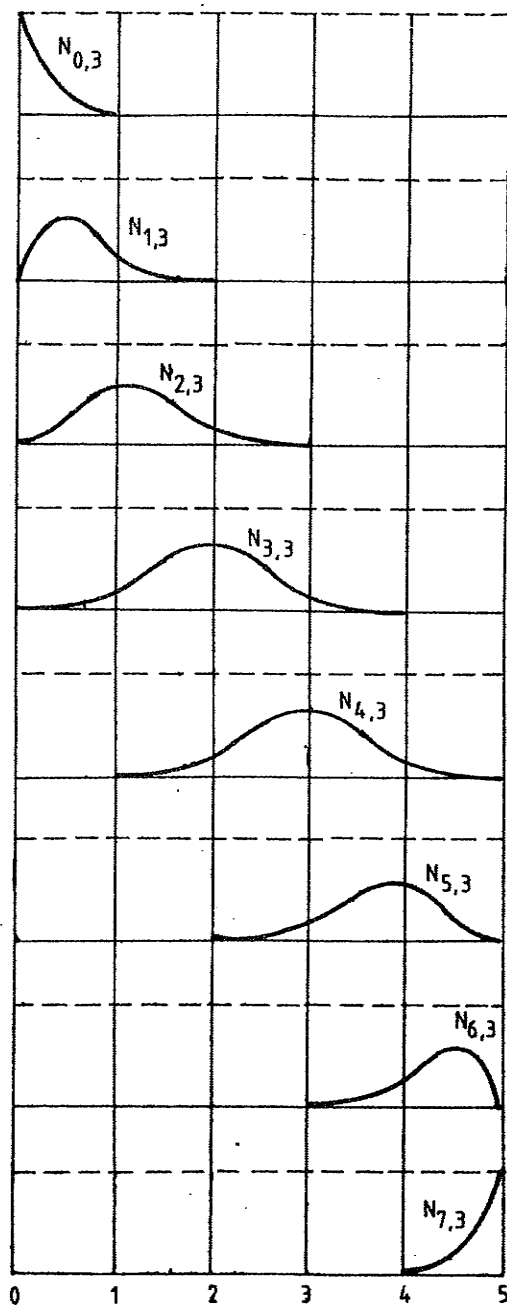
$$N_{5,3} = \frac{1}{3}(u-2)N_{5,2} + \frac{1}{2}(5-u)N_{6,2}$$

$$N_{6,3} = \frac{1}{2}(u-3)N_{6,2} + (5-u)N_{7,2}$$

$$N_{7,3} = (u-4)N_{7,2}$$



14. ábra



15. ábra

Az $N_{i,2}(u)$ függvények ismeretében kifejezzük az $N_{i,3}(u)$ függvényeket a kapcsolókkal:

$$N_{0,3} = (1-u)^3 N_{3,0}$$

$$N_{1,3} = \frac{1}{4}(7u^3 - 18u^2 + 12u)N_{3,0} + \frac{1}{4}(2-u)^3 N_{4,0}$$

$$N_{2,3} = \frac{1}{12}(18u^2 - 11u^3)N_{3,0} + \frac{1}{12}(7u^3 - 36u^2 + 54u - 18)N_{4,0} + \frac{1}{6}(3-u)^3 N_{5,0}$$

$$N_{3,3} = \frac{1}{6}u^3 N_{3,0} + \frac{1}{6}(12u^2 - 3u^3 - 12u + 4)N_{4,0} + \frac{1}{2}(3u^3 - 24u^2 + 60u - 44)N_{5,0} + \frac{1}{6}(4-u)^3 N_{6,0}$$

$$N_{4,3} = \frac{1}{6}(u-1)^3 N_{4,0} + \frac{1}{6}(21u^2 - 3u^3 - 45u + 31)N_{5,0} + \frac{1}{6}(3u^3 - 33u^2 + 117u - 131)N_{6,0} + \frac{1}{6}(5-u)^3 N_{7,0}$$

$$N_{5,3} = \frac{1}{6}(u-2)^3 N_{5,0} + \frac{1}{12}(69u^2 - 7u^3 - 219u - 227)N_{6,0} + \frac{1}{12}(11u^3 - 147u^2 + 645u - 925)N_{7,0}$$

$$N_{6,3} = \frac{1}{4}(u-3)^3 N_{6,0} + \frac{1}{4}(87u^2 - 7u^3 - 357u + 485)N_{7,0}$$

$$N_{7,3} = (u-4)^3 N_{7,0}$$

Ezeket a blending-függvényeket rajzoltuk fel a 15. ábrán.

A $p(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)p_i$ előállítású vektor-spline függvény az egyes intervallumokban a következő alakú:

$$0 \leq u \leq 1 \text{ -ben } p(u) = (1-u)^3 p_0 + \frac{1}{4}(7u^3 - 18u^2 + 12u)p_1 + \frac{1}{12}(18u^2 - 11u^3)p_2 + \frac{1}{6}u^3 p_3$$

$$1 \leq u \leq 2 \text{ -ben } p(u) = \frac{1}{4}(2-u)^3 p_1 + \frac{1}{12}(7u^3 - 36u^2 + 54u - 18)p_2 + \frac{1}{6}(12u^2 - 3u^3 - 12u + 4)p_3 + \frac{1}{6}(u-1)^3 p_4$$

$$2 \leq u \leq 3 \text{ -ban } p(u) = \frac{1}{6}(3-u)^3 p_2 + \frac{1}{6}(3u^3 - 24u^2 + 60u - 44)p_3 + \frac{1}{6}(21u^2 - 3u^3 - 45u + 31)p_4 + \frac{1}{6}(u-2)^3 p_5$$

$$\begin{aligned}
3 \leq u \leq 4 \text{ -ben } p(u) &= \frac{1}{6}(4-u)^3 p_3 + \frac{1}{6}(3u^3 - 33u^2 + 117u - 131) p_4 + \\
&\quad + \frac{1}{12}(69u^2 - 7u^3 - 219u + 227) p_5 + \frac{1}{4}(u-3)^3 p_6 \\
4 \leq u \leq 5 \text{ -ben } p(u) &= \frac{1}{6}(5-u)^3 p_4 + \frac{1}{12}(11u^3 - 147u^2 + 645u - 925) p_5 + \\
&\quad + \frac{1}{4}(87u^2 - 7u^3 - 357u + 485) p_6 + (u-4)^3 p_7
\end{aligned}$$

Megjegyzés: A B-spline görbék számítógépes kezelését erre a célra kidolgozott algoritmusok teszik lehetővé.

Periodikus B-spline görbe

A $k=2$ esetben, ha n lényegesen nagyobb k -nál, akkor az ún. belső pontokra (vagyis ott, ahol a blending-függvények egybevágók) az $i \leq u \leq i+1$ intervallumon a $p(u)$ másodfokú B-spline alakja a következő:

$$p(u) = \frac{1}{2}(i+1-u)^2 p_i + \frac{1}{2}[(u-i+1)(i+1-u) + (i+2-u)(u-i)] p_{i+1} + \frac{1}{2}(u-i)^2 p_{i+2}$$

(vö. pl. $N_{4,0}$ kapcsolóhoz tartozó $2 \leq u \leq 3$ intervallumbeli (14) alakkal). Ha ezt a függvényt a $0 \leq u \leq 1$ intervallumra átparaméterezzük, akkor azt kapjuk, hogy

$$(15) \quad p(u) = \frac{1}{2}[(1-u)^2 p_i + (-2u^2 + 2u + 1) p_{i+1} + u^2 p_{i+2}]$$

Amennyiben (15) alakú részekből építjük fel a görbét, akkor ún. másodfokú periodikus B-spline-hoz jutunk; ekkor természetesen el kell tekinteni attól, hogy a görbe a kezdőponton és a végponton áthaladjon. Ez a görbeelőállítási módszer alkalmas zárt görbék előállítására is.

A (15) alakban az $(i+1)$ -edik görbedarab egyenletét írtuk fel. Ha az i -edik görbedarab egyenletét akarjuk felírni, akkor az i helyébe $(i-1)$ -et kell helyettesíteni. Az i -edik görbedarab mátrixos felírásban a következő alakú:

$$p(u) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u^2, u, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \end{bmatrix}$$

Harmadfokú periodikus B-spline i -edik szegmensének mátrixos alakja:

$$p(u) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} u^3, u^2, u, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \end{bmatrix}$$

Végezetül megemlítjük, hogy mind a Bézier-féle spline, mind a B-spline rendelkezik azzal a jó tulajdonsággal, hogy nem válnak oszcillálóvá (kis tartományon hullámszóvá) az általuk leírt görbék.

Hermite-féle kétváltozós köbös spline-függvények

Jelölés: az $f(x,y)$ kétváltozós függvény első, ill. második változója szerinti első parciális deriváltat az x_i, y_j helyen $D^{1,0}f(x_i,y_j)=f_{i,j}^{(1,0)}$, ill. $D^{0,1}f(x_i,y_j)=f_{i,j}^{(0,1)}$ -vel jelöljük, továbbá a második vegyes parciális deriváltat $D^{1,1}f(x_i,y_j)=f_{i,j}^{(1,1)}$ jelöli.

D e f i n í c i ó: Legyen adott az x,y síkon egy $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$, ill. $c=y_0 < y_1 < \dots < y_m=d$ helyek által meghatározott, derékszögű négyszögekre való felbontás. Csúspán az (x_i,y_j) pontokban ismerjük az $f(x,y)$ kétváltozós függvény $f_{i,j}$ értékeit, az első parciális deriváltak $f_{i,j}^{(1,0)}$ és $f_{i,j}^{(0,1)}$ értékeit, valamint az $f_{i,j}^{(1,1)}$ vegyes parciális derivált értékeit. Az $f(x,y)$ kétváltozós függvényt közelítő Hermite-féle köbös spline-függvénynek mondjuk az $S_{3,3}(x,y) \approx S_{3,3}(f;x,y)$ függvényt, ha minden téglalap alakú tartományon

$$(16) \quad S_{3,3}(x,y) = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 a_{\alpha\beta}(x-x_i)^\alpha (y-y_j)^\beta$$

alakú, és kielégíti a következő feltételeket: $S_{3,3}(x_i,y_j) =$

$$=f_{i,j}, \quad D^{1,0}S_{3,3}(x_i,y_j)=f_{i,j}^{(1,0)}, \quad D^{0,1}S_{3,3}(x_i,y_j)=f_{i,j}^{(0,1)} \text{ és } \\ D^{1,1}S_{3,3}(x_i,y_j)=f_{i,j}^{(1,1)} \quad i=0,1,2,\dots,n \text{ és } j=0,1,2,\dots,m.$$

Kimutatható, hogy ha egy téglalap alakú tartomány mind-egyik csúcsában ismert a megfelelő négy-négy érték, akkor erre a tartományra az $a_{\alpha\beta}$ együttthetők - az egyváltozós esethez hasonlóan - egyértelműen meghatározhatók. Nyilvánvaló,

hogy (16) az $S_{3,3}(x,y) = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ alakra is átírható.

Az egyváltozós Hermite-féle köbös spline-függvény ismeretéből könnyen következik, hogy az $S_{3,3}(x,y)$ függvényben, ill. x szerinti első parciális deriváltjában x értékét x_i vagy x_{i+1} állandóval helyettesítve, a kapott egyváltozós függvények az y változótól függő egyváltozós Hermite-féle köbös spline függvények; vagyis

$$(17) \quad S_{3,3}(x_p, y) = S_3[f(x_p, y); y] \text{ és } D^{1,0} S_{3,3}(x_p, y) = \\ = S_3[D^{1,0} f(x_p, y); y] \quad p=i, i+1$$

alakban írhatók fel.

A továbbiakban azzal az egyszerűsítéssel vizsgáljuk a Hermite-féle kétváltozós spline-ok előállítását, hogy az x, y síkon alapul vett felbontás egységnégyszetektől áll és a csúcspontok koordinátái egészek, vagyis

$$0 < 1 < \dots < i < i+1 < \dots < n; \quad 0 < 1 < \dots < j < j+1 < \dots < m.$$

Az egyváltozós eset (9) alakja szerint (17)-et felírva

$$S_3[f(p, y); y] = F_1(y-j)f_{p,j} + F_2(y-j)f_{p,j+1} + F_3(y-j)f_{p,j}^{(0,1)} + \\ + F_4(y-j)f_{p,j+1}^{(0,1)} \text{ ill.}$$

$$S_3[D^{1,0} f(p, y); y] = F_1(y-j)f_{p,j}^{(1,0)} + F_2(y-j)f_{p,j+1}^{(1,0)} + F_3(y-j)f_{p,j}^{(1,1)} + \\ + F_4(y-j)f_{p,j+1}^{(1,1)}$$

($p=i, i+1$) adódik.

Az y -t paraméternek tekintve, az $S_{3,3}(x, y)$ függvényt - az x szerinti egyváltozós spline (9) alakját alkalmazva - a következő módon állítjuk elő:

$$S_{3,3}(x, y) = F_1(x-i)S_3[f(i, y); y] + F_2(x-i)S_3[f(i+1, y); y] + \\ + F_3(x-i)S_3[D^{1,0} f(i, y); y] + \\ + F_4(x-i)S_3[D^{1,0} f(i+1, y); y]$$

Az $S_{3,3}(x, y)$ -ban szereplő tagokat részletesen kiírva:

$$F_1(x-i)S_3[f(i, y); y] = F_1(x-i)f_{i,j}F_1(y-j) + F_1(x-i)f_{i,j+1}F_2(y-j) + \\ + F_1(x-i)f_{i,j}^{(0,1)}F_3(y-j) + F_1(x-i)f_{i,j+1}^{(0,1)}F_4(y-j)$$

$$F_2(x-i)S_3[f(i+1, y); y] = F_2(x-i)f_{i+1,j}F_1(y-j) + \\ + F_2(x-i)f_{i+1,j+1}F_2(y-j) + \\ + F_2(x-i)f_{i+1,j}^{(0,1)}F_3(y-j) + F_2(x-i)f_{i+1,j+1}^{(0,1)}F_4(y-j)$$

$$F_3(x-i)S_3[D^{1,0}f(i,y);y] = F_3(x-i)f_{i,j}^{(1,0)}F_1(y-j) + \\ + F_3(x-i)f_{i,j+1}^{(1,0)}F_2(y-j) + \\ + F_3(x-i)f_{i,j}^{(1,1)}F_3(y-j) + \\ + F_3(x-i)f_{i,j+1}^{(1,1)}F_4(y-j)$$

$$F_4(x-i)S_3[D^{1,0}f(i+1,y);y] = F_4(x-i)f_{i+1,j}^{(1,0)}F_1(y-j) + \\ + F_4(x-i)f_{i+1,j+1}^{(1,0)}F_2(y-j) + \\ + F_4(x-i)f_{i+1,j}^{(1,1)}F_3(y-j) + F_4(x-i)f_{i+1,j+1}^{(1,1)}F_4(y-j)$$

Ennek alapján $S_{3,3}(x,y)$ mátrixos alakja könnyen előállítható. Ezt az előállítását az $i=j=0$ esetre - vagyis ha a tekintett tartomány az origó csúcsú egységnyégzet - fel is írjuk. Tehát a $0 \leq x \leq 1$ és a $0 \leq y \leq 1$ négyzeten

(13)

$$S_{3,3}(x,y) = \begin{bmatrix} F_1(x) & F_2(x) & F_3(x) & F_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{00}^{(0,1)} & r_{01}^{(0,1)} \\ r_{10} & r_{11} & r_{10}^{(0,1)} & r_{11}^{(0,1)} \\ r_{00}^{(1,0)} & r_{01}^{(1,0)} & r_{00}^{(1,1)} & r_{01}^{(1,1)} \\ r_{10}^{(1,0)} & r_{11}^{(1,0)} & r_{10}^{(1,1)} & r_{11}^{(1,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(y) \\ F_2(y) \\ F_3(y) \\ F_4(y) \end{bmatrix}$$

Az ilyen elemi felületdarabokat patch-eknek nevezzük. Mindkét változójában köbös vektorfüggvénnyel előállított elemi felületdarabot bikubikus patch-nek nevezzük, amelynek algebrai formája

$$p(u,v) = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 a_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

és mátrixos alakban:

$$p(u,v) = u^3 u^2 u^1 \begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{30} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{20} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} \\ a_{03} & a_{02} & a_{01} & a_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{UAV}^*$$

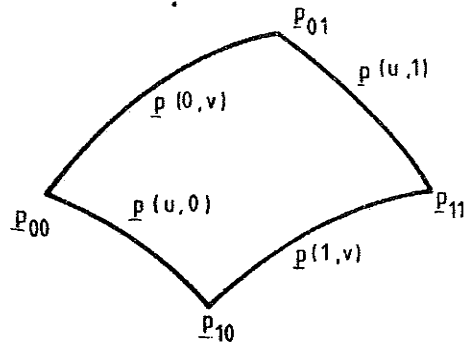
A felületet a $p(u,0)$, $p(1,v)$, $p(u,1)$, $p(0,v)$ görbék határolják, ezek a határoló görbék (10. ábra) a (10), ill. (11) alakú Ferguson-féle szegmenssek.

A p_{00} , p_{01} , p_{10} , p_{11} sarckpontok, ezekben vett első parciális deriváltak vektorok:

$$p_{00}^{(1,0)}, p_{01}^{(1,0)}, p_{10}^{(1,0)}, p_{11}^{(1,0)}$$

és $p_{00}^{(0,1)}, p_{01}^{(0,1)}, p_{10}^{(0,1)}, p_{11}^{(0,1)}$

vagyis a határoló görbéknek a sarokpontokban vett érintővektorai, továbbá a $p_{00}^{(1,1)}, p_{01}^{(1,1)}, p_{10}^{(1,1)}, p_{11}^{(1,1)}$, egyes parciális deriváltvektorok ismeretében a felületdarab Hermite-féle előállítás (18)-hoz hasonlóan írható fel:



16. ábra

$$p(u,v) = [F_1(u)F_2(u)F_3(u)F_4(u)] \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{00}^{(0,1)} & p_{01}^{(0,1)} \\ p_{10} & p_{11} & p_{10}^{(0,1)} & p_{11}^{(0,1)} \\ p_{00}^{(1,0)} & p_{01}^{(1,0)} & p_{00}^{(1,1)} & p_{01}^{(1,1)} \\ p_{10}^{(1,0)} & p_{11}^{(1,0)} & p_{10}^{(1,1)} & p_{11}^{(1,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \\ F_4(v) \end{bmatrix} = \underline{F(u)} \underline{F(v)^*}$$

Mint ahogy (12) szerint $\underline{F(u)} = [F_1(u)F_2(u)F_3(u)F_4(u)] = \underline{JM}$ és $\underline{F(v)} = \underline{M^*V^*}$, tehát $p(u,v) = \underline{UMBM^*V^*} = \underline{UAV^*}$, innen $\underline{A} = \underline{MBM^*}$, amiből

$$\underline{B} = \underline{M}^{-1} \underline{A} (\underline{M^*})^{-1}$$

Ezáltal megkaptuk az $\underline{A}$ mátrix elemei és $\underline{B}$ mátrix elemei között fennálló algebrai kapcsolatot:

A $\underline{B}$ mátrixban szereplő vegyes parciális deriváltvektorokat twist-vektoroknak nevezzük. Ha a twist-vektorok $\underline{p}$ -k, akkor az elemi felületdarabot Ferguson-féle patch-nak nevezzük. Az ilyen elemi felület közepe síkszerűen lapos. A twist-vektorok alkalmas változtatásával ez a helyzet a kívánt mértékben módosítható.

Bézier-felületek

A Bézier-réle felületmegadás feltétele: egy térbeli kontrollpont-hálózatot, amely tulajdonképpen egy $(m+1) \times (n+1)$ -es térbeli pontrácsot képez. Ezt a pontrácsot a felület karakterisztikus poliéderének nevezik. (Megjegyzendő azonban, hogy ez a pontrács általában nem képezi egy poliéder élvázát.) Ennek alapján a $p_{i,j}$ kontrollpontok és a Bernstein polimonomok segítségével a felület előállítása a következő alakú:

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{ij} B_{im}(u) B_{jn}(v) \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1. \end{matrix}$$

Speciálisan a bikubikus Bézier-féle elemi felületdarab mátrixos alakja:

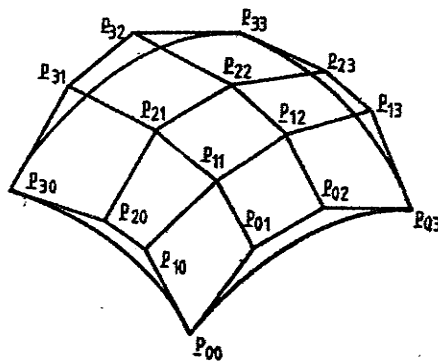
$$p(u,v) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v)^3 \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ \text{és} \\ 0 \leq v \leq 1 \end{matrix}$$

A felület átmegy a p_{00} , p_{03} , p_{30} , p_{33} pontokon, határoló görbéi köbös Bézier ívek, amelyeknek a sarokpontokban vett érintői a karakterisztikus poliéder ide csatlakozó élei, ezek a felület érintősíkját határozzák meg mind a négy sarokponban. További kérdés, hogy miként folytatható valamelyik irányban síma felülettellesztéssel a P Bézier-felület (18. ábra). A folytatáshoz tartozó karakterisztikus poliéderre (q_{00} ,

q_{01} , ..., q_{33}) teljesülnie kell a $q_{00} = p_{30}$, $q_{01} = p_{31}$, $q_{02} = p_{32}$, $q_{03} = p_{33}$ -nak, továbbá a felület simaságát a Bézier görbéknél (2) alatt felírtakkal analóg módon a

$$\begin{aligned} q_{10} - q_{00} &= \lambda(p_{30} - p_{20}), & q_{11} - q_{01} &= \lambda(p_{31} - p_{21}), & q_{12} - q_{02} &= \lambda(p_{32} - p_{22}), \\ q_{13} - q_{03} &= \lambda(p_{33} - p_{23}) \end{aligned}$$

egyenlőségek biztosítják; tehát ha λ -t megadjuk, akkor a Q csatlakozó felület karakterisztikus poliéderének csak q_{20} , q_{21} , q_{22} , q_{23} és q_{30} , q_{31} , q_{32} , q_{33} csúcspontjai vehetők fel szabadon.



17. ábra

A p_{03} , p_{13} , p_{23} , p_{33} pontok által meghatározott határvonalhoz illesztett S felületrészre az előbbieknak megfelelően kell eljárni.

A Q és S felületekhez simán illeszkedő R felület karakterisztikus poliédereinek más csak négy csúcspontja nem determinált.

R	S
Q	P

B-spline felületek

18. ábra

A felületek felírása a B-spline görbék felírásával analóg módon történik.

Adott a p_{ij} kontrollpontok $(m+1) \times (n+1)$ -es térbeli hálózata és ismeretesek a (13) definíció alapján meghatározott $N_{i,k}(u)$ blending függvények. Ennek alapján a B-spline felületek

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,\ell}(v)$$

alakúak, ahol $0 \leq u \leq m-k+1$ és $0 \leq v \leq n-\ell+1$. Ezen felületek további vizsgálata meghaladja tárgyalásunk korlátait.

TARTALOM

Előszó	3
1. Térgeometria	5
2. Kétképsíkös ábrázolás. Pont és egyenes ábrázolása. Sík ábrázolása. Sík és egyenes metszéspontja, két sík metszésvonala	13
3. Új képsík bevezetése, transzformáció	24
4. Poliéderek (síklapokkal határolt testek) síkmetszete	32
5. Poliéderek áthatása	37
6. Méretes szerkesztések. Távolságok és hajlásszögek szerkesztése. Méretes adataival megadott testek ábrázolása	45
7. Vektorok, vektorműveletek és geometriai alkalmazásai	67
8. Egyenes és sík koordinátageometriája	80
9. Kötött vektorok. Vektorrendszerek	87
10. Görbék differenciálgeometriája	93
11. Kúpszeletek	102
12. Kör ábrázolása	119
13. Cikloisok, körevolvensek	123
14. Csavarvonal ábrázolása	128
15. Axonometrikus ábrázolás	133
16. Merőleges (ortogonális) axonometria	140
17. Ferde (klinogonális) axonometria	146
18. Felületek ábrázolása. Forgásfelületek	151
19. Forgásfelületek síkmetszetének szerkesztése	157
20. Forgásfelületek áthatása	168
21. Kúpok és hengerek síkba terítése	178
22. Két görbéhez kifejtendő felület szerkesztése és síkba terítése	186
23. Felületek differenciálgeometriája	194
24. Az elektronikus gépi rajzolás alap gondolata	211
Irodalom	215
Függelék I.	217
Függelék II.	235

