



**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

Vermes Imre

GEOMETRIA

Útmutató és példatár

Építőmérnök hallgatók részére



Műegyetemi Kiadó, 2005.

A jegyzet Kötés projekció (Mérőszám ábrázolás) fejezetének bírálói:

Dr. Strommer Gyula ny. egyetemi tanár

Dr. Reimann István egyetemi docens

(Építőmérnök hallgatók részére)

(Tizedik utánnymás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **0410662**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 15,4(A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 148/05

Előszó

A jegyzet célja, hogy hallgatóinknak segítséget nyújtson a tárgy tanulmányában. A levelező oktatásban a tanórák szűkre szabott kiméréte miatt, a szóbeli előadásokat és gyakorlatokat igyekszik pótolni az elméleti részek (fogalmak, tételek) bizonyítás nélküli összefoglalásával, számos kidolgozott feladat bemutatásával. Kidolgozatlan feladatokat is közlünk, illetve hivatkozunk Dr. Reiman István és Dr. Nagyné dr. Szilvási Márta: Geometriai feladatok c. példatárára (J4-1007) azzal a céllal, hogy a tananyagot kellően begyakorolhassák hallgatóink. A módszertani útmutató alapjául Dr. Strommer Gyula: Geometria című tankönyve szolgál. E tankönyv megírásakor a szerző a szokásos tananyagot meghaladó, de a gyakorló mérnökök számára olykor igen fontos ismeretek tárgyalását is fontosnak tartotta. A tudományos igényességgel megírt könyvek használatában járatlan hallgatóknak azáltal szeretnénk segíteni, hogy az egyes tananyagrészek végén kijelöljük a Geometria tankönyvben áttanulmányozandó anyagrészeket.

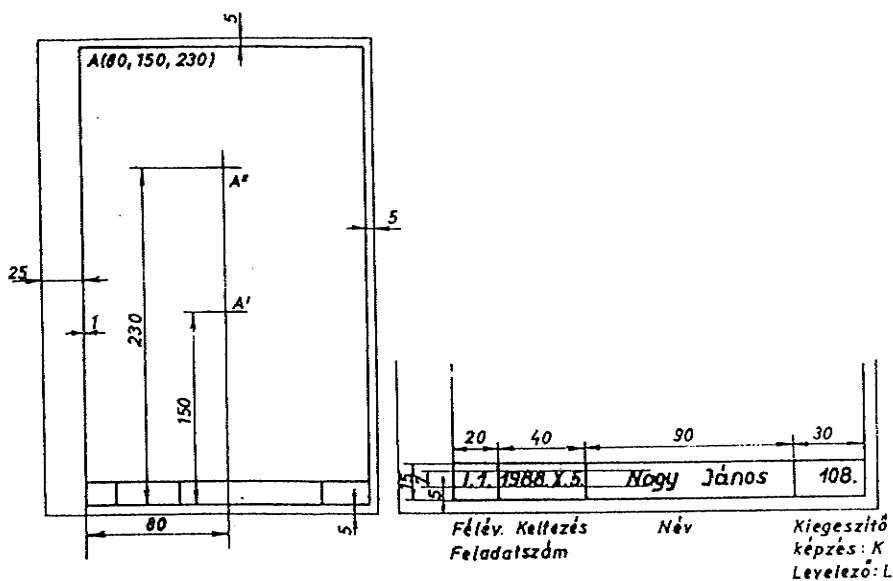
A heti rajzfeladatok szövegét és adatait minden fél-év elején sokszorosításban kapják a levelező és kiegészítő képzésben résztvevő hallgatóink. A beadási határidőket pontosan meg kell tartani.

A rajzfeladatokat A/4-es, azaz 210x297 mm-es nagyságú, fehér „DIPA”-jellegű rajzlapon ceruzával kell elkészíteni. A rajzok keretezése és felírása 1 mm-es vonalvastagsággal, minden esetben tussal készítenőd. A felíráshoz használt szabványírás: 7 mm-es nagybetű (5 mm-es kisbetű) nagyságot kell használni. A rajzok keretezési és felírási mintáját a mellékelt ábra mutatja. Egyúttal föltüntetjük rajta azt is, hogy mit kell érteni egy feladatban megadott A(80,150,230) koordinátákon. E koordinátákat csak a pontok kitűzésére adjuk meg, ezért a rajzlapon való föltüntetésük zavaró és fölösleges.

A rajzfeladatok szerkesztését 2H-3H keménységű, jól hegyezett ceruzával végezzük. A kiinduló pontokat vonalzóval rajzolt kis keresztekkel tüntessük fel, a szerkesztés során adódó pontokat külön jelölni nem kell. A szerkesztési vonalak a rajzból nem szabad kiradírozni, a szerkesztés menetének jól követhetőnek kell lenni. A szerkesztés eredményét 0,6 mm vastagságú egyenes, fekete vonallal, kb. B puhaságú ceruzával kell kihúzni. A szagatott vonalak 0,3 mm-es vonalvastagságúak legyenek. A megszerkesztett pontokat betűvel jelölhetjük, ez esetben 3,5 mm-es szabvány nagybetűket használjunk. Hallgatóink az

egyéb tudnivalókról a foglalkozásokon szóbeli úton, vagy a Geometria Tanszék H épület II. emeleti hirdetőtábláról értesülhetnek.

Az előszóhoz mellékeljük a rajzlapok keretezésének előírást formáját, illetve a Magyar Szabvány szerinti tömbírás betűit.



aābcdeēfghiijk
 lmnnoööpqrst
 uüüüvwxyz
 AABCDEEF GHIJ
 KLMNOÖÖÖPQR
 STUÜÜÜVWXYZ
 1234567890⁵/₈VIII

1. TÉRGEOMETRIA

Az alábbiakban egy rövid összefoglalást adunk a térgeometria azon fogalmairól és tételeiről, amelyeket a későbbiekben lépten-nyomon alkalmazni fogunk.

Egyenesek kölcsönös helyzete: Két különböző egyenes vagy metsző, vagy párhuzamos, vagy kitérő. Két egyenes akkor párhuzamos, ha nincs közös pontjuk és egysíkuak. Két egyenes akkor kitérő, ha nincs közös síkjuk.

Sík helyzetének megadása: Egy síkot egyértelműen meghatároz:

- a) Három pont, amelyek nincsenek egy egyenesen.
- b) Egy egyenes és egy rajta kívül fekvő pont.
- c) Két metsző egyenes.
- d) Két párhuzamos egyenes.

Sík és egyenes kölcsönös helyzete: Egy egyenes és egy sík párhuzamosak, ha nincs közös pontjuk. Egy egyenes vagy párhuzamos egy adott síkkal, vagy egy pontban metszi a síkot, vagy a síkban van. Sík és egyenes párhuzamosságát a következő tétel alapján szoktuk megállapítani: Egy egyenes párhuzamos a síkkal, ha párhuzamos a sík egy egyenesével.

Két sík kölcsönös helyzete: Két síknak vagy van közös pontja, vagy nincs. Ha a két síknak van közös pontja, akkor a két sík metszi egymást, közös pontjaik egy egyenesen, a metszésponton vannak. Ha két síknak nincs közös pontja, akkor azokat párhuzamosoknak nevezzük. Két sík párhuzamosságát a következő tétellel tudjuk eldönteni: Két sík akkor párhuzamos, ha az egyikben van két metsző egyenes, amely a másik síkkal (annak két megfelelő egyenesével) párhuzamos.

Két egyenes hajlásszöge: Két metsző egyenes a síkjukat négy szögtartományra bontja, e szögek közül kettő-kettő egyenlő. A két szög közül a kisebbiknek a mértékét nevezzük a két egyenes hajlásszögének. (Merőleges egyenesek a síkot négy egybevágó részre osztják.)

Bebizonyítható, hogy a térben is érvényes az egyállású szögekre vonatkozó tétel: Ha két szög szárai párhuzamosak és egyirányúak, akkor egyenlők is.

Ennek alapján definiálható két kitérő egyenes hajlásszöge: Két kitérő egyenes hajlásszöge a velük párhuzamos, két metsző egyenes hajlásszögével egyenlő (függetlenül attól, hogy hol vesszük fel a térben a két metsző egyenes metszéspontját).

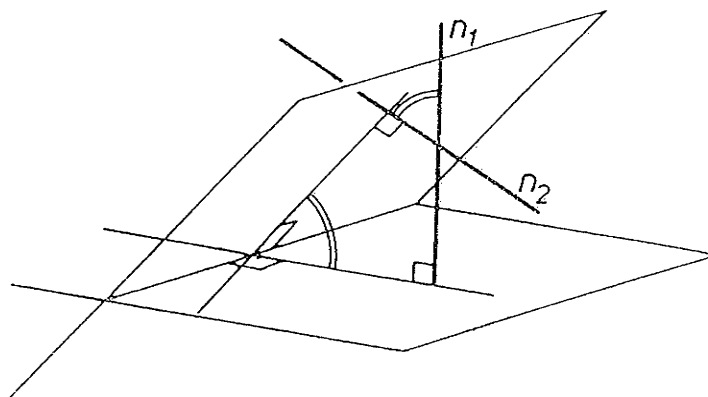
Síkra merőleges egyenes: Egy egyenes merőleges a síkra, ha merőleges annak minden egyenesére. A merőlegességet a következő tétel alapján könnyen eldönthetjük: Egy egyenes merőleges a síkra, ha annak két metsző egyenesére merőleges.

Egy adott síkra a tér minden pontjából pontosan egy merőleges egyenes állítható.

Egy adott egyenesre merőlegesen egy adott ponton át pontosan egy merőleges sík fektethető.

A síkra merőleges egyenest a sík normálisának mondjuk. A sík normálisai egymással párhuzamosak.

Két sík hajlásszöge: Két metsző sík hajlásszöge a síkokban a metszésvonalra (ugyanazon pontban) állított merőleges egyenesek hajlásszögével egyenlő. Bebizonyítható, hogy ez a szög egyenlő a két sík normálisainak (n_1 , n_2) hajlásszögével. (1.1. ábra)

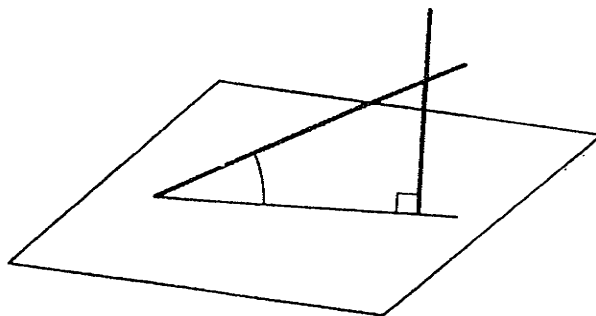


1.1. ábra.

Két sík merőlegessége: Két sík merőleges, ha hajlásszögük derékszög. Két sík merőlegességére vonatkozó tétel: Két sík akkor merőleges egymásra, ha az egyikben van olyan egyenes, amely merőleges a másik síkra.

Sík és egyenes hajlásszöge: A síkot metsző egyenesnek a síkra való merőleges vetületével bezárt szöge a sík és egyenes hajlásszöge.

A hajlásszög meghatározását úgy is elvégezhetjük, hogy a sík normálisának és az egyenesnek a hajlásszögét határozzuk meg. Ezt a szöget derékszöggé kiegészítő szög a sík és egyenes hajlásszögével egyenlő. (1.2. ábra.)

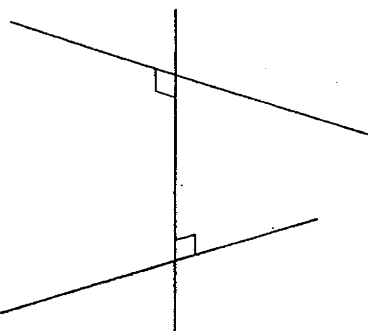


1.2. ábra.

Két kitérő egyenes távolsága: Két kitérő egyenes távolsága az a legrövidebb szakasz, amely a két egyenes egy-egy pontját összeköti.

Bebizonyítható, hogy a két egyenes távolságát adó szakasz olyan egyenesen van, amely a két kitérő egyenest merőlegesen metszi: normál transzverzális.

(1.3. ábra)



1.3. ábra.

Térgeometriai szerkesztések: A síkgeometriai szerkesztésekhez hasonlóan a térgeometriában is feladatainknak egy része abból áll, hogy megadott térelemékből, bizonyos megengedett lépések véges sokszori alkalmazásával előírt tulajdonságú térelemeket kapunk. Tetszőleges pontok felvételét megengedve az alapszerkesztési lépések a következők:

1. Egy sík akkor van megszerkesztve, ha ismertek meghatározó adatai.

2. Ha adott két metsző sík, akkor metszészvonaluk is adott.

3. Ha adott egy sík, akkor ebben minden síkgeometriai szerkesztés elvégezhető.

A térgeometriai szerkesztések csak gondolatban „végezhetők el”.

Szerkesztési példák

- || 1) Adva az a egyenes és a rajta kívül fekvő A pont. Szerkesszünk olyan b egyenest, amelyik A ponton átmegy és párhuzamos az a egyenessel.

Megoldás: A pont és az a egyenes által meghatározott síkban A -n át az a -val párhuzamos egyenest szerkesztünk.

- || 2) Adott az α sík és a síkon kívül fekvő P pont. Szerkesztendő a P ponton áthaladó α síkkal párhuzamos β sík.

Megoldás: Vegyünk α síkban két metsző egyenest, a -t és b -t. Az a egyenes és P pont síkjában P -n át a -val párhuzamos c egyenest szerkesztünk. Hasonlóan P -n át b -vel párhuzamos d egyenest szerkesztünk. A c és d egyenesek a keresett síkot adják.

- || 3) Adva vannak az a és b kitérő egyenesek. Szerkesszünk olyan α és β párhuzamos síkokat, melyek közül α tartalmazza az a egyenest, β pedig a b egyenest.

Megoldás: Az a egyenesen tetszőlegesen felvett A ponton át szerkesszünk b -vel párhuzamos c egyenest (l. előzők). Ugyanúgy a b egyenes egy tetszőleges B pontján át a -val párhuzamos d egyenest. Az a és c egyenesek síkja a keresett α sík, a b és d egyenesek síkja pedig β .

- || 4) Szerkesszük meg egy adott a egyenes metszéspontját egy adott α síkkal.

Megoldás: Vegyünk fel az α síkon egy tetszőleges P pontot. (P pont nincs az a egyenesen.) Az adott a egyenes és P pont síkja β . Az α és β síkok metszészvonala egy b egyenes. β síkban adódik a és b egyenesek A metszéspontja, ami éppen a keresett metszéspont.

Transzverzálisnak nevezzük kitérő egyenesek közös metszőjét.

- || 5) Adva vannak az a és b kitérő egyenesek és a mindkettőn kívül fekvő P pont. Szerkesszük meg azt a t egyenest, amelyik átmegy P -n és metszi a -t és b -t. (Ponton áthaladó transzverzális.)

Megoldás: A P ponton átmenő a és b egyenest metsző egyenesek között (vagyis a P pont és b egyenes által meghatározott síkban) van a keresett egyenes. Ezt a síkot az a egyenes metszi egy A pontban (l. 4. feladat). Az A pont és P pont által meghatározott egyenes általában metszi a b egyenest egy B pontban. AB egyenes a keresett transzverzális. (Mikor nincs a feladatnak megoldása?)

- ||6) Adott három, páronként kitérő egyenes a , b és i . Szerkesszünk olyan t egyenest, amely i -vel párhuzamos és metszi az a és b egyeneseket.

Megoldás: Az a egyenest metsző i -vel párhuzamos egyenesek az a -t tartalmazó i -vel párhuzamos síkban vannak. Ezt a síkot megkapjuk, ha az a egyenes tetszőleges P pontján át i -vel párhuzamos i_1 egyenest szerkesztünk. Az a és i_1 egyenesek által meghatározott síkot általában metszi a b egyenes. A fentiek szerint megszerkesztjük b -nek és a síknak B metszéspontját. Ezen a B ponton át i -vel párhuzamos egyenest szerkesztve, ez általában metszi az a egyenest egy A pontban. Az AB egyenes a keresett transzverzális. (Mikor nincs a feladatnak megoldása?)

- ||7) Adott három, páronként kitérő egyenes: a , b és c . Szerkesszünk olyan egyenest, amely mindhármat metszi.

Megoldás: Az egyik egyenes egy tetszőleges pontján át a másik két egyeneshez szerkeszthető transzverzális (l. 5. feladat).

- ||8) Adott az a és b kitérő egyenespár és az egymást metsző α és β sík. Szerkesszünk az a és b kitérő egyenesekhez olyan transzverzálisst, amely α síkkal is és β síkkal is párhuzamos.

Megoldás: A transzverzális iránya nyilvánvalóan az α és β síkok metszészvonala. Ezáltal a feladat megoldása a 6. feladatra vezethető vissza.

- ||9) Adott az A pont és az a egyenes. Szerkesszünk az A ponton át az a egyenesre merőleges α síkot.

Megoldás: a) Az A pont az a egyenesen van. Fekteszünk az a egyenesre két tetszőleges síkot: β -t és γ -t.

Szerkesszünk β -ban és γ -ban az a -ra merőleges A ponton áthaladó b , illetve c egyenest. A keresett sík a b és c egyenesek síkja.

b) Az A pont az a egyenesen kívül van. Ekkor szerkesztünk az a egyenes tetszőleges X pontján át az a egyenesre merőleges ε síkot, majd az A ponton át a korábbi módon párhuzamos síkot szerkesztünk az ε síkkal. (Gondoljuk meg a feladat direkt megoldását is, amikor nem az a) esetre vezetjük vissza.)

- ||10) Adott az ε sík és az A pont. Szerkesszünk az A ponton át ε síkra merőleges n egyenest.

Megoldás: Vegyünk fel az ε síkban két metsző egyenest a -t és b -t. Az előző feladat szerint az A ponton át az a egyenesre merőleges α síkot és a b egyenesre merőleges β síkot szerkesztünk. E két sík A ponton áthaladó metszészvonala nyilván merőleges lesz a -ra és b -re, így az ε síkra is.

- 11) Adott az α sík, a síkra nem merőleges a egyenes és az A pont. Szerkesszünk olyan e egyenest, amely átmegy A-n, párhuzamos α síkkal és merőleges az a egyenesre.

Megoldás: Az A-n át az a egyenesre merőleges sík tartalmazza a keresett egyenest és a 9. feladat szerint megszerkeszthető. A keresett e egyenes benne van az A ponton át α -val párhuzamosan haladó és a 2. feladat szerint megszerkeszthető síkban. E két sík metszésvonala éppen a keresett e egyenes, amely általában nem metszi az a egyenest.

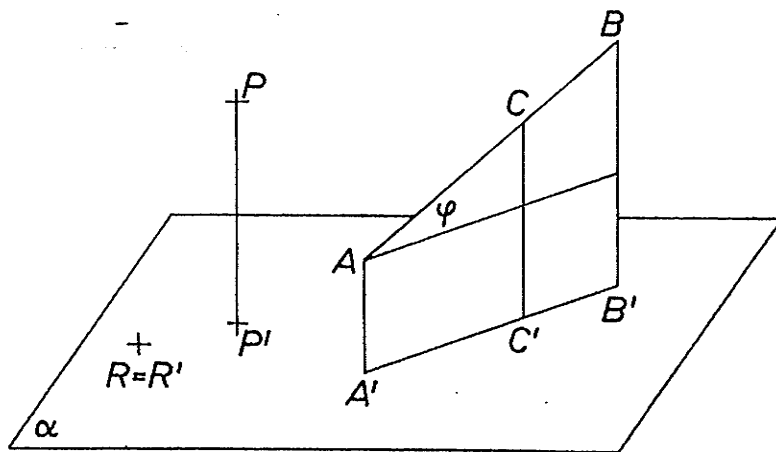
- 12) Adott az egymást metsző α és β sík, továbbá mindkettőn kívül fekvő P pont. Szerkesszünk a P ponton át olyan γ síkot, amely az adott α és β síkokat egymással párhuzamos a, illetve b egyenesben metszi.

Megoldás: Az α és β síkok m metszésvonalával párhuzamos m_1 egyenest szerkesztünk a P ponton át. Az m_1 egyenest tartalmazó síkok — az α , illetve β síkokkal párhuzamos síkok kivételével — mindkét síkból az m_1 -gyel párhuzamos egyeneseket metszenek ki.

Az eddig tárgyalt térgeometriai szerkesztések bevezető példaként szolgálnak egyszerű térgeometriai feladatok megoldására. A későbbiekben előforduló geometriai feladatok megoldását is hasonló módon, az ún. térgeometriai megoldás átgondolásával (esetleg vázlatban való rögzítésével) kell kezdenünk. Egy helyes térgeometriai megoldásra épülhet csak a feladat kidolgozása, ami ábrázoló geometriai feladatnál szerkesztést, analitikus geometriai feladatnál pedig tervszerűen végrehajtott számítást jelent.

Merőleges (vagy derékszögű) vetítés

A tér pontjainak síkon való ábrázolására az egyik és a leggyakrabban alkalmazott módszer a merőleges vetítés. A P pont α síkon levő merőleges vetülete a P -ből az α -ra állított merőleges P' talppontja. Az α sík a képsík, a P' pont a P pont képe. (Az α síkban levő R pont képe önmaga.) A PP' egyenes a P pont vetítőegyenese. (1.4. ábra)



1.4. ábra.

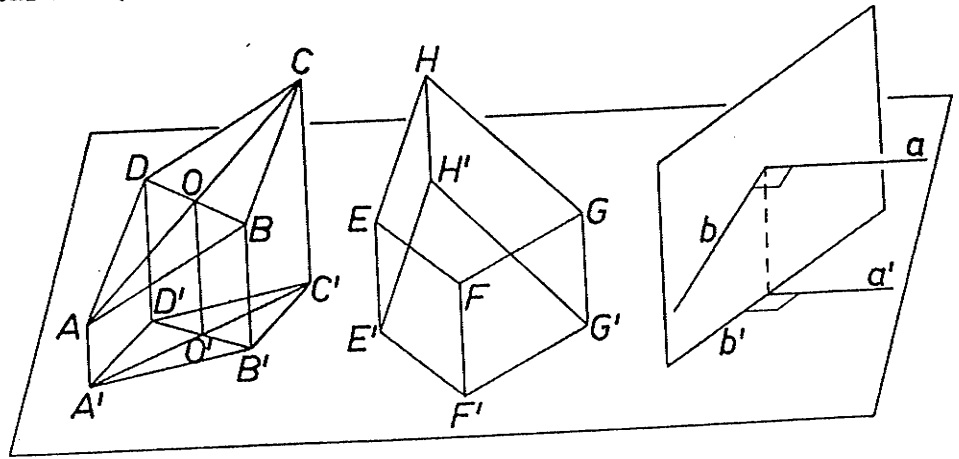
a) A merőleges vetítés egyértelmű leképezés: a tér egy pontjához egyértelműen tartozik a képpont. Ez megfordítva nem igaz, mert ugyanazon képpontnak végtelen sok térbeli pont felel meg.

b) A merőleges vetítés egyenestartó: egyenes képe egyenes (csak a vetítőegyes képe pont). AB egyenesdarab $A'B'$ képe általában rövidebb az AB szakasznál, csak akkor egyenlők, ha az AB szakasz párhuzamos a képsíkkal; $A'B' = AB \cdot \cos \varphi$.

c) A leképezés aránytartó: ha ABC egy egyenes három pontja, amelyeknek képe $A'B'C'$, akkor a megfelelő szakaszok aránya térben és a képen ugyanaz: $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$.
Tehát szakasz felezéspontjának képe a képszakasz felezőpontja.

d) Parallelogramma képe parallelogramma — feltéve, hogy síkját nem merőleges a képsíkra —, azaz nincs vetítőkép.

Ebből következik, hogy a leképezés párhuzamosságtartó. (1.5. ábra)



1.5. ábra.

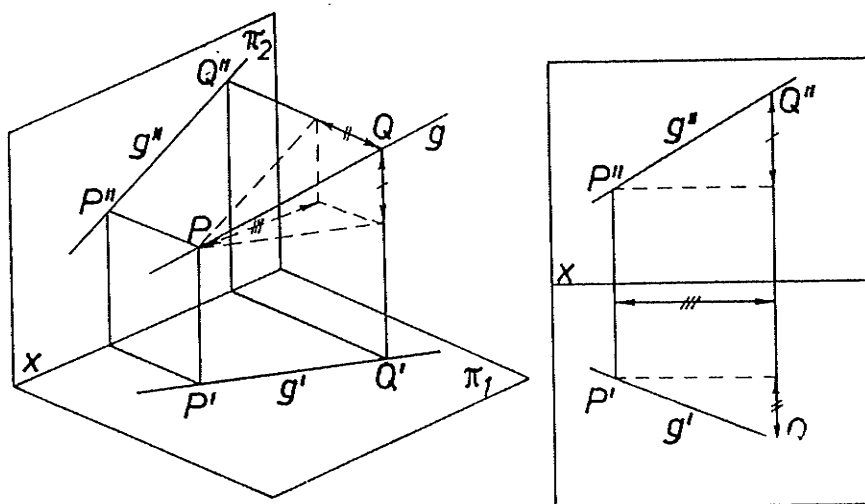
e) Képsíkkal párhuzamos síkban fekvő alakzatok képe a térbelivel egybevágó. Vetítősíkban levő alakzat képe a vetítősík és a képsík metszésvonalába esik.

f) Szögek nagysága a merőleges vetítés során kisebbé is és nagyobbá is válhat. Derékszög vetületére igaz a következő tétel: Ha egy derékszög egyik szára párhuzamos a képsíkkal, akkor a derékszög vetülete is derékszög.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 1-8. és 15-35. pontjai.

2. A KÉTKÉPSIKOS ÁBRÁZOLÁS PONT ÉS EGYENES ÁBRÁZOLÁSA

Mint hogy az egy képsíkra való merőleges vetületből nem lehet megállapítani a pontok térbeli helyzetét, ezért két, egymásra merőleges helyzetű képsíkra vetítjük a pontokat, majd a két képsíkot az x metszésvonaluk (képsíktengely) körül egyesítjük. (2.1. ábra)



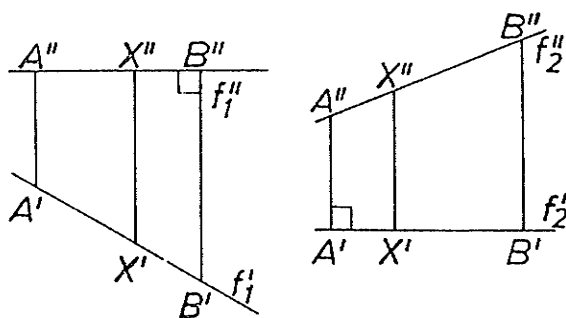
2.1. ábra.

A pontok első, illetve második (π_1 , ill. π_2) képsíkon keletkezett (P' , P'' , ill. Q' , Q'') képeit összekötő egyenesek a képsíktengelyre merőlegesek, tehát egymással párhuzamosak. (l. 2.1. ábra) Az első képen leolvasható a pontok második képsíktól való távolsága: a P' és Q' pontok x képsíktengelytől való távolsága. Ugyanígy az ábrázolt pontok első képsíktól mért távolsága a P'' és Q'' pontok x képsíktengelytől való távolságaként kapható meg. Ennek alapján a képsíkrendszerhez viszonyítva meg tudjuk állapítani a pontok térbeli helyzetét. A gyakorlatban erre nem szokott ilyen formában szükség lenni. Az ábrán bejelölt nyilak meghatározzák a pontok relatív helyzetét. Az egy vesszővel jelölt nyíl a P és Q pontok ún. első képsíktávolság-különbségét jelöli, a két vesszővel jelölt

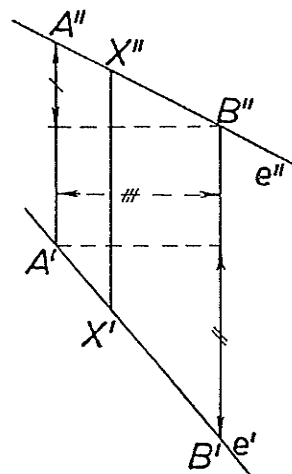
nyíl a pontok második képsíktávolság-különbségét mutatja, míg a három vesszővel jelölt nyíl azt mutatja meg, hogy a pontok közül melyik van a másikhoz viszonyítva jobbra és mennyivel. E három távolság ismeretében az egyik pont tetszőleges térbeli elhelyezéséhez a másik pont térbeli helyzete már egyértelműen meghatározható; több pont esetén az összes többi pont meghatározása is egyértelmű. A képsíktengely ennél a visszaállítási módszernél nem játszik szerepet, ezért a továbbiakban nem is fogjuk azt megrajzolni (természetesen, ha valakinek könnyebbséget jelent a képsíktengely használata, nyugodtan berajzolhatja).

Egyenes ábrázolása

Két pont ábrázolásával összekötő egyenesüket is megrajzolhatjuk (2.1. ábrán g egyenes). Ha az előbbieken tárgyalt három távolság közül egyik sem 0, akkor az AB egyenes általános helyzetű. (2.2. ábra.)



2.3. ábra.



2.2. ábra.

Ha a három távolság közül az egy, illetve két vesszővel jelölt távolság 0, akkor első képsíkkal párhuzamos, illetve második képsíkkal párhuzamos egyeneseket kapunk (első fővonal, második fővonal). (2.3. ábra)

Ha a három vesszővel jelölt távolság 0, akkor olyan egyeneshez jutunk, amely mindkét képsíkra merőleges, ún. profil síkban van. Az ilyen egyeneseket profil egyeneseknek nevezzük. (2.4. ábra)

A profil egyenest csak két pontjának megadásával lehet megadni. (A többi egyenest képeinek megrajzolásával is meg lehet adni.)

Ha a szóbanforgó három távolság közül kettőt-kettőt veszünk 0-nak, akkor mindkét képsíkkal párhuzamos egyenest (2.5. ábra), illetve az első vagy a második képsíkra merőleges első vetítőegyenest, illetve második vetítőegyenest kapunk (2.6. ábra). Az első vetítőegyenest első képe egyetlen pont, hasonlóan a második vetítőegyenest második képe. (Eddigi áttekintésünkkel ki is merítettük az összes lehetséges egyenes típust.)

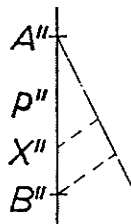
(Az f_1 , f_2 , a , t , r egyenesek² legalább az egyik képsíkkal párhuzamosak, ezért a rajtuk felvett AB szakasz valódi méretében leolvasható.)

Az egyenesen levő pont képe az egyenes megfelelő képén van. Ezt mutatja be a 2.2. - 2.6. ábrák egyenessein levő, X-szel

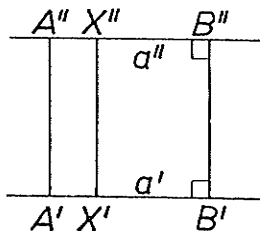
jelölt pontok ábrázolása. Profil egyenes esetében ez az ábrázolás egy arányos szerkesztéssel lehetséges, felhasználva a merőleges vetítés aránytartó tulajdonságát. (A második kép mellé a ferro egyenesre az első képhosszakat másoltuk.)

Sík ábrázolása

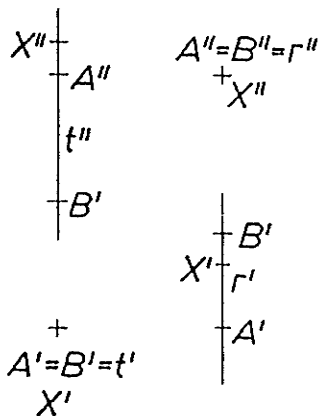
A sík ábrázolása a meghatározó adataival történik, mivel a sík pontjainak képe általában teljes egészében befedné a képsíkot. A 2.7. ábrán három, nem egy egyenesen levő A, B, C ponttal adtuk meg egy általános helyzetű síkot. A 2.8. ábrán két (a, b) metsző egyenes, a 2.9. ábrán két párhuzamos (c, d) egyenes, végül a 2.10. ábrán



2.4. ábra.

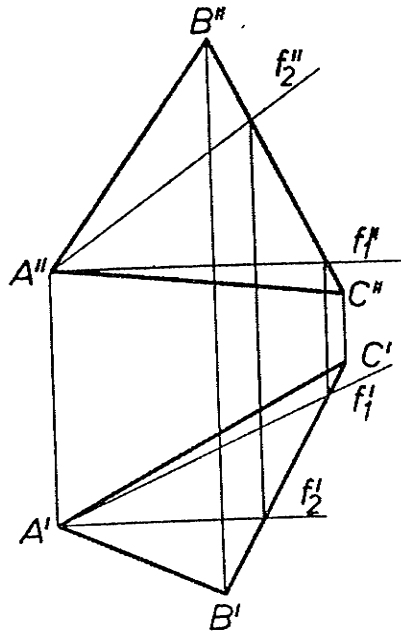


2.5. ábra.

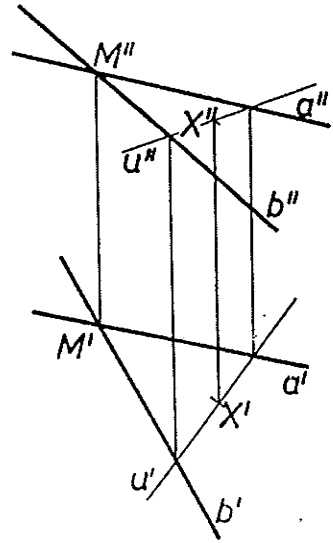


2.6. ábra.

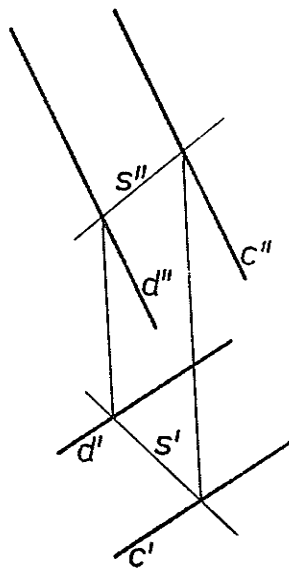
egy e egyenes és egy P pont által meghatározott általános helyzetű síkot ábrázoltunk. (Együttal bemutattuk a metsző



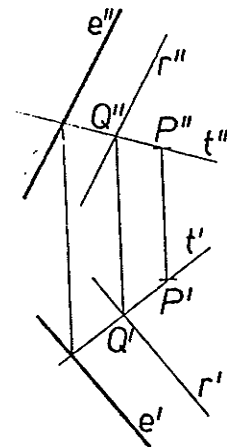
2.7. ábra.



2.8. ábra.



2.9. ábra.



2.10. ábra.

és párhuzamos egyenesek ábrázolását is.)

Síkban fekvő egyenes és pont ábrázolása

A 2.9. ábrán az s'' képével megadott egyenes első képét úgy határozzuk meg, hogy az a c és d egyenesek síkjában legyen. A szerkesztést az s egyenes és a c, illetve d egyenesek metszéspontjának kijelölésével végeztük el.

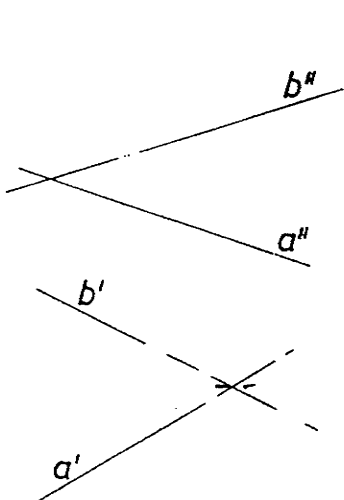
A 2.10. ábrán egy olyan r' képeggyenes adott, amely e' -vel párhuzamos. Az r'' -t úgy határozzuk meg, hogy az r egyenes a (P, e) síkban legyen. Ezért előbb a P pontot az e egyenes egy pontjával összekötő t egyenest vesszük fel. A t és r közös Q pontjának ismeretében r'' az e'' -vel párhuzamosan megrajzolható.

A 2.8. ábrán bemutatjuk, hogy hogyan lehet síkban fekvő pontot ábrázolni. Legyen adva a síkban fekvő X pont első képe. Ezen a ponton át felveszünk egy síkban haladó u egyenest (első majd második képével) és u'' -n kijelöljük X'' -t.

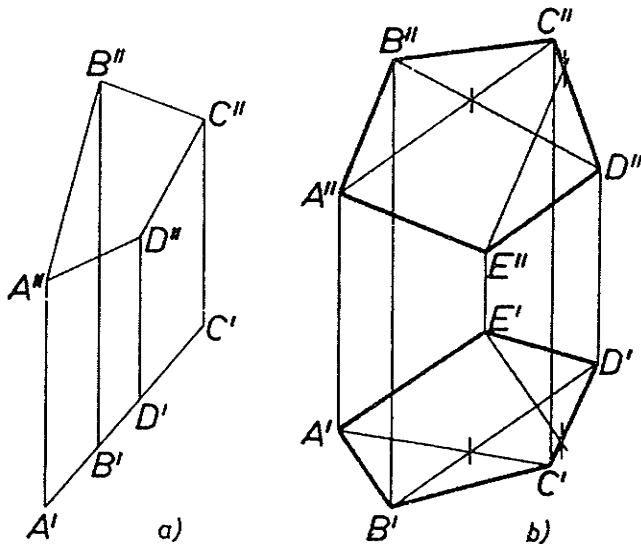
A 2.7. ábrán az ABC sík egy első és egy második fővonalának megszerkesztését láthatjuk.

Az eddigiekből nyilvánvaló, hogy két kitérő egyenes nem lehet egy síkban, tehát első, illetve második képein adódó metszéspontjaik nincsenek egy rendezőn. (2.11. ábra)

A következő 2.12. ábrán egy általános síkkötszöget ábrázolunk. A síksokszög egyik képe tetszés szerint megadható, de másik képéből csak három csúcspont vehető fel. Ha az utóbb választott három pont egy egyenesre esik, úgy a sokszög síkja vetítősík, és a többi pont is erre az egyenesre fog kerülni (2.12.a). Ha a választott három pont nem esik egy egyenesre, akkor az általuk meghatározott síkban fekvő pontokként kell a többi pont második képét szerkeszteni (2.12.b).



2. 11. ábra.

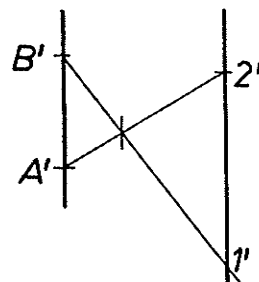
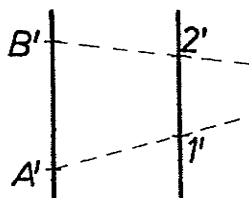
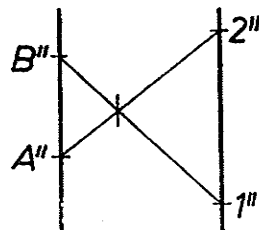
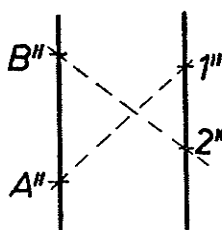


2. 12. ábra.

Az ABCDE ötszög első képe és az ABC pontok második képe volt adva. D'' -t a metsző helyzetű AC és BD átlókkal, az E'' -t AB-vel párhuzamos segédegyenessel szerkesztettük.

A 2.13. ábra két kitérő profil egyenest mutat be. Ennek kimutatása azáltal történik, hogy a profil egyeneseket meghatározó két-két pont összekötő egyenesei kitérők.

A 2.14. ábra két párhuzamos profil egyenest ábrázol. Itt az $AB2'$ négy-szög átlói metszik egymást.



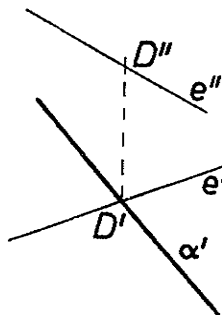
2.13. ábra.

2.14. ábra.

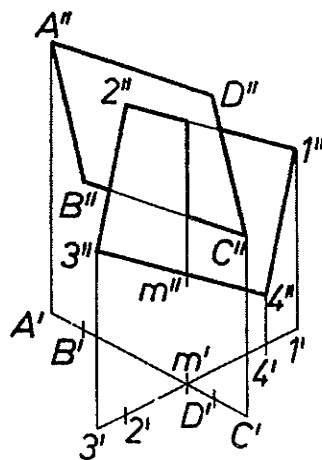
Sík és egyenes metszéspontja. Két sík metszéspontja

A metszési alapszerkesztések bizonyos esetekben olyan egyszerűen végezhetők el, hogy szinte önmaguktól adódnak. Ilyen például a 2.15. ábrán adott α első vetítősík és e egyenes D metszéspontjának megszerkesztése.

Két első vetítősík metszéspontját a 2.16. ábrán határoztuk meg, feltüntetve az ABCD és 1234 paralelogramma lemezek láthatósági viszonyait. A két sík metszéspontja első vetítőegyenest.

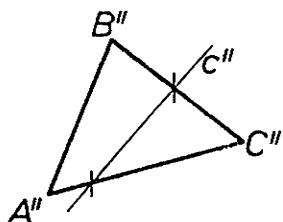


2.15. ábra.



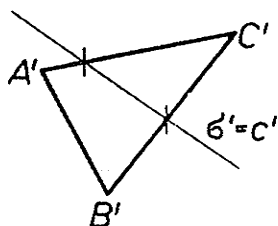
2.16. ábra.

Általános helyzetű ABC sík és a t második vetítőegyenest metszéspontját a 2.18. ábrán szerkesztettük meg. A D metszéspont második képe a t'' -vel azonos, az első képét pedig az ABC síkbeli pont első képeként szerkesztjük.



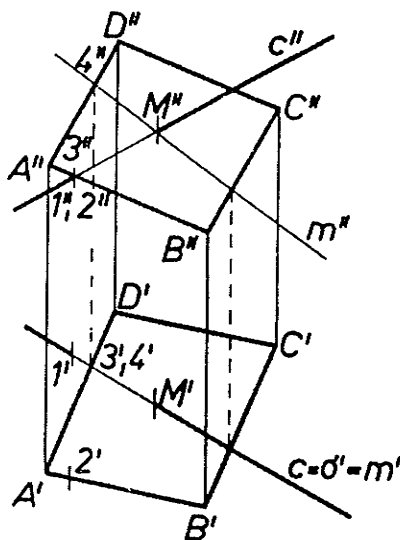
2.18. ábra.

Az ABC háromszög síkjának és a σ első vetítősíknak c metszészvonalát úgy kapjuk, hogy $\sigma' = c'$ és ebből meghatározzuk a második képét. (2.19. ábra)



2.19. ábra.

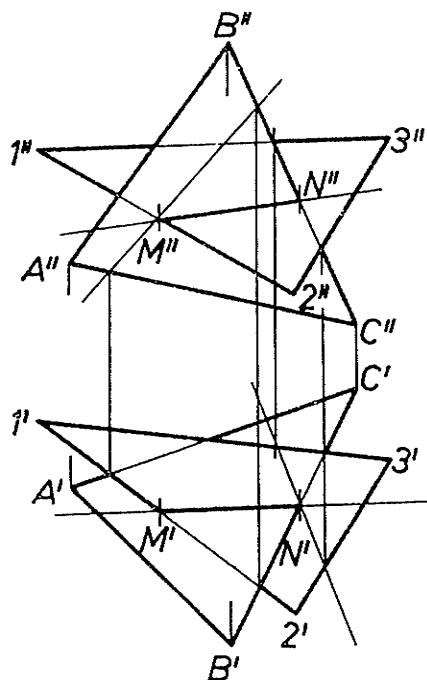
Ennek alapján már meg tudjuk szerkeszteni általános helyzetű sík (ABCD paralelogramma) és a c egyenes metszéspontját. (2.20. ábra) - -



2.20. ábra.

Eljárásunkban a térgeometriai szerkesztésekben alkalmazott módszert követjük: A c egyenesre fektetett σ első vetítősíknak megszerkesztjük az ABCD síkkal való m metszésvonalát, amely a második képen kijelöli a c egyenes és a sík M metszéspontját. A láthatóságot fedőpontokkal lehet megállapítani, pl. a második képen 1 és 2-vel jelölt pontok közül az AB egyenesen levő 2 pont fedi a c egyenes 1-es pontját, mivel a 2 van π_2 -től távolabb. Ugyanúgy az első képen levő 3 és 4-gyel jelölt pontok közül a 4-es pont (AD oldal) fedi a 3-as pontot (c egyenes).

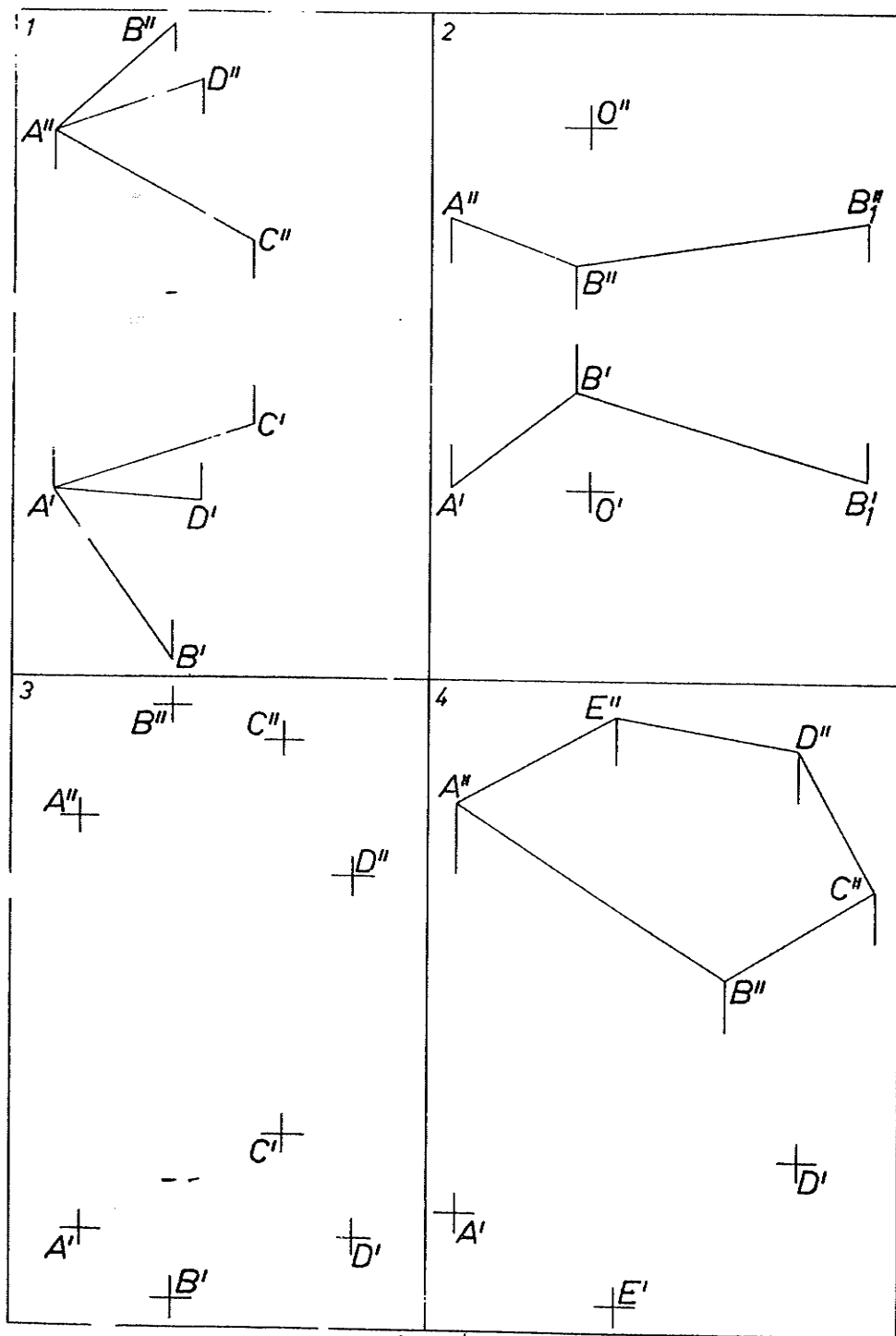
Két sík metszésvonalának meghatározása: A 2.21. ábrán szerkesszük meg az ABC háromszög és az 123 háromszög síkjának metszésvonalát! Az előző szerkesztés szerint meghatározzuk az 12 egyenesnek és az ABC síknak az M metszéspontját, illetve a BC egyenesnek az 123 síkkal való N metszéspontját. A két pont összekötő egyenese a két sík metszésvonala. A metszésvonalnak csak az a darabja látható, amelyik egyidejűleg mindkét síkidomon rajta van. A láthatóság feltüntetésénél a fedőpontos módszert használjuk fel.



2.21. ábra.

Az illeszkedési feladatok gyakorlására oldjuk meg (A/4-es méretű lapon) a 2.22. ábrán felvételi vázlattal megadott példákat.

- 1) Adott egy paralelepipedon A csúcsából kiinduló három éle. Szerkesszük meg a paralelepipedon két képét.
- 2) Egy hatoldalú hasáb alaplapja szabályos hatszög. Ábrázoljuk a hatoldalú hasábot, ha adott az alaplap O középpontja és két szomszédos csúcsa, A és B, továbbá a BB_1 oldalél.
- 3) Döntsük el, hogy egy síkban van-e az ABCD pontnégyes.
- 4) Adott az ABCDE síköttszög második képe és az A, E, D csúcsok első képe. Szerkesszük meg az ötszög első képét.



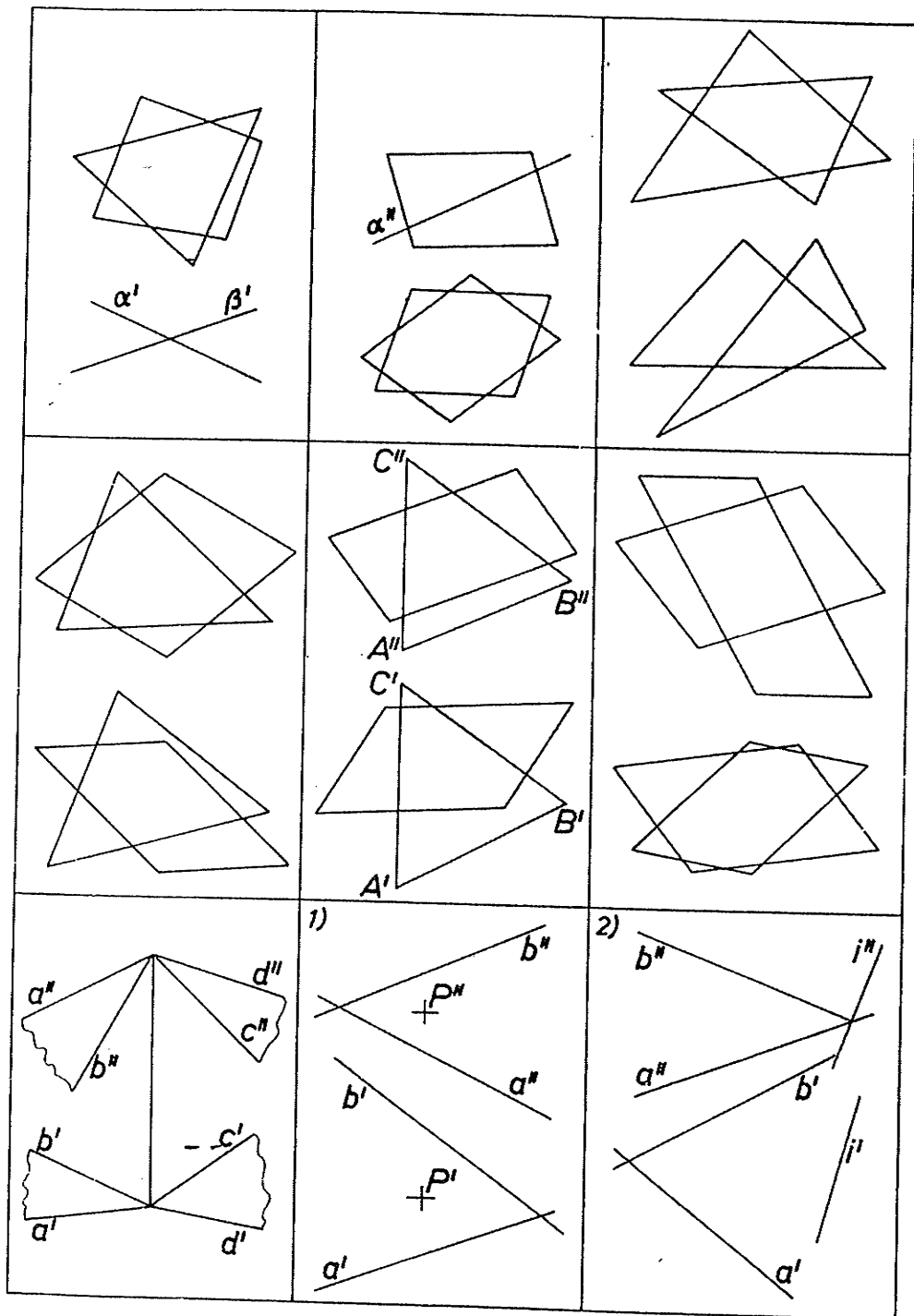
2.22. ábra.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 2.23. ábrán vázlatban megadott síkok metszésvonalát. (A feladat megoldásához nagyítsuk fel A/4-es méretre a feladatokat.) Az ábrán szereplő két utolsó feladat:

1) Szerkesszük meg az a és b egyenesek P ponton áthaladó transzverzálisát.

2) Szerkesszük meg az a és b egyenesek i iránnyal párhuzamos transzverzálisát.

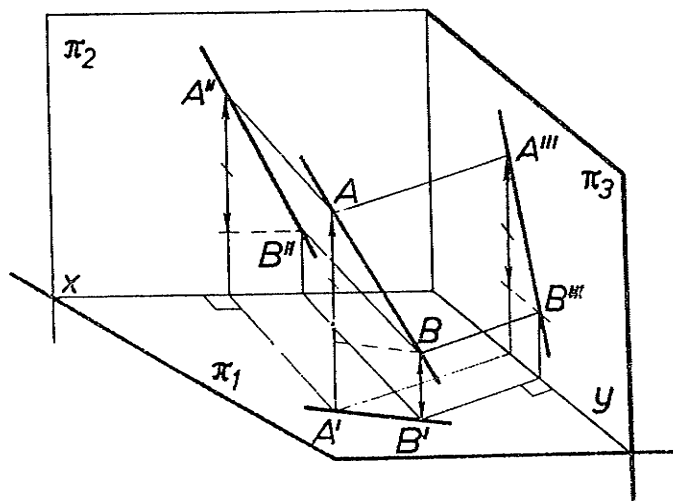
Elméleti tananyag: Tankönyv: 53-67. és 72-74. pontjai.



2.23. ábra.

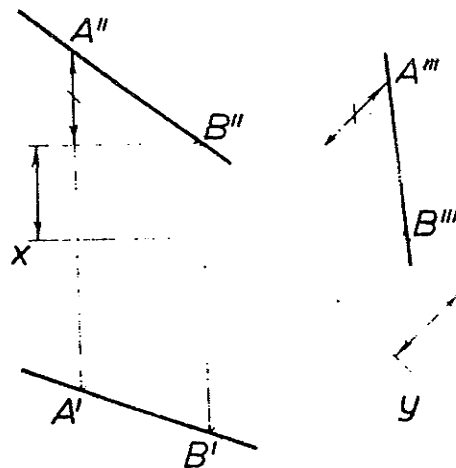
3. ÚJ KÉPSÍK BEVEZETÉSE TRANSZFORMÁCIÓ

Feladataink megoldása egyszerűbb lehet, ha az ábrázolt alakzat az alkalmazott képsíkhöz viszonyítva speciálisabb helyzetű. Ez a speciális helyzet nem mindig garantálható, de lehetőség van arra, hogy pl. a második képsík helyett egy, az első képsíkra merőleges, új, ún. harmadik képsíkot (π_3) vezessünk be. (3.1. ábra)



3.1. ábra.

A π_3 alkalmas választásával sokszor egyszerűbbé válik a szerkesztés. Az ábrán jól látható, hogy az ábrázolt A és B pontnak az első képsíktól mért távolsága a második és harmadik képen egyaránt leolvasható az x , illetve y képsíktengelyektől mért távolságokként. Ugyanakkor az is látható, hogy az A és B pontok első képsíktól mért távolság-különbsége lemérhető a második, ill. harmadik képen. Ha a képsíkokat egyesítjük, akkor a képsíktengelyek megrajzolása helyett a rájuk merőleges rendezőirányt rajzoljuk meg. (3.2. ábra)

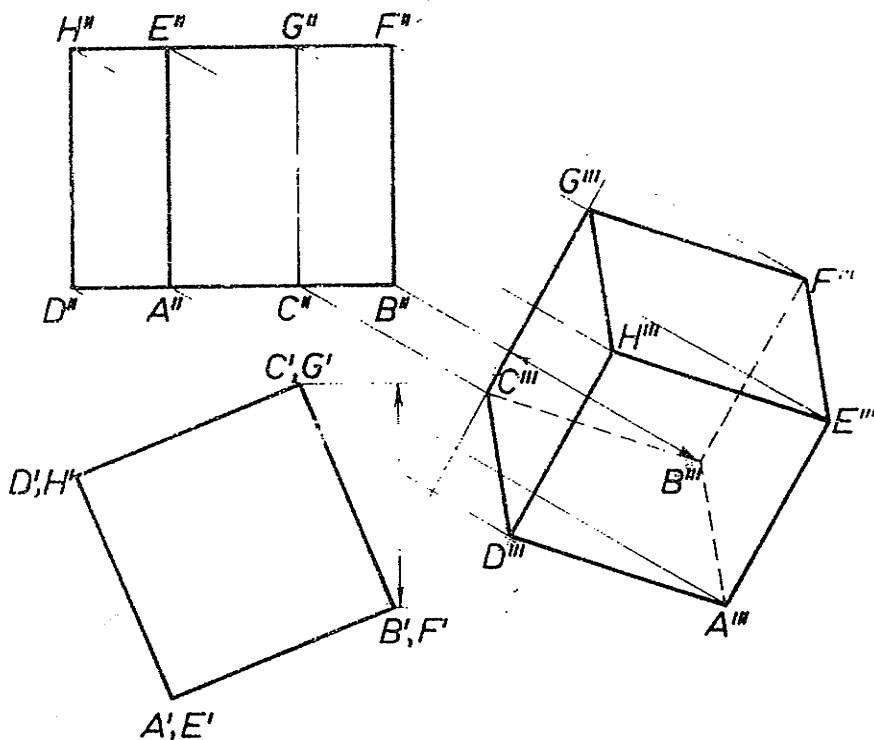


3.2. ábra.

Az AB egyenes harmadik képét úgy kapjuk meg, hogy a B pont új rendezőjén tetszőlegesen kijelöljük a harmadik képét B''' -t. A''' -t az első képsíktávolság-különbséggel jelöljük ki.

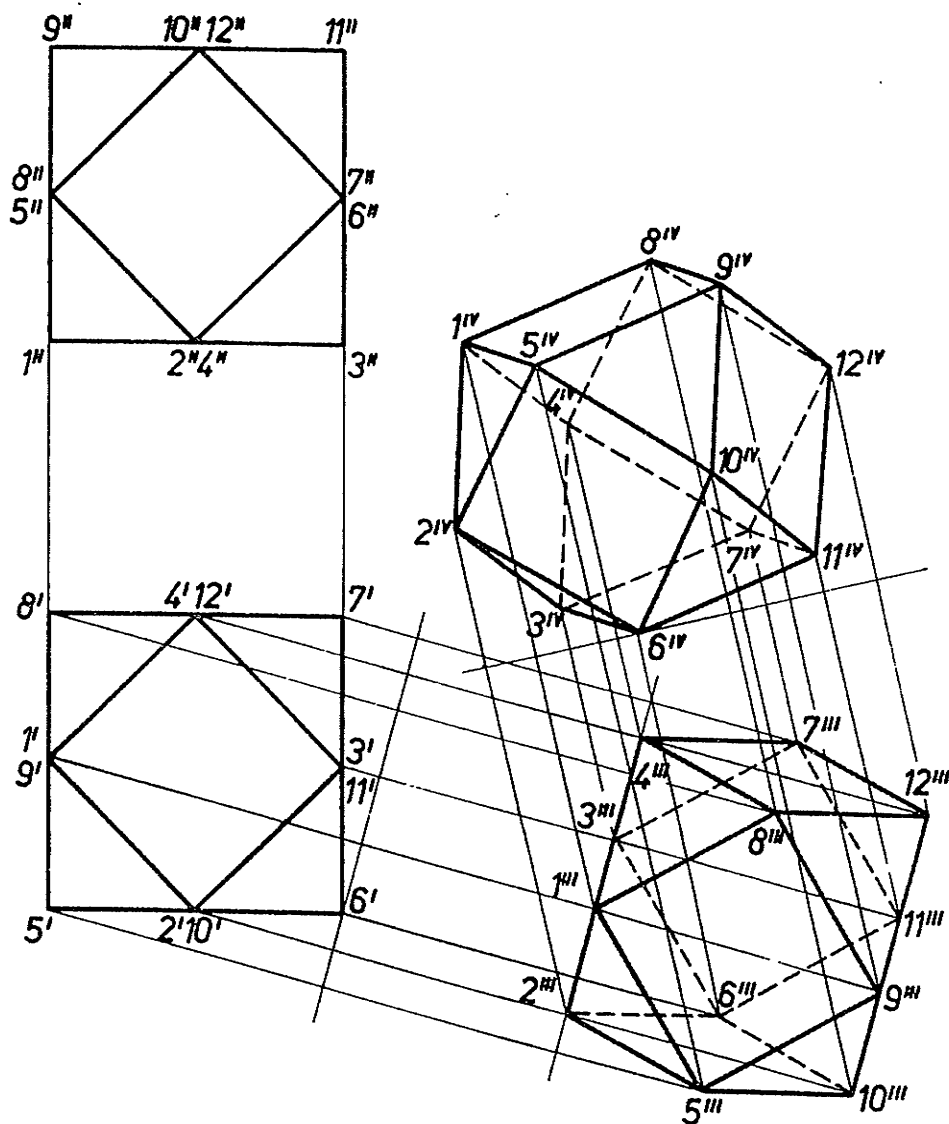
Ezt az eljárást, amellyel új képsíkrendszerre térünk át, képsík-transzformációnak nevezzük. A második képsíkra merőleges új képsíkot is bevezethetünk, sőt egy megszerkesztett harmadik képhez rendezett negyedik kép is az eddigiekhez hasonlóan szerkeszthető meg.

A 3.3. ábrán ábrázolt kockáról szemléletes képet kaphatunk, ha a második képsíkra merőleges új képsíkot vezetünk be. A C pont harmadik képét vettük fel az új rendezőirányon tetszőlegesen, a többi pontot a második képsíktól mért távolság-különbségekkel határoztuk meg. A C' ponton át meghúzott vízszintes egyenestől mértük az első képen a képsíktávolság-különbségeket, míg a harmadik képen a C''' ponton át az új rendezőkre merőleges egyenestől mértük a megfelelő távolságokat. Ezeket az egyeneseket képsíktengelyeknek is tekinthetjük.



3.3. ábra.

A 3.4. ábrán egy összetett síklapú test első és második képén igen speciális vetületeit adtuk meg. Két egymás utáni transzformációval a test képies képéhez jutunk. A transzformáció lépései, a képek megrajzolása és ezek láthatóságának eldöntése az előző példa megoldási menetével azonos. (A láthatóság feltüntetésénél jól felhasználhatók a fedőpontok.)



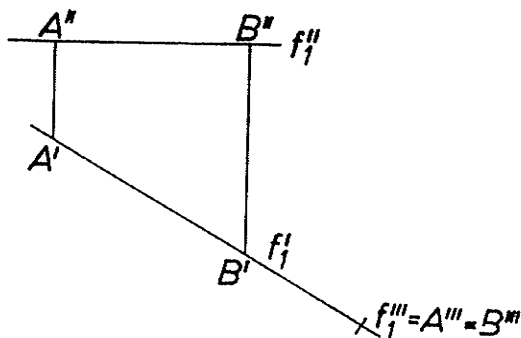
3.4. ábra.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogyan lehet az új képsíkot úgy megválasztani, hogy az egyenesek, illetve síkok az új képsíkhöz viszonyítva speciálisabb helyzetűek legyenek.

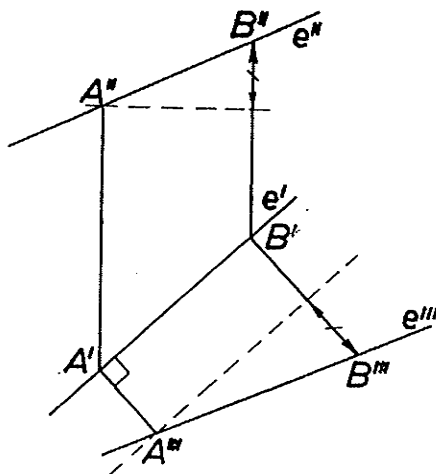
Egyenes transzformációja

A 3.5. ábrán egy általános helyzetű e egyenest ábrázoltunk, és az egyenes első vetítősíkjával párhuzamos harmadik képsíkot vettük fel. Ekkor a harmadik képsíknak az első képsíkkal való metszésvonala e' -vel párhuzamos, tehát az új rendezőirány e' -re merőleges.

Az e egyenesen felvett A és B pontok transzformációjával adódik a harmadik kép. (Az AB szakasz a harmadik képen valódi nagyságban látszik.)



3.5. ábra.



3.5. ábra.

A 3.6. ábrán egy f_1 első fővonalat ábrázoltunk és felvettünk egy új képsíkot az f_1 -re merőlegesen. Az f_1 -re merőleges sík nyilván az első képsíkra is merőleges és az első képsíkkal alkotott metszésvonala f_1' -re merőleges,

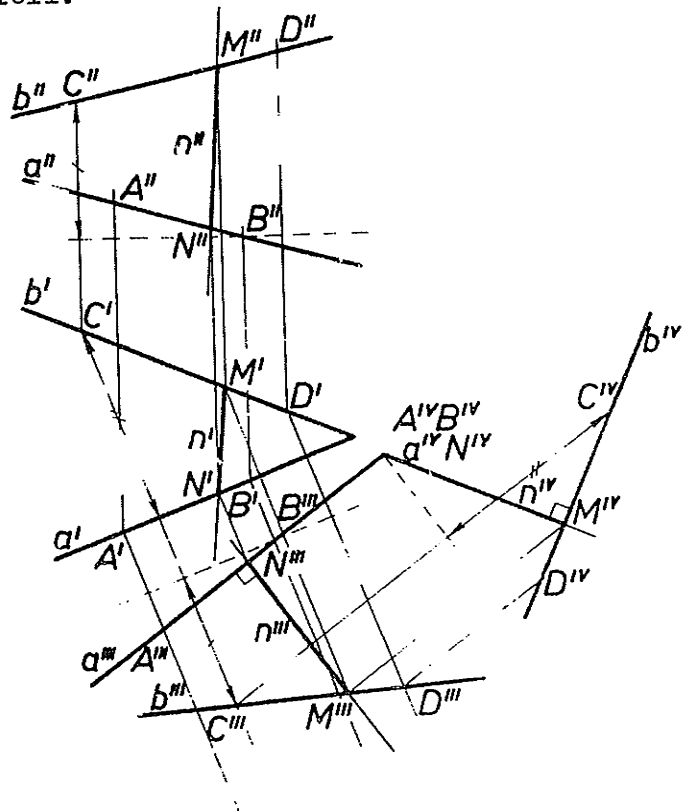
tehát az új rendezőirány f_1' -vel párhuzamos. Az egyenes valamennyi pontjának harmadik képe ugyanaz a pont.

Egyetlen transzformációval általános helyzetű egyenes vetítőegyenessé nem transzformálható, de két lépésben már lehetséges; azaz először az általános helyzetű egyenest fővonallá transzformáljuk, majd a kapott fővonalat egy további transzformációval vetítőegyenessé transzformáljuk.

erre mutatunk példát a következő feladatban:

3.7. ábra). Szerkesszük meg az a és b kitérő helyzetű egyenesek normál transzverzálisát (3.7. ábra).

Az a egyenest vetítőegyenessé transzformáltuk. A IV. képen az n normál transzverzális vetülete a b^{IV} -re merőleges, mivel az n a-ra is merőleges, és így párhuzamos a negyedik képsíkkal. Ugyanezért a harmadik képen a^{III} -re merőleges n^{III} . Az n egyenesnek a -val, illetve b -vel közös pontjait N , illetve M jelöli.

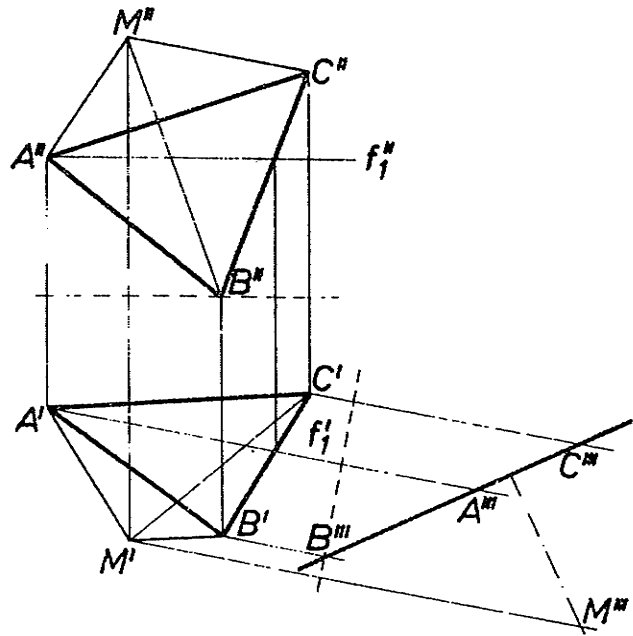


3.7. ábra.

A sík transzformációja

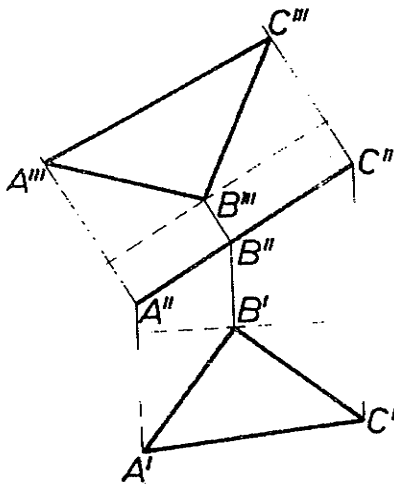
Egy sík biztosan vetítősík, ha tartalmaz vetítőegyenest ezért egy általános helyzetű síkot így transzformálunk vetítősíkká, ha egyik főegyenest vetítőegyenessé transzformáljuk úgy, mint a 3.6. ábrán.

A 3.8. ábrán felvett ABCM három-
oldalú gúla ABC
síkját transzfor-
máljuk vetítősíkká.
Az ABC síkban fel-
vett első fővonal
első képe adja meg
a transzformáció
irányát. A harmadik
képen leolvasható
az M pont és az
ABC sík távolsága.



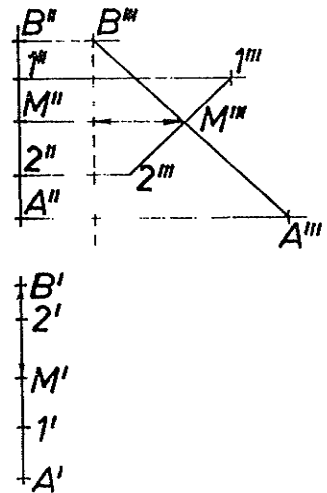
3.8. ábra.

A 3.9. ábrán a második ve-
títősíkban levő ABC háromszög
síkjával párhuzamosan vettük
fel az új képsíkot. Ekkor a har-
madik képen az ABC háromszög
valódi nagyságban látszik.



3.9. ábra

A 3.10. ábrán bemutatjuk, hogyan
lehet két profil egyenes metszéspont-
ját megszerkeszteni a transzformáció
eljárásával. Az 1^o és az 2^o profil
egyenesei metszéspontja M.

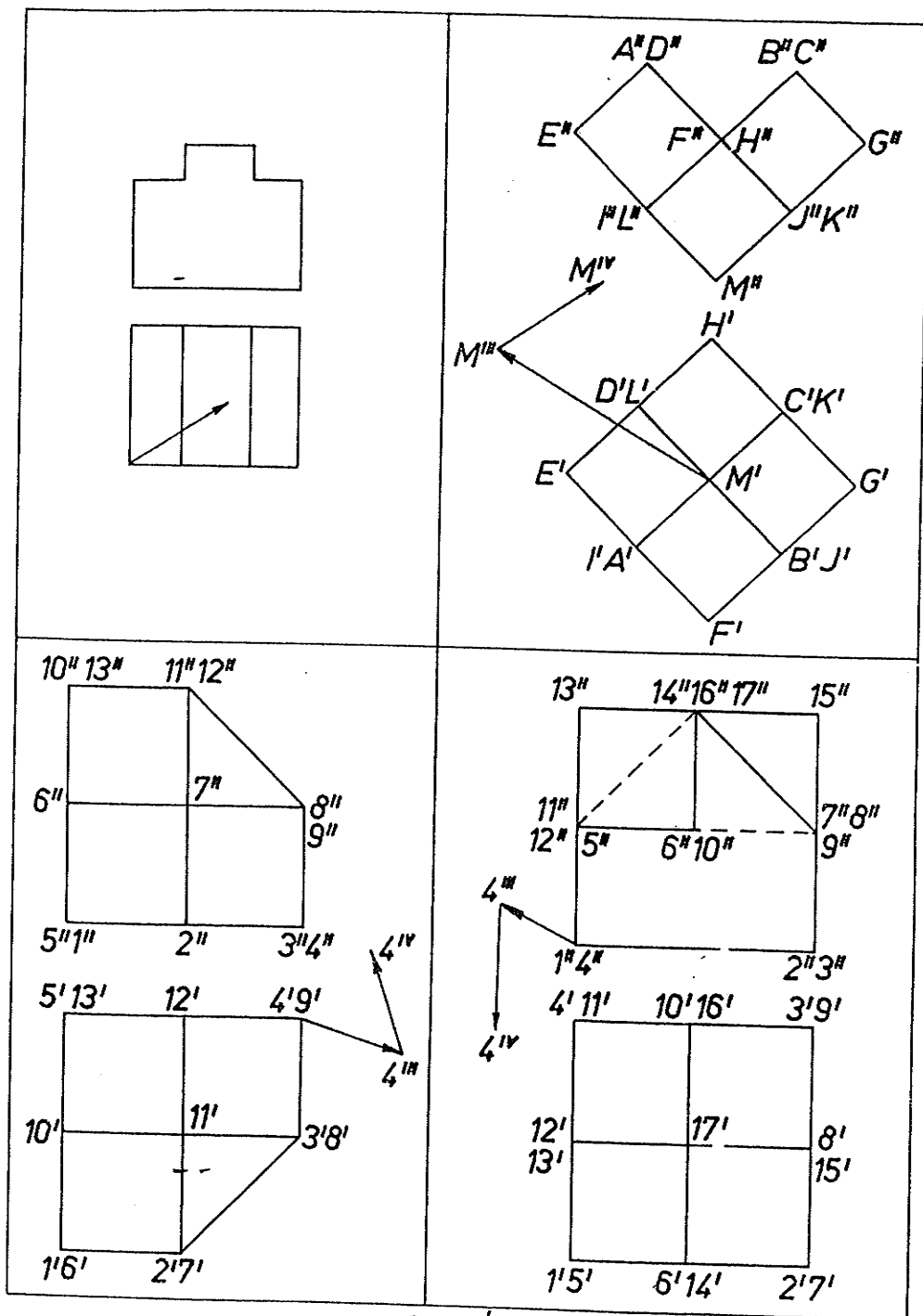


3.10. ábra.

A transzformáció eljárásának gyakorlására szerkesszük meg a 3.11. ábrán szereplő feladatokat. A harmadik, illetve negyedik képek megszerkesztéséhez a vázlatokon megadtuk a transzformációhoz az új rendezőirányokat. Ezeket a feladatokat is A/4 méretű lapon dolgozzuk ki.

Szerkesszük meg továbbá a 3.8. ábrán megadott tetraéder ABC és MBC síkjainak hajlásszögét a transzformáció eljárásával.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 69-71. pontok.



3. 11. ábra.

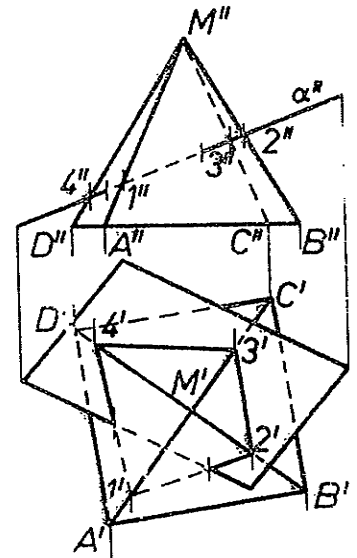
4. POLIÉDEREK (SIKLAPOKKAL HATÁROLT TESTEK)

SIKMETSZETE

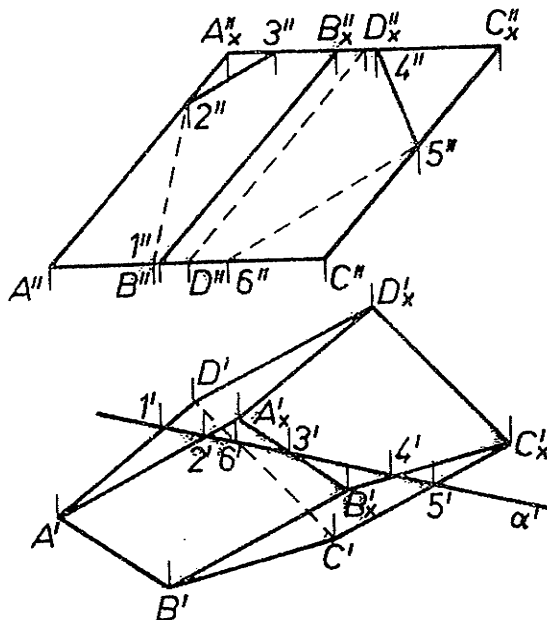
Egy poliéder (pl. hasáb, gúla, téglatest, kocka, paralelepipedon) síkmetszete egy olyan sokszög, amelynek oldalai a poliéder oldallapjai és a metszősík metszészvonala-ként jönnek létre. E sokszög csúcspontjai a poliéder éleinek a metszősíkkal való metszéspontjai.

A síkmetszet akkor szerkeszthető a legegyszerűbben, ha a metszősík vetítő sík.

A 4.1. ábrán egy szabályos négyoldalú gúlát metszünk el az α második vetítő síkban levő paralelogramma lemezzel. A gúla oldalélei az α síkot az 1, 2, 3, 4 pontokban metszik, de a láthatóság feltüntetésénél a kimetszett négyszögnek csak egy része jön tekintetbe.



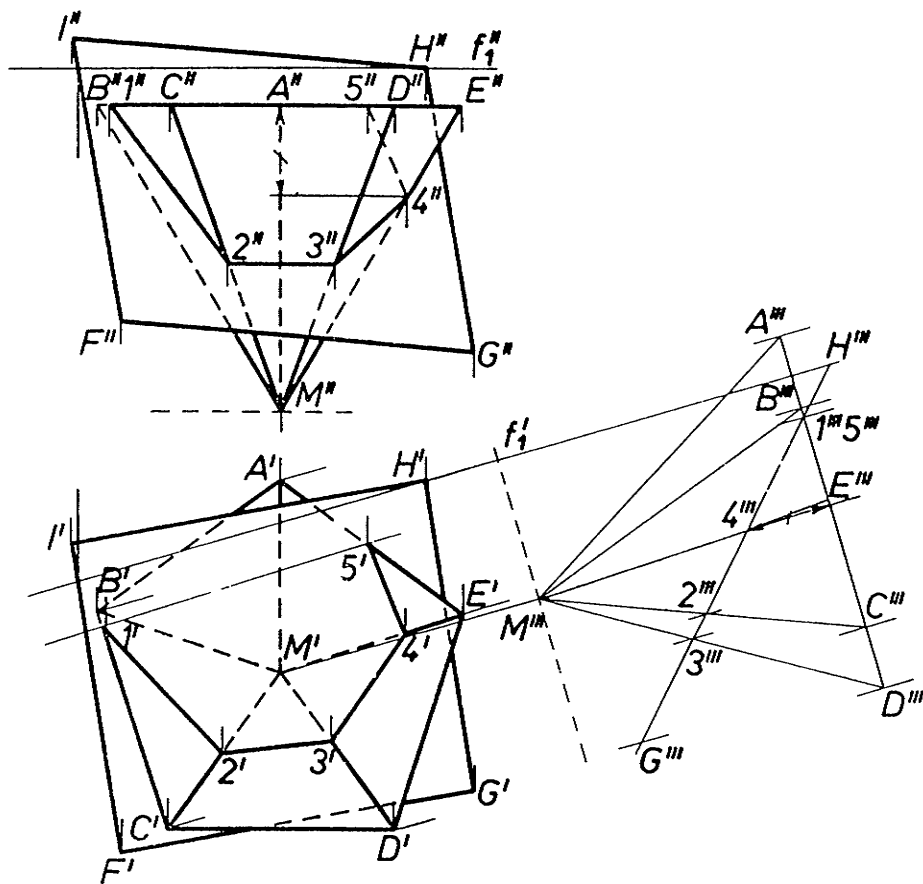
4.1. ábra.



4.2. ábra.

A 4.2. ábrán az ABCD alapú négyoldalú ferdehasábnak az α első vetítő síkkal képezzük a metszetét. A kimetszett hatszög 1, 6 oldala a hasáb alapsíkjában, 3, 4 oldala pedig a fedőlap síkjában van. A láthatóságot úgy tüntettük fel, mintha a metszet-sokszög a hasábra rá lenne rajzolva.

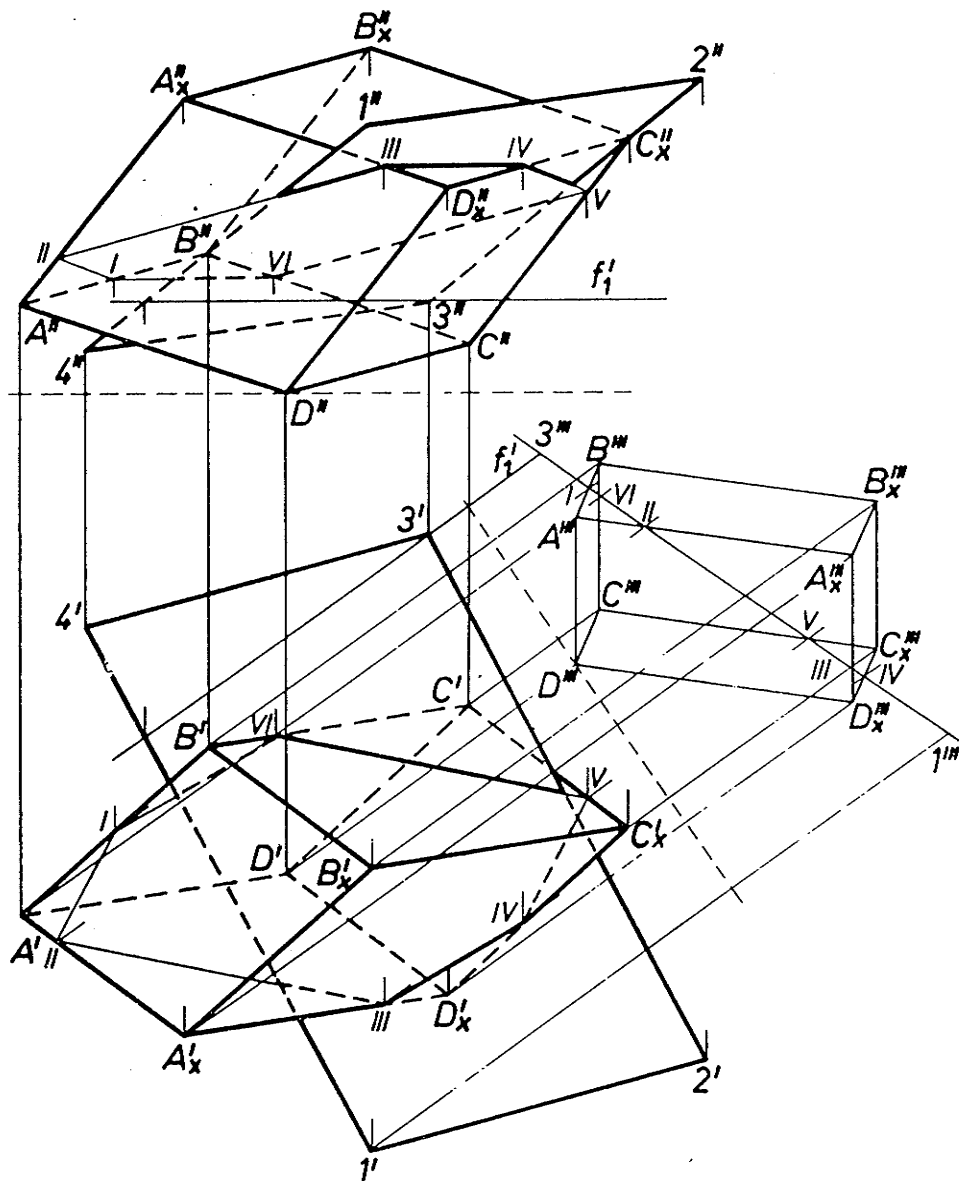
Ha egy poliédert általános helyzetű síkban levő határolt síklemezzel metszünk el, akkor célszerű itt is először a teljes síkkal való metszetet megszerkeszteni, és csak utána megvizsgálni, hogy ennek mely része van a síklemezen. Ezt tesszük a 4.3. ábra megszerkesztésénél is: a szabályos öttoldalú MABCDE gúla és az FGHI paralelogramma metszetét szerkesztjük meg. A metszet könnyebb megszerkesztése céljából az FGHI síkot vetítősíkká transzformáljuk; a harmadik képsíkot az első képsíkra merőlegesen vesszük fel, ennek megfelelően az új rendezőirányt a paralelogramma síkjának f_1 első fővonala adja meg. A harmadik képen a metszősík képe egyetlen egyenes, tehát a gúla éleivel alkotott metszéspontok (1-5) közvetlenül leolvashatók a harmadik képen és elvben könnyen (ti. rendezők meghúzásával) az első majd a második képre átvihetők. Vannak azonban olyan élek, mint pl. az ME él, amelyen a 4 pont első képe ezzel a módszerrel nem határozható meg. Itt a második képet határozzuk



4.3. ábra.

meg a transzformáció eljárásával, ugyanis a 4.E pontok első képsíktól mért távolságkülönbsége mind a harmadik, mind pedig a második képen ugyanakkora. A 4. pont második képéből az első kép már rendezővel kijelölhető. A láthatóságot úgy tüntetjük fel, hogy a gúla ABCDE lapja le van véve és a lemezről készített gúlába a felülnézetben belelátunk.

A 4.4. ábrán egy paralelepipedon és egy paralelogramma lemez metszetét szerkesztjük meg. A paralelogramma sík-

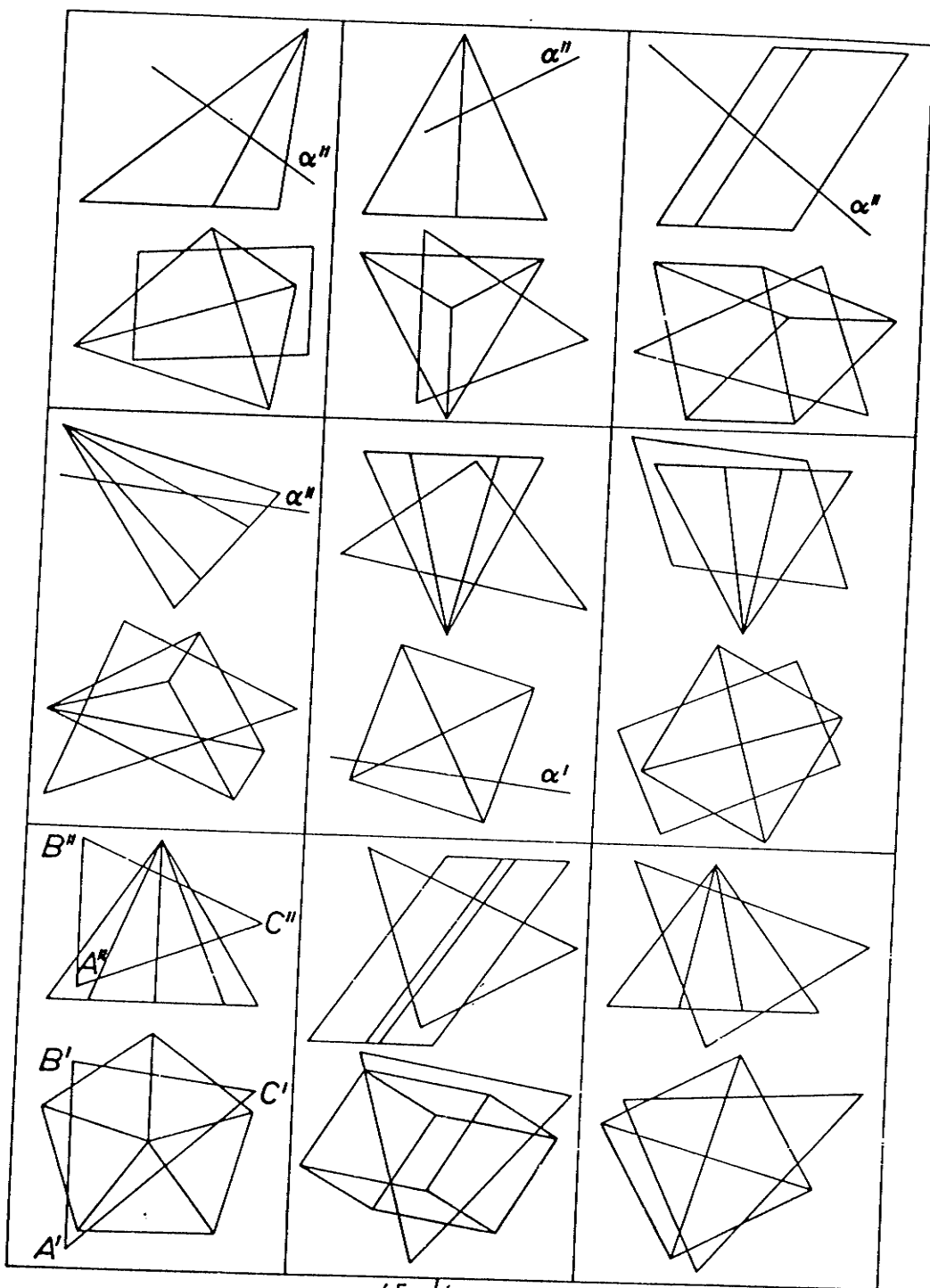


4.4. ábra.

jának f_1 első fővonalát felvesszük és az első képpel rendezett helyzetű harmadik képet az f_1' -vel párhuzamos rendezőiránnyal határozzuk meg. Az 1234 paralelogramma síkja harmadik vetítősík, tehát a harmadik képen a paralelepipedonból kimetszett hatszög csúcsai (I-VI) közvetlenül adódnak. E csúcspontokat az első majd második képen kijelölve megrajzoljuk a hatszög mindkét képét. Látható, hogy a hatszög a 23 és 14 oldalakat metszi, e metszéspontok első és második képeinek — pontos szerkesztés esetén — közös rendezőkön kell lenni. Ennek ellenőrzése után tüntetjük fel a láthatóságot.

Gyakorlás: Nagyítsuk fel A/4 méretre a 4.5. ábrán szereplő feladatvázlatokat és szerkesszük meg az egyes poliédereknek a megadott síkokkal való metszetét, majd tüntessük fel a láthatósági viszonyokat.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 85-89. pontok.



4.5. abra.

5. POLIÉDEREK ÁTHATÁSA

Két poliéder áthatása úgy jön létre, hogy az egyik test lapjait metszik a másik test lapjai. Feladatunk most az, hogy eljárást találjunk két metsződő poliéder metszészonalának meghatározására. Két poliéderfelület közös része síkidomok metszészonalaiból, tehát egymáshoz csatlakozó egyenesszakaszokból áll, ez az ún. áthatási poligon.

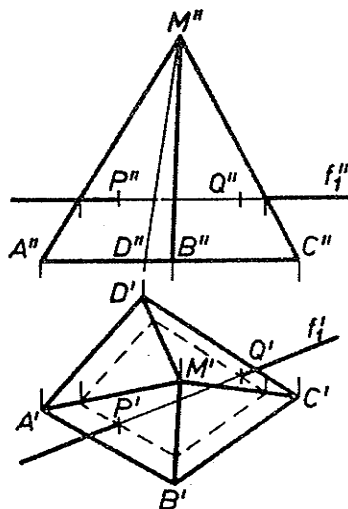
E poligon csúcsai általában nincsenek egy síkban, hanem egy (esetleg több) térbeli sokszöget alkotnak. Ennek a sokszögnek a csúcsai ott vannak, ahol az egyik poliéderél a másik poliéderbe metsz. Két poliéder áthatásának megszerkesztésénél először megszerkesztjük az egyik poliéder éleinek a másik lapjaival képezett metszéspontjait, majd a másik poliéder éleinek az első lapjaival alkotott metszéspontjait. E pontok képezik az áthatási poligon (vagy poligonok) csúcspontjait. E pontokat megfelelő sorrendben összekötve az áthatási poligonhoz jutunk.

Két csúcspont összekötő szakasza csakis akkor tartozhat az áthatási poligonhoz, ha egyik poliéder belsejében sem halad. Tehát két áthatási csúcspontot akkor köt össze az áthatási poligon egy éle, ha a két pont egyidejűleg mindkét poliédernek ugyanazon lapján van.

Az elvi részek összefoglalása után most lássunk néhány előkészítő feladatot.

Az 5.1. ábrán az első képsíkkal párhuzamos síkon álló MABCD négyoldalú gúla és az f_1 első fővonal metszéspontjait szerkesztjük meg. Az f_1 fővonalra a gúla alapsíkjával párhuzamos síkot fektetünk, és az AM

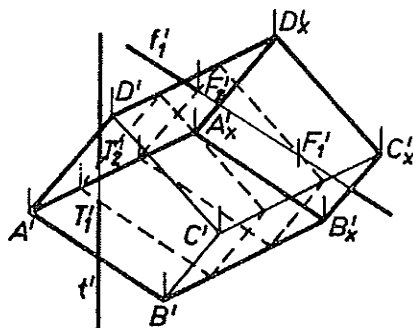
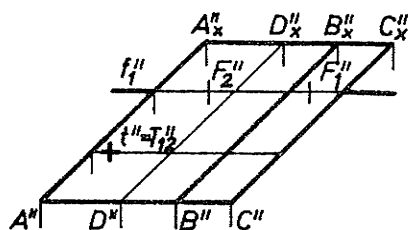
élel alkotott metszéspont első képének kijelölése után megszerkesztjük a gúlából kimetszett négyszöget, amelynek oldalai a gúla alapéleivel párhuzamosak (a gúla ABCD alaplapja és a kimetszett négyszög hasonlóak). A kimetszett négyszög az f_1 egyenesen kijelöli a P és Q metszéspontokat.



5.1. ábra.

Az ABCD alapú ferdehasáb az első képsíkkal párhuzamos síkon áll. (5.2. ábra)

Megszerkesztjük a t második vetítőegyenes és az f_1 első fővonal metszéspontjait az említett hasábbal. Mindkét egyenesre egy-egy első képsíkkal párhuzamos síkot fektetünk, ezek az AA_x élen kijelölnek egy-egy pontot. Ezekből a pontokból kiindulva és az alapélekkel rendre párhuzamosot húzva, az alaplappal egybevágó négyszögeket kapunk. Az egyik négyszög a t egyenesen jelöli ki a T_1 , T_2 metszéspontokat, míg a másik négyszög az f_1 egyenesen levő F_1 , F_2 metszéspontokat tűzi ki.

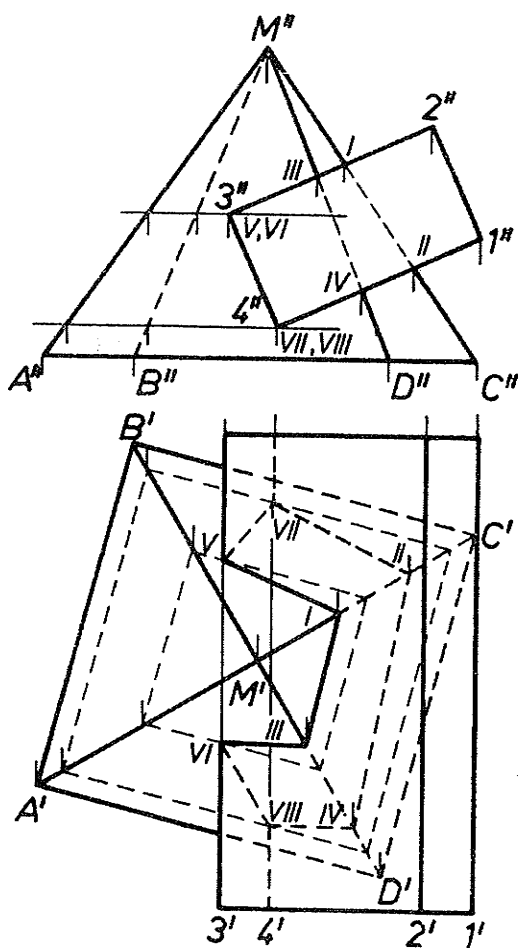


5.2. ábra.

Az 5.3. ábrán egy első képsíkkal párhuzamos síkon álló szabályos négyoldalú MABCD gúlát és egy második vetítőegyenes élekkel meghatározott négyoldalú hasábot ábrázoltunk (a hasáb oldalélei az 1, 2, 3, 4 egyenesek). Ebben a helyzetben a két poliéder áthatása jól áttekinthető, mivel közvetlenül adódnak a gúla éleinek a hasáb lapjaival való metszéspontjai. A hasáb éleinek a gúla lapjaival alkotott metszéspontjait pedig az imént tárgyalt előkészítő feladatok mintájára szerkesztjük meg. A metszéspontokat római számokkal jelöltük (I-VIII) és egy táblázatban feljegyeztük, hogy melyik pont mely lapokon van. Nyilvánvaló, hogy a gúla MC élén levő I pont az MC élet tartalmazó BCM és CDM lapokon van; ugyanúgy a hasáb 3 élén levő V. áthatási pont a hasáb 2,3 és 3,4 lapjain van.

Az áthatási poligon meghatározásában az I pontból indultunk el és olyan pontot kerestünk a táblázatban, amely szintén rajta van a BCM és 2,3 lapokon. Ilyen pontnak adódott az V. pont. Tovább csak úgy juthatunk az áthatási poligonon, ha most BCM és 3,4 lapokon levő pontot keresünk. Ilyen a VII. pont. A VII. ponttól a BCM és 1,4 lapokon levő pontba tudunk tovább menni, ilyen a II. pont. Innen CDM és 1,4 lapokon levő pontba megyünk tovább, vagyis a IV pontba. Ez az eljárás folytatható, míg a kiindulási pontba visszajutunk. Ha valamennyi áthatási pontot felhasználunk, akkor egyetlen zárt térbeli sokszög az áthatási poligon.

Ha maradnak még pontok, akkor ez azt jelenti, hogy az áthatás két (esetleg több) különálló poligonból áll, tehát



	Gúla	Hasáb
I	BCM CDM	23
II	BCM CDM	14
III	ADM CDM	23
IV	ADM CDM	14
V	BCM	23 34
VI	ADM	23 34
VII	BCM	14 34
VIII	ADM	14 34

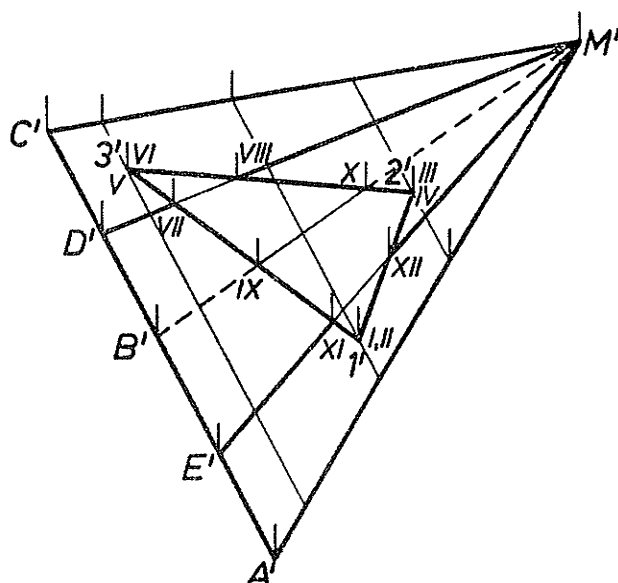
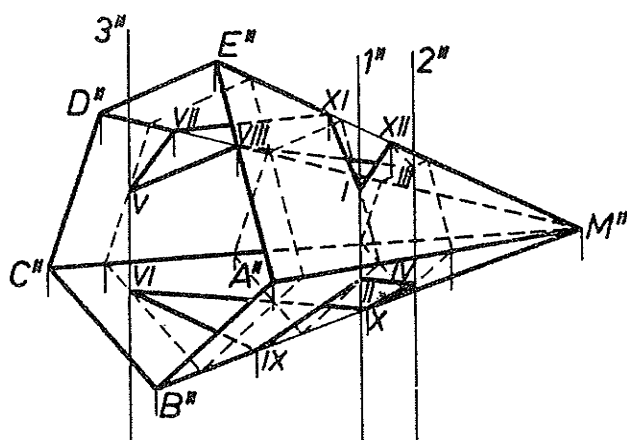
I - V - VII - II - IV - VIII - VI - III - I

53. ábra.

a maradék pontok összekötését az ismertetett eljárás szerint végezhetjük. (Erre mutat példát az 5.4. ábra.) Az 5.3. ábrán az áthatási poligon megrajzolása után feltűntettük a láthatóságot. (A fedőpontok itt is alkalmazhatók.) Az áthatási poligonnak csak azok az oldalai láthatók, melyek mindkét testnek látható lapján vannak.

Az 5.4. ábrán egy ABCDE ötszög alapú gúlát ábrázoltunk, amelynek alaplappja első vetítősíkban van, hatodik csúcsát M-mel jelöltük. Szerepel az ábrán még egy háromoldalú hasáb, amelynek oldalélei 1, 2, 3 első vetítőegyenese.

Először a hasáb élein levő metszéspontokat határozzuk meg, lényegében azzal a módszerrel, amelyet az 5.1., illetve az 5.2. ábrán bemutatott előkészítő feladatokban már megismertünk. Az 1 élen át az ABCDE első vetítősíkjával párhuzamos síkot felvéve, ez a sík a gúlából az alapötszög-



	Gúla	Hasáb
I	AEM	12 13
II	ABM	12 13
III	DEM	12 23
IV	ABM	12 23
V	DCM	13 23
VI	BCM	13 23
VII	DCM DEM	13
VIII	DCM DEM	23
IX	ABM BCM	13
X	ABM BCM	23
XI	AEM DEM	13
XII	AEM DEM	12

I-XII-III-VIII-V-VII-XI-I

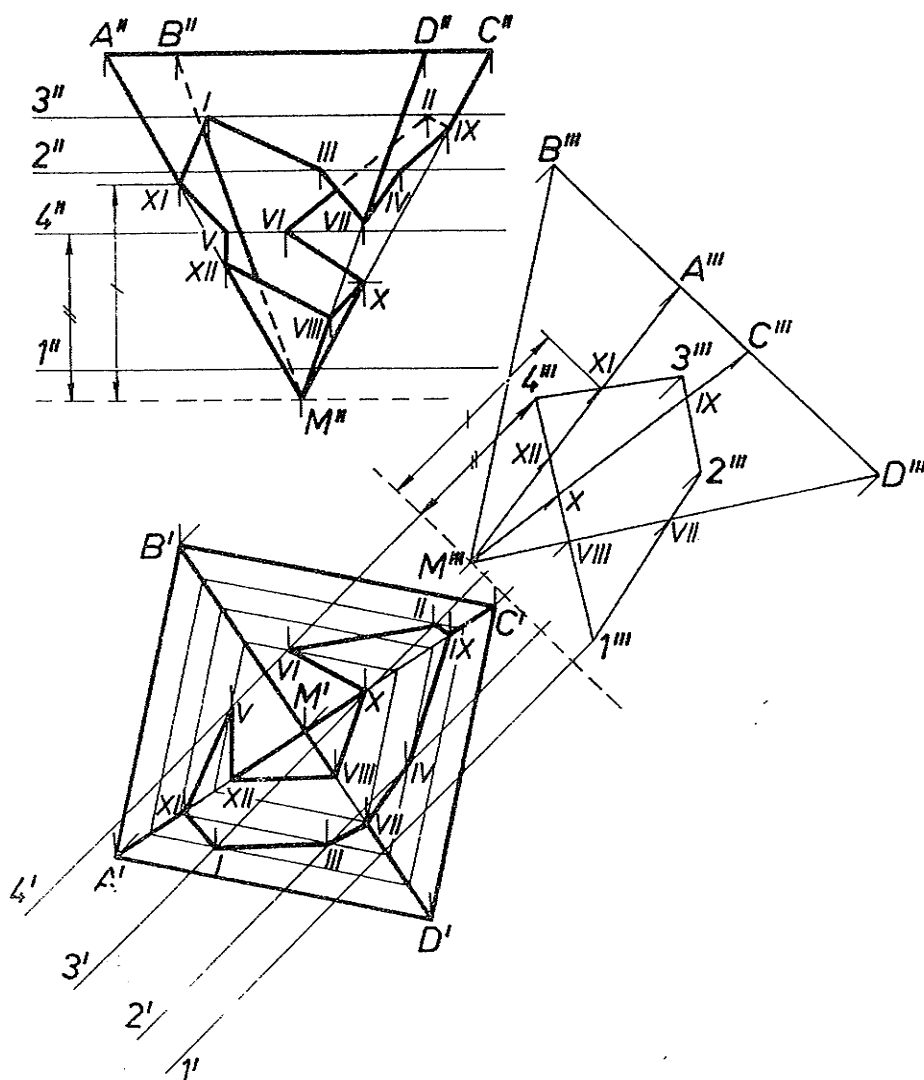
II-IV-X-VI-IX-II

5.4. ábra.

höz hasonló ötszöget metsz ki. A kimetszett ötszög és az 1 él közös I és II pontjai az áthatási sokszög csúcsait adja. Teljesen hasonlóan szerkeszthetők meg a 2. és 3. élen levő III, IV, illetve V, VI metszéspontok. A gúla éleinek a hasáb lapjaival alkotott metszéspontjait az első képen vetítősík és egyenes metszéspontjaiként közvetlenül kapjuk (VII-XII pontok). Az összekötéshez az előző feladatban ismertetett módon elkészítjük a táblázatot. Az áthatási pontok összekötésénél két térbeli sokszöget kapunk. Ennek az az oka, hogy a hasáb "átfúrja" a gúlát, az egyik sokszög az átfúrásnál a bemenetnek, a másik a kimenetnek felel meg. A láthatóságot azon feltételekkel tüntettük fel,

hogy a hasábot és a lemezből készült gúla alaplapját az áthatás megszerkesztése után eltávolítottuk.

Az 5.5. ábrán az ABCD alapú szabályos négyoldalú gúlának és az 1, 2, 3, 4 első fővonalakkal megadott hasábnak az áthatását szerkesztettük meg. (A gúla ötödik csúcsa M az alaplap síkja alatt van.) A feladat könnyebb áttekinthetősége céljából a hasáb éleit vetítőegyenesekké transzformáljuk. A harmadik képen a gúla és hasáb áthatása olyan helyzetben mutatkozik, mint az 5.3. ábra feladatában. A hasábéleken levő metszéspontokat az 5.1. ábrán bemutatott módszerrel határozzuk meg (I-VI pontok). A gúla élein levő



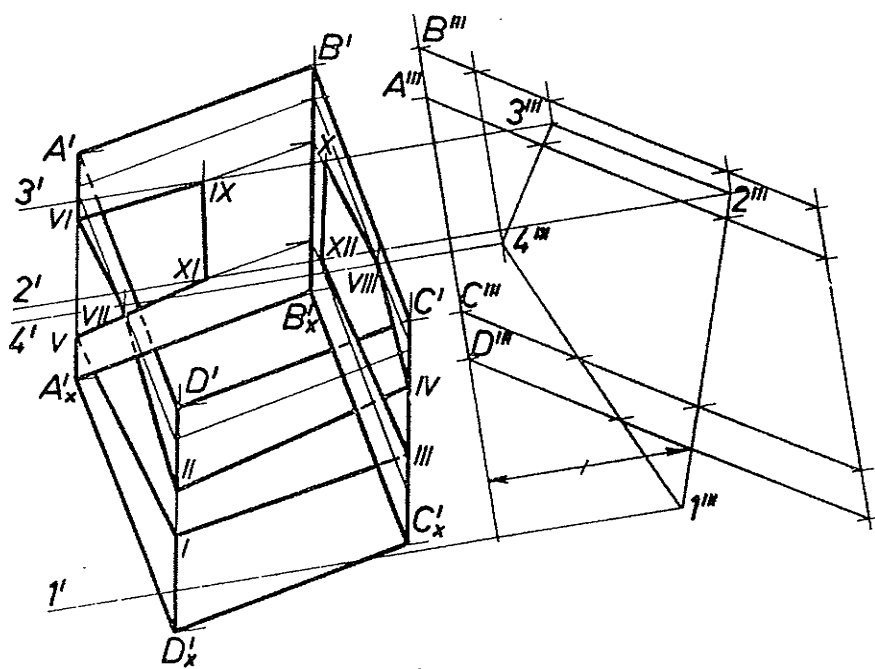
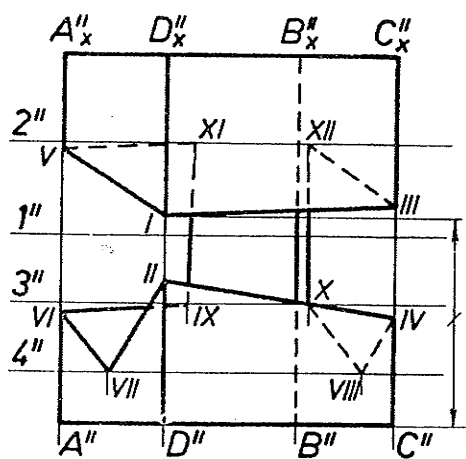
5.5. ábra.

metszéspontok a harmadik képen közvetlenül adódnak, azonban az első, majd a második képen való kijelölésük nem mindig lehetséges csak a rendezők segítségével. Példánkban az MA, illetve MC éleken levő metszéspontok első képének kijelölése az ún. „hegyes metszés” miatt igen pontatlan lenne. Ezt úgy tudjuk kiküszöbölni, hogy a transzformáció eljárásának alkalmazásával az MA és MC élen adódó pontok második képét jelöljük ki előbb, majd ezután az első képüket. Az ábrán egy vesszővel megjelölt nyíl mutatja a XI. pont második képének transzformációs kijelölését. A megszerkesztett pontok összekötését a korábban megismert eljárás szerint végezzük el, a láthatóság feltüntetésénél pedig a hasábot és a lemezből készült gúla ABCD lapját eltávolítjuk.

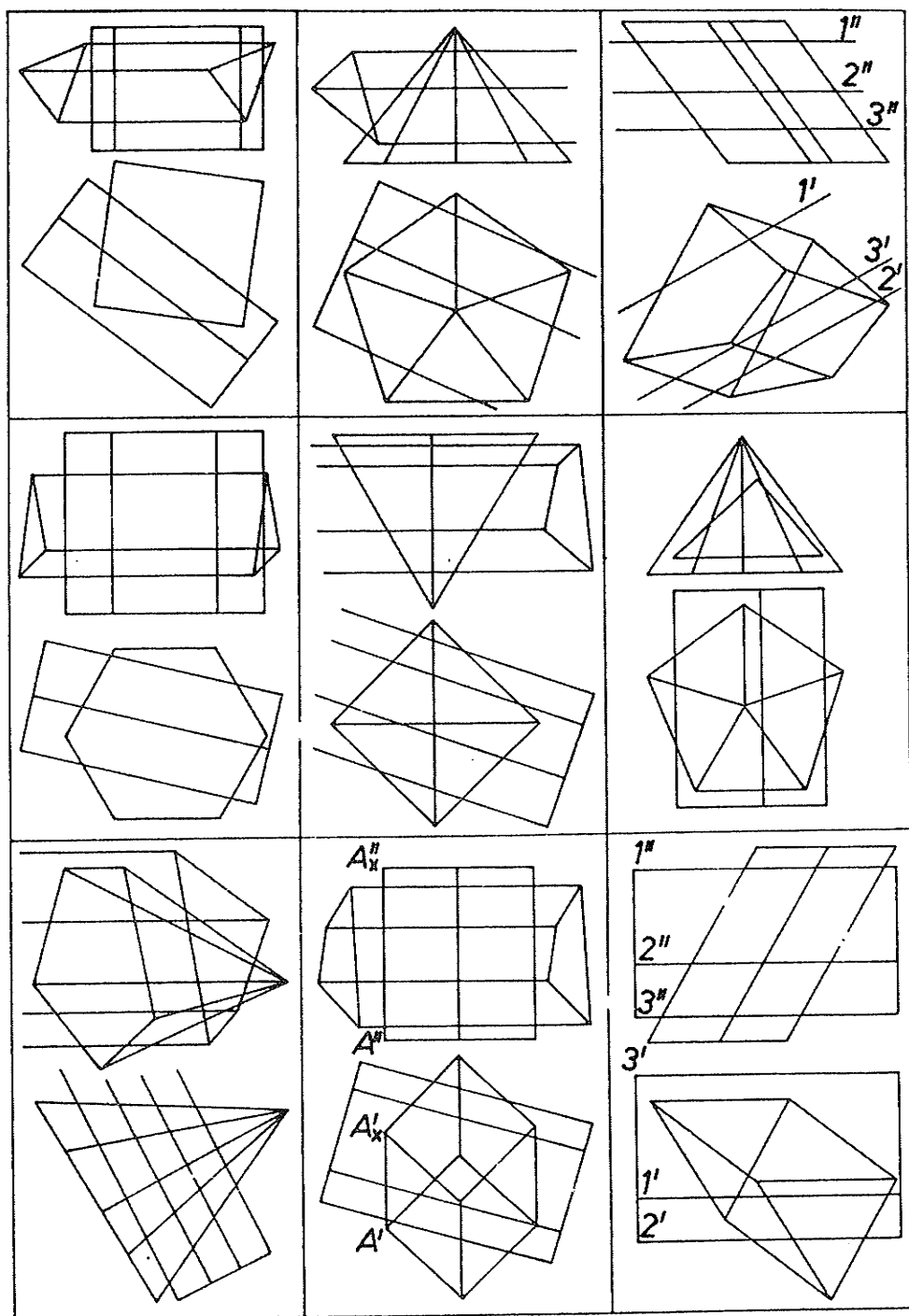
Az 5.6. ábrán két hasáb áthatását szerkesztettük meg. Az egyik hasáb alaplapja az ABCD négyszög és oldalélei profil egyenesek, amelyeket az $A_x B_x C_x D_x$ fedőlappal egyértelműen meghatároztunk. A másik hasáb oldalegyeneseivel van megadva, ezek az 1, 2, 3, 4 első főegyenese. Feladatunk megoldását most is azzal kezdjük, hogy a főegyenes élű hasábot ún. vetítőhasábbá transzformáljuk. A másik hasáb harmadik képét is elkészítjük. Az AA_x , CC_x és DD_x éleken levő metszéspontok a harmadik képről az elsőre rendezővel kijelölhetők, de második képük meghatározásához ismét a transzformáció eljárását használjuk. Az ábrán az I pont kijelöléséhez felhasznált magasságkülönbséget egy vesszővel jelölt nyíllal szemléltettük. A 2,3 és 4 éleken levő metszéspontokat a harmadik kép felhasználásával, az 5.2. ábrán bemutatott módszerrel szerkesztettük meg. Második képük rendezővel kijelölhető. Az áthatási poligont a már ismert módon határozzuk meg, majd feltüntetjük a láthatóságot azon feltetelek mellett, hogy az álló hasáb lemezből van, fedőlapját és a fekvő hasábot az általa kimetszett résszel együtt eltávolítjuk.

Gyakorlásul szerkesszük meg az 5.7. ábrán megadott áthatási feladatokat. Mindegyik feladatot A/4 méretű lapra felnagyítva szerkesszük meg.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 91-94. pontok.



5.6. ábra.



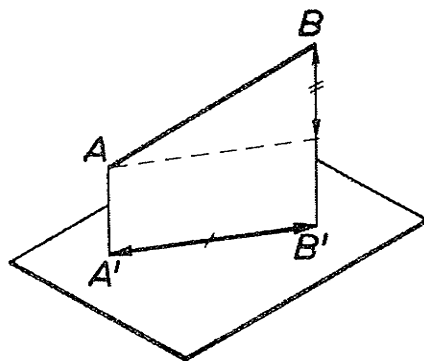
5.7 ábra.

6. MÉRETES SZERKESZTÉSEK. TÁVOLSÁGOK ÉS HAJLÁSSZÖGEK SZERKESZTÉSE. MÉRETES ADATAIVAL MEGADOTT TESTEK ÁBRÁZOLÁSA

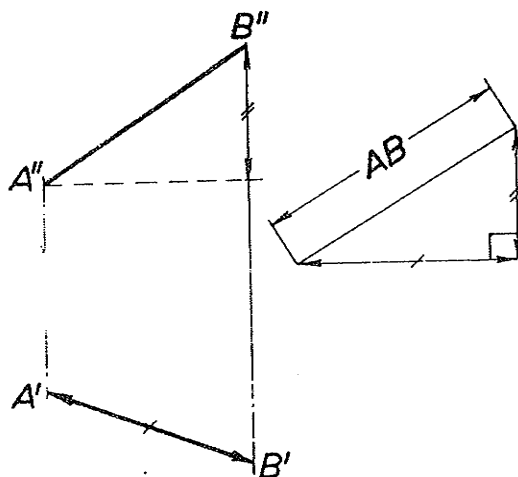
A) Két pont távolsága. Adott félegyenesre adott hosszúságú szakasz felmérése

Két pont által meghatározott egyenes ábrázolásánál látuk, hogy a két pont egymáshoz viszonyított helyzetének megállapításánál jelentős szerepe van a pontok képsíktól mért távolság-különbségeinek.

A 6.1. ábrából látható, hogy az AB szakasz hosszát meg tudjuk határozni egy olyan derékszögű háromszögből, amelynek egyik befogója a szakasz egyik képe, másik befogója pedig a szakasz két végpontjának a képsíktól mért távolság-különbsége.



6.1. ábra.



6.2. ábra.

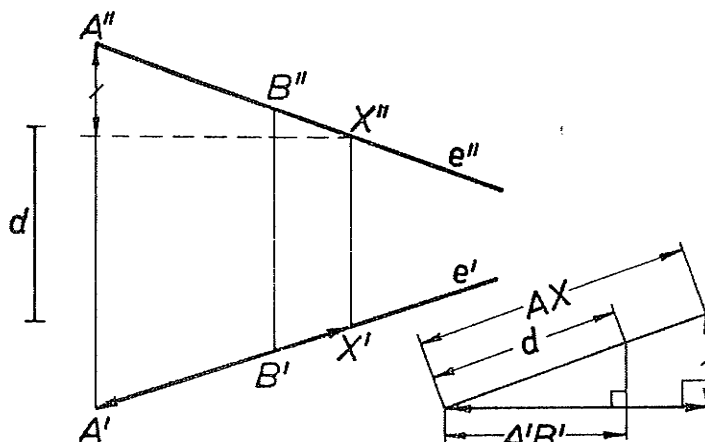
Ha az $A'B'$ első képből indulunk ki, akkor az A és B pontok magasság-különbsége a második képen olvasható le, és a két szakaszból szerkesztett derékszögű háromszög átfogója megadja az AB szakasz hosszát. (6.2. ábra)

Már a 2.3., 2.5. és 2.6. ábrákkal kapcsolatosan említettük, hogy a képsíkkal párhuzamos egyenesen levő szakasz hossza a megfelelő képen valódi nagyságában látszik. (Profil egyenesen levő szakasz hosszát ugyanúgy szerkesztjük meg, mint az általános helyzetű egyenesen levő szakaszhoz, csupán arra kell ügyelni, hogy profil egyenesen levő sza-

kasznál a két végpont magasságkülönbsége megegyezik a szakasz másik képhosszával.)

Ha adott egy A pontból kiinduló e félegyenes és egy adott d szakasz, akkor a félegyenesen meg tudjuk határozni azt a B pontot, amely az A ponttól d távolságra van.

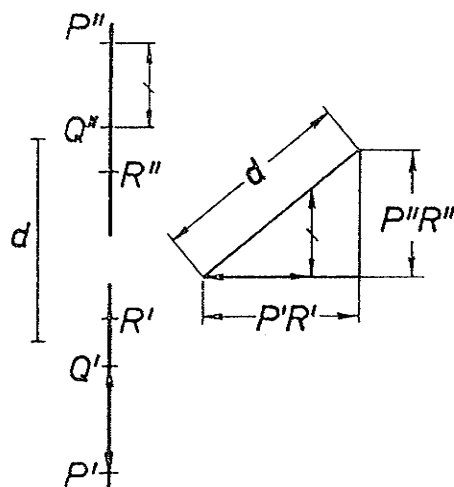
Szerkesztésünket arra az észrevételre alapoztuk, hogy egy egyenesen levő bármely szakasz hosszának meghatározásánál keletkező derékszögű háromszög megfelelő szögei egyenlők, vagyis e háromszögek hasonlóak. Tehát az A pontból kiinduló e félegyenesen felve-



6.3. ábra.

szőleges X pontot (6.3. ábra) és meghatározzuk az AX szakasz hosszát. A kapott derékszögű háromszög átfogójára felmérjük a d szakaszt, majd a háromszöggel hasonlót szerkesztve megkapjuk a d hosszúságú szakasz első képhosszát, illetve a második befogón az A és B pontok magasságkülönbségét. Ennek ismeretében a B pont képei meghatározhatók.

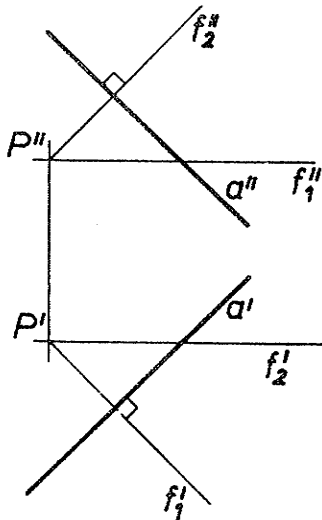
A 6.4. ábrán a PQ profil egyenesre mértünk fel egy megadott d szakaszt az általános elvek pontos követésével. A P ponttól felmért d szakasz másik végpontja az R pont. Ha egy egyenes valamelyik képsíkkal párhuzamos, akkor a szakasz felmérése közvetlenül a képen elvégezhető.



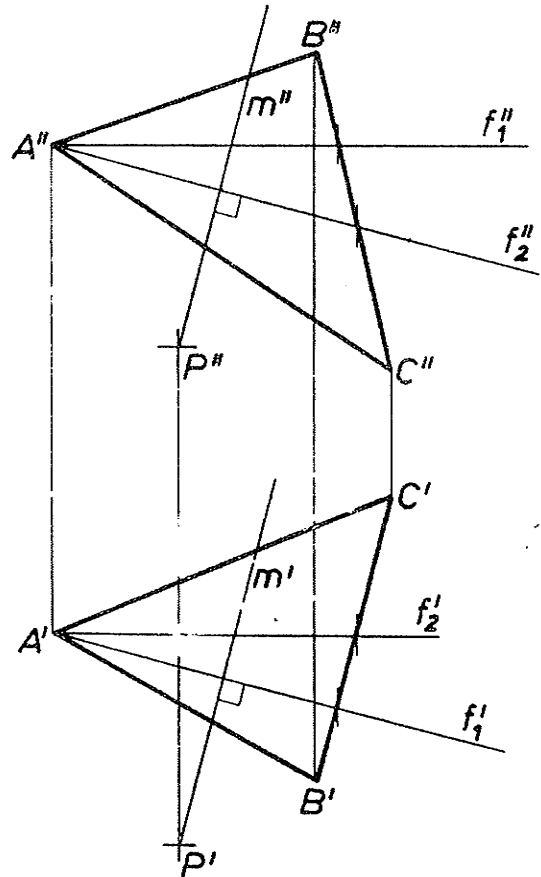
6.4. ábra.

B) Adott egyenesre adott ponton át merőleges sík szerkesztése. Adott síkra adott ponton át merőleges egyenes szerkesztése

Ha az adott P ponton át az adott a egyenesre merőleges síkot kell szerkeszteni, akkor elegendő a P ponton át két olyan egyenest szerkeszteni, amelyek merőlegesek az a egyenesre, ugyanis e két egyenes — térgeometriai ismereteink alapján — az a egyenesre merőleges síkot határozza meg. A merőleges vetítés tulajdonságaiból viszont tudjuk, hogy két merőleges egyenes vetülete pontosan akkor merőleges egymásra, ha közülük az egyik párhuzamos a képsíkkal. Ennek alapján (6.5. ábra) a P ponton át felvett f_1 első főegyenes pontosan akkor merőleges az a egyenesre, ha első képe merőleges az a egyenes első képére: $f_1' \perp a'$. Ugyanígy a P ponton keresztül haladó f_2 második fővonal pontosan akkor merőleges az a egyenesre, ha $f_2'' \perp a''$. Az f_1 és f_2 egyenesek által meghatározott sík tehát merőleges az a egyenesre. A fordított feladat — ti. amikor adott ponton át adott síkra merőleges egyenest kell szerkeszteni — megoldása már kiolvasható az eddigiekből. Az ABC síkra a P ponton át merőleges egyenest akarunk állítani. (6.6. ábra)



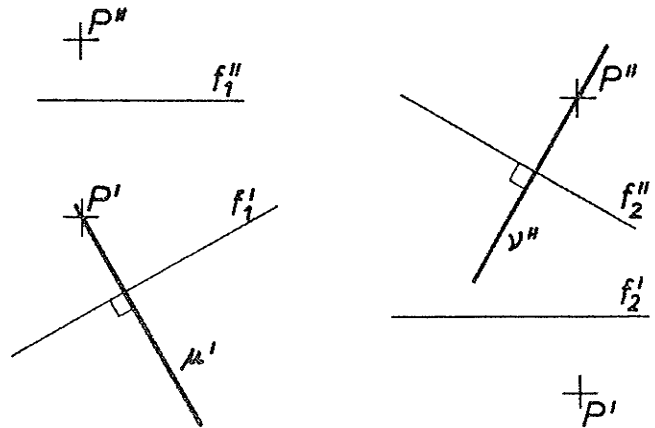
6.5. ábra.



6.6. ábra.

Az ABC síkban f_1 első és f_2 második fővonalat felvéve a P' ponton át az f_1' -re merőleges m' egyenest, továbbá a P'' ponton át az f_2'' -re merőleges m'' egyenest megrajzolva a kapott m egyenesre az előbbiek szerint merőleges az f_1 és f_2 egyenesek által meghatározott sík. Ez a sík azonban azonos az ABC síkkal, tehát az m egyenes és az ABC sík egymásra merőlegesek.

A 6.7. ábrán mutatjuk be azt a könnyen belátható tényt, hogy f_1 első főegyenesre merőleges μ sík első vetítősík, amelynek első képe f_1' -re merőleges. Ugyanúgy az f_2 második főegyenesre merőleges ν sík második vetítősík, $f_2'' \perp \nu''$. Megfordítva: vetítősíkra merőleges egyenes főegyenes.



6.7. ábra.

Megjegyezzük még, hogy vetítőegyenestre merőleges a megfelelő képsík vagy azzal párhuzamos sík.

C) Sík leforgatása képsíkkal párhuzamos helyzetbe és a sík megszerkesztett pontjainak visszaforgatása

A sík leforgatása alapvetően fontos szerkesztési eljárás, amellyel a síkot egy egyenese körül elforgatva képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozzuk. Ezáltal a síkban levő alakzat valódi méreteiben látszik, tehát e síkalakzat pontjaiból kiindulva a leforgatott helyzetben a szükséges szerkesztések elvégezhetők.

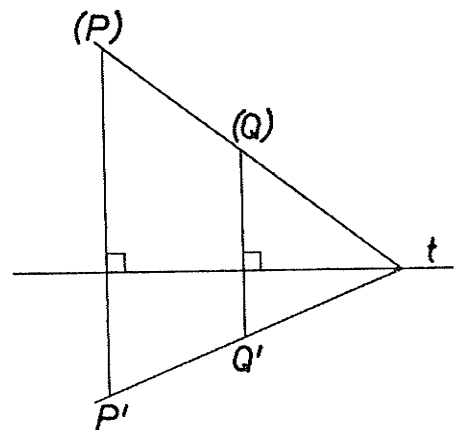
A szerkesztések eredményeként adódó pontokat (a leforgatás megfordításával) az ún. visszaforgatással tudjuk a vetületekben (első és második képen) meghatározni.

Az eljárás ismertetését vetítősík leforgatásának és visszaforgatásának megszerkesztésével kezdjük.

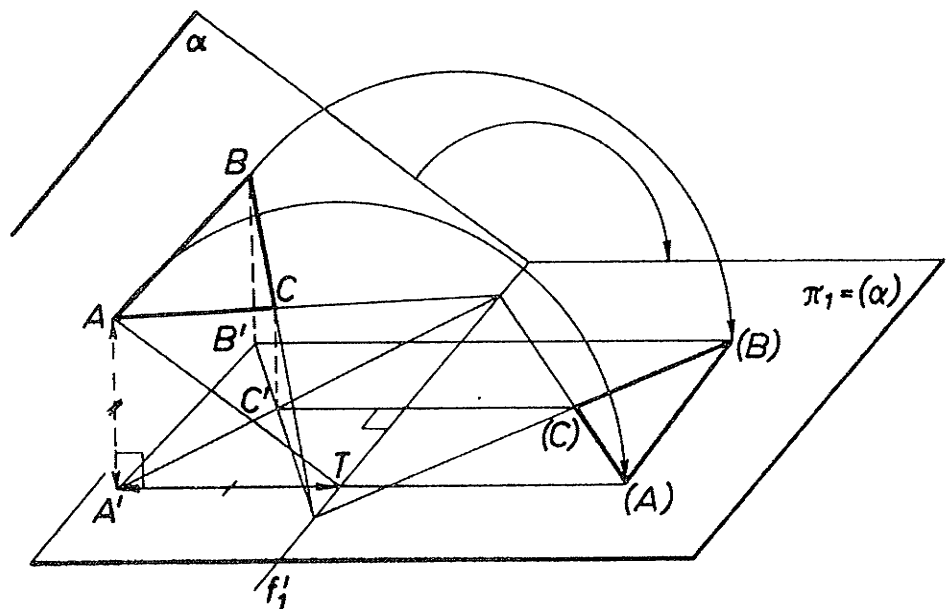
A 6.8. ábrán a második vetítősíkban levő ABC háromszög magasságpontját akarjuk megszerkesztetni. A második vetítősíkot első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk. Forgástengelynek a sík első képsíkkal párhuzamos egyenese, azaz egy második vetítőegyenese választható.

gellyel. Ha ismerjük egy P pont képét és leforgatottját, akkor a fentiek alapján a 6.9. ábra szerint egy tetszőleges Q pont leforgatottját (vagy (Q) -ből a Q' -t) meg tudjuk szerkeszteni.

Általános helyzetű sík és a benne levő ABC háromszög leforgatását szemlélteti a 6.10. ábra. A forgástengely — amennyiben első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatunk — az α sík egy f_1 első főegyenese lehet. Az egyszerűség ked-



6.9. ábra.



6.10. ábra.

véért a képsíkot fektessük az f_1 egyenesre. Ekkor a leforgatott (α) sík maga a π_1 képsík.

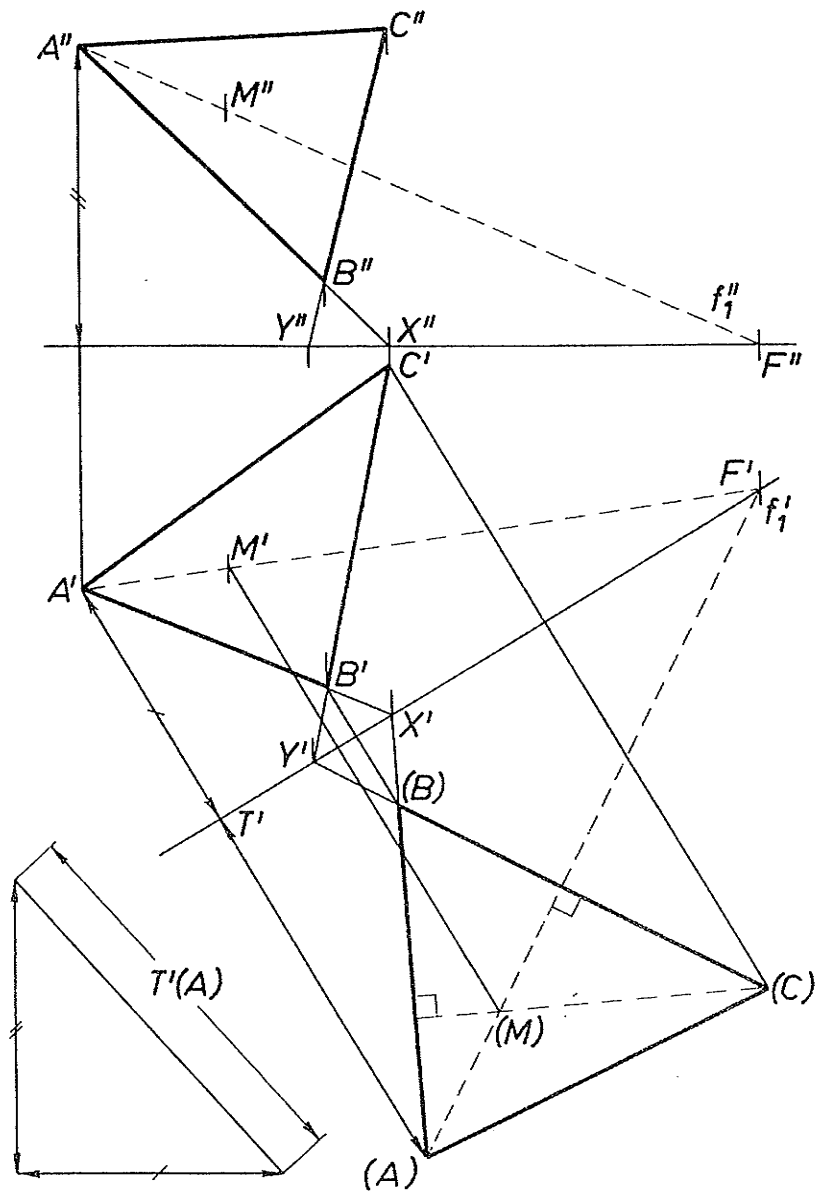
A pontok elfordulása az f_1 első főegyenésre merőleges első vetítősíkokban történik. E vetítősíkok első képei az f_1 -re merőleges egyenesek, amelyek a megfelelő A' , B' , C' , illetve (A) , (B) , (C) pontokat kötik össze. Az A pont leforgatásánál a pont egy olyan körívet ír le, amelynek középpontja a T pont, sugara pedig az AA' derékszögű három-

szögből határozható meg. E derékszögű háromszög egyik befogója az $A' T'$ az A' pontnak az f_1 -től mért távolsága, a másik befogó pedig az A pont és az f_1 egyenes magasságkülönbsége, amely a második képen olvasható le. A derékszögű háromszög átfogója megadja a leforgatott (A) pont és f_1 távolságát. A sík egyes pontjainak leforgatásánál adódó derékszögű háromszögek egymáshoz hasonlóak, mivel egyik szögük mindig a sík és a képsík hajlásszögével egyenlő. Az ábrán is látható, hogy az első kép és a leforgatott közötti kapcsolat merőleges affinitás, amelynek tengelye az f_1 .

A 6.11. ábrán ugyanazt a feladatot végezzük el, amit a vetítősík leforgatásánál bemutattunk, vagyis az adott ABC háromszög magasságpontjának meghatározását. Elsőnek az ABC sík egy első fővonalát, az f_1 egyenest vesszük fel, amelynek második képe a rendezőirányra merőleges, első képét pedig az AB, illetve BC egyenesekkel alkotott X, illetve Y metszéspontok segítségével jelöljük ki. Az A' , B' , C' pontokból az f_1 -re merőleges egyeneseken lesznek az (A), (B), (C) pontok. Az (A) meghatározásához megszerkesztjük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója az A' pontnak az f_1 -től való távolsága, másik befogója pedig az A pont és f_1 főegyenes magasságkülönbsége. Az átfogó megadja az (A) pontnak az f_1 -től való távolságát. Minthogy az első kép és a leforgatott közti kapcsolat merőleges affinitás, ezért az (A)X' egyenes kijelöli a (B) pontot az Y'(B) egyenes pedig a (C) pontot a korábbi f_1 -re merőlegesen meghúzott egyeneseken.

A háromszög leforgatott helyzetében megszerkesztjük az M magasságpontot, amelynek első képét a merőleges affinitás segítségével határozzuk meg. Az M'' -t az AM síkbeli egyenesen jelöljük ki: AM az F pontban metszi az f_1 egyenest, az F'' pont kijelölésével az AM egyenes második képét meg tudjuk rajzolni és ezen rendezővel tűzzük ki az M'' pontot.

Megjegyzés: a leforgatást a sík bármelyik első fővonala körül végrehajthatjuk. Most azért választottuk meg így a forgástengelyt, hogy az első képet a leforgatottól jobban szétválasszuk. Ez a továbbiakban általában nem valószínűsíthető meg, de kellő gyakorlat után nincs is rá szükség.

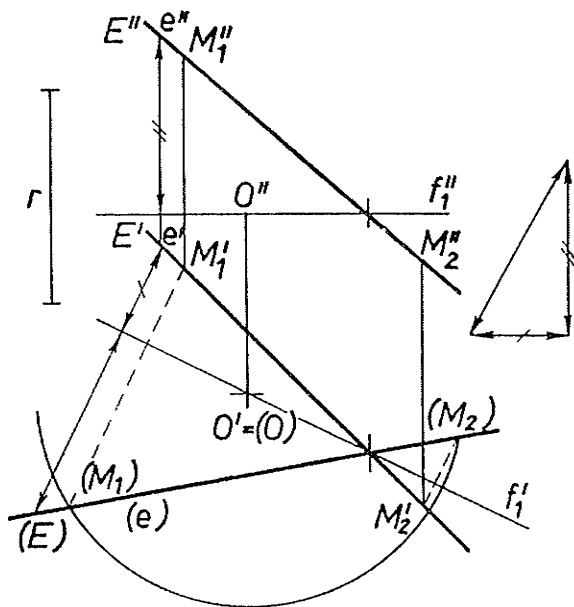


6.11. ábra.

A leforgatás eljárásának gyakorlására oldjunk meg néhány feladatot:

- 1) Adott egy O pont és egy e egyenes, valamint egy r távolság. Szerkesszük meg az e egyenesen azokat a pontokat, amelyek az O ponttól r távolságra vannak.
(A megszerkesztendő pontok tulajdonképpen az O középpontú, r sugarú gömbnek és az e egyenesnek a metszéspontjai.)

A 6.12. ábrán ábrázoltuk az O pontot, az e egyenest, és megadtuk az r távolságot. A feladat megoldásához az O pont és az e egyenes által meghatározott síkban az O ponton át vettük fel az f_1 első főegyenest forgástengelynek. Az O pont leforgatáskor helyben marad. Az e egyenes egy tetszőleges E pontjával megszerkesztjük a leforgatottját, így az (e) egyenes az (E) pontot az e egyenesnek a forgástengellyel alkotott metszéspontjával összekötő egyenesvonal lesz. Az (O) körül r sugárral rajzolt kör kijelöli az (M_1) és (M_2) pontokat, amelyeknek első, majd második képe az e egyenes képein meghatározható.

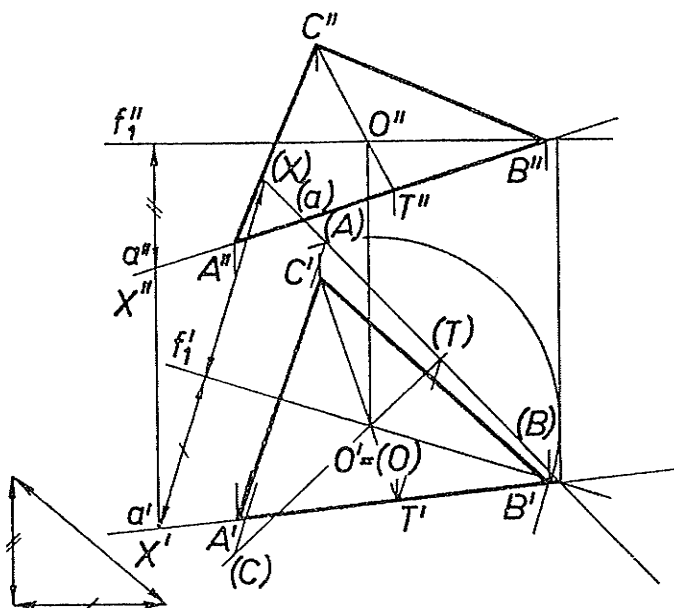


6.12. ábra.

- 2) Adott egy a egyenes és egy O pont. Szerkesszük meg azt a szabályos háromszöget, amelynek középpontja az O pont, egyik éle az a egyenesen van.

A 6.13. ábrán az O ponton át felvesszük az O pont és az a egyenes által meghatározott sík f_1 első főegyenest. Az f_1 egyenes körül a síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk: megszerkesztjük az a egyenes tetszőleges X pontjának a leforgatottját, ezáltal az (a) egyenes is megrajzolható. Az $(O) = O'$ pontból (a) -ra állított merőleges egyenes talppontja (T) . Az $(O)(T)$ távolság kétszerese a szabályos háromszög köré írt kör sugara. Ennek is-

meretében az (O)(T) egyenesen kijelöljük a (C) pontot, illetőleg az (a) egyenesen az (A) és (B) pontokat. (A) és (B) pontok visszaforgatása az a egyenes képeinek ismeretében már kézenfekvő. A(C) képet a (T) pont visszaforgatásával tudjuk meghatározni, és ezután a $T'O'$ egyenesen, illetve a $T''O''$ egyenesen jelöljük ki C' -t, illetve C'' -t.



6.13. ábra.

Távolságok és hajlásszögek megszerkesztése

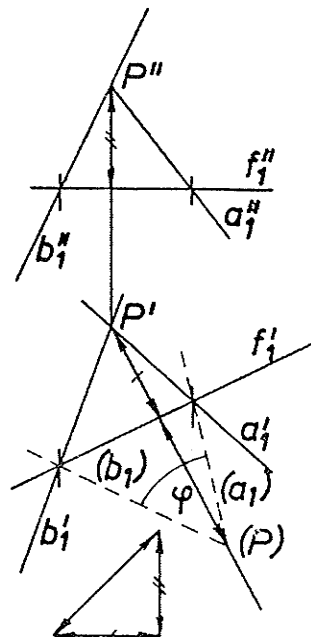
A méretes alapszerkesztések egyik alkalmazási területe a kétképsíkos ábrázolásban megadott térelemek távolságainak, illetve szögeinek megszerkesztése. A következőkben ilyen szerkesztési feladatokat mutatunk be. Ezek áttanulmányozása és önálló kidolgozása után — a térgeometria ismeretek alapján — valamennyi ilyen jellegű szerkesztést viszonylag könnyen el tudunk végezni.

||1) Szerkesszük meg az a és b kitérő egyenesek hajlásszögét.

A 6.14. ábrán megadott a és b egyenesekkel párhuzamos egyeneseket szerkesztünk egy tetszőleges P ponton át: a_1 , b_1 . Az a_1 és b_1 egyenesek által meghatározott síkban felvett f_1 főegyenes körül leforgatjuk a sík P pontját és a_1 , illetve b_1 egyeneseit, a leforgatottban kapjuk a φ hajlásszöget.

||2) Szerkesszük meg az ABC sík és az M pont távolságát.

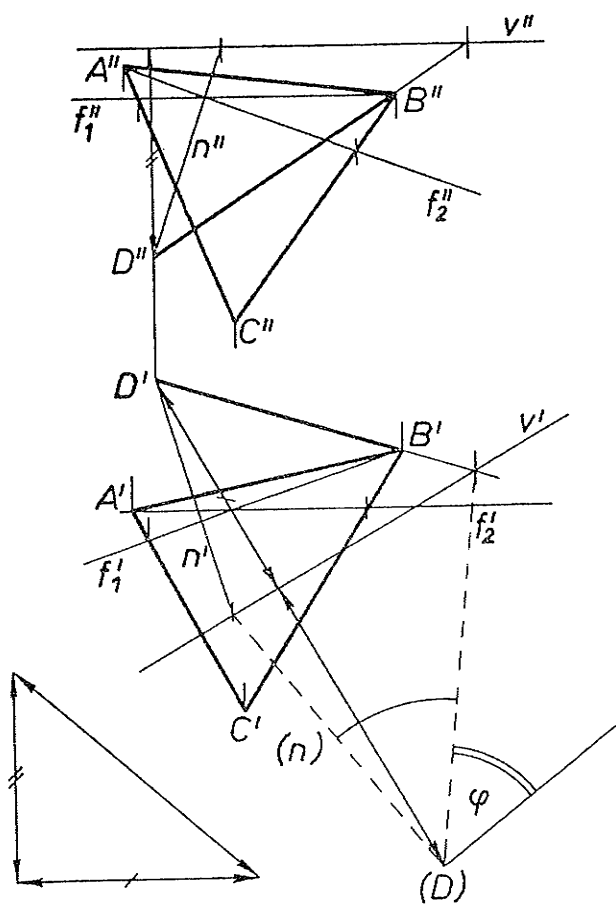
A 6.15. ábrán megszerkesztettük az ABC sík f_1 első és f_2 második főegyenesét, ezek ismeretében az M pontból



- 55 -

|| 3) Szerkesszük meg a 6.16. ábrán két képével adott ABC sík és DB egyenes hajlásszögét.

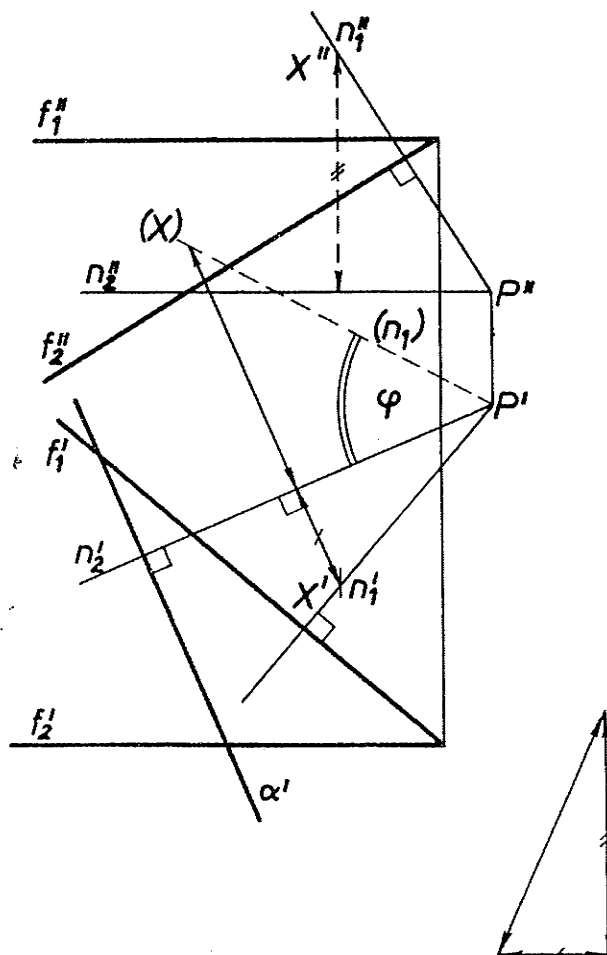
A sík és egyenes hajlásszöge a sík egy normálisa és az egyenes által bezárt szög pótszöge. Ezért a D pontból az ABC síkra (ennek f_1 és f_2 fővonalát felhasználva) merőleges n egyenest szerkesztünk. Az n egyenes és a DB egyenes által meghatározott síkban felvesszük a v első fővonalat. A v főegyenes körül leforgatjuk ezt a síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe. A (D) pontot az n és DB egyeneseknek v forgástengelyén helybenmaradó pontjaival összekötjük, így megkapjuk a normális és a DB egyenes szögét. Ezt a szöget derékszöggé kiegészítő φ szög a sík és a DB egyenes hajlásszöge.



6.16. ábra.

- 4) A 6.17. ábrán megadtunk egy α első vetítősíkot és egy általános helyzetű síkot f_1, f_2 fővonalaival. Szerkesszük meg a két sík hajlásszögét.

A térgeometriából ismeretes, hogy két sík hajlásszögét — a tér egy tetszőleges pontjából — a két síkra állított normálisok hajlásszöge adja meg. Ezért egy tetszőlegesen felvett P ponton át megszerkesztjük az (f_1, f_2) általános sík n_1 normálisát, majd az α első vetítősík n_2 normálisát. Az n_2 normális első fővonal, amelynek első képe merőleges α' -re. A normálisok síkját ebben az esetben az n_2 normális körül képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk. Elég az n_1 normális egy tetszőleges X pontjának a leforgatottját megszerkeszteni. Az (n_1) és n_2' által bezárt szög a két sík φ hajlásszöge.



6.17. ábra.

Méretes adataival megadott testek ábrázolása

A méretes alapszerkesztések másik alkalmazási körét képezik azok a feladatok, amelyekben egy általában szabályos tulajdonságokkal rendelkező test (gúla, hasáb, kocka, stb.) néhány megadott adatából megszerkesztjük a test rendezett vetületeit. Az ilyen típusú feladatokat természetesen nem lehet térgeometriai alapokon nyugvó megoldási gondolatmenet nélkül megszerkeszteni. A megoldási "tervet" célszerű egy alkalmas szabadkézi vázlattal kezdeni. E szabadkézi vázlaton igyekszünk a megszerkesztendő testet lehetőleg képiesen megrajzolni, feltüntetve rajta a megadott adatokat. Ezután a feladatot gondolatban megoldjuk, vagyis a szerkesztést olyan lépésekre bontjuk le, hogy minden egyes lépésben egy-egy ábrázoló geometriai alapszerkesztés szerepeljen. Ezután, ha szükséges, le is írjuk a feladat megoldásának lépéseit, majd azokat sorban végrehajtjuk. A szerkesztés végén a láthatóság feltüntetése zárja a feladat megoldását.

(Megjegyzés: Az alapszerkesztéseket természetesen nem kizárólag ilyen feladatok megoldására lehet alkalmazni. Az alapszerkesztések képezik az ábrázoló geometriai tananyag gerincét, amelyek nélkül a görbevonalak és felületek ábrázolását, a velük kapcsolatos metszési és áthatási, valamint síkba-terítési feladatokat sem tudjuk megoldani.)

- 1) A 6.18. ábrán megadtuk az A pontot, az e egyenest és az m távolságot. Szerkesszük meg annak a szabályos háromoldalú hasábnak a képeit, amelyeknek egyik alapéle az e egyenesen van, az alaplapp csúcsa az A pont és a hasáb magassága m.

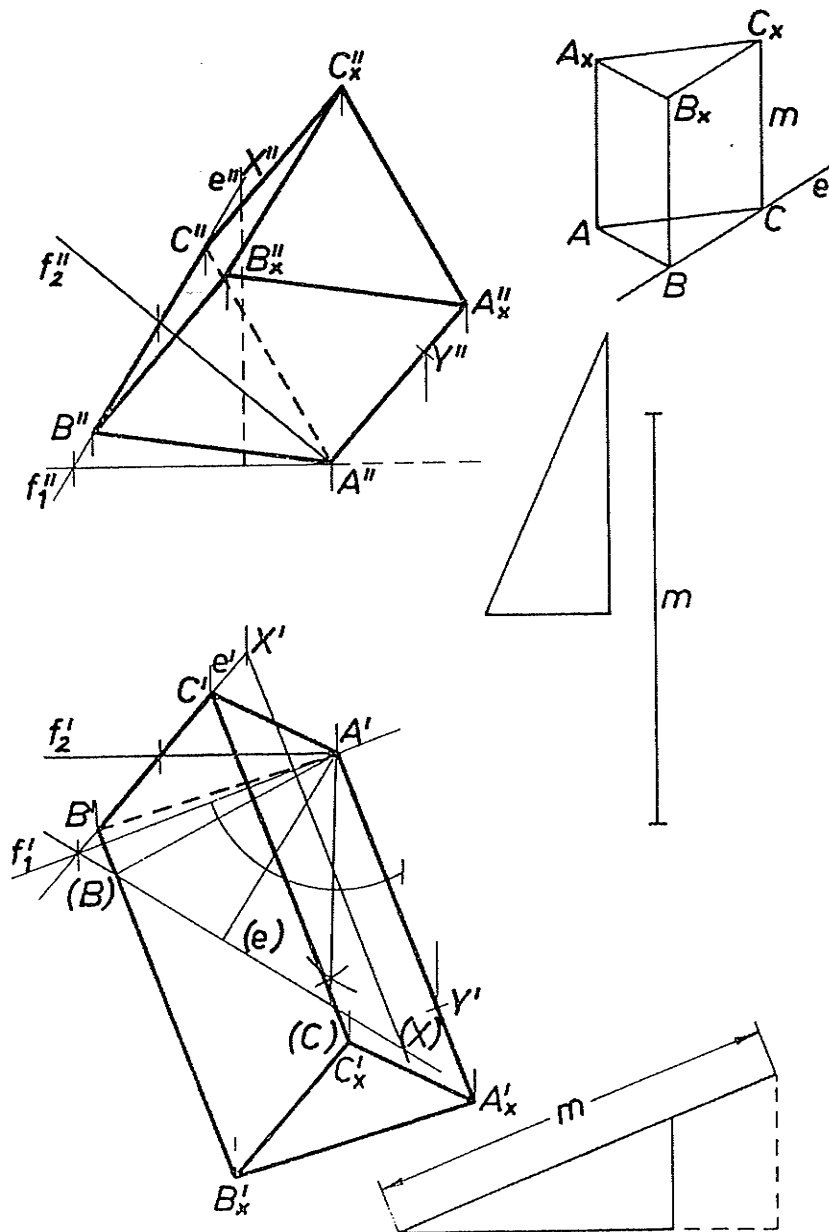
A feladat megoldása:

- a) Az (Ae) síkot f_1 első fővonala körül leforgatjuk: (X), (e). Megszerkesztjük a szabályos ABC háromszöget, B és C pontokat visszaforgatjuk.
- b) A sík f_2 második fővonalát is felvéve az alapsíkra merőleges oldalélek egyeneseit megszerkesztjük.
- c) Az oldalélekre felmérjük az m magasságot.
- d) Láthatóság feltüntetése.

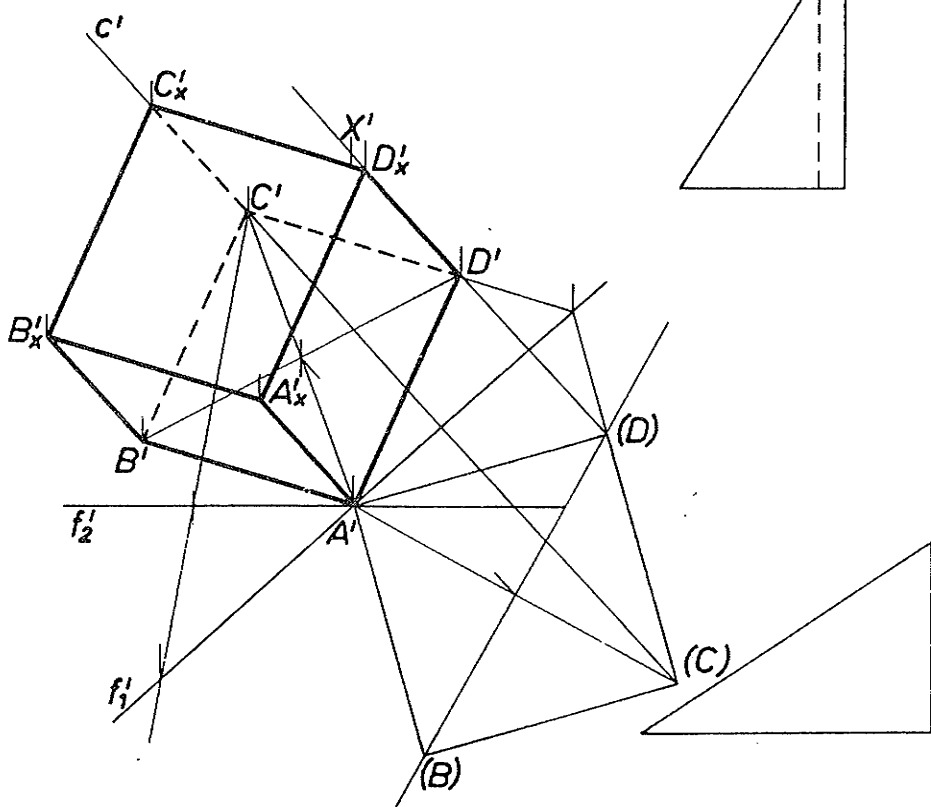
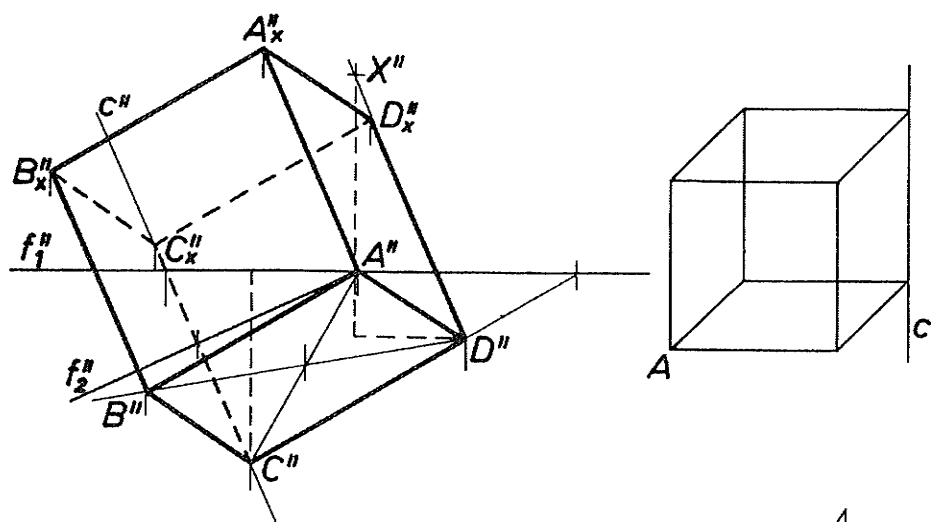
- 2) A 6.19. ábrán megadtuk az A pont és a c egyenes képeit. Szerkesszük meg azt a kockát, amelynek A pont alaplappjának egy csúcsa, a c egyenes pedig a kocka A-val szemközt eső oldaléle (1. vázlat).

A feladat megoldása:

- a) A ponton át a c egyenesre merőleges síkot szerkesztünk: (f_1 , f_2).
- b) Az (f_1 , f_2) sík és c egyenes metszéspontját meghatározzuk: C.
- c) Az (f_1 , f_2) síkot leforgatjuk: $A' = (A)$, (C). Megszerkesztjük az ABCD négyzetet a leforgatott helyzetben,



6.18. ábra.



6.19. ábra.

- majd visszaforgatjuk.
- d) A kocka oldalélei c -vel párhuzamosak. A D pontból kiinduló oldalélre a kocka élhosszát felmérjük (X segédponttal): D_x .

- e) Láthatóság feltüntetése.

3) A 6.20. ábrán megadtuk a g egyenes és a P pont két képét, valamint az m távolságot. Szerkesszük meg azt a szabályos négyoldalú gúlát, amelynek tengelye a g egyenes, alaplapjának egy csúcsa a P pont és magassága m .

A feladat megoldása:

- a) P ponton át g egyenesre merőleges síkot szerkesztünk: (f_1, f_2) .
- b) Az (f_1, f_2) sík és g egyenes metszéspontjának meghatározása: M .
- c) Az (f_1, f_2) sík leforgatása: (M) , $P' = (P)$. Megszerkesztjük a PQRS alapnégyzet leforgatottját, majd visszaforgatjuk.
- d) A G segédpont alkalmazásával a g egyenesre M pontból felmérjük az m távolságot: T .
- e) A láthatóságot úgy tüntetjük fel, hogy a lemezből levő gúlának az alaplapját eltávolítjuk.

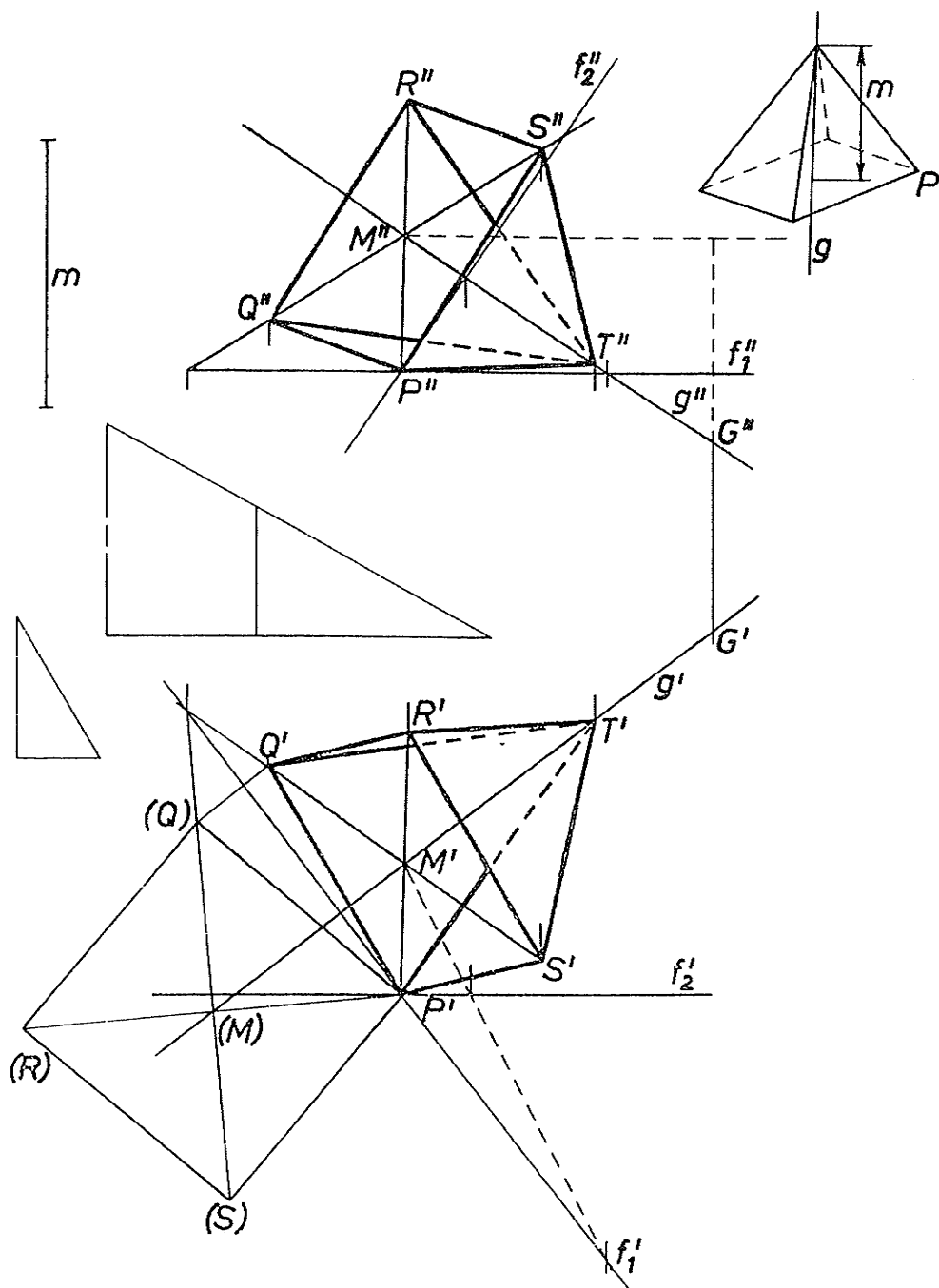
4) A 6.21. ábrán megadtuk az a egyenes és az O pont két képét. Szerkesszük meg azt a szabályos tetraédert, amelynek egyik alapéle az a egyenesen van, az alaplap középpontja az O pont.

A feladat megoldása:

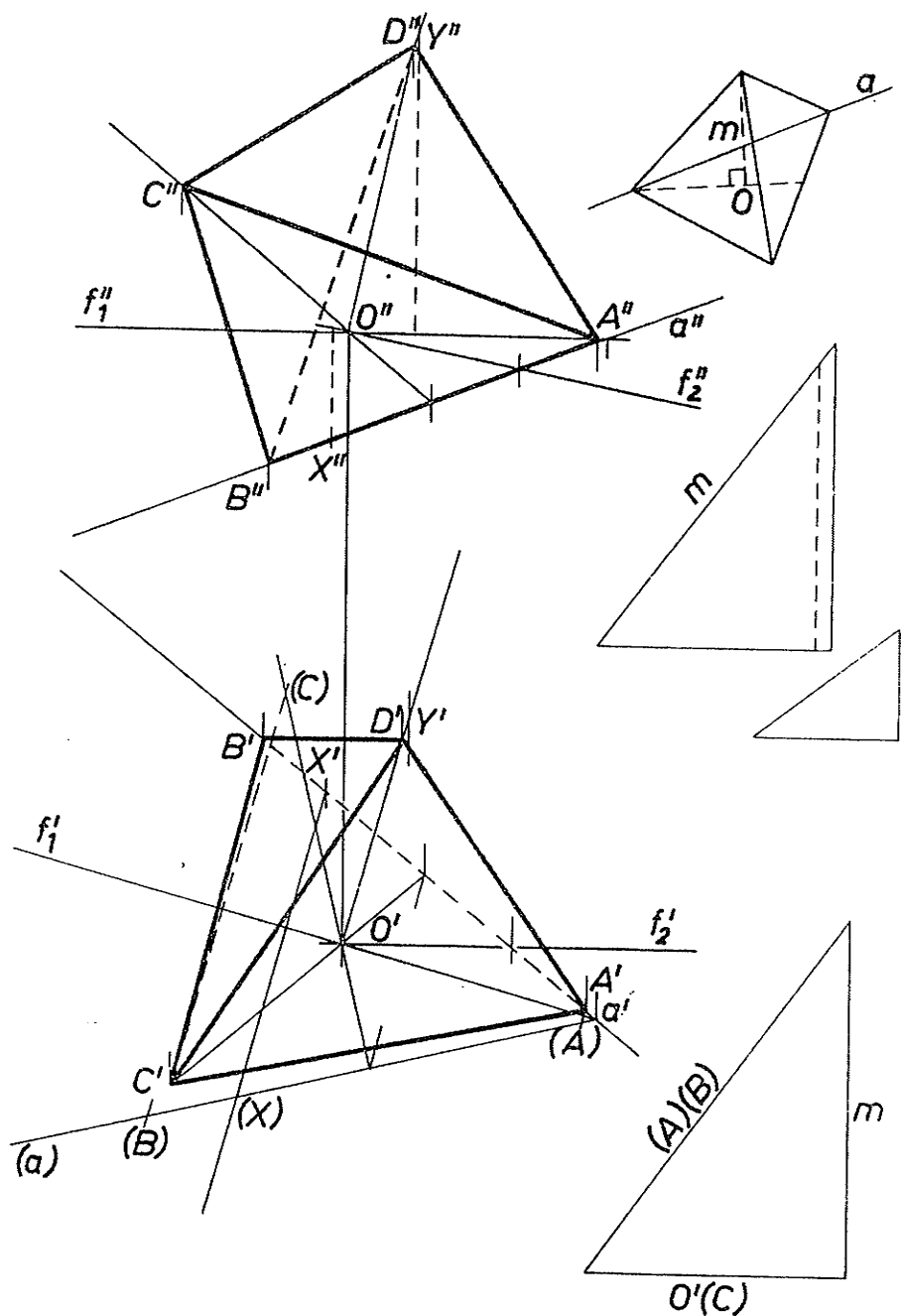
- a) Az O pont és a a egyenes síkját az f_1 fővonal körül leforgatjuk: $O' = (O)$, (X) , (a) . Az ABC szabályos háromszög szerkesztése és visszaforgatása.
- b) Az (Oa) sík f_2 fővonalának felvétele és O ponton át síkra merőleges egyenes szerkesztése.
- c) A szabályos tetraéder magasságának megszerkesztése (l. ábra).
- d) A merőleges egyenesre az Y segédpont alkalmazásával, a magasság felmérése.
- e) A láthatóság feltüntetése.

Gyakorlásra javasoljuk a 6.22. és 6.23. ábrán felvételi vázlattal megadott feladatok önálló kidolgozását (A/4 lapon).

- 1) Szerkesszük meg azt az egyenes hasábot, amelynek alaplapja az adott ABCD paralelogramma, magassága pedig az m távolság.
- 2) Szerkesszük meg annak a szabályos négyoldalú gúlának a két képét, amelynek adott t tengelye, a rajta levő M csúcs és az alap egyik csúcsa.



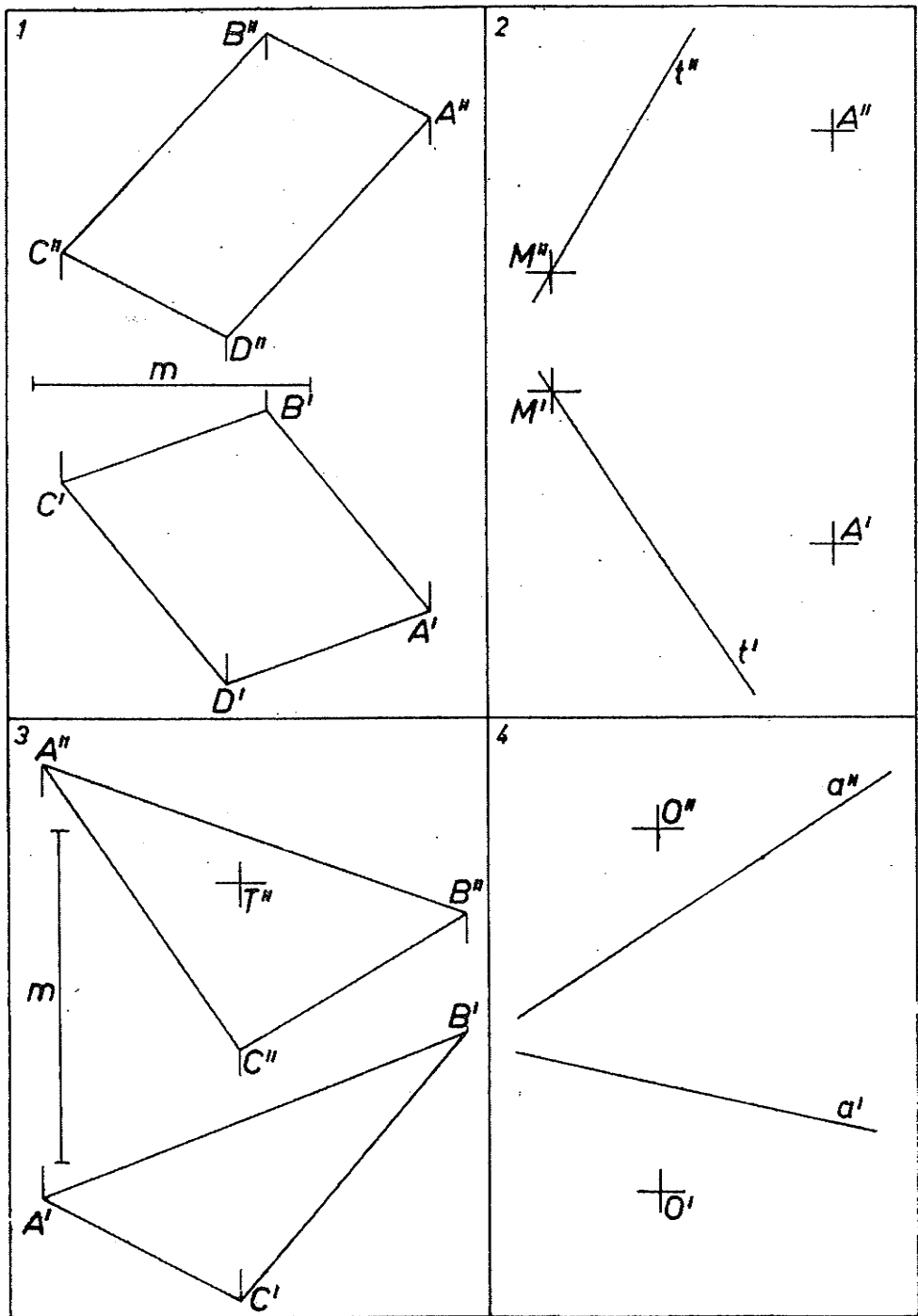
6.20. ábra.



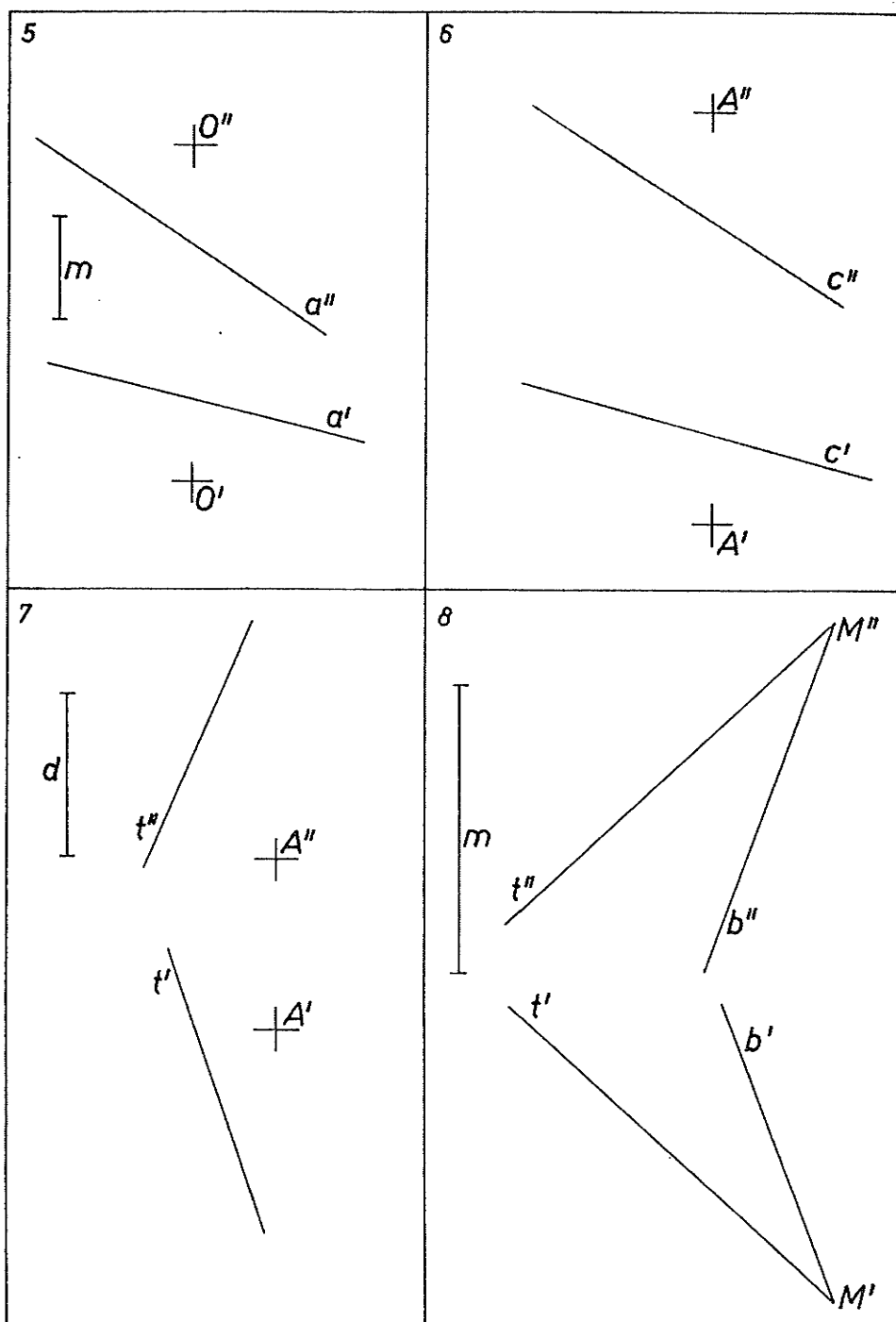
6.21. ábra.

- 3) Szerkesszük meg annak a tetraédernek a két képét, amelynek alaplapja az adott ABC háromszög, magasságának hossza m , és a magasság talppontja T .
- 4) Szerkesszük meg annak a kockának a két képét, amelynek egyik lapközéppontja O , és a lap egyik éle az adott a egyenesen van.
- 5) Adott az a egyenes, O pont és az m távolság. Szerkesztendő az a szabályos hatoldalú hasáb, amelynek egyik alapéle az a egyenesen van, alaplapjának középpontja az O pont, magassága m .
- 6) Adott a c egyenes és az A pont. Szerkesszük meg annak a kockának a képeit, amelynek alaplapja a (c, A) síkban van, A a kocka egyik csúcsa, c egyenes pedig az alaplap átlója.
- 7) Adott az A pont, t egyenes és a d távolság. Szerkesszük meg annak a szabályos háromoldalú gúlának a képeit, amelynek t a tengelye, A pont az alaplap egyik csúcsa és a gúla magassága a d távolság.
- 8) Szerkesszük meg azt a szabályos háromoldalú gúlát, amelynek tengelye t egyenes, egyik oldalélének egyenese a b egyenes, a gúla magassága pedig a megadott m távolság.

Elméleti tananyag: Tankönyv 75-80. és 83-84. pontjai.



6.22. abra.



6.23. ábra.

7. VEKTOROK, VEKTORMŰVELETEK ÉS GEOMETRIAI ALKALMAZÁSAIK

Vektor fogalma: Vektornak mondunk egy irányított szakaszt, amelyet nagysága (hossza) és iránya ad meg. Két vektort azonosan egyenlőnek tekintünk, ha párhuzamos egyeneseken vagy közös egyenesen helyezkednek el és nagyságuk, valamint irányuk is megegyezik. A vektorok jelölése: vagy aláhúzott kisbetűvel (pl. $\underline{a}$), vagy a szakasz kezdő és végpontjának egymás után írásával, felül nyíllal (pl. $\overrightarrow{AB}$). A szakasz irányítását rajzban szintén nyíllal jelöljük.

Vektor abszolút értéke a vektor hossza; jelölése $|\underline{a}|$.

Nullvektor: Olyan vektor, amelynek hossza 0, iránya pedig megállapodás alapján tetszőleges, azaz bármely vektorral párhuzamos.

Vektorok összeadása: $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok összegét úgy kapjuk meg, hogy az $\underline{a}$ vektor végpontjából indítjuk a $\underline{b}$ -t. Az $\underline{a} + \underline{b}$ az $\underline{a}$ kezdőpontjából $\underline{b}$ végpontjába mutató vektor (7.1. ábra).

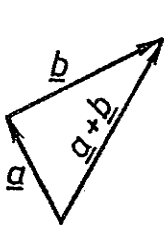
Ezzel egyenértékű a paralelogramma szabály szerinti összeadás: az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ -t közös P pontból indítjuk, és az általuk meghatározott paralelogramma P pontból kiinduló átlóvektora $\underline{a} + \underline{b}$ (7.2. ábra).

Az összeadás tulajdonságai:

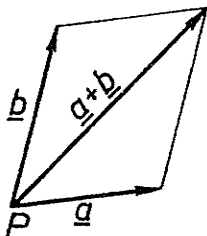
$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \quad (\text{kommutatív})$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) \quad (\text{asszociatív}).$$

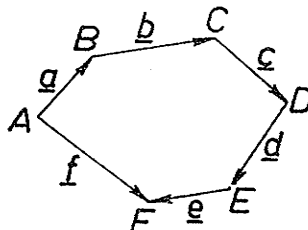
Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{e}$ vektorok összege az az $\underline{f} = \overrightarrow{AF}$ vektor, amely az összeadandó vektorok által alkotott ABCDEF törött vonalat zárttá teszi (7.3. ábra).



7.1. ábra.

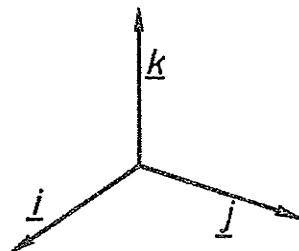


7.2. ábra.



7.3. ábra.

Vektorok koordinátái: Válasszunk a térben három, páronként egymásra merőleges egységvektort: $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ (7.7. ábra). Alkosson e három vektor jobb-rendszer, azaz $\underline{k}$ -ral szembe nézve $\underline{i}$ -t a $\underline{j}$ -ba 90° -os, az óra járásával ellentétes (vagyis pozitív) forgás viszi. Az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ alapvektorok lineáris kombinációjaként a tér bármely $\underline{v}$ vektora egyértelműen állítható elő:



7.7. ábra.

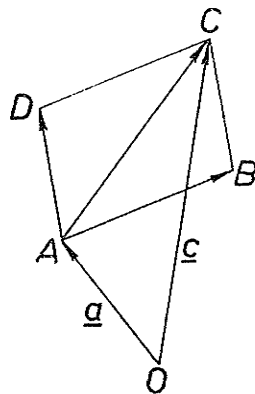
$$\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}.$$

Az (x, y, z) számhármast a $\underline{v}$ vektor Descartes-féle derékszögű koordinátáinak nevezzük az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ koordinátarendszerben. Az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ alapvektorok koordinátái: $\underline{i}(1, 0, 0)$, $\underline{j}(0, 1, 0)$, $\underline{k}(0, 0, 1)$.

Vektorműveletek koordinátákkal: Az $\underline{a}$ vektor koordinátái (a_1, a_2, a_3) , a $\underline{b}$ vektor koordinátái (b_1, b_2, b_3) . A két vektor összegének $\underline{a} + \underline{b}$ -nak a koordinátái $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. A két vektor különbségének $\underline{a} - \underline{b}$ -nak a koordinátái $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$. Ha λ valós szám, akkor a $\lambda \underline{a}$ koordinátái $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Helyvektor. Térbeli pont koordinátái: Ha a térben rögzítjük az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ alapvektorok közös O kezdőpontját az origót, akkor a tér minden pontjához egy meghatározott O -ból kiinduló vektor, ún. helyvektor mutat. Ha a P pontba mutató $\vec{OP}$ helyvektor koordinátái (p_1, p_2, p_3) , akkor a P pont koordinátáinak az $\vec{OP}$ helyvektor koordinátáit nevezzük. Ha A pont helyvektora $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ és a B pont helyvektora $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$, akkor az $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Példa: Legyen adva az $A(2, 1, 3)$, $B(-1, 2, 5)$, $D(1, 2, 1)$ pont. Határozzuk meg az $\vec{AB}$ és $\vec{AD}$ vektort (7.8. ábra). Ha az A pont helyvektora $\underline{a}$, a B pont helyvektora $\underline{b}$ és a D pont helyvektora $\underline{d}$, akkor $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}(-3, 1, 2)$ és $\vec{AD} = \underline{d} - \underline{a}(-1, 1, -2)$. Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma C csúcsának koordinátáit. Nyilvánvaló, hogy $\underline{c}$ pont helyvektora $\underline{c} = \underline{a} + \vec{AB} + \vec{AD}$ alakban



7.8. ábra.

áll elő. A paralelogramma átlóvektora $\overline{AB} + \overline{AD}(-4, 2, 0)$, tehát $c(-2, 3, 3)$ adódik.

Másik példánkban állítsuk elő a $v(12, 11, 4)$ vektort az $a(1, 2, 0)$, $b(2, 3, 1)$, $c(5, -1, 2)$ vektorok lineáris kombinációjaként. $v = \alpha a + \beta b + \gamma c$ koordinátás alakban α , β , γ -ra egy egyenletrendszert ad.

$$12 = \alpha + 2\beta + 5\gamma$$

$$11 = 2\alpha + 3\beta - \gamma$$

$$4 = \beta + 2\gamma.$$

A harmadik egyenlet kétszeresét az elsőből és háromszorosát a másodikból kivonva:

$$4 = \alpha + \gamma$$

$$-1 = 2\alpha - 7\gamma \quad \text{innen } -9 = -9\gamma.$$

Tehát $\gamma = 1$, akkor pedig $\alpha = 3$ és $\beta = 2$.

Tehát a v vektor komponensei: $3a(3, 6, 0)$, $2b(4, 6, 2)$, $c(5, -1, 2)$.

Ha az AB szakaszt a P pont két szakaszra osztja (7.9. ábra), amelyek aránya $\frac{AP}{PB} = \frac{\mu}{\lambda}$, akkor a P pont helyvektora az A és B pontok helyvektoraival a következő alakban fejezhető ki:

$$p = \frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}.$$

(Ez az előállítás kiterjeszthető az AB egyenes AB szakaszon kívül levő pontjaira is. Ekkor az egyenesen egy irányítást kell felvenni, és ennek megfelelően a $\frac{\mu}{\lambda}$ arány a -1 kivételével minden valós számot felvehet.)

Kimutatható továbbá, hogy az AB egyenes pontjai pontosan akkor állíthatók elő $p = \alpha a + \beta b$ alakban, ha $\alpha + \beta = 1$.) Az AB szakasz felezőpontjába mutató vektor:

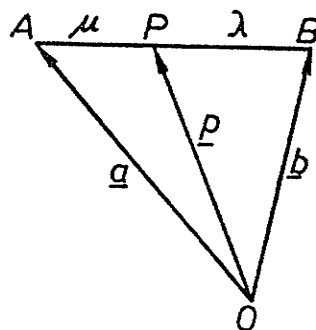
$$\frac{a + b}{2}.$$

Súlypont: Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokból álló pontrendszer súlypontja az S pont, amelynek s helyvektora

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

ahol a_i az A_i helyvektora. A súlypont független az origó választásától, és a súlypontból a pontokba vezető vektorok összege 0.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometria feladatok: 1-48. feladatait.

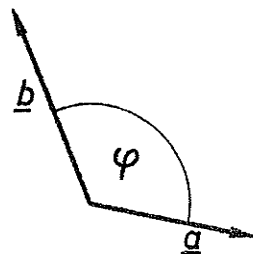


7.9. ábra.

Vektorok skaláris szorzata

Ha két vektorhoz $\underline{a}$ -hoz és $\underline{b}$ -hoz a következő definíció szerint egy számot rendelünk, akkor ezt a műveletet a két vektor skaláris szorzásának mondjuk. Jelölése: $\underline{a}\underline{b}$.

Definíció: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzatának az $\underline{a}\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\varphi$ számot (skaláris mennyiséget) nevezzük, ahol φ a két vektor által bezárt kisebbik szög (7.10. ábra). Megjegyezzük, hogy $\underline{a}\underline{b} > 0$ esetén a vektorok hegyesszöget, $\underline{a}\underline{b} < 0$ esetén tompaszöget és $\underline{a}\underline{b} = 0$ esetben derékszöget zárnak be.



7.10. ábra.

A skaláris szorzás fontosabb tulajdonságai:

$$\begin{aligned}\underline{a} \cdot \underline{b} &= \underline{b} \cdot \underline{a} && \text{(kommutatív)} \\ \underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) &= \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{c} && \text{(disztributív)} \\ (\lambda \underline{a})\underline{b} &= \underline{a}(\lambda \underline{b}) = \lambda(\underline{a}\underline{b}) \\ \underline{a}\underline{a} &= \underline{a}^2 = |\underline{a}|^2.\end{aligned}$$

A skaláris szorzásra az asszociativitásnak nincs értelme.

Skaláris szorzás elvégzése koordinátákkal: Az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

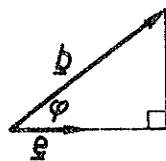
$$\underline{a}\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Az $\underline{a}$ vektor irányába mutató egységvektor:

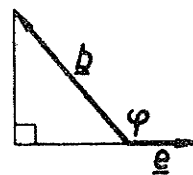
$$\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}, \text{ tehát } \underline{a}^2 = |\underline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \text{ alapján kiszámítható } |\underline{a}|, \text{ és így az } \underline{a}^0 \text{ vektor koordinátái } \left(\frac{a_1}{|\underline{a}|}, \frac{a_2}{|\underline{a}|}, \frac{a_3}{|\underline{a}|}\right).$$

Ezek a koordináták az $\underline{a}^0$ és $\underline{i}$ ill. $\underline{j}$ ill. $\underline{k}$ alapvektorok által bezárt szögek koszinuszai.

Az $\underline{e}$ egységvektor és a $\underline{b}$ vektor skaláris szorzata $\underline{b} \cdot \underline{e} = |\underline{b}||\underline{e}|\cos\varphi = |\underline{b}|\cos\varphi$, ennek geometriai jelentése a $\underline{b}$ vektor $\underline{e}$ irányított egyenesén adódó előjeles merőleges vetülete (7.11. ábra). Ezen észrevétel alapján vezethető le a következő:



A $\underline{b}$ vektor felbontása adott $\underline{a}$ vektorral párhuzamos és reá merőleges összetevőkre: E felbontáson a következőket értjük: a két vektort közös kezdőpontúnak gondolva, az általuk meghatározott síkban a $\underline{b}$ vektor végpontjából az $\underline{a}$ vektor egyenesére állított merőleges $\underline{T}$ talpontja jelöli ki az $\underline{a}$ -ral párhuzamos $\underline{b}_p$ összetevő végpontját.



7.11. ábra.

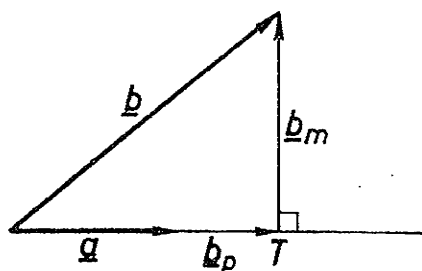
Az $\underline{a}$ -ra merőleges összetevő kezdőpontja a T talppont, végpontja pedig a $\underline{b}$ végpontjával közös; jele: $\underline{b}_m$ (7.12. ábra).

A $\underline{b}_p$, illetve $\underline{b}_m$ összetevők:

$$\underline{b}_p = (\underline{a}^o \underline{b}) \underline{a}^o = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a} \cdot \underline{a}} \underline{a},$$

$$\underline{b}_m = \underline{b} - \underline{b}_p = \underline{b} - (\underline{a}^o \underline{b}) \underline{a}^o =$$

$$= \underline{b} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a} \cdot \underline{a}} \underline{a}.$$



7.12. ábra.

Könnyen belátható, hogy az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ vektor koordinátái az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ alapvektorok által meghatározott koordinátarendszerben $\underline{a}_1 = \underline{a} \cdot \underline{i}$, $\underline{a}_2 = \underline{a} \cdot \underline{j}$, $\underline{a}_3 = \underline{a} \cdot \underline{k}$ skaláris szorzással is kiszámíthatók.

Két vektor hajlásszögének kiszámítására is alkalmas a skaláris szorzás, ui. a definíció alapján kapjuk a

$$\cos \varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|}$$

összefüggést.

Példák:

- || 1) Számítsuk ki $\underline{a}(3, 2, -1)$ és $\underline{b}(2, -1, 3)$ vektorok skaláris szorzatát. Határozzuk meg a két vektor hajlásszögének koszinuszát.

Megoldás: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$

$$|\underline{a}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{14}.$$

- || 2) Számítsuk ki az 5 hosszúságú $\underline{a}$ és 3 hosszúságú $\underline{b}$ skaláris szorzatát, ha hajlásszögük 30° .

Megoldás: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 5 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$

- || 3) Adott az $\underline{a}(-1, 2, 2)$ vektor és a $\underline{b}(-5, 5, 6)$ vektor. Bontsuk fel a $\underline{b}$ vektort $\underline{a}$ -ral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

Megoldás: $\underline{a}^2 = 1+4+4=9$, $\underline{a} \cdot \underline{b} = 5+10+12 = 27$. Ezek szerint $\underline{b}_p = \frac{27}{9} \underline{a} = 3\underline{a}(-3, 6, 6)$, $\underline{b}_m = \underline{b} - \underline{b}_p(-2, -1, 0).$

4) Adott az $\underline{a}(2,3,5)$ és $\underline{b}(1,-4,z)$ vektor. Határozzuk meg z értékét úgy, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egymásra merőlegesek legyenek.

Megoldás: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 5z = 0$, innen $z = 2$.

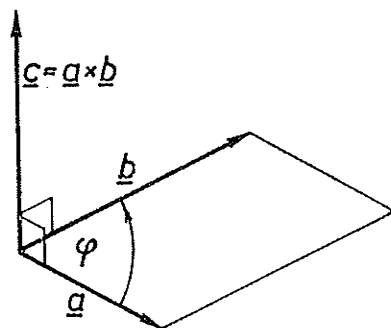
Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok 49-97. feladatait.

Vektorok vektoriális szorzata

Ha két vektorhoz $\underline{a}$ -hoz és $\underline{b}$ -hoz a következő definíció szerint egy $\underline{c}$ vektort rendelünk, akkor ezt a műveletet a két vektor vektoriális szorzásának mondjuk. Jelölése:

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}.$$

Definíció: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata a $\underline{c}$ vektor, ha $|\underline{c}| = |\underline{a}||\underline{b}|\sin\varphi$, ahol φ a két vektor által meghatározott kisebbik szög, továbbá $\underline{c}$ merőleges $\underline{a}$ -ra és $\underline{b}$ -ra mégpedig úgy, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobb-rendszer alkotnak, azaz $\underline{c}$ -ral szembe nézve $\underline{a}$ -t a $\underline{b}$ -ba óramutató járásával ellentétes φ szögű forgás viszi át (7.13. ábra).



7.13. ábra.

Megjegyzés: $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor abszolút értéke az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma területével egyenlő.

Két vektor vektoriális szorzata pontosan akkor $\underline{0}$, ha a két vektor párhuzamos (kollineáris).

A definícióból következik, hogy a vektoriális szorzás nem kommutatív művelet.

A vektoriális szorzat fontosabb tulajdonságai:

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \quad (\text{a vektoriális szorzat alternáló})$$

$$\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda\underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda\underline{b})$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$$

$$\underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{c} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{b} \quad (\text{disztributív})$$

Az asszociatív tulajdonság a vektoriális szorzásra sem teljesül.

Néhány szó a determinánsokról: A determinánsok elméletével az algebra foglalkozik, ezért a determinánsok általános definícióját sem adjuk meg. Kizárólag a másod- és a harmadrendű determinánsokkal foglalkozunk.

Másodrendű determináns az $a_1b_2 - a_2b_1$ kéttényezős szorzatok különbsége. A jobb áttekinthetőség kedvéért az ilyen szorzatkülönbségek értékének jelölésére az

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

alakban való felírást vezetjük be. Nyilvánvaló, hogy a másodrendű determináns értéke 0, ha megegyezik két sora ($a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$) vagy két oszlopa ($a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$). A determináns értékének (-1) -szeresét adja a sorok felcserélésével keletkező determináns.

Harmadrendű determináns: Az a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) elemekből 3 sorban (sorindex i) és 3 oszlopban (oszlopindex k) elrendezett számok által az alábbiak szerint meghatározott számot harmadrendű determinánsnak nevezzük:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ez a harmadrendű determináns első sor szerinti kifejtése.

Vektoriális szorzás elvégzése koordinátákkal: Az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzatát $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ alapvektorokkal a következő determináns alakban lehet felírni:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Nyilvánvaló, hogy $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$.

Példák:

- || 1) Határozzunk meg olyan vektort, amely az $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$ háromszög síkjára merőleges.
Határozzuk meg a háromszög területét.

Megoldás: $\overrightarrow{AB}(-6, -3, 2)$, $\overrightarrow{AC}(-3, 2, -6)$. A háromszög síkjára merőleges vektor:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 14\underline{i} - 42\underline{j} - 21\underline{k}.$$

A háromszög területe az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területének a fele:

$$t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 7(2\underline{i} - 6\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 7 \cdot \sqrt{4+36+9} = 49.$$

Tehát a háromszög területe $\frac{49}{2}$.

- || 2) Legyen az a egyenes az $A(-4, 4, -1)$ ponton áthaladó, $\underline{a}(2, -1, -2)$ vektorral párhuzamos, b egyenes az $B(-5, 5, 5)$ ponton áthaladó $\underline{b}(4, -3, -5)$ vektorral párhuzamos.

||Számítsuk ki a két egyenes távolságát (7.14. ábra).

Megoldás: A normál transzverzálissal párhuzamos vektor az $\underline{a} \times \underline{b}$, ennek irányába mutató egységvektor

$$\frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|}.$$

A $\vec{BA}$ vektornak e vektorra való merőleges vetületének a hossza adja a két egyenes d távolságát:

$$d = \left| \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} \cdot \vec{BA} \right|$$

$$\vec{BA}(1, -1, -6)$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k}$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$(\underline{a} \times \underline{b})\vec{BA} = -1-2+12 = 9, \text{ tehát } d = 3.$$

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok 98-121. feladatait.

Többszörös vektorszorzatok. Kifejtési tétel. Vegyesszorzat

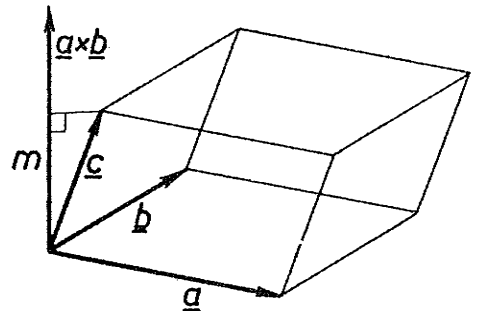
Kifejtési tétel: Ha két vektor vektoriális szorzatát egy harmadik vektorral vektoriálisan összeszorozzuk, akkor ennek könnyebb kiszámítására bebizonyítható a következő (kifejtési tételnek nevezett) összefüggés:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{ac})\underline{b} - (\underline{bc})\underline{a}$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{ac})\underline{b} - (\underline{ab})\underline{c}.$$

Három vektor vegyesszorzata: Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok skaláris szorzata: $(\underline{a} \times \underline{b})\underline{c}$.

A vegyesszorzat geometriai jelentését tekintve $\underline{a} \times \underline{b}$ az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon $\underline{a}$, $\underline{b}$ oldallapjának normálvektora, amelynek abszolút értéke a lap területével egyenlő (7.15. ábra). A normálvektor irányába mutató egységvektort $\underline{c}$ -ral skalárisan szorozva a test e lapjához tartozó m előjeles magasságot kapjuk.



7.15. ábra.

Ez a magasság pozitív, ha $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ szöge derékszögnél nem nagyobb; negatív, ha $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ szöge derékszögnél nagyobb. Az első esetben azt mondjuk, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, a második esetben balrendszert alkotnak.

Az elmondottakból következik, hogy $(\underline{a} \times \underline{b})\underline{c}$ vegyesszorzat az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát adja, amely aszerint pozitív vagy negatív, amint $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok jobb- vagy balrendszert alkotnak.

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkotó vektorhármas elemeit ebben a sorrendben ciklikusan felcserélve szintén jobbrendszert alkotó $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{a}$, illetve $\underline{c}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorhármasokat kapunk. Tehát a paralelepipedon térfogata kiszámítható az

$$(\underline{a} \times \underline{b})\underline{c} = (\underline{b} \times \underline{c})\underline{a} = (\underline{c} \times \underline{a})\underline{b}$$

alakokban. Mivel a skaláris szorzás kommutatív, ezért

$$(\underline{a} \times \underline{b})\underline{c} = \underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}), \text{ ugyanígy } (\underline{b} \times \underline{c})\underline{a} = \underline{b}(\underline{c} \times \underline{a}) \text{ és } (\underline{c} \times \underline{a})\underline{b} = \underline{c}(\underline{a} \times \underline{b}).$$

Ez azt mutatja, hogy a három vektor vegyesszorzatának kiszámításánál a szorzat értéke független attól, hogy egy megadott sorrend esetén melyik két vektort szorozzuk össze vektoriálisan. Ez az ún. felcserélési tétel.

Ezért az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzatát szokás $\underline{abc}$ -vel jelölni. Tehát

$$\underline{abc} = \underline{bca} = \underline{cab}.$$

Ha azonban az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ sorrendben két egymás után következő vektort cserélünk fel, akkor a vektoriális szorzat alternáló tulajdonsága miatt a vegyesszorzat előjelet vált:

$$\underline{abc} = -\underline{bac} = -\underline{acb} = -\underline{cba}.$$

A vegyesszorzatra érvényesek a következő tulajdonságok:

$$(\lambda \underline{a})\underline{bc} = \lambda \underline{abc}.$$

Az $\underline{abc} = 0$ pontosan akkor, ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysíkú (komplanáris) vektorok.

$$[(\underline{a} + \lambda \underline{b}) \times \underline{b}] \underline{c} = \underline{abc}.$$

Az $\underline{abc}$ vegyesszorzat kiszámítása koordinátákkal: Az $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\underline{c}(c_1, c_2, c_3)$ vektor vegyesszorzata:

$$\underline{abc} = \underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{a} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ harmadrendű}$$

determinánssal történik.

A vegyesszorzat tulajdonságaiból következik a harmadrendű determináns néhány tulajdonsága, amelyek a determináns értékének kiszámításánál jól felhasználhatók:

Ha a harmadrendű determináns két sorát felcseréljük, akkor a determináns előjele megváltozik.

Ha a determináns két sora megegyezik, akkor értéke 0.

Ha a determináns egyik sorában csupa 0 áll, akkor a determináns értéke is 0.

Ha a determináns egyik sorához a másik sor λ -szorosát ($\lambda \neq 0$) hozzáadjuk, akkor a determináns értéke nem változik meg.

Példák:

|| 1) Számítsuk ki az $O(0,0,0)$, $A(3,2,0)$, $B(1,4,0)$, $C(2,2,5)$ csúcspontokkal adott tetraéder térfogatát.

Megoldás: Az $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának $1/6$ része a tetraéder térfogata.

$$\vec{OA} \vec{OB} \vec{OC} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 60 - 10 = 50.$$

Tehát a tetraéder térfogata $\frac{50}{6} = \frac{25}{3}$.

|| 2) Döntsük el, hogy az $a(-1,3,2)$, $b(4,-6,2)$ és $c(-3,12,11)$ vektorok lineárisan függetlenek-e vagy függők.

Megoldás: Ha a három vektor lineárisan függő, akkor komplanárisak, és az általuk meghatározott „paralelepipedon” élei egy síkban vannak, a térfogat és az $\underline{abc}$ vegyes-szorzat 0. Ha a három vektor független, akkor az $\underline{abc}$ vegyes-szorzat értéke $\neq 0$.

$$\underline{abc} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 90 - 150 + 60 = 0.$$

Tehát a , b , c vektorok lineárisan függők.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok 122-145. feladatait.

Koordinátatranszformáció

Ugyanazokat a pontokat, alakzatokat különböző koordinátarendszerben vizsgálhatjuk. Ugyanannak a pontnak a koordinátái különböző koordinátarendszerekben más-más értékek, de köztük matematikai formába önthető kapcsolat van, amit koordinátatranszformációnak mondunk.

Koordinátarendszer eltolása: Ha a koordinátarendszert a $v(a, b, c)$ vektorral eltoljuk (a megfelelő koordinátatengelyek párhuzamosak maradnak), akkor az első koordinátarendszerben (x, y, z) koordinátájú pont a másikban (x', y', z') koordinátájú lesz, és a transzformáció formulái:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Koordinátarendszer elforgatása: Ha az origó rögzítve marad, de az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ vektorok az $\underline{i}'$, $\underline{j}'$, $\underline{k}'$ helyzetbe elfordulnak, akkor a P pont (x, y, z) koordinátáiról (x', y', z') koordinátáira való áttérés formulái

$$x' = x \cos(\underline{i}, \underline{i}') + y \cos(\underline{j}, \underline{i}') + z \cos(\underline{k}, \underline{i}')$$

$$y' = x \cos(\underline{i}, \underline{j}') + y \cos(\underline{j}, \underline{j}') + z \cos(\underline{k}, \underline{j}')$$

$$z' = x \cos(\underline{i}, \underline{k}') + y \cos(\underline{j}, \underline{k}') + z \cos(\underline{k}, \underline{k}'), \text{ illetve}$$

$$x = x' \cos(\underline{i}', \underline{i}) + y' \cos(\underline{j}', \underline{i}) + z' \cos(\underline{k}', \underline{i})$$

$$y = x' \cos(\underline{i}', \underline{j}) + y' \cos(\underline{j}', \underline{j}) + z' \cos(\underline{k}', \underline{j})$$

$$z = x' \cos(\underline{i}', \underline{k}) + y' \cos(\underline{j}', \underline{k}) + z' \cos(\underline{k}', \underline{k}).$$

A formulákban szereplő pl. $(\underline{k}, \underline{i}')$ szimbólum a $\underline{k}$ és $\underline{i}'$ egy-ségvektorok szögét jelenti.

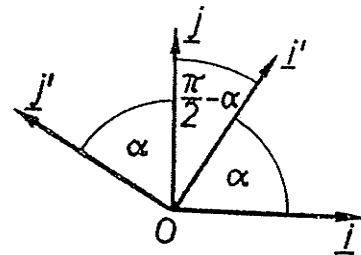
Síkbeli koordinátarendszer α szöggel való elforgatása esetén az áttérés formulái a következők-re egyszerűsödnek: (7.16. ábra)

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \text{ illetve}$$

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$



7.16. ábra.

Javasolt gyakorlati anyag:
Geometria feladatok 270-281.
feladatok.

Elméleti tananyag: Tankönyv 150-162., 166., 168-173.
pontok.

8. EGYENES ÉS SÍK KOORDINÁTAGEOMETRIÁJA

Geometriai feladatainkat nemcsak szerkesztéssel, hanem számolással is meg kell tudni oldani. Ez oly módon történik, hogy koordinátarendszer segítségével jellemezzük az egyeneseket, síkokat és más összetettebb alakzatokat. Akkor mondjuk, hogy egy alakzat egyenletével vagy egyenletrendszerével van jellemezve, ha ezeket kizárólag az alakzat pontjai elégítik ki.

Egyenes egyenletrendszere: Legyen adva egy koordinátarendszerben egy egyenes $P_0(x_0, y_0, z_0)$

pontjába mutató $\underline{r}_0$ helyvektor és az egyenes $\underline{v}(a, b, c)$ irányvektora. Ezek egyértelműen meghatározzák az egyenest a térben (8.1. ábra). Ha $\underline{r}$ az egyenes egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjába mutató helyvektor, akkor az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor és a $\underline{v}$ irányvektor párhuzamosak, tehát $\underline{r} - \underline{r}_0 = \underline{v} \cdot t$, ahol t egy valós szám. Ez az egyenlőség az egyenes minden pontjára — alkalmas t esetén — fennáll, az egyenesen kívül levő pontokra nem teljesülhet, tehát az egyenes vektoregyenlete $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t$ alakú. Koordinátákkal felírva:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct,$$

így az egyenes paraméteres egyenletrendszerét kapjuk; a paraméter t . A paraméter kiküszöbölésével ez az

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

alakban írható fel.

Ha pl. $c = 0$, akkor ez a felírás az

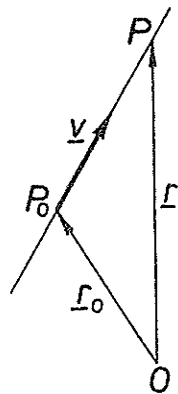
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad z = z_0$$

alakra módosul.

Középiskolai tanulmányokból ismeretes, hogy az egyenes síkbeli koordinátarendszerben az

$$Ax + By + C = 0$$

alakú egyenlettel jellemezhető, ahol az egyenesre merőleges $\underline{n}$ normálvektor koordinátái $\underline{n}(A, B)$, míg az egyenes $\underline{v}$ irány-



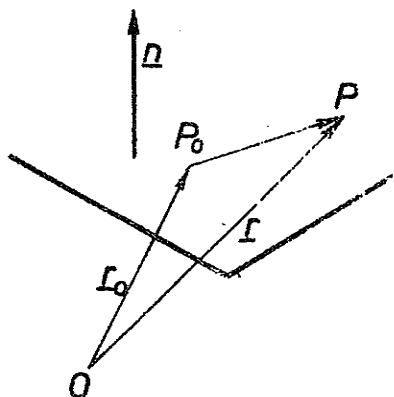
8.1. ábra.

vektora a $v(B, -A)$ koordinátákkal adható meg. Az (x_0, y_0) ponton áthaladó $\underline{n}(A, B)$ normálvektorú egyenes egyenlete

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

A sík egyenlete: A térben egy síkot egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontja és $\underline{n}(A, B, C)$ normálvektora egyértelműen meghatároz (8.2. ábra), minthogy egyetlen olyan sík van, amely a P_0 ponton átmegy és a $\underline{n}$ irányra merőleges. Legyen a sík egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora $\underline{r}$, a P_0 pont helyvektora $\underline{r}_0$. Az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor a sík valamennyi pontjára nézve az $\underline{n}$ -ra merőleges, a síkon kívül fekvő pontra azonban ez nem áll fenn, tehát a sík pontjait a következő skaláris szorzat jellemzi:

$$\underline{n}(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0.$$



8.2. ábra.

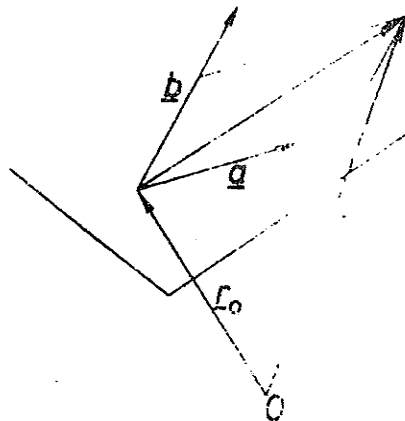
Ez a sík vektoregyenlete. Koordinátás alakban

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{vagy}$$

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

alakú, amit még $Ax + By + Cz + D = 0$ alakban is felírhatunk, ahol $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

A sík jellemzésére alkalmas másik mód lehet, ha a síkot egy pontjának $\underline{r}_0$ helyvektorával és két $\underline{a}$, $\underline{b}$ nem kollineáris síkbeli vektorral adjuk meg (8.3. ábra). A sík pontjai az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációival elérhetők, tehát a sík egy tetszőleges $\underline{r}$ helyvektorú pontja $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{a}u + \underline{b}v$ alakban állítható elő. Az u és v értékek — mint paraméterek — változtatásával a sík valamennyi pontjába eljuthatunk. Az ilyen alakú vektoregyenlet is felírható koordinátás alakban. Az u és v paraméterek kiküszöbölésével a sík egyenletének szokásos alakját kapjuk.



8.3. ábra

Pont és sík távolsága úgy kapható meg, ha a sík egy pontját és az adott pontot összekötő vektort merőlegesen rávetítjük a normálvektor irányára. Ha a pontba az $\underline{r}$ helyvektor mutat, a sík egy pontjának helyvektora pedig $\underline{r}_0$, továbbá a normálvektor irányú egységvektor $\underline{n}^0$, akkor a vetület előjeles hosszát az $\underline{n}^0(\underline{r} - \underline{r}_0)$ skaláris szorzata adja.

A sík egyik oldalán levő pontokra az érték pozitív, a másik oldalon levőkre negatív, a sík pontjaira természetesen 0.

Az $\underline{n}^0(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$ síkegyenletet a Hesse-féle normál-egyenletnek nevezzük, és koordinátáiban az

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

alakban írható fel, amely alkalmas pont és sík távolságának a kiszámítására.

Példák:

|| 1) Irjuk fel a $P(5, -3, 2)$ ponton áthaladó $v(-1, 3, 5)$ irányvektorú egyenes egyenletrendszerét.

Megoldás: A vektoregyenletből kapjuk az $x = 5 - t$, $y = -3 + 3t$, $z = 2 + 5t$ alakot, illetve ebből az

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{5}$$

egyenletrendszert.

|| 2) Határozzuk meg az $x = 5 - t_1$, $y = -3 + 3t_1$, $z = 2 + 5t_1$ és az $x = 1 - 2t_2$, $y = 3 + t_2$, $z = -1 - 5t_2$ egyenesek hajlásszögét. Állapítsuk meg két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének feltételét.

Megoldás: A két egyenes irányvektora: $\underline{v}_1(-1, 3, 5)$, $\underline{v}_2(-2, 1, -5)$. Hajlásszögük koszinusza:

$$\cos \varphi = \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{|\underline{v}_1| |\underline{v}_2|} \quad \begin{aligned} \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 &= 2 + 3 - 25 = -20 \\ |\underline{v}_1| &= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35} \\ |\underline{v}_2| &= \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30} \end{aligned}$$

tehát $\cos \varphi = \frac{-20}{\sqrt{35}\sqrt{30}}$, ebből a két egyenes hajlásszöge megállapítható.

Két egyenes akkor merőleges, ha irányvektoraik skaláris szorzata 0.

Két egyenes akkor párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. (Ekkor a két egyenes egybe is eshet.)

|| 3) Állapítsuk meg két kitérő egyenes távolságát.

Megoldás: Ezt a feladatot a vektoriális szorzásnál bemutatott feladatok között lényegében bemutattuk.

Két egyenes kölcsönös helyzetét ennek alapján már eldönthetjük: láttuk párhuzamosságuk feltételét, s ha nem párhuzamosak, és távolságukra 0 adódik, akkor csak metszők lehetnek.

$$\begin{cases} 4) \text{ Határozzuk meg az } x = -t_1, y = 6 + 2t_1, z = 8 + 3t_1 \\ \text{és az } x = 13 + 5t_2, y = 2 + t_2, z = -3 - t_2 \text{ egyenes-} \\ \text{sek metszéspontját.} \end{cases}$$

Megoldás: Ha a két egyenes metszi egymást, akkor a t_1 és t_2 paraméterek megfelelő értékeire ugyanaz az (x, y, z) számhármasság adódik. Ebből a feltételezésből három egyenlet írható fel:

$$-t_1 = 13 + 5t_2, \quad 6 + 2t_1 = 2 + t_2, \quad 8 + 3t_1 = -3 - t_2.$$

Ennek az egyenletrendszernek két egyenletéből kepezett egyenletrendszerből $t_1 = -3$, $t_2 = -2$ adódik. Ez azonban még nem jelenti azt, hogy a két egyenes metszi egymást. A harmadik egyenletbe ezeket az értékeket behelyettesítve, ha ott is egyenlőség adódik, akkor a két egyenes valóban metszi egymást (különben nem metsződők az egyenesek). Ez a módszer tehát alkalmas segédeszköz két egyenes kölcsönös helyzetének megállapítására.

Esetünkben a kapott $t_1 = -3$ és $t_2 = -2$ értékek mindhárom egyenletet kielégítik, tehát a két egyenes metsző. A metszéspont koordinátái a kapott paraméterértékek megfelelő egyenletrendszerbe helyettesítésével adódnak és a két egyenes $M(3, 0, -1)$ metszéspontját adják.

$$\begin{cases} 5) \text{ Írjuk fel az } A(1, 2, 0), B(3, 0, -3) \text{ és } C(5, 2, 6) \text{ pontok} \\ \text{által meghatározott sík egyenletét.} \end{cases}$$

Megoldás: A sík két vektora $\vec{AB}(2, -2, -3)$ és $\vec{AC}(4, 0, 6)$. A sík normálvektora: $\vec{AB} \times \vec{AC}(-12, -24, 8)$, helyette vehetjük a sík normálvektorának az $\vec{n}(3, 6, -2)$ vektort is; a sík egy pontja A, tehát a sík egyenlete

$$3(x - 1) + 6(y - 2) - 2z = 0, \text{ illetve}$$

$$3x + 6y - 2z - 15 = 0.$$

$$\begin{cases} 6) \text{ Adott a } P(1, 2, 3) \text{ pont és a következő két egyenes:} \\ \text{a egyenes: } x = -4 + 2t_1, y = 4 - t_1, z = -1 - 2t_1, \\ \text{b egyenes: } x = -5 + 4t_2, y = 5 - 3t_2, z = 5 - 5t_2. \end{cases}$$

Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely a P ponton átmegy és párhuzamos az a és b egyenesekkel.

Megoldás: A keresett sík normálvektorát az egyenesek $\vec{v}_1(2, -1, -2)$ és $\vec{v}_2(4, -3, -5)$ irányvektorainak a vektoriális szorzata adja: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2(-1, 2, -2)$. Tehát a sík egyenlete:

$$-(x - 1) - 2(y - 2) - 2(z - 3) = 0, \text{ illetve}$$

$$-x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

||7) Adott a $P(1,2,3)$ pont és az $x = -4 + 2t$, $y = 4 - t$,
 $z = -1 - 2t$ egyenes. Irjuk fel a P pont és az egye-
 nes által meghatározott sík egyenletét.

Megoldás: A sík normálvektorát a P pontot az egyenes
 egy $R(-4,4,-1)$ pontjával összekötő vektor és az irányvek-
 tor vektoriális szorzata adja. $\underline{PR}(-5,2,-4)$, $\underline{v}(2,-1,-2)$,
 $\underline{n} = \underline{PR} \times \underline{v}(-8,-18,1)$. A sík egyenlete

$$-8(x - 1) - 18(y - 2) + (z - 3) = 0.$$

||8) Adott a $P(1,2,3)$ pont és az $x = -4 + 2t$, $y = 4 - t$,
 $z = -1 - 2t$ egyenes. Irjuk fel a P pontot tartalma-
 zó és az egyenesre merőleges sík egyenletét.

Megoldás: A sík normálvektora az egyenes irányvektora
 $(2,-1,-2)$. Tehát a sík egyenlete: $2(x - 1) - (y - 2) -$
 $- 2(z - 3) = 0$.

||9) Adott a $2x - 5y + 2z + 7 = 0$ egyenletű sík és az
 $x = 3 - t$, $y = -2 + 3t$, $z = 1 - 4t$ egyenletrendsze-
 rű egyenes. Határozzuk meg a sík és az egyenes haj-
 lásszögét.

Megoldás: Először a sík normálvektorának $\underline{n}(2,-5,2)$ és
 az egyenes $\underline{v}(-1,3,-4)$ irányvektorának a szögét állapítjuk
 meg:

$$\cos \varphi = \frac{\underline{n} \cdot \underline{v}}{|\underline{n}| |\underline{v}|}$$

$$|\underline{n}| = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$$

$$\underline{n} \cdot \underline{v} = -2 - 15 - 8 = -25,$$

tehát

$$\cos \varphi = \frac{-25}{\sqrt{33}\sqrt{26}}.$$

Mint hogy φ értéke tompaszög, ezért a sík és az egyenes haj-
 lásszöge $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

||10) Állapítsuk meg két sík hajlásszögét.

Megoldás: Erre a feladatra külön számpéldát nem dol-
 gozunk ki. Két sík hajlásszöge (amely legfeljebb derékszög
 lehet) normálvektoraik hajlásszögéből számítható.

Két sík nyilván akkor párhuzamos, ha normálvektoraik
 is párhuzamosak.

||11) Határozzuk meg a $3x - y + 2z = 3$ és a $7x - 3y +$
 $+ 5z = 5$ egyenletű síkok metszésvonalát.

Megoldás: A metszésvonal $\underline{v}$ irányvektora mindkét sík
 normálvektorára merőleges, tehát azok vektoriális szorza-
 tából számolható:

$$\underline{n}_1(3,-1,2), \underline{n}_2(7,-3,5) \text{ tehát } \underline{v} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2(1,-1,-2).$$

A metszésvonal egy pontját megkapjuk, ha annak egyik koor-
 dinátáját tetszőlegesen választjuk; legyen pl. $z = 0$. Ek-
 kor a síkok egyenleteiből származó $3x - y = 3$ és $7x - 3y =$
 $= 5$ egyenletrendszerből $x = 2$, $y = 3$ adódik, így a metszés-

vonal egy M pontja: $M(2,3,0)$. A metszésvonal egyenletrendszere tehát:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-2}.$$

- 12) Határozzuk meg a $7x - 3y + 5z = 5$ egyenletű síknak és az $x = 4 - t$, $y = 5 - 3t$, $z = -3 + t$ egyenletrendszerű egyenesnek a metszéspontját.

Megoldás: Ha a t paraméter valamely értékére az egyenes egyenletrendszeréből olyan (x, y, z) számhármasság adódik, amely a sík egyenletét kielégíti, akkor ez a számhármasság éppen a keresett metszéspont három koordinátája. A megfelelő t értéket úgy keressük, hogy a sík egyenletébe behelyettesítjük az egyenes egyenletrendszerét:

$$7(4 - t) - 3(5 - 3t) + 5(-3 + t) = 5.$$

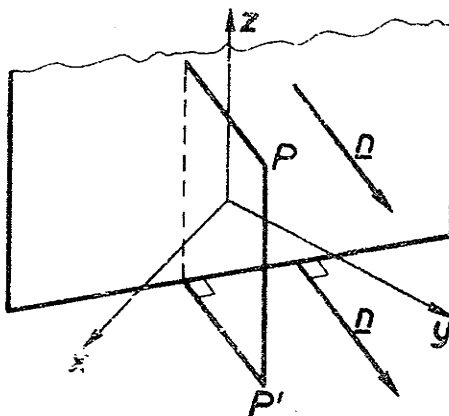
A kapott egyenletet t -re megoldva $t = 1$ -et kapunk. Ebből a metszéspont $M(3,2,-2)$. Ha az egyenletnek t -re végtelen sok megoldása van, akkor az egyenes benne fekszik a síkban, ha nincs az egyenletnek megoldása, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal.

Egyébként sík és egyenes párhuzamosságát (beleértve, hogy az egyenest tartalmazza a sík) eldönthetjük a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának merőlegességéből is, ekkor a két vektor skaláris szorzata 0.

Pont és sík távolságának kiszámítására a Hesse-féle normálegyenlet szolgál. Számítsuk ki a $P(2,1,8)$ pontnak az $n(3,4,0)$ normálvektorú $Q(-3,1,6)$ ponton áthaladó síktól való távolságát. A sík egyenlete a Hesse-féle normál alakban ($|n| = 5$):

$$\frac{3x + 4y + 5}{5} = 0, \text{ tehát a távolság } d = \frac{15}{5} = 3.$$

A legutolsó feladatnak még további tanulsága is van. Minthogy a sík $n(3,4,0)$ normálvektora az xy síkkal párhuzamos (8.4. ábra), ezért a sík az xy síkra merőleges, tehát a sík egyenlete megegyezik az xy síkkal alkotott metszésvonalának egyenletével, sőt a sík és a metszésvonal normálvektora is azonos. A $P(2,1,8)$ pont tehát ugyanolyan távol van a síktól, mint az xy síkon levő $P'(2,1,0)$ merőleges vetülete a metszésvonaltól. Ebből azonnal következik, hogy a sík koordinátageometriájában az egyenesnek is van Hesse-féle normálegyenlete, mégpedig az $ax+by+c=0$ egyenes normálegyenlete:



8.4. ábra.

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

ennek felhasználásával a síkban levő pontoknak az egyenes-
ből mért távolsága könnyen számítható.

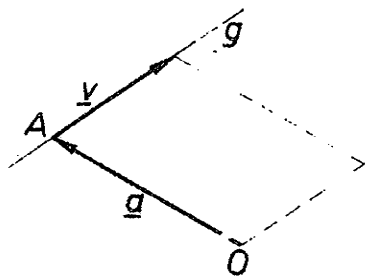
Gyakorlásra javasoljuk: Geometria feladatok 146-269.
és 282-306. feladatait.

Elméleti tananyag: Tankönyv 174-180, 182-188, 191-194.
pontok.

9. KÖTÖTT VEKTOROK. VEKTORRENDSZEREK

Két vektor egyenlőségének értelmét két leszűkítéssel: 1. arra az esetre, hogy két vektort hosszuk és irányuk egyenlősége esetén csakis akkor tekintünk egyenlőnek, ha ugyanazon az egyenesen vannak. Az ilyen vektorokat nevezzük kötött vektoroknak. Egyes mechanikai problémáknál ezek a vektorok igen fontos szerephez jutnak. A vektor egyenlősége hatásvonalára.

Kötött vektor jellemzése vektorkoordinátáival: Ha a $\underline{g}$ egyenesen levő $\underline{v}$ vektor A kezdőpontjába mutat $\underline{a}$ tér egy tetszőleges ($\underline{g}$ egyenesen kívül rekvő) O pontjából az $\underline{a}$ vektor, akkor az $\underline{m} = \underline{a} \times \underline{v}$ vektort a $\underline{v}$ vektor O pont-ra vonatkozó nyomatékának nevezzük (9.1. ábra). Ez a nyomaték vektor független attól, hogy a $\underline{g}$ egyenesen hol választjuk az A pontot. Az $\underline{m}$ mindig merőleges az O pont és $\underline{g}$ egyenes síkjára, hossza pedig annak a paralelogrammának a területével egyenlő, amelyet a $\underline{g}$ egyenesen levő $|\underline{v}|$ szakasz és az O pont meghatároznak. E paralelogramma magassága az O pont és a $\underline{g}$ egyenes távolsága, egyik oldal $|\underline{v}|$ hosszúságú, tehát területe valóban független attól, hogy a $\underline{g}$ egyenesen hol fekszik a $\underline{v}$ vektor.



9.1. ábra.

Az O pont általában a koordináta-rendszer origója; a vonatkoztatási pontra való tekintettel $\underline{m}$ -t gyakran $\underline{m}_0$ -ral jelöljük.

Határozzuk meg az A(2,3,1) ponton áthaladó $\underline{v}(1,-1,2)$ vektornak az origóra vonatkozó nyomatékát.

$\underline{m} = \underline{a} \times \underline{v}$ ahol $\underline{a}(2,3,1)$, $\underline{v}(1,-1,2)$ tehát az O-ra vonatkozó nyomaték (7,-3,-5).

A $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettőst a $\underline{v}$ kötött vektor O pontra vonatkozó vektorkoordinátáinak mondjuk.

Megjegyzés: Egy kötött vektornak a tér különböző pontjaira vonatkozó nyomatéka más-más vektor, de mindig merőleges a $\underline{v}$ -re, $\underline{v}\underline{m} = 0$. Egy kötött vektor nyomatéka kizárólag akkor 0, ha a hatásvonala átmegy a vonatkoztatási ponton.

Minden $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettős $\underline{v} \neq 0$ és $\underline{v}\underline{m} = 0$ esetén egyértelműen meghatároz egy kötött vektort, ha adott az O vonatkoztatási pont. Ha $\underline{r}_0$ -ral jelöljük az O pontból a $\underline{v}$ hatásvonalának egy pontjába merőlegesen érkező vektort, ak-

kor nyilván $\underline{m} = \underline{r}_0 \times \underline{v}$. Mindkét oldalt balról vektoriálisan szorozva $\underline{v}$ vektorral, $\underline{v} \times \underline{m} = \underline{v} \times (\underline{r}_0 \times \underline{v})$ adódik. A kifejtési tétel alkalmazásával $\underline{v} \times \underline{m} = \underline{v}^2 \underline{r}_0$ -t kapunk, mivel $\underline{v} \times \underline{r}_0 = 0$. Innen $\underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{v^2}$, a $\underline{v}$ vektor hatásvonalának egy pontját adja.

Határozzuk meg a $[\underline{v}, \underline{m}_0]$ vektorkettős hatásvonalának $\underline{r}_0$ pontját, ha $\underline{v}(-1, 2, -1)$ és $\underline{m}_0(3, 2, 1)$.

Látható, hogy $\underline{v} \times \underline{m}_0 = -3 + 4 - 1 = 0$, tehát a vektorkettős kötött vektort határoz meg, amelynek hatásvonalába mutató $\underline{r}_0$ vektor $\underline{v} \times \underline{m}_0(4, -2, -8)$, $\underline{v}^2 = 6$ és kapható $\underline{r}_0(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

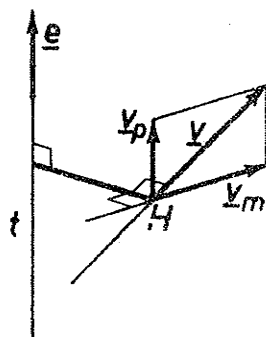
Ha az 0 vonatkoztatási pont helyett egy O' vonatkoztatási pontra akarjuk kiszámítani a vektorkoordinátákat, akkor $\underline{v}$ változatlan marad. Az O -ra vonatkozó $\underline{m}$ nyomaték és az O' -re vonatkozó $\underline{m}'$ nyomaték között az $\underline{m} = \underline{m}' + \underline{OO}' \times \underline{v}$, illetve $\underline{m}' = \underline{m} - \underline{OO}' \times \underline{v}$ összefüggés áll fenn.

Határozzuk meg a $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorkettős $\underline{v}(-1, 2, -1)$, $\underline{m}(3, 2, 1)$ $O'(2, -1, 1)$ pontra vonatkozó vektorkoordinátáit.

$\underline{m}' = \underline{m} - \underline{OO}' \times \underline{v}$, ahol $\underline{OO}'(2, -1, 1)$ és $\underline{OO}' \times \underline{v} = -\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}$, tehát $\underline{m}'(4, 1, -2)$; $\underline{v}' = \underline{v}$.

Tengelyre vonatkozó nyomaték: Ha egy t egyenes irányát egy $\underline{e}$ egységvektorral adjuk meg, akkor egy $\underline{v}$ vektornak a t egyenesre (tengelyre) vonatkozó nyomatékát úgy számítjuk ki, hogy a $\underline{v}$ vektornak t egy tetszőleges pontjára vonatkozó (vektor) nyomatékát skalárisan szorozzuk az $\underline{e}$ -ral. Ilyen módon látható, hogy a tengelyre vonatkozó nyomaték egy szám, amely szoros kapcsolatban van a mechanikai forgatónyomatékkal.

A t tengely és a $\underline{v}$ vektor hatásvonala két kitérő egyenes. Vegyük normál transzverzálisukat, ennek a $\underline{v}$ hatásvonalával közös pontja legyen H . A H kezdőpontú $\underline{v}$ vektort $\underline{e}$ -ral párhuzamos és reá merőleges összetevőkre bontva ($\underline{v} = \underline{v}_p + \underline{v}_m$), a $\underline{v}_p$ nem forgatja a tengelyt, a $\underline{v}_m$ forgatónyomatékát pedig a normál transzverzális hosszának és $|\underline{v}_m|$ szorzata adja. Ennek számértéke a $\underline{v}$ vektor t tengelyre vonatkozó nyomatékának abszolút értéke. A tengelyen megadott irány csupán azt befolyásolja, hogy a tengelyen jobb vagy bal irányú forgatóhatás észlelhető (9.2. ábra).



9.2. ábra.

Számítsuk ki a $[\underline{v}, \underline{m}_0]$ vektorkoordinátákkal adott $(\underline{v}(-1, 2, -1), \underline{m}_0(3, 2, 1))$ kötött vektornak az $A(2, 2, -1)$ ponton áthaladó $\underline{e}(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$ egységvektorral irányított tengelyre vonatkozó nyomatékát.

Egy korábbi feladatunknál láttuk, hogy a szóban forgó kötött vektor hatásvonalának egy pontja $\underline{r}_0(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ helyvektorú. Az $\underline{AR}_0$ tehát $(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$, ezek szerint az A pontra vonatkozó nyomaték $\underline{AR}_0 \times \underline{v}(3, -1, -5)$. A tengelyre számított nyomaték $(\underline{AR}_0 \times \underline{v})\underline{e} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} - \frac{10}{3} = -1$.

Bebizonyítható, hogy valamely $(\underline{v} \neq 0)$ kötött vektornak az $\underline{e}$ egységvektorral irányított t tengelyre vonatkozó nyomatéka pontosan akkor 0, ha a $\underline{v}$ hatásvonala metszi a t tengelyt, vagy párhuzamos vele.

A $[\underline{v}_1, \underline{m}_1]$ és $[\underline{v}_2, \underline{m}_2]$ vektorkoordinátákkal jellemzett hatásvonalak $(\underline{v}_1 \underline{m}_1 = 0, \underline{v}_2 \underline{m}_2 = 0)$ pontosan akkor vannak egy síkban, ha

$$\underline{v}_1 \underline{m}_2 + \underline{v}_2 \underline{m}_1 = 0.$$

Ugyanis az $\underline{r}_1$, illetve $\underline{r}_2$ helyvektorú pontokon áthaladó $\underline{v}_1$, illetve $\underline{v}_2$ vektorok hatásvonalai pontosan akkor vannak egy síkban, ha $(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)\underline{v}_1 \underline{v}_2 = 0$, vagyis $\underline{r}_1 \underline{v}_1 \underline{v}_2 - \underline{r}_2 \underline{v}_1 \underline{v}_2 = 0$.

Mínthogy $\underline{r}_1 \times \underline{v}_1 = \underline{m}_1$ és $\underline{r}_2 \times \underline{v}_2 = \underline{m}_2$, ezért az előbbi vegyes-szorzatokba a nyomatékvektorokat beírva éppen $\underline{m}_1 \underline{v}_2 + \underline{v}_1 \underline{m}_2 = 0$ adódik.

Vektorrendszer

A $[\underline{v}_1, \underline{m}_1], [\underline{v}_2, \underline{m}_2], \dots, [\underline{v}_k, \underline{m}_k]$ kötött vektorok (a nyomatékok u.azon 0 pontra vonatkoznak) egy halmazát vektorrendszernek nevezzük. A vektorrendszer eredővektorát, illetve eredő nyomatékát a következő összegekként definiáljuk:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n \text{ az ún. } \underline{\text{eredő vektor}},$$

$$\underline{m} = \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \dots + \underline{m}_n \text{ az ún. } \underline{\text{eredő nyomaték}}.$$

Ezt az eljárást a vektorrendszer 0 pontra való redukálásának is nevezzük.

Ha a fenti vektorrendszernek más vonatkoztatási pontra, pl. O' -re vonatkozó $\underline{v}'$ eredő vektorát és $\underline{m}'$ eredő nyomatékát kell meghatározni, akkor $\underline{v}' = \underline{v}$ és $\underline{m}' = \underline{m} - \underline{OO'} \times \underline{v}$ összefüggés alapján számolunk.

A két egyenlőség megfelelő oldalait skalárisan szorozva kapjuk, hogy az eredő vektor és az eredő nyomaték skaláris szorzata független a vonatkoztatási pont megválasztásától: $\underline{vm} = \underline{v}' \underline{m}'$.

Ezt az állandó, és csakis a vektorrendszerre jellemző $V = \mathbf{v} \cdot \mathbf{m}$ szorzatot a vektorrendszer skalárinvariánsának (vagy saját nyomatékának) nevezzük.

Vektorpár

A vektorpár $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ két ellentett kötött vektorból álló vektorrendszer, amelyek hatásvonala párhuzamos. Eredő nyomatékuk független a vonatkoztatási ponttól és merőleges a vektorpár síkjára. A vektorpár eredő vektora $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. A vektorpár nyomatékának hossza a két vektor által meghatározott paralelogramma területével egyenlő.

Állítsunk elő egy olyan vektorpárt, amely a $[0, \mathbf{m}]$ vektorrendszert állítja elő, ha $\mathbf{m}(2, -3, 1)$.

Az egyik pl. $\mathbf{v}_1$ vektor lehet az origón áthaladó $\mathbf{v}_1(-1, 0, 2)$, amely láthatóan merőleges $\mathbf{m}$ -re. Ennek az origóra vonatkozó nyomatéka 0.

A másik vektor $\mathbf{v}_2(1, 0, -2)$ kell legyen, és az origóra vonatkozó nyomatéka $\mathbf{m}(2, -3, 1)$. Tehát a $\mathbf{v}_2$ vektor hatásvonalának egy pontja $\mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{m}}{v_2^2}$ helyvektorú.

$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{m}(-6, -5, -3)$; $v_2^2 = 5$, tehát $\mathbf{r}_2(-\frac{6}{5}, -1, -\frac{3}{5})$.

Vektorrendszerek egyenértékűsége: Két vektorrendszer egyenértékű, ha eredővektoraik és ugyanazon tetszőleges pontra számított eredőnyomatékaik egyenlők.

Vektorrendszer helyettesítése: Akkor beszélünk egy vektorrendszer helyettesítéséről, ha a vektorrendszerrel egyenértékű — lehetőleg kevés kötött vektorból álló — vektorrendszert állítunk elő. A vektorrendszerek áttekintésére és egyszerűbb helyettesítési lehetőségének megállapítására a $V = \mathbf{v} \cdot \mathbf{m}$ skalárinvariáns értékét vizsgáljuk.

Ha $V = 0$, akkor ez többféleképpen teljesülhet:

- Ha $\mathbf{v} = 0$ és $\mathbf{m} = 0$, akkor egyensúlyi vektorrendszerrel beszélünk.
- Ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $\mathbf{m} = 0$, akkor a vonatkoztatási ponton áthaladó $\mathbf{v}$ irányú hatásvonalban fekvő $\mathbf{v}$ vektor a vektorrendszer legegyszerűbb helyettesítése.
- Ha $\mathbf{v} = 0$ és $\mathbf{m} \neq 0$, akkor a vektorrendszer vektorpárral helyettesíthető. Ilyen helyettesítést láttunk a vektorpárok tárgyalásánál bemutatott példában.
- Ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $\mathbf{m} \neq 0$, akkor a vektorrendszer egyetlen $\mathbf{v}$ kötött vektorral helyettesíthető, amelynek hatásvonala

az $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}}{v^2}$ helyvektorú ponton áthaladó $\mathbf{v}$ irányú egyenes.

Ha $V \neq 0$, akkor általános vektorrendszerrel beszélünk. Ebben az esetben a $[\underline{v}, \underline{m}]$ által meghatározott vektorrendszert felbontjuk két vektorrendszerre azáltal, hogy az $\underline{m}$ eredő nyomatéknak vesszük a $\underline{v}$ -ral párhuzamos $\underline{m}_1$ és a $\underline{v}$ -ra merőleges $\underline{m}_2$ összetevőit. A vektorrendszer felbontása:

$$[\underline{v}, \underline{m}] = [\underline{v}, \underline{m}_2] + [\underline{0}, \underline{m}_1]$$

A $[\underline{v}, \underline{m}_2]$ vektorrendszer egy olyan kötött vektorral helyettesíthető, amely az $\underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{v^2}$ helyvektorú pontból kiinduló $\underline{v}$ vektorból áll. Ugyanis könnyen belátható, hogy $\underline{v} \times \underline{m} = \underline{v} \times \underline{m}_2$, mivel $\underline{v} \times \underline{m} = \underline{v} \times (\underline{m}_1 + \underline{m}_2) = \underline{v} \times \underline{m}_1 + \underline{v} \times \underline{m}_2$, ahol $\underline{v}$ és $\underline{m}_1$ párhuzamossága folytán $\underline{v} \times \underline{m}_1 = \underline{0}$.

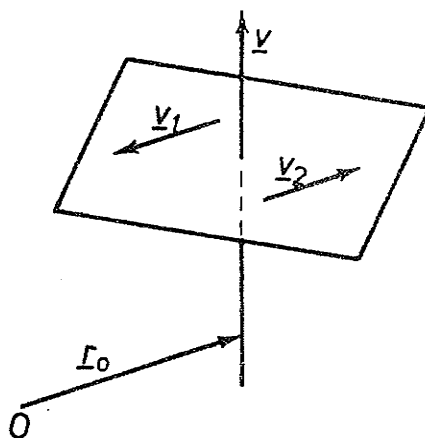
Centrális egyenes: A $[\underline{v}, \underline{m}]$ vektorrendszer centrális egyenesének (vagy centrális tengelyének) nevezzük az $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{v^2} + \underline{v}t$ vektoregyenletű egyenest. A centrális tengely azáltal is kitüntetett szerepű egyenes, hogy kizárólag a centrális tengely pontjaira vonatkozóan számított eredő nyomatékvektor párhuzamos a rendszer eredő vektorával.

Az általános vektorrendszer felbontásában szereplő $[\underline{0}, \underline{m}_1]$ vektorrendszer pedig nyilván egy olyan vektorpár, amelynek síkja az $\underline{m}_1$ vektorral párhuzamos centrális egyenesre merőleges. (Vektorpár konkrét előállítását már korábban láttuk.)

Ezek szerint egy $[\underline{v}, \underline{m}]$ általános vektorrendszer mindig helyettesíthető a centrális egyenesben ható $\underline{v}$ vektorral és a centrális egyenesre merőleges síkban levő vektorpárral (9.3. ábra). Az általános vektorrendszer ilyen előállítása ún. vektorcsavart ad.

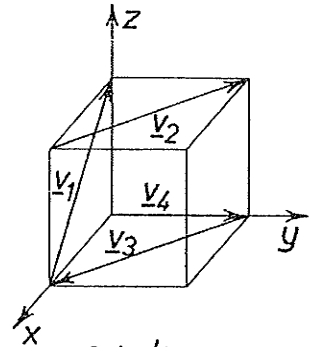
Más, inkább elvi jelentőségű helyettesítési lehetőséget kapunk az általános vektorrendszerre, ha azt a vonatkoztatási ponton áthaladó $\underline{v}$ vektorral és az $\underline{m}$ eredő nyomatéknak megfelelő vektorpárral helyettesítjük.

További helyettesítési lehetőség: Egy általános vektorrendszer mindig helyettesíthető két kötött vektorral, amelyek közül az egyik szabadon választható. (Hatásvonalaik kitérő egyenesek.)



9.3. ábra.

Példaként vegyük a 9.4. ábrán megadott vektorrendszert, ahol az ábrázolt kocka élhossza 1 egység. Számítsuk ki a vektorrendszer origóra vonatkozó eredő nyomatékát és eredő vektorát. Állapítsuk meg, hogy milyen típusú vektorrendszer és mivel helyettesíthető. Írjuk fel a centrális egyenes egyenletrendszerét.



9.4. ábra.

Legyenek a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vektorok hatásvonalához vezető helyvektorok rendre $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, \underline{r}_4$. Ekkor

$\underline{r}_1(1,0,0)$	$\underline{v}_1(-1,0,1)$	$\underline{m}_1(0,-1,0)$
$\underline{r}_2(1,0,1)$	$\underline{v}_2(-1,1,0)$	$\underline{m}_2(-1,-1,1)$
$\underline{r}_3(1,0,0)$	$\underline{v}_3(1,-1,0)$	$\underline{m}_3(0,0,-1)$
$\underline{r}_4(0,0,0)$	$\underline{v}_4(0,1,0)$	$\underline{m}_4(0,0,0)$
Az eredők:	$\underline{v}(-1,1,1)$	$\underline{m}(-1,-2,0)$

A rendszer skalárinvariánsa $V = \underline{v} \cdot \underline{m} = 1 - 2 = -1$.

A vektorrendszer tehát vektorcsavart ad, amely a centrális egyenesben ható $\underline{v}$ vektorral és a centrális egyenesre merőleges síkban fekvő megfelelő vektorpárral helyettesíthető. A centrális tengely egyenletrendszere:

$$\underline{v} \times \underline{m}(2, -1, 3), \quad \underline{v}^2 = 3, \quad \underline{r}_0 = \frac{\underline{v} \times \underline{m}}{\underline{v}^2} \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right).$$

Innen a centrális egyenes az

$$x = \frac{2}{3} - t, \quad y = -\frac{1}{3} + t, \quad z = 1 + t$$

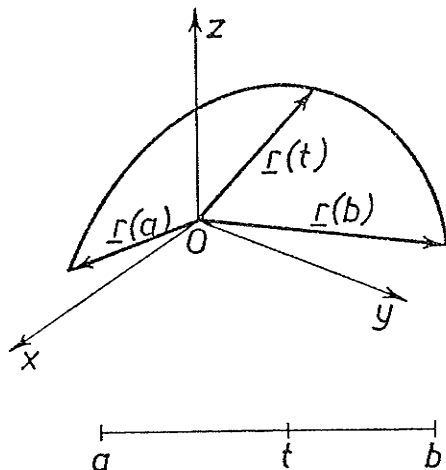
egyenletrendszerű egyenes.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometria feladatok: 307-340. feladatait.

Elméleti tananyag: Tankönyv 234-241. pontok.

10. GÖRBÉK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

A térben mozgó pont pályája általában valamilyen görbe, amelyet ha koordináta-geometriai eszközökkel akarunk jellemezni, akkor megadjuk a pont r helyvektorát a különböző időpillanatokban. Ezáltal a t idő és a helyvektorok között egy $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvénykapcsolatot létesítettünk (10.1. ábra). Az ilyen függvényt vektor-skalár függvénynek nevezzük. A görbéket ilyen függvényekkel fogjuk vizsgálni. Minthogy azonban nem minden vektor-skalár függvény ír le görbét, ezért először e függvényekkel kapcsolatos fogalmakat és összefüggéseket foglaljuk össze.



10.1. ábra.

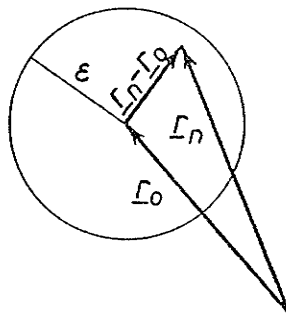
Egyváltozós (vagy egy-paraméteres) vektor-skalár függvényt kapunk, ha a valós számok egy $a \leq t \leq b$ halmazának minden pontjához hozzárendelünk egy $\underline{r}(t)$ vektort.

A vektor-skalár függvényt általában koordinátafüggvényeivel, vagyis a következő alakban adjuk meg:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}x(t) + \underline{j}y(t) + \underline{k}z(t).$$

A vektoroknak egy $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n, \dots$ halmazát vektorsorozatnak nevezzük.

Az $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n, \dots$ vektorsorozat konvergens és határértéke (limesze) az $\underline{r}_0$ vektor (jelölése: $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{r}_n = \underline{r}_0$), ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $N(\varepsilon)$ szám, hogy $|\underline{r}_n - \underline{r}_0| < \varepsilon$, ha csak $n > N(\varepsilon)$. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a vektorokat közös kezdőpontból indítva a vektorsorozat $n > N(\varepsilon)$ indexű elemei az $\underline{r}_0$ vektor végpontja körüli ε sugarú gömb belsőjébe mutatnak (10.2. ábra).



10.2. ábra.

Vektor-skalár függvény határértéke

A vektor-skalár függvény határértékének fogalmára két — kimutathatóan egyenértékű — definíciót adunk.

I. Az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli határértéke az $\underline{r}_0$, ha bármely olyan $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ sorozatra, ahol t_n a t_0 -hoz tart ($t_n \neq t_0$) a megfelelő $\underline{r}(t_1), \underline{r}(t_2), \dots, \underline{r}(t_n), \dots$ vektorsorozat az $\underline{r}_0$ -hoz tart.

II. Az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli határértéke az $\underline{r}_0$, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy ha $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ és ($t \neq t_0$), akkor $|\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)| < \varepsilon$.

A határérték jelölése:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}_0$$

Vektorsorozatok és vektorfüggvények konvergenciájához kapcsolódó geometriai fogalom az alakzatok konvergenciája.

Pontok sorozata konvergál egy P ponthoz, ha a pontok helyvektorai konvergálnak a P pont helyvektorához.

Egyenesek egy sorozata konvergál egy e egyeneshez (az e egyenes az egyenessorozat határhelyzete), ha az egyenesek pontjainak, illetőleg irányvektorainak egy-egy sorozata konvergál az e egyenes egy pontjához, illetőleg irányvektorához.

Síkok egy sorozata konvergál a σ síkhoz, ha a síkok pontjainak, illetőleg normálvektorainak egy-egy sorozata konvergál a σ sík egy pontjához, illetőleg normálvektorához.

Körök egy sorozata konvergál egy k körhöz, ha a körök középpontjai, sugarai, illetve síkjai konvergálnak a k kör középpontjához, sugarához, illetve síkjához.

Vektor-skalár függvény folytonossága

Az $\underline{r}(t)$ függvényt a t_0 helyen folytonosnak mondjuk, ha a t_0 helyen van határértéke és az a függvényértékkel egyenlő: $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}(t_0)$.

Kimutatható, hogy az $\underline{r}(t)$ függvény pontosan akkor folytonos a t_0 helyen, ha koordinátafüggvényei is folytonosak a t_0 helyen.

Folytonos vektor-skalár függvények összege, különbsége, skaláris- és vektoriális szorzata, valamint folytonos skalár-függvénnyel való szorzata is folytonos.

Vektor-skalár függvény differenciálhatósága

Az $\underline{r}(t)$ függvény a $t = t_0$ helyen differenciálható (deriválható), ha a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}$$

határérték létezik. Ezt a határértéket mondjuk az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli differenciálhányadosának vagy deriváltjának.

Jelölése: $\frac{d\underline{r}(t)}{dt}$ vagy $\dot{\underline{r}}(t)$. Ha a $t = t_0$ helyen vesszük a deriváltat, akkor $\frac{d\underline{r}(t_0)}{dt}$, illetve $\dot{\underline{r}}(t_0)$ a derivált jelölése.

A derivált definíciójából következik, hogy $\underline{r}(t) = \underline{c}$ (áll.) függvény deriváltja a 0.

Levezethetők a következő differenciálási szabályok:

- $\frac{d}{dt}(\underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t)) = \dot{\underline{r}}_1(t) + \dot{\underline{r}}_2(t),$
- $\frac{d}{dt}(c\underline{r}(t)) = c\dot{\underline{r}}(t)$ (c állandó szám),
- $\frac{d}{dt}[f(t)\underline{r}(t)] = \dot{f}(t)\underline{r}(t) + f(t)\dot{\underline{r}}(t)$ ($f(t)$ skálárfüggvény),
- $\frac{d}{dt}[\underline{r}_1(t)\underline{r}_2(t)] = \dot{\underline{r}}_1(t)\underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t)\dot{\underline{r}}_2(t),$
- $\frac{d}{dt}[\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)] = \dot{\underline{r}}_1(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \dot{\underline{r}}_2(t).$

Láncszabály

Ha $t = t(\tau)$, akkor $\frac{d}{d\tau} \underline{r}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}.$

Példaként megmutatjuk, hogy az $\underline{r}(t)$ függvényre vonatkozó differenciálási szabályok alkalmazásával hogyan lehet az $|\underline{r}(t)|$ deriváltját előállítani:

$$|\underline{r}(t)|^2 = (\underline{r}(t))^2$$

tehát

$$\frac{d}{dt} |\underline{r}(t)|^2 = \frac{d}{dt} (\underline{r}(t))^2$$

azaz

$$2|\underline{r}(t)| \frac{d}{dt} |\underline{r}(t)| = 2\underline{r}(t) \dot{\underline{r}}(t).$$

Innen

$$\frac{d}{dt} |\underline{r}(t)| = \frac{\underline{r}(t)}{|\underline{r}(t)|} \cdot \dot{\underline{r}}(t) = \underline{r}^0 \dot{\underline{r}}.$$

Állítsuk elő az $\underline{r}(t) = i \cos^2 t + j t \sin t + k t^2$ függvény derivált függvényét. A koordinátafüggvényeket deriválva

$$\dot{\underline{r}}(t) = i(-2 \cos t \sin t) + j(\sin t + t \cos t) + k 2t$$

adódik.

Megjegyzés: A deriválás eredményeként kapott függvények folytonossága és differenciálhatósága ismét kérdés-ként merülhet fel. Ha az $\underline{r}(t)$ függvény differenciálható,

akkor második deriváltját $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ -vel s í.t. $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ -vel jelöljük a harmadik deriváltat. A gyakorlati igényeknek általában megfelel, ha a vizsgált görbéket leíró $\mathbf{r}(t)$ függvényekről feltesszük, hogy háromszor folytonosan differenciálhatók és $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ a vizsgált intervallumon.

Görbék ívhossza. Áttérés az ívhossz szerinti paraméterezésre

Az $a \leq t \leq b$ intervallumon értelmezett $\mathbf{r}(t)$ által meghatározott görbét rektifikálhatónak mondunk, ha az $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ paramé-

terekhez $\mathbf{r}(t)$ által rendelt $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok (10.3. ábra) által meghatározott törött vonalak $\sum_{i=0}^{n-1} P_i P_{i+1}$ hosszai-

nak létezik határértéke, amidőn a maximális $P_i P_{i+1}$ húr hossza is 0-hoz tart.

Ezt a határértéket nevezzük a megfelelő görbedarab s ív-hosszának:

$$s = \lim_{\max P_i P_{i+1} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n P_i P_{i+1}.$$

Az általunk vizsgált görbéknek van ívhosszuk és

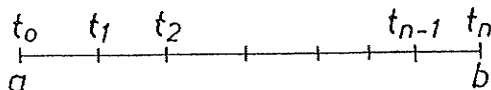
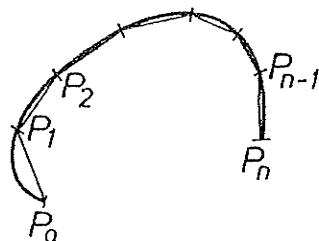
$s = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}| dt$ -ből számítható ki. A feltételeinknek eleget tevő görbék esetében az $s(t)$ ívhosszfüggvénynek van inverze, tehát létezik egy $t(s)$ függvény, amivel elvben minden $\mathbf{r}(t)$ függvényünkénél át tudunk térni az ívhossz szerinti paraméterezésre.

Az ívhossz szerinti paraméterezéssel felírt vektorfüggvény $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ alakú, a deriváltakat pedig $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$ -vel jelöljük.

Vektor-skalár függvény deriváltjának geometriai jelentése

Az $\mathbf{r}(t)$ által leírt görbe érintője az $\mathbf{r}(t_0)$ helyvektorú P görbepontban a $\overrightarrow{PQ}$ határhelyzeteként jön létre, midőn a Q pont a P-hez tart (10.4. ábra).

A $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$, tehát



10.3. ábra.

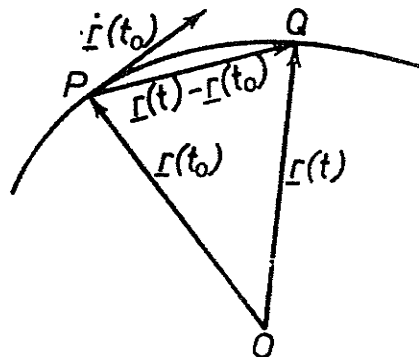
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\underline{r}}(t_0)$$

vektor az $\underline{r}(t)$ függvény deriváltja a P pontban éppen az érintővektor.

Az imént mondottak függetlenek a paraméterezéstől. Az ívhossz szerinti paraméterezés esetén megmutatható, hogy az $\underline{r}'(s)$ érintővektor abszolút értéke $|\underline{r}'(s)| = 1$, tehát a helytől függetlenül egységvektor a $\underline{t} = \underline{r}'$, amelyet általános pa-

raméterezés esetén $\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|}$

állíthatunk elő.



10.4. ábra.

Kisérő triéder

Látható, hogy $(\underline{r}')^2 = \dot{t}^2 = 1$ alapján ennek deriváltja $2\underline{r}'\underline{r}'' = 2\dot{t}\dot{t}' = 0$, ami $\underline{t}$ és $\dot{t}'$ merőlegességét jelenti. Az $\underline{r}'' = \dot{t}'$ vektor irányába mutató egységvektort a görbe $\underline{n}$ főnormális egységvektorának nevezzük.

A $\dot{t}' = G\underline{n}$ alakban állítható elő, és a G szorzószámot a görbe pontbeli görbületének nevezzük, amely az érintővektor „változási sebességét” mutatja.

A $\underline{t}$ és $\underline{n}$ vektorok síkját a görbe pontbeli simulósík-jának nevezzük. Általános paraméterezés esetén az $\underline{r}$ és $\dot{\underline{r}}$ vektorok a simulósíkban vannak.

Ha a kinematikában szokásos módon az $\underline{r}(t)$ -ben szereplő t paraméter az idő, akkor a sebességvektor $\dot{\underline{r}}(t) = v \cdot \underline{t}$, a gyorsulásvektor $\ddot{\underline{r}}(t) = a\underline{t} + Gv^2\underline{n}$ alakban írható fel, ahol v a pályamenti sebességet, a a pályamenti gyorsulást és G a térgörbe görbületét jelenti. (A görbületet később tárgyaljuk.)

A $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$ szorzattal kapjuk a simulósík normális egységvektorát. A $\underline{b}$ vektort a görbe binormális egységvektorának nevezzük.

A görbe pontjaihoz rendelt $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ egységvektorok által kifeszített derékszögű triédert a görbe kisérő triéderének nevezzük.

A kísérő triéder lapsíkjai a simulósíkon kívül az $\underline{n}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott normálsík, és a $\underline{b}$ és $\underline{t}$ vektorok által meghatározott rektifikálsík.

A kísérő triéder $\underline{b}$, illetve $\underline{n}$ vektorának általános paraméterezés esetén való előállítására:

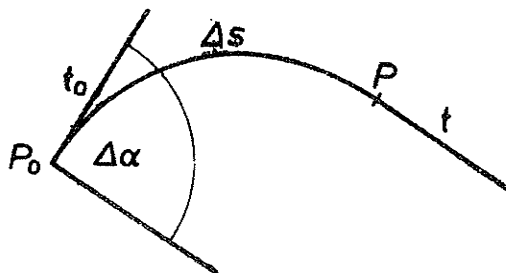
$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|} \quad \text{illetve} \quad \underline{n} = \frac{(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}}{|(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}|}.$$

Ezek ismeretében a kísérő triéder élegyeneseinek egyenletrendszeré, illetve a kísérő triéder lapsíkjainak egyenlete könnyen felírható.

Görbe görbülete és torziója

A simulósíkot síkok határhelyzeteként is értelmezhetjük: ha P_1, P_2, P_3 a görbe három, nem egy egyenesbe eső pontja, és az általuk meghatározott sík határhelyzetét vizsgáljuk, midőn P_1, P_2, P_3 pont a görbe P_0 pontjához tart, akkor a határhelyzet a P_0 ponthoz tartozó simulósík.

A görbe görbületét a P_0 pontban a következőképpen is értelmezhetjük: (a $t' = G_n$ korábbi definícióval egyenértékűen). Legyen a görbe P_0 pontbeli érintője t_0 és egy P pontbeli érintő t . Jelölje $\Delta\alpha$ a t és t_0 érintők szögét, Δs pedig a P_0P görbeív hosszát (10.5. ábra).



10.5. ábra.

Nyilván Δs nullához tart, ha a P ponttal a P_0 -hoz közeledünk. A görbe görbületének a $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = G$ határértéket nevezzük.

A görbületet általános paraméterek esetén a

$$G = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

kifejezésből számíthatjuk ki. Az $R = \frac{1}{G}$ -t a görbe görbületi sugarának nevezzük. Azt a kört, amelynek síkja a simulósík, középpontja pedig a főnormális irányában a görbeponttól R távolságra van, a görbe görbületi körének, a kör középpontját pedig a görbületi középpontnak nevezzük.

A görbületi középpontba mutató $\underline{c}$ helyvektor

$$\underline{c} = \underline{r}(t_0) + R\underline{n} = \underline{r}(t_0) + \frac{1}{G} \underline{n}.$$

A görbére jellemző másik mennyiség a simulósík változási sebességét mutatja. Minthogy a simulósík normálisa a binormális, és a binormális ívhossz szerinti deriváltja

$$\underline{b}' = -\tau \underline{n}$$

alakban írható fel, a τ szorzószámot nevezzük a görbe torziójának (vagy csavarodásának).

A torzió abszolút értéke a binormális $\Delta\beta$ szögváltozása és a hozzá tartozó Δs ívhossz hányadosának határértékeként is megkapható:

$$|T| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}.$$

A torziót általános parameterezés esetén a következő alakban írhatjuk fel:

$$T = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

Frenet formulák

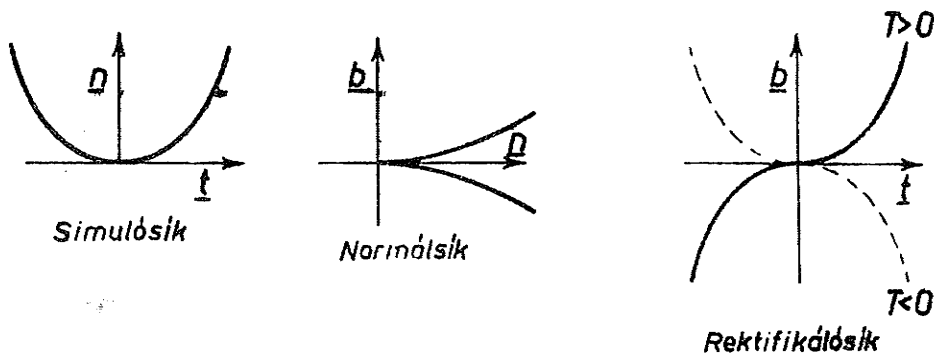
Ivhossz szerinti parameterezés esetén a kísérő triéder élvektorainak deriváltjai a görbület és torzió segítségével az alábbi módon adódnak:

$$\underline{t}' = G\underline{n}$$

$$\underline{n}' = -G\underline{t} + T\underline{b}$$

$$\underline{b}' = -T\underline{n}.$$

A görbe pontjának környezetében való viselkedését jól szemlélteti, ha a ponthoz tartozó kísérő triéder lapjaira való merőleges vetületét megnézzük. Ezt szemlélteti a 10.6. ábra.



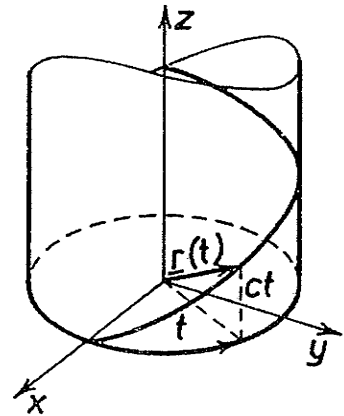
10.6. ábra.

Látható, hogy a görbe vetülete akkor oszidos görbe, ha a vetítési irány az érintővektor iránya.

A csavarvonal

A csavarvonal egy forgáshengeren mozgó pont pályagörbéje, amelynél a tengellyel párhuzamos elmozdulás arányos a tengely körüli szögelfordulással (10.7. ábra).

Eszerint az r sugarú hengerre írt csavarvonal koordinátás előállítására $x = r \cos t$; $y = r \sin t$; $z = ct$, ahol c ($c \neq 0$) az arányossági tényező. Egy menethez 2π szögelfordulás tartozik, tehát a teljes menetemelkedés $m = c2\pi$.



10.7. ábra.

Határozzuk meg a csavarvonal görbületét és torzióját:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(-r \sin t) + \underline{j}r \cos t + \underline{k}c,$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(-r \cos t) + \underline{j}(-r \sin t),$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(r \sin t) + \underline{j}(-r \cos t),$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{r^2 + c^2},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}cr \sin t - \underline{j}cr \cos t + r^2 \underline{k},$$

$$|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = \sqrt{r^2(r^2 + c^2)}, \quad \ddot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = cr^2.$$

Tehát

$$G = \frac{r}{r^2 + c^2} \quad \text{és} \quad T = \frac{c}{r^2 + c^2},$$

mindkettő független a pont helyétől, vagyis állandó.

Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = \underline{i}(t^2 - 1) + \underline{j}(t + 2) + \underline{k}(t^3 - t)$ görbe $t = 1$ pontjában a kíséző triéder élégyeneseseinek egyenletrendszerét, a kíséző triéder lapsíkjaiknak egyenletét. Határozzuk meg a pontban a görbületet, a görbületi kör középpontját és a görbe torzióját.

$$\underline{r}(t) = \underline{i}(t^2 - 1) + \underline{j}(t + 2) + \underline{k}(t^3 - t) \quad \underline{r}(1) = 3\underline{j} \quad P(0, 3, 0)$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = 2t\underline{i} + \underline{j} + 3t^2\underline{k} \quad \dot{\underline{r}}(1) = 2\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 2\underline{i} + 6t\underline{k} \quad \ddot{\underline{r}}(1) = 2\underline{i} + 6\underline{k}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{k} \quad \ddot{\underline{r}}(1) = 6\underline{k}$$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6\underline{i} - 8\underline{j} - 2\underline{k}$$

a binormális irányába mutató vektor: $(3, -4, -1)$

$$(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14\underline{i} - 16\underline{j} + 22\underline{k}$$

a főnormális irányába mutató vektor: $(-7, -8, 11)$

$$\text{Az érintő egyenes: } \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\text{A binormális egyenes: } \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$\text{A főnormális egyenes: } \frac{x}{-7} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z}{11}$$

$$\text{A simulósík: } 3x - 4(y - 3) - z = 0$$

$$\text{A normálsík: } 2x + (y - 3) + 2z = 0$$

$$\text{A rektifikálósík: } -7x - 8(y - 3) + 11z = 0$$

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad |\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$\ddot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = -12$$

Tehát a görbület $G = \frac{2\sqrt{26}}{27}$, a görbületi középpont:

$$\underline{n} = -\frac{7}{3\sqrt{26}} \underline{i} - \frac{8}{3\sqrt{26}} \underline{j} + \frac{11}{3\sqrt{26}} \underline{k} \quad \text{a főnormális egységvektor}$$

$$\frac{1}{G} \underline{n} = \frac{-189}{156} \underline{i} - \frac{216}{156} \underline{j} + \frac{297}{156} \underline{k} = -\frac{63}{52} \underline{i} - \frac{72}{52} \underline{j} + \frac{99}{52} \underline{k}$$

$$\underline{c} = -\frac{63}{52} \underline{i} + (3 - \frac{72}{52}) \underline{j} + \frac{99}{52} \underline{k}$$

$$\text{A torzió } T = \frac{-12}{104} = \frac{-3}{26}$$

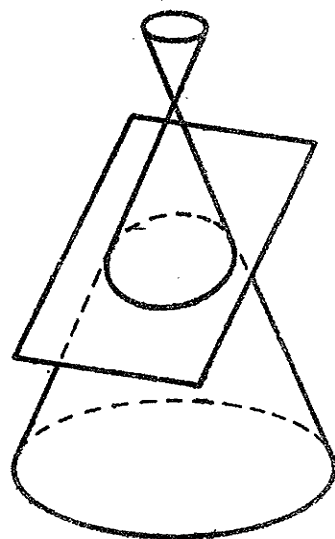
Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok: 126. old. - 132. old. 37-77. feladatokat és 122. old. - 125. old. 11-26. feladatokat.

Elméleti tananyag: Tankönyv 243-254. pontok.

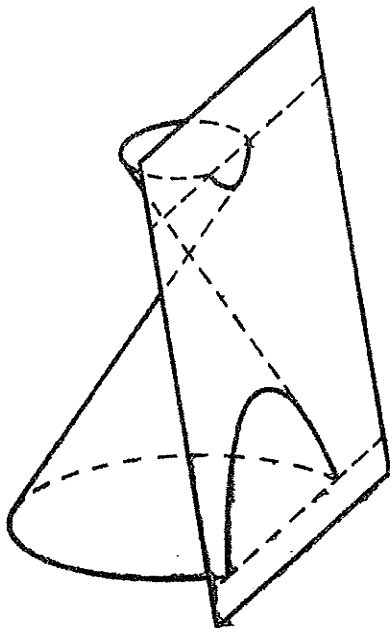
11. KÚPSZELETEK

Az ellipszist, a hiperbolát és parabolát közös néven kúpszeleteknek is szoktuk mondani. Ez az elnevezés onnan ered, hogy mindhárom görbe előállítható forgáskúp síkmetszeteként. Az összes ellipszis, hiperbola és parabola forgáskúp alkalmas síkkal való metszésével létrejön.

Ha a forgáskúpot olyan sík metszi el, amely nem megy át a kúp csúcán és a kúp tengelyére sem merőleges, de a kúp valamennyi alkotóját metszi, akkor a metszetgörbe ellipszis (11.1. ábra).



11.1. ábra.

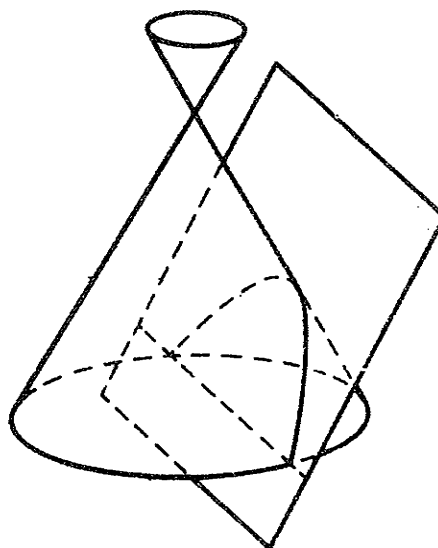


11.2. ábra.

Ha a forgáskúpot két alkotójával párhuzamos sík metszi, akkor a metszetgörbe hiperbola (11.2. ábra).

Ha a forgáskúpot olyan sík metszi el, amely csak egy kúpalkotót nem metsz, vagyis párhuzamos e kúpalkotóhoz tartozó érintősíkkal, akkor a metszetgörbe parabola (11.3. ábra).

A továbbiakban e görbék síkbeli származtatását is meg fogjuk adni, és azok alapján fogunk kúpszelet-szerkesztési feladatokat megoldani.



11.3. ábra.

Ellipszis

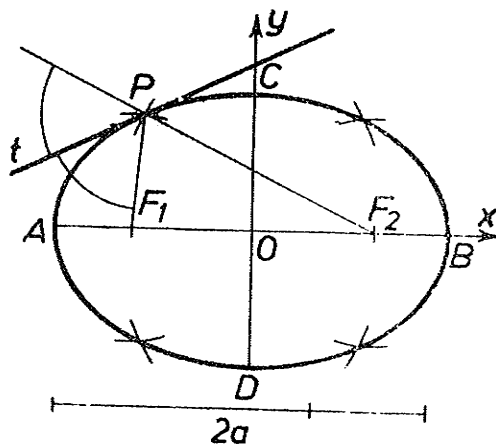
Ellipszisnek nevezük a sík azon pontjainak összességét, amelyeknek két ponttól (az F_1 és F_2 fókuszoktól)

mért távolságösszege állandó. A távolságösszeg (jelölése: $2a$) mindig nagyobb a fókuszok F_1F_2 távolságánál (11.4. ábra). E definíció alapján szerkeszthetők az ellipszis pontjai. Az ellipszis pontjai az F_1F_2

egyenesre (nagytengetely egyenese) és az F_1F_2

szakasz felező merőlegesére (kistengely egyenese) szimmetrikusan adódnak. A két szimmetria tengely közös pontja az O középpont, amelyre centrálisan szimmetrikus az ellipszis.

Az ellipszisnek van két pontja A és B a nagytengetely egyenesén az O ponttól a távolságra. A kistengelyen levő ellipszis pontok az F_1 és F_2 fókuszoktól a távolságra levő C és D pontok. Az AB szakasz az ellipszis nagytengetelye, CD az ellipszis kistengelye ($CD = 2b$). az



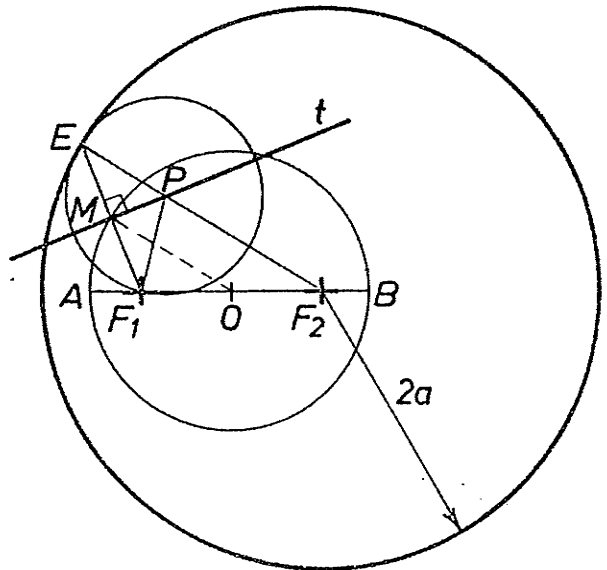
11.4. ábra.

ellipszis egy P pontját az F_1 és F_2 pontokkal összekötő szakaszok az ellipszis vezérsugarai.

Kimutatható, hogy az ellipszis P pontbeli t érintője a PF_1 és PF_2 vezérsugarak külső szögének a szögfelezője.

Ezzel a származtatással egyenértékű a következő:

Az ellipszis a sík azon körközéppontjainak az összessége, amelyek egy adott F_2 középpontú $2a$ sugarú kört — az ún. ellenkört — érintenek, és átmennek a kör belsőjében fekvő, de annak középpontjától különböző F_1 fókuszponton (11.5. ábra). Egy ilyen körközéppont a P pont, a hozzá tartozó kör az E ellenpontban érinti az ellenkört ($F_1P + F_2P = EP + F_2P = 2a$).



11.5. ábra.

Az EF_1 szakasz felező merőlegese az ellipszis P pontbeli t érintője. Az érintőnek az EF_1 szakasszal közös pontja M. Az EF_1F_2 háromszög és az MF_1O háromszög hasonló, és $EF_2 = 2MO$, tehát $MO = a$. (Az F_2 pontot az ellenkör középpontjának nevezzük.)

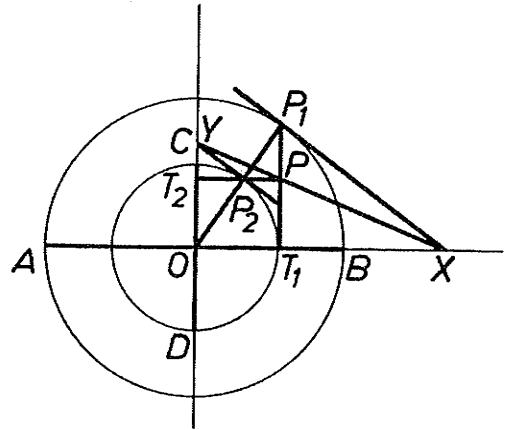
Az elmondottakból kiolvashatók az ellipszis érintőjére vonatkozó alábbi tulajdonságok:

a) Az F_1 fókuszhoz az érintőre vonatkozó tükörképe az ellenkörtől levő E pont. Az E ellenpontot az ellenkör F_2 középpontjával összekötő egyenes az érintőt a P érintési pontban metszi.

b) Az F_1 fókuszhoz az érintőre állított merőleges M talppontja a középponttól $MO = a$ távolságra, tehát az O pont körüli a sugarú ún. főkörön van. A 11.5. ábrát, amelyből a fenti tulajdonságok kiolvashatók, az ellipszis alapábrájának mondjuk. Az ellipszis koordinátageometriai jellemzése a tengelyek által meghatározott x, y koordináta-rendszerben (l. 11.4. ábra) az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlettel, il-

végpont a $\bar{C}\bar{P}$ egyenes affin képével jelölhető ki. A $\bar{C}$ és C pontokban az érintők párhuzamosak az affinitás tengelyével.

A 11.8. ábrán az ellipszist AB nagy- és CD kistengelyével adtuk meg. A tengelyek fölé írt körrökkel megvalósítható a $\frac{b}{a}$ arányú zsugorítás: Vegyük a főkör egy OP_1 sugarát, amely a kistengely fölé írt ún. mellékkört a P_2 pontban metszi. A P_1 ponton át a kistengellyel, P_2 ponton át a nagyteneggellyel párhuzamosat húzva, a kapott P metszéspont az ellipszis pontja. A 11.8. ábrán u. is leolvasható,



11.8. ábra.

hogy $\frac{PT_1}{P_1T_1} = \frac{OP_2}{OP_1} = \frac{b}{a}$. Az ellipszisérintő a P_1X körérintő affin képe PX . Ezt a szerkesztést az ellipszispontok ún. két-körös szerkesztésének nevezzük.

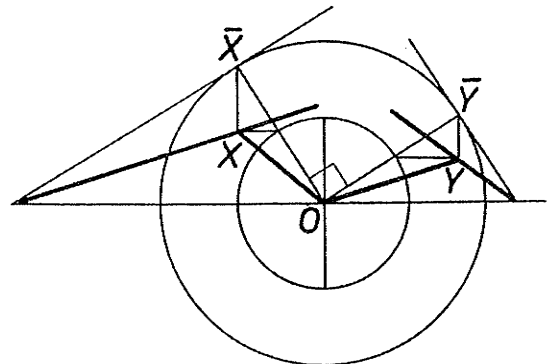
Ugyancsak a 11.8. ábrából leolvasható az is, hogy az ellipszis egy CD tengelyű affinitással is előállítható. Ebben az affinitásban a mellékkör pontjaiból nagyteneggely irányú, $\frac{a}{b}$ arányú nyújtással jönnek létre az ellipszis pontjai.

U. is $\frac{PT_2}{P_2T_2} = \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{a}{b}$; a mellékkör P_2Y érintőjének megfelel

az ellipszis PY érintője, vagyis az Y, P, X pontok egy egyenesen vannak.

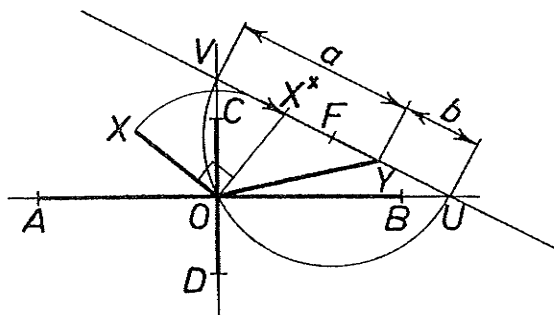
Ha $O\bar{X}$ és $O\bar{Y}$ a főkör két merőleges félátmérője, akkor ezek affin képe az ellipszis OX és OY két félátmérője. Végpontjaikban húzott érintők a másik félátmérővel párhuzamosak (11.9. ábra).

Az ilyen félátmérőket, illetve átmerőpárt konjugált átmérőknek nevezzük.



11.9. ábra.

Az ellipszist egy konjugált átmérő-pár meghatározza. A Rytz-féle szerkesztéssel az ellipszis OX és OY konjugált fél-átmérőiből az ellipszis tengelyeit megkapjuk (11.10. ábra). A szerkesztést (bizonyítása nélkül) a következőképpen végezzük el: Az OX félát-

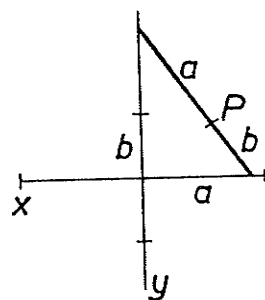


11.10. ábra.

mérőt 90° -kal elforgatjuk, a kapott X^x és az Y által meghatározott szakasz F felezéspontja körül az O ponton át kört rajzolunk, amely az X^xY egyenest az U és V pontokban metszi. Az OU , illetve OV egyeneseken lesz az ellipszis nagy-, illetve kistengelye. A félnagytengely hosszát a $VY = a$, a félkistengelyét pedig az $UY = b$ adja. Ezeket felmérve kapjuk az A , B , illetve C , D tengelyvégpontokat.

A Rytz szerkesztés elemzéséből adódik az ellipszis megrajzolására alkalmas eszköz, az ún. ellipszográf geometriai alapja (11.11. ábra).

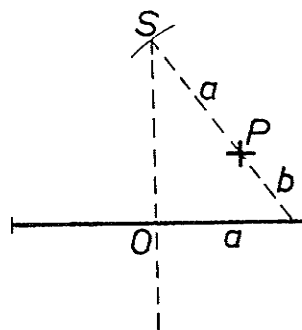
Ha az x és y egymásra merőleges egyenesekre támaszkodik egy $a + b$ hosszúságú szakasz (egyik végpontjával x -re, másik végpontjával y -ra illeszkedik), akkor a szakaszon az y egyenesen levő ponttól a távolságra levő P pont egy olyan ellipszis pontja, amelynek nagytengele az x egyenesen van és $2a$ hosszúságú, kistengelye pedig az y egyenesen van és $2b$ hosszúságú.



11.11. ábra.

Az iméntiek megfordításával meg tudjuk szerkeszteni egy olyan ellipszist, amelynek ismert a nagytengele és egy pontja (11.12. ábra).

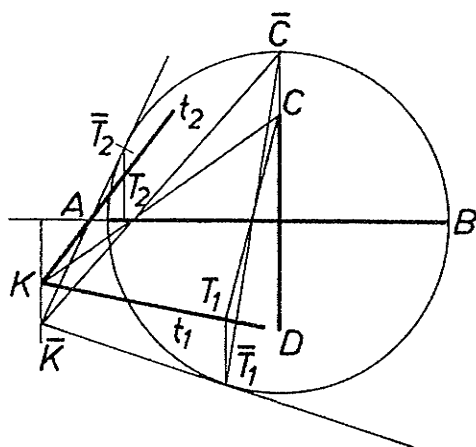
A nagytengele felező merőlegese a kistengely egyenese. Ezt a P körül a sugarú körrel metszve (S) megkapjuk a P ponton átmenő $a + b$ hosszúságú, és a tengelyekre támaszkodó szakasz SP helyzetét, amelyről lemérhető a b fél-kistengelyhossz.



11.12. ábra.

A 11.13. ábrán megadtuk az ellipszist AB nagy- és CD kistengelyével, továbbá egy K pontot. Szerkesszük meg a K pontból az ellipszishez húzható érintőket.

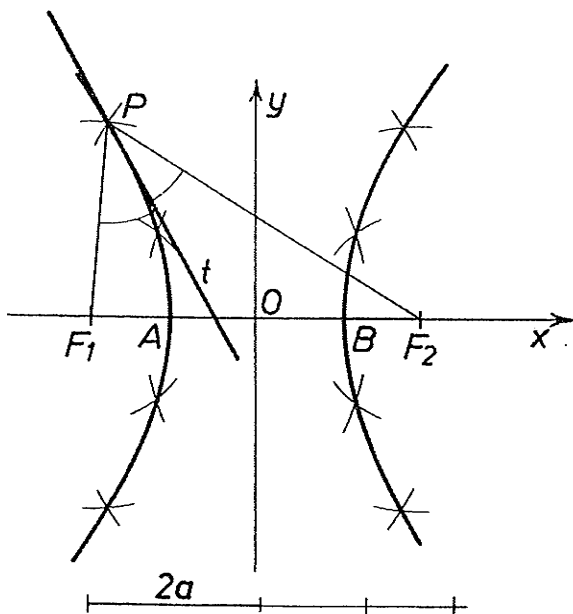
Az ellipszishez az AB tengelyű affinitás egy AB átmérőjű kört rendel, C affin képe $\bar{C}$. A K affin képét a CK egyenes megfelelője jelöli ki: $\bar{K}$. A $\bar{K}$ pontból a körhöz húzott $\bar{K}\bar{T}_1$, illetve $\bar{K}\bar{T}_2$ érintők affin megfelelőit megszerkesztve kapjuk az ellipszis t_1 , illetve t_2 érintőit a T_1 , illetve T_2 érintési pontokkal.



11.13. ábra.

Hiperbola

Hiperbolának nevezzük a sík azon pontjainak összességét, amelyeknek két ponttól (az F_1 és F_2 fókuszoktól) mért távolságaik különbségének abszolút értéke állandó. Ez a távolságkülönbség (jelölése: $2a$) mindig kisebb a fókuszok F_1F_2 távolságánál (11.14. ábra). A definíció alapján szerkeszthetők a hiperbola pontjai. A hiperbola pontjai az F_1F_2 egyenesre (valós tengely egyenese) és az F_1F_2 szakasz felező merőlegesére (képzetes tengely) szimmetrikusan adódnak. A két szimmetria tengely közös pontja a hiperbola O középpontja, amelyre a hiperbola centrálisan szimmetrikus. A hiperbolának a valós tengelyen van két pontja: A és B a hi-



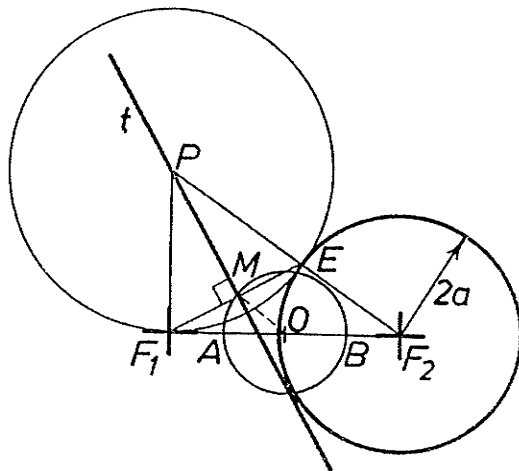
11.14. ábra.

perbola csúcspontjai, amelyek O-tól a távolságra vannak. A képzetes tengelyen nem lehet hiperbolapont. A hiperbola egy P pontját az F_1 és F_2 pontokkal összekötő szakaszokat vezérsugaraknak nevezzük.

Kimutatható, hogy a hiperbola P pontbeli t érintője a PF_1 és PF_2 vezérsugarak szögfelezője.

A hiperbola is származtatható az ellipszishez hasonló módon: A hiperbola a sík azon középpontjainak az összessége, amelyek egy F_2 középpontú $2a$ sugarú kört érintenek, és átmennek a körön kívül fekvő F_1 fókuszpontra. Az F_2 középpontú kör a hiperbola ellenköre (11.15. ábra).

A P pont egy ilyen körnek a középpontja, a kör pedig az E ellenpontban érinti az ellenkört. $(|PF_2 - PF_1| = |PF_2 - PE| = 2a)$. Az



11.15. ábra.

EF_1 szakasz felező merőlegese a hiperbola P pontbeli érintője, amely az EF_1 szakaszt az M pontban metszi. Az EF_1F_2 háromszög és az F_1MO háromszögek hasonlóak, és $EF_2 = 2MO$, vagyis $MO = a$.

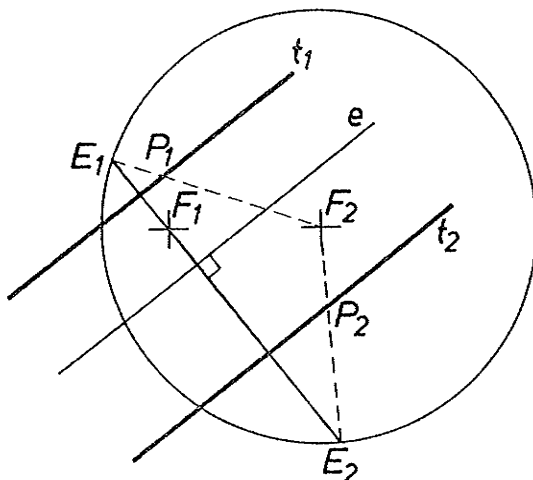
Az ellipszishöz levont következtetések a hiperbolára is teljesülnek:

- Az F_1 fókuszhoz az érintőre vonatkozó tükörképe az ellenkörtől levő E pont. Az E pontot az ellenkör F_2 középpontjával összekötő egyenes az érintőt a P érintési pontban metszi.
- Az F_1 fókuszhoz az érintőre állított merőleges egyenes M talppontja a középponttól $MO = a$ távolságra, tehát az O pont körüli a sugarú ún. főkörön van. A 11.15. ábrát a hiperbola alapábrájának mondjuk.

Az ellipszis és hiperbola definíciójának az „ellenkörös” formába való átfogalmazása azért igen szerencsés, mert az érintővel és fókusszal kapcsolatosan ugyanolyan tulajdonságok állapíthatók meg.

Példaképpen nézzük meg, hogyan lehet egy ellenkörével és F_1 fókuszával adott kúpszelethez az adott e iránynyal párhuzamos érintőt szerkeszteni.

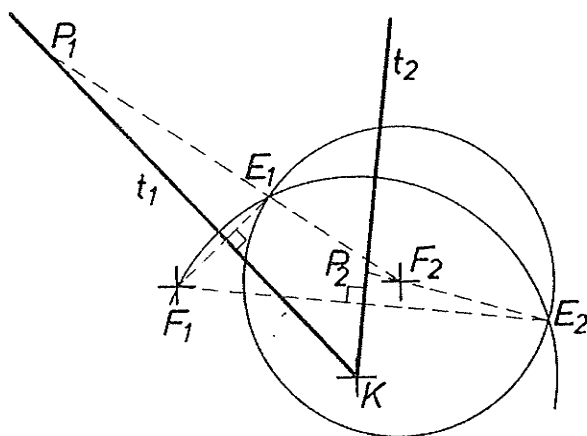
A feladatot az alapábrán megadottnak gondoljuk és látjuk, hogy az F_1 pontból (az érintőre, ill.) az érintő irányú egyenesre állított merőleges az ellenkörből olyan E ellenpontot metsz ki, hogy EF_1 felező merőlegese a kúpszelet érintőjét adja, amelyen az F_2E egyenes jeleli ki az érintési pontot. A 11. 16. ábra mutatja, hogy a feladatnak két megoldása van. Az ábrán ellipszisre szerkesztettük meg a feladatot.



11.16. ábra.

Másik példánkban az ellenkörével és F_1 fókuszával adott kúpszelethez a K pontból szerkesztünk érintőt.

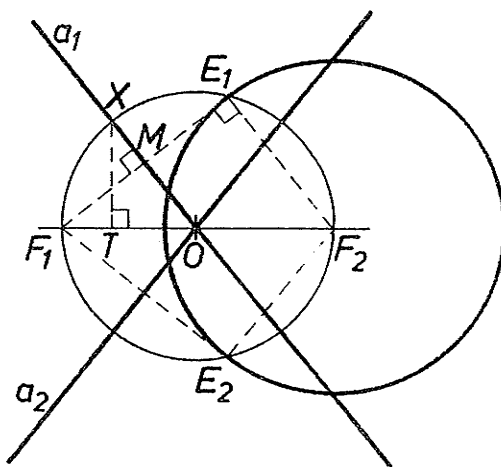
Ismét az alapábrából indulunk ki, annak t érintőjére gondoljuk a K pontot. Látható, hogy a K pont egyenlő távol van az F_1 fókuszától és a P érintési ponthoz tartozó E ellenponttól. Ebből már következik feladatunk megoldása, hiszen az F_1 ponton ke-



11.17. ábra.

resztülhaladó K középpontú kör az ellenkört az E_1 és E_2 pontokban metszi. Az E_1F_1 , illetve az E_2F_2 szakaszok K ponton keresztülhaladó felező merőlegesei a t_1 , illetve t_2 érintők, amelyeken a P_1 , illetve P_2 érintési pontokat az F_2E_1 , illetve F_2E_2 egyenesek metszik ki. A 11.17. ábrán a

Az előző feladat megoldása szerint az O pont körül F_1 ponton áthaladó kör az ellenkört E_1 és E_2 pontokban metszi. Az F_1E_1 , illetve F_1E_2 szakaszok O ponton áthaladó a_1 , a_2 felező merőlegesei a keresett érintők, amelyekkel viszont az F_2E_1 , illetve F_2E_2 egyenesek párhuzamosak, mert az E_1 és E_2 pontokat kijelölő kör egyúttal az F_1F_2 szakasz fölé írt



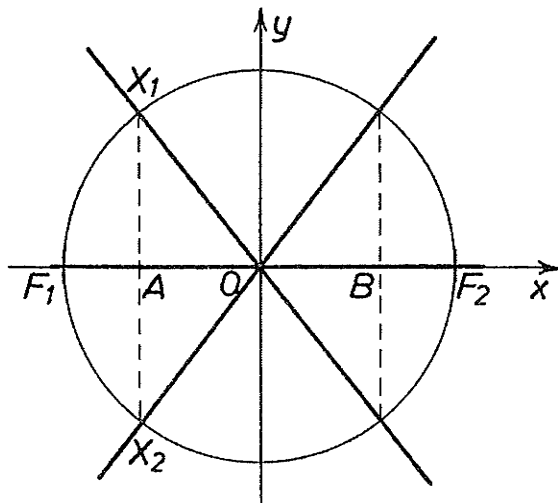
Thalesz-kör.

A 11.18. ábrából leolvasható, hogy az aszimptota a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

b) Az F_1 fókuszról az aszimptotára állított merőleges M talppontja a hiperbola főkörén van, és az F_1M egyenes a főkört érinti. (U.is $F_1F_2E_1$ és F_1OM háromszögek hasonlóak, $OM = a$.)

- 111 -

Megrajzoljuk a hiperbola 0 középpontja körül a fókuszokon áthaladó kört és legalább az egyik csúcs-érintőt (11.19. ábra). Ezek közös X_1 , illetve X_2 pontját az 0 ponttal összekötő egyenesek a hiperbola aszimptotái.



11.19. ábra.

Az X_1A szakasz hosszát b -vel (a hiperbola képzetes féltengelyének hossza) jelölve a hiperbola koordinátageometriai jellemzése a tengelyek által meghatározott x, y koordinátarend-

szerben az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlettel történik. Ehhez a hiper-

bolához kapcsolhatunk egy másik hiperbolát, amelynek aszimptotái az előbbivel azonosak, de valós tengelye az y tengely, a valós tengely hossza $2b$ és így a képzetes tengely $2a$ hosszúságú. Ezt az előzőhöz konjugált hiperbolának nevezzük, egyenlete pedig

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolát paraméteres előállításban vagy

$x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \operatorname{tg} t$ ($0 \leq t < 2\pi$; $t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$) alakban, vagy az $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$ és $x = -a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$ ($-\infty < t < \infty$) formában adhatjuk meg.

Parabola

Parabolának nevezzük a sík azon pontjainak az összességét, amelyek egy F ponttól (fókusz) és egy d egyenestől (direktrix vagy vezéregyenes) egyenlő távol vannak.

A definíció alapján szerkeszthetők a parabola pontjai. Az F ponton át d -re merőleges egyenesen egy ilyen pont van, ez a parabola C csúcspontja. A többi parabolapont a CF egyenesre szimmetrikusan adódik; a CF egyenest a parabola tengelyének nevezzük (11.20. ábra). A C ponton áthaladó d -vel párhuzamos egyenes a parabola csúcserintője. Az F fókusz és a d direktrix távolságát p -vel jelöljük, és a parabola paraméterének nevezzük.

Egy d egyenes és egy rajta kívül fekvő F pont egyértelműen meghatározzák a parabolát. Másfelől pedig egy egyenesből és egy pontból álló alakzat hasonló egy másik egyenes és egy másik pont által meghatározott alakzathoz, mégpedig távolságaik aránya adja meg a hasonlóság arányát. Ezekből következik, hogy az egyenesek és a megfelelő pontok által meghatározott parabola is hasonló, tehát valamennyi parabola hasonló.

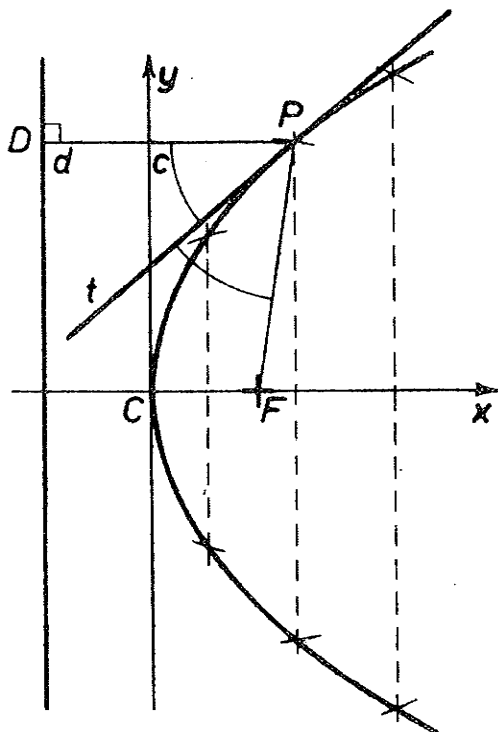
A parabola koordinátageometriai jellemzése a tengelye és csúcsérintője által meghatározott koordinátarendszerben az $y^2 = 2px$ egyenlettel adható meg.

A parabola egy P pontjához tartozó t érintőjéről kimutatható, hogy a P pontból a direktrixre állított merőleges PD egyenes és a PF által meghatározott szög felezője (l. 11.20. ábra).

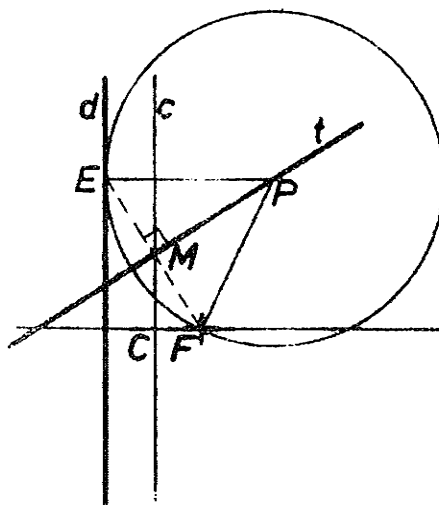
A parabola származtatása az ellipszis, illetve hiperbola ellenkörös definíciójához hasonlóan úgy történik, hogy az ellenkör, illetve főkör szerepét a direktrix, illetve csúcsérintő veszik át.

A parabola a sík azon körközéppontjainak az összessége, amelyek egy d egyenest érintenek és átmennek egy azon kívül fekvő F ponton (11.21. ábra).

A P parabolapont középpontú F ponton áthaladó kör a d egyenest az E ellenpontban érinti. Az F fókusz középpontú $1/2$ arányú centrális hasonlóság az E ellenpontot az M pontba, a direktrixet pedig a csúcsérintőbe viszi.



11.20. ábra.



11.21. ábra

Ezekből leolvashatók a parabolaérintők tulajdonságai:

a) Az F fókuszhoz az érintőre vonatkozó tükörképe a direktrixen levő ellenpont. Ebben az ellenpontban a direktrixre állított merőleges az érintőt az érintési pontban metszi.

b) Az F fókuszhoz az érintőre állított merőleges talppontja a csúcsérintőn van. (A 11.21. ábra a parabola alapábrája.)

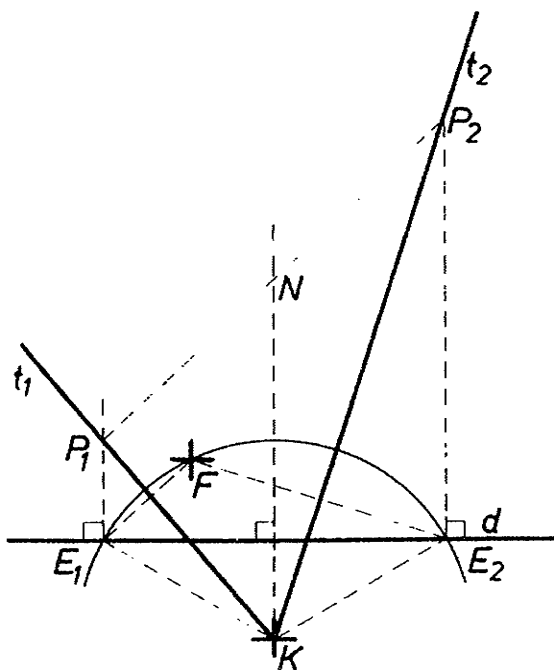
Szerkesszünk a K külső pontból a d direktrix és F fókusz által meghatározott parabolaéhoz érintőt:

Gondoljuk a K pontot az alapábra t érintőjére. Látható, hogy az E ellenpont és F egyenlő távol van K -tól. Ezért K pont körül F ponton át rajzolt körrel a d direktrixből kijelöljük az E_1 és E_2 ellenpontokat (11.22. ábra). Az E_1F , illetve E_2F szakaszok K -n átmenő felező merőlegesei t_1 , illetve t_2 érintők, amelyeken az E_1 , illetve E_2 pontban d -re merőleges egyenesek jelölik ki a P_1 , illetve P_2 érintési pontokat.

A 11.22. ábrából kiolvasható, hogy a KE_1E_2 háromszög egyen-

lőszárú, tehát a K -ból d -re állított merőleges az E_1E_2 felező merőlegese és egyben az E_1P_1 , illetve E_2P_2 egyenesek középpárhuzamosa, amely felezi e két egyenes pontjait összekötő szakaszokat, így a P_1P_2 -t is.

Tehát ha adott a parabola két érintője (t_1, t_2) az érintési pontokkal (P_1, P_2), akkor az érintők közös K pontját a P_1P_2 szakasz N felezőpontjával összekötő egyenes párhuzamos a parabola tengelyével. Ezt több parabolára vonatkozó feladatban fel tudjuk használni. A parabola tengelye



11.22. ábra.

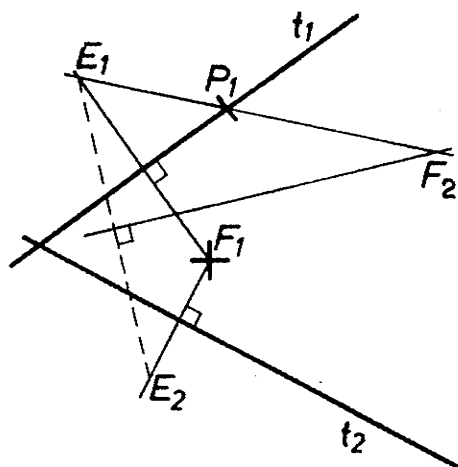
(x tengely) és csúcsérintője (y tengely) által meghatározott koordinátarendszerben a parabola egyenlete: $y^2 = 2px$ alakban írható fel, ahol p a fókusz és a direktrix távolsága. Ennek alapján a parabola paraméteres előállítás

$x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$ ($-\infty < t < \infty$) alakban írható fel.

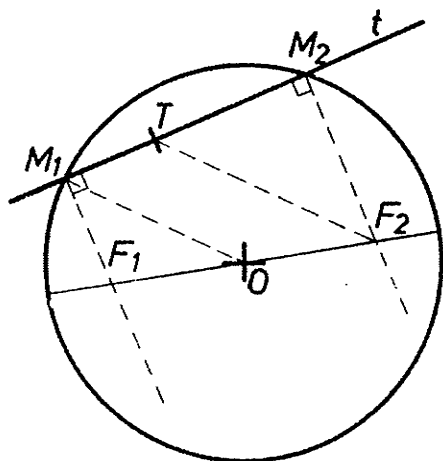
Feladatok:

- 1) Adott egy kúpszelet egyik fókusz (F_1), egyik érintője (t_1) az érintési ponttal (P_1) és egy másik érintő (t_2). Szerkesszük meg a másik fókuszt.

Megoldás: Az F_1 fókuszt mindkét érintőre tükrözzük, az ellenkör E_1 , illetve E_2 pontját kapjuk (11.23. ábra). Az F_2 fókusz az E_1E_2 felező merőlegesének és az E_1P_1 egyenesnek a metszéspontja ($2a = E_1F_2$).



11.23. ábra.



11.24. ábra.

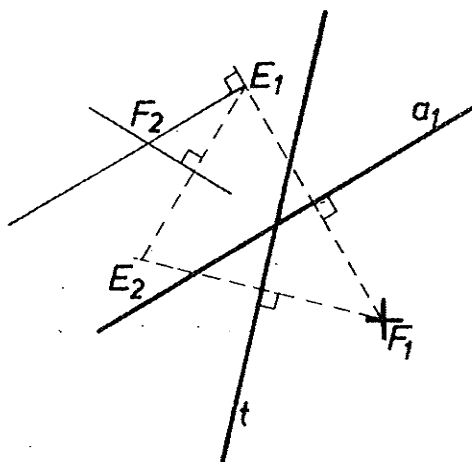
- 2) Adott egy kúpszelet O középpontja, főköre és egy t érintője a T érintési ponttal. Szerkesszük meg a kúpszelet fókuszait (11.24. ábra).

Megoldás: A főkör és az érintő M_1 , M_2 metszéspontjainak a t -re állított merőlegesek átmennek a fókuszokon. Az M_1O -val párhuzamos T ponton átmenő egyenes kijelöli az F_1 fókuszt (1. alapábra).

Az M_2O tengely kimetszi az F_2 fókuszt.

- 3) Adott egy hiperbola egyik fókusz F_1 , egyik aszimptotája (a_1) és egy érintője (t). Szerkesszük meg a másik fókust (11.25. ábra).

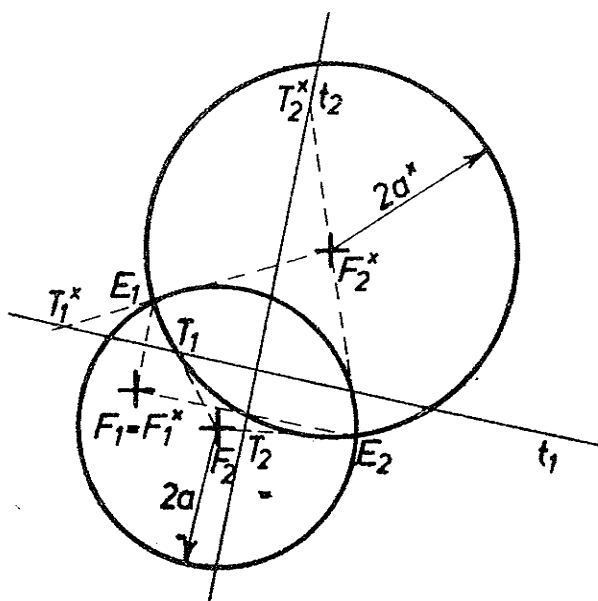
Megoldás: Az F_1 fókust tükrözzük a_1 -re és t -re, a kapott E_1 , illetve E_2 ellenpontok felező merőlegese, valamint az F_1E_1 -re E_1 pontban állított merőleges az F_2 fókuszban metszik egymást.



11.25. ábra.

- 4) Adott két kúpszelet, egyik fókuszuk közös $F_1 = F_1^x$, a másik fókuszok (F_2, F_2^x) körül megrajzoltuk az ellenköröket. Szerkesszük meg a két kúpszelet közös érintőit és rajtuk az érintési pontokat (11.26. ábra).

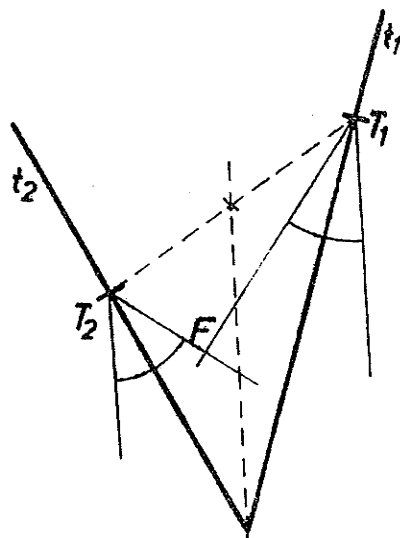
Megoldás: Közös fókuszuk közös érintőre vonatkozó tükörképe mindkét ellenkörön rajta van, tehát a közös érintők az ellenkörök E_1 és E_2 közös pontjait F_1 -gyel összekötő szakaszok felező merőlegesei. Ezeken az érintési pontokat az E_1 -et, illetve E_2 -t, F_2 -vel, illetve F_2^x -tel összekötő megfelelő egyenesek jelölik ki.



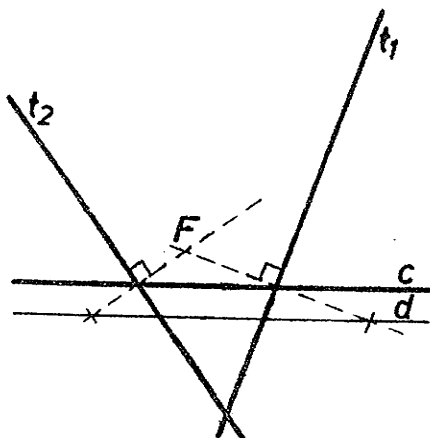
11.26. ábra.

- 5) Adott egy parabola két érintője (t_1, t_2) az érintési pontokkal (T_1, T_2). Szerkesszük meg a fókuszát (11.27. ábra).
Megoldás: A T_1T_2 felező-

pontját az érintők metszéspontjával összekötő egyenes a parabola tengelyével párhuzamos. Ezzel az iránnyal a T_1 , illetve T_2 pontokon át párhuzamost húzunk, majd tükrözzük a megfelelő érintőre. A tükröképek az F fókuszban metszik egymást.



11.27. ábra.



11.28. ábra.

- 6) Adott egy parabola két érintője t_1, t_2 , valamint a csúcsérintő. Szerkesszük meg a fókuszát és a direktrixet (11.28. ábra).

Megoldás: Az érintőknek a csúcsérintővel alkotott metszéspontjaiban az érintőkre merőleges egyenesek egymást az F fókuszban met-

szik. Az F fókuszát az érintőkre tükrözve a direktrix pontjaihoz jutunk, amely a csúcsérintővel párhuzamos.

Gyakorlásra javasoljuk a következő feladatokat:

1. Adott a kúpszelet két fókusz és egy érintője. Szerkesszük meg a tengelyeket. (Hiperbola esetén az aszimptotákat is.)

2. Adott a kúpszelet egyik fókusz, két érintője és ellenkörének sugara. Szerkesszük meg a másik fókuszát és az érintőkön az érintési pontokat.

3. Adott a kúpszelet egyik fókusz, két pontja, valamint ellenkörének sugara. Szerkesszük meg a hiányzó fókuszát és a tengelyeket.

4. Adott egy kúpszelet egyik fókusz, egy érintő az érintési ponttal és a $2a$ távolság. Szerkesszük meg a másik fókuszát.

5. Adott a kúpszelet egyik fókusza és három érintője. Szerkesszük meg a másik fókuszát.

6. Adott a kúpszelet egyik fókusza, egy pontja, ezt a pontot nem tartalmazó érintője és az ellenkör sugara. Szerkesszük meg a kúpszelet másik fókuszát és tengelyeit.

7. Adott egy kúpszelet egyik fókusza, egy érintője az ellenkör sugara, továbbá a két fókusz közti távolsága. Szerkesszük meg a másik fókuszát és a tengelyeket.

8. Adott egy kúpszelet egyik fókusza, egy érintője, tengelyének egyenese és a $2a$ távolság. Szerkesszük meg a másik fókuszát, a másik tengelyt és az érintő érintési pontját.

9. Adott egy hiperbola egyik fókusza, ellenkörének sugara és egyik aszimptotája. Szerkesszük meg a csúcspontokat és a másik aszimptotát.

10. Adott a hiperbola egyik fókusza, ellenkörének sugara és a két aszimptota iránya. Szerkesszük meg a másik fókuszát, a csúcspontokat és az aszimptotákat.

11. Adott egy parabola fókusza, egy érintője és a fókusz távolsága a direktrixtől. Szerkesszük meg a csúcspontot.

12. Adott egy parabola fókusza és egy pontja az érintővel. Szerkesszük meg a direktrixet.

13. Adott a parabola fókusza, egy pontja és ezt a pontot nem tartalmazó érintője. Szerkesszük meg a direktrixet.

14. Adott a parabola direktrixe és fókusza. Szerkesszük meg adott iránnyal párhuzamos érintőt és határozzuk meg az érintési pontot.

15. Adott egy parabola direktrixe, egy pontja és ezt a pontot nem tartalmazó érintője. Szerkesszük meg a fókuszát.

16. Adott a parabola fókusza és két érintője. Szerkesszük meg a direktrixet, a tengelyt, a csúcspontot és az érintőkön az érintési pontokat.

17. Adott a parabola csúcserintője és egy pontja az érintővel. Szerkesszük meg a tengelyt és a fókuszát.

18. Adott a parabola tengelye és egy érintője az érintési ponttal. Szerkesszük meg a csúcspontot, fókuszát és a vezéregyenest.

Elméleti anyag: Tankönyv 105-107, 109-113, 116-119, 121, 123. pontjai.

12. A KÖR ÁBRÁZOLÁSA

Ha a kör síkja nem párhuzamos a képsíkkal és nem merőleges rá, akkor bebizonyítható, hogy a kör képe ellipszis. A vetítés során csak a képsíkkal párhuzamos átmérő nem rövidül meg, ennek a képe az ellipszis nagytengelye.

A 12.1. ábrán az O középpontú α második vetítősíkban fekvő kör második képe a kör átmérőjével egyenlő $C''D''$ szakasz. A kör síkját az O ponton áthaladó t második vetítőegyenest körül első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatva az AB körátmérő a forgástengelyen van, tehát ennek első képe a képellipszis nagytengelye; látható továbbá, hogy a C és D pontok első képe a kistengely két végpontja. A beforgatott kör és az ellipszis közti kapcsolat merőleges affinitás, ennek segítségével a kör akárhány pontjának képét és benne az érintőt megszerkeszthetjük. Az ábrán a merőleges affinitást megvalósító ún. kétkörös ellipszisszerkesztést használtuk fel további ellipszispont szerkesztésére.

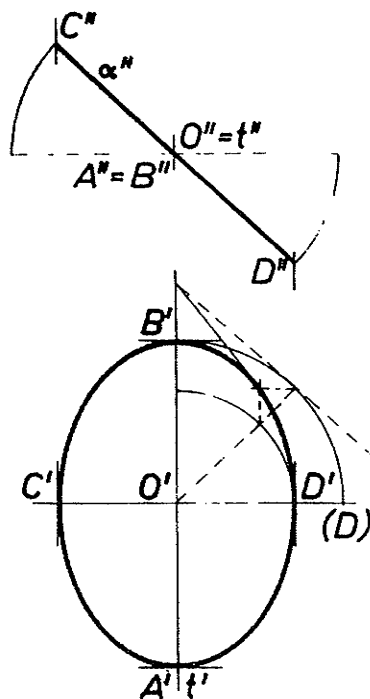
A továbbiakban általános helyzetű síkban fekvő kör képeinek megszerkesztésével foglalkozunk (12.2. ábra). Az általános helyzetű síkot f_1 és f_2 fővona-

laival adtuk meg. A benne fekvő kör középpontjának O'' második képével és a kör r sugarával határoztuk meg a kört.

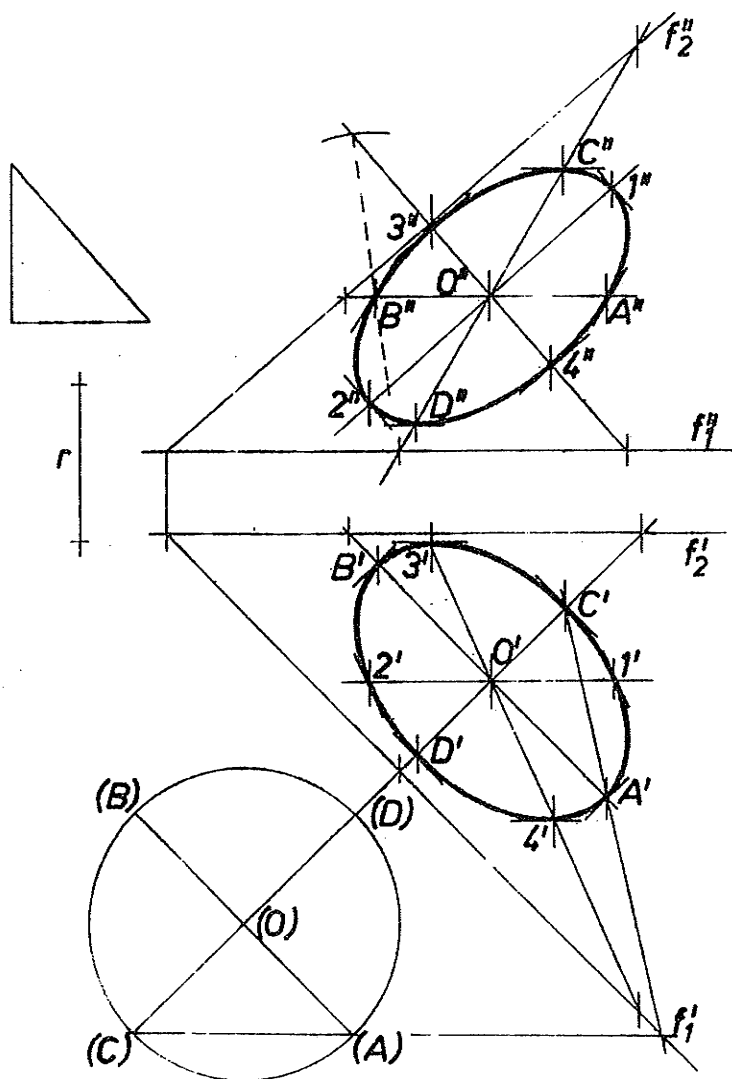
Az O' pontot a középpontot áthaladó első fővonalon jelöljük ki. Erre az egyenesre szükség van, hiszen ezen van az első képellipszis nagytengelye.

Ha a síkot f_1 fővonala körül képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk, akkor az (O) körül megrajzolt r sugarú körnek bármely pontját vissza tudjuk forgatni.

Az f_1 -gyel párhuzamos $(A)(B)$ körátmérőből lesz az első képellipszis $A'B'$ nagytengelye, az erre merőleges kör-



12.1. ábra.



12.2. ábra.

átmérő (C) pontját visszaforgatva az első kép kistengelyvégpontját kapjuk.

Az első kép tengelyeinek második képe a második kép-ellipszis konjugált átmérőpárja, ennek alapján az érintők meghúzhatók. Látható, hogy az első kép kistengelyvégpontjainak megfelelő C'', D'' második képpontok a második kép legalsó és legfelső pontját adják.

A második kép nagytengelyét az O''-n f_2'' -vel párhuzamos egyenesen jelöljük ki, hossza $2r$, végpontjai 1'' és 2''. A

második kép kistengely egyenesét megrajzolva a kistengely hosszát a 11.12. ábra szerint a B'' pontnál határoztuk meg, a végpontok $3''$ és $4''$. E tengelyvégpontok első képét is megszerkesztjük, ott konjugált átmérőpárt adnak. Az érintők megrajzolása után látszik, hogy a második képellipszis kistengely-végpontjainak megfelelő $3'$ és $4'$ pontok az első képellipszis legalsó és legfelső pontjai.

A megszerkesztett pontok és érintőik már lehetővé teszik a képellipszisek kellően pontos megrajzolását.

Gyakorlásra javasoljuk a 12.3. ábrán felvételi vázlatlaltal megadott feladatok A/4 méretű lapon (nagyított méretben) való önálló kidolgozását.

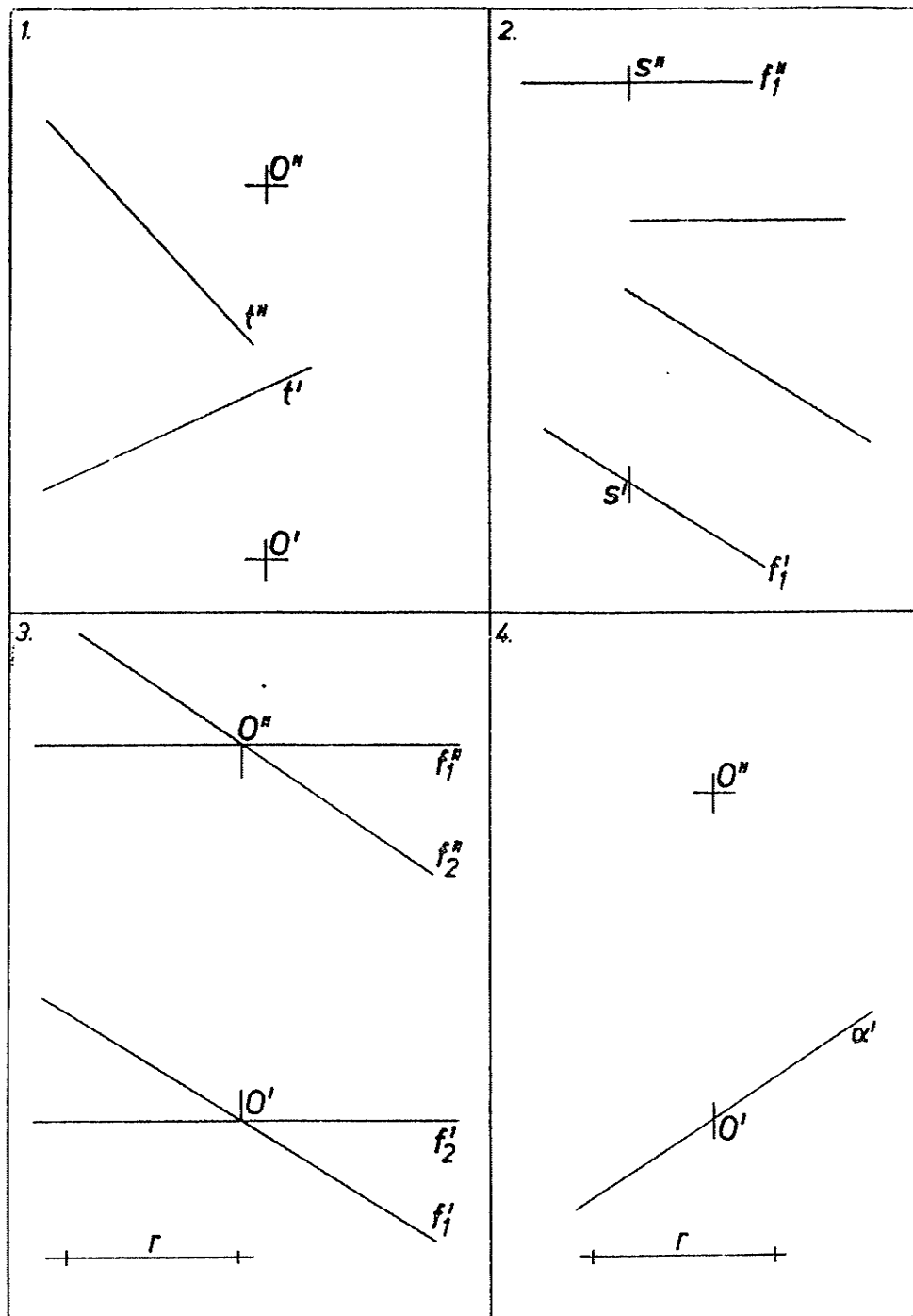
1. Szerkesszük meg annak a körnek a képeit, amelynek középpontja az O pont, érintője pedig a t egyenes.

2. Adott egy kör két párhuzamos érintője (első főegyenese) és egyiken az érintési pont (S). Ábrázoljuk a kört két képével.

3. Adott egy kör síkja a középponton áthaladó két főegyeneseivel és a kör sugara. Szerkesszük meg a kör képeinek valamennyi lényeges pontját és rajzoljuk meg a kör képeit.

4. Adott az α első vetítősíkban levő, O középpontú r sugarú kör. Szerkesszük meg a kör második képét.

Elméleti tananyag: Tankönyv 124-133. pontok.



12.3. ábra.

13. CIKLOISOK, KÖREVOLVENSEK

A közönséges ciklois görbét egy egyenesen csúszásmentesen legördülő kör egy pontja írja le. Ha a körhöz rögzített más pont pályáját tekintjük, akkor a kör középpontjától a sugárnál nagyobb távolságra levő pont ún. hurkolt-, a kör belsőjében levő pont ún. nyújtott-cikloist ír le. A kör középpontjának pályája egyenes.

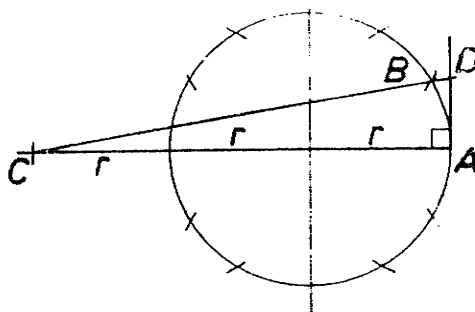
Két görbe egymáson való csúszásmentes legördülése azt jelenti, hogy a síkban fix alapgörbe és a legördülő görbe közös pontjában — a legördülés bármely időpillanatában — közösek az érintők és két megfelelő pont közötti görbedarab ívhossza a két görbénél megegyezik.

Körnek egyenesen való gördüléséhez tehát a körívekkel egyenlő szakaszokat kell az egyenesen kijelölni.

Ez a körív „kiegészítését” igényli. Egy olyan körív, amelyhez tartozó középponti szög 40° -nál kisebb, a 13.1. ábrán bemutatott közelítő eljárással egyenésíthető ki. Az ábrán $1/12$ körívet egyenesítettünk ki.

$\widehat{AB} \approx AD$. A közelítés igen pontos. (Snellius módszere.)

A 13.2. ábrán egy ciklois pontjainak a szerkesztését mutatjuk be. A legördülő kör kerületét ti-



13.1. ábra.

zenkét egyenlő részre osztottuk be. Ennek megfelelően előállítottuk a tizenketted körív hosszát és azt egymásután felmértük az egyenesre (I, II, III, ... pontok). A legördülésről tehát tizenketted ívenként „pillanat-felvételeket” szerkesztünk meg. Ha a kiindulási helyzetben 1-gyel jelölt pont pályáját szerkesztjük meg, akkor az egyes pillanatokban a 2 és II, 3 és III, 4 és IV s í.t. pontok kerülnek érintkezésbe. Az egyenessel az adott pillanatokban érintkező körre visszamérjük a tizenketted ív egyszerűsét, kétszeresét, háromszorosát s í.t. Az így létrejövő pontok a csúcsos ciklois pontjait adják. Az érintőt úgy kapjuk meg, hogy a ponttal a pillanatnyi érintkezési pontot összekötjük és a megfelelő cikloispontban erre merőlegest állítunk.

Kimutatható ugyanis, hogy a cikloisok és evolvensok érintőre merőleges normálisai mindegyik típusú görbe esetén áthaladnak a pillanatnyi érintkezési ponton, amit a mozgás adott pillanatához tartozó momentán pólusnak nevezünk.

A 13.2. ábrán az ötödik helyzetben mutatjuk be az érintőszerkesztést, továbbá azt is, hogy a kiindulási helyzetben H_1 -,

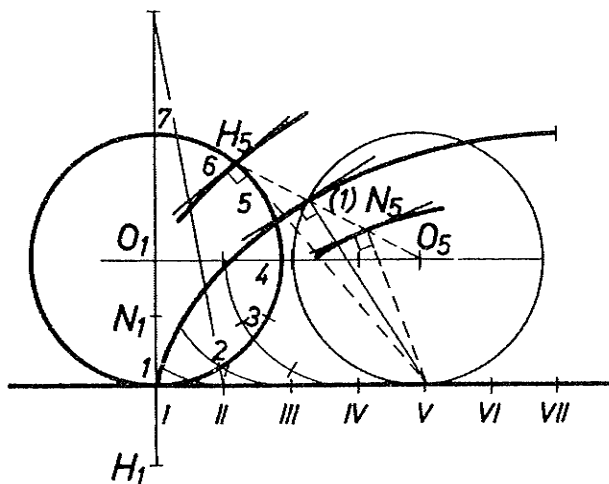
illetve N_1 -gyel jelölt pontok és bennük az érintő a különböző időpontokhoz tartozó helyzetekben hogyan szerkeszthető meg. Az ötödik helyzetben a momentán pólus az V. pont. A H_1 pont hurkolt, az N_1 pont nyújtott

cikloist ír le. Ezeket szemlélteti a 13.3. ábra.

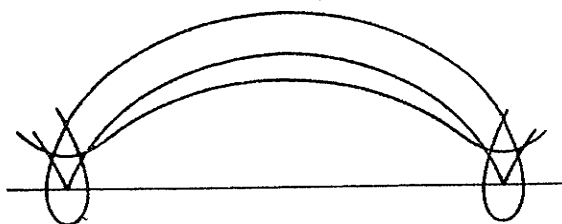
A 13.4. ábrán epicikloisok szerkesztését mutatjuk be. Az epiciklois úgy jön létre, hogy egy alapkörön (kívül) legördül egy másik kör (legördülő kör). A legördülő kör pontjai csúcsos (C_1), a legördülő körön kívül fekvő pontok (H_1) hurkolt, a körön belül fekvő (N_1) pontok nyújtott epicikloist írnak le.

A 13.4. ábrán az alapgörbe R sugarának és a legördülő kör r sugarának aránya $R:r = 3:2$. Ebben az esetben a két körön egyenlő íveket úgy tudunk létesíteni, hogy a kerületeket a sugarak arányának megfelelően osztjuk be egyenlő részekre. Esetünkben az alapkört tizenkét egyenlő részre osztó (I, II, III, ...) pontok között levő ívek egyenlők a legördülő kört nyolc részre osztó (1, 2, 3, ...) pontok közti ívekkel. A legördülő kör középpontja az alapgörbével — az O_1 ponton áthaladó — koncentrikus körön

mozog. Az O, II; O, III; ... egyenesek jelölik ki e koncentrikus körön a legördülő kör megfelelő középpontjait.



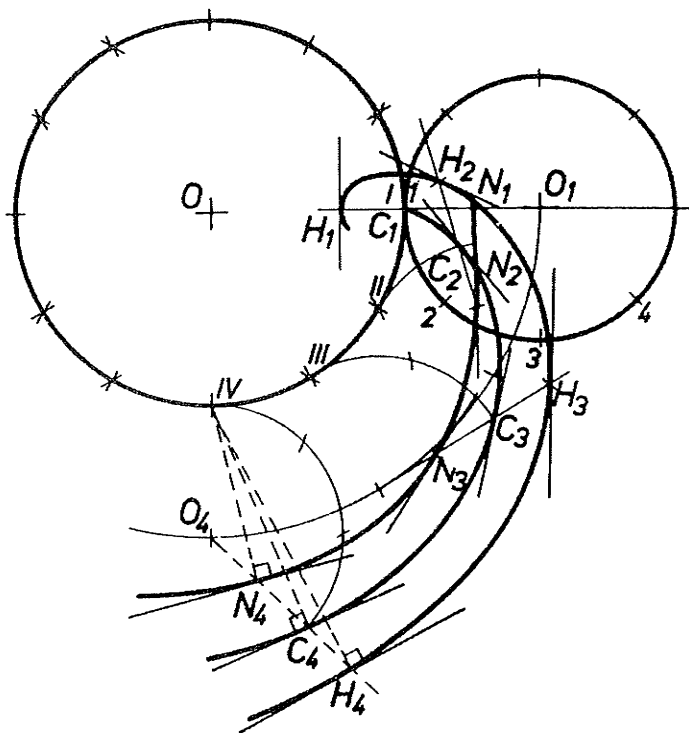
13.2. ábra.



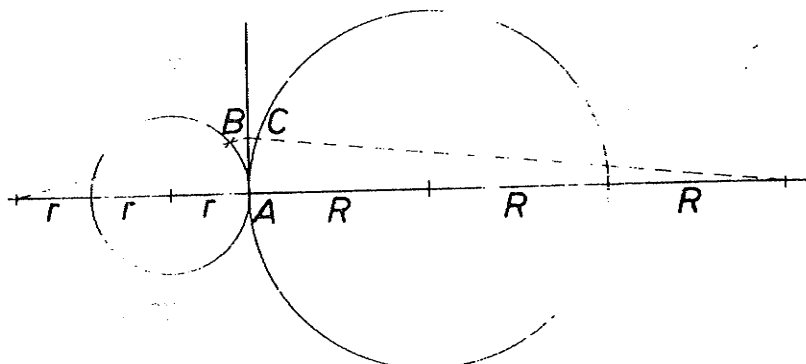
13.3. ábra.

Ezután a ciklois-pontok és érintők szerkesztése a községséges cikloiséhoz teljesen hasonló módon történik. A 13.4. ábrán mutatjuk be, hogy a negyedik helyzetben az O_4C_4 egyenesen a kiindulási helyzet H_1 - illetve N_1 -gyel jelölt pontjainak H_4 , illetve N_4 megfelelői hogyan jelölhetők ki, továbbá megszerkesztjük e helyzetben a görbék érintőit a görbepon- tokat a IV. mo- mentán pólussal összekötő egyenesekre merőlegesen.

Abban az esetben, ha a legördülő kör és az alapkör sugarainak aránya nem ismert, vagy nem olyan egyszerűen kezelhető mint az imént, akkor Snellius módszerének a 13.5. ábrán bemutatott alkalmazásával tudjuk elérni, hogy az $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ legyen. Először a kisebb sugarú körön levő ívet



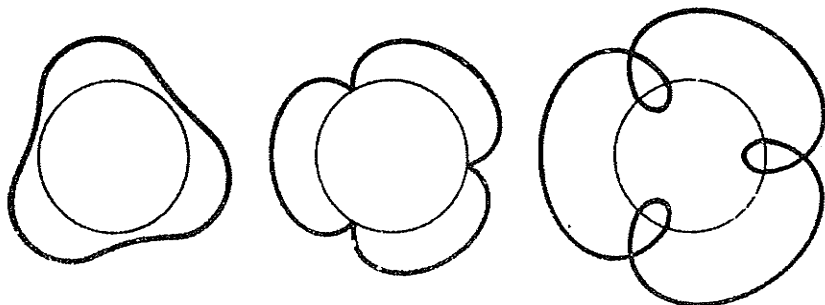
13.4. ábra.



13.5. ábra.

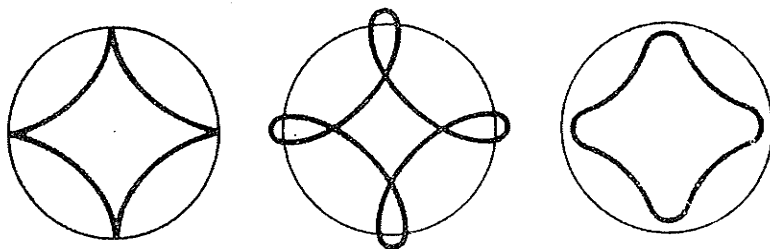
egyenestűsük ki, majd a módszer megfordításával ezt átvisz-
szük a nagyobb sugarú körre.

A 13.6. ábrán nyújtott, csúcsos és hurkolt epiciklois-
sokat mutatunk be $R:r = 3:1$ sugárárány esetén.



13.6. ábra.

A hipociklois úgy jön létre, hogy egy R sugarú alap-
kör belsejében csúszásmentesen gördül le az r sugarú kör.
A legördülő kör pontjai csúcsos hipocikloist, a legördülő
körhöz rögzített külső pont hurkolt hipocikloist, a legör-
dülő kör belső pontjai nyújtott hipocikloist írnak le.
Ilyen görbéket szemléltet a 13.7. ábra $R:r = 4:1$ arány
esetén.



13.7. ábra.

A görbék és érintőik szerkesztése teljesen hasonló az
epicikloisok szerkesztésével.

Utolsónak a körevolvenssel foglalkozunk. A körevolvens
úgy jön létre, hogy egy körön legördül (csúszásmentesen)
egy egyenes. Az egyenes egy E_1 pontja csúcsos körevolverst
ír le (13.8. ábra).

Az egyeneshez rögzített N_1 , illetve H_1 pont pedig
nyújtott, illetve hurkolt körevolvensen mozog.

Snellius módszerével kijelöljük a kör tizenketted ívé-
nek hosszát. Ennek ismeretében az alapkört I., II., III.,
... pontokban érintő egyeneseken a tizenketted körív hosz-
zának visszamérésével ki tudjuk jelölni a csúcsos kör-

kal összekötő
egyenesekre me-
rőleges egyenesek adják a hurkolt csúcsos és nyújtott evol-
vensek érintőit.

A Geometriai feladatok c. példatár 121-122. old. 1-10. feladatai és azok 145-148. oldalon levő megoldásainak áttanulmányozásával e görbék koordináta geometriai kezelésében is kellő jártasságot szerzünk.

- 127 -

14. CSAVARVONAL ÁBRÁZOLÁSA

A csavarvonallal a 10.7. ábrával kapcsolatosan már foglalkoztunk. Koordinátageometriai jellemzését az $\underline{r}(t) = \underline{i}r \cos t + \underline{j}r \sin t + \underline{k}ct$ -vel ($c > 0$) adtuk meg. Érintővektora: $\underline{\dot{r}}(t) = \underline{i}(-r \sin t) + \underline{j}r \cos t + \underline{k}c$. Belátható, hogy az érintővektor és a csavarvonal z tengelyének szöge

$$\text{állandó. U. is } \cos \varphi = \frac{\underline{\dot{r}} \cdot \underline{k}}{|\underline{\dot{r}}|} = \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}; \text{ ezek szerint a } \varphi$$

szög egy r és c befogókkal meghatározott derékszögű háromszög c befogón nyugvó szöge.

A $\frac{\pi}{2} - \varphi$ szög a csavarvonal emelkedési szöge. A c -t a csavarvonal paraméterének nevezzük.

Ha tehát a csavarvonal érintőivel a tengely egy pontján át párhuzamosokat húzunk, akkor ezek egy forgáskúp, az ún. iránykúp alkotóit adják. Az iránykúp magasságát c -nek választva a határoló körének sugara r .

A 14.1. ábrán az a első vetítőegyes tengelyű, r sugarú hengeren levő jobbmenetű csavarvonal egy menetét ábrázoltuk az m menetemelkedés tizenkettédének ismeretében. A csavarvonal első képe egy r sugarú kör. Ezt tizenkét egyenlő ívre osztva, az 1, 2, 3, ... pontok második képét az $\frac{m}{12}$ szakasz egymásutáni felmérésével, a megfelelő hengeralkotókon jelöljük ki. A csavarvonal akkor jobbmenetű, ha az 1, 2, 3, ... pontok haladási rendje az első képen az óramutató járásával ellentétes. (Ellenkező esetben balmenetű.)

Az érintők megszerkesztéséhez szükség van az iránykúp-ra. Az iránykúp alapkörének r sugara és a c paraméter által meghatározott derékszögű háromszög hasonló ahhoz a derékszögű háromszöghöz, amely a csavarvonal egy darabjának a hengeréről való lefejtésénél adódik (14.2. ábra). Egy ilyen derékszögű háromszöget kapunk, ha befogóinak a kör kerületének Snellius módszerével kiegyenesített tizenkettéd részét ($\frac{2r\pi}{12}$), illetve az $\frac{m}{12}$ szakaszt vesszük. A szerkesztésben tehát meghatározható a paraméter c hossza, ez lesz az iránykúp magassága:

$$c = 0''M'' = \frac{m}{2\pi}.$$

A 14.2. ábrán látható, hogy a csavarvonal P pontjához tartozó t érintő párhuzamos az iránykúp $\overline{PM}$ alkotójával, ahol a $\overline{P}$ pont az iránykúp alapkörén a P -vel közös hengeralkotón levő P' pontot — a pontok haladási sorrendjében — 90° -os késéssel követi.

A csavarvonal t_2, t_3 érintőit a 2. és 3. pontban szerkesztettük meg. Az első képen ezek körérintők, a velük párhuzamos iránykúp alkotók az M, XI , illetve az M, XII egyenesek. Ennek alapján második képük is megrajzolható. (l. 14.1. ábra).

Vetítőegyenestengelyű csavarvonal ábrázolásánál tanulatokat alkalmazzuk fővonal tengelyű csavarvonal ábrázolásánál. A 14.3. ábrán megadtuk az a második fővonalat és a csavarvonal

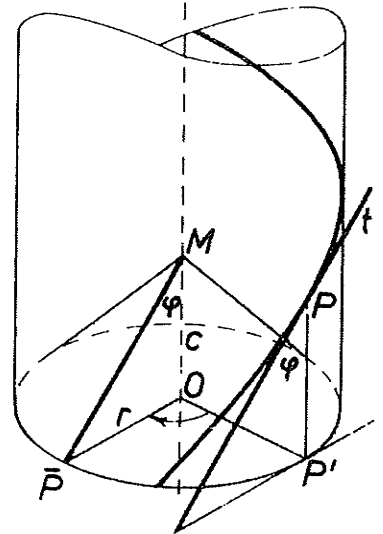
1 kiindulópontját. (Az 1' pontnak az a' -től mért távolsága a csavarvonal hengerének sugara.) Legyen a csavarvonal jobbmenetű, és első képe legyen csúcsos görbe.

Az ábrázolást azzal kezdjük, hogy az a egyenest vetítő egyenessé transzformáljuk, az 1. kiindulási ponton át felveszszük az alapkör síkját. Az alapkör harmadik képét tizenkét egyenlő részre osztjuk, az I, II, III, ... pontokat kapjuk, és a transzformáció eljárásával meghatározzuk e pontok és a belőlük induló hengeralkotók második, illetve első képét. Így a csavarvonal 1, 2, 3, ... pontjai az I, II, III, ... hengeralkotókra kerülnek. A csavarvonal akkor lesz jobbmenetű, ha a harmadik képen az 1, 2, 3, ... pontok haladási rendje az óramutató járásával ellentétes.

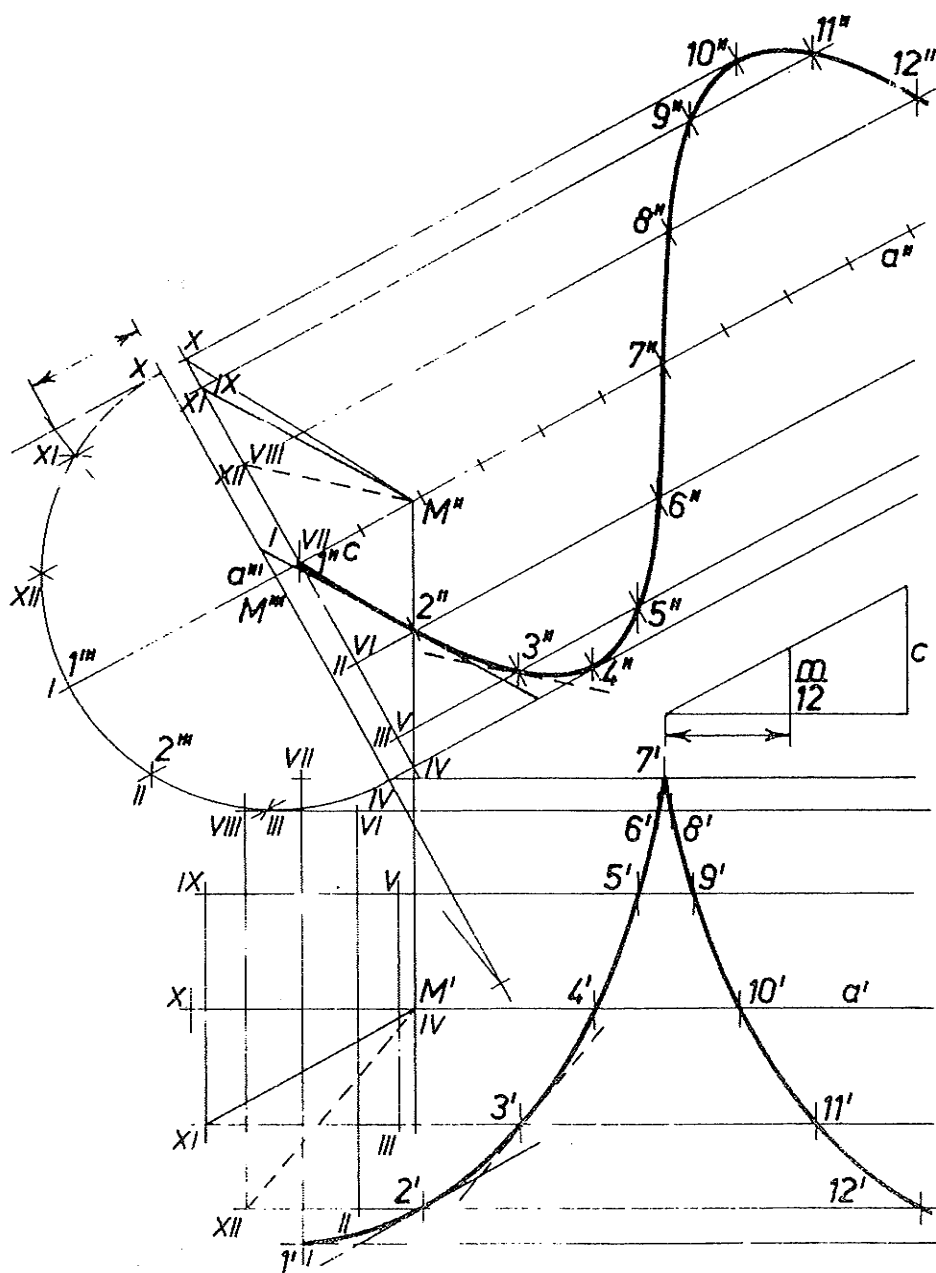
A 10.6. ábrával kapcsolatban mondottakból következik, hogy a térgörbe azon pontja lesz a vetület csúcspontja, amelyben az érintő merőleges a képsíkra. Ekkor pedig a csavarvonal iránykúpjának lesz vetítőegyenestengelyű alkotója, ami az iránykúp második képének szélső alkotója (M, IV alkotó). Ennek megrajzolása a második képen kijelöli az iránykúp c magasságát. Az alapkör tizenkettő ívének kiegyenesítése után meghatározható a menetemelkedés tizenkettő részé. Ezáltal ábrázolható a csavarvonal pontjai a második és az első képen.

Az érintők szerkesztését a 2. és 3. pontokban mutatjuk be. Az érintők az M, XI , illetve M, XII iránykúpalkotókkal párhuzamosak. Az első képen a 7. pontban lesz a görbe képének csúcspontja.

Ha a csavarvonal tengelye vetítőegyenestengelyű, akkor képe kör. Ha a csavarvonal tengelye párhuzamos a képsíkkal, ak-

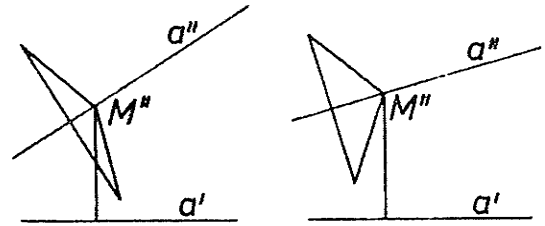


14.2. ábra.



14.3. ábra.

kor képe a szinusz-vonalból merőleges affinitással állítható elő. Ha a csavarvonal tengelye a képsíkhöz hajló egyenes, akkor képe hurkolt, csúcsos vagy nyújtott cikloissal affin görbe aszerint, amint az iránykúp csúcsából a képsíkra állított merőleges az iránykúp belsejében, az iránykúpon vagy azon kívül halad (14.4. ábra).



14.4. ábra.

Gyakorlásul ábrázoljunk olyan fővonal tengelyű csavarvonalat, amelynek egyik képe hurkolt vagy nyújtott görbe.

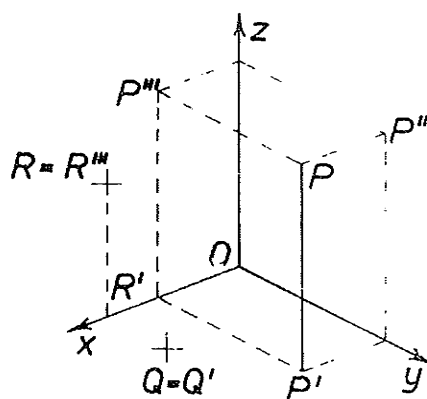
Elméleti tananyag: Tankönyv: 352-353. pontok.

15. AXONOMETRIKUS ÁBRÁZOLÁS

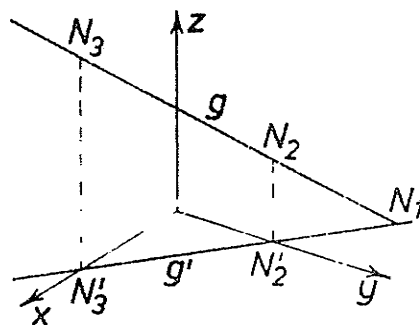
Az axonometrikus ábrázolás célja az, hogy az alakzatokról képies ábrát készítsen. Az axonometriában az alakzatot egy térbeli koordináta-rendszerben elhelyezve, a koordináta-tengelyekkel együtt ábrázoljuk. Az axonometrikus képsíkra történő vetítésben nem feltétlenül merőlegesek a vetítő-sugarak. Ha a ferde — de egymással párhuzamos — sugarakkal való vetítést is megengedjük, akkor a koordináta-tengelyek képének választásánál nem kell semmilyen kikötésnek teljesülni. Bebizonyítható u.is, hogy három, egy pontból kiinduló szakasz mindig lehet egy derékszögű koordináta-rendszer tengelyeire felmért egyenlő szakaszok vetülete.

A 15.1. ábrán egy koordináta-rendszert ábrázoltunk. A P pontot az xy , yz , xz koordináta-síkokra való merőleges vetületeivel P' , P'' , P''' pontokkal együtt ábrázoltuk. Ezeket sorrendben a P pont első, második, illetve harmadik képeinek nevezzük, a P -t pedig a P pont axonometrikus képének mondjuk. Nyilvánvaló, hogy a P , P' , P'' , P''' pontok közül bármely kettő egyértelműen meghatározza a többit. Az ábrázolt alakzatokat általában axonometrikus képével és első képével adjuk meg. (Az axonometrikus kép ismerete még nem határozza meg a pont koordináta-rendszerbeni helyzetét.) Az ábrán szereplő Q pont az xy síkban van, az R pont pedig az xz koordináta-síkban van, így első képe az x tengelyre kerül.

A 15.2. ábrán a g egyenest axonometrikus képével és első képével adtuk meg. A g és g' metszéspontja a g egyenes xy síkkal való N_1 nyompontja. A g' ismeretében kijelölhetők a g egyenes N_2 , N_3 nyompontjai az



15.1. ábra.

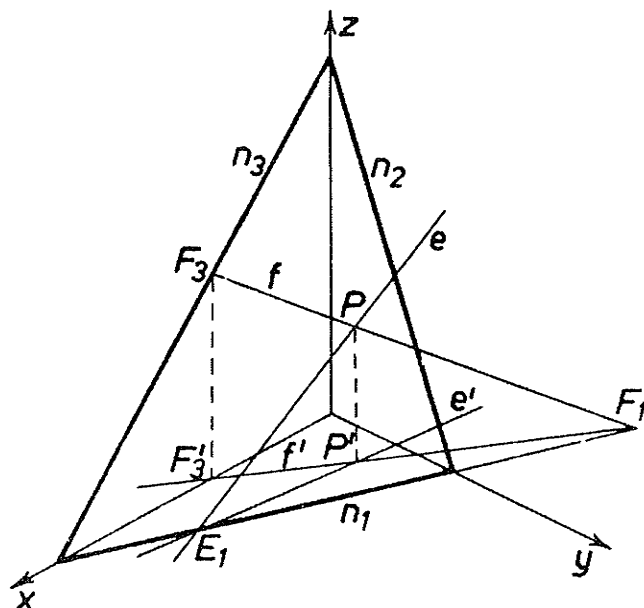


15.2. ábra.

yz, illetve xz koordinátasíkjában.

A 15.3. ábrán a P ponton áthaladó e és f egyenesek által meghatározott síknak a koordinátasíjokkal való metszésvonalait — az ún. nyomvonalakat és az általuk alkotott nyomháromszöget — állítottuk elő. A sík n_1 első

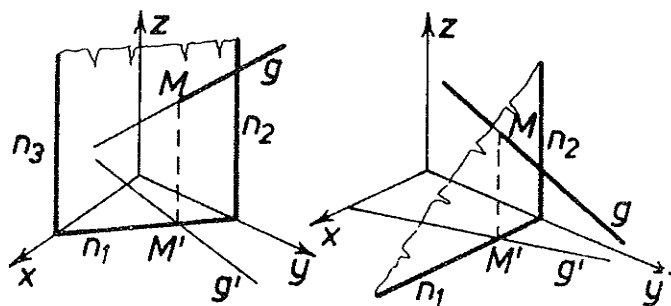
nyomvonala az e, illetve f egyenesek E_1 , illetve F_1 nyompontjait köti össze. A n_1 és x tengely metszés-pontja az n_3



15.3. ábra.

nyomvonalnak is pontja, amely átmegy az F_3 nyompontra. A nyomháromszög n_2 harmadik oldala már közvetlenül adódik. Úszerint a síkot mindig meg lehet adni nyomvonalával.

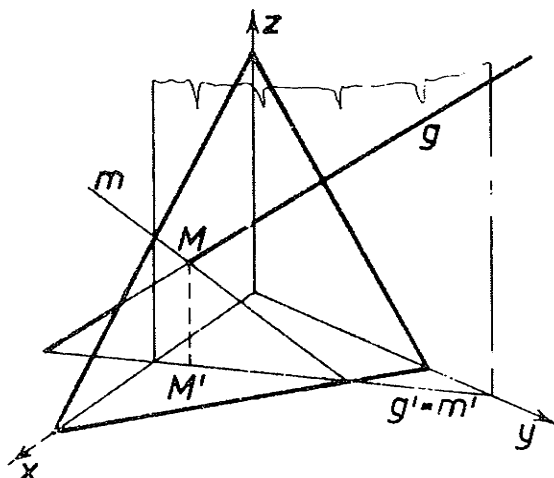
A 15.4. ábrán egy z tengellyel párhuzamos síkot, illetve egy xz koordinátasíkkal párhuzamos síkot ábrázoltunk. Mindkét esetben magától adódik a g egyenes és a sík M metszéspontjának a meghatározása.



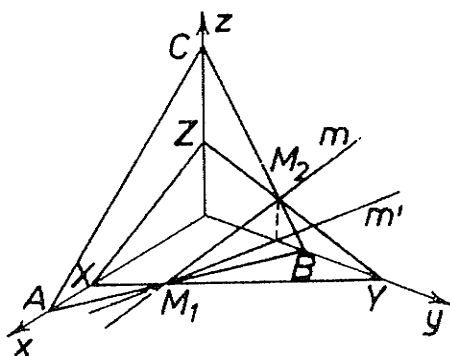
15.4. ábra.

Sík és egyenes metszéspontja. Két sík metszésvonal.

A 15.5. ábrán a g egyenest axonometrikus és első képével adtuk meg, a síkot pedig nyomháromszöggel. A sík és egyenes metszéspontját a g egyenesre fektetett, xy síkra merőleges sík segítségével határoztuk meg. Ezt a síkot a g és g' egyenesek keszítik ki. Ennek a síknak és az adott síknak az m metszésvonalát ($m' = g'$) jelöli a g egyenes M metszéspontját.



15.5. ábra



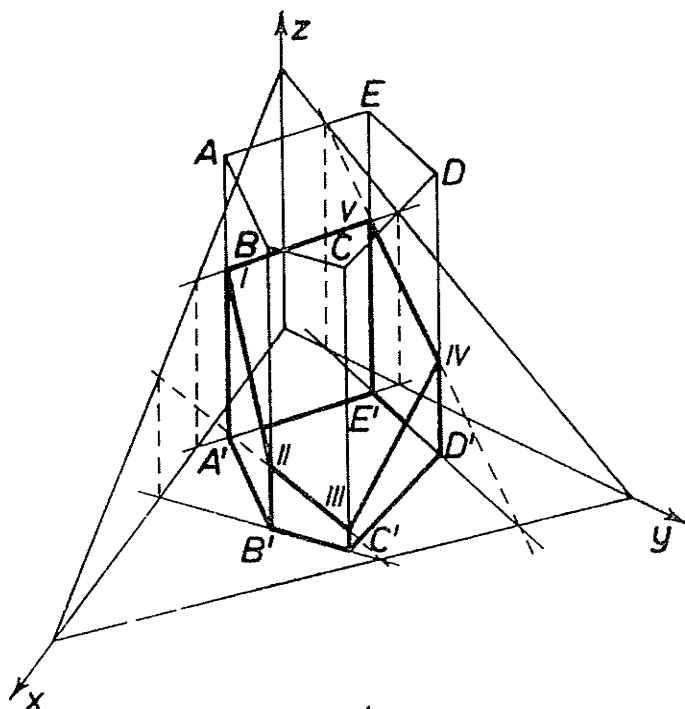
15.6. ábra.

A 15.6. ábrán két síkot adtunk meg nyomvonalai-
val, az ABC és XYZ síkot.
Az m metszésvonalukat az
 M_1, M_2 közös pont
határozzák meg.

Gúla és hasáb síkmetszetének szerkesztése

Sík és egyenes metszéspontjának szerkesztésére vezethető vissza hasáb vagy gúla síkmetszetének szerkesztése.

A 15.7. ábrán az xy síkon álló ötoldalú hasábot ábrázoltunk és megadtuk a metszősíkot nyomvonalai-
val. A hasáb oldalélein levő metszéspontok első képei az A', B', C', D', E' pontok. Ha meghatározzuk azokat az egyeneseket, amelyek a metszősíkban vannak és első képük $A'E', B'C',$ illetve $D'E'$, akkor ezek kijelölik a megfelelő hasábéleken az I és V, a II és III, illetve a IV és V metszéspontokat.

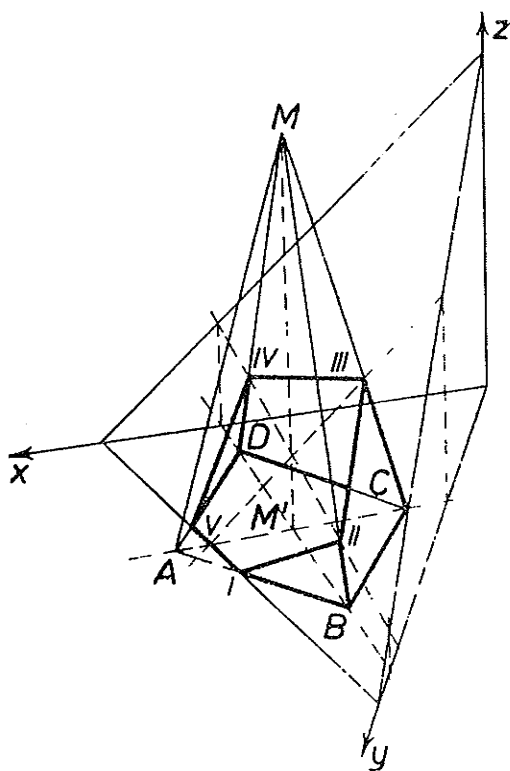


15.7. ábra.

val adott síkkal metszünk el. Azonnal látható, hogy az első nyomvonal az AB, illetve AD éleket az I és V pontokban metszi. Az MAC, illetve MBD síkok az xy síkra merőlegesek; e síkoknak az adott metszősíkkal alkotott metszészvonalai jelölik ki az MC élen a III, illetve az MB és MD éleken a II és IV metszéspontokat. Az AM szakasznak a metszősíkkal nincs közös pontja. A metszet-öttség megrajzolása után a láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy a lemezből levő gúlának a metszősík feletti részét a metszősíkkal együtt eltávolítottuk.

Ezeket megfelelő sorrendben összekötve a metszetszöveget kapjuk. A láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy a lemezből készült hélsábnak a sík feletti részét a metszősíkkal együtt eltávolítottuk.

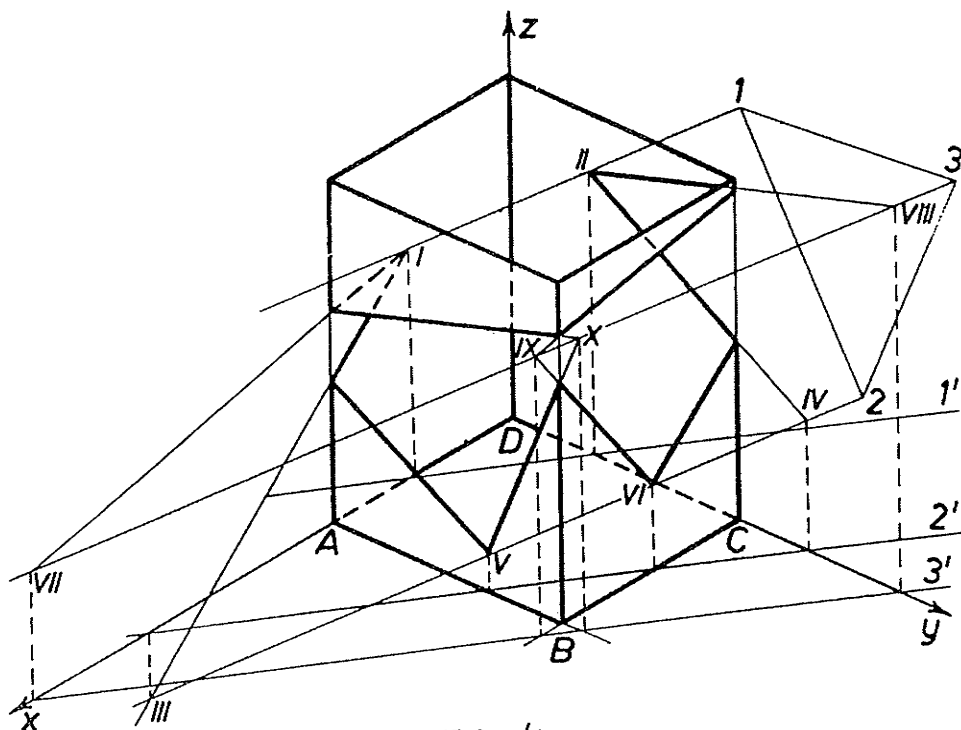
A 15.8. ábrán az xy síkon álló, ABCD alaplappal és M csúcsával megadott gúlát egy nyomvonalai-



15.8. ábra

Hasábok áthatásának szerkesztése

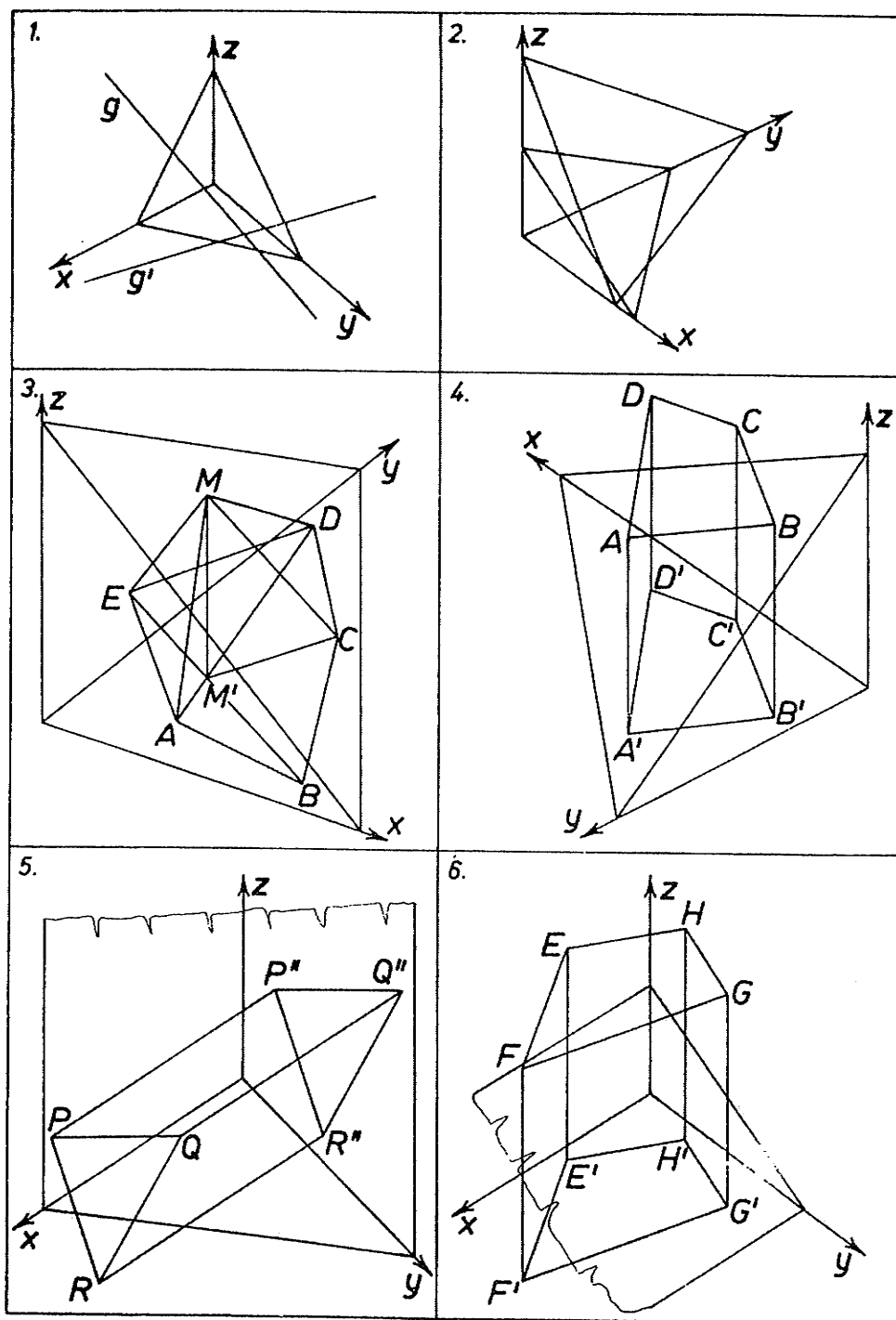
Két hasáb áthatását elő lehet állítani síkmetszetek megfelelő egyesítésével. A 15.9. ábrán az xy síkon álló



15.9. ábra.

négyszögletes hasábnak és az 1, 2, 3 oldalélek egyeneseseivel megadott ferde hasábnak az áthatását szerkesztettük meg. A ferde hasáb egyértelmű meghatározásához szükséges az oldalélek első képének a megadása ($1'$, $2'$, $3'$). A ferde hasáb élére az xy síkra merőleges síkot fektetve megkeressük az 1, 2, 3 egyeneseknek és az álló hasáb lapsíkjainak a metszéspontjait. Az ismert eljárással kapjuk, hogy az 1 él az AD és DC lapokat az I, illetve II pontokban metszi. A 2 él az AB és BC lapokat az V, illetve VI pontokban, az AD, illetve CD lapsíkokat a III, illetve IV pontokban metszi. A 3 él csak az oldallapok síkjait metszi: AD-t a VII, CD-t a VIII, BC-t a IX és AB-t a X pontban. Az álló hasáb lapsíkjain kialakuló síkmetszetek egyesítéséből kapjuk a megrajzolt áthatási poligont. A láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy a ferde hasábot a kimetszett résszel együtt, valamint a lemezből készült állóhasáb fedőlapját eltávolítottuk.

Gyakorlásra javasoljuk a 15.10. ábrán vázlatban megadott feladatok A/4-es méretű nagyításban való kidolgozása-



15.10. ábra.

sát:

1. Szerkesszük meg a g egyenes és a nyomháromszögével adott sík metszéspontját.

2. Adott két sík nyomháromszögével. Szerkesszük meg a két sík metszészvonalát.

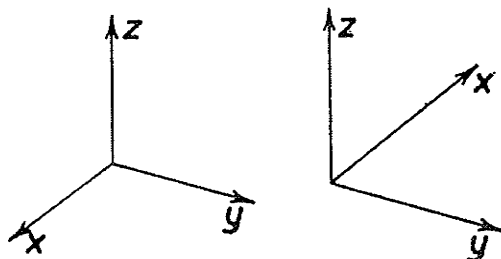
3. Szerkesszük meg az xy síkon álló gúla és a nyomháromszögével adott sík metszészvonalát, majd tüntessük fel a láthatóságot.

4.-6. Szerkesszük meg az ábrázolt hasábok és a nyomvonalaival adott síkok metszészvonalát, majd tüntessük fel a láthatóságot.

16. MERŐLEGES (ORTOGONÁLIS) AXONOMETRIA

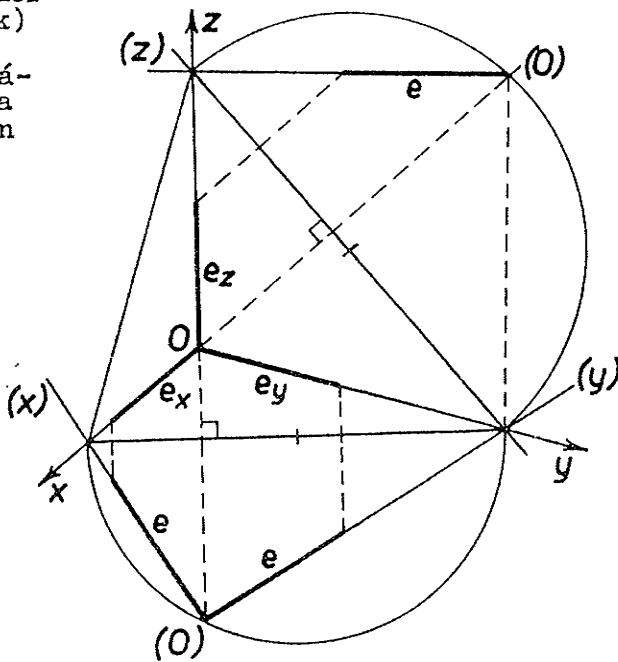
A továbbiakban olyan axonometrikus ábrázolás törvényszerűségeit vizsgáljuk, ahol a tengelyek képe (tengelykereszt) és az ábrázolt alakzat képe merőleges vetítéssel jön létre.

Kimutatható, hogy egy pontból kiinduló három félegyenes akkor lehet egy derékszögű koordinátarendszer merőleges vetülete, ha a tengelyek képei páronként tompaszöget alkotnak (vagy kettő tompaszöget alkot és a harmadik e tompaszög belsejében — mindkettővel hegyesszöget alkotva — halad; ekkor alulnézeti kép adódik) (16.1. ábra).



16.1. ábra.

Egy alakzat ábrázolásához szükséges a koordinátatengelyeken adódó rövidülési viszonyok ismerete. Minthogy a tengelykereszt merőleges vetítéssel jött létre, ezért az xy sík képsíkkal párhuzamos egyenese a képen is merőleges lesz az xy síkra a térben merőleges helyzetű z tengely képére. Hasonló áll a többi koordinátasík fővonalaira, tehát a koordinátasíkok egymáshoz csatlakozó fővonalai egy hegyesszögű háromszöget alkotnak, amelynek magasságvonalai a tengelyek képei (16.2. ábra).



16.2. ábra.

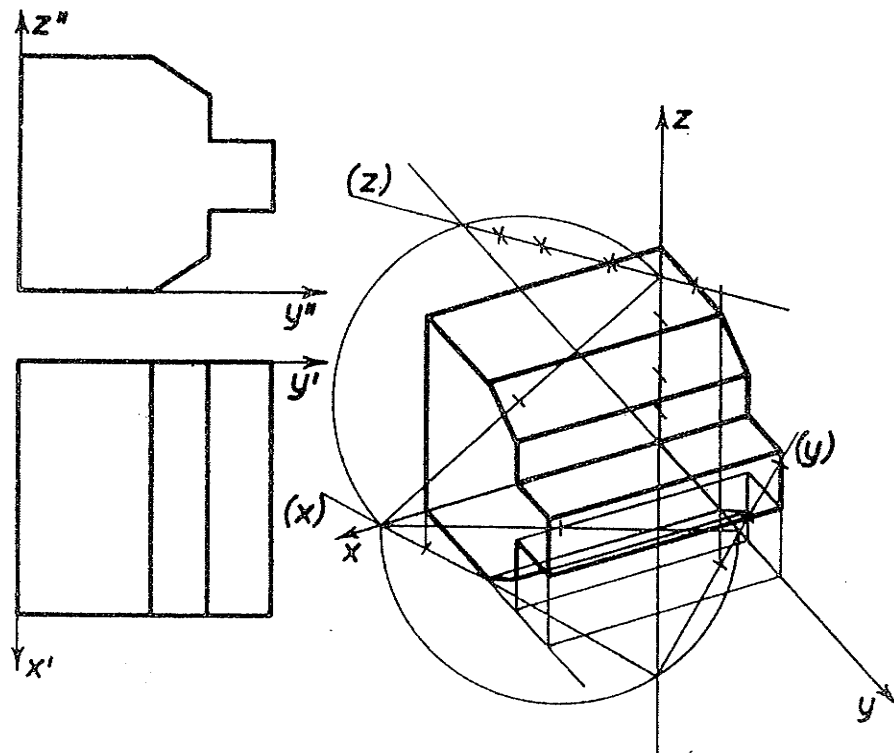
Ezt a háromszöget a képsík nyomháromszögének tekintjük, ezért röviden nyomháromszögnek nevezzük.

A koordinátasíkok a nyomháromszög oldalai körül képsíkba forgathatók. Az xy sík leforgatásánál az (0) pontból a nyomháromszög xy síkban levő oldala derékszögben látszik, tehát ezen oldal fölé írt Thalész-kör és O -ból a forgástengelyre állított merőleges metszéspontjaként adódik az (0) pont. Ugyanígy leforgatható a másik két koordinátasík; a 16.2. ábrán még az yz koordinátasíkot forgattuk le.

A koordinátatengelyek leforgatottjain kijelöljük az e egységsszakaszokat, amelyeknek rendre e_x , e_y , e_z felel meg.

Az x , y , z tengelyirányú rövidüléseket a $q_x = \frac{e_x}{e}$, $q_y = \frac{e_y}{e}$, $q_z = \frac{e_z}{e}$ arányok adják meg. Természetesen pl. az x irányú bármely szakasz vetülete és valódi hossza ugyanazt a q_x rövidülést állítja elő.

A rövidülések ismeretében lehetőség van arra, hogy két vetületével adott alakzatról axonometrikus képet készítsünk. A 16.3. ábrán két vetületével megadott alakzat merőleges axonometrikus képét ábrázoltuk.



16.3. ábra.

Az xy sík leforgatottjában felmértük a megfelelő tengelyeken levő távolságok valódi hosszát. Rövidültjeik meghatározása után elkészítjük az alaprajz axonometrikus képét, erre építjük fel a z irányú rövidült távolságok ismeretében az alakzatot. A z irányú rövidülteket a z tengelyen jelöltük ki az xz koordinátasík leforgatásával. A látóhatóság feltüntetése után a merőleges vetítéssel kapott axonometrikus (szemléltető) képet nyerjük.

A szemléltetés céljaira kínálkozó másik módszer az, hogy a $q_x:q_y:q_z = k:l:m$ rövidülési arányokhoz tartozó ten-

gelykeresztet szerkesztjük meg.

Itt azonban ügyelni kell arra,

hogy $q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2$,

amiből következik — minthogy mindegyik rövidülés (így annak négyzete is) 1-

nél kisebb —, hogy a rövidülések négyzetei és a velük arányos

k, l, m mennyiségek négyzetei is kielégítik a háromszögegyen-

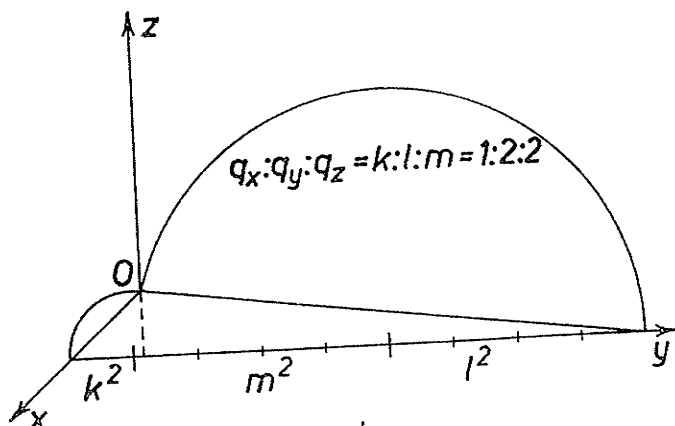
lőtlenséget. A 16.4. ábrán bemutatjuk a

$k:l:m=1:2:2$ rövidülési arányhoz tartozó tengelykereszt szerkesztését: egy egyenesre felmérjük a

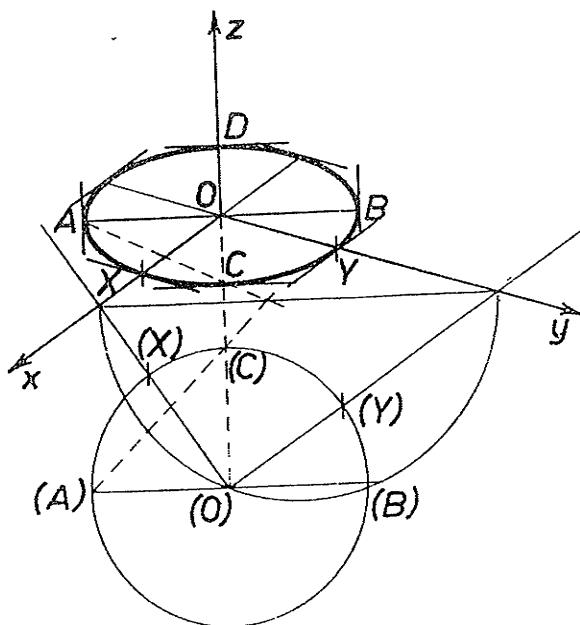
k^2, m^2, l^2 távolságo-

kat, majd az m^2 szakasz végpontjai körül k^2 , illetve l^2 sugárral rajzolt körök metszéspontja az O origó.

A z tengely merőleges az iménti egyenesre, az x , ill. y tengely pedig az O pontot köti össze a három szakasz kezdő, ill. végpontjával. A tengelyekre az eredeti méretek $k-, l-, m-$ szeresét mérve, az



16.4. ábra.



16.5. ábra.

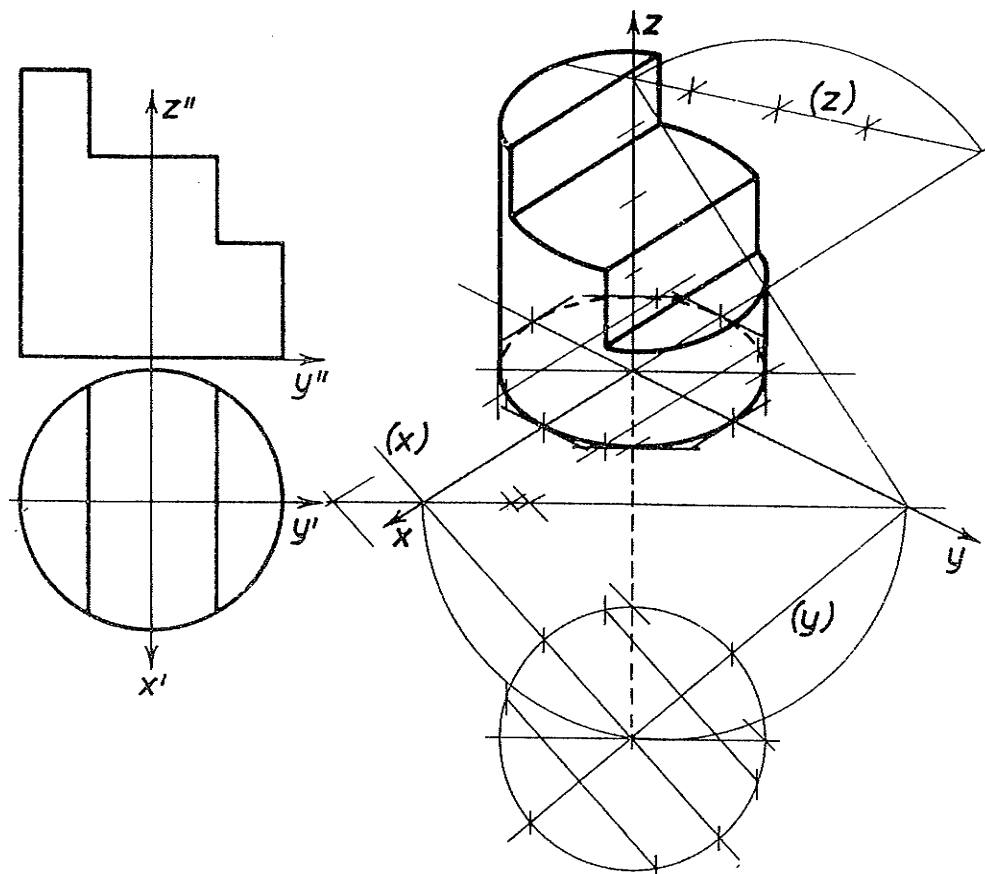
ábrázolandó alakzat merőleges axonometrikus képének felnagyítottjához jutunk.

A kör ábrázolása az axonometriában is síkjának leforgatásával szerkeszthető meg.

A 16.5. ábrán az xy síkban fekvő, origó középpontú kört ábrázoltunk. Az xy koordinátasíkot leforgatva, az ábrázolandó kör leforgatottját megrajzoljuk.

Az (x) , illetve (y) -nal alkotott (X) , illetve (Y) pontok képei a képellipszis konjugált átmérőpárját állítják elő, X -ben az érintő az y tengellyel, Y -ban az érintő az x tengellyel párhuzamos. A képellipszis nagytengelye a sík fővonalával párhuzamos $(A)(B)$ körátmérő képe. A kistengely végpontja az $(A)(B)$ -re merőleges körátmérő (C) végpontjának visszaforgatásából adódik.

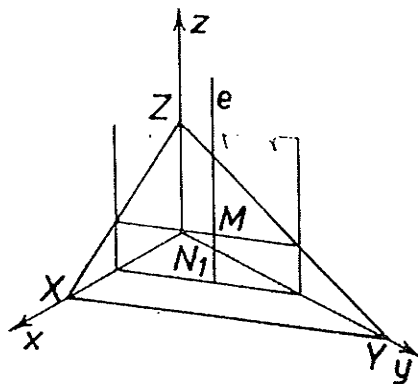
A 16.6. ábrán egy összetett, hengeres alakzat merőleges axonometrikus képét állítottuk elő két vetületéből. Az xy sík leforgatottjában megrajzoltuk a felülnézetet. A szükséges körpontok képét visszaforgattuk és a z irányú



16.6. ábra.

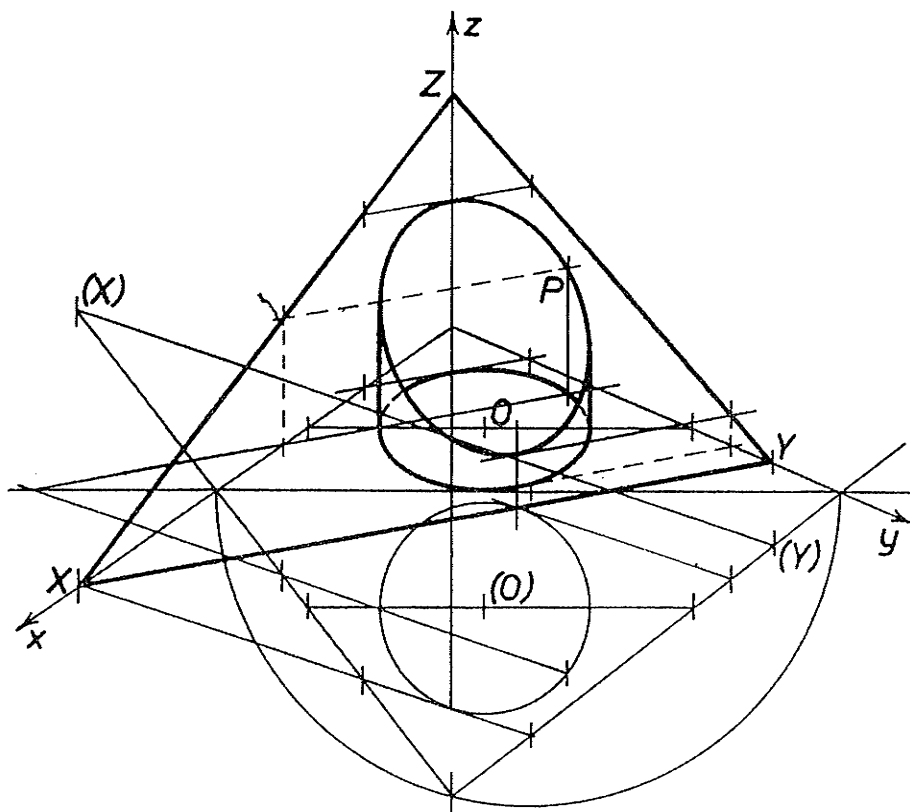
rövidülések figyelembevételével (yz sík leforgatásából) felépítettük a csonkolt henger axonometrikus képét.

Végül forgáshenger síkmetszetének megszerkesztésével foglalkozunk. Ha a henger alkotói az xy síkra merőlegesek, akkor egy e alkotónak az XYZ nyomháromszög által megadott síkkal való M metszéspontját az N_1 nyomponton át XY -nal párhuzamos egyenes és e által meghatározott síknak az XYZ síkkal alkotott metszésvonala jelöli ki a 16.7. ábrán bemutatott módon.



16.7. ábra.

A 16.8. ábrán az xy síkon álló forgáshenger XYZ síkkal való metszetét szerkesztettük meg. Az egyes kúpalkotók kijelölésére az xy sík egy fővonala körül leforgatjuk az O középpontú alapkört és az XY egyenest.



16.8. ábra.

Az $(X)(Y)$ egyenessel párhuzamos körérintők az alapkörön kijelölik a metszetellipszis legalsó és legfelső pontjait tartalmazó alkotókat. E pontokon kívül még egy segédsíkkal való szerkesztést tüntet fel az ábra. E segédsík nyomvonala is XY -nal párhuzamos, és kijelöli a baloldali szélső hengeralkotón levő pontot, valamint a metszetellipszis egy P pontját. A metszetgörbe helyes megrajzolásához még számos segédsíkkal kell pontokat szerkeszteni.

Elméleti tananyag: Tankönyv 95-101. pontok.

A ferde axonometria a koordináta-rendszert és a benne elhelyezett testet ferde (párhuzamos) vetítéssel ábrázoljuk. Ha nem teljesen önkényesen vesszük föl a tengelykeresztet és rajtuk a rövidüléseket — amelyek értéke itt 1-nél nagyobb is lehet — akkor szemléltetésre rendkívül alkalmas, és gyors szerkesztést eredményező eljárás kapunk.

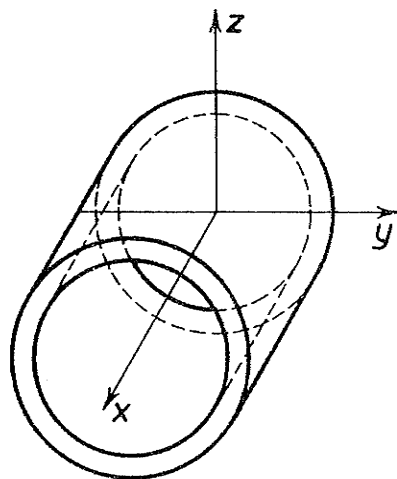
A gyakorlatban sokszor úgy veszik fel a koordináta-rendszert, hogy az egyik koordinátasík a képsíkkal párhuzamos. Példáinkban az yz koordinátasík ilyen, természetesen y és z a képen is merőlegesek, $q_y = q_z = 1$. Az x tengely szokásos felvételei: 30, 45 vagy 60°-os szöget zár be az y tengely egyenesével és q_x értéke $\frac{1}{2}$ és 1 között szokott lenni.

A 17.1. ábrán egy falvas-tagsággal rendelkező csődarabot ábrázoltunk, amelynek tengelye x . Ilyenkor az yz síkban és vele párhuzamos síkokban levő körök képe is kör.

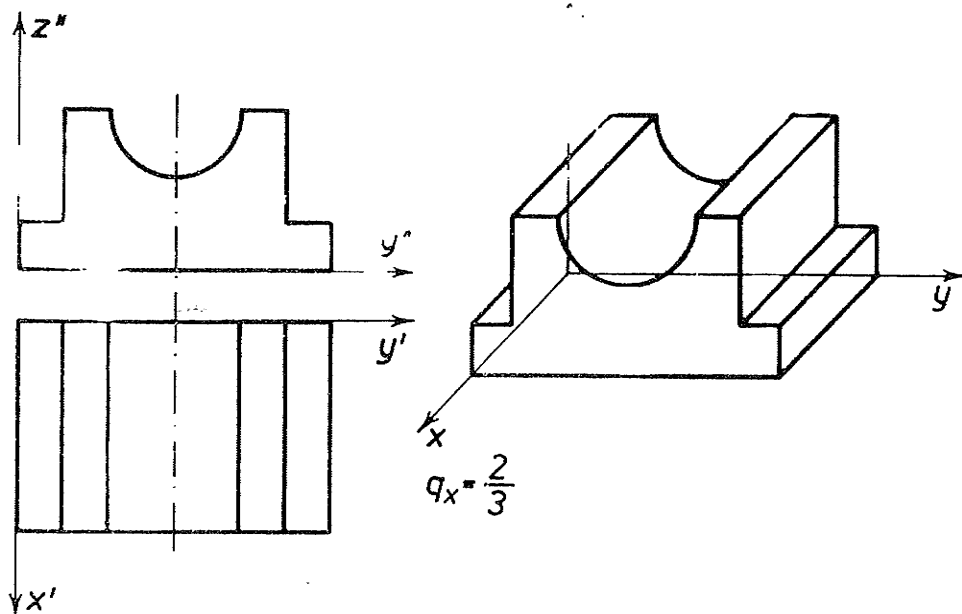
Ezt a körülményt használtuk fel a 17.2. ábrán, a két vetületével megadott alakzat ábrázolásánál is. Az alakzathoz levő félhenger zárókörrei köröknek látszanak; $q_x = \frac{2}{3}$.

Itt az yz síkban levő előlnézetre építettük fel az axonometrikus képet.

Ha az xy síkban fekvő kört kell ábrázolni (17.3. ábra), akkor az y tengelyen levő körátmérő eredeti hosszában látszik Y_1, Y_2 , az x tengelyen levő pedig a $q_x = \frac{3}{4}$ rövidülési aránynak megfelelően: X_1, X_2 .

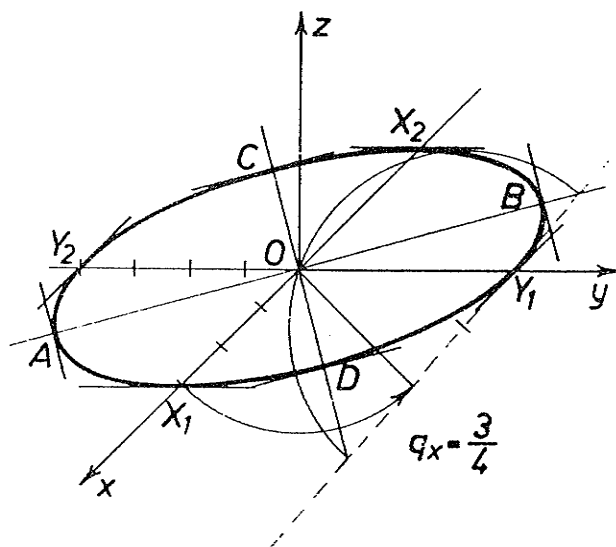


17.1. ábra.



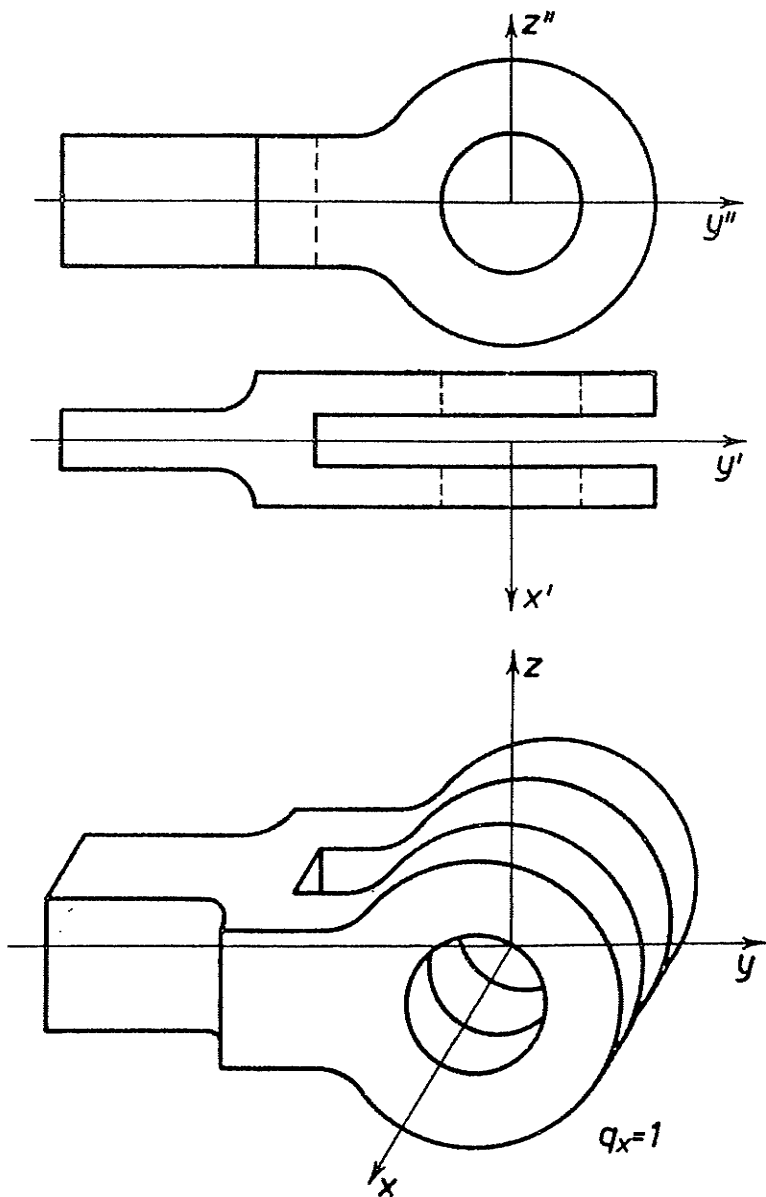
17.2. ábra.

Mínt hogy kör ferde vetülete is ellipszis, ezért az Y_1 , Y_2 és X_1 , X_2 átmérők a képellipszis konjugált átmérői, amiből a Rytz-féle szerkesztéssel (l. 11. fejezet 10. ábra) a képellipszis AB, illetve CD nagy és kistengelyei megszerkeszthetők.



17.3. ábra.

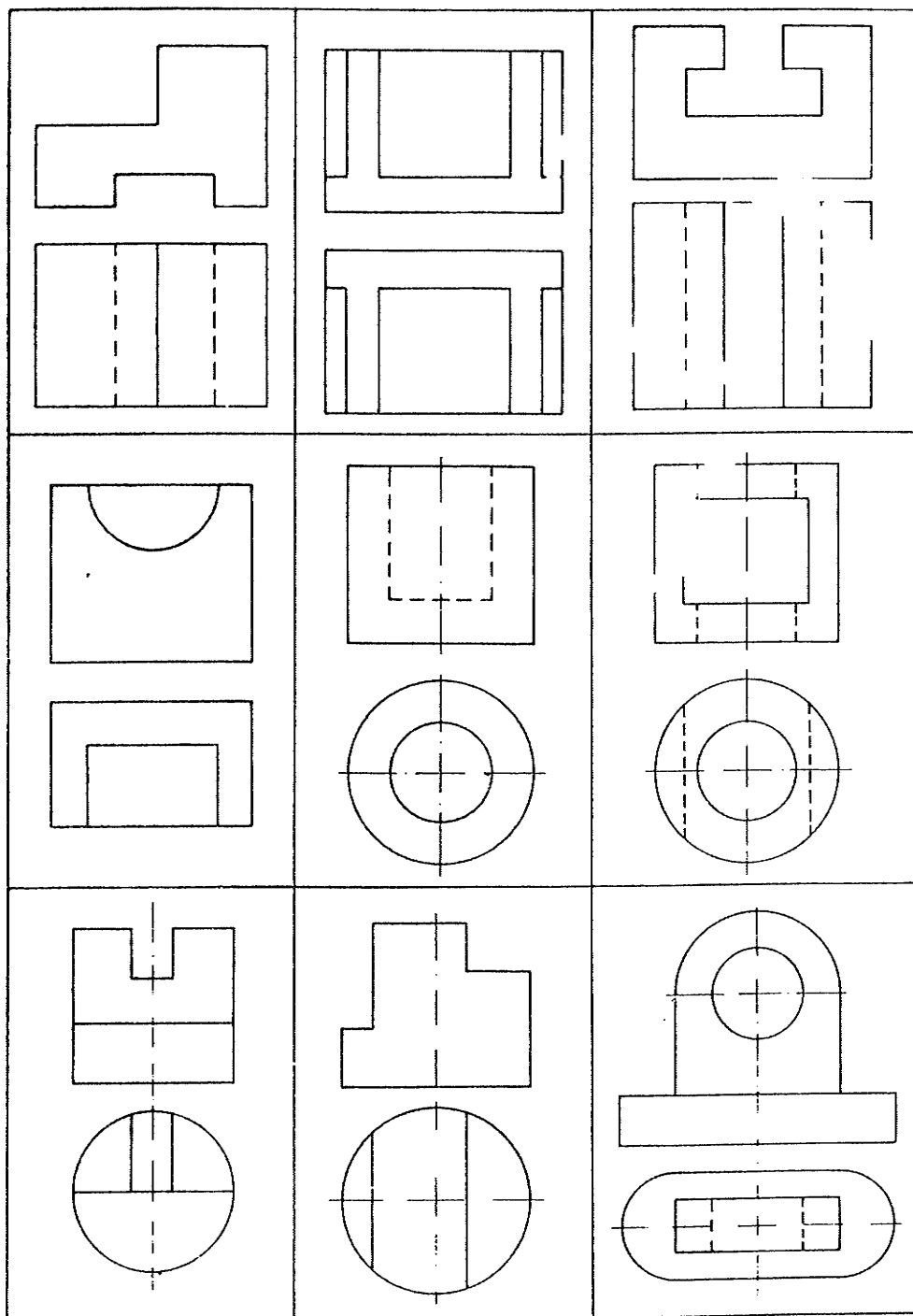
A 17.4. ábrán két vetületével adott villás felfüggesztő lemez ferde axonometrikus képét állítottuk elő; $q_x = 1$. A ferde vetítés ellenére az axonometrikus kép jól áttekinthető, képes képet ad.



17.4. ábra.

Gyakorlásul ábrázoljuk a 17.5. ábrán szereplő vázlatokban két képével adott alakzatokat merőleges- és ferde axonometriában.

Elméleti tananyag: Tankönyv 102-104. pontok.



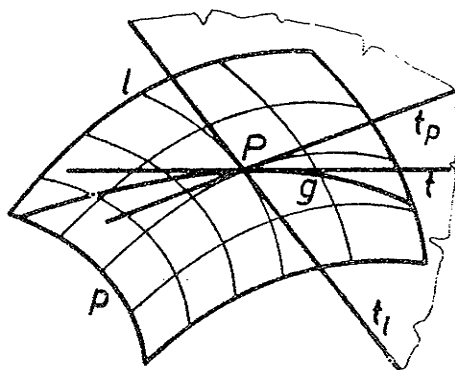
17.5. ábra.

18. FELÜLETEK ÁBRÁZOLÁSA. FORGÁSFELÜLETEK

A görbült felületek egy görbe, az ún. leíró görbe mozgásával írhatók le. A leíró görbe minden pontja egy-egy görbén mozog, ezeket a görbéket a felület pályagörbéinek mondjuk.

A vizsgált felületi pontokra feltételezzük, hogy csak egy leíró görbe és egy pályagörbe halad rajtuk át, mindkettőnek van érintője és ezek egymástól különböző egyenesek. A leíró görbe és a pályagörbe érintői a felület P pontjában meghatározzák a felület érintősíkját (18.1. ábra).

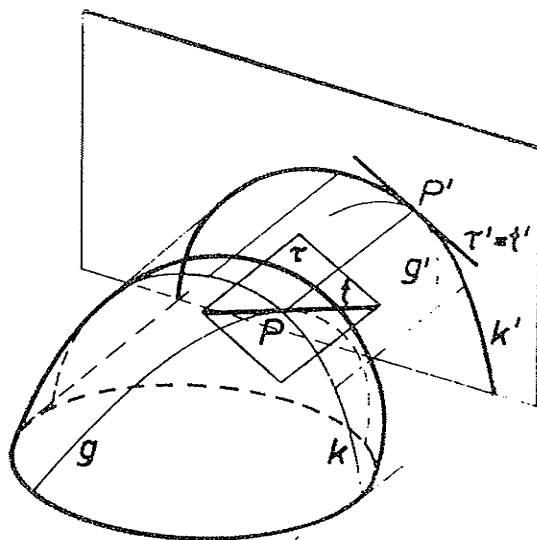
Kimutatható, hogy a P ponton áthaladó felületi görbe érintője az érintősíkban van.



18.1. ábra.

Kontúr, képhatár

Egy felület azon pontjainak összességét, amelyekben a felület érintősíkja vetítősík, a felület kontúrjának nevezzük. Ezek a pontok a felületen egy vagy több görbét alkotnak. A 18.2. ábrán a felület kontúrgörbéje k , amelynek képe a k' képkontúr görbe. Minthogy a P kontúrpontra áthaladó g felületi görbe érintője a P -hez tartozó érintősíkban van, ezért a g' és k' érintője a P' pontban megegyezik.



18.2. ábra.

Forgásfelületek

Ha egy t egyenessel egysíkú leíró görbét a t tengely körül megforgatunk, akkor minden pontja egy-egy t -re merőleges síkban fekvő körpályán az ún. paralelkörökön mozog. Forgásfelületek esetén a leíró görbét meridiángörbének nevezzük, a képsíkkal párhuzamos helyzetű síkban fekvő meridiánt főmeridiánnak mondjuk. A gömbfelületnek a középpontján áthaladó bármely egyenes tengelye lehet.

Gömb-, kúp-, henger- és tóruszfelület

Gömb

A 18.3. ábrán a O középpontú gömböt ábrázoltuk. Első képét a k_1 kör első képe, második képét a k_2 kör második képe határolja; mindkét kör sugara a gömb sugarával egyenlő. A k_1 kör pontjaiban a gömb érintősíkjai első vetítősíkok, a k_2 kör pontjaiban az érintősíkok

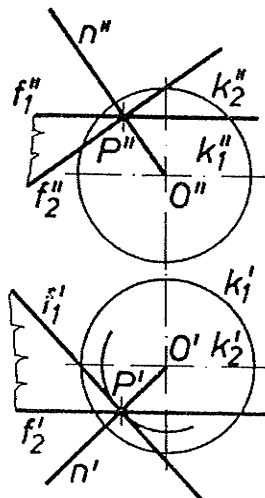
második vetítősíkok. A gömböt mindig tekinthetjük első (illetve második) vetítőegyenestengelyű forgásfelületnek.

A 18.3. ábrán megadtuk a P'' pontot. A P' pontot úgy kell meghatározni, hogy a P pont a gömbön legyen. A gömböt első vetítőegyenestengelyűnek gondolva, P'' -n át felvett, a tengelyre merőleges sík a gömbből egy paralelkört metsz ki. Ennek sugara a második képen lemérhető, első képen pedig a P'' rendezője jelöli ki P' -t (két ilyen pont van). A gömb sugara merőleges az érintősíkra, egyenestét a gömb normálisának mondjuk. Az n normálisra a P pontban szerkesztett (f_1, f_2) merőleges sík a gömb érintősíkja.

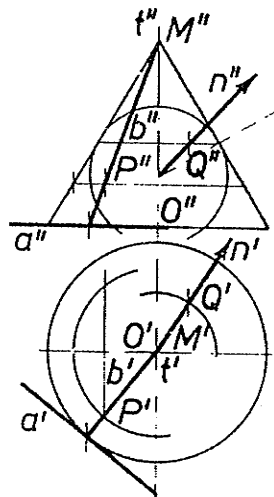
Forgáskúp

A 18.4. ábrán az M csúspontú, első vetítőegyenestengelyű, O középpontú paralelkörrel lezárt kúpot ábrázoltunk. A kúpnak első képkontúrja nincs, mert nincs olyan érintősíkja, amelyik az első képsíkra merőleges. A t egyenest tartalmazó, második képsíkkal párhuzamos síkban levő kúpalkotók a (második) kontúralkotók.

A kúpfelületen ábrázoltunk egy P'' és egy Q' -vel megadott felületi pontot. A pontok ábrázolása a ponto-



18.3. ábra.

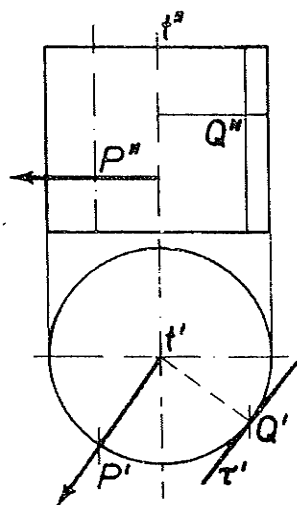


18.4. ábra.

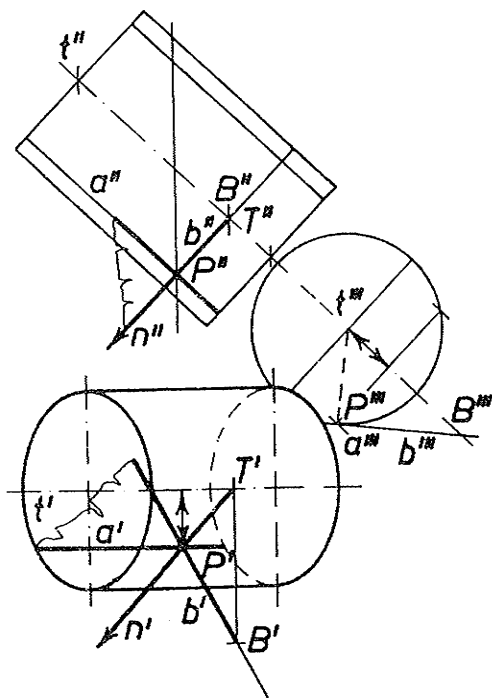
kon áthaladó paralelkörök segítségével történt. A P pontban megszerkesztettük a felület érintősíkját, amelyet a b alkotó és az a alapköri érintő határoznak meg. A Q pontban a felület normálisát állítottuk elő. A Q pontot tartalmazó párhuzamos kör mentén a kúpot érintő gömb középpontja a szélső alkotóhoz tartozó normálissal jelölhető ki. Ezen a gömbközeppponton átmegy a paralelkör valamennyi pontjához tartozó normális. Ennek alapján állítható elő n mindkét képe. (Általános forgásfelület esetén is ezzel a megfontolással kapjuk a felületi normálist.)

Forgáshenger

A 18.5. ábrán egy első vetítőegyenestengelyű hengert ábrázoltunk. Ennek minden pontjában első vetítősík a felület érintősíkja, a henger első képe kör. A második képen a kontúralkotók a t egyenest tartalmazó, második képsíkkal párhuzamos síkban vannak. A P'' pontot felvéve, egyetlen rendezővel kapunk olyan P' pontot (kettőt), hogy az így ábrázolt pont a henger pontja legyen. A Q' -t felvéve a Q'' ennek rendezőjén bárhol felvehető, a Q pont a



18.5. ábra.



18.6. ábra.

henger pontja. A P pontban a felületi normálist szerkesztettük meg, ami nem más, mint a P ponton átmenő körmetszet sugara. A Q pontban a felületi érintősík első vetítősík, amelynek első képe a henger első képét érintő egyenes.

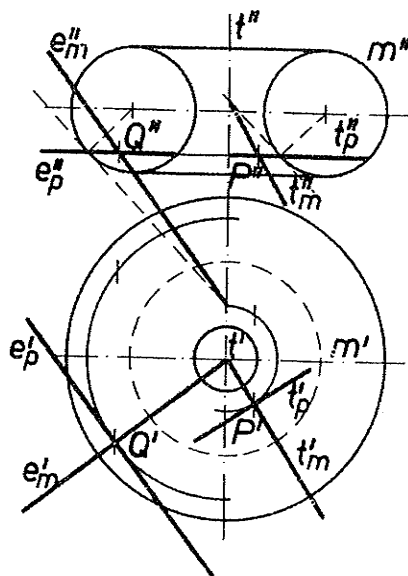
Ha a henger tengelye valamelyik képsíkkal párhuzamos — a 18.6. ábrán a második képsíkkal —, akkor a tengelyt vetítő egyenest transzformálva, az előbbi helyzetbe jutunk. A P felületi pont ábrázolása és benne az (a,b) érintősík megszerkesztése a transz-

formáció eljárásával történik.

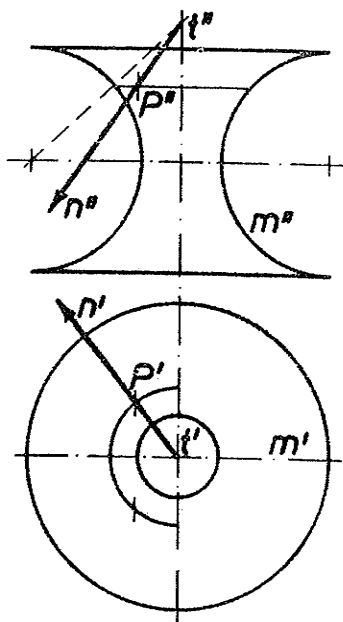
A P pontban a második képen a normális a tengelyre merőleges, és azt a T pontban metszi. T meghatározásával az n normális első képe is adódik.

Tóruszfelület

A 18.7. ábrán egy kört a középpontját nem tartalmazó t tengely körül forgattunk meg. Az így létrejövő felületet tórusznak nevezzük. A t egyenes első vetítőegyenes. A legnagyobb illetve legkisebb sugarú paralelkör pontjaiban a felületi érintősík első vetítősík. E két kör a tórusz első kontúrja; a kisebbik kört torokkörnek, a nagyobbát ekvátorkörnek nevezzük. A tórusz második kontúrját a második képsíkkal párhuzamos főmeridiánkörök, valamint a legfelső és legalsó paralelkörök képezik; ezek pontjaiban a felület érintősíkja második képsíkra merőleges. A legfelső és legalsó paralelkörök a tóruszt két részre osztják, az egyik a



18.7. ábra.



18.8. ábra.

belső tórusz (18.8. ábra), a másik a külső tórusz.

A 18.7. ábrán megadtuk a P'', illetve Q'' pontokat. Mindkettő ugyanabban a vízszintes síkban van, amely a belső és a külső tóruszból kimetsz egy-egy kört. Ennek megfelelően a Q'' pontnak az első képen két, a P'' pontnak négy tóruszon levő pont felelne meg.

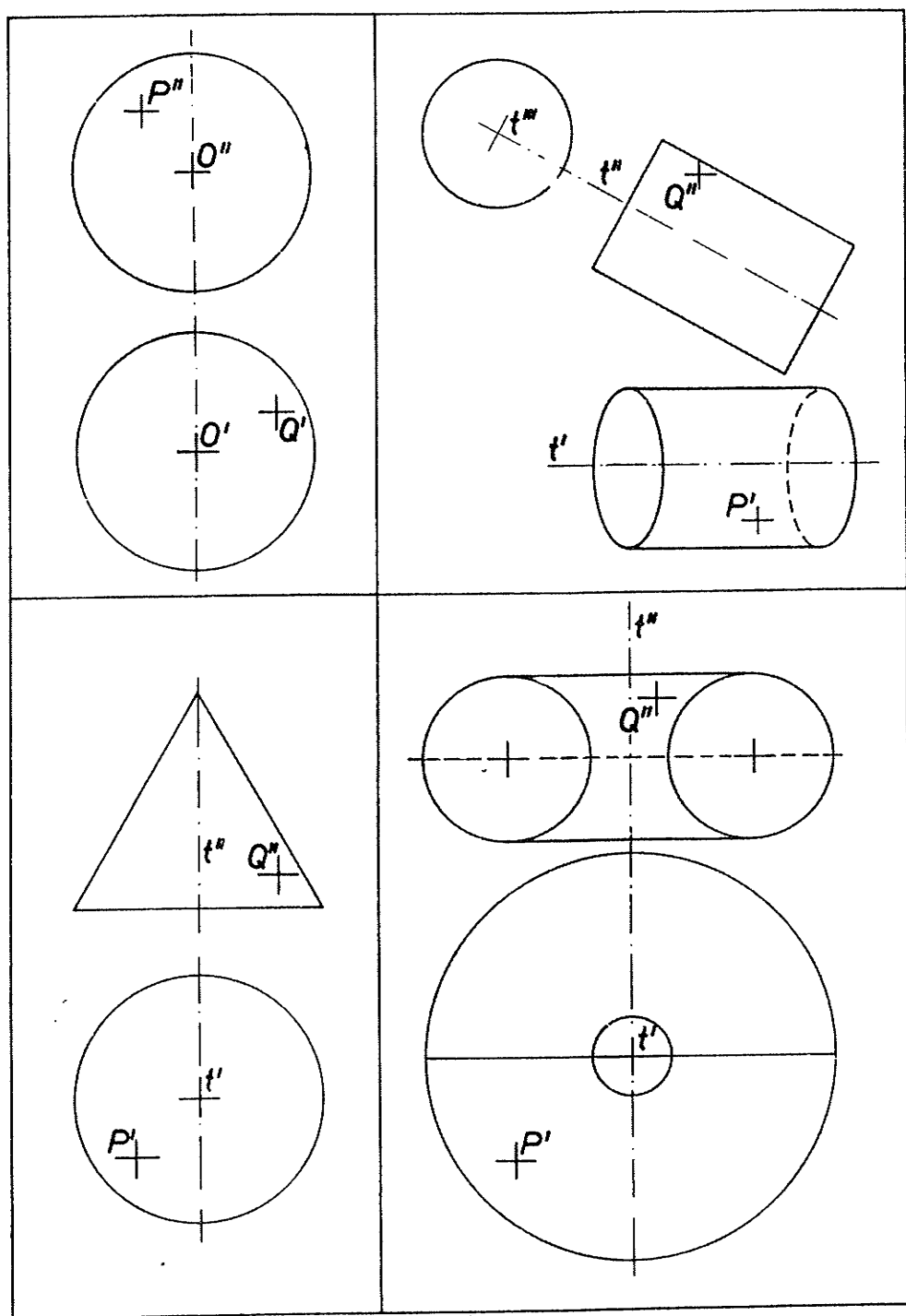
A P és Q pontban megszerkesztettük a felület érintősíkját. A pontokat főmeridián helyzetbe forgatjuk a tórusz tengelye körül. Itt meghúztuk a főmeridián érintőjét, amely P és Q esetén más-más pontban metszette a tengelyt. Viszsaforogatáskor az érintők tengelypontjai helyben maradnak, tehát ezeket a megfelelő pontokkal összekötve, a P, illetve Q-n áthaladó meridiánkörök t_m , illetve e_m érintő-

tőit kapjuk. A paralelkörök t_p , illetve e_p érintői könnyen meghúzhatók. Tehát a P-beli érintősíkot a t_p , t_m egyenespár, a Q-beli érintősíkot az e_p , e_m egyenespár határozza meg.

A 18.8. ábrán megadott belső tóruszon felvett P pontban a normálist szerkesztettük meg. A P-t a főmeridiánhelyzetbe forgatjuk, ott meghúzzuk a normálist, és ahol ez a t tengelyt metszi, azt a pontot P-vel összekötő egyenes lesz a P-beli felületi normális.

Gyakorlásra javasoljuk a 18.9. ábrán megadott felületeken a kijelölt pontok ábrázolását és bennük a felületi normális, illetve érintősík megszerkesztését.

Elméleti tananyag: Tankönyv 311-313., 316-318., 327., 373-374. pontok.



18.9. ábra.

19. FORGÁSFELÜLETEK SIKMETSZETÉNEK SZERKESZTÉSE

Forgásfelület síkmetszete az a görbe, amely a felület és a sík közös pontjaiból áll.

Forgásfelület síkmetszetének pontjait a 19.1. ábrán forgáskúpra bemutatott módszerrel szerkesztjük:

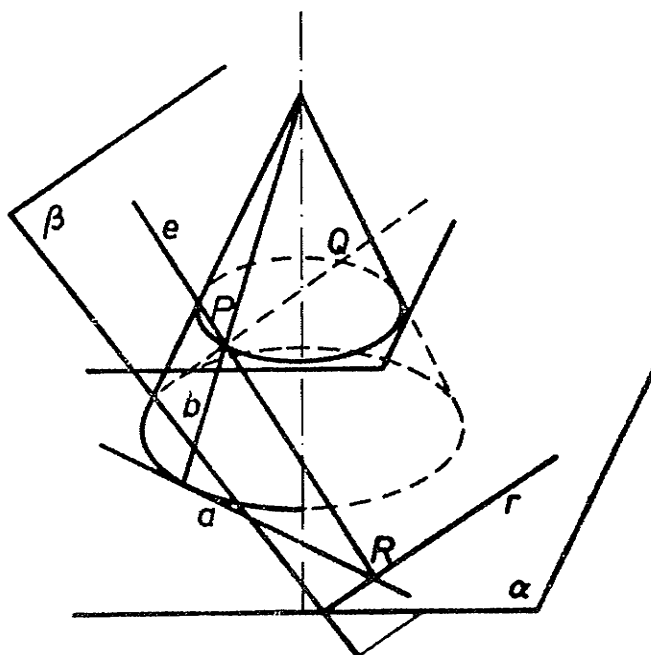
Vesszünk egy, a forgásfelület tengelyére merőleges segédsíkot, amely a kúpból (forgásfelületből) kört, a β metszősík ből pedig egy egyenest metsz ki. Ezek közös P, illetve Q pontjai a síkmetszethez tartoznak.

A P pontban bemutatjuk az érintő szerkesztését: a met-

szetgörbe érintője a β metszősíkban és a P-hez tartozó érintősíkban (a, b) egyaránt benne van, tehát az e érintő e két sík metszésvonala, amelynek egy pontja a P. A két sík további metszéspontját az a alapköri érintő és az r egyenes R metszéspontja adja, ahol r az α alapsík és β metszősík metszésvonala.

Az általános pontokon kívül ún. lényeges pontokat is szerkesztünk, ilyenek a közös szimmetriasíkban levő pontok, a kontúrponatok és a csatlakozó, illetve lezáró paralelkörökön levő pontok.

A közös szimmetriasíkra a felület is, a metszősík is szimmetrikus, tehát a felület tengelyét tartalmazó és a metszősíkra merőleges sík a szimmetriasík. Ebben levő pontok szerkesztésére alkalmazott segédsík maga a szimmetriasík.



19.1. ábra.

A kontúrpontok szerkesztésére a felület kontúrgörbét tartalmazó síkot használjuk fel segédsíknak.

A lezáró és csatlakozó (két vagy több felületből összetett felület esetén van ilyen) paralelkörökön levő metszetpontok szerkesztése az általános pontok szerint megy.

Gömb síkmetszete

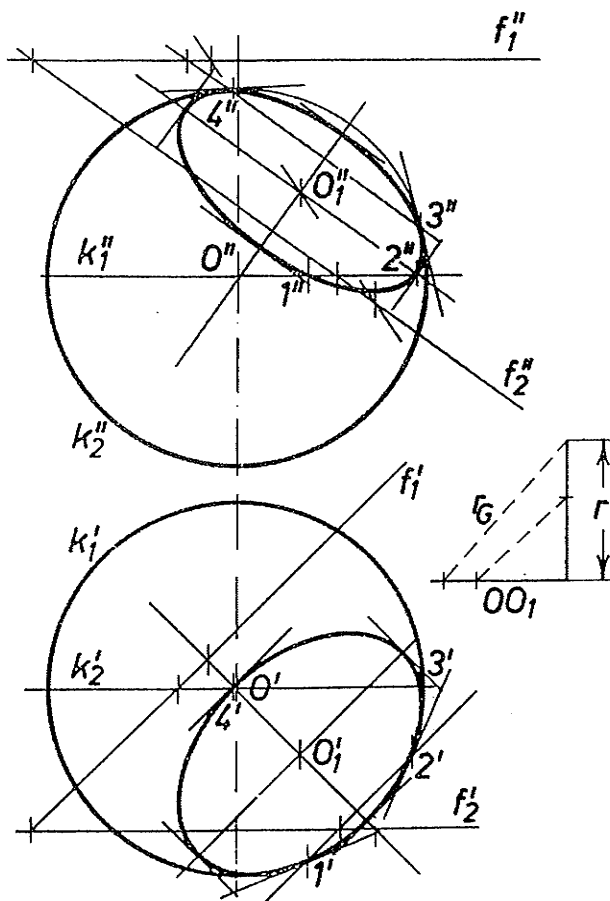
A gömb síkmetszete kör, amelynek síkja az adott sík, középpontja a gömb középpontjából a síkra állított merőleges O_1 metszéspontja, sugara pedig annak a derékszögű háromszögnek a befogója, amelynek átfogója a gömb sugara, másik befogója pedig az OO_1 szakasz (19.2. ábra). Az ábrán az O középpontú r_G sugarú gömböt az f_1, f_2 fővonalakkal meghatározott síkkal metszettük el. Így az O_1 pont ismeretében a képellipszisek nagytengelyei kijelölhetők.

A k_1 kört

tartalmazó segédsík által a metszősíkból kimetszett egyenes kijelöli az 1, 2 első kontúrpon

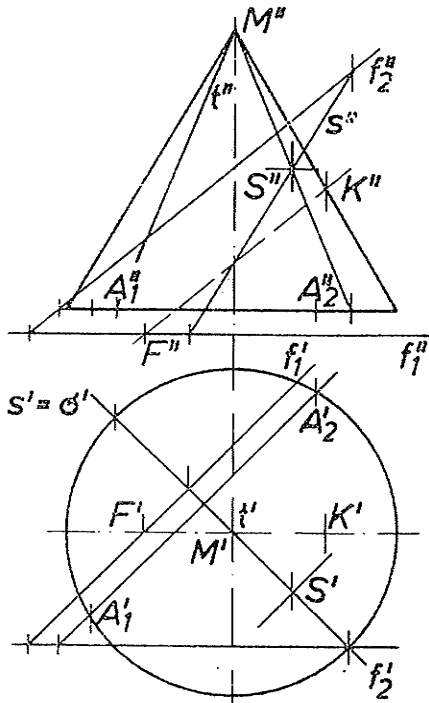
tokat. A második kontúrpon

tokat (3, 4) a k_2 -t tartalmazó síkkal szerkesztjük, teljesen hasonló módon. A képellipszisnek kistengelyvégpontjait a 11. fejezetben (az ellipszográf elvének következményeként, l. 11. 12. ábra) tanultak szerint határozzuk meg. A láthatóság feltüntetésénél a metszősík által lemetezett részt eltávolítottuk.

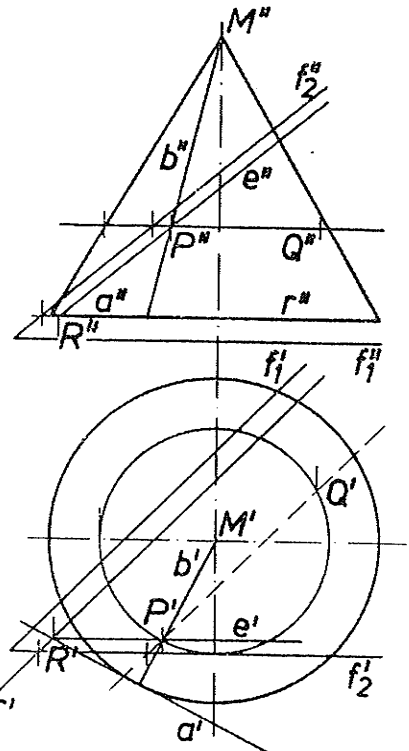


19.2. ábra.

Forgáskúp síkmetszete

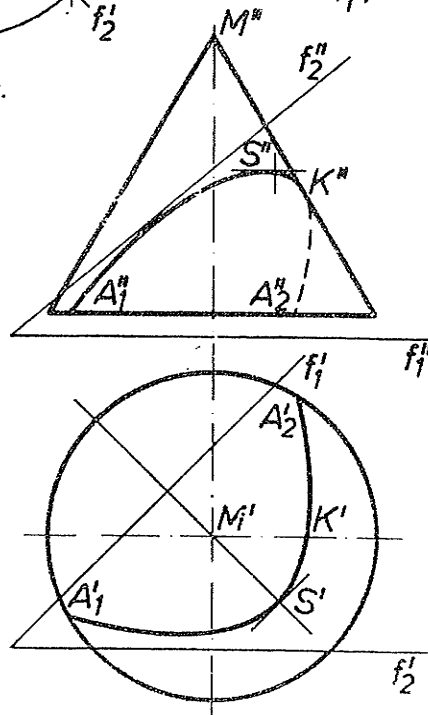


19.3. ábra.



19.4. ábra.

A 19.3.-
19.5. ábrák
ugyanannak a
forgáskúpnek
az f_1 , f_2
fővonalak ál-
tal meghatá-
rozott sík-
kal való met-
szetét mu-
tatják a
szerkesztés
különböző
fázisaiban.



19.5. ábra.

A 19.3. ábrán felvettük a δ közös szimmetriasíkot (első vetítősík). Ez a metszősíkot az s egyenesben, a kúpot pedig két alkotóban metszi. Ezek közös pontja az S pont, amelyben az érintő — a szimetriaviszonyok miatt — a δ -ra merőleges első fővonal. Az alapkör síkját véve segédsíknak, ez a metszősíkból egy f_1 egyenessel párhuzamos egyenest metsz ki, amely kijelöli az A_1 és A_2 alapköri pontokat.

A kúp főmeridiánsíkját használva segédsíknak — ezt f_1 az F pontban metszi — a kapott f_2 -vel párhuzamos metszésvonal kijelöli a szélső kúpalkotón a K kontúrponthoz.

A 19.4. ábrán felvett segédsíkkal a P és Q általános pontok adódnak. P -ben az (a, b) érintősík és (f_1, f_2) sík metszésvonala RP adja az e érintőt.

A 19.5. ábrán a metszetgörbét rajzoltuk meg, mint a kúpra rajzolt görbét. A láthatóság a K pontban változik meg.

Forgáshenger síkmetszete

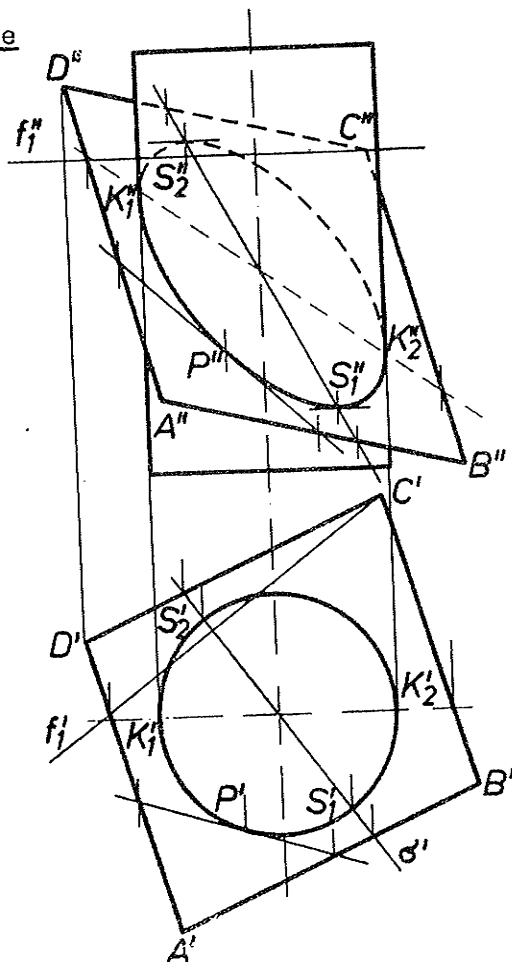
A 19.6. ábrán egy első vetítőhengert metszünk el egy általános helyzetű síkkal. A közös szimmetriasík a henger tengelyén áthaladó, a metszősík f_1

első fővonalára merőleges δ első vetítősík. Ez a hengerből alkotókat, a síkból egy egyenest metsz ki, amelyek az S_1, S_2

szimmetriapontokat határozzák meg, bennük az érintő első fővonal.

A henger főmeridiánsíkja által a metszősíkból ki-metszett egyenes jelöli ki a K_1, K_2 képkörrajzi

pontokat. Minthogy a metszet első képe kör, ennek tetszőleges P' pontjában vesszük az érintőt, amely a metszősíkban fekvő egyenes. Ennek második képe a képellipszis érintője lesz, amelyen az érintési pont rendezővel jelölhető ki.

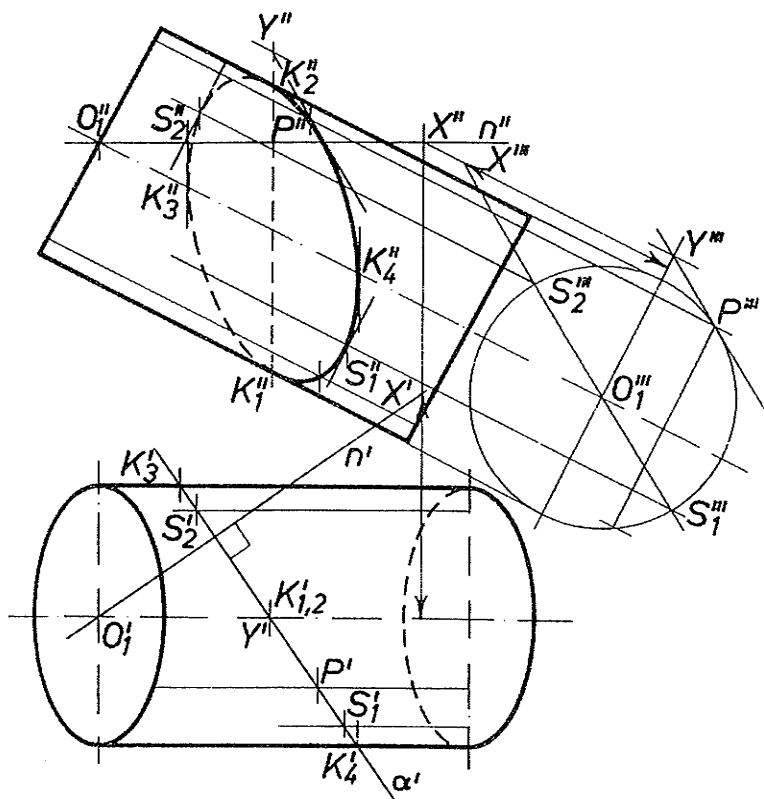


19.6. ábra.

A 19.7. ábrán a második fővonal tengelyű hengert az α első vetítősíkkal metszettük el. A K_1, K_2 második kontúr-pontok, valamint a K_3, K_4 első kontúrponatok második képe közvetlenül adódik, sőt láthatóan konjugált átmérőpárt alkotnak.

A közös szimmetriasíkot a henger tengelye és annak O_1 pontjából az α síkra állított merőleges n egyenes határozza meg. Ennek és a hengernek harmadik képét megszerkesztve az $O_1'''X'''$ egyenes a szimmetriasík harmadik képe, amely kijelöli az S_1, S_2 szimmetriapontokat. Az S_1 és S_2 második képe a transzformáció eljárásával, az első kép közbejöttével határozható meg.

A P általános pontot és benne az érintőt szintén transzformációval határoztuk meg (Y segédpont).



19.7. ábra.

Tórusz síkmetszete

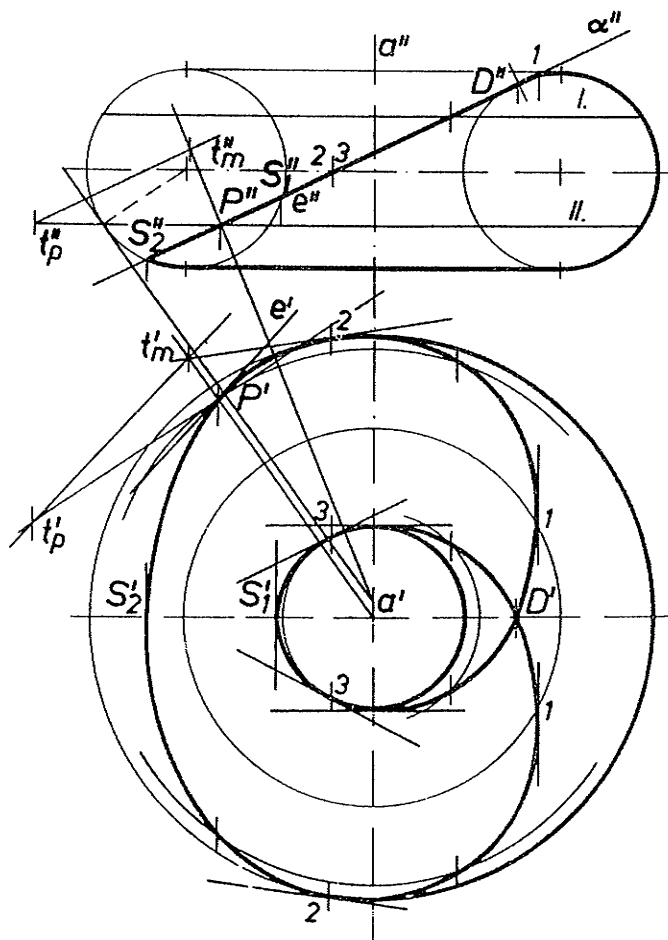
A 19.8. ábrán az a első vetítőegyenes tengelyű tóruszt az α második vetítősíkkal metszettük el. Az α sík a főmeridián kör D pontjában érinti a tóruszt. Ha a metszősík a felület érintősíkja, akkor a metszetgörbének az érintési pont ún. duplapontja (vagy kettős pontja), ami azt jelenti, hogy ezen a ponton kétszer halad át a metszetgörbe és két érintője van. (Ezek szerkesztésével nem foglalkozunk.)

A felület és az α sík közös szimmetriasíkja e feladatban a tórusz főmeridiánsíkja; a szimmetriasíkban levő S_1 , S_2 és D pontok közvetlenül adódnak, S_1 és S_2 pontokban az érintő a szimmetriasíkra merőleges második vetítőegyenes.

Képkörrajzi pontok a legfelső párhuzamos kör síkjában levő 1-gyel jelölt pontok, bennük az érintő második vetítő-

egyenes. Az első képkör-rajzi pontok a torokkör és ekvátorkör síkjában adódnak; a 2-vel jelölt pontok az ekvátorkörön, a 3-mal jelölt pontok a torokkörön vannak. Bennük az érintő első képét a megfelelő kör érintőjeként kapjuk.

Általános helyzetű pontokat az ekvátorkör síkja alatt és felett azonos távolságban felvett I és II segédsíkokkal szerkesztettünk (ezek ugyanolyan sugarú körökben metszik a tóruszt). Érintőt a P pontban szerkesztettünk.



19.8. ábra.

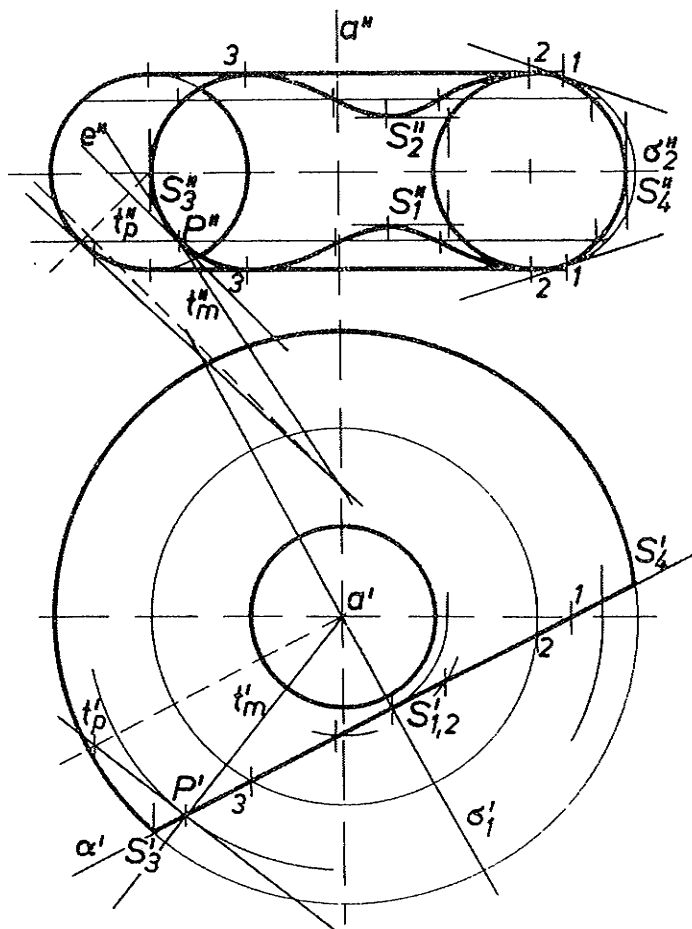
Meghatároztuk a P pontban a felület érintősíkját. Ennek és az α síknak a metszésvonala az érintő, amely a második képen $e'' = \alpha''$. Ezzel párhuzamos egyenest vettünk fel az érintősíkban, amelynek első képével P' ponton át párhuzamos e' az érintő első képe. — A láthatóságot az α sík feletti rész eltávolítása után tüntettük fel.

A 19.9. ábrán az a első vetítőegyenest tengelyű tóruszt az α első vetítősíkkal metszettük. E feladatban két közös szimmetriasík adódik. A σ_1 a tórusz tengelyét tartalmazó, α -ra merőleges sík, amely α -t egy első vetítőegyenest metszi. Ezt az egyenest a tórusz tengelye körül beforgatjuk a főmeridiánsíkba, akkor a főmeridiánkört a szimmetriasíkban levő pontok elforgatottjaiban metszi. E pontok visszaforgatásával adódó S_1 és S_2 pont a két szimmetriapont, bennük az érintő σ_1 -re merőleges, első főegyenest. A másik

σ_2 szimmetriasík az ekvátorkör síkja, ebben levő S_3 és S_4 pontok közvetlenül adódnak, bennük az érintő első vetítőegyenest.

A képkörrajzi pontok: a főmeridiánsík és az α sík metszésvonala kijelöli az 1-es pontokat, bennük az érintő második képe a főmeridiánkör érintője. A legalsó, illetve legfelső paralelkörök síkjában kapjuk a 2-vel és 3-mal jelölt pontokat, ezekben az érintő első főegyenest.

Általános pontokat az ekvátorkör síkjára szimmetrikus segédsíkokkal szerkesztettünk.



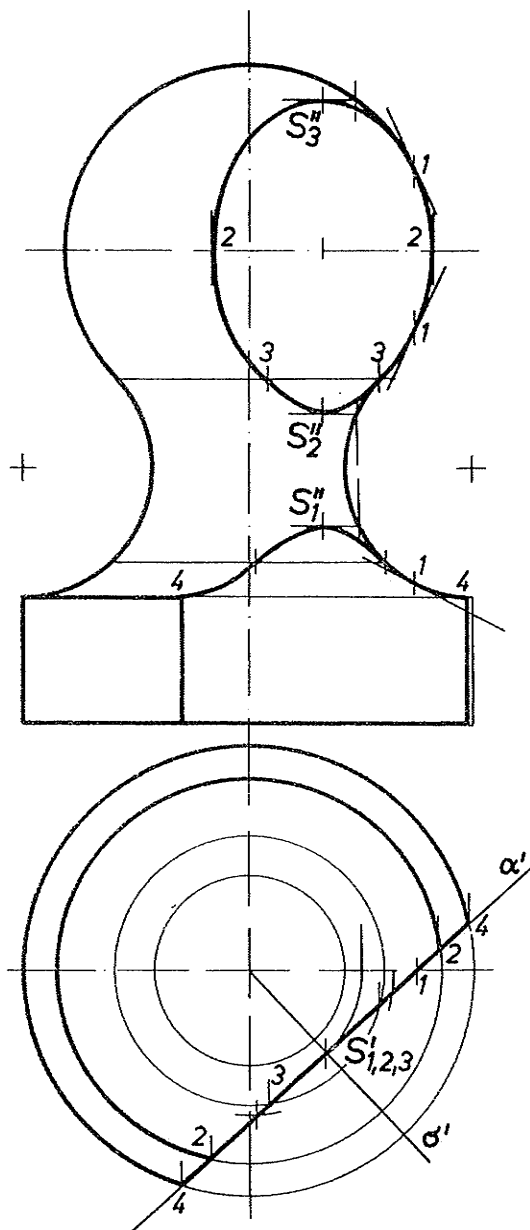
19.9. ábra.

Közülük a P pontban megszerkesztettük az érintősíkot. Az érintősík és metszősík metszésvonalának szerkesztése az előző feladathoz hasonlóan történik; az α sík első képével párhuzamos egyenest veszünk fel az érintősíkban, ennek második képével párhuzamos az e érintő második képe. — A láthatóságot úgy tűntettük fel, hogy az α sík előtti részt eltávolítottuk.

Összetett forgásfelület síkmetszete

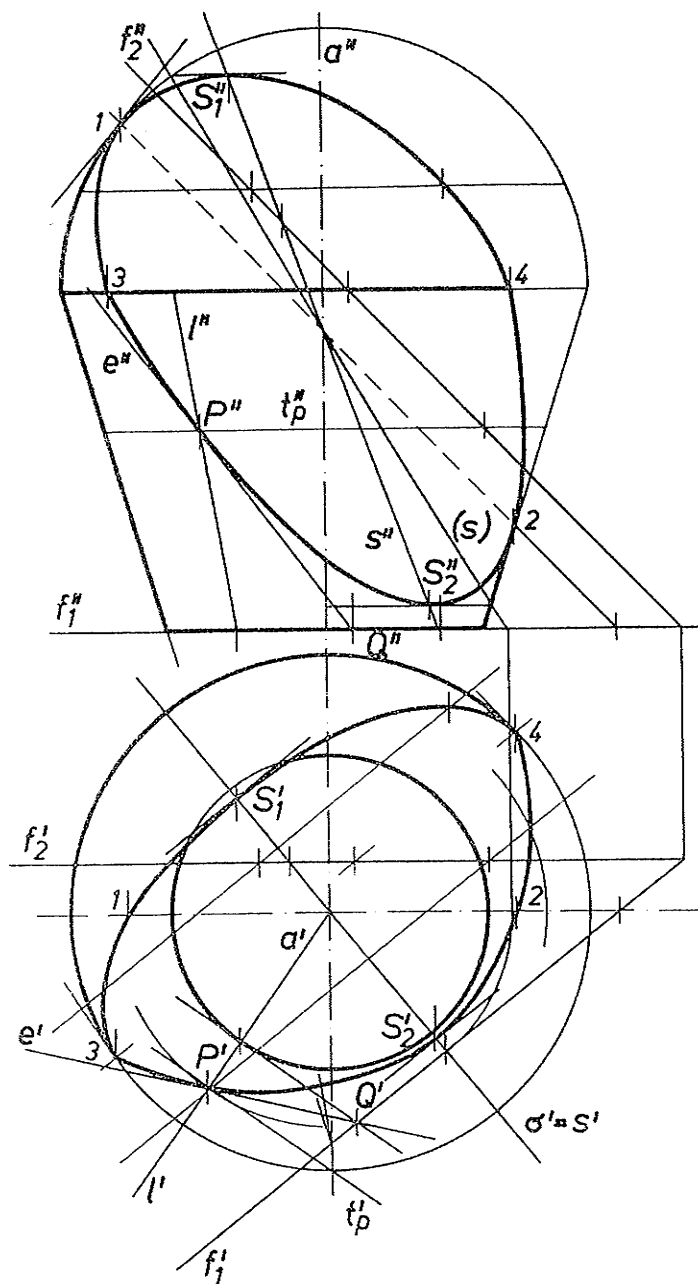
A 19.10. ábrán gömb, tórusz és hengerfelületek csatlakoztatásával kapott felületet metszettük el az α első vetítősíkkal. A közös szimmetriasík σ , az ebben levő pontokat a 19.9. ábrán bemutatott módon szerkesztjük: S_1 , S_2 , S_3 , bennük az érintő első főegyenes.

A képkörrajzi pontok közül a főmeridiánsíkon levő, 1-gyel jelölt pontok közvetlenül adódnak, érintőik II. képe a főmeridiángörbe érintői. A gömb-rész első képkörrajzán kapjuk a 2-es pontokat, érintőik első vetítőegyenesei. A 3-as pontok a gömb és tórusz-rész érintkezési paralelkörén vannak, bennük a tórusz, illetve gömbmetszet érintője megegyezik. A 4-gyel jelölt pontok a tórusz legalsó körén vannak, és egyúttal kijelölik a hengerből kimetszett alkotókat is. Itt a metszetgörbe „megtörik”, mivel ez a kör az összetett felület éle. Ezen az ábrán általános pontban nem szerkesztettünk érintőt.



19.10. ábra.

A 19.11. ábrán félgömb és csomkakúp által kialakított felületnek és az f_1 , f_2 fővonalak által meghatározott síknak a metszésvonalát szerkesztettük meg.



19.11. ábra.

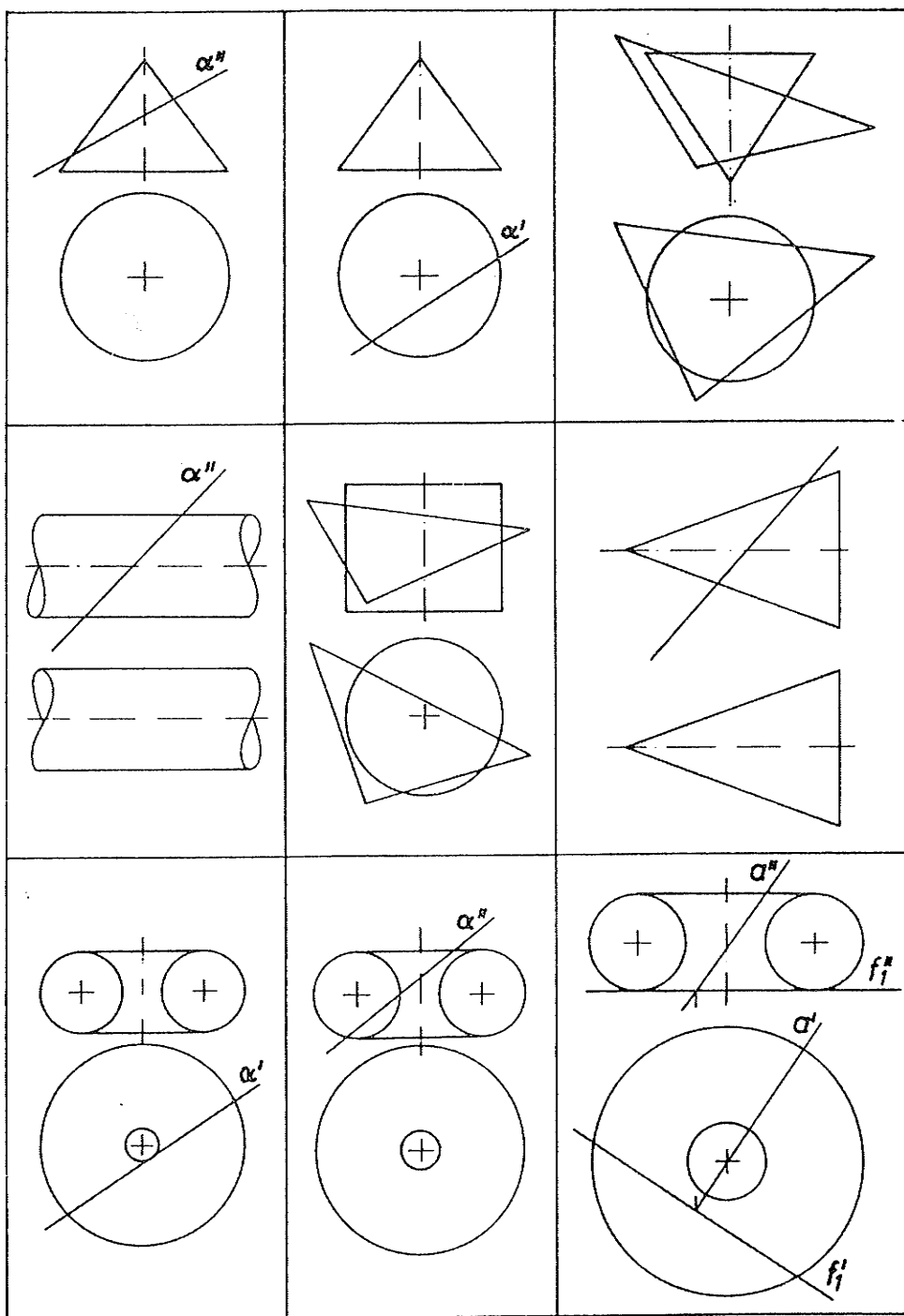
A közös szimmetriasík σ tartalmazza a felület a tengelyét, és merőleges a sík f_1 fővonalára. Ennek a metszősíkkal közös egyenese s , ezt főmeridiánhelyzetbe forgatjuk a felület tengelye körül: (s) . Ez a főmeridiánt a szimmetriasíkban levő pontok elforgatottjaiban metszi, e pontokat visszaforgatva kapjuk az S_1, S_2 szimmetriapontokat, bennük az érintő σ -ra merőleges első fővonal.

Képkörrajzi pontok: A főmeridiánsík a metszősíkból egy f_2 -vel párhuzamos egyenest metsz ki, amely a főmeridiánon az 1, 2 második képkörrajzi pontokat jelöli ki. Első képkörrajzi pontok a félgömb legalsó paralelkörén adódnak: 3, 4. Ezek a pontok a kúpon is a metszethez tartoznak, de mivel e kör a felületnek egy éle, a metszetgörbe a 3 és 4 pontokban megtörik.

Általános helyzetű pontot az a tengelyre merőleges segítségssíkokkal szerkeszthetünk. Ilyen pont a P pont, benne az érintősíkot az l és t_p egyenesek határozzák meg. Az érintősík és metszősík e metszésvonalának egy Q pontját úgy állítottuk elő, hogy az f_1 egyenest tartalmazó vízszintes síkkal az érintősíkot is elmetasztottuk, a kapott egyenes az f_1 -t Q-ban metszi. A QP egyenes a keresett érintő.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 19.12. ábrán vázlatokban megadott síkmetszetszerkesztési feladatokat A/4-es méretű nagyításban.

Elméleti tananyag: Tankönyv: 330-334., 337., 380-382. pontok.



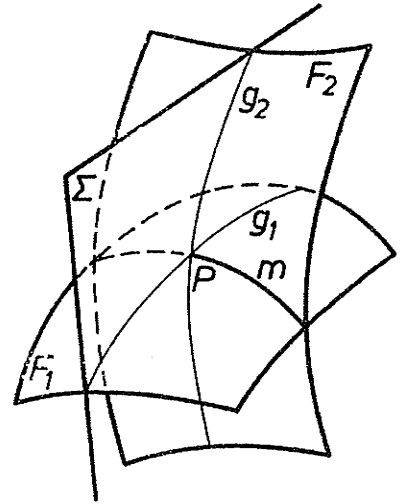
19.12. ábra.

20. FORGÁSFELÜLETEK ÁTHATÁS:

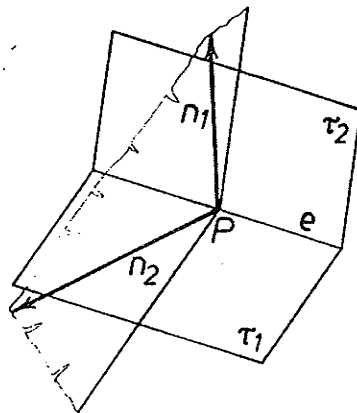
Két felület, F_1 és F_2 áthatásán értjük közös pontjaik összességét, amely általában egy m görbét ad. Ennek pontjait segédsíkok (ritkábban segédgömbök) segítségével szerkesztjük (20.1. ábra). A Σ segédsík az F_1 felületből g_1 , F_2 felületből g_2 görbét metsz ki (g_1 és g_2 kör vagy egyenes), ezek közös P pontja az m áthatási görbe pontja.

Az áthatási görbe érintője a P pontban, a két felület érintősíkjainak (τ_1 és τ_2) metszévonalára: e . A felületek n_1 , illetve n_2 normálisai merőlegesek a τ_1 , illetve τ_2 érintősíkokra, tehát az e érintő merőleges a normálisok által meghatározott síkra (20.2. ábra).

A 20.3. ábrán jól látható, hogy ha két forgásfelület tengelye egybeesik, akkor az áthatási görbe a közös paralelkörökből áll.

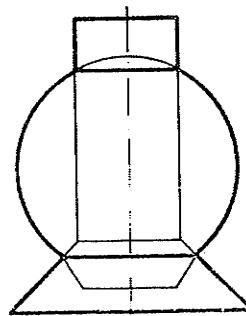


20.1. ábra.



20.2. ábra.

Ha két forgásfelület tengelye párhuzamos, akkor a tengelyekre merőleges síkok a felületeket paralelkörökben metszik, amelyek közös pontjai az áthatási görbe pontjai.



20.3. ábra.

20.4. ábra.

A henger szélső alkotóin levő 3 és 4-es pontokat úgy állítjuk elő, hogy a megfelelő alkotókat a tórusz tengelye körül főmeridiánhelyzetbe forgatjuk, a főmeridiánkörrel alkotott metszéspontok visszaforgatottjai lesznek a 3 és 4-gyel jelölt második képkörrajzi pontok. Bennük az érintő képe a hengeralkotó lesz.

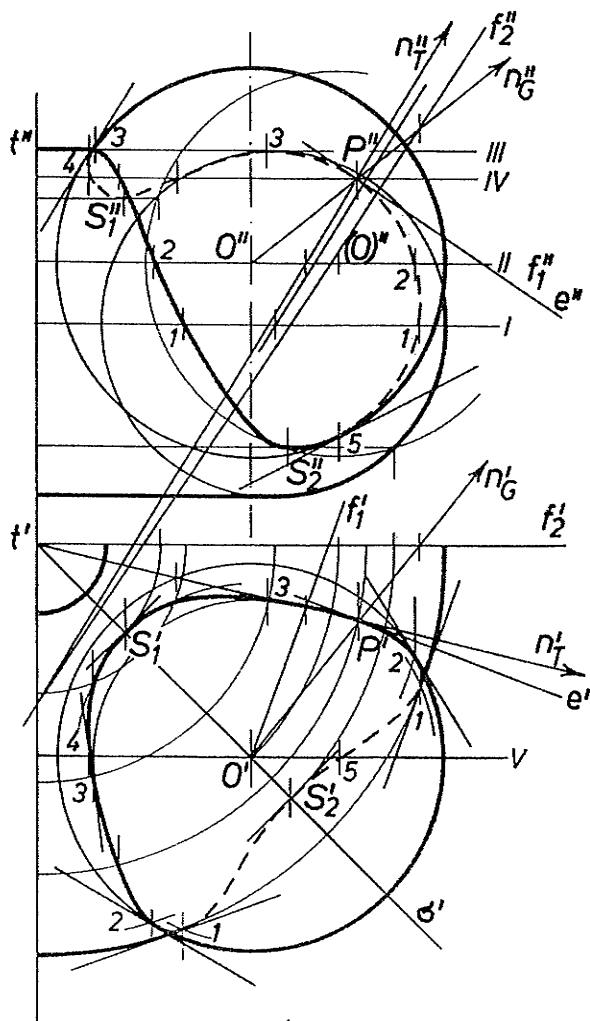
- 169 -

A 20.5. ábrán egy negyedtörusz és egy gömb áthátását szerkesztettük meg. Ez a feladat is tekinthető úgy, hogy a forgásfelületek tengelyei egymással párhuzamos, első vetítőegyeneseik.

A közös szimmetriasík a t egyenes és O gömbközpont által meghatározott sík. Ez a sík a gömbből egy gömbi főkört tartalmaz, a törusból egy meridiánkört. Tehát σ -t a t körül főmeridiánsíkba forgatva az O pont elforgatottja $(O)''$, ami körül a gömb sugarával rajzolt kör a főmeridiánon az elforgatott szimmetriapontokat metszi ki. Ezek visszaforgatottja S_1, S_2 , amelyekben az érintő a σ síkra merőleges első fővonal.

Első képkörrajzi pontok az I és II segédsíkokkal adódnak 1-gyel, illetve 2-vel jelölve. Második képkörrajzi pontok a III segédsíkkal adódnak: a 3-mal jelölt pontokban az érintő első képe könnyen meghatározható, mivel a segédsík a törusz érintősíkja, ezért a gömbből kimetszett kör érintője lesz a két érintőszík metszévonal. Az V síkban levő áthatási pontok nem szerkeszthetők, de az áthatási görbe első képét ismerve kijelölhetők a gömb második képkörrajzán (4 és 5 pontok).

Általános pontot a IV segédsíkkal szerkesztettünk, a felületekből kimetszett körök közös pontjaiként adódó áthatási pontok közül P -ben szerkesztettünk érintőt, ez a felületi normálisok síkjára merőleges.



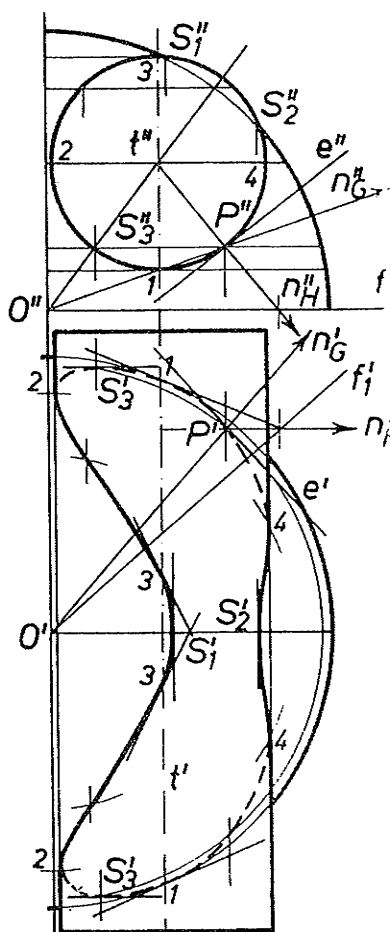
20.5. ábra.

Kitérő tengelyű forgásfelületek áthatását általában úgy próbáljuk megszerkeszteni, hogy az egyik felület tengelyére merőleges segédsíkokat alkalmazunk, vagy pedig olyan segédsíkokkal próbálkozunk, amelyek az áthatásban szereplő hengerből alkotókat metszenek ki.

A 20.6. ábrán szereplő negyedgömb és második vetítő-egyeses tengelyű henger áthatásában nem feltétlenül kitérő tengelyűek a felületek, azonban úgy tűnik, hogy itt legcélszerűbb az első képsíkkal párhuzamos segédsíkokkal dolgozni. (Mintha kitérő tengelyűek lennének.)

Az áthatásnak két közös szimmetriasíkja van, az egyik az O ponton áthaladó, a henger tengelyére merőleges sík, a benne levő pontok S_1, S_2 ; a másik szimmetriasík az O pont és a henger tengelye által meghatározott sík, amely a hengerből az S_3 pontot tartalmazó alkotót metszi ki. Ezen az alkotón át felvett segédsíkban az S_3 -mal jelölt pontokon kívül még egy P általános pont is adódik, amelyben az érintőszerkesztést a normálisok módszerével hajtottuk végre.

Képkörrajzi pontok adódnak a legfelső és legalsó hengeralkotókon (3, illetve 1), ezekben az első képen az érintő a gömbből kimetszett kör érintője. A jobb és bal oldali hengeralkotókon adódnak a 2, illetve 4-gyel jelölt pontok. — Az áthatási görbe megrajzolása után feltüntettük a láthatóságot.



20.6. ábra.

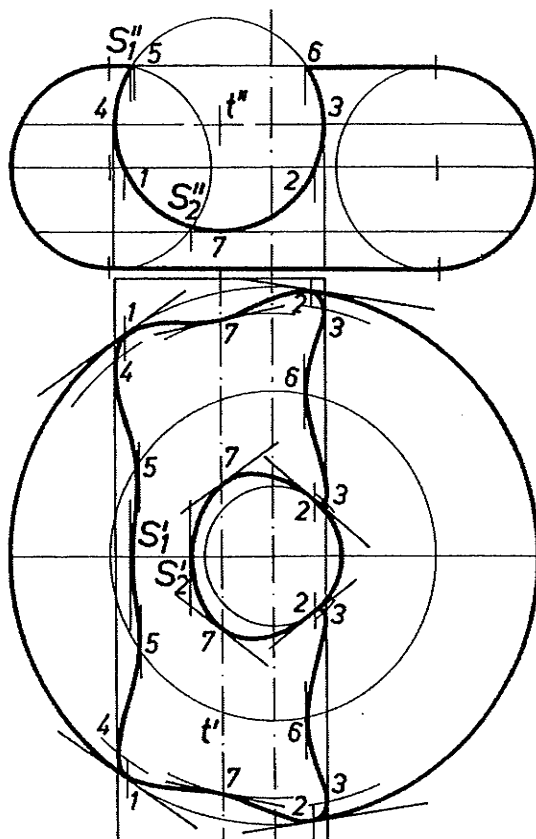
A 20.7. ábrán szereplő tórusz és henger már valóban kitérő tengelyű forgásfelületek. Az áthatási pontok a tórusz tengelyére merőleges segédsíkokkal szerkeszthetők, mivel ezek a hengerből alkotókat metszenek ki. Ezen az ábrán csak az ún. lényeges pontok szerkesztésével foglalkoztunk.

A közös szimmetriasík a tórusz főmeridiánsíkja, benne az S_1 és S_2 szimmetriapontok. — Első képkörrajzi pontok az ekvátorkör síkjával „szeletelve” adódnak az ekvátorkörön és a torokkörön: 1-gyel és 2-vel jelölve. A henger tengelyén áthaladó vízszintes sík a henger első képkörrajzán levő, 3-mal és 4-gyel jelölt pontokat adja.

Második képkörrajzi pontok a tórusz legfelső párhuzamos körén adódnak (5, illetve 6, bennük az érintő a kimetszett hengeralkotó); valamint a henger legalsó alkotóján levő pontok (7, bennük az érintők a tóruszból kimetszett körök érintői).

A 20.8. ábrán egy első vetítőegyenestengelyű kúp és egy hozzá kitérő helyzetű, első fővonal tengelyű henger áthatását szerkesztettük meg. A σ közös szimmetriasík átmegy a kúp t tengelyén és merőleges a henger tengelyére. Ez a sík a hengerből kört metsz ki, amelynek középpontját a kúp főmeridiánsíkja forgatva, az elforgatott kör a szélső kúpalkotókból az S_1 , illetve S_2 szimmetriapontok elforgatottjait metszi ki. Ezeket visszaforgatva kapjuk a szimmetriasíkban fekvő pontokat, amelyekben az érintő σ -ra merőleges első fővonal.

Képkörrajzi pontok csak a hengeren szerkeszthetők: az 1-gyel, illetve 2-vel jelölt pontok a legfelső, illetve legalsó hengeralkotókon át fektetett vízszintes segédsí-



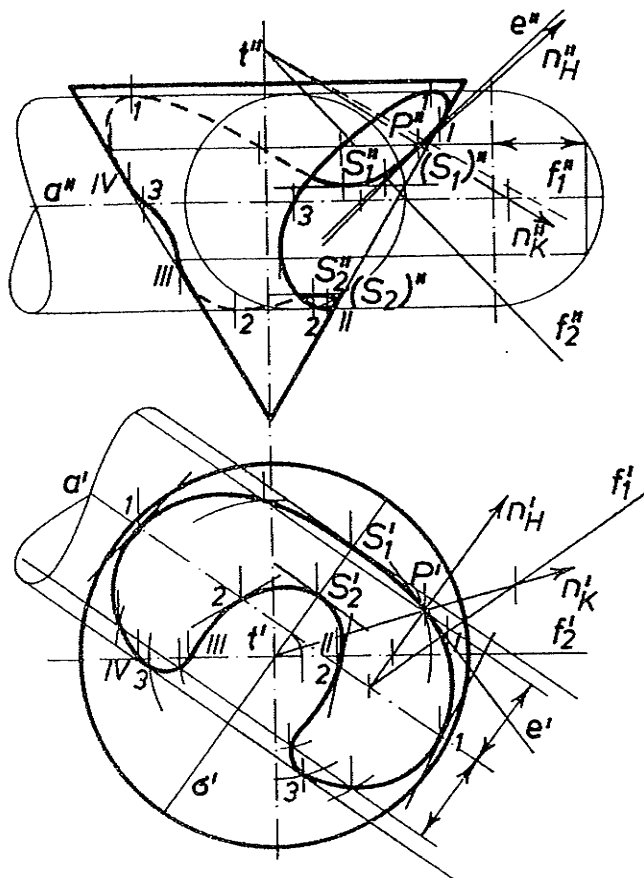
20.7. ábra.

kokkal adódnak. Az első képkör-rajzi pontok (3) a henger tengelyét tartalmazó szeletelősíkkal adódnak.

Általános helyzetű pontokat a kúp t tengelyére merőleges szeletelősíkokkal szerkesztünk. Egy ilyen sík a kúp ből kört metsz ki, ennek sugara közvetlenül lemérhető. A hengert alkotókban metszi, ezek első képét úgy határozzuk meg, hogy a henger egy körmetszetét második képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk; a beforgatott kör középpontján áthaladó függőlegestől lemérjük a szeletelősík képen levő körpontok távolságát, ez a távolság a kimetszett alkotók első képének a tengely első képétől való távolsága. Ezen alkotók és a kúp ből kimetszett kör metszéspontjai az áthatási görbe általános pontjai. A P pontban a normálisok módszerével megszerkesztettük az áthatási görbe érintőjét.

Az áthatási görbe első képe a kúp főmeridiánját az I, II, III, IV pontokban metszi, ezeket a második képen, a kúp szélső alkotóin jelöljük ki. E pontok — bár nem szerkeszthetők — a láthatóság helyes feltüntetésénél igen fontosak. A láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy a hengert és az általa kivágott részt eltávolítottuk.

Ha a két forgásfelület tengelyei metszik egymást, akkor a tengelyek metszéspontjai körül felvett segédgömbök mindkét felületből paralelköröket metszenek ki. A segédgömbön levő körök metszéspontjai az áthatási görbe pontjai.



20.8. ábra.

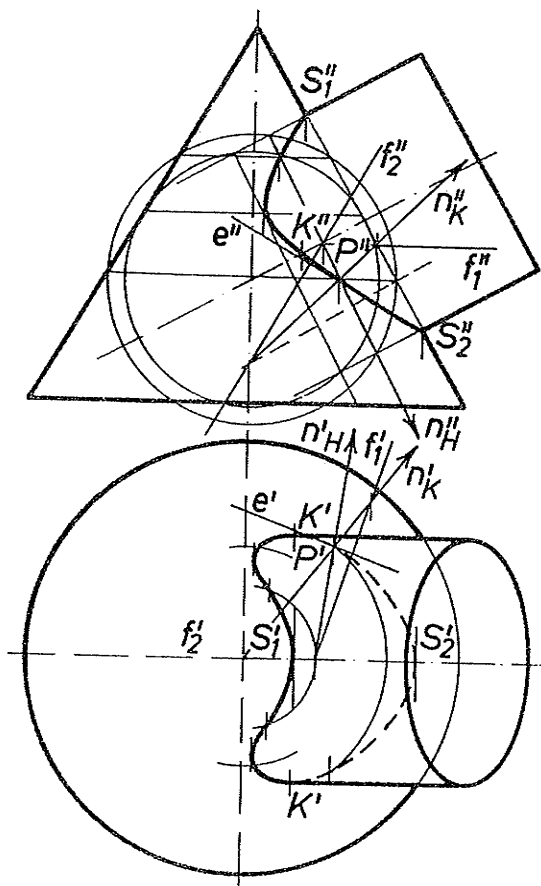
A 20.9. ábrán metsző tengelyű forgáskúp és forgáshenger áthatását szerkesztettük meg. Az áthatás közös szimmetriásíkja a kúp főmeridiánsíkja, tehát az áthatási görbe második képe ún. duplavetület lesz. A szimmetriásíkban fekvő S_1 és S_2 pontok közvetlenül adódnak, bennük az érintő második vetítőegyenese.

A második képen megrajzoljuk a segédgömböt, a felületekből kimetszett körök egyenesdaraboknak látszanak. Ezek metszéspontjai az áthatási pontok kettős vetületei. Első képeiket a kúpon levő paralelkörökön jelöljük ki. Ilyen pont a P pont is, amelyben az érintő a normálisok módszerével szerkeszthető meg.

A legkisebb gömb, amely még ad áthatási pontot, a kúp érintőgömbje. Ebben az érintő a hengerből kimetszett kör érintője.

A görbe második képének megrajzolása után kijelölhetők a henger első képhatárán levő K pontok. — Végül feltüntettük a láthatóságot.

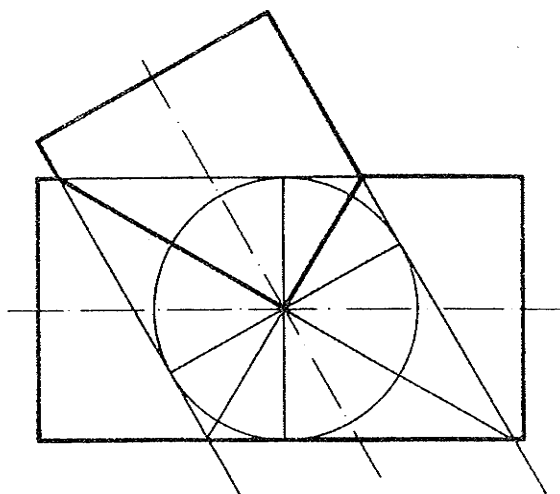
Ha kúpok és hengerek áthatásánál van a két felületnek közös érintőgömbje, akkor az áthatási görbe két kúpszeletre esik szét, ami duplavetület esetén azt jelenti, hogy az áthatási görbe képe két egyenesdarab.



20.9. ábra.

Ezt mutatja be a 20.10. ábra, ahol cső-elágazásként tüntetük fel a láthatóságot.

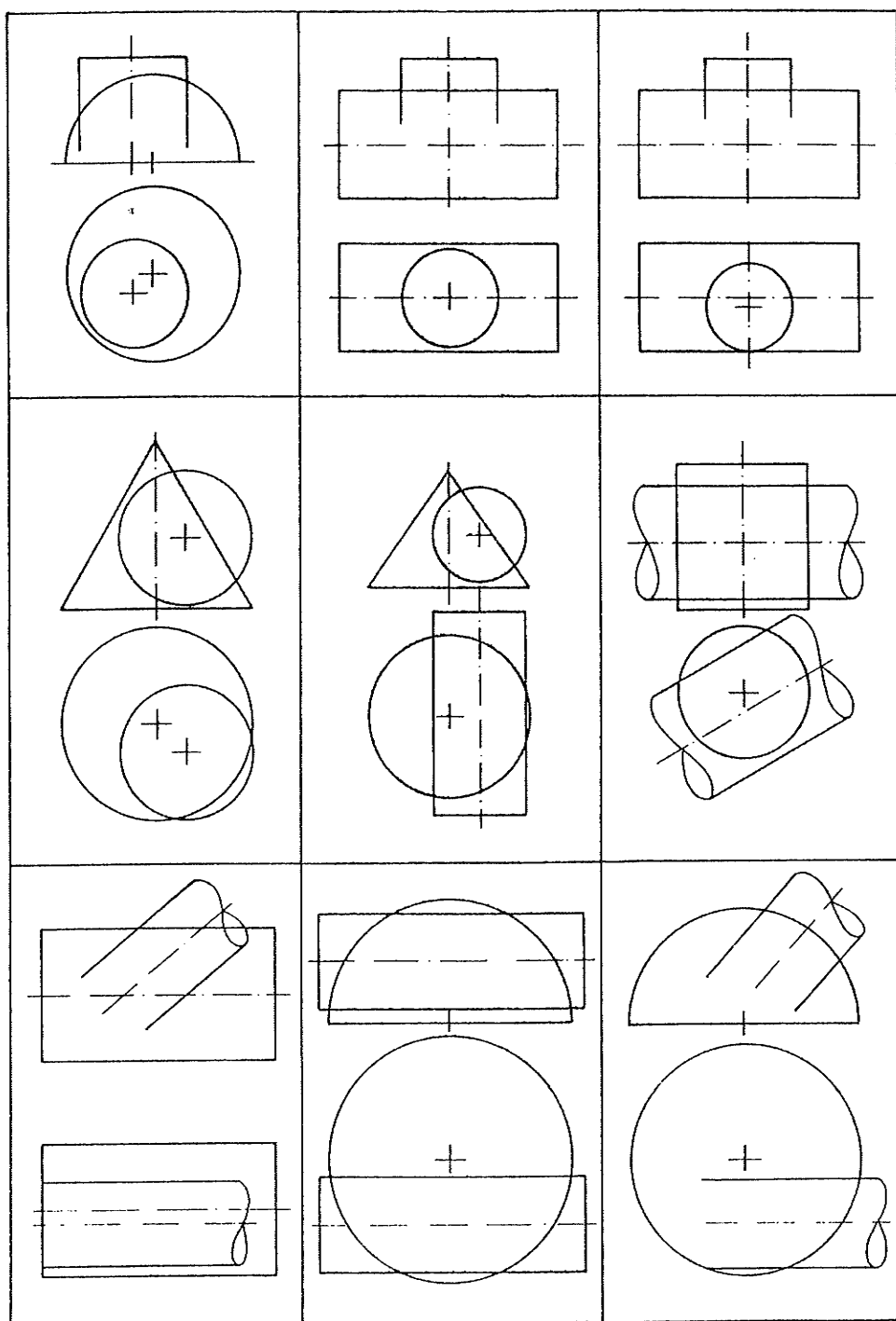
Az ilyen áthátásokat a műszaki életben gyakran alkalmazzák.



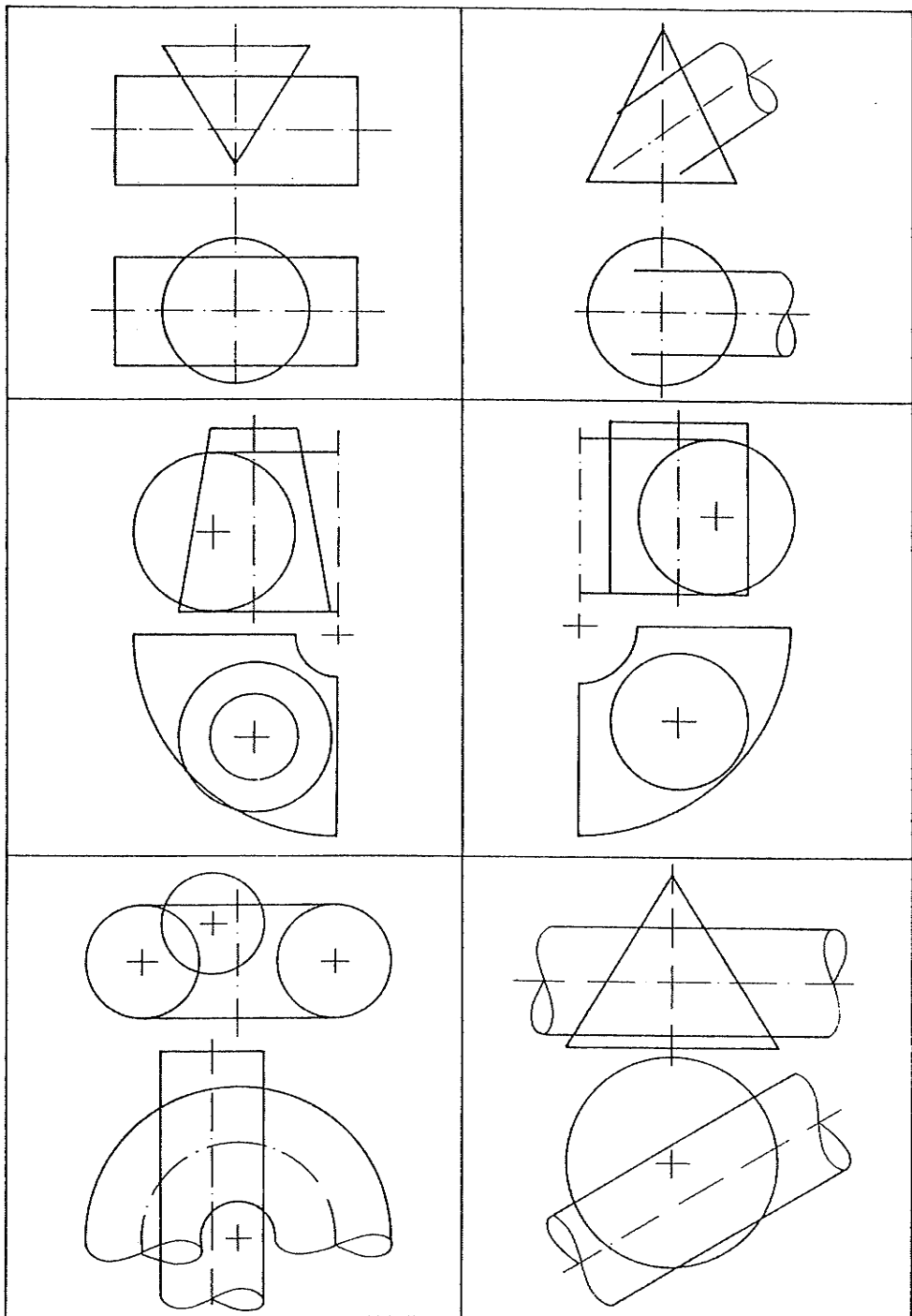
20.10. ábra.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 20.11. és a 20.12. ábrákon vázlatban megadott áthatási feladatokat A/4-es méretre való felnagyításban.

Elméleti tananyag: Tankönyv 384., 341-349. pontok.



20. 11. ábra.



20.12. ábra.

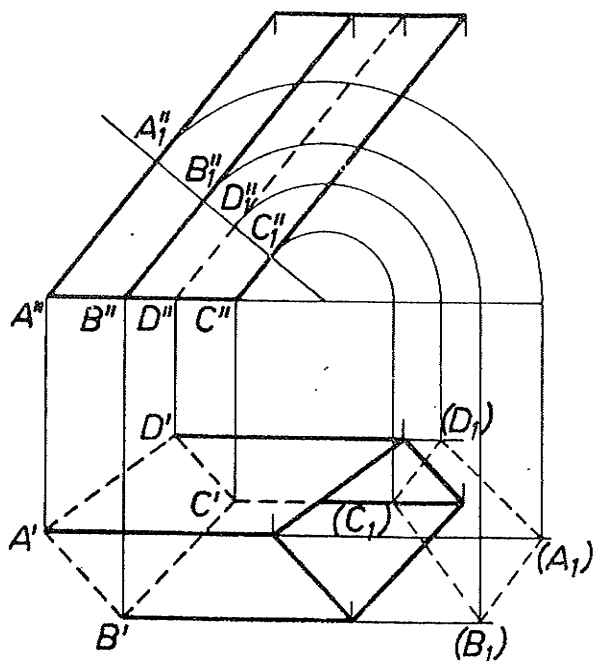
21. KÚPOK ÉS HENGEREK SIKBA TERÍTÉSE

Poliéderek síkba terítése

A poliéder határoló lapjait olyan sorrendben rajzoljuk meg valódi méretben ugyanarra a síkra, hogy a kapott lapokat kivágva és a szomszédos lapok élei mentén összehajtogatva (ragasztással) az eredeti poliédert kapjuk meg. Könnyen látható, hogy a méretes alapszerkesztések ismeretében ez a feladat semmi problémát nem jelent. A kiterítésnél — mindig a síkba terített test külső felét rajzoljuk meg. Gúla síkba terítésénél a palástot határoló háromszögeket kell eredeti nagyságban előállítani.

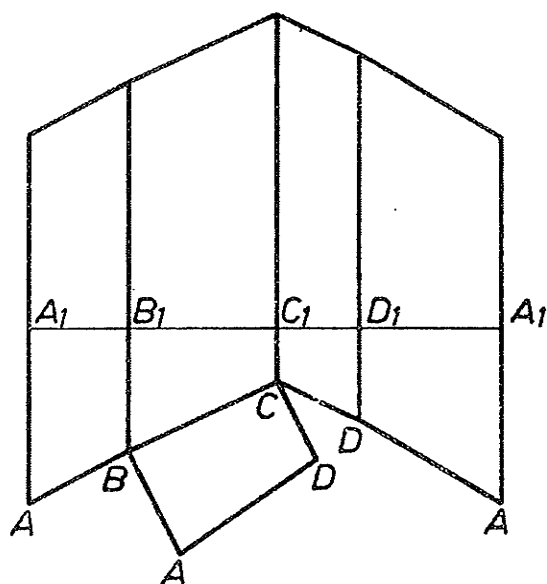
Hasáb síkba terítésénél felhasználjuk azt a szemléletes ténnyt, hogy a hasáb oldaléleit merőlegesen metsző síkkal létesített síkmetszet a kiterítésben az oldalélekre merőleges egyenesbe megy át.

A 21.1. ábrán megadott hasáb oldalélei második főegyenesei, egy ezekre merőleges sík az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban metszi a hasábot. E metszetet képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk, így a leforgatottban megkapjuk az oldalélek távolságát.



21.1. ábra.

A 21.2. ábrán felmérjük egy egyenesre e távolságokat. Az oldalélek normálmetszet alatti és feletti hossza a második képből lemérhető, ezáltal a hasáb lapjainak a kiterítését előállítottuk.



21.2. ábra.

Kifejthető felületek

Egy felület síkba teríthető, ha a felület egyenes mozgásával írható le, és a felület érintősíkja az egyenes minden pontjában ugyanaz a sík. Ezeket az egyeneseket a felület alkotóinak mondjuk.

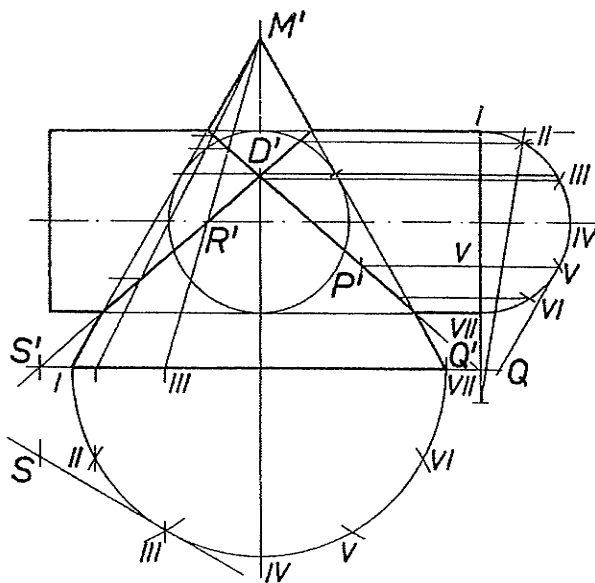
Kimutatható, hogy a felületen haladó görbe (érintője) és az alkotó által bezárt szög a térben és a kiterítésben egyenlők.

A kúpok és a hengerek kifejthető felületek. Bár kifejthetők a kúpok és a hengerek, de síkba terítésüket az esetek többségében a beléjük írt közelítő gúla, illetve hasábok segítségével tudjuk csak megszerkeszteni. Itt azt feltételezzük, hogy a felosztás olyan sűrű, hogy a felületeket határoló görbék húrjai és a kiterítésben a határoló görbék megfelelő húrjai közötti különbség elhanyagolható.

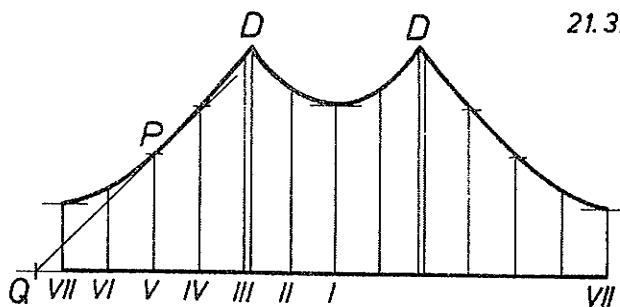
Ugyanazon a felületen haladó két görbének a felület egy alkotójával alkotott metszéspontjaiban az érintők egyazon felületi érintősíkban vannak, tehát vagy metszik egymást, vagy párhuzamosak.

A 21.3. ábrán
egy forgáskúp és
egy forgáshenger
széteső áthatását
adtuk meg.

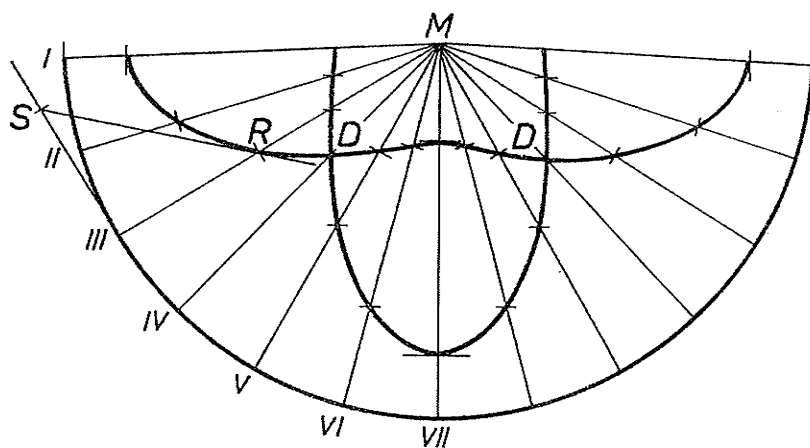
Megszer-
kesztjük a kúpba
csatlakozó hen-
ger (21.4. ábra),
majd a kúppalást
kiterítését
(21.5. ábra).



21.3. ábra.



21.4. ábra.



21.5. ábra.

A henger alapköréről (amely normálmetszet) kiegészítő vetületet készítettünk, Snellius módszerével meghatároztuk az I és II közötti ív hosszát, felvettük az alapkör kiterítését adó egyenest és a megfelelő pontokon át meghúztuk a hengeralkotókat.

A 2¹.4. ábrán az I, II, III, IV, V, VI, VII pontokat és szimmetrikus megfelelőiket jelöltük ki, a hengeralkotóra a megfelelő hossz a vetületből lemérhető, a D pontot tartalmazó hengeralkotót II és III közé iktattuk. A P pontban az érintőt a PQV háromszögből állítottuk elő, QV a kiegészítő vetületben mérhető le.

A 2¹.5. ábrán a kúppalást sugarát a szélső kúpalkotóról mérhetjük le. Az I, II, III, ... pontokat az alapkör húrjaival egyenlő szakaszokkal jelöltük ki. Az egyes alkotókon levő pontokat az alapkör síkjával párhuzamosan kivetítettük a szélső alkotóra, ahol távolságaik valódi méretben látszanak. Ezekkel a távolságokkal jelöljük ki az áthatási görbe pontjait az alkotókon. Az R és III pontban az érintőt az RSIII háromszöggel határozzuk meg. Az I és VII alkotók az áthatás szimmetriasíkjában vannak, ezért ezeken az alkotókon levő áthatási pontokban az érintő az alkotóra merőleges. Ennek megfelelően az I és VII alkotókat a kiterítésben adódó görbék is merőlegesen metszik.

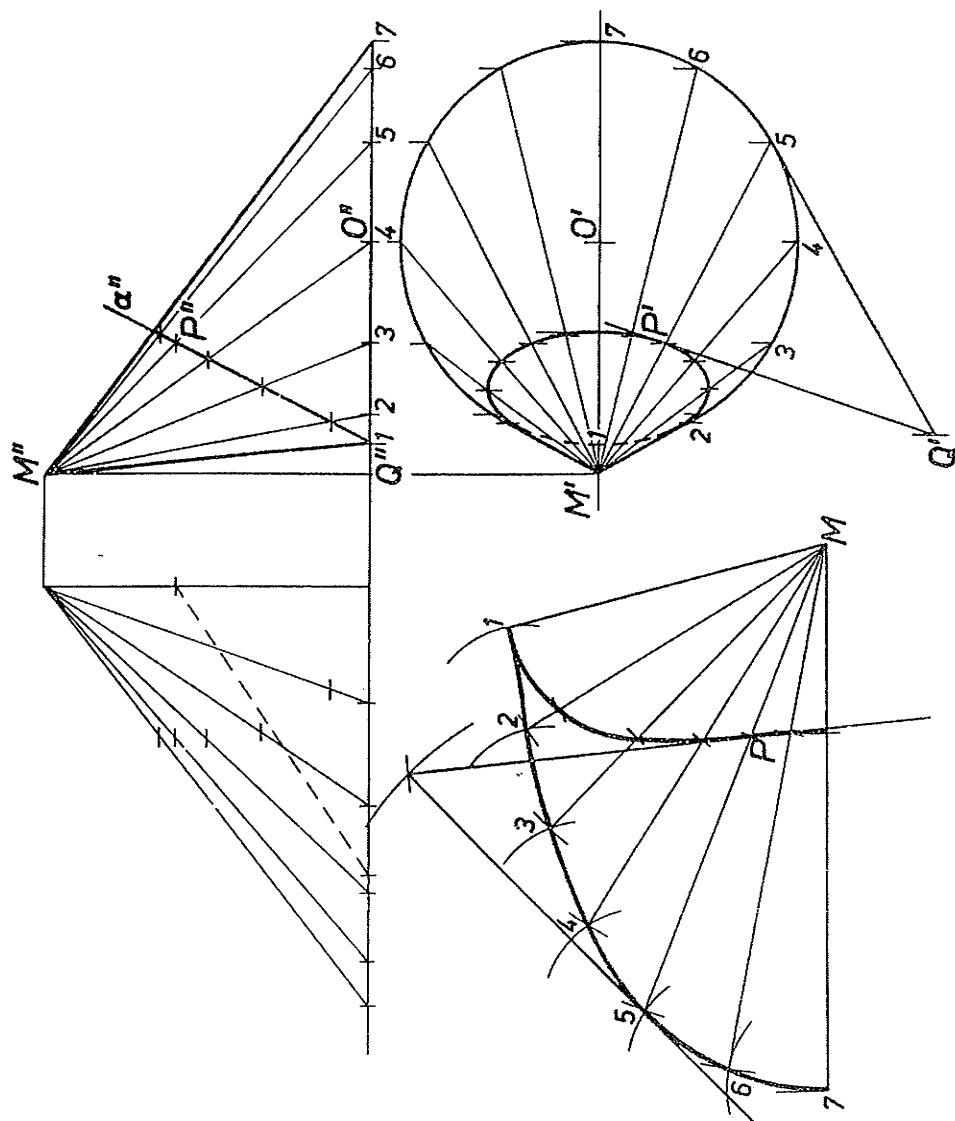
Ferde körkúp kiterítése

A 2¹.6. ábrán az M csúcsú ferde körkúpot az α második vetítősíkkal metszettük el. Ennek kiterítésére felvesszük az alapkör 12 egyenlő részre osztását, a megfelelő alkotókon kijelöljük az α síkkal alkotott metszéspontokat. A P-beli érintő második képe az α sík második képe, az 5 ponthoz tartozó alapköri érintőt a Q pontban metszi. Ennek első képét kijelölve, a QP első képe adja a metszetgörbe érintőjét. — A kiterítésben a beírt gúla oldaléleit szerkesztjük meg, majd az alapkör húrjaival képezett háromszögeket sorrendben egymásután megszerkesztve kapjuk a kúp félpalástját. A szakaszhosszak meghatározását ügyesen berendezve, a metszéspontok helyét az alkotókon arányos szerkesztéssel jelöltük ki. A P és 5 pontokban az érintőt a P5Q háromszög valódi alakjának előállításából kapjuk.

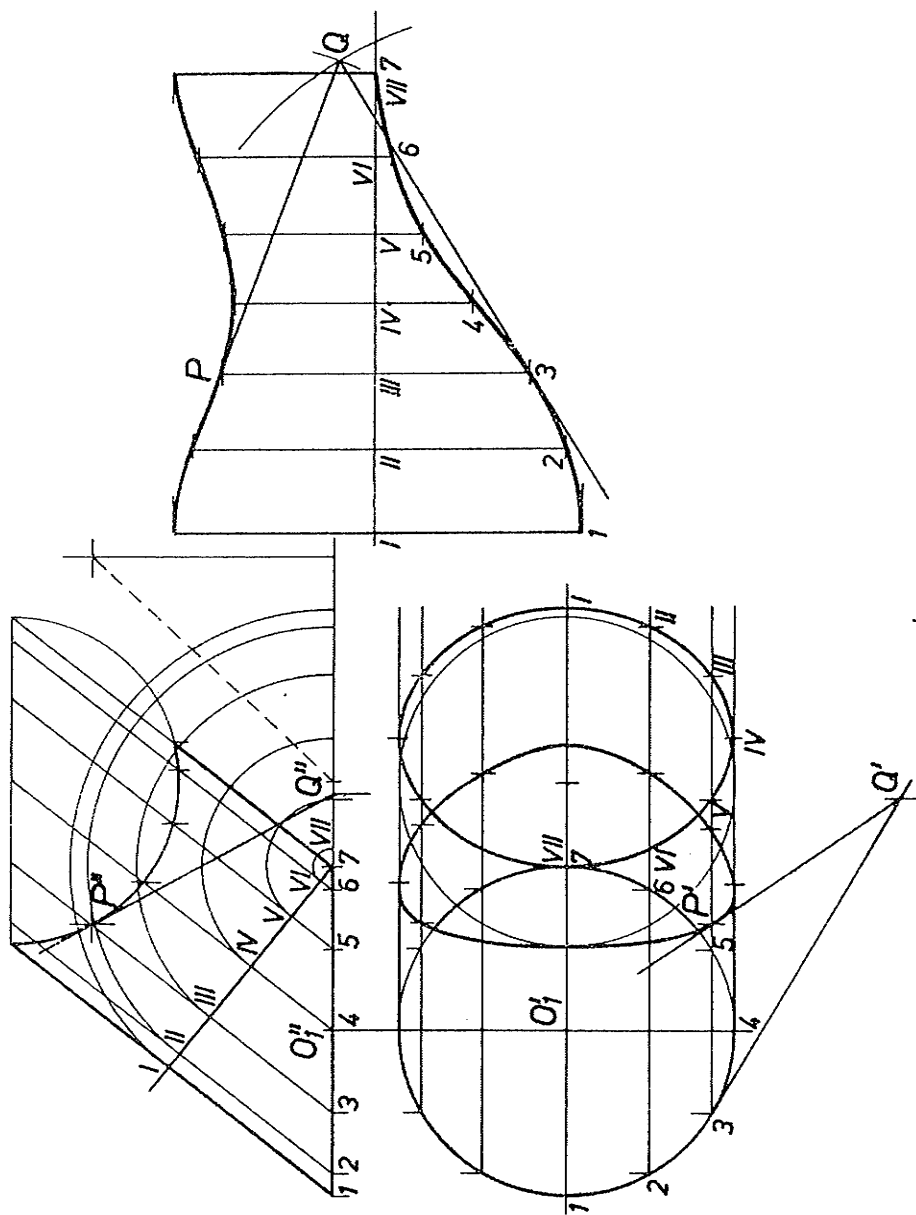
Ferde körhenger kiterítése

A 2¹.7. ábrán ferde körhengert ábrázoltunk, amelyet egy második vetítőegyenest tengelyű forgáshenger metsz el. A kiterítéshez az alapkört 12 egyenlő részre osztottuk, a megrajzolt alkotókon kijelöltük az áthatási görbe pontjait. A P pontban az érintő második képe megrajzolható, és a 3 ponthoz tartozó alapköri érintőt a Q pontban metszi. Az első képen a Q'P' egyenes adja az érintő első képét.

Felvesszük a ferde henger normálmetszetét, és beforgatjuk az alapkör síkjába. A kapott ellipszis húrjai lesznek a normálmetszet kiterítésében az alkotók távolságai. Az alkotók egyenesesire felmérve — a második képről — a normálmetszet alatti és feletti távolságokat, a palást ki-



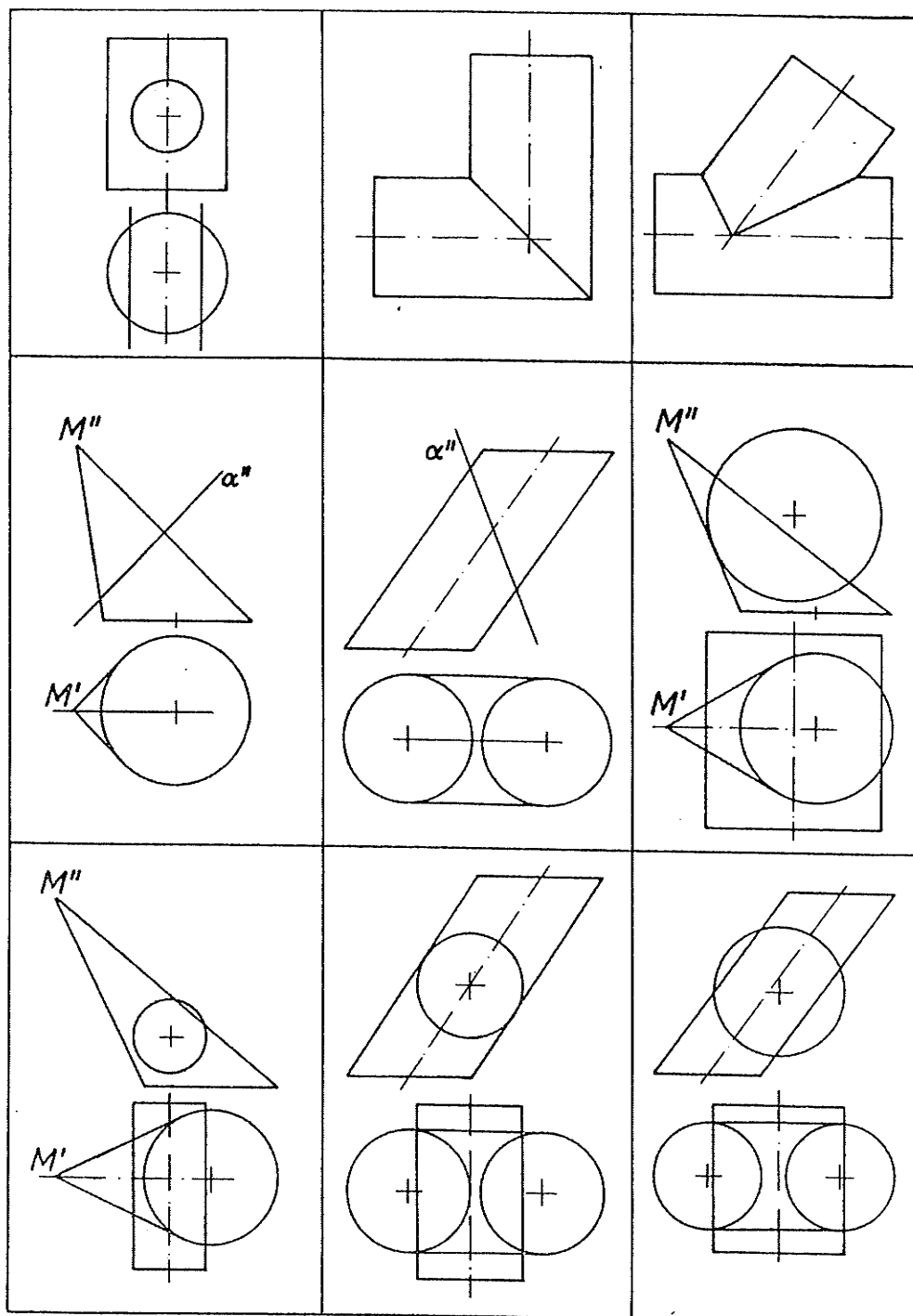
21.6. ábra.



terítését kapjuk. A P és 3 pontokban az érintőt a PQ3 háromszöggel szerkesztjük meg. Az 1 és 7 alkotó végpontjaiban az érintő az alkotókra merőleges.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 21.8. ábrán megadott felületek síkba terítését a rajtuk levő metszészvonallakkal együtt (A/4 méretre felnagyítva).

Elméleti tananyag: Tankönyv 329-331., 333-334. és 337. pontok.

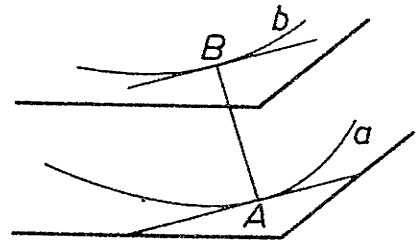


21. 8. ábra.

22. KÉT GÖRBÉHEZ KIFEJTHETŐ FELÜLET SZERKESZTÉSE ÉS SIKBA TERITÉSE

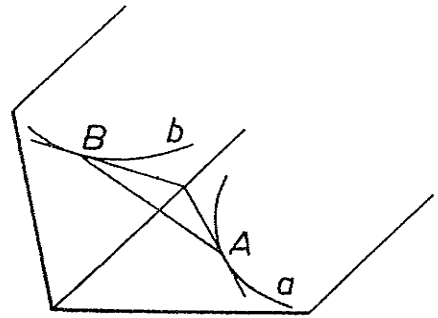
Két görbe kifejthető felületének a megszerkesztésénél a két görbe pontjait úgy kell alkotókkal összekötni, hogy az adódó felület kifejthető legyen. Minthogy a két görbe felületi görbe, tehát az egy alkotón fekvő pontjaikban vett érintőiknek az alkotóhoz tartozó felületi érintősíkban kell lenni (a kifejthetőségre vonatkozó feltételek miatt!). Tehát két görbének azokat a pontjait köti össze egy alkotó, amelyekben vett érintők egy síkban vannak, azaz párhuzamosak vagy metszők.

A 22.1. ábrán az a és b görbék párhuzamos síkokban fekszenek, tehát az A ponttal az a B pont köthető össze alkotóval, amelyben az érintő az A-beli érintővel párhuzamos.

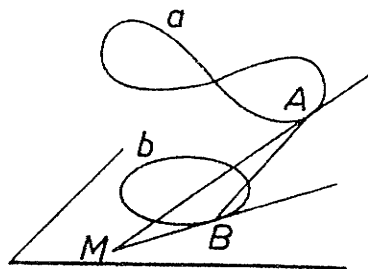


22.1. ábra.

A 22.2. ábrán két metsző síkú görbét vetünk fel; az A pontbeli érintő metszi a két sík metszésvonalát, innen a b görbéhez húzott érintő B érintési pontja lesz az AB felületi alkotó másik végpontja.



22.2. ábra.



22.3. ábra.

A 22.3. ábrán az a tér-görbe és a b síkgörbe adott.

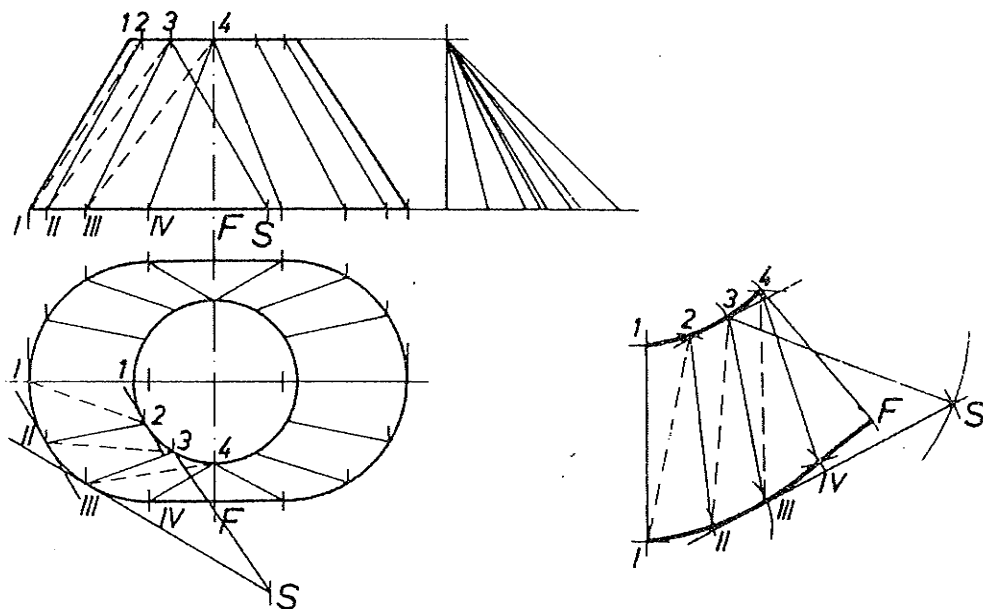
A térgörbe A pontjában szerkesztett érintő a síkgörbe síkját M pontban metszi, innen a b görbéhez húzott érintő B érintési pontja adja az AB alkotó másik végpontját.

A felület megszerkesztett alkotói közül a szomszédosak általában torznégyszöget (térbeli négyszöget) határoznak meg. Ezeket a négyszögeket átlókkal háromszögekre bontjuk. E háromszögeket valódi nagyságban előállítva egy-egy közös oldaluk mentén rendre egymás mellé illesztjük, ezáltal a felület (közelítő) kifejtését kapjuk.

Érintőt a már ismert módon, az alkotó és két érintő által meghatározott háromszög segítségével kapjuk. Ha az érintők párhuzamosak, akkor az érintő és az alkotó szögét más úton határozzuk meg. Szimmetriasíkban levő alkotó végpontjaiban az érintő az alkotóra merőleges.

Ha valamelyik görbén egyenesdarab van, akkor ehhez a felületen egy síkrész tartozik; ha valamelyik görbének töréspontja van, akkor ehhez a felületen kúpész tartozik.

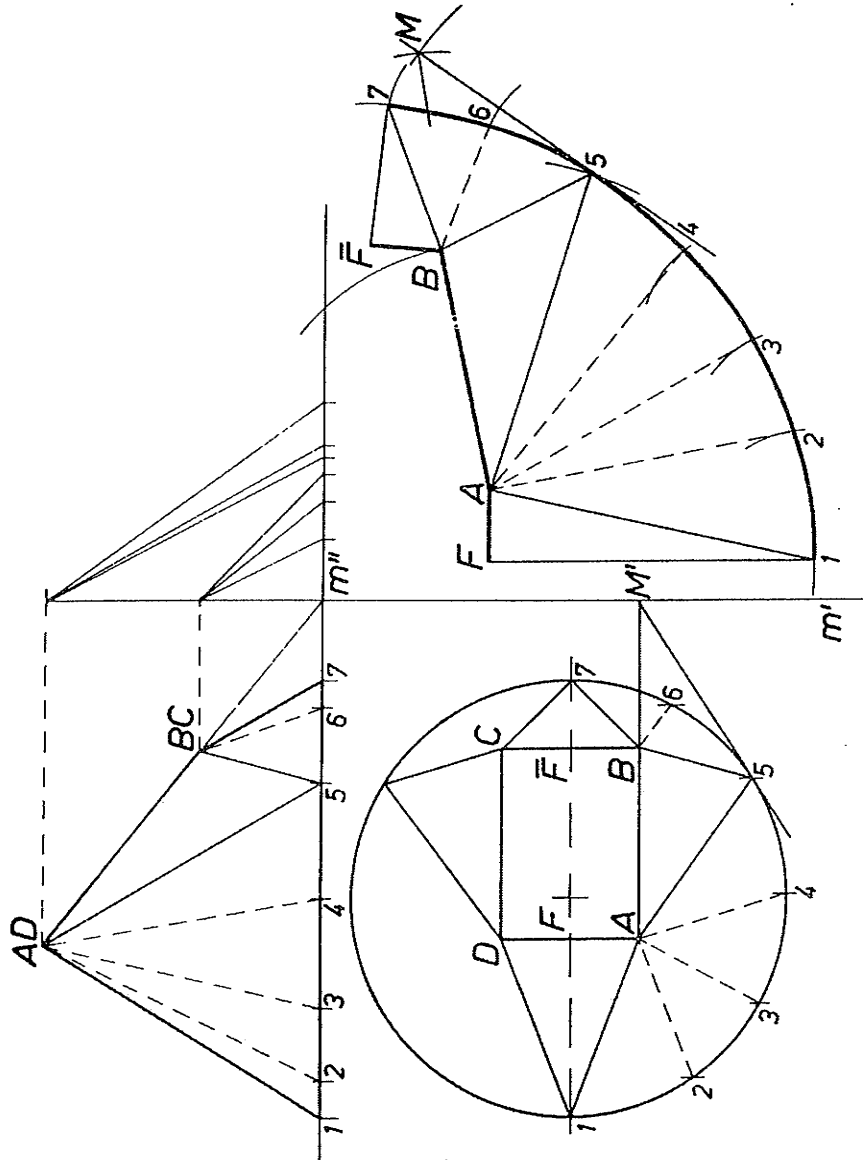
A 22.4. ábrán adott kör és futópálya alakú görbe síkjai párhuzamosak, a felület alkotóit a párhuzamos érintőjű pontok jelölik ki. A futópálya egyenesdarabjához a felületen síkbeli rész tartozik.



22.4. ábra.

A felületnek egy negyedét terítettük ki, a többi negyed ezzel szimmetrikus. Az átlók és az alkotók hosszának meghatározását egyetlen derékszögben szerkesztettük meg. Az I¹ alkotó végpontjaiban az érintők merőlegesek az alkotóra. Általános pontban a III-nál szerkesztettünk érintőt a $\beta III S$ háromszög valódi nagyságban való átmásolásával (S pont az érintő tetszőleges pontja).

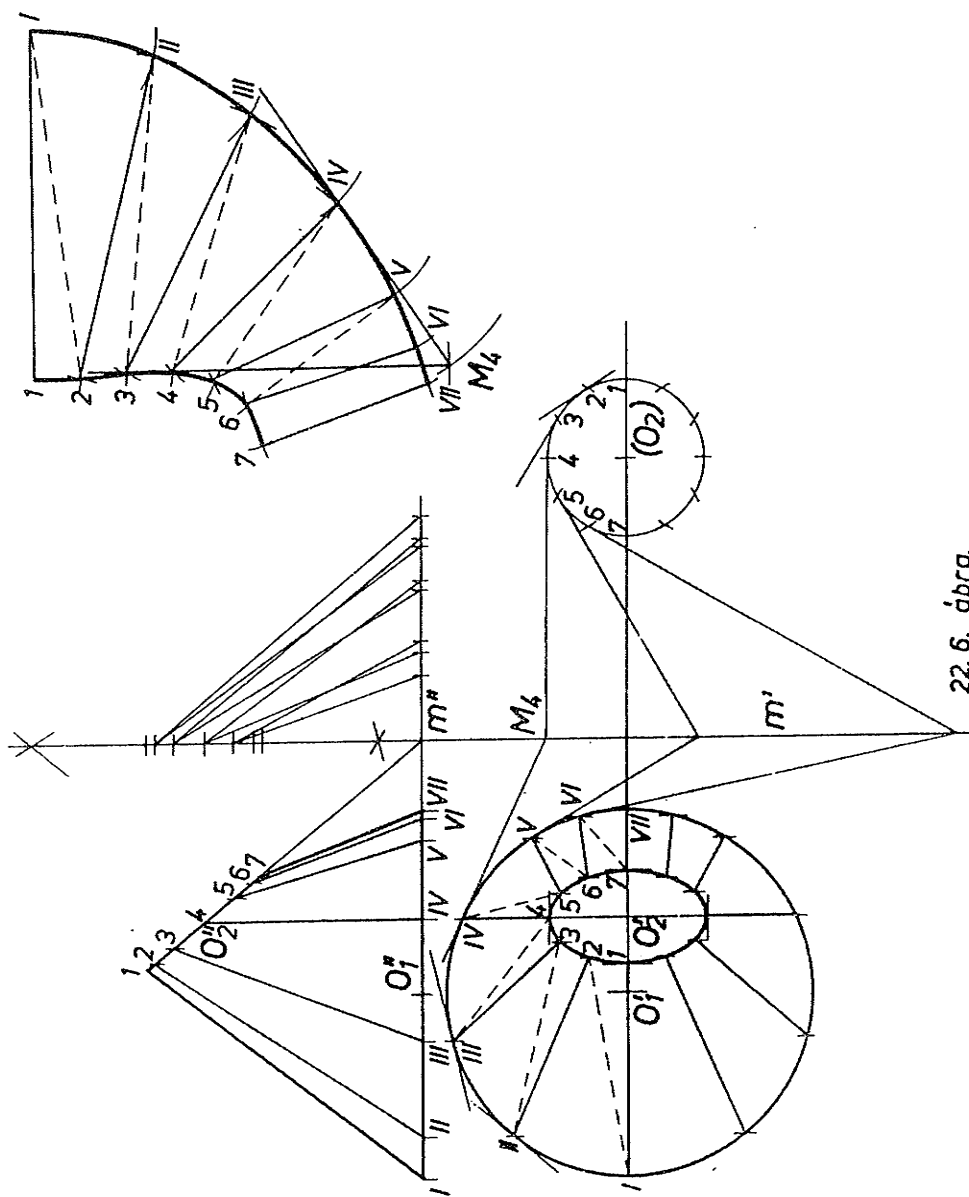
A 22.5. ábrán az ABCD téglalap és a vízszintes síkban fekvő kör kifejthető felületét szerkesztettük meg. A két sík metszésvonala m . Az 1, illetve 7 pontban az érintő az AD, illetve BC oldalakkal és egyidejűleg m -mel párhuzamos. A felület síkrészei tehát az AD1, illetve BC7 háromszögek. Az AB oldal egyenese az m metszésvonalat M pontban metszi, innen az alapkörhöz húzott érintő érintési pontja 5, tehát AB5 és a neki szimmetrikus háromszög a felület további síkrészei. Az A, illetve B csúcshoz az 1-5, illetve 5-7 vezérgörbéjű kúpok tartoznak. — Ezek ismeretében a kiterítés könnyen megszerkeszthető, a szükséges szakaszhossza-



22.5. ábra.

kat ismét egyetlen derékszögben határoztuk meg. A kiterítésben csak a fél felületet szerkesztettük meg, az érintőt az 5 pontban az MB5 háromszög segítségével határoztuk meg.

A 22.6. ábrán egy első képsíkban levő O_1 középpontú kör és a második vetítősíkban levő O_2 középpontú kör kifejthető felületét szerkesztettük meg.



A két sík metszésvonala az m második vetítőegyenes, amely körül az O_2 középpontú kört első képsíkba forgatjuk.

(Az összetartozó pontok így is megszerkeszthetők!)

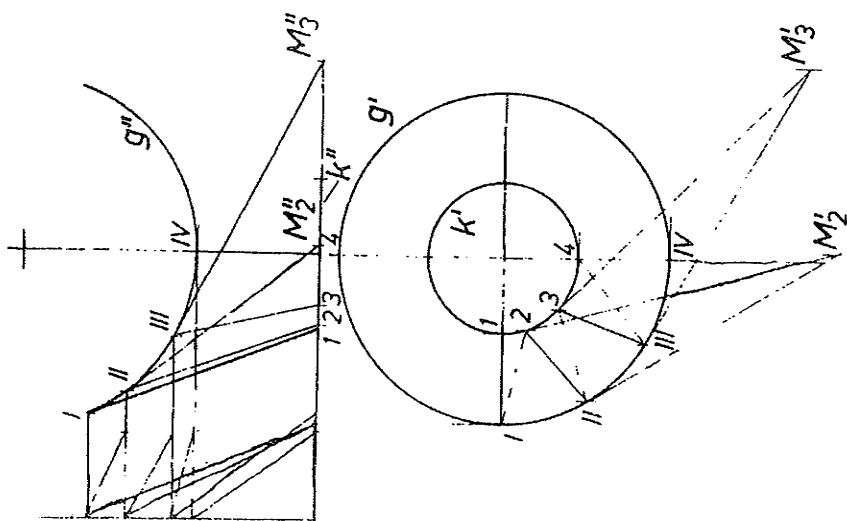
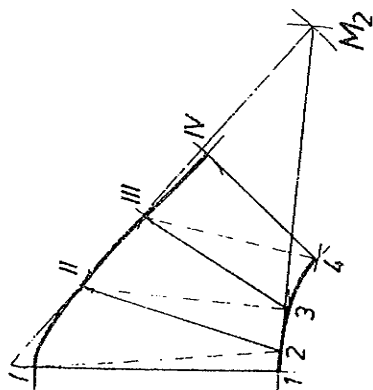
A kisebbik kört 12 egyenlő részre osztottuk, és a 22.2. ábrán bemutatott módszerrel a felület egyik felét meghatároztuk; az O_2 középpontú kört visszaforgattuk. A

felület másik fele a megszerkesztetttel szimmetrikus.

A kiterítésben csak a fél felületet szerkesztettük meg, az alkotókat és átlókat alkalmas derékszögben határoztuk meg, a körök húrjai az első képről, illetve a leforgatottból mérhetők le. Érintőt a $4IV$ alkotó végpontjaiban a $4IVM_4$ háromszöggel szerkesztettünk; M_4IV az első

képen, M_44 a leforgatottban eredeti méretben látszik.

A g térgörbe és a k kör kifejtethető felületét a 22.7. ábrán szerkesztettük meg.

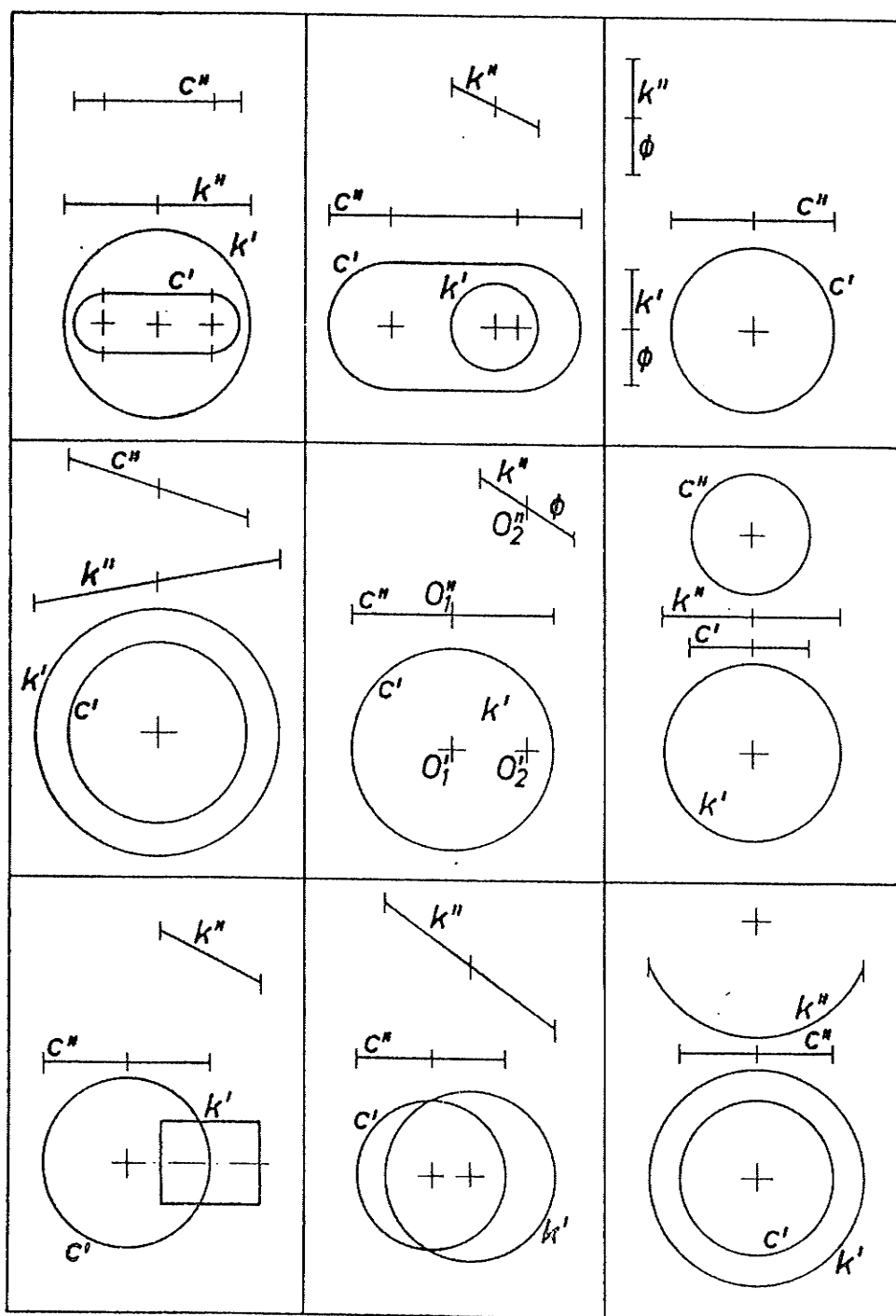


22.7. ábra.

Mivel a két görbének két, egymásra merőleges szimmetriasíkja van, ezért a felületből csak egy negyedét szerkesztünk meg. Az I¹ és IV₄ alkotó végpontjaiban a görbék érintői párhuzamosak és az alkotókra merőlegesek. A térgörbe II és III pontjaiban vett érintők a síkgörbe síkját az M₂, illetve M₃ pontban metszik, innen a körhöz húzott érintők érintési pontja 2, illetve 3. Az alkotók közti részt átlókkal felbontva megszerkesztjük a kiterítést. A szakaszhosszak megszerkesztésére szolgáló derékszögű háromszögeknél külön kell gondolni a térgörbe húrjainak meghatározására. Érintőt a 2II alkotó végpontjaiban a 2IIM₂ háromszöggel szerkesztünk.

Gyakorlásul szerkesszük meg a 22.8. ábrán megadott görbék kifejthető felületét és síkba terítését (A/4-es méretre felnagyítva).

Elméleti tananyag: Tankönyv 357. pont.



22. 0. ábra.

23. FELÜLETEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

Felület analitikus megadási módjai

A felület analitikus megadását jól szemlélteti a gömbfelület pontjainak analitikus geometriai jellemzése. A földrajzi tájékozódást a földgömbön a szélességi körök és a délkörök teszik lehetővé. Ennek alapulvételével egy gömbi pont koordinátáit két szög (paraméter) segítségével határozzuk meg. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja és az egyenlítőt képzeljük az xy síkba, a délkörök közül pedig az xz síkban levő gömbi főkört tekintsük kiindulási délkörnek.

Ha a gömb sugara R és a gömbfelület egy P pontján áthaladó délkör síkja az xz síkkal u szöget (23.1. ábra), illetve az OP egyenes az xy síkkal v szöget alkot, akkor a P pont koordinátái nyilván:

$$x = R \cos v \cos u$$

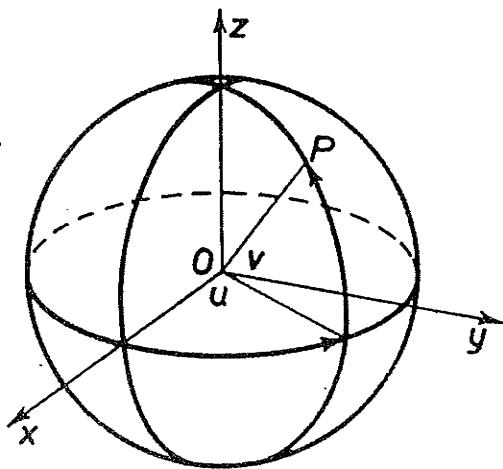
$$y = R \cos v \sin u$$

$$z = R \sin v$$

és nyilván $0 < u \leq 2\pi$,

illetve $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ az u

és v értelmezési tartománya. A gömb pontjainak koordinátáit két változó paraméter függvényeiként kapjuk meg.



23.1 ábra.

Ugyanezt a gömböt

jellemezhetjük $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ alakú egyenlettel is,

valamint a $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ kétváltozós függvényvel.

A konkrét példa alapján a felületek általános megadási módjai a következők lehetnek:

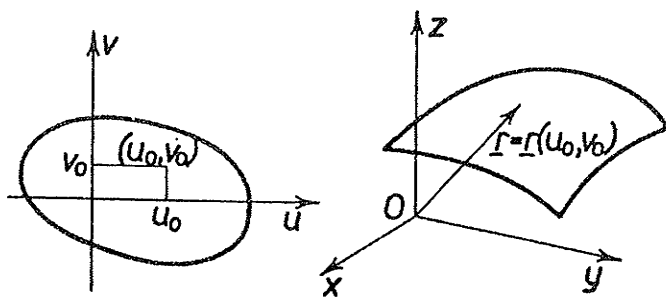
A felület Gauss-féle megadása:

Vegyünk egy u, v síkbeli derékszögű koordinátarendszerben megadott tartományt. Ennek minden pontjához tartozik egy (u_0, v_0) rendezett számpár (23.2. ábra). A tartomány (u_0, v_0) pontjához rendeljünk egy térbeli derékszögű koordinátarendszerben levő $\underline{r}$ helyvektort.

Ha a síkbeli tartomány minden pontjához elvégezzük ezt a hozzárendelést, akkor egy kétváltozós $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ vektorfüggvényt nyerünk.

Egy ilyen kétváltozós vektorfüggvény alkalmazás lehet

egy felület megadására (de nem minden kétváltozós vektorfüggvényhez tartozik felület). Ha egy felületet $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = ix(u, v) + jy(u, v) + kz(u, v)$ alakban előállítunk, akkor ezt a megadási módot a felület Gauss-féle megadásának mondjuk. Az $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ kétváltozós függvények az $\underline{r}(u, v)$ vektorfüggvény koordinátafüggvényei.



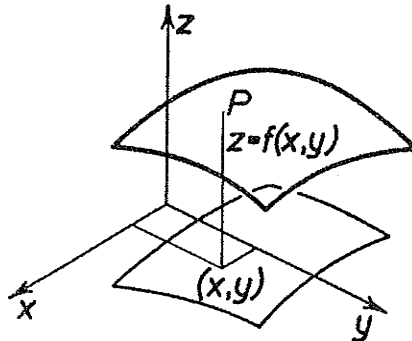
23.2. ábra.

A felület Euler-Monge-féle megadása:

Ha egy felületet a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvényvel állítunk elő, akkor a felület Euler-Monge megadásáról beszélünk. Ez a megadási mód tulajdonképpen az xy sík egy tartományának pontjaihoz rendeli a felületi pontokat (23.3. ábra).

A felület Euler-Monge-féle megadása mindig visszavezethető a kétváltozós vektorfüggvénnyel történő előállításra a következőképpen:

Az $\underline{r}(u, v)$ függvény $x(u, v)$, $y(u, v)$ és $z(u, v)$ koordinátafüggvényei:
 $x = u$, $y = v$ és $z = f(u, v)$.



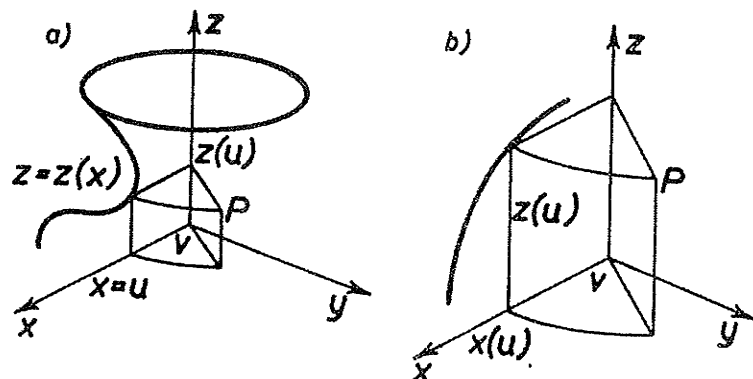
23.3. ábra.

A felület megadása implicit alakban:

Ha egy felület pontjait $F(x, y, z) = 0$ alakú egyenlettel jellemezzük, akkor a felületet implicit alakban adjuk meg.

Leggyakrabban előforduló felületek előállítása:

1) Sík. Ha a sík egy pontjába mutató helyvektor $\underline{r}_0$ és a sík két nem párhuzamos vektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$, akkor a sík



23.6. ábra

Ha a meridiángörbét $\underline{r}(u) = \underline{i} \cdot x(u) + \underline{k} z(u)$ vektor-skalár függvényvel adjuk meg, akkor ennek egy pontját v szöggel elforgatva, a kapott P felületi pont (23.6.b. ábra) helyvektora és a felület megadása is az $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \underline{i} \cdot x(u) \cos v + \underline{j} \cdot x(u) \sin v + \underline{k} \cdot z(u)$ alakban írható fel.

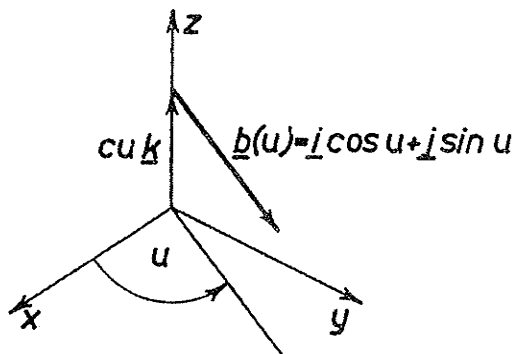
Például: ha az xz koordinátasíkban levő $(r_0, 0)$ középpontú r sugarú kört forgatjuk meg a z tengely körül, akkor a kör $\underline{r}(u) = (r_0 + r \cos u) \underline{i} + r \cdot \sin u \cdot \underline{k}$ egyenlete alapján a létrejövő tóruszfelület Gauss-féle előállítás:

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(r_0 + r \cos u) \cos v + \underline{j}(r_0 + r \cos u) \sin v + \underline{k} \cdot r \cdot \sin u.$$

5) Közönséges csavarfelület. A közönséges csavarfelület úgy jön létre, hogy a z tengely — mint csavartengely — körül az x tengelyt (alkotó) csavarmozgással mozgatjuk; vagyis a z tengely körül az alkotót u szöggel elforgatva, az u -val arányos mértékben a tengely irányában elmozgatjuk (közben az alkotó az xy síkkal párhuzamos marad) (23.7. ábra).

Az alkotó irányába mutató egységvektor az u szögű elforgatás után $\underline{b}(u) = \cos u \underline{i} + \sin u \underline{j}$, az alkotó magassága pedig $c \cdot u$. Ennek megfelelően a felület tetszőleges alkotójának valamely pontjába mutató $\underline{r}$ helyvektor:

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) = c \cdot u \cdot \underline{k} + v \cdot \underline{b}(u) = v \cdot \cos u \underline{i} + v \cdot \sin u \underline{j} + c \cdot u \cdot \underline{k},$$



23.7. ábra.

ez pedig éppen a közönséges csavarfelület Gauss-féle előállítására.

Példák felületek felírására:

- 1) Irjuk fel annak a hengerfelületnek a Gauss-féle előállítását, amelynek alapgörbéje az $\underline{r}(u) = (3 + 2\sin u)\underline{i} + (5 + 4\cos u)\underline{j}$ és alkotóinak irányát az $\underline{a}(2, 1, 3)$ vektor adja meg.

Megoldás: Az alapgörbe nyilván egy olyan ellipszis az xy koordinátasíkjában, amelynek középpontja $(3, 5)$, nagytengelye az y tengellyel párhuzamos és 8 egység hosszúságú, kistengelye pedig x -szel párhuzamos, hossza 4:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1. \text{ A vektoregyenlet alapján a felület}$$

előállítására: $\underline{r}(u, v) = (3 + 2\sin u + 2v)\underline{i} + (5 + 4\cos u + v)\underline{j} + 3v\underline{k}$.

- 2) Irjuk fel annak a kúpfelületnek az előállítását, amelynek vezérgörbéje az $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ $z = 0$ egyenletű hiperbola, csúcsa pedig a $C(1, 2, 8)$ pont.

Megoldás: A vezérgörbe a $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ azonosság alapján $\underline{r}(u) = (\pm 2\cosh u)\underline{i} + (3\sinh u)\underline{j}$ paraméteres alakba írható fel, így a vektoregyenlet alapján a kúpfelület előállítása $\underline{r}(u, v) = (1 + (\pm 2\cosh u - 1)v)\underline{i} + (2 + (3\sinh u - 2)v)\underline{j} + 8(1 - v)\underline{k}$.

- 3) Irjuk fel annak a forgásfelületnek az előállítását, amelynek meridiángörbéje $z = \frac{1}{x}, y = 0$ egyenletű hiperbola és a forgástengely a z tengely.

Megoldás: Jelen esetben $\underline{r}(u) = u\underline{i} + \frac{1}{u}\underline{k}$ paraméteres alakban adható meg a meridiángörbe ($u \neq 0$, bármely valós szám). Tehát a felület előállítása $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v + \underline{k}\frac{1}{u}$ alakban adódik.

- 4) Adjuk meg annak a forgásfelületnek az előállítását, amelynek meridiángörbéje $\underline{r}(u) = (1 + 2\cos u)\underline{i} + (2 + \sin u)\underline{j}$ a forgástengely pedig az $\bar{x}$ tengely.

Megoldás: Ebben az esetben az $\underline{r}(u)$ első koordináta-függvénye változatlan marad, mivel $\bar{x}$ a forgástengely. Tehát az előállítás:

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(1 + 2\cos u) + \underline{j}(2 + \sin u)\cos v + \underline{k}(2 + \sin u)\sin v.$$

- 5) Irjuk fel az $\underline{r}(u)$ térgörbe érintői által meghatározott felület vektoregyenletét, majd ennek alapján az $\underline{r}(u) = \underline{i}u^2 + \underline{j}u^3 + \underline{k}u^4$ görbe érintői által alkotott felület előállítását. (Legyen $u > 0$.)

Megoldás: Az $\underline{r}(u)$ görbepontból egy $\underline{\dot{r}}(u)$ irányú vektor vezet el a felület egy pontjához. Ennek megfelelően

$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\dot{\underline{r}}(u)$ a felület vektoregyenlete. Példánkban szereplő görbét érintővektora

$\dot{\underline{r}}(u) = i2u + j3u^2 + k4u^3$ alakú, tehát a felület előállítás:

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 + 2uv)i + (u^3 + 3u^2v)j + (u^4 + 4u^3v)k.$$

6) Irjuk át implicit alakra az $\underline{r}(u,v) = iu + ju^2\cos v + ku^2\sin v$ felületet.

Megoldás: $y^2 + z^2 = u^4(\cos^2 v + \sin^2 v)$,
tehát

$$y^2 + z^2 = x^4 \quad \text{azaz} \quad x^4 - y^2 - z^2 = 0$$

a felület implicit megadása.

Kétváltozós vektorfüggvényekre vonatkozó alapfogalmak

Határérték: Az $\underline{r}(u,v)$ függvénynek az (u_0, v_0) helyen vett határértéke létezik és $\underline{r}_0$ vektor, ha $(u,v) \neq (u_0, v_0)$ feltételezése mellett tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|\underline{r}_0 - \underline{r}(u,v)| < \varepsilon$, ha $|u - u_0| < \delta$ és $|v - v_0| < \delta$.

Határérték jelölése: $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \underline{r}(u,v) = \underline{r}_0$

Folytonosság: Az $\underline{r}(u,v)$ függvényt az (u_0, v_0) helyen folytonosnak mondjuk, ha határértéke megegyezik a függvény értékével; azaz ha

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \underline{r}(u,v) = \underline{r}(u_0, v_0)$$

Megjegyzés: Az $\underline{r}(u,v) = i \cdot x(u,v) + j \cdot y(u,v) + k \cdot z(u,v)$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ kétváltozós koordinátafüggvények folytonosak.

Differenciálhatóság: Az $\underline{r}(u,v)$ függvényt az (u,v) helyen differenciálhatónak nevezzük, ha a függvény $\Delta \underline{r}$ tetszőleges megváltozásához létezik olyan $\underline{d}_u$ és $\underline{d}_v$ vektor, amelyek segítségével a megváltozás a következő alakban írható fel:

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \underline{r}(u,v) = \underline{d}_u \Delta u + \underline{d}_v \Delta v + \underline{e}_1 \Delta u + \underline{e}_2 \Delta v,$$

ahol $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ az $u, v, \Delta u, \Delta v$ függvényei és $\Delta u \rightarrow 0$

$\Delta v \rightarrow 0$ esetén $|\underline{e}_1| \rightarrow 0$ $|\underline{e}_2| \rightarrow 0$.

Megjegyzés: $f(x,y)$ kétváltozós függvény parciális deriváltja. Az $f(x,y)$ függvényt az (a,b) helyen x , illetve y szerint parciálisan differenciálhatónak mondjuk, ha az egyváltozós $f(x,b)$, illetve $f(a,y)$ egyváltozós függvény az $x = a$, illetve $y = b$ helyen differenciálható. Az $f(x,b)$

függvény x szerinti deriváltját az $f(x,y)$ függvény (a,b) helyen vett x szerinti parciális deriváltjának mondjuk. (Hasonlóan beszélünk az $f(x,y)$ függvény (a,b) helyen vett y szerinti parciális deriváltjáról.

Jelölése: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$ illetve $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$.

A parciális deriválással nyert függvények ismét kétváltozós függvények, amelyeket lehet ismételtén parciálisan deriválni. Az így kapott parciális deriváltakat második parciális deriváltaknak mondjuk.

Jelölésük: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}$;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{yx} ,$$

illetve

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy} .$$

Tétel: Ha $f(x,y)$ olyan kétváltozós függvény, amelynél f_{xy} és f_{yx} az (a,b) hely környezetében létezik és e helyen folytonosak, akkor $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$. (Young-tétele)

A fentiekhez hasonló módon értelmezhető a kétváltozós vektorfüggvények parciális differenciálhatósága. Egy kétváltozós vektorfüggvény $\underline{r}(u,v)$ az (a,b) helyen u szerint parciálisan differenciálható, ha az $\underline{r}(u,v)$ vektor-skalár függvény a helyen deriválható.

Jelölések: $\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} = \underline{r}_u$; $\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = \underline{r}_v$,

illetve a második parciálisokra

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial u^2} = \underline{r}_{uu} ; \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial u \partial v} = \underline{r}_{vu} ;$$

$$\frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial v \partial u} = \underline{r}_{uv} ; \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial v^2} = \underline{r}_{vv} .$$

Beláthatók a következő tételek:

Ha $\underline{r}(u,v)$ függvény differenciálható az (u,v) helyen, akkor

$$\underline{d}_u = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} = \underline{r}_u \quad \text{és} \quad \underline{d}_v = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = \underline{r}_v .$$

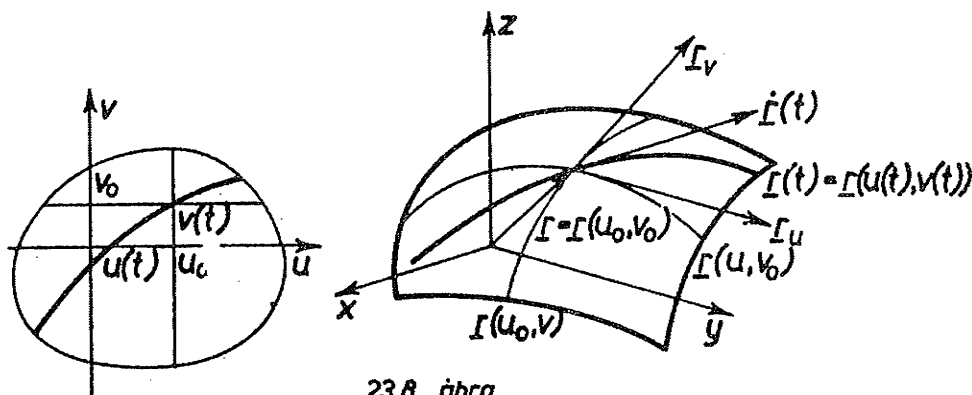
(Tehát differenciálható $\underline{r}(u,v)$ függvény első parciális deriváltjai léteznek. Igaz továbbá, hogy ha egy $\underline{r}(u,v)$ függ-

vény $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ parciális deriváltjai az (u, v) helyen léteznek és folytonosak, akkor az $\underline{r}(u, v)$ függvény differenciálható e helyen.)

Ha $\underline{r}(u, v)$ második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, akkor a második vegyes parciális deriváltnál a deriválás sorrendje felcserélhető, vagyis $\underline{r}_{uv} = \underline{r}_{vu}$.

Felületi görbe

Ha a felület előállításában szereplő paramétertartományon tekintünk egy $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméteres görbét, akkor ennek (bizonyos feltételek teljesülése esetén) az $\underline{r}(u, v)$ -vel előállított felületen egy $\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ vektor-skalár függvényvel megadott görbe felel meg (23.8. ábra).



23.8. ábra.

E felületi görbék közül a legegyszerűbben adódnak azok, amelyek a paramétertartományon haladó $u = u_0$ és $v = v_0$ egyenesdaraboknak felelnek meg, és az $\underline{r}(u_0, v)$, illetve $\underline{r}(u, v_0)$ alakú vektor-skalár függvények alakjában állíthatók elő. Ezeket a görbéket nevezzük a felület paramétervonalainak: $\underline{r}(u, v_0)$ az ún. u paramétervonal ($v_0 = \text{konstans}$), $\underline{r}(u_0, v)$ a v paramétervonal ($u_0 = \text{konstans}$).

A térgörbék differenciálgeometriájából következik, hogy az $\underline{r}(u, v)$ u , illetve v szerinti parciális deriváltjai a paramétervonalak $\underline{r}_u$, illetve $\underline{r}_v$ érintővektorait adják.

Megjegyzés: Egyszerűség kedvéért és ezzel a gyakorlat igényeihez alkalmazkodva a továbbiakban az $\underline{r}(u, v)$ -vel előállított felületről feltételezzük, hogy első és második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ nem párhuzamosak a felület vizsgált pontjában.

Felületen haladó görbe előállítása

Egyszerű esetekben a paramétertartományon adott $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméterezésű görbének megfelelő

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$$

felületi görbe a megfelelő helyettesítéssel előállítható. Például, ha a felület Gauss-féle előállításá

$$\underline{r}(u, v) = (u^2 - 2v)\underline{i} + (u^3 + uv)\underline{j} + uv \underline{k}$$

és a paramétertartományon az $u(t) = -2t$, $v(t) = 3t^2$ paraméterezésű görbének megfelelő felületi görbét akarjuk előállítani, akkor az u , illetve v behelyettesítésével az

$$\underline{r}(t) = (4t^2 - 6t^2)\underline{i} + (-8t^3 - 6t^3)\underline{j} + (-2t) \cdot 3t^2 \underline{k},$$

vagyis az

$$\underline{r}(t) = -2t^2 \underline{i} - 14t^3 \underline{j} - 6t^3 \underline{k}$$

térgörbe adódik.

Felületi görbe érintője. Érintő sík

Ha adott a paramétertartományon egy $u = u(t)$, $v = v(t)$ görbe, amelynek $u(t)$ és $v(t)$ koordinátafüggvényei t szerint differenciálhatók, akkor a felületen haladó $\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ görbe differenciálható és érintővektora az

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$$

alakban állítható elő.

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a felület egy P pontján áthaladó felületi görbék érintői az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként állíthatók elő, vagyis a két vektor által meghatározott síkban vannak (l. 23.8. ábra). Ezt a síkot nevezzük a felület érintő síkjának.

A felület érintő síkjának a normálisa — amit a felület normálisának is mondunk — ezek szerint

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$$

vektoriális szorzattal számítható ki. Ennek ismeretében már fel tudjuk írni a felületi normális egyenesének egyenletrendszerét, illetve a felületi érintő sík egyenletét.

Megjegyezzük, hogy az Euler-Monge-féle felületmegadási módban a $z = f(x, y)$ függvény parciális deriváltjait szokás a következőképpen jelölni: $p = f_x$, $q = f_y$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$. Ezekkel a mennyiségekkel is elvégezhető számításaink java része, de egy-két esettől eltekintve csak az áttekintendő „képlet”-anyagot növelnénk ezáltal. Az esetek többségében egyszerűbb a már megismert módon a Gauss-féle megadási módra átírni a felületet. Az egyik kivétel eset, amikor egyszerűsítést jelenthet a fenti jelölések alkalmazása a felületi normális-vektor előállítására, ami a következő formában lehetséges: $\underline{m}(-p, -q, 1)$. Az $F(x, y, z) = 0$ implicit alakban adott felület normális-vektora: (F_x, F_y, F_z) .

Például: tekintsük az $\underline{r}(u,v) = \underline{i}(u^3 - 2v^2) + \underline{j}uv^2 + \underline{k}(u^2v - u)$ felületen haladó görbét, amely a paramétertartomány $u = t^2$, $v = -2t^3$ görbéjének felel meg. Határozzuk meg a $t = 1$ -nek megfelelő pontban a felületi görbe érintőjét!

A vizsgált pont az $u = 1$, $v = -2$ pont, a felületen a $P(-7, 4, -3)$ pont, amelyben a paramétervonalak érintői

$$\underline{r}_u = \underline{i} \cdot 3u^2 + \underline{j}v^2 + \underline{k}(2uv - 1) \quad (3, 4, -5)$$

$$\underline{r}_v = \underline{i}(-4v) + \underline{j}2uv + \underline{k} \cdot u^2 \quad (8, -4, 1)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2t \\ \dot{v} &= -6t^2 \end{aligned} \quad \text{a } t = 1 \text{ helyen } \dot{u} = 2, \dot{v} = -6.$$

Tehát a felületi görbe érintője a P pontban

$$\dot{\underline{r}} = 2\underline{r}_u - 6\underline{r}_v \quad (-42, 32, -16).$$

A felületi normális-vektor:

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ 8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -16\underline{i} - 43\underline{j} - 44\underline{k}.$$

A felületi normális egyenesének egyenletrendszere:

$$x = -7 - 16\lambda \quad y = 4 - 43\lambda \quad z = -3 - 44\lambda$$

A felület érintősíkjának egyenlete:

$$-16(x + 7) - 43(y - 4) - 44(z + 3) = 0.$$

Felületi görbék hajlásszöge:

A felület egy P pontján áthaladó felületi görbék hajlásszögét érintővektoraik hajlásszögeként számítjuk. Ennek megfelelően a felület két paramétervonalának φ hajlásszöge

$$\cos \varphi = \frac{\underline{r}_u \cdot \underline{r}_v}{|\underline{r}_u| |\underline{r}_v|}$$

összefüggés alapján számítható.

Két felület metszésvonalaként adódó térgörbe:

Az $F(x,y,z) = 0$ és $G(x,y,z) = 0$ egyenletekkel megadott felületek metszésvonalát a két egyenlethől álló egyenletrendszer határozza meg. Az elmélet részletes kifejtését mellőzve, konkrét példán mutatjuk meg, hogyan lehet a metszésvonal egy pontjában a térgörbe jellemzőit (görbület, torzió, kísérő triéder stb.) meghatározni.

Legyen a két felület $F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$ és $G(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z = 0$. Vizsgáljuk a metszésvonalat a $P(-2, 1, 6)$ pontban. (Meggyőződhetünk arról, hogy ez a pont mindkét felület egyenletét kielégíti.)

A két felület metszésvonalát tekintsük olyan vektor-skalár függvénynek, amelynek paramétere valamelyik koordináta, pl. x . Ekkor az $\underline{r}(x) = x\mathbf{i} + y(x)\mathbf{j} + z(x)\mathbf{k}$. A térgörbe jellemzőinek meghatározására az $\underline{r}(x)$ függvény deriváltjait kell meghatározni a tekintett P pontban. Ekkor $\dot{\underline{r}}(x) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}(x)\mathbf{j} + \dot{z}(x)\mathbf{k}$, $\ddot{\underline{r}}(x) = \ddot{y}(x)\mathbf{j} + \ddot{z}(x)\mathbf{k}$ és így tovább. A koordinátafüggvények deriváltjait úgy határozzuk meg, hogy y -t és z -t az x függvényének tekintjük és eszerint deriváljuk az egyenleteket x szerint. Ekkor $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$ deriváltja

$4x + 6y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$; $x^2 + 2y^2 - z = 0$ deriváltja $2x + 4y\dot{y} - \dot{z} = 0$. Az x, y, z helyébe a P pont koordinátáit helyettesítve $\dot{y}$ és $\dot{z}$ -ra egy egyenletrendszert kapunk:

$$-8 + 6\dot{y} + 12\dot{z} = 0$$

$$-4 + 4\dot{y} - \dot{z} = 0$$

Emnek megoldása $\dot{y} = \frac{28}{27}$, $\dot{z} = \frac{4}{27}$, tehát a görbe érintővektora $\dot{\underline{r}}(1, \frac{28}{27}, \frac{4}{27})$.

Az $\ddot{\underline{r}}(0, \dot{y}, \dot{z})$ vektor koordinátáit úgy határozhatjuk meg, hogy a $4x + 6y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$ és a $2x + 4y\dot{y} - \dot{z} = 0$ egyenleteket x szerint deriváljuk: $4 + 6\dot{y}^2 + 6y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$ és $2 + 4\dot{y}^2 + 4y\ddot{y} - \ddot{z} = 0$. Ezekbe P , illetve $\dot{\underline{r}}$ koordinátáit behelyettesítve, az $\ddot{y}$ és $\ddot{z}$ -ra kapott egyenletrendszerből számíthatjuk ki az $\ddot{\underline{r}}$ koordinátáit.

Ez az eljárás folytatható s így $\ddot{\underline{r}}$ is meghatározható. Az $\underline{r}(x)$ függvény deriváltjainak ismeretében a metszésvonal adott pontjához tartozó görbület, torzió, kísé-
rő triéder az ismert módon számítható ki.

Felületi görbe görbülete. Adott felületi pontban a felület görbületi viszonyainak vizsgálata

A felületi görbe egy pontjában az érintővektort az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r}_u \cdot \dot{u} + \underline{r}_v \cdot \dot{v}$$

alakban nyertük. Látható, hogy $\dot{u}$ és $\dot{v}$ pontos ismerete helyett elegendő ezek arányát az $\dot{u}/\dot{v}$ hányadost ismerni, mert az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} \underline{r}_u + \underline{r}_v$ vagy $\underline{r}_u + \frac{\dot{v}}{\dot{u}} \underline{r}_v$ lineáris kombinációk az $\dot{\underline{r}}$ -tal egyirányú vektorokat, tehát a felületi görbe érintőjét állítják elő. A vizsgálat tovább folytatható, meg lehet határozni a felületi görbe kísé-
rő triéderét, görbületét, torzióját stb.

Számunkra a felületi görbe görbületének meghatározása szükséges, mert egy felületi pontot a rajta áthaladó felületi görbékkel, illetve azok görbületi viszonyaival akarunk jellemezni.

A felületi görbe görbületét meghatározó számítások összetettsége miatt, a jobb áttekinthetőség céljából jelöléseket vezetünk be.

Például látható, hogy $\dot{r}^2 = \dot{r}_u^2 + 2\dot{r}_u\dot{r}_v\dot{u}\dot{v} + \dot{r}_v^2$ kifejezés az $\dot{r}_u^2 = E$, $\dot{r}_u\dot{r}_v = F$ és $\dot{r}_v^2 = G$ jelölések bevezetésével $E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$ alakra hozható, amelyet első alapformának és a benne szereplő E , F , G mennyiségeket Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeknek nevezünk.

Bevezetjük továbbá a $D = \sqrt{EG - F^2} = |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|$ jelölést.

A Gauss-féle másodrendű főmennyiségeket a következő definícióval adjuk meg:

$$L = \frac{1}{D} \dot{r}_{uu}\dot{r}_u\dot{r}_v \quad M = \frac{1}{D} \dot{r}_{uv}\dot{r}_u\dot{r}_v \quad N = \frac{1}{D} \dot{r}_{vv}\dot{r}_u\dot{r}_v.$$

A másodrendű főmennyiségekben a második parciális deriváltak és az első parciális deriváltak vegyes szorzatai szerepelnek. A másodrendű főmennyiségekből képezett második alapforma $L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$ alakú.

Ha egy felületi görbe érintője $\dot{r} = \dot{r}_u\dot{u} + \dot{r}_v\dot{v}$ alakban írható fel és a felületi görbe főnormális vektorának a felületi normális vektorral bezárt szöge φ , akkor a felületi görbe $\frac{1}{R}$ görbületét az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

kifejezésből számítjuk ki.

Például: vegyük a korábban tekintett felületet

$r(u,v) = i(u^3 - 2v^2) + juv^2 + k(u^2v - u)$ és ennek $P(-7,4,-3)$ ($u=1, v=-2$) pontján áthaladó $\dot{r} = 2\dot{r}_u - 6\dot{r}_v$ érintőjű felületi görbét, amelynek főnormálisa a felületi normálissal $\varphi = \frac{\pi}{3}$ szöget zár be.

A felületi görbe görbületének kiszámításához szükségünk van az első és másodrendű parciális deriváltakra, illetve a Gauss-féle főmennyiségekre:

$$\dot{r}_u = i \cdot 3u^2 + jv^2 + k(2uv - 1) \quad (3, 4, -5)$$

$$\dot{r}_v = i(-4v) + j2uv + ku^2 \quad (8, -4, 1)$$

$$E = 9 + 16 + 25 = 50$$

$$F = 24 - 16 - 5 = 3$$

$$G = 64 + 16 + 1 = 81$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v (-16, -43, -44)$$

$$D = \sqrt{EG - F^2} = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = \sqrt{4041} = 3\sqrt{449}$$

$$\underline{r}_{uu} = 16\underline{u} + 2\underline{v} \quad (6, 0, -4) \quad \underline{r}_{uu}\underline{r}_u\underline{r}_v = -96 + 176 = 80$$

$$\underline{r}_{uv} = 2\underline{v} + 2\underline{u} \quad (0, -4, 2) \quad \underline{r}_{uv}\underline{r}_u\underline{r}_v = 172 - 88 = 84$$

$$\underline{r}_{vv} = 2(-4) + 2\underline{u} \quad (-4, 2, 0) \quad \underline{r}_{vv}\underline{r}_u\underline{r}_v = 64 - 86 = -22$$

$$L = \frac{80}{3\sqrt{449}} \quad M = \frac{84}{3\sqrt{449}} \quad N = \frac{-22}{3\sqrt{449}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \frac{\dot{\underline{u}}}{\dot{\underline{v}}} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Tehát a felületi görbe görbülete:

$$\frac{1}{R} = 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{449}} \cdot \frac{80 + 168(-3) - 22 \cdot 9}{50 + 6(-3) + 81 \cdot 9} = 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{449}} \cdot \left(\frac{-622}{761} \right)$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{1244}{2283\sqrt{449}}$$

A felületi görbe görbületének meghatározására szolgáló kifejezésből és konkrét számításainkból is kiolvashatók a következők:

a) A rögzített P felületi pontban az $\underline{r}(u, v)$ függvény $\underline{r}_u, \underline{r}_v, \underline{r}_{uu}, \underline{r}_{uv}, \underline{r}_{vv}$ parciális deriváltjai, valamint a belőlük képezett E, F, G és L, M, N főmennyiségek állandók, függetlenül a P-n átmenő felületi görbétől.

b) A P pontban közös érintőjű felületi görbékre nézve az érintő irányát meghatározó $\dot{\underline{u}}/\dot{\underline{v}}$ hányados értéke állandó.

c) A P pontban közös főnormálisú felületi görbékre a főnormális és a P ponthoz tartozó felületi normális φ hajlásszöge állandó.

Ezek szerint az ilyen felületi görbék görbülete a P pontban ugyanazt az értéket adja, mint az érintő és a főnormális által kifeszített (simuló) síkkal adódó síkmetszet görbülete. — E tény lehetővé teszi, hogy egy felületi ponton áthaladó felületi görbe görbületét a felület egy síkmetszetének görbületeként állítsuk elő. Tehát a továbbiakban — a felületi térgörbék mellőzésével — csupán a felületi síkmetszetek görbületi viszonyainak vizsgálatára szorítkozhatunk.

Meusnier tétele:

Vizsgáljuk most a P felületi pontban közös érintőjű felületi síkmetszetek görbületét. Ez azt jelenti, hogy a felületi görbe görbületének képletében csupán a φ -t változtatjuk, vagyis a főnormalist az érintő körül forgatjuk. $\varphi = 0$ esetén a $\cos \varphi = 1$, a főnormális és a felületi normális egybeesik és ekkor a felületi normális és az érintő

által kifeszített síkkal kapott ún. normálmetszet $\frac{1}{R_n}$ görbületét kapjuk: $\frac{1}{R_n} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{Eu^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$.

Meusnier tétele:

Közös érintőjű ferde metszet és a normálmetszet görbülete között az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_n} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \quad \text{ill.} \quad R = R_n \cdot \cos \varphi$$

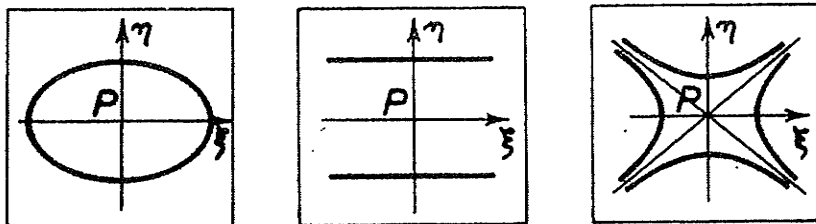
összefüggés áll fenn; vagyis a ferde metszetek görbületi sugarai a normálmetszet görbületi sugarának merőleges vetületei.

E tétel lehetővé teszi, hogy a továbbiakban csupán a normálmetszetek görbületeinek vizsgálatára szorítkozzunk.

Most a P felületi pontban a felületi normális körül forgatjuk az érintőt. Minden érintőirányhoz tartozik egy-egy normálmetszet.

Dupin-féle indikátrix

A felület P pontján áthaladó normálmetszetek a felületi érintősíkból különböző P ponton áthaladó érintőirányokat (egyeneseket) metszenek ki. E normálmetszetekhez tartozó görbületi sugár R_n abszolút értékének négyzetgyökét a megfelelő érintőirányokra P pontból mindkét irányban felmérjük. Valamennyi érintőirányra felmérve a $\sqrt{|R_n|}$ -t a végpontokból vagy ellipszis vagy párhuzamos egyenespár, vagy konjugált hiperbolapár rajzolódik ki. Az érintősíkban így adódó görbéket a felület P pontjához tartozó Dupin-féle indikátrixának mondjuk (23.9. ábra).



23.9. ábra.

A felületi pontot elliptikusnak nevezzük, ha az indikátrix ellipszis, parabolikusnak mondjuk, ha az indikátrix párhuzamos egyenespár (elfajult parabola). Ha az indikátrix konjugált hiperbolapár, akkor a P pont hiperbolikus pont.

Főirányok, főgörbületek, főmetszetek

Az indikátrix a P felületi ponthoz tartozó érintősíkban mindhárom esetben kijelöl két egymásra merőleges érintő-

főirányt, amelyeket a 23.9. ábrán ξ -vel, illetve η -val je-
löltünk. Ezen irányokhoz tartozó normálmetszetek (főmetsze-
tek) görbülete, illetve a görbületi sugara a P pontban
extremális tulajdonságú. Ezeket az irányokat főirányoknak
(r_1, r_2), a hozzájuk tartozó görbületeket $\frac{1}{R_1}$ és $\frac{1}{R_2}$ -t fő-
görbületeknek nevezzük.

Ha az indukátrix ellipszis, akkor a P ponthoz tartozó
valamennyi merőleges metszet, így a főmetszetek görbületei
is azonos előjelűek, ennek megfelelően az indukátrix egyen-
lete a főirányok (ξ, η) koordinátarendszerében

$$\frac{\xi^2}{|R_1|} + \frac{\eta^2}{|R_2|} = 1.$$

Ha az indukátrix két párhuzamos egyenes, akkor az e-
gyik főgörbület pl. $\frac{1}{R_1} = 0$, az indukátrix egyenlete $\eta^2 =$
 $= |R_2|$.

Ha az indukátrix két konjugált hiperbola, akkor az
egyik hiperbolához tartozó érintőirányokhoz tartozó nor-
málmetszetek görbülete pozitív, a másikhoz tartozók nega-
tívok. Az aszimptotákhoz tartozó normálmetszetek görbüle-
te 0. Az indukátrix egyenlete

$$\frac{\xi^2}{|R_1|} - \frac{\eta^2}{|R_2|} = \pm 1.$$

A főirányok meghatározása tulajdonképpen két érintőirány
előállítását jelenti az r_u és r_v lineáris kombinációja-
ként, tehát csupán az $\dot{u}/\dot{v}$ vagy $\dot{v}/\dot{u}$ arányt kell kiszámí-
tani. Ez a következő determináns-alakban megadott másod-
fokú egyenletből lehetséges:

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ill. pl.} \quad \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = k \quad \text{esetén} \quad \begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

A k -ra kapott k_1 és k_2 értékekből $\dot{u}_1, \dot{v}_1$, illetve $\dot{u}_2, \dot{v}_2$
értékek meghatározhatók, és így a két főirány $r_1 = \dot{u}_1 r_u +$
 $+ \dot{v}_1 r_v$, illetve $r_2 = \dot{u}_2 r_u + \dot{v}_2 r_v$ alakban áll elő. Mint-
hogy a két főirány egymásra merőleges, ezért az egyik fő-
metszet normálisa a másik főirány és viszont. Ennek alap-
ján a főmetszetek síkjának egyenlete könnyen felírható.
A főgörbületek kiszámítása a főirányokat meghatározó $\dot{u}_1,$
 $\dot{v}_1$, illetve $\dot{u}_2, \dot{v}_2$ értékek alapján a normálmetszetre ko-
rábban megismert görbület-képlet segítségével is lehetsé-
ges.

A másik lehetőség az, hogy a főgörbületek szorzatára
és összegére könnyen kezelhető számítási módszer vezethető
le.

A főgörbületek szorzata: Gauss-féle vagy szorzatgörbület

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

A főgörbületek összege: Minkowski-féle vagy összeggörbület

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

A Gauss-féle görbület előjele megadja a felületi pont jellegét. A $K > 0$ elliptikus-, $K = 0$ parabolikus-, $K < 0$ hiperbolikus pontot jelent. Minthogy $EG - F^2 > 0$, tehát a pont jellegét $LN - M^2$ előjele adja meg. (Az Euler-Monge-féle felületmegadás esetén az $rt - s^2 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ előjele megegyezik a szorzatgörbület előjelével, tehát megadja a felületi pont jellegét.)

Euler-tétele: Az r_1 főiránnyal ψ szöget alkotó érintő-irányhoz tartozó normálmetszet görbülete:

$$\frac{1}{R_\psi} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \psi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \psi.$$

Például: Határozzuk meg az $r(u,v) = i(u^2 + v^2) + j2uv + k(u - v)$ felület $u = -1, v = -1$ pontjában ($P(2,2,0)$) a főirányokat, a főmetszetek síkjainak egyenletét, a szorzat és összeggörbületet, továbbá állapítsuk meg a felületi pont jellegét.

$$r_u = i2u + j2v + k \quad (-2, -2, 1)$$

$$r_v = i2v + j2u - k \quad (-2, -2, -1)$$

$$r_{uu} = i \cdot 2 \quad (2, 0, 0)$$

$$r_{uv} = 2j \quad (0, 2, 0)$$

$$r_{vv} = i \cdot 2 \quad (2, 0, 0)$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4i - 4j$$

$$r_u \times r_v \quad (4, -4, 0)$$

$$E = 9 \quad F = 7 \quad G = 9 \quad D = \sqrt{32}$$

$$L = \frac{8}{\sqrt{32}} \quad M = \frac{-8}{\sqrt{32}} \quad N = \frac{8}{\sqrt{32}}$$

A főirányok:

$$\frac{8}{\sqrt{32}} \begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ 9 & 7 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{128}{\sqrt{32}} (1 - k^2) = 0 \quad \text{innen} \quad \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{matrix}$$

tehát

$$r_1 = r_u + r_v = -4i - 4j$$

$$r_2 = r_u - r_v = 2k.$$

Főmetszetek síkjai: $2z = 0$, ill. $-4(x-2) - 4(y-2) = 0$.
 Szorzat-, illetve összeggörbület: $K = 0$; $H = \sqrt{2}$.

A felületi pont parabolikus pont.

Utolsó példánkban a megadott felületet nem egy pontjában, hanem az egész felületet vizsgáljuk. Ennek megfelelően a parciális deriváltakkal (és nem azok adott paraméterértékekhez tartozó behelyettesített értékeivel) számolunk:

Állapítsuk meg, hogy milyen jellegűek az

$$\underline{r}(u,v) = (u-v)\underline{i} + (u+v)\underline{j} + uv\underline{k}$$

alakban megadott felület pontjai.

A feladatnál nyilván az $LN - M^2$ előjelét kell meghatározni; minthogy azonban $LN - M^2 =$

$$= \frac{1}{D} \left[(\underline{r}_{uu}\underline{r}_u\underline{r}_v)(\underline{r}_{vv}\underline{r}_u\underline{r}_v) - (\underline{r}_{uv}\underline{r}_u\underline{r}_v)^2 \right], \text{ és } D > 0, \text{ elegendő a zárójelben levő vegyszorzatokkal dolgozni.}$$

$$\underline{r}_u = \underline{i} + \underline{j} + v\underline{k}, \quad \underline{r}_v = -\underline{i} + \underline{j} + u\underline{k} \text{ továbbá } \underline{r}_{uu} = \underline{0}, \quad \underline{r}_{uv} = \underline{k}, \quad \underline{r}_{vv} = \underline{0}.$$

Látható, hogy

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix} = (u-v)\underline{i} - (u+v)\underline{j} + 2\underline{k}$$

innen

$$\underline{r}_{uu}\underline{r}_u\underline{r}_v = \underline{r}_{vv}\underline{r}_u\underline{r}_v = 0 \quad \text{és} \quad \underline{r}_{uv}\underline{r}_u\underline{r}_v = 2.$$

$$(\underline{r}_{uu}\underline{r}_u\underline{r}_v)(\underline{r}_{vv}\underline{r}_u\underline{r}_v) - (\underline{r}_{uv}\underline{r}_u\underline{r}_v)^2 = -4$$

a felület valamennyi szóba jöhető pontjára, tehát a fenti felület minden pontja hiperbolikus pont.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok: 133-144.
 d. 78-164. feladatokat és 125. old. 27-28. feladatokat.

Elméleti tananyag: Tankönyv 256-272. pontok.

24. AZ ELEKTRONIKUS GÉPI RAJZOLÁS ALAPGONDOLATA

Az elektronikus számítógépet felhasználó ember a géppel általában egy monitor (televíziós képernyő) segítségével tartja a kapcsolatot. A képernyőn jelennek meg a beírt program sorai, illetve a gép visszajelzései is. Ha pl. egy monitoron 20 sor fér el, és soronként 30 karakterhely van, akkor bizonyos karakterhelyek valamilyen kitöltésével egy síkalakzat (mondjuk egy betűalak) áll elő. Ez az eljárás hasonló ahhoz, amikor egy négyzethálós papíron bizonyos négyzetek beszínezésével állítjuk elő ugyanazt az alakzatot. Bár az emberi szem ráismer az alakzatra, de annak ferde egyenesei, vagy görbeívei korántsem vonalak, hanem erősen lépcsőzetes követői a tulajdonképpeni vonalaknak. Ha ugyanilyen méretű alakzatot milliméterpapíron, a kis négyzetek beszínezésével ábrázolunk, akkor a szemünk sokkal elfogadhatóbbnak látja a vonalak még mindig kis lépcsőkből álló megjelenítését. Ez a finomodás az elektronika eszközeivel is elvégezhető; a számítógép ún. grafikus üzemmódjában a monitort „finom felbontásban” kezeli, mégpedig a képernyőn levő keretvonalak által meghatározott síkbeli koordinátarendszerben — annak korlátait figyelembe véve. A koordinátaival megadott, vagy előzetesen kiszámított (és a gép memóriájában elraktározott) pontokat, azok összekötő szakaszait a számítógép a monitoron meg tudja jeleníteni. Ha görbevonalat akarunk a monitorra „írni”, akkor ez úgy történhet, hogy az ábrázolandó görbe igen sok pontját (rendezett sorrendben) a számítógéppel kiszámíttatjuk, majd ezeket sorrendben összeköttetjük. Ha elegendő sűrűn vettük fel a görbe pontjait, akkor a „megrajzolt” beírt poligon görbének látszik. A képernyőn létrehozott ábrát ún. printerrel (mátrixnyomtatóval) papíron is meg tudjuk jeleníteni, de ez is finomabb lépcsőzetességeket mutat még. A finomítás tovább folytatható, de ehhez a számítógéphez kapcsolt rajzgépre (ún. plotterre) van szükség. Ennek elvi alapja is az előzőkhöz hasonló, de itt egy elektronikusan irányított rajzfej (golyóstoll v. filctoll) rajzolja le a rajzlapra tizedmilliméter (esetleg néhány századmilliméter) pontossággal az egyeneseket, illetve görbevonalak esetén a beírt poligonokat, amelyek már valódi görbéknek látszanak.

Az elektronikus gépi rajzolás másik problémája a térbeli alakzatok síkábrán történő megjelenítése.

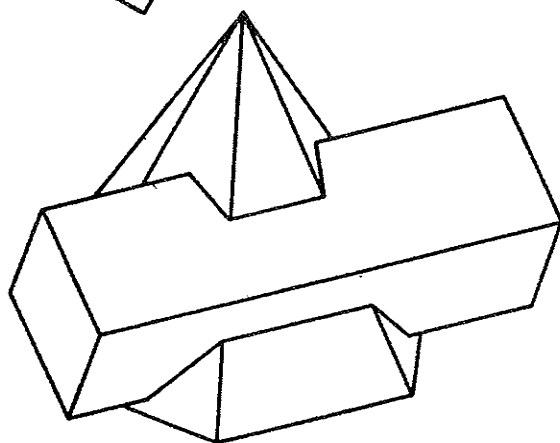
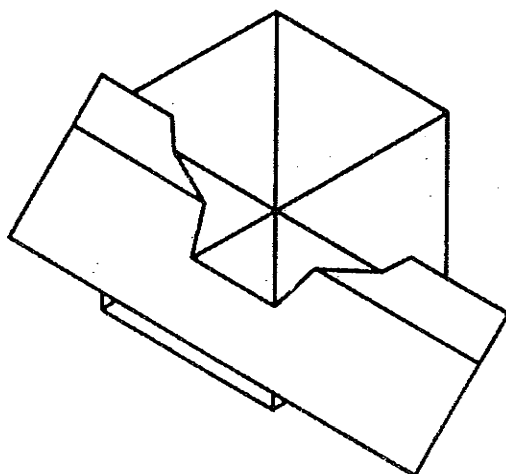
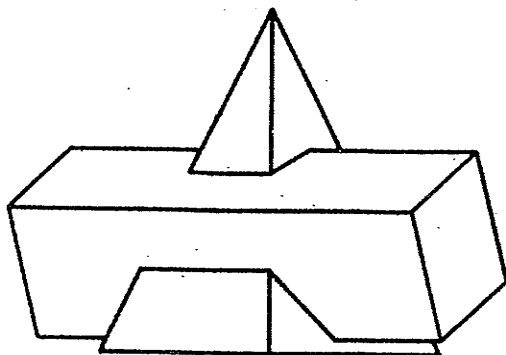
A geometria tanulása során tanult számolási eljárások szinte kivétel nélkül olyan algoritmusok, amelyekből számítógépi program készíthető. Ha az ábrázoló geometriai

módszereket megvizsgáljuk, akkor arra az eredményre jutunk, hogy ott geometriai algoritmusokat alkalmaztunk, amelyek koordináta geometriai megfontolásokra áttehetők s így számítógépre vihetők.

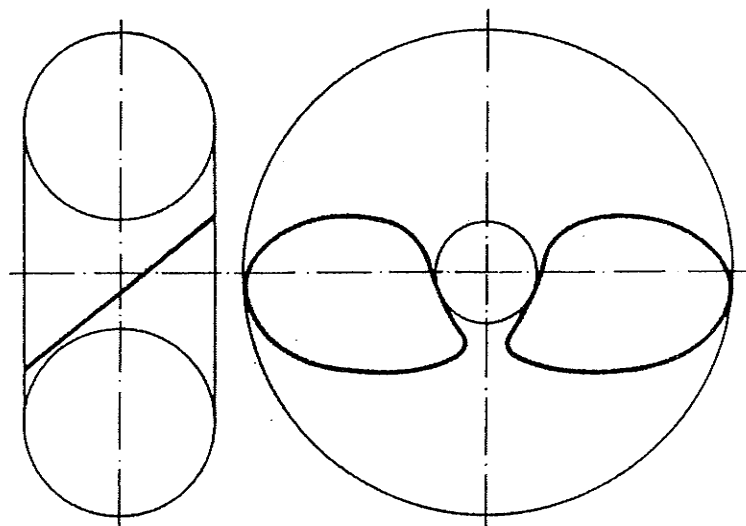
Az axonometrikus ábrázolás (ferde és merőleges), valamint a Monge-féle ábrázolás (és a többi ábrázolási módszer) a számítógépes rajzolással egyaránt megvalósítható. Alapjai tisztán geometriai ismeretek, amelyek nélkül a „legintelligensebb” gépek sem programozhatók be geometriai jellegű ábrázolásokra. Az elektronikus gépi rajzolás technikailag állandó fejlődésben van, és számos alkalmazása lesz a jövőben. (Pl. napjaink egyik újdonsága a lézer-printer.)

Ezen áttekintő ismertetés után néhány elektronikus rajzolással készült ábrát mutatunk be. Mindenek előtt megemlítjük, hogy a „Geometriai feladatok” jegyzet differenciálgeometriai részének ábrái ún. Digigraph elektronikus rajzgéppel készültek.

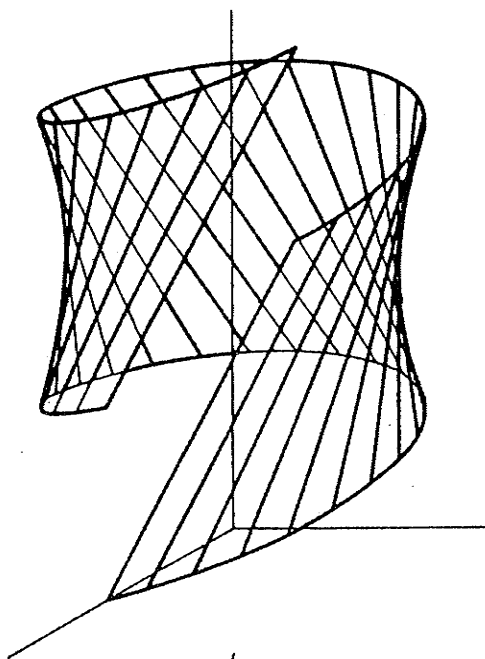
A 24.1. ábrán a két poliéder áthatását — a megfelelő program alapján — Commodore 64 személyi számítógéphez kapcsolt rajzgépen rajzoltuk meg. A 24.2. ábrán tórusz síkmetszetét, a 24.3. ábrán egy élesmenetű nyitott csavarfelületet, a 24.4. ábrán egy csavarvonal érintői által alkotott felületet rajzoltattunk meg. (Megjegyezzük, hogy a 24.4. ábrán bemutatott csavarfelület az egyetlen kifejthető csavarfelület, de technikai alkalmazásra aligha alkalmas.) A 24.5. ábrán gépi úton rajzolt hurkolt epicikloist mutatunk be.



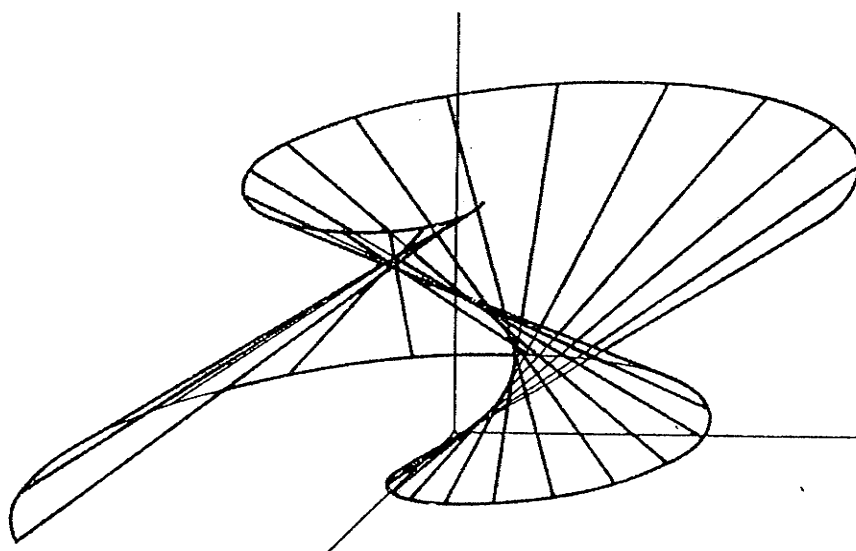
24.1. ábra.



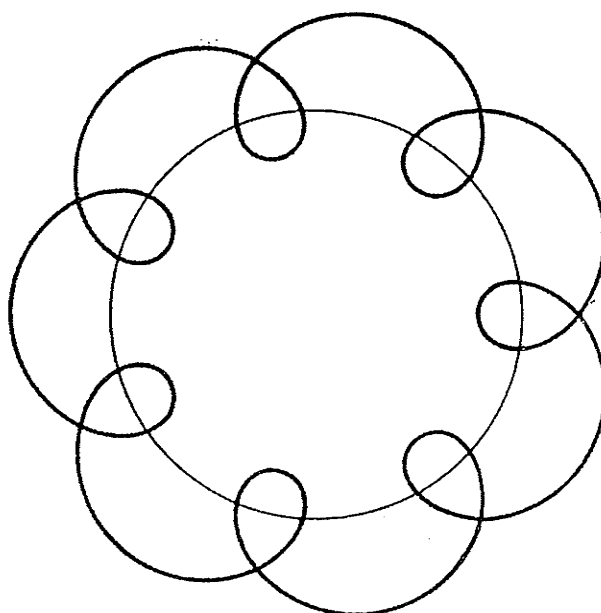
24.2. ábra.



24.3. ábra.



24.4. ábra.



24.5. ábra.

IRODALOM

- Hajós György: Bevezetés a geometriába
Tankönyvkiadó, 1961.
(ill. további változatlan kiadások)
- Kólya Dániel: Gyakorlati ábrázoló geometria
Műszaki Könyvkiadó, 1978.
- Kólya Dániel: Ábrázoló geometriai példatár
Műszaki Könyvkiadó, 1983.
- Pethes Endre: 222 ábrázoló geometriai feladat
Műszaki Könyvkiadó, 1963.
(ill. további változatlan kiadások)
- Reiman István: A geometria és határterületei
Gondolat Könyvkiadó, 1986.
- Reiman István: Ábrázoló geometria
(Gimnáziumi fakultatív tárgy tankönyve)
Tankönyvkiadó, 1986.
- Strommer Gyula: Ábrázoló geometria
Tankönyvkiadó, 1971.
(ill. második kiadása)
- Strommer Gyula: Geometria
Tankönyvkiadó, 1987.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPESZMÉRNÖKI KAR

Vermes Imre
KÓTÁS PROJEKCIÓ
(MÉRŐSZÁAMOS ÁBRÁZOLÁS)

Építőmérnök hallgatók számára

1993

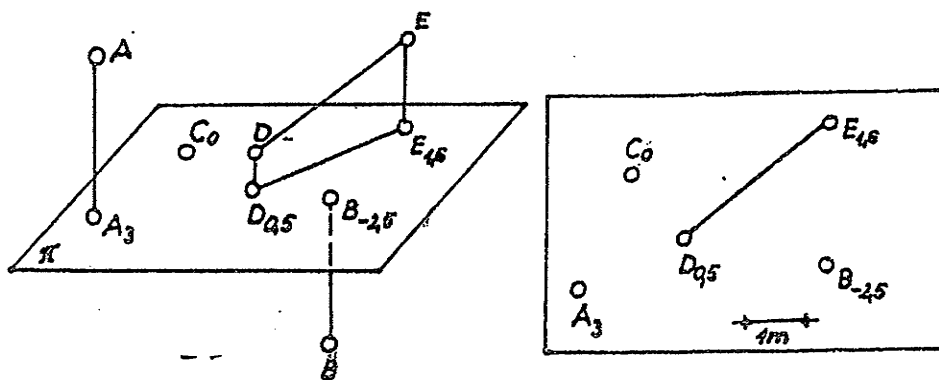
KÓTÁS PROJEKCIÓ (MÉRŐSZÁAMOS ÁBRÁZOLÁS)

Ismeretes, hogy a tér pontjait a merőleges vetítés eljárásával egyértelműen tudjuk egyetlen Π síkra leképezni. Ebben a vetítésben a tér egy tetszőleges P pontjának a Π képsíkon keletkező képe a P ponton áthaladó, Π képsíkra merőleges egyenesnek és a Π képsíknak a P' metszéspontja. Minthogy azonban a P' pontból nem tudjuk megállapítani a P pont térbeli helyzetét, ezért a Monge-féle, kétképsíkú ábrázolásban a magasságméreteket feltüntetése a Π képsíkra merőleges helyzetű második képsíkot vezetünk be.

A műszaki élet számos területén (pl. útépitési, vasútépitési, vízépítési, erdészeti, bányászati munkálatokkal kapcsolatosan) olyan tevékenységet kell megtervezni illetve a tevékenység során megépített műtárgyakat ábrázolásban dokumentálni, amire a Monge-féle ábrázolási módszerek kevésbé alkalmasak. E tevékenységek alapját a terepviszonyokat ábrázoló térkép képezi, vagyis egyetlen képsíkon kell a teret rekonstruálható módon ábrázolni. Az egy képsíkon történő, s egyben jól rekonstruálható, a fent vázolt céloknak megfelelő ábrázolás a kótás (vagy mérőszámos) ábrázolás.

Ennek alapja az, hogy az ábrázolni kívánt alakzat pontjait egy – vízszintesnek képzel – képsíkra (alapsíkra) merőlegesen vetítjük, és a nyert képpontok mellett föltüntetjük az ábrázolt pontnak e síktól való távolságát – a pont kótáját (mérőszámát) – valamilyen mértékegységben kifejezve. (E mértékegység általában a méter szokott lenni, az alapul vett képsíkot a tenger szintjének magasságába képzeljük; ennek megfelelően a sík feletti pontok távolsága a tengerszint feletti magasságot jelenti, e magasságot mutató szám pozitív; míg e sík alatt levő pontok távolságát negatív előjellel tüntetjük fel rajzunkon.)

Az 1. ábrán A_3 azt jelenti, hogy az A pont 3 egységre van az alapul vett Π képsík fölött, a B pont 2,5 egységre van az alapsík alatt, C_0 pont az alapsíkban van. Az ábrán D és E pontokkal meghatározott egyenes ábrázolását is bemutatjuk. A szemléltető ábra mellett a vetületeket kótaikkal (mérőszámaikkal) együtt ábrázolva is megrajzoltuk, ahol föltüntetjük a mértékegységnek (pl. 1 méternek) megfelelő rajzi hosszúságot is.



1. ábra

A vetületi ábrából most már egyértelműen rekonstruálható az egyes pontok és az ábrázolt egyenes térbeli helyzete, ugyanis az A pont esetében az A_3 pontban a képsíkra

állított merőlegesre A_3 ponttól a rajzon feltüntetett hosszegységet háromszor kell a képsíktól számítva felfelé felmérni, míg a B pont esetében a $B_{-2,5}$ ponttól lefelé kell a hosszegység 2,5-szeresét a megfelelő vetítőegyenésre felrakni. Így az A és B pont térbeli helyzetét meghatároztuk. A C pont a képsíkban van, azaz $C = C_0$; a D és E pontok rekonstruálása után összekötő egyenesük az ábrázolt DE egyenes rekonstruált helyzetét adja. (Megjegyezzük, hogy a kótás ábrázolásban a vetületi pontok, egyenesek jelölését a megfelelő betű és a hozzátartozó kóta feltüntetésével végezzük, a betű mellé nem teszünk vesszőt.)

Fel a pont és egyenes kótás ábrázolását elvileg elintéztünknek tekinthetnénk, azonban praktikus szempontok szükségessé teszik az elmondottak kiegészítését: Az azonos magasságban elhelyezkedő pontok összessége egy-egy síkot, ún. *szintsíkot* alkot. *Főszintsíkokról* beszélünk akkor, ha a szintsíkok kótája egész szám, vagyis az alapsíktól mért távolságuk az alapul vett mértékegység (általában méter) egész számú többszöröse. Az ábrázolt alakzatok egyszerűbb rekonstruálása (vagy képzeletünkben való földézése) céljából bármelyik szintsíkot tekinthetjük képsíknak.

Az ábrázolásban a nagy kiterjedésű műszaki létesítményeket nem lehet természetbeni méreteiken megadni, ezért rendszerint ezek kicsinyített vetületeivel dolgozunk. Hogy tetszőleges méretű tereptárgyak, műtárgyak rajzi képével kényelmesen és a kívánt pontossági előírásoknak is eleget téve dolgozhassunk, ezen objektumok eredeti méretű képzeletbeni vetületét alkalmasan választott méretarány szerint lekicsinyítjük, s rajzunkban a kicsinyített vetületet szerkesztjük meg.

Ha az eredeti méretű, képzeletbeni vetületen egy tetszőleges szakasz hossza H , a lekicsinyített vetületben ennek megfelelő szakasz h , akkor a kicsinyítés alapjául szolgáló " a " arányszám a következő: $a = \frac{H}{h}$. Ez azt jelenti, hogy az eredeti méretű, képzeletbeni vetületen levő H hosszúságú szakasznak $h = \frac{H}{a}$ hosszúságú szakasz felel meg. (Az arányszámot a gyakorlatban egész számnak választják.) Az arányszám reciprokértékét *méretarány*nak nevezzük és M -mel jelölve rajzainkon $M = 1 : a$ alakban tüntetjük fel. A méretarány azt mutatja meg, hogy az ábrázolásban mért egységnyi hosszúságnak az eredeti méretű, képzeletbeni vetületen " a " hosszúságú szakasz felel meg.

Kótás ábrázolással készült rajzon, térképen általában föltüntetik a méretarányt és mellette a léptéket is. A *lépték* az egységnyi hosszúságúnak választott szakasz (általában 1m vagy 1km vagy 10km) rajzi hosszát jelenti; e szakasz mellett számmal és mértékegységgel föltüntetik a neki megfelelő tényleges hosszúságot is.

Feladataink tárgyalása során szükség szerint jegyzetünkben is föltüntetjük a méretarányt, vagy az 1m hosszegység rajzi hosszát, azaz a léptéket.

Példaként megemlíti, hogy $M = 1 : 200$ méretarány esetén valamelyik szintsíkból elhelyezkedő 3,5cm-es rajzi szakasznak a valóságban $200 \cdot 3,5\text{cm} = 700\text{cm} = 7\text{m}$ felel meg, és megfordítva az ábrázolt tereprész szintsíkból levő 21m hosszú szakaszának a rajzon $\frac{2100\text{ cm}}{200} = 10,5\text{cm}$ -es szakasz felel meg.

Egyenes ábrázolása

Az 1. ábrával kapcsolatosan mondottakból – mint már említettük – az egyenes ábrázolását is elvileg elintéztünknek tekinthetjük, hiszen az egyenes merőleges vetülete (a vetítő egyenestől eltekintve) egyenes, és térbeli helyzete egyértelműen meghatározott, ha ismerjük két pontjának kótás vetületét.

Tekintsünk egy egyenest, amelyet $A_{3,6}$ és $B_{4,8}$ pontjai határoznak meg (2. ábra).

Az egyenes vetületén kívül az egyenes mellé párhuzamosan rajzolt nyíl föltüntetésével az egyenes *lejtirányát* is megadjuk. Ez a nyíl, vagyis a lejtirány mutatja meg, hogy az egyenesen milyen irányban haladva jutunk egyre kisebb kótájú pontokhoz. Ha az ábrázolt egyenesről és annak a 0. főszintsíkra való vetítéséről szemléltető ábrát készítünk (3.ábra), akkor az A ponton át a vetülettel párhuzamos $\overline{AB}$ egyenes és az AB egyenes ϵ szöge az AB egyenesnek a szintsíkokkal bezárt szögét, az egyenes dőlésszögét adja. Minthogy $\overline{AB\overline{B}}$ háromszög derékszögű, ezért

$$AB = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BB}^2},$$

valamint

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\overline{BB}}{\overline{AB}} \text{ ill. } \epsilon = \operatorname{Arctg} \frac{\overline{BB}}{\overline{AB}}.$$

Ha a vetületben adódó $A_{3,6}B_{4,8}$ távolság 4cm és az ábrázolásnál használt méretarány

$$M = 1 : 250,$$

akkor az alábbiak szerint kiszámítható az AB szakasz valódi nagysága és az AB egyenes dőlésszöge is ($\overline{AB}$ valódi hossza nyilván $0,04 \cdot 250\text{m}$, $\overline{BB}$ valódi hossza $1,2\text{m}$):

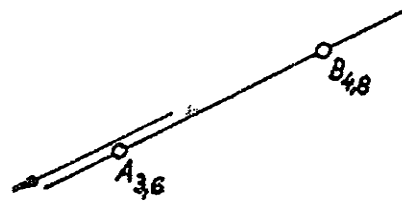
$$AB = \sqrt{(0,04 \cdot 250)^2 + 1,2^2}$$

innen $AB = 10,07\text{m}$ valamint $\epsilon = \operatorname{Arctg} \left(\frac{1,2}{0,04 \cdot 250} \right) = 0,12$ és így $\epsilon = 6,84^\circ$. Ha az egyenes vetületén felvesszünk egy u_k pontot, amely az $A_{3,6}$ ponttól $5,6\text{cm}$ távolságra van, akkor ennek k kótáját is meg tudjuk határozni (3.ábra), hiszen ekkor $\overline{AU} = 0,056 \cdot 250\text{m}$ és $\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\overline{UU}}{\overline{AU}} = 0,12$. Ebből $\overline{UU} = 0,12 \cdot \overline{AU} = 0,12 \cdot 0,056 \cdot 250\text{m}$; $\overline{UU} = 1,68\text{m}$, tehát $k = (3,6 + 1,68)\text{m} = 5,28\text{m}$ adódott az U pont kótájára. Most keressük meg az egyenes 4-es főszintsíkjában levő V pontjának vetületét (3.ábra)! Minthogy

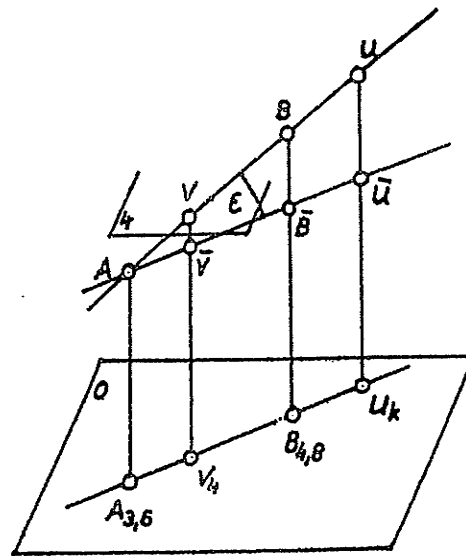
$$\frac{\overline{VV}}{\overline{AV}} = \operatorname{tg} \epsilon = 0,12 \text{ és } \overline{VV} = 0,4\text{m}, \text{ tehát } \overline{AV} = \frac{\overline{VV}}{\operatorname{tg} \epsilon} = \frac{0,4}{0,12} = 3,33\text{m},$$

aminek rajzi hossza $\frac{3,33}{250}\text{m} = 1,33\text{cm}$.

Amennyiben az előbbi feladatokat szerkesztéssel akarjuk végrehajtani, akkor ez oly módon lehetséges, hogy az egyenes vetítősfkját az A ponton áthaladó 3,6-es kótájú

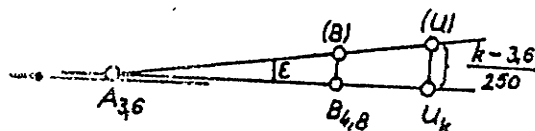


2.ábra



3.ábra

szint síkba forgatjuk. Az AB szakasz leforgatottja annak a derékszögű háromszögnek lesz az átfogója, amelynek egyik befogója az $A_{3,6}B_{4,8}$ képszakasz, másik befogója pedig a $\overline{BB} = 1,2\text{m}$ -nek az $M = 1 : 250$ méretarány szerint megfelelő $\frac{1,2}{250}\text{m} = 0,48\text{cm} = B_{4,8}(B)$ távolság (4.ábra). Az egyenes ϵ dőlésszögét így valódi nagyságban kapjuk meg, de a kis

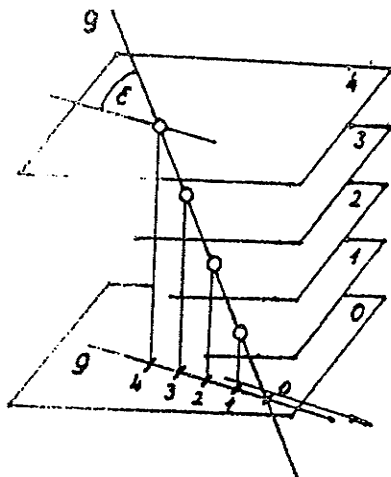


4.ábra

Ezeknél a feladatoknál a magassági viszonyokra alkalmasabb, például $M = 1 : 50$ méretarány használatával csak az ϵ szög torzulna, de a szakaszok hosszának megállapításánál fellépő pontatlanságok nagy mértékben csökkennének: az U_k pontnál a k kóta illetve a V_4 pont vetületének kijelölése sokkal pontosabbá válik. (Természetesen nem minden feladatnál lehet a magassági léptéket megváltoztatni.)

Az egyenes graduálása

Az ábrázolási gyakorlatban célszerű (és ezért a kótás ábrázolásban szokásos) arra törekedni, hogy az egyenest egész kótájú pontjaival ábrázoljuk. Az egyenes ábrázolásánál azonban, miként lehetséges az egyenes valamely főszint síkba eső pontját meghatározni. A gyakorlatban az egyenes kettőnél több, egymásután következő főszint síkban elhelyezkedő **szintpontját** szokás feltüntetni: a szomszédos szintpontok egymástól egyenlő távolságban helyezkednek el, mint a létrafokok. Ezért ezen főszintpontoknak az egyenes vetületén való kijelölését **graduálásnak** mondjuk. Az egyenes főszintpontjainak a vetületét az egyenes **osztópontjainak**, az egymásután következő osztópontok közötti távolságot **osztóköznek** nevezzük. Az 5.ábra a g egyenes graduálását szemlélteti, a g egyenest a 0. főszint síkra



5.ábra

vetítjük és az egyenes 0.1.2.3.4. főszint síkokkal alkotott metszéspontjainak vetületeit a 0, 1, 2, 3, 4-es kóttákkal jelöljük (osztópontok). A graduálás elvégzéséhez tehát egy osztópont és az osztóköz ismerete elegendő. Az osztóköz tehát egy olyan szakasznak a vetülete, amelynek végpontjai között egységnyi (1 méternyi) a magasságkülönbség; az osztóközt k -val jelöljük. (A graduálást természetesen lehet más egységre is vonatkoztatni, eszerint lehet pl. 10 méterenként vagy akár 1 dm-ként elhelyezett főszint síkokra vonatkozó graduálásról is beszélni.) Az ábrázolt egyenes k osztóköze és a hozzá tartozó egységnyi magasságkülönbség

hányadosa nyilván az egyenes ϵ dőlésszögének kotangensét adja: $\text{ctg } \epsilon = \frac{k}{1} = k$. Az osztóköz k' rajzi hosszát $M = 1 : a$ méretarányú ábrázolás esetén – a korábban tárgyaltak szerint – a $k' = \frac{k}{a}$ -ból tudjuk kiszámítani, ami méterben kifejezve: $k' = \frac{\text{ctg } \epsilon}{a}$ méter.

Mínt hogy $\frac{1}{4}$ méter az 1 méter rajzi hosszát jelenti, ezért azt is mondhatjuk, hogy az ϵ dőlésszögű egyenes osztóközének rajzi hosszát az 1 méter rajzi hosszának és a dőlésszög kotangensének a szorzata adja.

A gyakorlatban az egyenes – és később a sík – térbeli helyzetét nem a dőlésszöggel, hanem annak kotangensével, a *rézsűvel* adják meg. Például, ha egy egyenes rézsűje $r = \frac{2}{3}$, ez azt jelenti, hogy a 2 egységnyi vetületi hosszhoz 3 egységnyi magasságkülönbség tartozik. Bizonyos esetekben a *lejtést* adják meg a térbeli helyzet jellemzésére, amit a dőlésszög tangense ad meg, és így a rézsű reciproka. Beszélnek még *százalékos* illetve *ezrelékes lejtésről* is. Egy egyenes lejtése $p\%$ -os, ha 100 m vetületi hosszhoz p méter magasságkülönbség tartozik. Ugyanígy egy egyenes lejtése q ezrelékes, ha 1000 m vetületi hosszhoz q méter magasságkülönbség tartozik.

Gyakorló példák egyenes graduálására

Megjegyzés: Mindegyik gyakorló példa két részből áll, az *a*, részben kidolgozva mutatjuk be a feladatot, míg a *b*, részben ugyanazon példa megoldását – más adatokkal – az olvasóra bízuk.

1. A *P* ponton áthaladó, vetületével és lejtirányával adott α dőlésszögű egyenesen jelöljük ki a *P* pont alatt és felett levő egész koordinátájú pontokat! (6.ábra)

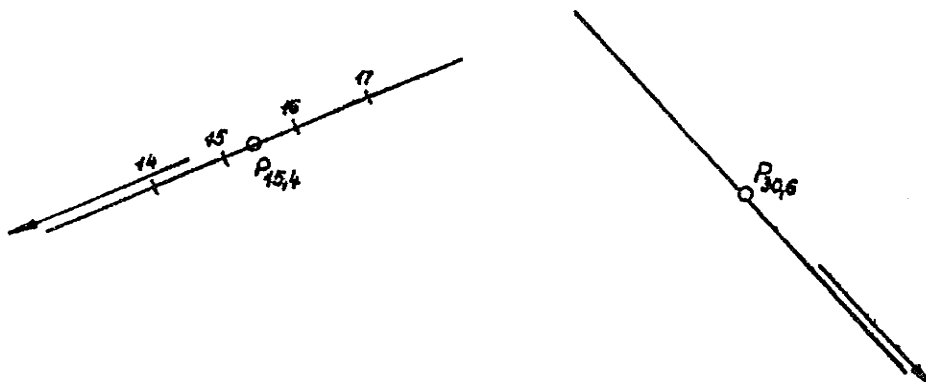
a, Kiindulási adatok:

$$P_{15,4} \quad \alpha = 8^\circ \quad M = 1 : 500$$

b, Kiindulási adatok:

$$P_{30,6} \quad \alpha = 12^\circ \quad M = 1 : 200$$

Mivel $\text{ctg } 8^\circ = 7,1$ ezért $h = 7,1\text{m}$ és $k' = \frac{710}{500} = 1,42\text{cm}$. A 15-ös osztópont kijelöléséhez: $0,4 \cdot k' = 0,57\text{ cm}$. Ezután már k' -vel graduálhatunk.



6.ábra

2. Számítsuk ki a *p*%-os emelkedésű egyenes dőlésszögét és osztóközének rajzi hosszát, ha $M = 1 : a$.

a, Kiindulási adatok:

$$p = 8\% \quad a = 3600$$

b, Kiindulási adatok:

$$p = 12\% \quad a = 2500$$

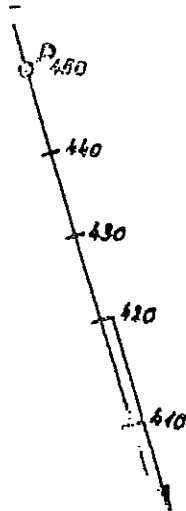
Mivel $\text{ctg } \varepsilon = \frac{100}{8} = 12,5$ ezért $\varepsilon = 4,57^\circ$ és $k = 12,5\text{m}$. Így $k' = \frac{1250}{3600} = 0,347\text{cm}$.

3. Adott az egyenes képe, lejtiránya, *P* pontja és *r* rézsúje. Graduáljuk az egyenest, ha $M = 1 : a$! (7.ábra)

a, Kiindulási adatok:

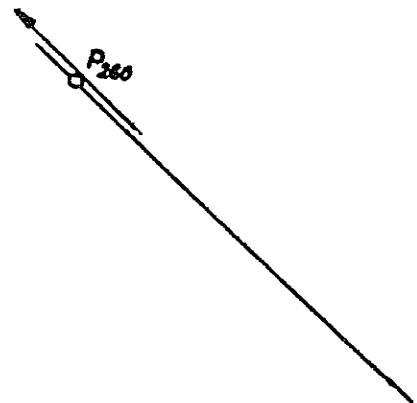
$$P_{450} \quad r = 3 : 4 \quad a = 500$$

Mivel $\operatorname{tg} \epsilon = \frac{3}{4} = 0,75$ ezért $k = 0,75$
és $k' = \frac{75}{500} \text{ cm} = 0,15 \text{ cm}$. Mivel az 1
méterenkénti graduálásra kapott osztóköz
túlágazóan kicsinek adódott, ezért célszerű
a graduálást 10m-enként elvégezni.



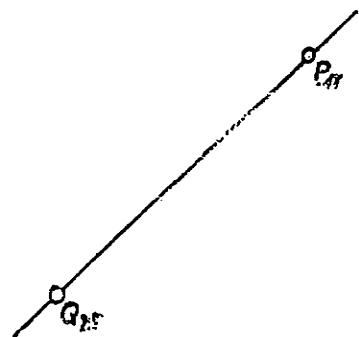
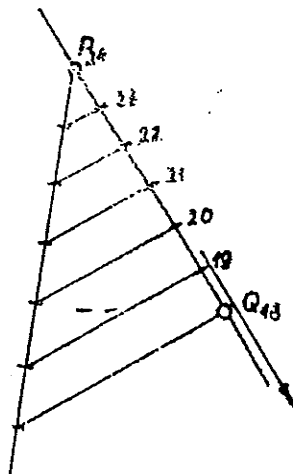
b, Kiindulási adatok:

$$P_{260} \quad r = 3 : 2 \quad a = 900$$



7.ábra

Adott az egyenes képe P és Q pontjaival. Szerkesszük meg az egyenes 1 méterenkénti graduálását és jelöljük ki a lejtirányt! (8.ábra)

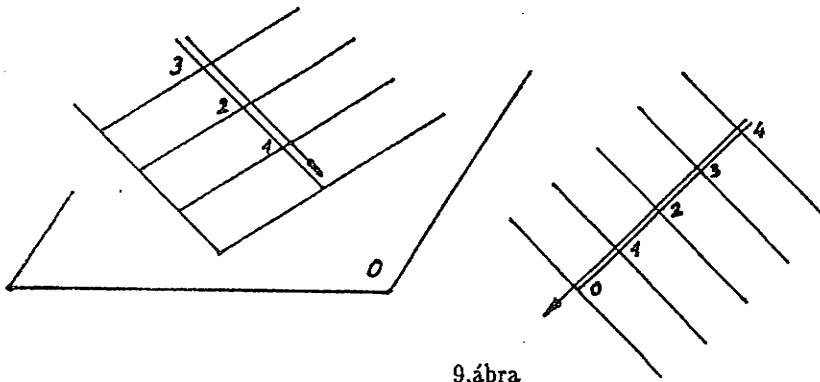


8.ábra

Sík ábrázolása. Illeszkedési feladatok.

A sík ábrázolása a kótás ábrázolásban is – miként a többi ábrázolási eljárásban – meghatározó adatainak ábrázolásával történik. Minthogy a szintsíkokban levő alakzatok valódi méreteiben látszanak az ábrázolásban, a vetítősíkok pedig egy-egy egyenesnek látszanak a képsíkon (alapsíkon), ezért nyilván elegendő azon síkok ábrázolásával foglalkozni, amelyeknek a képsíkkal alkotott ε szögük $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$; ezt a hajlásszöget a *sík dőlésszögének* mondjuk.

A szintsíkok – így a főszintsíkok is – az ábrázolandó síkot egymással párhuzamos egyenesekben, a sík *szintvonalaiban* metszik. A síkokat általában a főszintsíkokba eső szintvonalaival ábrázoljuk (9.ábra).



9.ábra

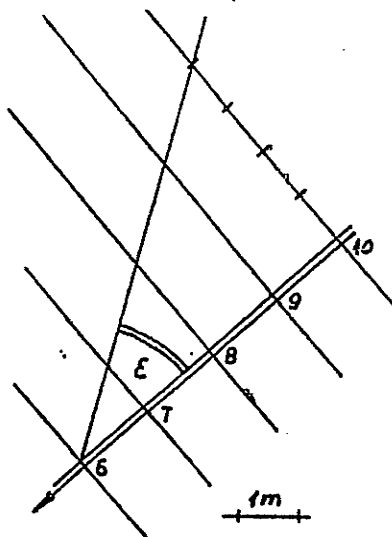
(Nyilván a sík meghatározásához két kótázott szintvonal megrajzolása már elegendő.) A sík esésvonalai – miként a Monge-féle ábrázolásnál már megismertük – a sík szintvonalaira (fővonalaira) merőlegesek, és ez a merőlegesség a vetületben is megmarad. A kótás ábrázolásban egy síknak az esésvonalát kettőzött vonallal és a lejtiránynak megfelelő nyílfejjel szokás megadni. (A sík esésvonalát a sík szintvonalaival graduálják.) A sík megadása tehát lehetséges csupán egyetlen – graduált – esésvonalának megadásával. A téreometriai előismereteinkből evidens, hogy a sík dőlésszöge egyenlő esésvonalának dőlésszögével. Ezen megjegyzés alapján beszélhetünk egy sík rézsűjéről, amely megegyezik az esésvonal rézsűjével. Hasonlóan használhatjuk az osztóközt és annak képi hosszát a sík ábrázolásánál is. A 10.ábrán bemutatjuk, hogy a sík esésvonalainak és a rajzi lépték ismeretében hogyan lehet az esésvonalon áthaladó vetítősíknak valamelyik szintsíkbá forgatásával a sík dőlésszögét meghatározni.

A térelemek kölcsönös helyzetének megállapítását a kótás ábrázolásban megkönnyíti az a körülmény, hogy az egyeneseket és a síkokat ill. azok esésvonalait graduált képükkel adjuk meg.

Pont és egyenes illeszkedése: Annak eldöntése, hogy egy pont egy egyenesen rajta van-e vagy sem, már lényegében az egyenes graduálásával kapcsolatosan mondottakból közvetlenül adódik.

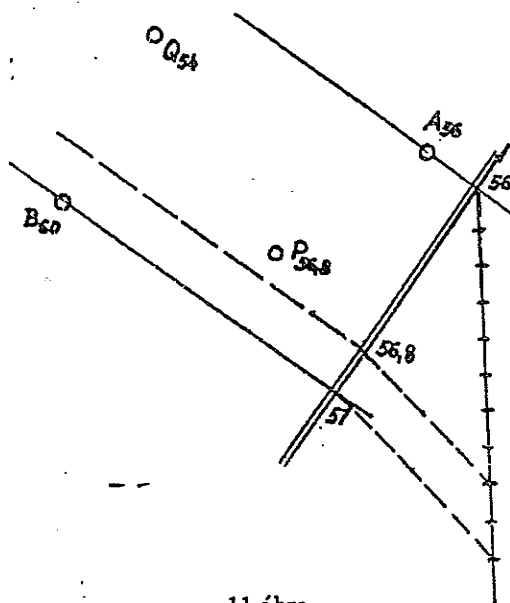
Pont illetve egyenes és sík illeszkedése: Egy pont nyilvánvalóan pontosan akkor van

egy síkon, ha a képén áthaladó szintvonal kótája megegyezik a pont kótájával.

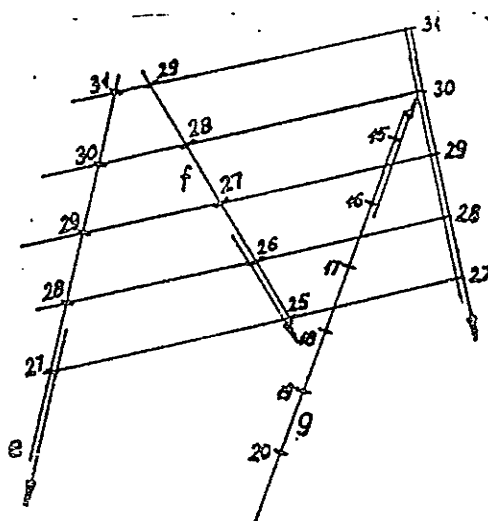


10.ábra

Ez bizonyos esetekben, például főszint síkokban levő pontok esetén könnyen eldönthető (11.ábra): Például az A_{56} pont nyilván a síkon van, de a B_{60} pont nincs az ábrázolt síkon. Annak érdekében, hogy a $P_{56,8}$ pontról pontosan megtudjuk állapítani a síkhoz viszonyított kölcsönös helyzetét, meg kell szerkeszteni a sík 56,8-es szintvonalát (ld. 11.ábra).



11.ábra



12.ábra

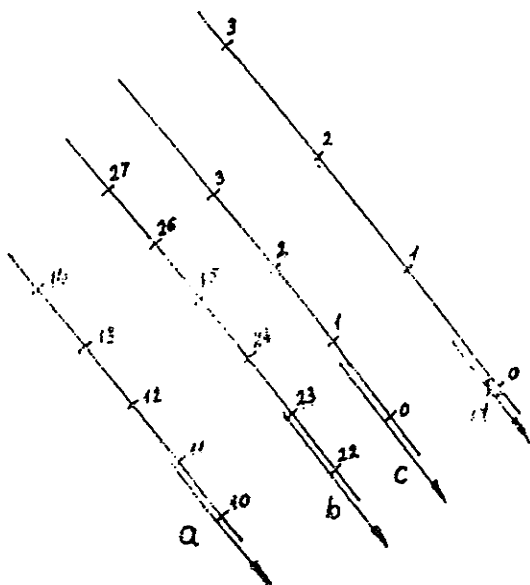
Mint hogy az 56,8-es szintvonal nem megy át a $P_{56,8}$ ponton, ezért a pont nem lehet a

síkon. Az ábrán feltüntetett Q_{34} pont nyilvánvalóan nem lehet a sík pontja, minthogy képe az 56-os és 57-es szintvonalak közé esik.

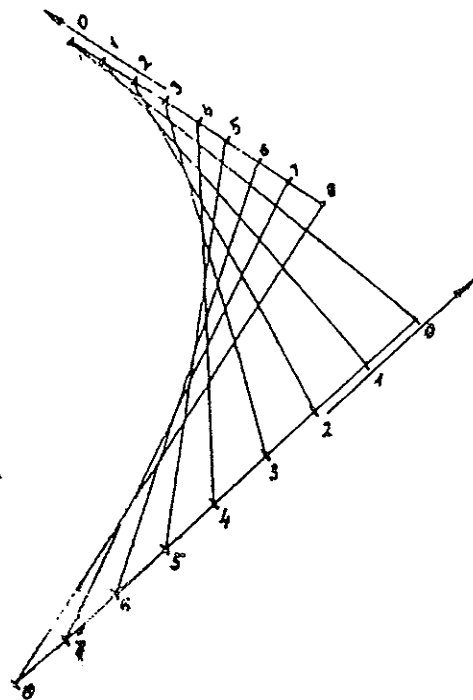
Egy egyenes akkor és csakis akkor lehet az ábrázolt síkban, ha graduált képén levő azonos kótájú szintpontokban találkoznak a sík megfelelő szintvonalai az egyenes képével. A 12. ábrán ábrázolt síkban van az e egyenes, míg az f és g egyenesek nincsenek e síkban.

Két egyenes kölcsönös helyzete: Két egyenesről könnyen megállapítható, hogy egy síkban vannak-e. Két egyenes pontosan akkor egysíkú, ha az azonos kótájú pontjait összekötő egyenesek egymással párhuzamosak, ezek a két egyenes síkjának szintvonalai. Ha ezen egyenesek képei metszik egymást, akkor ez a két egyenes is metsző, a metszéspont képéből az egyenes graduálásánál ismertetett módon határozzuk meg a metszéspont kótáját. Ha a két egyenes képe párhuzamos, akkor a két térbeli egyenes is párhuzamos; ezt másképpen megfogalmazva azt mondhatjuk, hogy két egyenes akkor párhuzamos egymással, ha képeik párhuzamosak, lejtirányuk megegyezik és osztóközeik egyenlők. A 13. ábrán a és b egyenesek nyilván párhuzamosak, de c és d egyenesek nem párhuzamosak annak ellenére, hogy képeik párhuzamosak és lejtirányuk is megegyezik.

Mint ismeretes, ha két egyenesnek nincs közös síkja, akkor e két egyenes kitérő helyzetű. Ennek megállapítása az imént mondottaknak egyszerű folyamánya. Két kitérő egyenes azonos kótájú pontjait összekötő egyenesek a két egyenesnek a képsíkkal párhuzamos közös metszői (transzverzálisai), amelyek egy nevezetes felületet – egy ún. hiperbolikus paraboloidot vagy nyeregfelületet – határoznak meg (14. ábra). (A hiperbolikus paraboloid felületre vonatkozóan l. Strommer Gyula: Ábrázoló geometria c. tankönyve 337.–338., 483–489. old. és 375. 545–548. old., vagy Strommer Gyula: Geometria c. tankönyve 309, 632, 640, 645. old.)



13. ábra

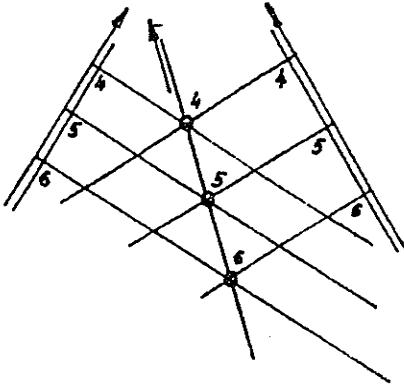


14. ábra

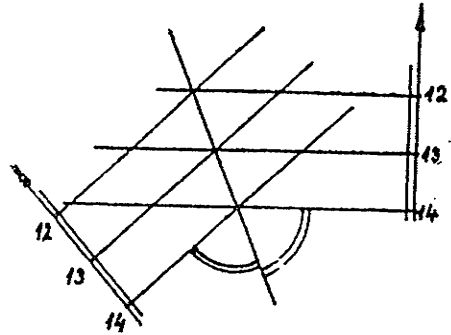
Metszési alapszerkesztések.

1. Két sík metszésvonalának megszerkesztése:

Két általános helyzetű sík két közös pontját megkapjuk, ha meghatározzuk két különböző szintben levő szintvonalak metszéspontját. Minthogy egyazon szintben levő szintvonalak képi metszéspontja a két szintvonal közös pontjának a képe, ezért a két sík metszésvonalán helyezkednek el az azonos kótájú szintvonalak metszéspontjai (15.ábra). Ha a két sík egyenlő dőlésszögű, akkor az esésvonalak osztóközei egyenlők,



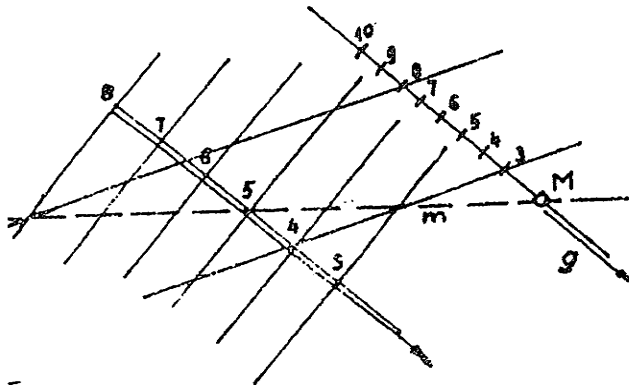
15.ábra



16.ábra

következésképpen a metszésvonal képe felezi a szintvonalak képe által bezárt szöget (16.ábra). A képsíkkal párhuzamos színtsíkok ill. a képsíkra merőleges vetítősíkok esetével nem foglalkozunk, mivel e síkokkal kapcsolatos metsződési kérdések triviálisan egyszerűek.

2. Sík és egyenes metszéspontjának szerkesztése:



17.ábra

Egy adott síknak egy adott egyenessel alkotott metszéspontját – a térgeometria szerkesztéseknél tárgyalt módon – úgy szerkesztjük meg, hogy az egyenesre olyan alkalmas (de geometriai szempontból tetszőleges) síkot fektetünk, amelynek az adott síkkal

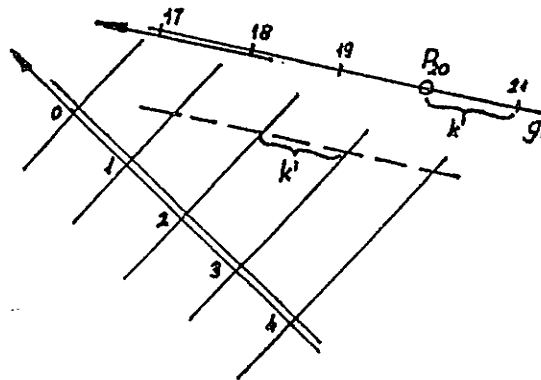
alkotott metszésvonalát meg tudjuk szerkeszteni (lásd 17. ábra). Az m metszésvonal az adott egyenest a keresett metszéspontban metszi. Példánkban az adott sík esésvonalával van meghatározva, az adott g egyenest pedig graduált képével adtuk meg. A g egyenes 8-as és 3-as kótájú pontjain át húzott párhuzamosok a g egyenesre fektetett sík ilyen kótájú szintvonalai. Ha az adott sík 8-as és 3-as kótájú szintvonalai ismertek, akkor az előző alapszerkesztés szerint adódik az M metszéspontot kijelölő m metszésvonal. A metszéspont kótáját az egyenes graduálásával kapcsolatosan mondottak szerint határozzuk meg.

Párhuzamos térelemek

Két egyenes párhuzamosságáról már szoltunk korábban, amikor két egyenes kölcsönös helyzetét és ennek ábrázolásbeli feltételeit vizsgáltuk.

Két párhuzamos síkot a szintsíkok párhuzamos és egymástól egyenlő távolságú szintvonalakban metszik, következésképpen a párhuzamos síkok esésvonalai is párhuzamosak, továbbá azonos lejtirányú és egyenlő rézsűjű egyenesek. Ezzel tehát megkaptuk síkok párhuzamosságának rajzi feltételét.

Egyenes és sík párhuzamosságának a térgeometriából ismert feltétele szerint egy egyenes akkor párhuzamos egy síkkal, ha van a síkban a tekintett egyenessel párhuzamos egyenes. A rajzi feltételek áttekintése céljából oldjuk meg a következő feladatot: Adott egy sík esésvonalával és a P_{20} pont kótás képén át megrajzolt g egyenes. Graduáljuk ezt az egyenest úgy, hogy az adott síkkal párhuzamos legyen (18. ábra).



18. ábra

Húzzunk a g -vel párhuzamos tetszőleges egyenest, amely metszi a sík szintvonalait. Könnyen látható, hogy két egymásutáni szintvonalal alkotott metszéspontok távolsága a g egyenes graduálásához szükséges k' képi osztóköz hosszát adja meg. E távolsággal graduálhatjuk a g egyenest és kijelöljük a lejtirányt.

- a,**



0 P₃

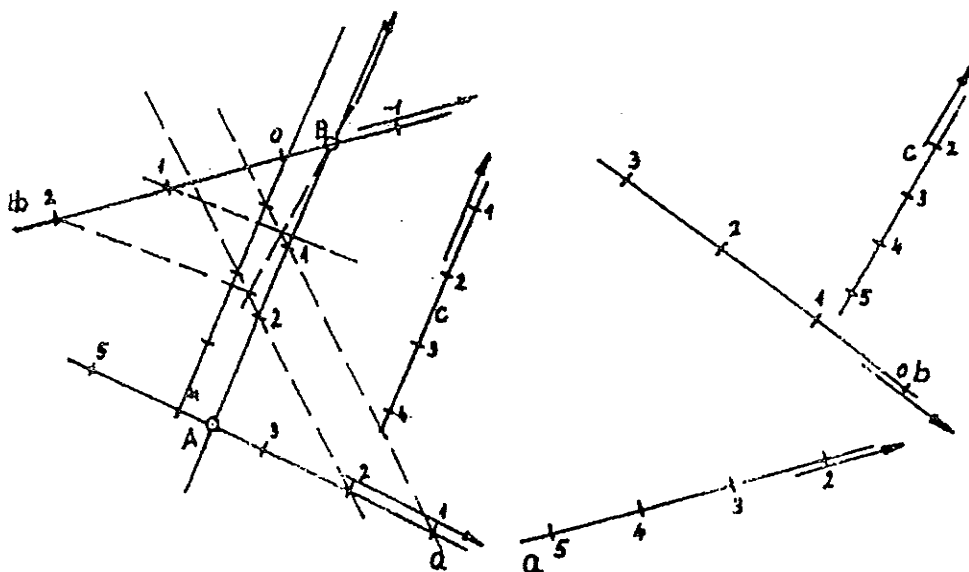
Adottak az a, b, c páronként kitérő egyenesek. Szerkesszük meg az a és b egyenesek c -vel párhuzamos transzverzálisát. (20.ábra)

- Az a egyenes 4-es pontján keresztül megrajzoljuk a c egyenessel párhuzamos egyenes graduált képét, továbbá meghúzzuk e két metsző egyenes által meghatározott sík 1-es és 2-es szintvonalát. A b egyenesre fektetett tetszőleges sík 1-es és 2-es szintvonalait megrajzolva közvetlenül adódik e két sík metszésvonala, amely a b egyenesből kijelöli a keresett transzverzális B pontját. B ponton át a transzverzális irányával párhuzamosan húzunk, amely az a egyenest A pontban metszi. Az AB transzverzális

a feladatban elsőként meghatározott sík graduálja. (A b, feladat megoldása is a fenti gondolatmenet szerint megy.)

a,

b,

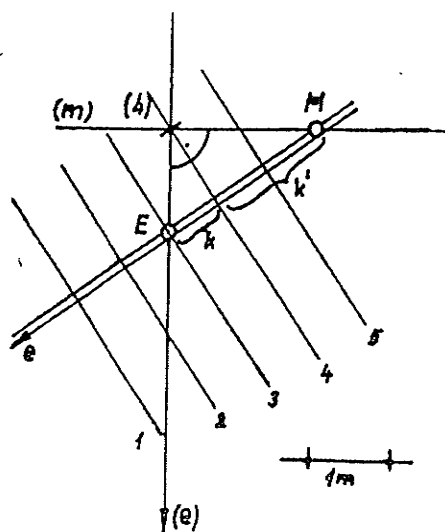


20.ábra

Méretes alapszerkesztések

1. Szakasz hosszának megszerkesztése. Adott hosszúságú szakasz. Felméreése adott egyenesre.

Ha adott egy graduált egyenesen egy szakasz, és ismerjük az ábrázolásban az egységnyi szakasz (méter) rajzi hosszát, azaz a léptéket, akkor az egyenesen áthaladó vetítősíkot bármelyik színtsíkra be lehet forgatni. Ehhez csupán az egyenesen levő tetszőleges pont és a tekintett színtsík magasságkülönbségét kell meghatározni a megadott lépték ismeretében. Legyen például az egyenes 3-as, 4-es, ... kótájú pontjaival graduálva és az egyenes képén az A és B pontok képe ismert (21.ábra). A 3-as főszíntsíkra forgatjuk az egyenes vetítősíkját, akkor az 5-ös szintben levő pont és a 3-as kótájú pont magasságkülönbsége 2 egység, amit az 5-ös kótájú pontban az egyenes képére állított merőlegesre felmérve az (5) leforgatott pontot kapjuk, míg $3=(3)$. A $(3)(5)$ egyenes az adott egyenes leforgatottja a 3-as színtsíkra. Az A és B pontokban a képegyenesre merőleges egyenesek az (A) és (B) pontokban metszik a leforgatott egyenest, amelyen minden szakasz, így az AB szakasz is



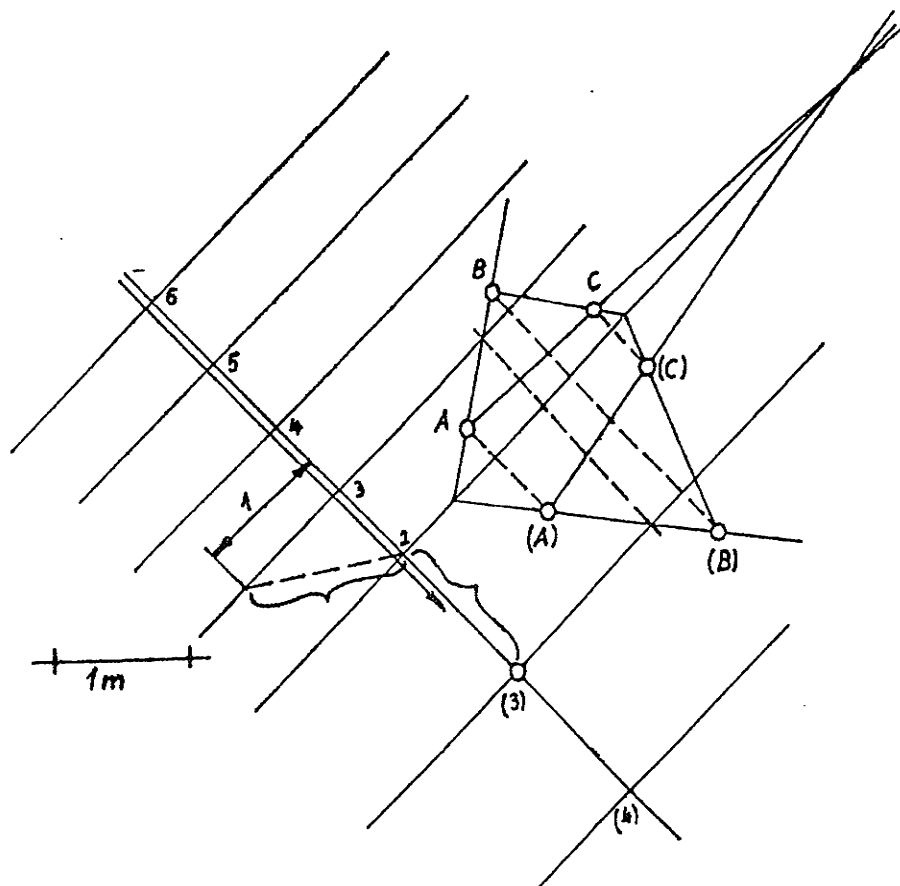
23.ábra

3, Sík leforgatása és visszaforgatása.

Síknak valamelyik szintvonalát vetítősíkok esetén könnyen el tudtuk végezni korábbi feladatainkban. Most általános helyzetű síknak képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatásával foglalkozunk, ha ismerjük a sík szintvonalait és a rajzi léptéket.

Legyen adva egy sík szintvonalával és esésvonalával (24.ábra). Az ábrázolt síkot bármelyik szintvonal körül a képsíkkal párhuzamos helyzetbe lehet forgatni. Példánkban a 2-es főszintvonal körül forgatjuk le a síkot. Minthogy minden pont a leforgatásban a 2-es szintvonalra merőleges síkban fordul el, ezért egy pont képét és forgatottját összekötő egyenes a szintvonalakra merőleges, továbbá a szintvonalak leforgatottjai is egymással párhuzamos, egyenlő távolságú egyenesek. Az esésvonal 3-as pontja nyilván egy egységgel van a 2-es szint felett, így az ábrán a 2;3 oldalra az 1 m-es távolság képi hosszával szerkesztett derékszögű háromszög (szaggatott vonallal megrajzolt) átfogója a 2-es és 3-as szintvonalak térbeli távolságát adja. Ennek ismeretében a 3-as, 4-es szintvonalak leforgatottjai is megrajzolhatók. A kép és a leforgatott közötti kapcsolatot itt is merőleges affinitás, tehát egy egyenes képe és leforgatottja egymást a forgástengelyen metszi. E merőleges affinitás segítségével szerkesztettük meg a leforgatottban megrajzolt $(A)(B)(C)$ szabályos

háromszög képét (visszaforogatottját).



24. ábra

A metszési és a méretes alapszerkesztésekből következik, hogy a kótás ábrázolási módszerben is mindazon feladatok megfogalmazhatók és megoldhatók, amelyek a Monge-féle kétképsíkú ábrázolásban megoldhatók. A továbbiakban egy megjegyzés után néhány méretes viszonyokkal kapcsolatos feladat megoldását fogjuk bemutatni.

Két egyenes merőlegességére vonatkozóan abban a speciális esetben láttunk kritériumot, amidőn a két egyenes azonos vetítősíkban van. Mint láttuk, két ilyen merőleges egyenes az általános helyzetű síkra merőleges egyenes és a sík esésvonala (1.23. ábra). Megjegyezzük, hogy ennél általánosabb összefüggés is megállapítható a merőleges egyenesek osztóközei között, amely speciális esetként a fentiekben említett merőlegességi kritériumot automatikusan kiadja. Nyilván elég két metsző egyenesre belátni az összefüggést, sőt az sem jelenti az általánosság megszorítását, ha feltételezzük, hogy a két egyenes egy főzintsíkban, pl. az 1-es főzintsíkban metszi egymást. Legyen az a és b egyenesek közös

pontja E_1 , a képsíkot pedig A ill. B pontokban vesszük (25. ábra). Ekkor az $AE_1 = k_a$ és $BE_1 = k_b$ éppen az a ill. b egyenesek osztóközzeit adják a képsíkon. Az ABE derékszögű háromszögben nyilván

$$AB^2 = AE^2 + BE^2$$

illetve a merőleges vetítés miatt

$$AE^2 = k_a^2 + 1 \text{ illetve } BE^2 = k_b^2 + 1.$$

Az ABE_1 háromszögre felírva a koszinusz tételt

$$AB^2 = k_a^2 + k_b^2 - 2k_a \cdot k_b \cdot \cos \phi,$$

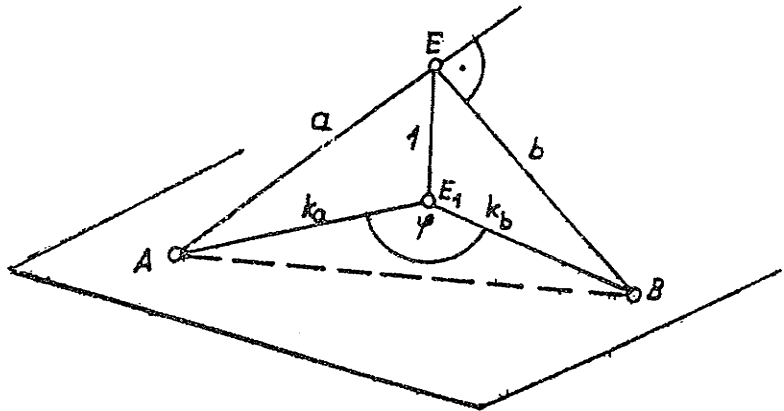
ahol ϕ az a és b egyenesek vetületben adódó hajlásszögének kiegészítőszöge. A második összefüggést elsőbe beírva az előbbi összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$k_a^2 + 1 + k_b^2 + 1 = k_a^2 + k_b^2 - 2k_a \cdot k_b \cdot \cos \phi$$

amiből

$$k_a \cdot k_b = -\frac{1}{\cos \phi}$$

amiből



25. ábra

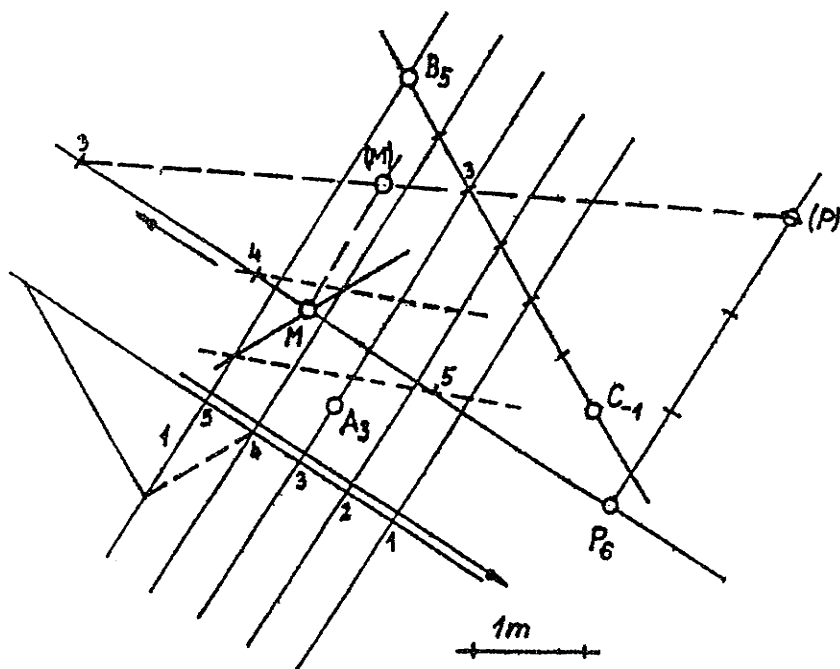
Tehát két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha osztóközük szorzata egyenlő a képek által bezárt szög kiegészítő szögéhez tartozó koszinuszérték negatív reciprokával.

Példák egyszerű méretes feladatok megoldására

1. Pont és sík távolságának megszerkesztése:

Szerkesszük meg a P_6 pontnak az A_3, B_5, C_{-1} pontok által meghatározott síktól való távolságát (26.ábra)!

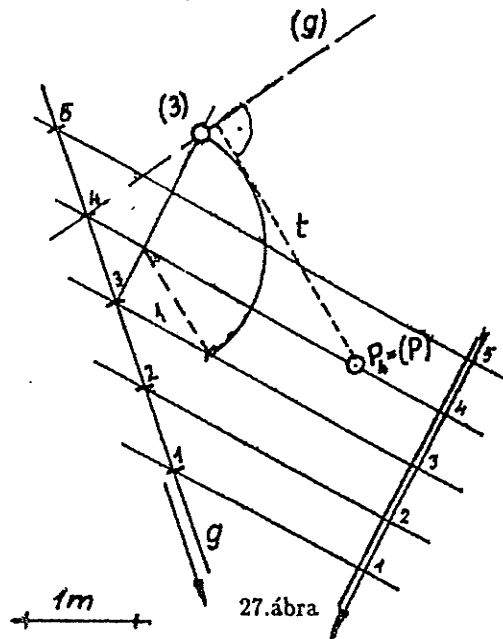
Először a B_5C_{-1} egyenes 3-as szintben fekvő pontját határozzuk meg, hogy az ABC sík szintvonalait meg tudjuk rajzolni.



26.ábra

Ezután P_6 pontból merőleges egyenest szerkesztünk a síkra, majd meghatározzuk a síkkal alkotott M metszéspontját. Végül a P_6M szakasz hosszát szerkesztjük meg azáltal, hogy a merőleges vetítősíkját a 3-as szint síkba forgatjuk: $\overline{(P)}(\overline{M})$.

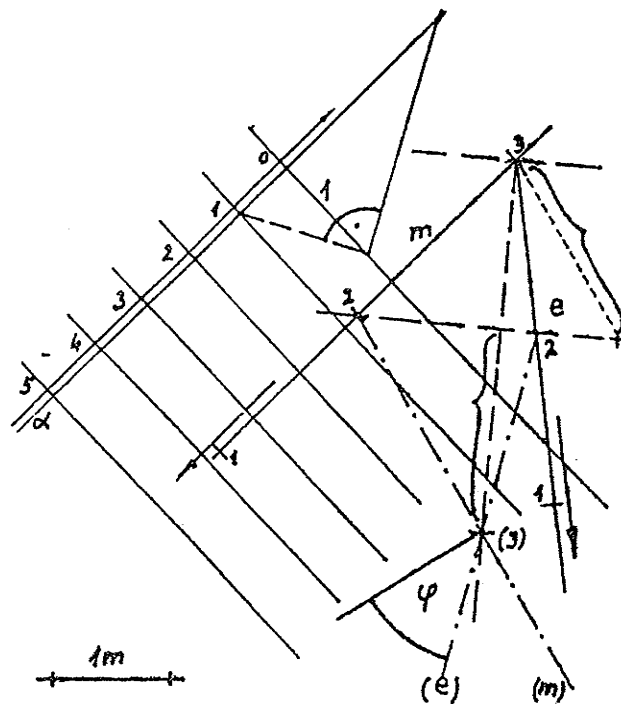
2. Pont és egyenes távolságának megszerkesztése: Szerkesszük meg a P_4 pont és a gradultt képével adott g egyenes távolságát (27.ábra)!



Megszerkesztjük a P_4 pont és a g egyenes által meghatározott sík szintvonalait, majd a síkot egyik szintvonala körül (az ábrán a 4-es szintvonal körül) annak főszíntíkjába forgatjuk. A leforgatott helyzetben leolvasható a P pont és a g egyenes t távolsága.

3. Egyenes és sík hajlásszögének megszerkesztése:

Szerkesszük meg a graduált képével adott e egyenes és esésvonalával adott α sík hajlásszögét (28.ábra)!



Térgeometriai ismereteinkből tudjuk, hogy egy sík és egy egyenes hajlásszögének pótszögével egyenlő az egyenes és a sík normálisa által bezárt szög. Ennek megfelelően az e egyenes 3-as magasságú pontján áthaladó és az α síkra merőleges m normális graduált képét szerkesztjük meg. Az m és e egyenes síkját a 2-es szintvonala körül képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk. A leforgatásban az (e) és (m) hajlásszögének pótszögét megszerkesztve adódik az α sík és e egyenes ϕ hajlásszöge.

28.ábra

Megjegyzés: E feladatban az adott α síkra merőleges síkot is meghatároztunk, hiszen az e egyenes és az m normális síkja az α síkra merőleges, minthogy tartalmaz olyan egyenest (m -et), amely merőleges az α síkra.

4. Két sík hajlásszögének megszerkesztése:

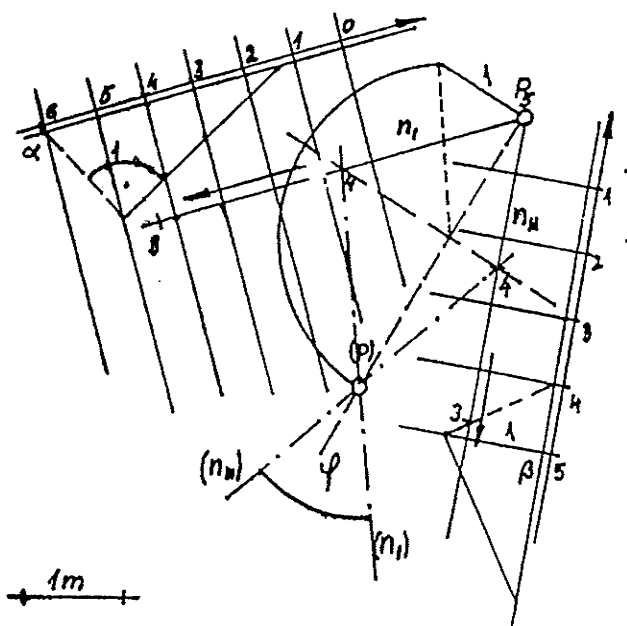
Adott esésvonalaival az α és β sík. Szerkesztjük meg a két sík hajlásszögét (29. ábra).

A térgeometriából ismeretes, hogy két sík hajlásszögét megadja (a tér tetszőleges pontján áthaladó) normálisaik hajlásszöge.

Az ábrán felvesszük a P_5 pontot, majd merőlegest szerkesztünk a P_5 ponton át először az α síkra (n_I normális) azután a β síkra (n_{II} normális).

A két normális által meghatározott sík 4-es szintvonala körül a normálisok síkját képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk:

(P); az (n_I) és (n_{II}) hajlásszöge ϕ az α és β síkok hajlásszögét adja.



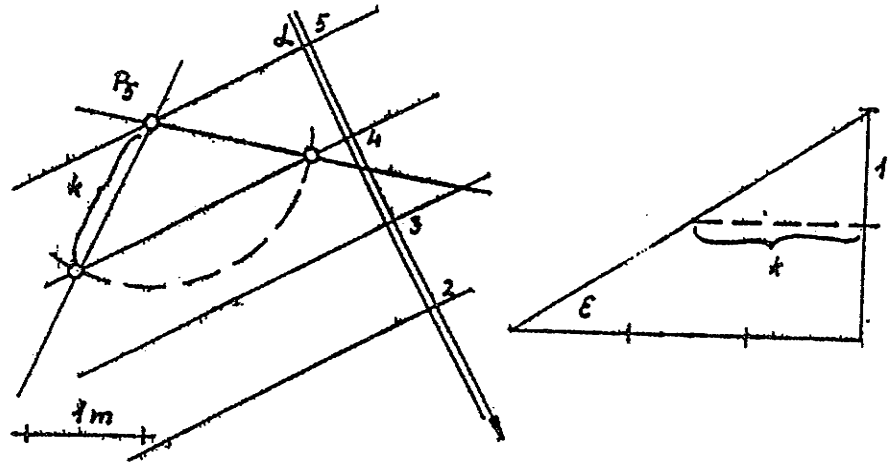
29. ábra

5. Adott síkban adott rézsűjű (lejtésű) egyenes szerkesztése:

Az α síkot esésvonalával adjuk meg, a sík 5-ös szintvonalán vesszük fel a P pontot. A síkban $r = 3 : 2$ rézsűjű egyenest kell megszerkesztenünk a P ponton keresztül, ha adott az 1m rajzi hossza (30. ábra).

A lépték ismeretében megszerkesztjük az $r = 3 : 2$ rézsűjű egyenes ϵ dőlésszögét, s ennek alapján az ilyen egyenes k osztóközét. A P_5 pont körül k sugárral rajzolt kör a 4-es szintvonalat két pontban metszi. E pontokat a P_5 ponttal összekötve az adott α sík keresett egyeneséhez jutunk. Nyilvánvaló, hogy a síkra illeszkedő legnagyobb dőlésszögű egyenes az esésvonal, a térbeli egyenes dőlésszöge ennél

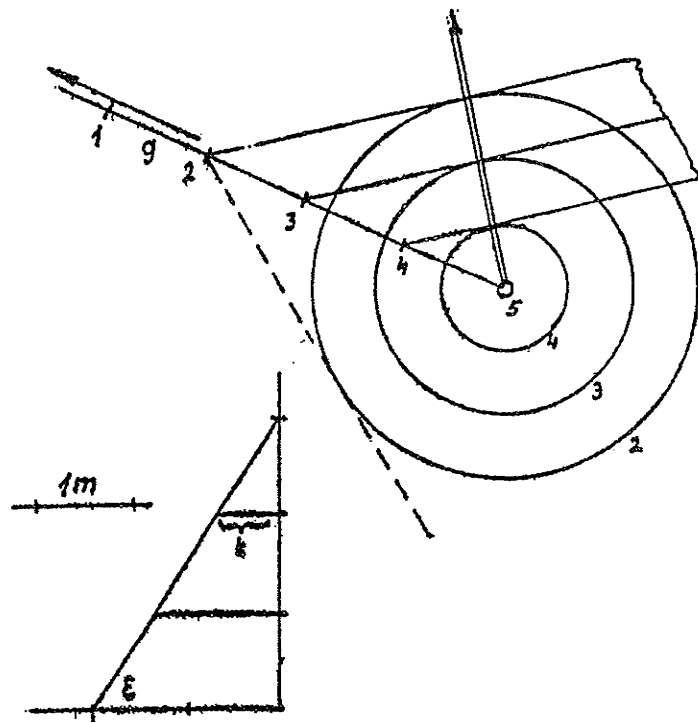
mindig kisebb.



30.ábra

6. Adott egyenesre előírt rézsűjű sík fektetése:

Adott α g egyenes gradult képével, az $1m$ rajzi hossza, továbbá az $r = \frac{2}{3}$ rézsűérték. Szerkesszük meg azokat az $r = \frac{2}{3}$ rézsűjű síkokat, amelyek tartalmazzák a g egyenest (31. ábra)!

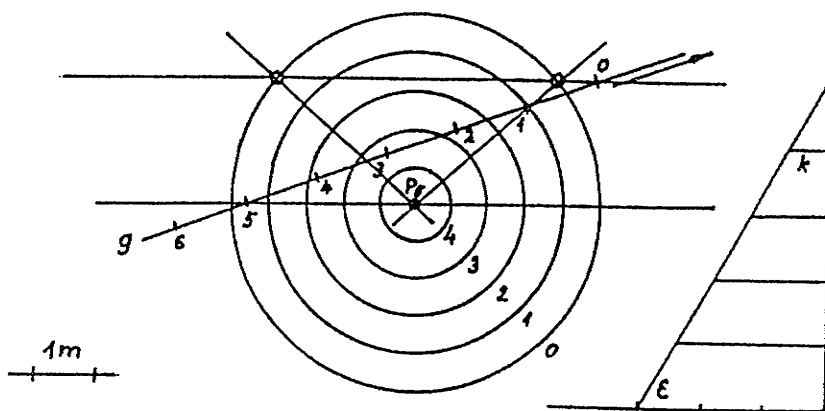


31.ábra

Az $r = \frac{2}{3}$ ismeretében megszerkesztjük a keresett síkok ε dőlésszögét. Egy ponton, pl. az egyenes 5-ös magasságú pontján áthaladó ε dőlésszögű síkok olyan forgáskúp érintősíkjai, amelyek tengelye vetítőegyenese és élnyílásszöge az ε pótszöge ($90^\circ - \varepsilon$). E kúpnak a főszint síkban levő szintkörei koncentrikus körök, amelyeknek sugara szintenként k -val változik, ahol k a keresett sík esésvonalának osztóközé. Az ábrán az 5-ös pont körül három szintkört rajzoltunk meg, a legnagyobbik tehát a 2-es főszint síkban van. Az egyenes 2-es pontjából e körhöz érintőt húzva a keresett sík 2-es szintvonalát kapjuk meg. Nyilvánvaló, hogy a keresett sík esésvonalja az a kúpalkotó, amely mentén a sík a kúpot érinti. A feladatnak általában két megoldása van.

7. Adott ponton áthaladó, adott egyenest metsző, adott rézsűjű egyenes szerkesztése:

Legyen az adott pont P_5 , a keresett egyenes rézsűje $r = \frac{3}{5}$, és az adott g egyenesnek ismerjük a graduált képét (32.ábra).



32.ábra

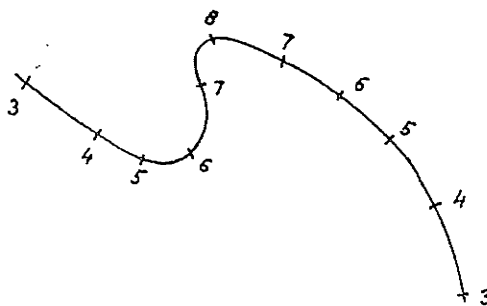
Az 1m rajzi hosszának ismeretében meghatározzuk az $r = \frac{3}{5}$ rézsűjű egyenesek ε dőlésszögét és k osztóközét. Ilyen dőlésszögű P_5 ponton áthaladó egyenesek egy forgáskúp alkotói, amelyek szintkörei P_5 körüli koncentrikus körök, amelyeknek sugara szintenként k -val változnak. Az ábrán megrajzoltuk a kúp szintköreit egészen a 0-ás szintig. A g egyenesnek és a kúpnak a metszéspontjai jelölik ki a P_5 -ből kiinduló keresett kúpalkotókat. E metszéspontokat úgy keressük meg, hogy a g egyenes 5-ös pontját a P_5 ponttal összekötő egyenes a g egyenes és a P_5 pont által meghatározott sík 5-ös szintvonalára; amellyel a g egyenes 0-ás pontján párhuzamosat húzva a 0-ás szintvonal adódik, amely a 0-ás szintkört két pontban metszi. E pontokat a kúp csúcsával összekötve a keresett kúpalkotókat kapjuk, amelyek a g egyenest a kúppal alkotott metszéspontjaiban metszik.

Topografikus felületek és azok konstruktív kezelése.

Topografikus felületek a szintvonalas térképeken ábrázolt terepfelületek, amelyeknek a domborzati viszonyait a főszintsíkokban elhelyezkedő szintvonalalaival jellemzik. A szintvonalak közötti terepfelületet becsléssel egészítjük ki, azt feltételezve, hogy ezek a sávok törés nélküli síma, folytonos görbe felületek. Tehát a topografikus felületek geometriai szempontból csak közelítik a valóságos felületet, de ez a közelítés a gyakorlat számára elegendő lehet.

Térgörbe kótás ábrázolása:

Egy térgörbét oly módon tudunk ábrázolni, hogy megrajzoljuk a görbe merőleges vetületét, és megjelöljük valamint bekötázzuk a görbének a főszintsíkokban levő pontjait. A 33. ábra egy térgörbe kótás vetületét mutatja be.



33. ábra

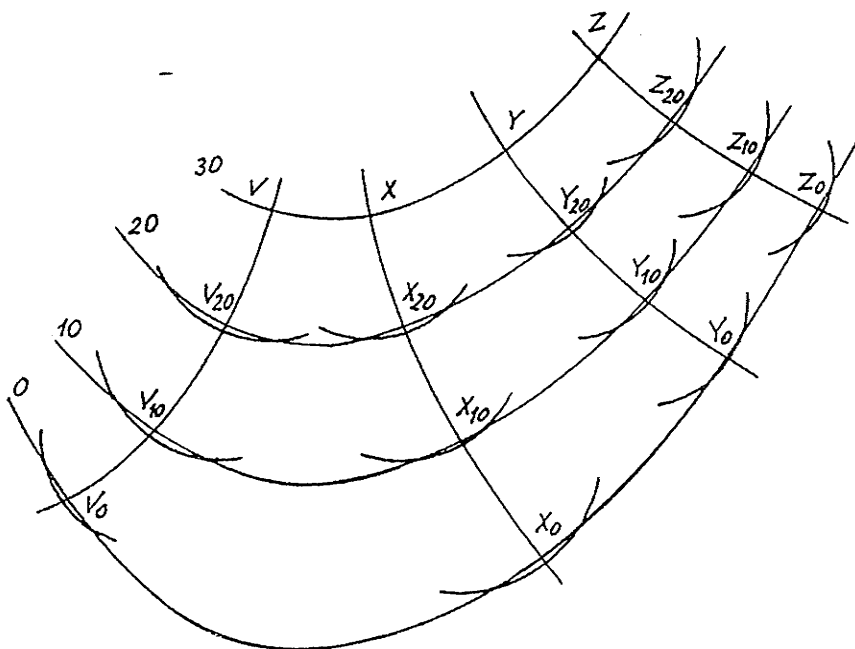
Topografikus felületek ábrázolása:

A topografikus felületek *szintvonalai* természetesen a képsíkkal párhuzamos szintsíkokban levő síkgörbék, így minden pontjuk ugyanazzal a kótával jellemezhető. A szintvonalakat merőlegesen metsző görbék a topografikus felületek esésvonalai, amelyeknek a képe is merőlegesen metszi a szintvonalak képét. A felület esésvonalai már térgörbék, amelyeknek kótázását a szintvonalakkal alkotott metszéspontjaik adják meg.

- Szintvonalalaival adott felület esésvonalainak megszerkesztése:

A 34. ábrán egy felület néhány szintvonalát ábrázoltuk, és feltüntettük a 30-as szintvonal V, X, Y, Z pontjaiból kiinduló esésvonalakat. Egy esésvonal, pl. az X pontból kiinduló esésvonal szerkesztése azon megfontolás alapján történt, hogy e pontból a 20-as szintvonal pontjaihoz különböző hosszúságú utakon juthatunk el; minthogy azonban ezen utak két végpontja közötti magasságkülönbség ugyanannyi (azaz 10 egység), ezért a rövidebb út a vetületben is rövidebbnek adódik. Az esésvonal nyilvánvalóan a legközelebbi út lesz az X pontból a 20-as szintvonalhoz, ennek lesz a vetülete is a legkisebb. Megszerkesztését úgy végezzük, hogy az X pont körül a 20-as szintvonalat két pontban metsző körívet rajzolunk. E körív sugarának megválasztásánál arra is figyelemmel kell lennünk, hogy a két metszéspont elég közel kerüljön egymáshoz, miáltal a 20-as szintvonal egy kis ívét metszi ki. Ennek a kimetszet ívnek az X_{20} felezési pontja van az X kiindulási ponthoz legközelebb. Az X_{20} -ból kiindulva a 10-es szintvonalnak X_{20} -hoz legközelebbi X_{10} pontját hasonló módon szerkesztjük meg, majd ezután X_{10} -ból az X_0 -t. Ha a kapott

$X, X_{20}, X_{10}, X_0 \dots$ pontokat folytonos görbevonallal összekötjük, olyan görbevonallal jutunk, amely az egymás után következő szintvonalakat a vetületben is és a térben is merőlegesen metszi, vagyis a nyert térgörbe a felület egy esésvonal. A 34.ábra a további három esésvonal megszerkesztését is bemutatja.



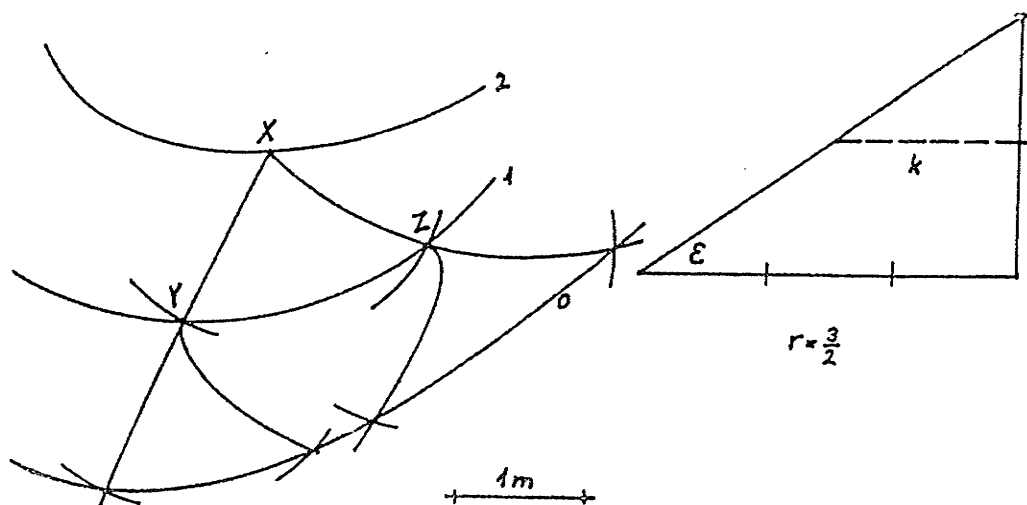
34.ábra

Miként e példa is mutatja, topografikus felületek konstruktív kezelésénél a legtöbbször ilyen vagy ehhez hasonló közelítő szerkesztésekkel tudjuk feladatainkat megoldani.

Topografikus felületen állandó lejtésű vonalak szerkesztése:

A 35.ábrán egy felületdarabot adtunk meg három szintvonalával és az 1m rajzi hosszával (a léptékkel). A felületen az X pontból kiinduló, $r = \frac{3}{2}$ lejtésű görbét akarunk szerkesztetni. A lépték ismeretében megszerkesztjük az $r = \frac{3}{2}$ lejtésű egyenes ϵ dőlésszögét és k osztóközét. Ezután az X pont körül a k sugárral rajzolt kör az 1-es szintvonalat Y és Z pontokban metszi. Az XY ill. XZ felületi görbe közelítőleg a megadott lejtésű felületi vonalat adja. Az eljárást folytatva Y és Z pontokból kiinduló két-két görbe adódik,

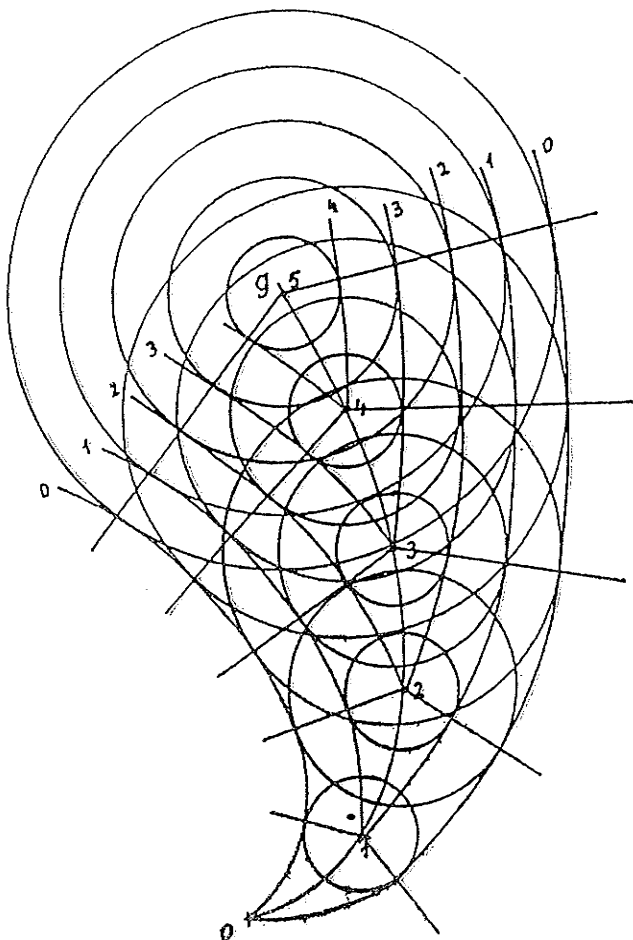
amelyek körül a gyakorlat által megszabott feltételek alapján választható ki, hogy melyik görbét kell az X pontból induló görbe folytatásának tekinteni.



35.ábra

Térgörbére illeszkedő, adott rézsűjű felület szintvonalainak meghatározása:

A 36.ábrán megadtuk a g térgörbe kótázott vetületét. Erre a görbére illeszkedő, adott rézsűjű felületet akarunk megszerkeszteni szintvonalainak megadásával. Nyilvánvaló, hogy a keresett felület olyan dőléskúpok közös érintőfelülete, amelyeknek csúcsai a térgörbe pontjai és a kúpok fősíkjokban levő szintköreinek sugarai a felület rézsűjének megfelelő osztóközzel változnak szintenként. E rézsűértéknek megfelelő sugárral (amelynek szerkesztéséhez szükség volna a léptékre, azaz 1m rajzi hosszának megadására, de e rutinfeladattól most eltekinthetünk) rajzoltuk meg a g görbe 1-es pontja körül a 0-ás szintkört, a 2-es pont körül az 1-es szintkört, majd kétszeres sugárral a 0-ás szintkört és így tovább a 3-as, 4-es, 5-ös pontokhoz tartozó rézsűkúpokat.



36.ábra

A felület 0-ás, 1-es, 2-es, ... szintvonalait az azonos szintekben elhelyezkedő szintkörök burkológörbéi adják, míg a felület esésvonalai a megfelelő kúpokon adódó érintési alkotók lesznek.

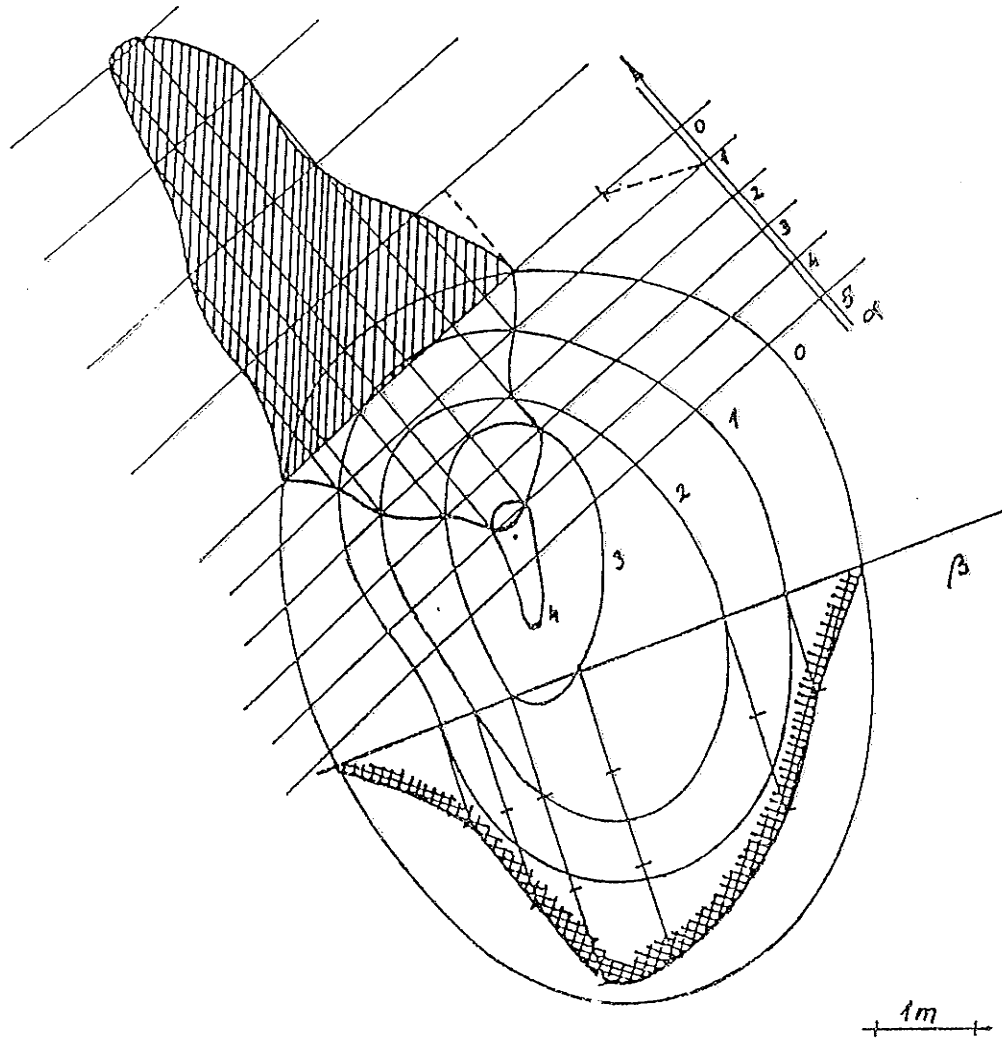
Topografikus felület síkmetszetének a szerkesztése

a, általános síkkal

b, vetítősíkkal (szelvény szerkesztése)

A 37.ábrán megadtuk egy felület szintvonalait, továbbá egy α általános helyzetű síkot esésvonalának graduált képével, valamint egy β vetítősíkot, és föltüntettük az 1m rajzi hosszát. A felületnek és az α síknak a metszésvonalából meghatároztuk az azonos szintben levő szintvonalak metsződésénél adódó pontokat, a görbe menetét ezek alapján csak közelítőleg tudjuk megrajzolni. A metszetgörbe valódi alakját az α síknak képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatásával határozzuk meg (az ábrán a felületen adódó metszet leforgatottját bevonalkázással emeltük ki).

A β vetítősíknak és a szintvonalaknak a metszéspontjai közvetlenül adódnak, de a görbe alakjának meghatározása itt fokozottabban szükséges, hiszen a metszet (szelvény) képe egyetlen egyenes szakasz. Ezért a β síkot is képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk a leforgatottban meg tudjuk határozni a szintvonalak és a β sík metszéspontjainak helyét a görbe egészét azonban itt is csak közelítőleg tudjuk megrajzolni.



37. ábra

TARTALOM

Előszó	3
1. Térgeometria	5
2. Kétképsík ábrázolás. Pont és egyenes ábrázolása. Sík és egyenes metszéspontja, két sík metszésvonala	13
3. Új képsík bevezetése, transzformáció	24
4. Poliéderek (síklapokkal határolt testek) síkmetszete	32
5. Poliéderek áthatása	37
6. Méretes szerkesztések. Távolságok és hajlásszögek szerkesztése. Méretes adataival megadott testek ábrázolása	45
7. Vektorok, vektorműveletek és geometriai alkalmazásai	67
8. Egyenes és sík koordináta geometriája	80
9. Kötött vektorok. Vektorrendszerek	87
10. Görbék differenciálgeometriája	93
11. Kúpszeletek	102
12. Kör ábrázolása	119
13. Cikloisok, körevolvensek	123
14. Csavarvonal ábrázolása	128
15. Axonometrikus ábrázolás	133
16. Merőleges (ortogonális) axonometria	140
17. Ferde (klinogonális) axonometria	146
18. Felületek ábrázolása. Forgásfelületek	151
19. Forgásfelületek síkmetszetének szerkesztése	157
20. Forgásfelületek áthatása	168
21. Kúpok és hengerek síkba terítése	178
22. Két görbéhez kifejtendő felület szerkesztése és síkba terítése	186
23. Felületek differenciálgeometriája	194
24. Az elektronikus gépi rajzolás alap gondolata	211
Irodalom	215
Kötés projekció (Mérőszámok ábrázolása)	1 - 30

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nivódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **GEOMETRIA Útmutató és példatár**

A jegyzet szerzője: **Vermes Imre**

A jegyzet azonosítója: **0410662**

Melyik tárgyhöz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)

