BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
TERMÉSZET ÉS TÁRSADALOMTUDOMÁNYI KAR

Kiss Krisztina - Nágel Árpád

EMELTSZINTŰ MATEMATIKA PÉLDATÁR

Műegyetemi Kiadó, 1998.

Lektorálta:

Dr. Gyökér Solt

Jegyzet szerzői:

Dr. Kiss Krisztina
egyetemi tanársegéd

Dr. Nágel Árpád
egyetemi adjunktus

(Második utánnyomás)

Azonosító: **045014**

A **Budapesti Műszaki Egyetem Természet és Társadalomtudományi Kar**
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 8,95 (A/5) ív
Nyomtatta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó
Munkaszám: 98 - 127

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ 5

1 A matematika alapjai **7**

1.1 Halmazok és függvények 7

1.2 Elemi úton megoldható feladatok 9

1.3 Numerikus sorozatok 13

2 Egyváltozós valós függvények **17**

2.1 Elemi tulajdonságok 17

2.2 Határérték, folytonosság 19

2.3 Differenciálszámítás 23

2.4 Integrálszámítás 27

3 Végtelen sorok **29**

3.1 Numerikus sorok 29

3.2 Függvénysorozatok 31

3.3 Függvénysorok 32

4 Többváltozós valós függvények **35**

4.1 Határérték, folytonosság 35

4.2 Differenciálszámítás 37

4.3 Szélsőérték-feladatok 39

4.4 Integrálszámítás 40

1 A matematika alapjai - Megoldás **43**

1.1 Halmazok és függvények - Megoldás 43

1.2 Elemi úton megoldható feladatok - Megoldás 45

1.3 Numerikus sorozatok - Megoldás 52

2 Egyváltozós valós függvények - Megoldás **59**

2.1 Elemi tulajdonságok - Megoldás 59

2.2 Határérték, folytonosság - Megoldás 61

2.3 Differenciálszámítás - Megoldás 66

2.4 Integrálszámítás - Megoldás 73

3 Végtelen sorok - Megoldás **77**

3.1 Numerikus sorok - Megoldás 77

3.2 Függvénysorozatok - Megoldás 80

3.3 Függvénysorok - Megoldás 82

4 Többváltozós valós függvények - Megoldás **85**

4.1 Határérték, folytonosság - Megoldás 85

4.2 Differenciálszámítás - Megoldás 87

4.3 Szélsőérték feladatok - Megoldás 90

4.4 Integrálszámítás - Megoldás 94

ELŐSZÓ

E példatár elsősorban azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik az emelt szintű matematika c. tárgy előadását és gyakorlatait látogatják. Szokatlan tartalma miatt kissé nehéznek tűnhet a példatár az olvasó számára, különösen, ha hozzászokott a különböző "szabványos" feladatgyűjteményekhez. Más hasonló jegyzetektől eltérően nem az egyetemi matematikaanyag formális elsajátitását tűzte ki elsődleges céljául. Ezért szinte teljesen hiányoznak a példatárból a mechanikusan, elemi módon megoldható "sablonos", gyakorló feladatok. Sok olyan feladatot is közlünk, amelynek a szövegezése is eltér a szokványostól, illetve azok megoldása kívánja meg az eredeti gondolkodást. A feladatok egy része a különféle zárthelyiken és szigorlati írásbeliken kipróbált, szép feladat. Csillaggal jelöltük meg azon feladatokat, amelyek a szerzők véleménye szerint nehezebbek. Persze nincs kizárva, hogy az olvasó könnyűnek találja egyik-másik csillaggal megjelölt feladatot, vagy éppen fordítva, komoly nehézséget okoz neki valamelyik feladat, amely mellett nincs csillag – hiszen nincs olyan objektív kritérium, amelynek alapján egyértelműen meg lehetne állapítani egy feladat nehézségi fokát. A szerzők meggyőződése viszont az, hogy érdeklődő egyetemista hallgatók számára egyik feladat sem okoz megoldhatatlan problémát. Néhány egyszerűbb feladat kivételével az összes feladat részletes megoldását is megadjuk. Többek közt ezért is ajánljuk jegyzetünket minden matematika iránt érdeklődő egyetemi hallgató részére.

Kiss Krisztina és Nágel Árpád

1 A matematika alapjai

1.1 Halmazok és függvények

1. Igazoljuk az alábbi halmazalgebrai azonosságokat:
a, $X \cap (Y \setminus Z)^c = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$
b, $(X \setminus Y)^c \setminus Z = (X^c \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
(Itt $A \subset X$ esetén A^c az A halmaz kiegészítő halmazát jelöli, azaz $A^c = X \setminus A$.)

2. Legyen A,B és C három halmaz. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:
a, $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
b, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
c, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
d, $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A \setminus (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \setminus A) = A$

3. Mutassuk meg, hogy minden $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ leképezés esetén teljesülnek az alábbi összefüggések:
a. $A \subset B \subset X$ esetén $f(A) \subset f(B)$.
b. $A = \cup A_i \subset X$ esetén $f(A) = \cup f(A_i)$ tetszőleges $i \in J$ indexhalmazra.
c. $A \subset B \subset Y$ esetén $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
d. $A = \cup A_i \subset Y$ esetén $f^{-1}(A) \subset \cup f^{-1}(A_i)$ tetszőleges $i \in J$ indexhalmazra.
e. $A = \cap A_i \subset Y$, $A_i \subset Y$ esetén $f^{-1}(A) \subset \cap f^{-1}(A_i)$ tetszőleges $i \in J$ indexhalmaz esetén.
f. $B, C \subset Y$ esetén $f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C)$.
g. $A \subset X$ esetén $f^{-1}(f(A)) \supset A$.
h. $A \subset Y$ esetén $f(f^{-1}(A) \subset A$.

4. Mutassuk meg,ha $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ injektív leképezés, akkor minden $A \subset X$ halmazra $f^{-1}(f(A)) = A$.

5. Mutassuk meg,ha $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ szürjektív leképezés, akkor minden $A \subset Y$ halmazra $f(f^{-1}(A)) = A$.

6*. Mutassuk meg, hogy az $f : A \to B$ függvény pontosan akkor injektív, ha minden $X, Y \subset A$ esetén $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

7. Adjunk bijekciót a következő halmazok között:
a, $\{x \in R : x > 0\}$ és R.
b, $(0,1]$ és $[1,\infty)$ intervallumok.
c*, $(0,1]$ és $[0,1]$ intervallumok.
d, $\{(x,y) \in R \times R : x^2 + y^2 = 1\}$ és $[0,1]$ intervallum.

8*. Mutassuk meg, hogy egy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvény szigorú maximumhelyeinek halmaza legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú lehet.

9. a, Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény. Legyen $x_1 \sim x_2$, ha $f(x_1) = f(x_2)$. Mutassuk meg, hogy így egy ekvivalenciarelációt értelmeztünk.
b, Legyen $X \subset \mathbf{R}$ olyan, hogy a fenti ekvivalenciareláció ekvivalencia osztályaiból pontosan egy-egy elemet tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy $f \mid X$ bijekció.

1.2 Elemi úton megoldható feladatok

10. Mutassuk meg, hogy minden egész szám felírható $A = \pm 1 \pm 6 \pm 11 \pm \ldots \pm (5k+1)$ alakban, ahol $k \in \mathbf{N}$ adott szám és az előjelek közül a megfelelőt kell kiválasztani.

11. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok körében:

$$\sqrt{x+5} = x^2 - 5.$$

12*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^4 + 4x - 1 = 0.$$

13. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan, a valós számok halmazán értelmezett f függvény létezik, amelyre minden $x \in R$ esetén:

$$f^3(x) + 3f(x) = x$$

teljesül.
Differenciálható-e a fenti f függvény? Számítsuk ki $f'(0)$-t!

14. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \cos x + \cos\sqrt{2}x$ függvény nem periodikus.

15*. Legyen az f függvény periódusa p_0, és α olyan valós szám, amely irreducibilis p_0-hez, azaz $\frac{p_0}{\alpha}$ irracionális. Mutassuk meg, hogy ez esetben a $g(x) = f(x) + f(\alpha x)$ függvény nem lehet periodikus.

16. Állapítsuk meg, hogy az

$$f_1 > 0, f_2 > 0$$

és

$$f_1 > 0, f_1 + f_2 > 0$$

egyenlőtlenség-rendszerek ekvivalensek-e.

17. Igazolja az alábbi egyenlőtlenséget!
$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$.

18. Igazolja az alábbi egyenlőtlenséget!
$n^{n+1} < (n+1)^n$, $n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}$.

19. Mutassuk meg, hogy ha $a > 0$ és n olyan természetes szám, amelyre $n \leq a$, akkor $[a] > \frac{n}{n+1}a$ (itt [a] az 'a' valós szám egész részét jelenti).

20. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b valós számra

$$0 \leq [a+b] - [a] - [b] \leq 1$$

21*. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

22*. Mutassuk meg, hogy minden $n > 1$ természetes számra teljesül:

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2.$$

23*. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$!

24. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:
a, Ha $n \geq 3$ természetes szám, akkor

$$n^{\frac{n-1}{2}} < 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \frac{2}{\sqrt[n]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 + \left(\frac{n^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

b, Ha $n \geq 2$ természetes szám, akkor

$$1+\frac{n-1}{n!}<1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<\frac{n+1}{2}.$$

25*. Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra teljesül:

$$(1+\frac{1}{n})^{\sqrt{n^2+n}}<e<(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}.$$

26. Igazolja az alábbi állításokat! ($n\in\mathbf{N}$)

a, $\sum_{k=2}^{n}k\binom{n}{k}=(2^{n-1}-1)n.$

b, $\sum_{k=3}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\frac{3n-n^2-2}{2}.$

c, $\sum_{k=1}^{n}k^3=(\sum_{k=1}^{n}k)^2,\ n\geq 1.$

d, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k},\ n\geq 2.$

e, $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}.$

f, $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n},\ n\geq 1,\ a,b\in\mathbf{N},\ a,b\neq 0.$

27. Igazoljuk, hogy minden $x>0$, $a>0$ valós számokra és $n>1$ természetes számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{x+a}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}\leq\sqrt[n]{x^n+a^n}\leq a+x!$$

28. Mutassuk meg, hogy minden $n>6$ természetes számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$(\frac{n}{e})^n<n!<n(\frac{n}{e})^n.$$

29. Bizonyítsuk be, hogy minden természetes számra

a, $(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)(2n)=2^n 1*3*5*\ldots*(2n-3)(2n-1),$

b, $\frac{1}{1*2*3}+\frac{1}{2*3*4}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n-1)}).$

30. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1*3*5*\ldots*(2n-1)}{2*4*6*\ldots*(2n)}<\frac{1}{\sqrt{(3n+1)}}.$$

31. Melyik szám nagyobb?
$(1.000001)^{1000000}$ vagy 2 ?

32. Mutassuk meg, hogy ha $a \neq b$ pozitiv számok és n természetes szám, akkor

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}$$

33. Igazolja az alábbi egyenlőtlenséget!
$n! < (\frac{n+1}{2})^n$, $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$.

34. Igazolja a következő egyenlőtlenséget!
$1 < \sqrt[n]{a} < \frac{n+(a-1)}{n}$, ahol $a > 0$, $n \in \mathbf{R}$.

35. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 1$ természetes számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$(n!)^3 < (\frac{n^2(n+1)^2}{4})^n$$

36*. Mutassuk meg, hogy minden k egész szám legalább egyféleképpen előáll
$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2$ alakban, ahol m valamely természetes szám és a $\pm$ jelek közül a megfelelőt kell kiválasztani.

1.3 Numerikus sorozatok

37. Határozzuk meg a következő határértéket :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

38. Határozzuk meg a következő sorozat határértékét!

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

39. Igazoljuk, hogy a következő sorozat konvergens!

$$a_n = (1 + \frac{k}{n})^n, \quad k \in \mathbf{R}.$$

40. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

$$a, \quad a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n.$$

$$b, \quad b_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n.$$

$$c, \quad c_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}.$$

$$d, \quad d_n = (1 - \frac{1}{n})^{n^2}.$$

41. Határozzuk meg a következő sorozat határértékét!

$$a_n = [\frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{e}]^n.$$

42. Határozzuk meg a b_n sorozat határértékét, ha

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

43. Határozzuk meg a következő sorozat határértékét és adjunk meg küszöbindexet, amelytől kezdve a sorozat a határértéket ε hibával közelíti!

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

44. Határozzuk meg a következő sorozat határértékét!

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - n}.$$

45. Mutassuk meg, hogy a következő sorozat konvergens!

$$a_n = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{n^3+2n}{n^3-n^2+10}\right)}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}.$$

46. Adott $\varepsilon > 0$-hoz határozzuk meg a küszöbindexet, amelytől kezdve a következő sorozat a határértékét ε-nál kisebb hibával közelíti meg!

$$a_n = \frac{n^2+n+3\sin n+2}{3n^2+n+1}.$$

47. Adott $\Omega > 0$-hoz határozzuk meg $\mathrm{N}(\Omega) > 0$-t, hogy minden $n > \mathrm{N}(\Omega)$ estén $a_n > \Omega$ teljesüljön!

$$a_n = \frac{n^7+n^5+2n^4-6}{11n^4-n^3+n-12}.$$

48. Tekintsük a következő sorozatot: $a_n = \frac{1}{k}\left((k-1)a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}^{k-1}}\right)$, ahol $k \in \mathbf{N}$, $\alpha > 0$ és $a_0 = \beta > 0$. Számítsuk ki $\lim_{n\to\infty} a_n$ értékét!

49. Egy sorozat tagjaira $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$ teljesül, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat konvergens és adjuk meg a határértékét!

50*. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

51*. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+n}).$$

52*. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}).$$

53. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\cos^2 n + \frac{(2n+1)\sin^2 n}{2n}}.$$

54*. Mutassuk meg, hogy ha $a_n > 0$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = \alpha < \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$.

55*. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}.$$

56*. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}.$$

57. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$!

58. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

59. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén adjunk meg olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindexet, amelytől kezdve az $a_n = \frac{e^{(\frac{1}{n})}-1}{\frac{1}{n}}$ sorozat elemei a határértéket ε-nál kisebb hibával közelítik!

60. Határozzuk meg az alábbi rekurzív alakban megadott sorozat határértékét:
$x_0 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$.

61. Legyen $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n^3 - a_n^2 + 3a_n + 1)$.
Mutassuk meg, hogy az a_n sorozat konvergens és adjuk meg a határértékét is.

62. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}.$$

2 Egyváltozós valós függvények

2.1 Elemi tulajdonságok

63*. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ függvény nem áll elő két periodikus függvény összegeként.

64. Tekintsünk egy tetszőleges olyan f periodikus függvényt, amelynek értelmezési tartománya a valós számegyenes egy valódi részhalmaza. Ki lehet-e terjeszteni f-et az egész számegyenesre úgy, hogy periodikus maradjon, azaz létezik olyan $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény $(\mathcal{D}_g = \mathbf{R})$, hogy $g(x) = f(x)$, ha $x \in \mathcal{D}_f$ és g periodikus?

65. Igaz-e, hogy ha $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$, és f az $(a, x_0]$ intervallumon monoton növő, az (x_0, b) intervallumon monoton fogyó, akkor az x_0-ban lokális szélsőértéke van?

66. Van-e olyan $\varepsilon > 0$, hogy az $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ függvény az egész $(0, \varepsilon)$ intervallumon monoton?

67. Tegyük fel, hogy egy függvény az értelmezési tartományának minden értékére folytonos és invertálható. Következik-e ebből, hogy a függvény szigorúan monoton?

68. Adjunk példát olyan f függvényre, amely
a, nem folytonos egy (a, b)-n, de felveszi maximumát és minimumát;
b, folytonos és korlátos egy $[a, \infty)$-en, de nem veszi fel sem a maximumát, sem a minimumát.
c, nem folytonos egy (a, b)-n, de felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket, azaz ún. Darboux-függvény.

69. Legyen f az $[a, b]$-n értelmezett valós értékű függvény. Melyek igazak és melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a, Ha f invertálható, akkor szigorúan monoton.
b, Ha f szigorúan monoton, akkor invertálható.
c, Ha f monoton, akkor invertálható.
d, Ha f invertálható és monoton, akkor szigorúan monoton.
e, Ha f invertálható I_1 és I_2 részintervallumokon, akkor a két részintervallum unióján is.

70. Legyen f intervallumon értelmezett bijektív valós értékű függvény. Melyek igazak és melyek hamisak az alábbi állítások közül?
a, Ha f korlátos, akkor inverze is korlátos .
b, Ha f szigorúan monoton növekedő, akkor az inverze is ilyen.
c, Ha f páros, akkor az inverze is páros.
d, Ha f páratlan, akkor az inverze is páratlan.

2.2 Határérték, folytonosság

71. Adjunk meg olyan $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket és olyan a, b, c, x_0 valós számokat, hogy $\lim_{x \to a} g(x) = c$, $\lim_{t \to c} f(t) = b$, f és g függvények kompozíciója értelmes, de $\lim_{x \to a} f(g(x)) \neq b$.

72. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy függvény és $\alpha \in \mathcal{D}_f = (a, b)$.
Tekintsük az alábbi definiciót:
Létezik olyan A valós szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $x \in (a, b)$, hogy $\alpha < x < \alpha + \varepsilon$ és $f(x) < A$. Vizsgáljuk meg, hogy mit definiál a fenti tulajdonság.

73. Legyen f az (a, b)-n értelmezett valós értékű függvény és $x_0 \in (a, b)$ Tekintsük az alábbi definiciót:
Létezik olyan A valós szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (a, b)$ esetén: ha $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor $|x - x_0| < \delta$. Vizsgáljuk meg, hogy mit definiál a fenti tulajdonság.

74. Legyen f az (a, b)-n értelmezett valós értékű függvény és $x_0 \in (a, b)$. Tekintsük az alábbi definiciót:
Minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in (a, b)$ és $|x - x_0| < \varepsilon$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \delta$.
Vizsgáljuk meg, mit definiál a fenti tulajdonság.

75. Legyen f az (a, b)-n értelmezett valós értékű függvény és $x_0 \in (a, b)$. Tegyük fel, hogy a fenti f függvény az alábbi tulajdonsággal rendelkezik:
Van olyan A és $\delta > 0$, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $x \in (a, b)$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Igaz-e, hogy az f függvénynek létezik határértéke x_0-ban?

76. Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon. Létezik-e olyan g

függvény, amely az egész **R**-en folytonos és amelyre $f(x) = g(x)$ minden $x \in [a, b]$-re?

77. Legyen f folytonos az (a, b) intervallumon. Létezik-e olyan g függvény, amely az egész **R**-en folytonos és amelyre $f(x) = g(x)$ minden $x \in (a, b)$-re?

78. Adjunk példát olyan (a, b) intevallumon értelmezett folytonos függvényre, mely
a, nem korlátos;
b, korlátos, de nem veszi fel sem a maximumát, sem a minimumát;
c, felveszi a maximumát és a minimumát is.

79*. Létezik-e olyan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ függvény, amelyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:
a, semmilyen részintervallumban nem monoton,
b, egy pont kivételével sehol sem folytonos,
c, invertálható?

80. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

81. Számítsuk ki a következő határértéket!

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin \sin \sin x}{x - \pi}.$$

82. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlők a következő határértékek!

a, $\lim_{x \to 0+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$, b, $\lim_{x \to 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$,
c, $\lim_{x \to \infty} (\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1})^{\frac{x^3}{1-x}}$, d, $\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$,
e, $\lim_{x \to 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}$,
f, $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt[x]{a} - 1)$, ahol $a > 0$ adott,

g, $\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$, $a, b > 0$ adott,

h, $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)} - x)$,
ahol $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbf{R}$ adott.

83. Adjuk meg olyan $\Omega \in \mathbf{R}$-et, melyre teljesül, hogy $x > \Omega$ esetén a következő függvény $\varepsilon = 10^{-2}$-nél kevesebbel térjen el a végtelenben vett határértékétől:

$$f(x) = \frac{x^2 - \sin x}{x^2 + \sin x}!$$

84. Adott $\Omega > 0$-hoz határozzuk meg $\delta(\Omega) > 0$-t, hogy minden $|x-2| < \delta(\Omega)$ estén $|f(x)| > \Omega$ teljesüljön!

$$f(x) = \frac{(x+1)}{(x-2)^2(x+5)}.$$

85. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x.$$

86*. Mutassuk meg, hogy a folytonos valós függvények C halmazának a számossága $2^{\aleph_0}$. ($\aleph_0$ a természetes számok halmazának a számossága.)

87. Igazak-e a következő állítások?
Az $I \subset \mathbf{R}$ intervallumon egyenletesen folytonos függvények a, összege, b, szorzata, c, összetett függvénye is egyenletesen folytonos az I-n.

88. Legyen f az $[a, b]$-n értelmezett valós értékű függvény. Tekintsük az alábbi tulajdonságot:
Minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$, hogy ha $|f(x) - f(y)| < \delta$, akkor $|x - y| < \varepsilon$ minden $x, y \in [a, b]$-re.
Vizsgáljuk meg, mit definiál a fenti tulajdonság.

89. Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények a megadott intervallumon?

a,	$f(x)=x$,	$(-\infty,\infty)$	b,	$f(x)=\frac{1}{x}$,	$(1,2)$
c,	$f(x)=x^2$,	$(-\infty,\infty)$	d,	$f(x)=\frac{1}{x}$,	$(0,2)$
e,	$f(x)=\sqrt{x}$,	$[0,\infty)$	f,	$f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$,	$(0,1)$
g,	$f(x)=\ln x$,	$[1,\infty)$	h,	$f(x)=2x^2-3x$,	$(1,3)$
i,	$f(x)=\sin x$,	$(-\infty,\infty)$	j,	$f(x)=\frac{\sin x}{x}$,	$(0,1)$
k,	$f(x)=\sin x^2$,	$(-\infty,\infty)$	l,	$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$,	$(0,1)$
m,	$\sqrt{1-(x-1)^2}$,	$(0,1)$			

n, $f(x)=\begin{cases} \frac{|\sin x|}{x}, & \text{ha } x\neq 0 \\ 1, & \text{ha } x=0 \end{cases}$, $x\in[-1,1]$.

2.3 Differenciálszámítás

90. Legyen adott $n \in \mathbf{N}$-re $p_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$. Mutassuk meg, hogy a $p_n(x)$ polinomnak a $[-1,1]$ intervallumban pontosan n számú valós gyöke van.

91. Mutassuk meg, hogy ha $x > 0$, akkor $(2+\cos x)x > 3\sin x$.

92. Mutassuk meg a Rolle-tétel alábbi általánosítását:
a, Ha f az $[x_0, \infty)$-en folytonos,
b, az f az (x_0, ∞)-en differenciálható és
c, $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(x_0)$, akkor létezik $\alpha > x_0$, hogy $f'(\alpha) = 0$.

93. Tegyük fel, hogy az f függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:
a, f folytonos a $[0, \infty)$ intervallumon,
b, ha $x > 0$, akkor f kétszer differenciálható,
c, $f(0) = 0$ és
d, az f' deriváltfüggvény szigorúan monoton növekedő.
Mutassuk meg, hogy ez esetben a $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ függvény szigorúan monoton növekedő, ha $x > 0$.

94. Megválasztható-e az $n \in \mathbf{N}$ értéke úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{ha } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}^* \end{cases}$$

függvény kétszer differenciálható legyen az $x_0 = 0$-ban, de máshol az f függvény nem is folytonos?

95. Létezik-e olyan függvény, amely egy pontban differenciálható, de semmilyen más helyen nem is folytonos?

96. Hol differenciálható a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}.$$

97. Hol differenciálható a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ \tan x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}.$$

98. Milyen $r \in \mathbf{R}$-re lesz folytonos, illetve differenciálható a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} x^r \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

99. Tegyük folytonossá az $x = 0$ pontban az $f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$ függvényt! Differenciálható-e az így kapott függvény? Ha igen, adjuk meg az $x = 0$ ponthoz tartozó érintőjét!

100. Mutassunk példát olyan f függvényre, amelyre
a, $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ és $\lim_{+\infty} f'(x) = c \neq 0$;
b, $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ és $\lim_{+\infty} f'(x) = 0$;
c, $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ és $\lim_{+\infty} f'(x) = +\infty$;
d, $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ és $\lim_{+\infty} f'(x)$ nem létezik.

101. Mutassuk meg, ha ϕ differenciálható, nem állandó és periodikus függvény, akkor az

$$f(x) = \begin{cases} x\phi(\frac{1}{x}), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény nem differenciálható az $x = 0$-ban sem jobbról, sem balról.

102. Mutassuk meg, ha a ϕ korlátos, differenciálható és periodikus függvény, akkor az

$$f(x) = \begin{cases} x^2\phi(\frac{1}{x}), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható az $x = 0$ pontban.

103*. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény deriváltjának végtelen sok gyöke van az $x_0 = 0$ pont tetszőleges környezetében!

104*. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin \frac{1}{x}), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényre teljesülnek az alábbiak!
a. f-nek az $x_0 = 0$-ban szigorú lokális minimumhelye van,
b. f differenciálható,
c. Az f' függvény az $x_0 = 0$-ban nem vált előjelet!

105. Határozzuk meg az alábbi függvény szélsőértékhelyeit!

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha } x < -2 \\ 2x^3 + 3x^2 - 8, & \text{ha } -2 \leq x < 2 \\ \log_2 x, & \text{ha } 2 \leq x \end{cases}.$$

106. Legyen a, b, c pozitív valós számok és tekintsük függvényt:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + c^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Hol veszi fel a fenti függvény a minimális értékét?

107. Határozzuk meg a következő függvény 10. deriváltfüggvényét:

$$f(x) = (1 - x^2) \sin x!$$

108. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$!

109. Mutassuk meg, ha $x \geq 0$, akkor $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$!

110. Legyen $a, b, c > 0, \neq 1$ és tekintsük a következő függvényt: $f(x) = a^x + b^x + c^x - 3$. Lehet-e f-nek három különböző valós gyöke?

111. Legyenek $c_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots n$ olyan komplex számok, amelyre $c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$. Mutassuk meg, hogy a $c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = 0$ egyenletnek van legalább egy gyöke a $(0, 1)$ intervallumban.

112. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = e^x - p_n(x) = 0$ egyenletnek legfeljebb $(n+1)$ valós gyöke van, ahol p_n n-ed fokú polinom.

113. Adjunk példát olyan mindenütt differenciálható $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre, hogy az f' függvény egy korlátos zárt intervallumon korlátos, de itt nem folytonos.

114. Adjunk példát olyan mindenütt differenciálható $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre, hogy az f' függvény egy korlátos zárt intervallumon nem korlátos.

115*. Adjunk példát olyan mindenütt differenciálható $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre, hogy az f' függvény egy korlátos zárt intervallumon korlátos, de f' nem veszi fel sem a maximumát, sem a minimumát ezen intervallumon.

2.4 Integrálszámítás

116*. Számítsuk ki a következő határozott integrál értékét:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

117*. Számítsuk ki a következő integrált:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx.$$

118*. Számítsuk ki a következő integrált:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx.$$

119. Számítsuk ki a következő integrált:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx.$$

120. Számítsuk ki a következő integrált:

$$\int \frac{x}{(x^2+x+1)^3} dx.$$

121. Adjunk meg olyan függvényt, amely Riemann-integrálható egy korlátos zárt intervallumban, de itt nincs primitív függvénye.

122. Adjunk meg olyan függvényt, amelynek létezik primitív függvénye egy korlátos zárt intervallumon, de itt nem Riemann-integrálható.

123. Adjunk meg olyan függvényt, amely egy korlátos zárt intervallumban Riemann-integrálható, integrálfüggvénye differenciálható, de itt nincs primitív függvénye.

3 Végtelen sorok

3.1 Numerikus sorok

124. Konvergens-e a $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}}$ numerikus sor?

125. Határozzuk meg a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ sor összegét! Legalább hányadik részletösszeget kell kiszámítani, hogy a sor összegét 10^{-3}-nál nagyobb pontossággal közelítse?

126. Adjunk példát olyan váltakozó előjelű $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sorra, melyre $a_n \to 0$, de a sor divergens.

127. Adjunk példát olyan konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú numerikus sorra, melyre $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

128. Igazolja, hogy a következő sor konvergens és határozza meg az összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)}$$

129*. Számítsa ki a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{2n}\right)$$

130*. Legyen a_n 0-ba tartó sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = 0$.

131*. Legyen $a_n \to \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$ sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor
a, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$,
b, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} = \alpha$, ha $a_i \neq 0$, $\forall i \in \mathbf{N}$ és $\alpha \neq 0$,
c, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \alpha$, ha $a_i > 0, \forall i \in \mathbf{N}$.

132. Mutassuk meg, hogy ha k természetes szám, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}+\frac{1}{n^k+1}+\cdots+\frac{1}{n^{k+1}}\right)=+\infty.$$

133. Konvergens vagy divergens az alábbi numerikus sorozat?

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{n^2}\frac{1}{k!}$$

3.2 Függvénysorozatok

134. Határozzuk meg az alábbi függvénysorozat limeszfüggvényét és a konvergencia minőségét!
a, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in (0,1)$, $n \in N$.
b, $f_n(x) = (\frac{x}{x+n})^2$, $x \in [0,1]$, $n \in N$.

135. Konvergens-e, illetve egyenletesen konvergens-e az

$$f_n(x) = n(\sqrt[3]{x + \frac{1}{n}})$$

függvénysorozat az $1 \leq x < +\infty$ intervallumon?

136. Egyenletesen konvergál-e az $f_n(x) = \frac{2nx}{n+x^2}$ függvénysorozat a limeszfüggvényhez a $[0,1]$ intervallumon? $(n \in N)$

137. Tekintsük az alábbi függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

a, $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =$? Egyenletes-e a konvergencia?
b, $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) =$? Egyenletes-e a konvergencia?

138. Határozza meg az alábbi függvénysorozat konvergenciatartományát, limeszfüggvényét és a konvergencia minőségét!

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(nx^2)}{n}, \; n \in \mathbf{N}$$

3.3 Függvénysorok

139. Adjunk példát olyan végtelen sokszor differenciálható f függvényre, amelynek egy adott pontbeli Taylor-sora mindenütt konvergens, de ez a sor nem állítja elő az f függvényt!

140. Határozza meg a következő hatványsor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

141. Írja fel a következő függvény hatványsorát a megadott pont körül és határozza meg a konvergencia sugarát!

$$\frac{5}{x^2+3x-4}, \quad x_0 = 2.$$

142. Határozza meg az alábbi függvénysor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

143. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^3} x^n.$$

144. a, Milyen $x \in \mathbf{R}$-re lesz konvergens az alábbi függvénysor?
b, Egyenletesen konvergens-e a $(-3,-1]$ intervallumon?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^{n+1}}.$$

145. Egyenletesen konvergens-e az alábbi függvénysor a megadott tartományon?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{1+n^3x^2}, \qquad x \in [1,2].$$

146. Egyenletesen konvergens-e az alábbi függvénysor a megadott tartományon?

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{nx}{1+n^4x^2}, \qquad x \in [1,2].$$

147. Egyenletesen folytonos-e az alábbi függvénysor összegfüggvénye a megadott tartományon?

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty}(-1)^n \frac{nx}{n^3x+2n+1}, \qquad x \in [2,3].$$

148. Határozza meg azokat a tartományokat, ahol az alábbi függvénysor feltételesen, abszolút, illetve egyenletesen konvergens!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n(x)}{n^2}.$$

149. Vizsgáljuk meg az $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^p x}$, $x \geq 0$, $n = 1,2,\ldots$ függvénysorozattal definiált $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor konvergenciáját a $p = 0, 1, 3$ paraméterekre!

150. Egyenletesen konvergens-e az alábbi függvénysor a megadott intervallumon?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

151. Vizsgáljuk a $\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-k|x|}$ sort a konvergencia szempontjából! Milyen x értékekre lesz egyenletesen, illetve abszolút konvergens a sor?

4 Többváltozós valós függvények

4.1 Határérték, folytonosság

152. Létezik-e az alábbi függvénynek a $(0,0)$-ban határértéke?

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$$

153. Számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} \frac{x^y}{1 + x^y}$$

154. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$$

155. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

156. Határozzuk meg (amennyiben létezik) az alábbi határértéket!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x + y}{x - 2y}$$

157. Létezik-e az alábbi függvénynek a $(0,0)$ pontban határértéke?

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$$

158. Terjesszük ki folytonosan az egész számsíkra a következő kétváltozós függvényt!

$$f(x,y) = (x^3 + y^3)\sin\frac{x}{x^2 + y^2}$$

159*. Egyenletesen folytonos-e az $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ kétváltozós függvény az
$M = \big((x,y): \quad 0 < x < 1, \quad -1 \le y \le 1\big)$ halmazon?

4.2 Differenciálszámítás

160. Differenciálható-e az alábbi kétváltozós függvény a $(0,0)$ pontban?

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}$$

161. Tekintsük az alábbi (paraméteres) kétváltozós f függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^\alpha + y^\alpha)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Milyen α valós számra lesz az f függvény differenciálható?

162. Differenciálható-e az alábbi függvény?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

163. Húzzunk érintősíkot a $(0,0)$ pontban a következő függvényhez!

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

164. Tekintsük az alábbi kétváltozós függvényt! Folytonos-e a függvény a $(0,0)$ pontban? Létezik-e az x, illetve az y szerinti parciális deriváltja a $(0,0)$ pontban?

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

165. Differenciálható-e az alábbi függvény?

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{xy}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

166. Differenciálható-e az alábbi függvény a $(0,0)$ pontban?

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

4.3 Szélsőérték-feladatok

167. Határozzuk meg a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit!

$$f(x,y) = 2 + 3x + 12y - x^3 - y^3$$

168. Határozzuk meg a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit!

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

169. Határozzuk meg az $f(x,y) = x - \frac{1}{2}xy + y$ függvény maximumát és minimumát a $T = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartományon!

170. Egy négyszög oldalai rendre a, b, c, d hosszúak. Mikor lesz a négyszög területe maximális?

171. Fektessünk át a $P(a,b,c)$, $(a,b,c > 0)$ ponton egy síkot! Mikor lesz a P-n átmenő sík és a koordinátasíkok által határolt tetraéder térfogata minimális?

172. Adja meg a következő függvény maximumát és minimumát a megadott tartományon!

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x + 2y + 10, \quad T = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

173. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$ függvénynek az $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ egyenesek által bezárt háromszöglemezen a maximumát és minimumát!

174. Végezzünk lokális szélsőérték-vizsgálatot az alábbi függvényen!

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z - 6x$$

4.4 Integrálszámítás

175. Számítsa ki az alábbi kettős integrálokat!

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x \operatorname{sh} y}{y} dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{y^{2/3}}^1 y \operatorname{ch} x^2 dx dy$$

176. Számítsa ki az alábbi kettős integrálokat!

$$\int\!\!\int_T \frac{y^2}{x} dx dy,$$

ahol a T tartomány határoló görbéi a következő függvények: $y = x$, $y = 4x$, $y = \frac{2}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^2}$.

$$\int\!\!\int_T \frac{x^2}{y} dx dy,$$

ahol a T tartomány határoló görbéi a következő függvények: $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$.

177. Számítsa ki az alábbi kettős integrálokat!

$$\int\!\!\int_T \frac{1}{\sin^2(\frac{x+y}{2})} dx dy,$$

ahol $T = \{(x, y) : |x - \frac{\pi}{2}| + |y - \frac{\pi}{2}| \leq \frac{\pi}{2}\}$.

$$\int\!\!\int_T \cos(\frac{2x + y}{2}) dx dy,$$

ahol $T = \{(x, y) : |2x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$.

178. Számítsa ki a $\varrho(x,y,z)$ sűrűségű test tömegét, amelyet az alábbi felületek határolnak:
$z=-1$, $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=1$ és $\varrho(x,y,z)=x^2$.

179. Számítsa ki a $z=x^2-y^2$ nyeregfelület felszínét az $|y| \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ tartományon!

180. Számítsa ki az alábbi görbék által határolt $\varrho(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sűrűségű lemez súlypontjának koordinátáit: $x^2+y^2=1$, $(x-2)^2+y^2=4$, $y=x$, $y=-x$, $x>0$!

181. Számítsa ki a $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$ félgömb súlypontjának z koordinátáját, ha a sűrűség egyenesen arányos az origótól mért távolsággal!

182. Számítsa ki a nyolcadgömb súlypontjának koordinátáit, ha a sűrűség fordítottan arányos a gömb középpontjától mért távolsággal! (Helyezzük el a nyolcadgömböt a koordináta rendszerben úgy, hogy a gömb középpontja az origó és a nyolcadgömb a csúcsán áll a z tengely pozitív irányában.)

183. Tegyük fel, hogy egy H magasságú R alapkörsugarú kúpot H_0 magasságig megtöltünk vízzel. Határozza meg H_0-t úgy, hogy a kúp tehetetlenségi nyomatéka az y-tengelyre éppen a fele legyen annak, amit akkor kapnánk, ha tele lenne vízzel. (A kúp az alapkörén áll az (x,y) síkon. Tekintse a kúp határoló felületeit elhanyagolható tömegűnek!)

184. Számítsa ki az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ és $z=c$, $a,b,c \in \mathbf{R}$ felületekkel határolt homogén test koordinátasíkokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

1 A matematika alapjai - Megoldás

1.1 Halmazok és függvények - Megoldás

1. Megoldás:
a, Felhasználva a de Morgan-féle azonosságokat:
$X \cap (Y \setminus Z)^c = X \cap (Y \cap Z^c)^c = X \cap (Y^c \cup Z) = (X \cap Y^c) \cup (X \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$.
b, Teljesen hasonlóan bizonyítható.

2. Megoldás:
A szokásos halmazalgebrai eszközökkel egyszerűen igazolhatók.

3. Megoldás:
A szokásos halmazalgebrai eszközökkel egyszerűen igazolhatók.

4. Megoldás:
A szokásos halmazalgebrai eszközökkel egyszerűen igazolható.

5. Megoldás:
A szokásos halmazalgebrai eszközökkel egyszerűen igazolható.

6*. Megoldás:
Tegyük fel, hogy f injektív és legyen $b \in f(X) \cap f(Y)$ tetszőleges elem. Ekkor létezik egyetlen a elem, amelyre $b = f(a)$ és $a \in X \cap Y$, azaz $b \in f(X \cap Y)$. Így $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Az ellenkező irányú tartalmazás mindig teljesül, így $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$. Tegyük fel, hogy minden $X, Y \subset A$-ra $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ és f nem injektív. Ekkor létezik $x \neq y$ elem, hogy $f(x) = f(y)$. Legyen $b \in f(X) \cap f(Y)$. Ekkor b lehet egy $a \in X$ és egy $a' \in Y$ elemnek is a képe, azaz $f(X) \cap f(Y) \neq f(X \cap Y)$.

7. Megoldás:

a, $f(x) = \lg x$.

b, $f(x) = \frac{1}{x}$.

c*, Értelmezzünk egy olyan f függvényt, amelyre $f(\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{n+1}$ minden ($n \in N$)- re, $f(\frac{1}{2}) = 0$ és $f(x) = x$ egyébként. Megmutatható, hogy ezen függvény teljesíti a kivánalmakat.

d, Legyen $f(x, y)$ a $(0,1)^\frown(x, y)$ körív hosszának $\frac{1}{2\pi}$-szerese.

8*. Megoldás:

Ha egy x_0 pontban szigorú maximumhelye van egy f függvénynek, akkor definíció szerint az x_0 pontnak létezik olyan U_ε ε-sugarú környezete, hogy minden $x \in U_\varepsilon$ esetén $f(x) < f(x_0)$. Legyen B_n azon pontok halmaza, amelyekre a szigorú maximumhely definíciójában $\varepsilon = \frac{1}{n}$ megfelel. Ekkor $x, y \in B_n$, $x \neq y$ esetén az x és y körüli $\frac{1}{2n}$ sugarú nyílt intervallumok diszjunktak. Mivel nyílt halmazból álló diszjunkt halmazrendszer R-ben legfeljebb megszámlálhatóan végtelen (minden nyílt halmazban van ugyanis racionális szám), a szigorú maximumhelyek halmaza is legfeljebb ilyen számosságú.

9. Megoldás:

a, Megmutatjuk, hogy ez a reláció szimmetrikus, reflexív és tranzitív. $x_1 \sim x_2$ akkor $f(x_1) = f(x_2)$ azaz $x_2 \sim x_1$. Ha $x_1 \sim x_2$ és $x_2 \sim x_3$ akkor $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ miatt $x_1 \sim x_3$. Végül $x_1 \sim x_1$ mivel $f(x_1) = f(x_1)$.

b, A bijekció definiciója alapján nyilvánvaló. Megjegyezzük, hogy az így kapott függvényt f (egyik) maximális bijektív leszűkítésének nevezzük.

1.2 Elemi úton megoldható feladatok - Megoldás

10. Megoldás:
Matematikai indukcióval:
$0 = -1+6+11-16$, $1 = 1$, $2 = 1+6+11-16$, $3 = -1-6-11+16-21+26$, $4 = -1-6+11$, $5 = -1+6$. Tegyük fel, hogy A-ra igaz a fenti állítás. Megmutatjuk, hogy ekkor $A+5$-re is teljesül. A feltétel szerint A felírható $A = \pm1\pm6\pm11\pm\ldots\pm(5k+1)$ alakban valamely $k \in \mathbf{N}$-re. Mivel $5 = -(5k+6)+(5k+11)$, $A+5 = \pm1\pm6\pm11\pm\ldots\pm(5k+1)-(5k+6)+(5k+11)$. Ezzel az állítást igazoltuk.

11. Megoldás:
Legyen $f(x) = x^2 - 5 \quad x \in R$. Ekkor f-nek létezik az $x \geq -5$ tartományban inverz függvénye: $f^{-1}(x) = \sqrt{x+5}$.
Így az egyenlet jobb és baloldala a megadott tartományban egymás inverz függvényei. Ezek alapján elég megoldani az $x = \sqrt{x+5}$ egyenletet. Ezen másodfokú egyenletet megoldva kapjuk: $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. Megmutatható, hogy mind a két szám kielégíti az eredeti egyenletet. Geometriailag is látható, hogy az eredeti egyenletnek pontosan két valós megoldása van, így az egyenlet minden gyökét meghatároztuk.

12*. Megoldás:
A baloldalt x^2+a alakú kifejezés négyzeteként írjuk fel alkalmas állandóval: $x^4+4x-1 = x^4+2x^2-2x^2+4x-1 = (x^2+1)^2-1-2x^2+4x-1 = (x^2+1)^2-2(x^2-2x+1) = (x^2+1)^2-2(x-1)^2 = [x^2+\sqrt{2}(x-1)+1][x^2-\sqrt{2}(x-1)+1] = 0$, ami két másodfokú kifejezés szorzata. Ennek valós gyökei: $x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

13. Megoldás:
A feltételeknek eleget tevő függvény létezik, ugyanis egy valós

együtthatós harmadfokú egyenletnek mindig létezik valós megoldása. Megmutatjuk, hogy egyetlen ilyen függvény létezik
Tegyük fel, hogy két ilyen függvény van, f_1 és f_2 úgy, hogy $f_1 \neq f_2$ és teljesülnek az alábbi összefüggések:
$f_1^3 + 3f_1 = x$
$f_2^3 + 3f_2 = x$.
Ekkor a feltételek miatt:
$f_1^3 - f_2^3 + 3(f_1 - f_2) = (f_1 - f_2)(f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 + 3) = 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f_1 = f_2$.
Látható, hogy az $x \to f^3(x) + 3f(x)$ függvény differenciálható. Differenciálva az $f^3(x) + 3f(x) = x$ egyenlőség mindkét oldalát kapjuk:
$f'(x) = \frac{1}{3(f^2(x)+1)}$, azaz $f'(0) = \frac{1}{3}$.

14. Megoldás:
Indirekt módon: tegyük fel, hogy létezik olyan $p \neq 0$ valós szám, hogy minden x-re

$$\cos x + \cos\sqrt{2}x = \cos(x+p) + \cos(\sqrt{2}(x+p)).$$

A fenti egyenlőség $x = 0$-ban is teljesül, ezért szükségképpen

$$\cos p + \cos\sqrt{2}p = 2.$$

Ezen egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $\cos p = 1$ és $\cos\sqrt{2}p = 1$.
Ezek alapján kapjuk, hogy
$p = 2k\pi$ és $\sqrt{2}p = 2l\pi$ valamely k és l egész számra.
Ebből következőleg $\sqrt{2} = \frac{l}{k}$, ami ellentmondás.

15*. Megoldás:
Tegyük fel, hogy a g függvénynek a periódusa β. Legyen

$$h(x) = f(x) - f(x+\beta).$$

Megmutatjuk, hogy a h függvénynek p_0 is és $\frac{p_0}{\alpha}$ is periódusa.
Ugyanis az f függvény periodicitása miatt

$$h(x+p_0) - h(x) = f(x+p_0) - f(x+p_0+\beta) - f(x) + f(x+\beta) = 0.$$

Mivel a feltevés szerint a g függvénynek β periódusa,
$g(x+\beta)-g(x)=f(x+\beta)+f(\alpha(x+\beta))-f(x)-f(\alpha x)=0$, azaz
$h(x)=f(\alpha x+\alpha\beta)-f(\alpha x)$.
Így
$h(x+\frac{p_0}{\alpha})-h(x)=f(\alpha x+p_0+\alpha\beta)-f(\alpha x+p_0)-f(\alpha x+\alpha\beta)+f(\alpha x)=0$,
a h függvénynek p_0 is és $\frac{p_0}{\alpha}$ is periódusa.Ismeretes, hogy egy legkisebb periódussal rendelkező függvény periódusainak a halmaza pZ alakú, ahol p a pozitiv periódusok minimuma. Mivel α irreducibilis p_0-lal, ezért ez ellentmondásra vezet.

16. Megoldás:
Nem ekvivalensek. A második egyenlőtlenségrendszer nyilván következménye az elsőnek. Azonban az első rendszer a másodiknak nem következménye, mert $f_1+f_2>0$-ból $f_1>0$ esetén csak az következik, hogy $f_2>-f_1$, de nem következik, hogy $f_2>0$.

17. Megoldás:
$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$.

18. Megoldás:
Ismert, hogy $(1+\frac{1}{n})^n<3$.

19. Megoldás:
Legyen $a=m+r$, ahol $m\in N$ és $0<r<1$.
Ez esetben a feladat azzal ekvivalens, hogy

$$m>\frac{n}{n+1}(m+r).$$

Azonos átalakitásokat elvégezve ez
$m>nr$ alakra hozható, ami a feltételek miatt nyilván teljesül.

20. Megoldás:
A 19. feladathoz hasonlóan, esetszétválasztással egyszerűen igazolható.

21*. Megoldás:

Először megmutatjuk, hogy teljesül az alsó becslés:

Triviális becsléssel látható, hogy

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

A felső becslés kissé ravaszabb; ehhez először csoportosítjuk a tagokat:

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}(\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{2}{2n}+\frac{2}{n})-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}[(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n})+(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1})+\cdots+(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n})]-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2n-k}+\frac{1}{n+k})-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{3n}{(2n-k)(n+k)}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{3n}{2n^2}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n}-\frac{1}{n}<\frac{3}{4}$.

Megjegyezzük, hogy

$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})=\ln 2$.

22*. Megoldás:

$\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$,ezért ezt figyelembe véve

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n-1}+(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1})<(2n-1)\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=2$.

Másrészt

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{2}((\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1})+(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n})+...+(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}))=$

$\frac{1}{2}(\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)^2}+...+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2})>\frac{1}{2}(2n+1)\frac{(4n+2)}{(2n+1)^2}=1$

23*. Megoldás:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n-2)}+1$. Parciális törtekre bontással adódik, hogy $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n-2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)}-\frac{2}{(n)}+\frac{1}{(n+1)}=\frac{1}{2}[(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1})+\ldots=\frac{1}{4}$ (ui. a sor konvergens); azaz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$. Megjegyezzük, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ irracionális szám.

24. Megoldás:

Triviális becsléssel mind a két bizonyítandó egyenlőtlenség egyszerűen adódik.

25*. Megoldás:

Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$, ha $x > 0$.

Mivel az f függvény konvex,

$\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \frac{1}{x} = \ln(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$.

Így

$\ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$, azaz $(1+\frac{1}{n})^{\sqrt{n^2+n}} < e$.

Másrészt

$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{x} = \ln(1+\frac{1}{n}) > \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$, ezért $(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} > e$.

26. Megoldás:

Matematikai indukcióval adódnak. Használjuk fel:

a, esetben, hogy $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

b, esetben, hogy $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$,

c, esetben, hogy $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

d, esetben, hogy $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ és $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

e, esetben, hogy $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ és $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

f, Matematikai indukcióval is bizonyítható, de ez következik az $\binom{n}{k}$ kombinatorikai értelmezéséből is, e szerint ugyanis ez az n elemű halmaz összes k elemű részhalmazának a számával egyenlő.

27. Megoldás:

$\sqrt[n]{x^n + a^n} \leq a + x$ a binomiális tétel következménye. Igazoljuk, hogy $\frac{x+a}{\sqrt[n]{2^{n-1}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n}$. Ehhez vezessük be a következő jelölést: $f(x) = \frac{\sqrt[n]{x^n+a^n}}{x+a}$. Megmutatjuk, hogy

$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}$, ha $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{a(x^{n-1} - a^{n-1})}{\sqrt[n]{(x^n + a^n)^{n-1}(x+a)^2}} = \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < a \\ = 0, & \text{ha } x = a \\ > 0, & \text{ha } x > a \end{cases}$$

Azaz $f(x)$ szigorúan monoton csökken, ha $x < a$ és szigorúan monoton nő, ha $x > a$, minimuma van $x = a$-ban, azaz $f(a) = \frac{\sqrt[n]{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}$, így $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}$.

28. Megoldás: Matematikai indukcióval.

29. Megoldás:
A bizonyítás n szerinti matematikai indukcióval történhet.

30. Megoldás:
A bizonyítás történhet például n szerinti matematikai indukcióval.

31. Megoldás:
Ismeretes (például a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt), hogy minden n természetes számra
$(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$, ezért
$(1.000001)^{1000000} > 2.$

32. Megoldás:
A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből következik az $a, b, b, \cdots, b$ $n+1$ darab számra alkalmazva.

33. Megoldás:
A számtani és mértani közép között fenálló egyenlőtlenségből adódik.

34. Megoldás:
Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közt fennálló egyenlőtlenséget!
$1 < \sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{1 \cdots 1a} < \frac{n-1+a}{n} = \frac{n+(a-1)}{n}.$

35. Megoldás:
A számtani-mértani közép közt fennálló egyenlőtlenségből következik.

36*. Megoldás:
Elegendő megmutatni, hogy az állítás teljesül tetszőleges természetes számra, ugyanis ekkor az előjelek értelemszerű