

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
TERMÉSZET ÉS TÁRSADALOMTUDOMÁNYI KAR

Bajcsay Pál

MATEMATIKA II.

Analízis, Vektoranalízis



Műegyetemi Kiadó, 1998.

Lektorálta:

Dr. Monostory Iván

Szerző:

Dr. Bajcsay Pál

egyetemi tanár

Szövegszerkesztés:

Géczy Flóra

(Második utánnymás)

Azonosító: **045016**

A Budapesti Műszaki Egyetem Természet és Társadalomtudományi Kar

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 17,14 A/5 ív

Nyomtatta és kötötte:

Műegyetemi Nyomda

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 98 - 128

Tartalomjegyzék

8. Végtelen sorok	7
8.1. Numerikus sorok	7
8.1.1. Végtelen geometriai (mértani) sor	7
8.1.2. Végtelen sor konvergenciája	9
8.1.3. Pozitív tagú sorok	10
8.1.4. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok	15
8.1.5. Abszolút konvergens sorok, feltételesen konvergens sorok	18
8.2. Függvénysorok	21
8.2.1. Függvénysorozatok egyenletes konvergenciája	21
8.2.2. Függvénysorok konvergenciája	23
8.2.3. Hatványsorok	24
8.2.4. Taylor-sor	29
8.2.5. Binomiális sor	37
8.2.6. Integrálás sorbafejtéssel	38
8.2.7. Elemi függvények hatványsora	41
9. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK	43
9.1. Alapfogalmak	43
9.1.1. Bevezetés	43
9.1.2. Definíciók, jelölések	44
9.1.3. Kétváltozós függvény ábrázolása	45
9.1.4. Kettőnél több változós függvények szemléltetése	51
9.2. Határérték, folytonosság	51
9.2.1. Pontfüggvény határértéke, folytonossága	51
9.3. Kétváltozós függvények deriválása	57
9.3.1. A parciális derivált fogalma	57
9.3.2. Teljes differenciál, differenciálhatóság	60
9.3.3. Iránymenti derivált	63
9.3.4. Kétváltozós összetett függvény deriválása	66
9.3.5. Kétváltozós függvény magasabbrendű parciális deriváltjai	67
9.3.6. Kétváltozós függvény magasabbrendű totális differenciáljai	69
9.3.7. A Taylor-formula általánosítása kétváltozós függvények esetére	70
9.3.8. Kétváltozós függvény lokális szélső értéke létezésének szükséges feltétele	72

9.3.9.	Kétváltozós függvény lokális szélsőértéke létezésének egy elégséges feltétele	73
9.3.10.	Kétváltozós függvények kötött szélsőértékadatairól	77
9.3.11.	Implicit függvények (függvényrendszerek) és deriválásuk	81
9.3.12.	Függvényrendszerek, transzformációk, leképezések	83
9.4.	Többváltozós függvények integrálása	93
9.4.1.	Kétváltozós függvény paraméteres integrálja	93
9.4.2.	Tartományintegrál általános definíciója és tulajdonságai	95
9.4.3.	Kétváltozós függvény kettős integrálja	100
9.4.4.	Kettős integrál változóinak transzformációja	104
9.4.5.	Háromváltozós függvény hármas integrálja	106
9.4.6.	Hármas integrál változóinak transzformációja	108
9.4.7.	Kettős és hármas integrálok néhány alkalmazása	108
10.	Vektoranalízis	125
10.1.	Vektor-skalár függvények	125
10.1.1.	Bevezető alapfogalmak	125
10.1.2.	Egyváltozós (egyparaméteres) vektor-skalár függvények, térgörbék	126
10.1.3.	Térgörbék ívhossza	128
10.1.4.	Kétváltozós (kétparaméteres) vektor-skalár függvények, felületek.	130
10.1.5.	Felületdarab felszíne	133
10.2.	Skalár-vektor függvények	134
10.2.1.	Alapfogalmak	134
10.2.2.	Skalár-vektor függvény deriváltja: a gradiens vektor	136
10.2.3.	Skalár-vektor függvény iránymenti deriváltja	138
10.3.	Vektor-vektor függvények	141
10.3.1.	Alapfogalmak	141
10.3.2.	Homogén lineáris vektor-vektor függvények: tenzorok	143
10.3.3.	Speciális tenzorok	147
10.3.4.	Önadjungált (szimmetrikus) tenzorral előírt leképezés	154
10.3.5.	Tenzor felbontása izometrikus és önadjungált (szimmetrikus) tenzor szorzatára.	160
10.3.6.	Vektor-vektor függvény deriváltja. Deriválttenzor	161
10.3.7.	Vektor-vektor függvény irányított görbementi integrálja (vonalin- tegrál).	169
10.3.8.	Vektoreloszlás (egyértékű) skaláris potenciálja.	170
10.3.9.	Vektor-vektor függvény irányított felület menti integrálja.	174

10.3.10.Térbeli és síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-féle tétel.	176
10.3.11.Green-féle tételek	181
10.3.12A Stokes-féle tétel	182
10.3.13.Görbevonalú ortogonális koordinátarendszerek	185
10.3.14A gradiens vektor kiszámítása görbevonalú ortogonális koordinátarendszerben	189
10.3.15A divergencia és a rotáció kiszámítása görbevonalú ortogonális koordinátarendszerben.	189

8. Végtelen sorok

8.1. Numerikus sorok

8.1.1. Végtelen geometriai (mértani) sor

Ha az $\frac{1}{3}$ számot tizedestört alakban akarjuk felírni, akkor az 1:3 osztást egyre több számjegyre elvégezve, rendre a következő egyenlőségekre jutunk:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0,3 + \frac{1}{30} = \\ &= 0,33 + \frac{1}{300} = \\ &= 0,333 + \frac{1}{3000} = \dots,\end{aligned}$$

ami még így is írható:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{3}{10} + \frac{1}{3 \cdot 10} = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^2} = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} = \dots = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n} + \frac{1}{3 \cdot 10^n} = \dots\end{aligned}$$

Az $\frac{1}{3}$ tört megközelítésére szolgáló

$$\begin{aligned}&\frac{3}{10}, \\ &\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}, \\ &\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}, \\ &\dots \\ &\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n},\end{aligned}$$

számok úgy keletkeznek, hogy a

$$\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \dots, \frac{3}{10^n}, \dots$$

végtelen számsorozat elemeiből egyre többnek vesszük az összegét. Azt mondjuk ilyenkor, hogy a számok a

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

végteles numerikus (számokból álló) sor ún. *részletösszegei*. Ezeknek a részletösszegeknek az $\frac{1}{3}$ számtól való eltérése rendre

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^2}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^n}, \dots,$$

tehát n növekedtével minden határon túl csökken. Azt mondjuk, hogy az $\frac{1}{3}$ szám, amelyhez a végteles sor részletösszegei minden határon túl közelednek, a *végteles sor összege*.

A példaként felhozott sor egyes tagjait úgy nyerhetjük, hogy a megelőző tagot ugyanazzal a számmal, $\frac{1}{10}$ -del szorozzuk. Az így felépített sort, amelyben minden egyes tag az előzőkből egy rögzített számmal való szorzás útján keletkezik, *geometriai (mértani) sor-nak* nevezzük; az a rögzített szám, amellyel a sor tagjait megszorozva, a következő tagot nyerjük, a geometriai sor *hányadosa* (*quotiense*).

Ha a geometriai sor hányadosa q és kezdőtagja 1, akkor az alakja:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$$

A nevezővel való átszorzással könnyen igazolható, hogy $q \neq 1$ esetén

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ez a képlet tehát megadja a geometriai sor n -edik részletösszegét.

Ha most feltesszük, hogy $0 < q < 1$, akkor

$$\frac{q^n}{1 - q} > 0,$$

tehát

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q} < \frac{1}{1 - q}.$$

Ekkor a sor tagjai monoton csökkennek:

$$q^{n+1} = q \cdot q^n < 1 \cdot q^n = q^n$$

és minden határon túl közelednek 0-hoz. Ha ugyanis a q^n számok pl. $\frac{1}{10^6}$ -nál nagyobbak maradnának, akkor a sor elég sok tagot tartalmazó részletösszegei $\frac{1}{10^6}$ -nak bármilyen előírt többszörösénél nagyobbak volnának, s így nem maradhatnának $\frac{1}{1-q}$ -nél kisebbek. Tehát $0 < q < 1$ esetén $q^n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

Ugyanez áll persze akkor is, ha $-1 < q < 0$, hiszen ekkor $0 < |q| < 1$, tehát $|q^n| = |q|^n \rightarrow 0$ és így $q^n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

Mindebből következik, hogy ha $|q| < 1$, akkor a geometriai sor részletösszegei minden határon túl közelednek az $\frac{1}{1-q}$ számhoz. Láttuk ugyanis, hogy a sor n -edik részletösszege

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$$

és itt $|q| < 1$ esetén $q^n \rightarrow 0$, tehát egyszersmind $\frac{q^n}{1-q} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ezt a körülményt úgy fejezzük ki, hogy $|q| < 1$ esetén a végtelen geometriai sornak van összege (konvergens) és az összeg $\frac{1}{1-q}$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-q},$$

vagy

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \text{ha } |q| < 1.$$

8.1.2. Végtelen sor konvergenciája

Az előzőek mintájára valamely

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

kifejezést *végtelen (numerikus) sornak* nevezünk. Az u_k számok a *sor tagjai*: az

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

számok pedig a *sor részletösszegei*. Az s_n számok, vagyis a sor részletösszegei végtelen sorozatot alkotnak.

A végtelen sort a részletösszegek végtelen sorozata definiálja. A szerint, hogy a részletösszegek sorozata konvergens, vagy divergens, mondjuk azt, hogy a *végtelen sor konvergens, vagy divergens*. Ha tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

akkor a végtelen sor konvergens és az s számot, vagyis a részletösszegek sorozatának a határértékét nevezzük a *sor összegének*:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Azon, hogy az s_n számok minden határon túl közelednek az s számhoz, pontosan azt értjük, hogy bármilyen kicsiny pozitív ε hibakorlátot írunk is elő, az s_n számok bizonyos n_0 indextől kezdve ε -nál kisebb hibával közelítik meg az s számot; vagyis hogy tetszőleges kicsiny $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan n_0 index, hogy

$$|s_n - s| < \varepsilon, \quad \text{hacsak } n > n_0(\varepsilon).$$

Ha a végtelen sor részletösszegei nem közelednek semmiféle határértékhez minden határon túl, vagyis a részletösszegek sorozata divergens, akkor a sort is *divergensnek* mondjuk. Divergens sor összegéről nem beszélhetünk, divergens sornak nincs összege.

Nevezetes divergens sor pl. a harmonikus sor:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Hogy ez a sor divergens, azt a következő becslések alapján lehet belátni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} &> \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Tehát a sornak elég sok tagját összeadva, az $\frac{1}{2}$ szám akármilyen nagy többszörösénél is nagyobb részletösszegekre jutunk. Így a sor részletösszegei semmilyen határértékhez nem tarthatnak.

Ahhoz, hogy az

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

sor konvergens legyen, mindenesetre szükséges, hogy tagjainak abszolút értéke zérushoz tartson. Ha ugyanis a sor konvergens és az összege s , akkor adott $\varepsilon > 0$ és elég nagy n mellett biztosan

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |s_{n-1} - s| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát

$$\begin{aligned} |u_n| = |s_n - s_{n-1}| &= |(s_n - s) + (s - s_{n-1})| \leq \\ &\leq |s_n - s| + |s_{n-1} - s| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

úgyhogy elég nagy n indexekre

$$|u_n| < \varepsilon,$$

amint állítottuk.

A geometriai sor pl. $|q| < 1$ esetén konvergens, s csakugyan ekkor $q^n \rightarrow 0$. Ha azonban $|q| \geq 1$, akkor $|q^n| = |q|^n \geq 1$, tehát q^n nem tarthat 0-hoz; ebben az esetben tehát a geometriai sor nem lehet konvergens, hanem divergens.

Az előbbi tételünk megfordítása azonban nem áll: a sor tagjai zérushoz tarthatnak anélkül, hogy a sor konvergens volna. Példa erre a harmonikus sor, ahol ugyan $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ és a sor mégis divergens.

8.1.3. Pozitív tagú sorok

Azt, hogy egy végtelen sor konvergens-e vagy divergens-e, gyakran igen nehéz eldönteni. Áránlag egyszerű mégis a helyzet, ha a sor tagjai mind pozitívak.

Pozitív tagú végtelen sor ugyanis akkor és csakis akkor konvergens, ha részletösszegei valamely rögzített korlátnál kisebbek maradnak.

Ha ugyanis az $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ sorban $u_n > 0$ és a sor konvergens, akkor összegét s -sel jelölve, nyilvánvalóan $s_n < s$ minden n -re, úgyhogy a részletösszegek mind kisebbek maradnak pl. az s számnál (vagy bármely más s -nél nagyobb számnál). Ha viszont az s_n számok valamely K korlátnál nem nagyobbak: $s_n \leq K$, akkor az ilyen tulajdonságú K számok közül a legkisebbet (bizonyítható, hogy ilyen van) jelöljük k -val. A sor részletösszegei ekkor a k határértékhez tartanak. Legyen ugyanis ε tetszőleges kicsiny pozitív szám. Akkor $k - \varepsilon$ már kisebb k -nál, tehát nem maradhatnak a részletösszegek valamennyien $k - \varepsilon$ alatt, úgyhogy alkalmas n_0 indexre már $s_{n_0} > k - \varepsilon$. De a sor pozitív tagú volta miatt $n > n_0$ esetén $s_n > s_{n_0}$, tehát ekkor

$$k - \varepsilon < s_{n_0} < s_n \leq k.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az elég nagy indexű részletösszegek a k számot ε -nál kisebb hibával közelítik meg, amint állítottuk.

Mindebből a következő fontos szabály következik (*összehasonlítási kritérium*):

ha az

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

és

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

sorok pozitív tagúak és a $v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ sor konvergens, továbbá $u_n \leq v_n$ minden n -re, akkor az $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ sor is konvergens.

Ekkor ugyanis alkalmas K korlát mellett

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq K,$$

tehát egyszersmind

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq K.$$

Igy például az

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} + \dots$$

sor biztosan konvergens, mert

$$\frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$$

és az

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

geometria sor pedig konvergens.

Konvergens geometria sorral való összehasonlítás alapján adódik két nevezetes konvergenca-kritérium: a *hányados-* és a *gyökkritérium*.

Tegyük fel azt, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ pozitív tagú sor ν indexű tagjától kezdve fennál, hogy

$$\begin{aligned} u_{\nu+1} &\leq u_{\nu} q, \\ u_{\nu+2} &\leq u_{\nu+1} q \leq u_{\nu} q^2 \end{aligned}$$

és így tovább; általában, ha $n = \nu + k > \nu$, akkor

$$u_n = u_{\nu+k} \leq u_{\nu} q^k;$$

tehát

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\nu-1} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} u_{\nu+k} \leq \sum_{k=1}^{\nu-1} u_k + u_{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Ha tehát $0 < q < 1$, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergens és így biztosan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ is konvergens. Ebből adódik az ún. *hányados-kritérium* (*D'Alembert*):

Ha a pozitív tagú $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ végtelen sornál van olyan ν index, hogy $n \geq \nu$ esetén

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1,$$

akkor a sor *konvergens*; ha viszont ugyanezen feltételek esetén

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

akkor a sor *divergens*.

Más megfogalmazásban:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$$

esetén a sor *konvergens* és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d > 1$$

esetén a sor *divergens*. Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

akkor a hányados-kritériummal *nem dönthető el* a sor konvergenciája.

Tegyük most fel azt, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ pozitív tagú sor esetében van olyan ν index, hogy $n \geq \nu$ esetén

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1.$$

Ekkor legalábbis a ν indexű tagtól kezdve az adott sor majoránsa a konvergens

$$q^{\nu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

geometriai sor. Mert hiszen

$$\begin{aligned} u_{\nu} &\leq q^{\nu}, \\ u_{\nu+1} &\leq q^{\nu+1} = q^{\nu} \cdot q \end{aligned}$$

és általában

$$u_{\nu+k} \leq q^{\nu+k} = q^{\nu} \cdot q^k.$$

Ebből adódik az ún. *gyökkritérium (Cauchy)*:

Ha a pozitív tagú $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ végtelen sornál van olyan ν index, hogy $n \geq \nu$ esetén

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1,$$

akkor a sor *konvergens*, ha viszont ugyanezen feltételek esetén

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

akkor a sor *divergens*.

Más fogalmazásban:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q < 1$$

esetén a sor *konvergens* és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = d > 1$$

esetén a sor *divergens*. Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1,$$

akkor a gyökkritériummal *nem dönthető el* a sor konvergenciája.

*Cauchy*tól származik még egy konvergencia-kritérium, az ún. *integrálkritérium*. Ennek a lényege a következő:

Tegyük fel, hogy adva van a

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

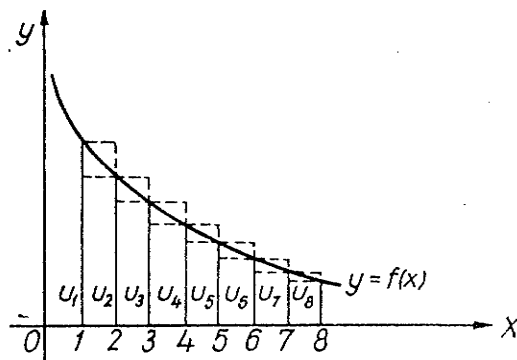
végtelen sor, amelynek tagjai pozitívok és monoton csökkennek, azaz

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots 0.$$

Ábrázoljuk a sor egyes tagjait egy koordináta-rendszerben úgy, hogy n az abszcissza és u_n az ehhez tartozó ordináta. Mindig lehet találni egy olyan $f(x)$ függvényt, hogy

$$u_n = f(n)$$

legyen.



1. ábra

A sor n -edik részletösszegének így geometriai értelmet adhatunk:

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k > \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

illetve

$$s_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

(Az első esetben az $y = f(x)$ egyenletű görbe alatti területet az öt felülmúló felső lépcsősgörbe, a második esetben pedig az alsó lépcsősgörbe alatti területtel hasonlítottuk össze.)

Tegyük fel azt, hogy az

$$I = \int_1^{\infty} f(x) dx$$

improprius integrál létezik, azaz I véges számérték. Mivel $f(x)$ pozitív, azért

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

tehát

$$s_n < s_{n+1} < u_1 + I.$$

Ez esetben tehát s_n monoton növekszik és felülről korlátos, tehát a vizsgált sor konvergens.

Másrészről tegyük fel azt, hogy $\int_1^{\infty} f(x) dx$ divergens. Ekkor ha n elég nagy, nagyobb pl. egy alkalmas ν számnál, az

$$\int_1^{n+1} f(x) dx$$

integrál bármely nagy előre megadott számnál is nagyobbá tehető és ugyanez áll

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x) dx$$

miatt az s_n részletösszegre is. Tehát a vizsgált sor divergens.

Mindezek alapján az integrál-kritériumot így fogalmazhatjuk:

A pozitív tagú $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ végtelen sor konvergens, vagy divergens aszerint, hogy az

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

improprius integrál konvergens, vagy divergens, ahol $f(x)$ egy olyan monoton csökkenő folytonos függvény, melyre $u_n = f(n)$.

Például vizsgáljuk meg azt, hogy mely $\alpha > 0$ kitevő esetén konvergens a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

végtelen sor.

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha},$$

mert ekkor teljesül, hogy

$$f(n) = \frac{1}{n^\alpha}.$$

$f(x)$ -szel írható:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1), & \text{ha } \alpha \neq 1, \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b, & \text{ha } \alpha = 1. \end{cases}$$

Láthatóan $\alpha \leq 1$ esetén ez az integrál és így a vizsgált sor is divergens. Ha viszont $\alpha > 1$, akkor

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{\alpha - 1},$$

tehát ekkor a sor biztosan konvergens.

8.1.4. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

Egy másik eset, amikor könnyű a sor konvergenciáját felismerni az az eset, amikor a sor tagjai váltakozó előjelűek és abszolút értékük csökkenőleg zérushoz tart (Leibniz-típusú sor).

Legyen ugyanis a sor a következő:

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \dots,$$

ahol $p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > \dots > 0$.

Ennek a sornak a páros indexű részletösszegei egyszersmind a pozitív tagú

$$(p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \dots + (p_{2n-1} - p_{2n}) + \dots$$

sornak a részletösszegei és például s_{2n} -et az

$$s_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \dots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n}$$

alakban írva látható, hogy

$$s_{2n} < p_1,$$

vagyis mindegyik páros indexű részletösszeg kisebb, mint p_1 . Ezért

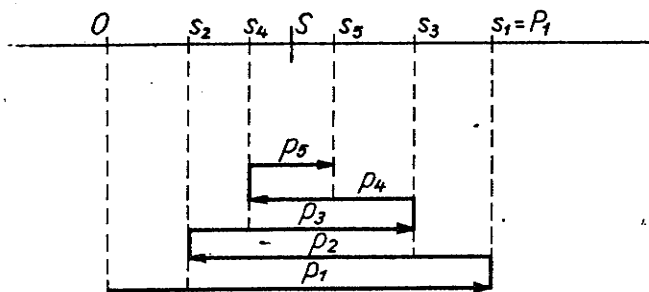
$$(p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \dots + (p_{2n-1} - p_{2n}) + \dots$$

sor konvergens, az eredeti sor páros indexű részletösszegei egy meghatározott határértékhez tartanak. Ugyanehhez a határértékhez tartanak azonban a páratlan indexű részletösszegek is, hiszen

$$s_{2n+1} = s_{2n} + p_{2n+1}$$

és ha $n \rightarrow \infty$, akkor a feltevés szerint $p_{2n+1} \rightarrow 0$.

Ábrázoljuk a sor részletösszegeit a számegyenesen:



2. ábra

Azonnal látható, hogy

$$s_2 < s_4 < s_6 < \dots < s < \dots < s_5 < s_3 < s_1$$

továbbá

$$|s_n - s| < p_{n+1}.$$

Vagyis az ilyen sorban bármely részletösszegnek a sor összegétől való eltérése kisebb, mint a részletösszeget követő tagnak (vagyis az első figyelembe nem vett, tehát elhagyott tagnak) az abszolút értéke.

Például vizsgáljuk a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

végtelen sort.

Ez a sor váltakozó előjelű és a tagok abszolút értéke monoton csökkenőleg 0-hoz tart, tehát a sor konvergens.

A sor összegét egyszerű számítással meg lehet becsülni.

A sor tagjait párosával zárójelekbe foglalva és a zárójeleken belül összevonva, nyerjük a következő sort:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots = \\ & = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}. \end{aligned}$$

Ez a sor pozitív tagú, de mivel az előző sorral azonos, maga is konvergens, és az összege ugyanaz. Továbbá az is bizonyos, hogy a sor összege bármelyik részletösszegénél nagyobb (pozitív tagú sor részletösszegeinek a sorozata monoton növekszik), tehát pl.

$$s > \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} > 0,634.$$

Másképpen zárójelezve viszont a következő sort nyerjük:

$$\begin{aligned} & 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots = \\ & = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} - \dots \end{aligned}$$

Ez a sor is konvergens és összege ugyanaz. Továbbá bizonyos, hogy

$$s < 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{6 \cdot 7} < 0,760.$$

Hogy a sor s összege mivel egyenlő, azt a következő fogással meg tudjuk mondani. Vonjuk ki ugyanis a sor s_{2n} részletösszegét a harmonikus sor $2n$ -edik részletösszegéből:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}\right) = \\ & = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

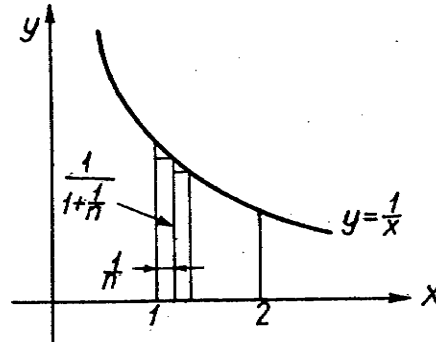
úgy hogy tehát

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Ez azután még így is írható:

$$s_{2n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{2} \right).$$



3. ábra

És ez nem más, mint az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényhez és az $[1, 2]$ intervallum n egyenlő részre való felosztásához tartozó integrálközelítő összeg, ha az egyes részintervallumokban a függvényértéket az intervallum végpontjában vesszük. Ha most feltesszük, hogy $n \rightarrow \infty$, akkor az $[1, 2]$ intervallumnak ez a felosztása minden határon túl finomul, ezért

$$s_{2n} \rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

A sor összege tehát

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

és az előző becslés szerint biztosan

$$0,634 < \ln 2 < 0,760.$$

(Lényegesen több tag figyelembevételével, azaz pontosabb számolással azt kapnánk, hogy $\ln 2 \approx 0,69315$.)

8.1.5. Abszolút konvergens sorok, feltételesen konvergens sorok

Minthogy a végtelen sor összege a részletösszegek határértékeként van értelmezve, hajlamosak vagyunk a végtelen sort végtelen sok tagú összegnek tekinteni és vele összegek módjára bántani.

Sok esetben ez helyes eredményre is vezet. Így pl. könnyű igazolni, hogy ha

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = s,$$

akkor

$$cu_1 + cu_2 + cu_3 + \dots = cs.$$

Vagy pl.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = u,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots = v$$

esetén

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \dots = u + v.$$

Szabad továbbá egy konvergens sor tagjai közé 0-okat beszúrni, vagy közülük 0-okat elhagyni, tagokat összevonni, stb.

Mégsem szabad azt hinnünk, hogy végtelen sorokkal minden tekintetben szabad közönséges összegek módjára számolni.

Ezzel kapcsolatban tekintsük a következő *példát*:

Láttuk, hogy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

Rendezzük át a sort úgy, hogy egy pozitív tagot két negatív kövessen:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

A véges összegek mintájára azt várjuk, hogy ezáltal a sor összege változatlan maradjon. Ez azonban nincs így, amiről meggyőződhetünk, ha a pozitív tagokat a rájuk következő taggal összevonjuk:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots = \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Az átrendezett sor összege az eredeti sor összegének $\frac{1}{2}$ -szerese.

E példából látható, hogy ha egy sor tagjainak a sorrendjét megváltoztatjuk, ezáltal a sor összege megváltozik (sőt meg lehetne mutatni, hogy átrendezéssel konvergens sorból divergens is válhatik).

Van azonban a soroknak egy fontos osztálya, amelynél a sor átrendezése megengedett. Ilyenek t.i. az abszolút konvergens sorok.

Az

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

sor *abszolút konvergensnek* mondjuk, ha a tagok abszolút értékeiből alkotott

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

sor konvergens.

Igy például az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

sor abszolút konvergens, mert az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

végtelen geometriai sor konvergens.

Ha a konvergens sor nem abszolút konvergens, akkor azt *feltételesen konvergensnek* nevezzük.

Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is, megfordítva azonban nem.

Egy sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha a tagok abszolút értékeiből alkotott sor részletösszegeinek sorozata korlátos.

Be lehet azt bizonyítani, hogy abszolút konvergens sor tagjait tetszésszerűen átrendezve ismét abszolút konvergens sort nyerünk, melynek összege ugyanaz, mint az eredeti soré. Feltételesen konvergens sornál azonban ez nem így van. Az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

sor nem abszolút konvergens, csak feltételesen konvergens, hiszen az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

sor (a harmonikus sor) divergens. Ezért kaphattunk más sorösszeget a tagok átrendezésével.

További előnyös tulajdonságuk az abszolút konvergens soroknak az, hogy szorzásukat az összegek szorzásának mintájára végezhetjük. Vagyis ha az

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = u$$

és

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots = v$$

sorok abszolút konvergenssek, akkor az egyik sor minden tagját a másik sor minden tagjával megszorozva és a kapott szorzatokból tetszésszerűen sorrendben végtelen sort alkotva ismét abszolút konvergens sort nyerünk, amelynek az összege a két sor összegének a szorzata: uv .

Ennek az állításnak az igazolásával nem foglalkozunk, csak megjegyezzük, hogy ha az összeszorozott sorok egyike csak feltételesen konvergens, akkor az előbbi szabály szerinti szorzás helytelen eredményt adhat.

8.2. Függvénysorok

8.2.1. Függvénysorozatok egyenletes konvergenciája

Legyen adva az $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett f_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) függvényeknek a megszámlálhatóan végtelen sorozata:

$$f_0, f_1, f_2, \dots$$

Ha minden $x \in I$ helyen az

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$$

helyettesítési értékekből képezett végtelen számsorozat konvergens, akkor az $f(x)$ határérték definiálja az f függvény x helyen vett helyettesítési értékét. Azt mondjuk, hogy az (f_k) függvénysorozat az I intervallumon *pontonként konvergál* az f függvényhez, ha minden $x \in I$ esetén létezik az

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

határérték.

A konvergencia sebessége, tehát pl. az, hogy mennyire jól közelíti meg $f(x)$ -et az $f_k(x)$ ($k \geq k_0$), általában pontról pontra különböző lehet. Éppen ezért alapvető a következő fogalom:

Az $f_0, f_1, f_2, \dots$ függvénysorozat az I intervallumon *egyenletesen konvergál* az

$$f : I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényhez, ha bármely kicsiny $\varepsilon > 0$ hibakorlát esetén mindegyik $x \in I$ mellett egységesen ugyanazt a *csak* ε -tól függő $N(\varepsilon)$ küszöbszámot meg lehet adni úgy, hogy

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{minden } x \in I \text{-re,}$$

hacsak

$$n > N(\varepsilon).$$

Ha az f_n függvények az I intervallumon mind folytonosak, és az (f_n) függvénysorozat az I intervallumon egyenletesen konvergál az f függvényhez, akkor az f határfüggvény is folytonos.

Válasszunk ugyanis egy $\varepsilon > 0$ hibakorlátot. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt van olyan N index, hogy

$$|R_n(x)| = |f(x) - f_N(x)| < \varepsilon$$

minden $x \in I$ -re. Ha most $x \in I$ és $x_0 \in I$ két különböző helyet jelöl, akkor érvényes a következő becslés:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \\ &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f(x_0) + f_N(x_0) - f_N(x)| \leq \\ &\leq |R_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |R_N(x_0)| \leq \\ &\leq |f_N(x) - f_N(x_0)| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Miután f_N a feltevés szerint folytonos, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_N(x) = f_N(x_0),$$

azért innen következik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tegyük most fel azt, hogy a folytonos f_n függvények sorozata az I intervallumon egyenletesen konvergál az

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

határfüggvényhez. Ekkor, ha $a < b$ és $a, b \in I$, igaz, hogy

$$\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Legyenek $\varepsilon > 0$ és $N \in \mathbb{N}$ úgy megválasztva, hogy minden $n > N$ és $x \in I$ mellett érvényes a következő becslés:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ekkor ebből következik, hogy ha $n > N$, akkor

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx < \varepsilon.$$

Legyenek az (f_n) függvénytípus sorozat függvényei az I intervallumon folytonosan differenciálhatók és teljesüljön pontonként az I intervallumban, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x);$$

ha most az f'_n deriváltakból képezett függvénytípus sorozat I -ben egyenletesen konvergens, akkor az f határfüggvény is deriválható és fennáll, hogy

$$f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Jelölje ugyanis $g(x)$ az $(f'_n(x))$ sorozat határértékét, azaz

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad x \in I$$

és itt a konvergencia a feltevés szerint egyenletes, akkor (feltételezve, hogy $a \in I$ és $x \in I$)

$$\int_a^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a);$$

innen pedig következik, hogy

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

8.2.2. Függvénysorok konvergenciája

Az

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad x \in I$$

kifejezést *végteles függvénysornak* (röviden *függvénysornak*) nevezzük. Az f_k függvények a függvénysor tagjai; az

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

összegek a *függvénysor részletösszegei*. A részletösszegek végteles függvénysorozatot alkotnak.

A végteles függvénysort a részletösszegeinek végteles sorozata definiálja. A szerint, hogy ez a sorozat konvergens, vagy divergens, mondjuk azt, hogy a *végteles függvénysor konvergens*, vagy *divergens*. Ha tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$$

létezik, akkor a függvénysor konvergens és az f függvényt, vagyis a részletösszegek sorozatának a határértékét nevezzük a *sor összegének*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x); \quad x \in I.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy ha $x \in I$, akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz lehet találni olyan (ε -tól és x -től függő) N küszöbszámot, hogy

$$|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{hacsak } n > N(\varepsilon, x).$$

Fontosak azok a függvénysorok, amelyeknél N csak ε -tól függ és x -től nem. Ezeket a függvénysorokat nevezzük *egyenletesen konvergensnek*. Ilyenkor tehát a függvénysor részletösszegeinek a sorozata egyenletesen konvergál a függvénysor összegéhez.

Az egyenletesen konvergens függvénysorozatokra érvényes tételek értelemszerűen átvihetők egyenletesen konvergens függvénysorokra. Így pl. ha az f_k folytonos függvények

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

végteles sorá az I intervallumon egyenletesen konvergens, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad x \in I$$

folytonos és bármely $a, b \in I$ mellett

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x) dx \right).$$

Ha pedig valamennyi f_k ($k \geq 0$) függvény az I intervallumon folytonosan differenciálható, valamint $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ az I intervallumon pontonként konvergál $f(x)$ -hez és az f'_k deriváltakból képezett $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$ függvényt az I intervallumon egyenletesen konvergens, akkor

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x).$$

Az egyenletes konvergencia megállapítására a gyakorlatban legtöbbször alkalmazott *kritérium Weierstrasstól* származik:

Ha az f_k ($k \geq 0$) függvények mindegyikére érvényes a következő becslés:

$$|f_k(x)| \leq M_k \quad (= \text{állandó}) \quad \text{ha } x \in I$$

és az M_k számokból alkotott $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ végtelen számsor konvergens, akkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad x \in I$$

függvényt abszolút és egyenletesen konvergens.

A $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ numerikus sor konvergenciája ugyanis azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N_ε küszöbszám, hogy

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = \left| \sum_{k=0}^{\infty} M_k - \sum_{k=0}^n M_k \right| < \varepsilon,$$

ha $n > N_\varepsilon$, de akkor minden $n > N_\varepsilon$ és $x \in I$ esetén egységesen érvényes a következő becslés:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Például a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

függvényt $x \in \mathbf{R}$ -ben mindenütt abszolút és egyenletesen konvergens, mert $|\cos kx| \leq 1$ miatt

$$\left| \frac{\cos kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

és a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ numerikus sor konvergens.

8.2.3. Hatványsorok

A hatványsorok olyan végtelen függvényt sorok, amelyeknek részösszegei polinomok. Tehát általában

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

ahol az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ együttthatók és az $a =$ állandó megadott valós számok, végtelen hatványsor (röviden: hatványsor), mert ennek n -edik részletösszege

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$$

n -edfokú polinom (feltesszük, hogy $a_n \neq 0$).

Különösen egyszerű az az eset, amelynél $a = 0$, amikor tehát a hatványsor ilyen alakú:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Az ilyen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ alakú hatványsorok konvergenciahelyeit illetően rögtön belátható a következő állítás:

Ha a sor az x_0 helyen konvergens, akkor $|x| < |x_0|$ esetén minden x helyen abszolút és egyenletesen konvergens.

Ha ugyanis az

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

sor konvergens, akkor tagjai 0-hoz tartanak, tehát mindenestre kisebbek maradnak egy alkalmas K korlátnál:

$$|a_n x_0^n| \leq K.$$

Már most $|x| < |x_0|$ esetén

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n,$$

tehát az $\left| \frac{x}{x_0} \right| = q$ jelöléssel

$$|a_n x^n| \leq K q^n.$$

Mínthogy pedig $0 \leq q < 1$, azért a numerikus

$$K + Kq + Kq^2 + \dots + Kq^n + \dots$$

geometriai sor konvergens, így az abszolút értékekből alkotott

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$$

sor is konvergens, azaz Weierstrass kritériuma szerint az

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

sor abszolút és egyenletesen konvergens.

Ebből rögtön következik, hogy azok az x helyek, ahol a sor konvergens, háromféleképpen helyezkedhetnek el: a sor

1. vagy csak $x = 0$ esetén konvergens,
2. vagy minden x mellett konvergens,
3. vagy van olyan $R > 0$ szám, hogy $|x| < R$ esetén a sor konvergens, $|x| > R$ esetén divergens. Ezt a R számot a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük. (Azt, hogy a sor $x = R$, vagy $x = -R$ helyen konvergens-e, vagy sem, azt mindig külön kell megvizsgálni!)

Valamely $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ alakú hatványsor konvergenciahelyei eszerint egy, a 0-helyre szimmetrikus intervallumot töltenek ki. Ezt a hatványsor *konvergencia-intervallumának* nevezzük:

$$x \in (-R, R).$$

Ez az intervallum egyetlen ponttá zsugorodhat: ilyenkor $R = 0$, vagy esetleg az egész számegetyessé kisélesedhet: ilyenkor $R = \infty$.

A konvergenciaintervallum belsejében a hatványsor abszolút és egyenletesen konvergens.

Számos esetben a hatványsor konvergenciasugarát – a numerikus soroknál megismert – hányados- ill. gyökkritérium alapján meg lehet határozni.

Igy pl. ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| < 1,$$

azaz

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

akkor a sor konvergens, viszont divergens, ha

$$|x| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

A gyökkritérium szerint, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_nx^n|} < 1,$$

azaz

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

akkor a sor konvergens és viszont divergens, ha

$$|x| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(Megjegyezendő az, hogy a gyökkritérium alapján kimondott tételt Cauchy-Hadamard szerint élesíteni lehet, ha ugyanis az $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozatnak van több torlódási pontja – tehát nincs határértéke –, akkor a torlódási értékek közül a legnagyobb – azaz a sorozat ún. limes superiorja –

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} +\infty \\ A \\ 0 \end{cases}, \text{ akkor } R = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{A} \\ +\infty \end{cases}.)$$

A konvergenciaintervallum belsejében a hatványsor összege egy f függvényt definiál:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-R, R),$$

amely folytonos és folytonosan deriválható, $f'(x)$ a sor tagonkénti deriválásával állítható elő:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad x \in (-R, R).$$

(Ez utóbbihoz vegyük figyelembe azt, hogy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A,$$

akkor, mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

azért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = A;$$

tehát ha f konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A},$$

akkor f' konvergenciasugara ugyanaz.)

Ha a hatványsor konvergenciasugara R és az a, b határookra fennáll, hogy $-R < a < R$, $-R < b < R$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}),$$

speciálisan, ha $a = 0$ és $b = x$, akkor

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}, \quad x \in (-R, R)$$

az $f(x)$ egy primitív függvénye.

A hatványsoroknak azt a tulajdonságát, hogy a konvergenciaintervallum belejében szabad őket tagonként deriválni, vagy integrálni, módot nyújt arra, hogy ismert hatványsorokból újakat származtassunk.

Példák

1.) Az

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

sor az

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

sorból keletkezik, ha benne x helyett $(-x)$ -et írunk. Konvergens tehát ha $|x| < 1$ és az összege:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1.$$

Integráljunk mindkét oldalon 0-tól x -ig:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Tegyük itt x helyébe $(-x)$ -et:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad |x| < 1.$$

Most vonjuk ki ezt a sort az előbbiből:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right), \quad |x| < 1,$$

azaz

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Ezek a sorok alkalmasak arra, hogy bármely szám logaritmusát tetszőleges pontossággal meghatározzuk. (Ilyenkor persze gyakran úgy szoktunk eljárni, hogy megfelelő azonos átalakításokkal igyekszünk olyan kifejezésre jutni, amelyből már a sor kevés tagjának figyelembevételével kielégítő pontosságra juthatunk. Így pl. $\ln 10$ kiszámításakor felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln 10 &= \ln\left(8 \cdot \frac{5}{4}\right) = 3 \ln 2 + \ln \frac{5}{4} = \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}, \end{aligned}$$

és így felhasználva $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ hatványsorát, $x = \frac{1}{3}$ helyettesítésekor az első öt tag összegével, $x = \frac{1}{9}$ helyettesítésekor pedig az első két tag összegével, és mindkét esetben öt tizedesjegyre kerekítve kapjuk, hogy

$$\ln 10 \approx 2,30262$$

és ennek a hibája biztosan kisebb, mint $\frac{1}{2}10^{-5}$.)

2.) Irjuk az

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

sorban x helyébe $(-x^2)$ -et:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1.$$

Integráljunk most a 0 és x határok között:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

8.2.4. Taylor-sor

Láttuk azt az előzőekben, hogy hasznos lehet, ha egy függvényt hatványsor összegeként tudunk előállítani. Vizsgáljuk meg ezt a kérdést általánosan.

Tegyük fel azt, hogy az $x = 0$ helyet tartalmazó bizonyos intervallumban

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Itt $x = 0$ -t helyettesítve:

$$f(0) = a_0.$$

Képezzük most $f(x)$ deriváltját:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

és tegyük x helyébe 0-t

$$f'(0) = a_1.$$

Újból deriválva:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + \dots$$

$$f''(0) = 2a_2,$$

majd

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \dots$$

$$f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3$$

és így tovább. Innen

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3 \cdot 2}$$

és könnyen igazolható, hogy általában

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Ha tehát az $f(x)$ függvény az $x = 0$ hely környezetében hatványsorba fejthető, akkor a sor ilyen alakú:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \end{aligned}$$

Ezt a sort az $f(x)$ függvény (0-helyhez tartozó) *Taylor-sorának* nevezzük. Könnyű ellenőrizni pl. azt, hogy az

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (|x| < 1)$$

hatványsor éppen a $\ln(1+x)$ függvény Taylor-sora.

Ha egy adott $f(x)$ függvényt hatványsorba akarunk fejteni, akkor tehát fel kell írunk a függvény Taylor-sorát. Az persze nem tudható előre, hogy ez a Taylor-sor tényleg előállítja-e az $f(x)$ függvényt; ha igen, milyen x értékekre konvergál, s egyes részletösszegei milyen pontossággal közelítik meg az $f(x)$ függvényértéket.

Mindezekre a kérdésekre úgy adhatunk választ, hogy megvizsgáljuk az $f(x)$ függvényértékek és az $f(x)$ függvény Taylor-sorának n -edik részletösszege ($f(x)$ n -edfokú Taylor-polinomja):

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

közötti különbséget:

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x).$$

Ezt a Taylor-sor *maradéktagjának* hívjuk. A közelítés pontosságáról képet alkothatunk magunknak, ha meg tudjuk becsülni a maradéktag abszolút értékét (meg tudjuk adni ennek egy felső korlátját). Ha e becslés alapján ki tudjuk mutatni, hogy bizonyos x -ekre

$$R_n(x) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

akkor ezen x -ekre a Taylor sor előállítja $f(x)$ -et.

Az $R_n(x)$ maradéktag becslésére mármint a következőt mondhatjuk:

Ha a 0 és x_0 helyek közötti szakaszon

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M,$$

akkor

$$|R_n(x_0)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x_0|^{n+1}.$$

Igazolásul gondoljuk meg először is azt, hogy

$$T_n(0) = f(0), \quad T'_n(0) = f'(0), \quad T''_n(0) = f''(0), \dots$$

és általában

$$T_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad \text{ha } k = 0, 1, 2, \dots, n;$$

míg

$$T_n^{(k)}(x) \equiv 0, \quad \text{ha } k = n+1, n+2, \dots$$

hiszen $T_n(x)$ n -edfokú polinom és így $(n+1)$ -edik és ennél magasabbrendű deriváltjai azonosan 0-val egyenlők.

Ennélfogva

$$R_n^{(k)}(0) = 0, \quad \text{ha } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

és

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Tegyük fel most pl. azt, hogy $x_0 > 0$. Minthogy feltevés szerint 0 és x_0 között

$$-M \leq f^{(n+1)}(x) \leq M,$$

azért itt

$$-M \leq R_n^{(n+1)}(x) \leq M,$$

Tehát az $R_n^{(n)}(x) + Mx$ függvény deriváltja:

$$R_n^{(n+1)}(x) + M \geq 0,$$

így ez a függvény növekvő, értéke a 0 helyen 0, tehát az ettől a helytől jobbra fekvő x helyeken

$$R_n^{(n)}(x) + Mx \geq 0.$$

Hasonlóképpen 0 és x_0 között az $Mx - R_n^{(n)}(x)$ függvény deriváltja:

$$M - R_n^{(n+1)}(x) \geq 0,$$

tehát ez a függvény is növekvő, értéke a 0 helyen 0, így a 0 és x között

$$Mx - R_n^{(n)}(x) \geq 0.$$

Végül is 0 és x_0 között ($x_0 > 0$)

$$-Mx \leq R_n^{(n)}(x) \leq Mx.$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel adódik, hogy 0 és x_0 között

$$-M \frac{x^2}{2} \leq R_n^{(n-1)}(x) \leq M \frac{x^2}{2},$$

majd

$$-M \frac{x^3}{3!} \leq R_n^{(n-2)}(x) \leq M \frac{x^3}{3!},$$

és így tovább, míg végül a

$$-M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(x) \leq M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ezt az $x = x_0$ helyre alkalmazva:

$$|R_n(x_0)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x_0|^{n+1}.$$

A függvény x hatványai szerint haladó sorbafejtésére talált eredmények könnyen átvihetők általános, $(x-a)$ hatványai szerint haladó sorokra is. Ezek szerint egy

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

alakú hatványsor konvergencia helyei mindig egy az $x = a$ helyre szimmetrikus intervallumot töltenek ki, amely az a pontra zsugorodhatik, vagy az egész számegyeneset magában foglalhatja. Ha az $f(x)$ függvény az a helyet tartalmazó bizonyos intervallumban hatványsorba fejthető, akkor ez a sor csak a következő lehet:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

Ezt nevezik az $f(x)$ függvény a helyhez tartozó Taylor-sorának. Ennek a sornak

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

részletösszegei az $f(x)$ függvény a helyhez tartozó Taylor-polinomjai.

Az

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

maradéktagra áll:

$$|R_n(x_0)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x_0 - a|^{n+1},$$

ahol M olyan számot jelent, amelyre az a és x_0 helyek közötti szakaszon

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

érvényes.

Egy legalább n -szer folytonosan differenciálható függvény Taylor-polinomjára más úton is el lehet jutni. Éspedig a *kvadrátúra-probléma* n -edrendű esetre való általánosítása útján.

Mint ismeretes az elsőrendű kvadrátúra-probléma megoldására a következő úton jutunk. Legyen adva a

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

elsőrendű differenciálegyenlet, ahol $f(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban adott folytonos függvény. Vagyis a differenciálegyenlet szerint adott az ismeretlen $y(x)$ függvény folytonos elsőrendű deriváltja. Az általános megoldás:

$$y(x) = \int f(x) dx + c,$$

ahol c integrálási állandó.

Ha előírjuk az $x = a$ helyen az $y(a)$ kezdeti értéket, akkor a következő megoldásra jutunk:

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(t) dt.$$

Általánosítsuk eredményünket $n \geq 2$ esetre és tekintsük a következő n -edrendű kvadratúra-problémát:

Megoldandó a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

n -edrendű differenciálegyenlet, ahol $f(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban adott folytonos függvény. Vagyis a differenciálegyenlet szerint adott az $y(x)$ ismeretlen függvény folytonos n -edrendű deriváltja. Az általános megoldásra n lépésben jutunk, a következőképpen:

$$y^{(n-1)}(x) = c_{n-1} + \int_a^x f(t) dt,$$

$$y^{(n-2)}(x) = c_{n-2} + c_{n-1}(x-a) + \int_a^x \int_a^t f(u) du dt,$$

$$y^{(n-3)}(x) = c_{n-3} + c_{n-2}(x-a) + c_{n-1} \frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \int_a^t \int_a^u f(v) dv du dt,$$

.....

végül

$$y(x) = P_{n-1}(x) + \int_a^x \dots \int_a^w f(z) dz \dots dt,$$

ahol $P_{n-1}(x)$ a következő $(n-1)$ -edfokú polinom:

$$P_{n-1}(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2 \frac{(x-a)^2}{2!} + c_3 \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + c_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

és a jobboldal második tagja egy n -szeres integrál. $P_{n-1}(x)$ -ben a c_k együtthatók integrálási állandók.

Könnyen belátható, hogy ha előírjuk az $x = a$ helyen az $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a)$ kezdeti értékeket, akkor a megoldás:

$$y(x) = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{y^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_{n-1}(x),$$

ahol

$$R_{n-1}(x) = \int_a^x \dots \int_a^w f(z) dz \dots dt = \int_a^x \dots \int_a^w y^{(n)}(z) dz \dots dt.$$

Az $x = a$ helyen előírt kezdeti feltételek mellett tehát az n -edrendű kvadratúra-probléma megoldásaként az $y(x)$ függvény $(n-1)$ -edfokú Taylor-polinomja adódik, hozzáadva az $R_{n-1}(x)$ maradéktag, amely így ezen az úton közvetlenül egy n -szeres integrál alakjában adódott. Ezt a maradéktagot azonban Cauchy nyomán az

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x y^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

egyszeres integrál alakjába lehet átvinni.

Az állítást matematikai indukcióval lehet igazolni. Az közvetlenül belátható, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz, mert az elsőrendű kvadratúra-probléma megoldásaként, adott folytonos $y'(x)$ -ből, adott $y(a)$ kezdeti érték mellett kaptuk,

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t) dt.$$

Feltesszük, hogy az állítás $n - 1$ esetén igaz, azaz adott folytonos $y^{(n-1)}(x)$ deriváltból, adott $y(a), y'(a), y''(a), \dots, y^{(n-2)}(a)$ kezdeti értékek mellett adódik

$$y(x) = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{y^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2} + \\ + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x y^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} dt.$$

Ebből azonban közvetlenül adódik az állítás helyessége n esetére. Parciálisan integrálva ugyanis az

$$u(t) = y^{(n-1)}(t), \quad v'(t) = \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}$$

szereposztás megválasztása mellett, amikor is

$$u'(t) = y^{(n)}(t), \quad v(t) = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_a^x y^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} dt = \\ = \left[-\frac{y^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right]_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x y^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \\ = \frac{y^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x y^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt,$$

vagyis amint állítottuk:

$$y(x) = P_{n-1} + R_{n-1}(x),$$

ahol

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

az $y(x)$ függvény $x = a$ helyhez tartozó $(n-1)$ -edfokú Taylor-polinomja és a maradéktag:

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x y^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

Feltevésünk szerint az $a \leq x \leq b$ zárt intervallumban $y^{(n)}(x)$ folytonos (tehát korlátos is), továbbá az integrálás intervallumában $(x-t)^{n-1}$ nem vált előjelet, így az integrálszámítás középértéktétele szerint (Lagrange nyomán) a maradéktagot így írhatjuk:

$$R_{n-1}(x) = \frac{y^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} dt = \frac{y^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n,$$

ahol $a < \xi < x$. És ha még figyelembe vesszük azt, hogy

$$|y^{(n)}(x)| \leq M,$$

akkor a következő becslésre jutunk:

$$|R_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{n!} |x - a|^n,$$

összhangban a korábbi eredményekkel.

Figyelembe véve $y^{(n)}(x)$ -nek az $x = a$ hely körüli folytonosságát, írhatjuk, hogy

$$y^{(n)}(\xi) = y^{(n)}(a) + \varepsilon,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow a$ (illetve ezzel együtt $\xi \rightarrow a$). Így

$$R_{n-1}(x) = \frac{y^{(n)}(a) + \varepsilon}{n!} (x - a)^n.$$

A maradéktagnak ebből az alakjából fontos következtetést lehet levonni a *függvényvizsgálatra* vonatkozólag. Legyen ugyanis $f(x)$ olyan függvény, amelynél

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

de

$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Ebben az esetben

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a) + \varepsilon}{n!} (x - a)^n.$$

Tegyük most fel azt, hogy $|x - a|$ elegendően kicsiny és akkor

$$\text{sign}(f^{(n)}(a) + \varepsilon) = \text{sign } f^{(n)}(a).$$

Igy, ha n páros szám, akkor mivel $(x - a)^n > 0$ biztosan, azért

$$\text{sign}(f(x) - f(a)) = \text{sign } f^{(n)}(a);$$

ha ez $+1$, vagyis $f^{(n)}(a) > 0$, akkor az a -hely kis környezetében

$$f(x) \geq f(a),$$

így a függvénynek az a -helyen *helyi minimuma* van.

Ha viszont $f^{(n)}(a) < 0$, akkor

$$f(x) \leq f(a),$$

tehát a függvénynek az a -helyen *helyi maximuma* van.

Ha pedig n páratlan szám, akkor mivel $(x - a)^n$ az a helyen növekvő x -ek mellett úgy vált előjelet, hogy negatívból megy át pozitívba, azért

ha $f^{(n)}(a) > 0$, az $f(x)$ görbájének az a -helyen olyan *inflexiós pontja* van, amelyben az a -helyhez tartozó vízszintes érintőt emelkedve metszi át;

ha $f^{(n)}(a) < 0$, akkor $f(x)$ görbájének az a -helyen olyan *inflexiós pontja* van, amelyben az a -helyhez tartozó vízszintes érintőt süllyedve metszi át.

A Taylor-polinom és maradéktagja alapján magyarázatot adhatunk a *Bernoulli-l'Hospital szabályra* is. Tegyük fel ugyanis azt, hogy két olyan – legalább kétszer folytonosan deriválható – függvényünk van, amelyek az $x = a$ helyen mindketten 0 értéket vesznek fel, azaz

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Ezért

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2, \\ g(x) &= g'(a)(x-a) + \frac{g''(\xi_2)}{2!}(x-a)^2 \end{aligned}$$

miatt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2}{g'(a)(x-a) + \frac{g''(\xi_2)}{2!}(x-a)^2},$$

azaz, ha $x \neq a$, akkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)}{g'(a) + \frac{1}{2}g''(\xi_2)(x-a)}.$$

Innen pedig

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

feltéve persze azt, hogy a jobboldalnak van értelme.

Két függvény görbájének viszonylagos magatartását illetően előfordulhat a következő eset:

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a), \\ f'(a) &= g'(a), \\ f''(a) &= g''(a), \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(a) &= g^{(n)}(a), \end{aligned}$$

azonban

$$f^{(n+1)}(a) \neq g^{(n+1)}(a).$$

Ebben az esetben az $f(x)$ -hez és a $g(x)$ -hez tartozó a -hely körüli n -edfokú Taylor polinomok azonosak és

$$f(x) - g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1) - g^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Továbbá

$$\frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^n} \rightarrow 0, \quad \text{ha } x \rightarrow a.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ és $g(x)$ görbéje az $x = a$ helyen n -edrendűen érintkezik (ill. *símul egymáshoz*). Így pl. egy görbe és egy pontbeli érintője elsőrendűen símulnak egymáshoz az érintési pontban. Egy görbe és a símuló köre legalább másodrendűen símulnak egymáshoz.

8.2.5. Binomiális sor

Az

$$f(x) = (1 + x)^\alpha$$

függvény Taylor-sorát – tetszőleges valós α kitevő mellett – binomiális sornak hívjuk.

Most

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2},$$

... ..

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k},$$

tehát általában

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)$$

és így

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k},$$

tehát a keresett binomiális sor:

$$f(x) = (1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

és ez biztosan igaz, ha $|x| < 1$.

A sor n -edik és $(n + 1)$ -edik tagja ugyanis

$$u_n(x) = \binom{\alpha}{n-1} x^{n-1}, \quad u_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n} x^n;$$

így a hányadoskritériumot alkalmazva:

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{\alpha - n + 1}{n} x \right| \rightarrow |x|, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

azaz valóban a sor konvergens, ha $|x| < 1$.

Persze, ha $\alpha = n$, azaz pozitív egész szám, akkor $(1+x)^n$ n -edfokú polinom és így n -nél magasabbrendű deriváltjai azonosan 0-val egyenlők. Ennélfogva Taylor-sorában n -nél magasabbfokú tag nem szerepelhet, azaz a sor a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

véges összegbe megy át és ez mindenütt $(1+x)^n$ -nel lesz egyenlő.

Példaként írjuk fel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

hatványsorát, ha $|x| < 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k, \quad |x| < 1.$$

Vagy mivel

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{1} &= -\frac{1}{2}, \\ \binom{-\frac{1}{2}}{2} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \\ \binom{-\frac{1}{2}}{3} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \end{aligned}$$

és általában

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)},$$

azért

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots,$$

hacsak $|x| < 1$.

Ha most pl. x helyébe $(-x^2)$ -et írunk és $|x| < 1$ feltételezése mellett tagonként integrálunk, nyerjük az arcsin x függvény hatványsorát:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

8.2.6. Integrálás sorbafejtéssel

Fontos alkalmazása a végtelen sorok elméletének, hogy egyes integrálokat, amelyeket a szokásos módszerekkel nem tudunk kiszámítani, az integrálandó függvény sorbafejtésével számítunk ki. Természetesen ügyelnünk kell arra, hogy az integrálás intervallumának bele kell esnie a felhasznált sor konvergenciaintervallumába.

Példaként számítsuk ki az a és b féltengelyekkel ($a > b$) rendelkező ellipszis ívhosszát. A görbe egy paraméteres egyenletrendszerre:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \quad \text{ahol } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Mivel

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = b \cos \varphi,$$

azért

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos^2 \varphi) + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

ahol $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, az ellipszis ún. numerikus excentricitása.

Legyen most $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, amikor is $d\varphi = -d\psi$ és így végül:

$$s = -4a \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \psi} d\psi = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \psi} d\psi.$$

Ez az integrál (ún. elliptikus integrál) a szokásos módszerekkel nem határozható meg, mert az integrandusz primitív függvényét elemi függvényekkel nem sikerül előállítani. Minthogy azonban $\varepsilon < 1$, azért

$$|\varepsilon \sin \psi| < 1$$

és így

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \psi} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \psi - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \sin^4 \psi - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \sin^6 \psi - \dots,$$

tehát tagonkénti integrálással:

$$s = 4a \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi d\psi - \dots \right\}.$$

Mivel pedig

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi d\psi &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

végül is

$$\begin{aligned}s &= 2a\pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - 3\left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \varepsilon^4 - 5\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \varepsilon^6 - \dots \right\} = \\ &= 2a\pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots \right\}.\end{aligned}$$

ε kis értékei esetén a sorból néhány tagot kell csak figyelembe venni és máris meglehetősen pontos értéket nyerünk az ívhossz számára.

Az együtthatók értékét kiszámítva

$$s = 2a\pi \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 - \dots \right).$$

E képlet alapján – kis ε érték mellett – igazolható az az eljárás, amelynél az ellipszis kerületét körívek hosszából határozzuk meg.

Legyen ugyanis a fél kistengely és nagytengely (a és b) számtani és mértani középértéke r_1 és r_2 :

$$r_1 = \frac{a+b}{2}, \quad r_2 = \sqrt{ab}.$$

Hasonlítsuk össze az ellipszis s kerületét az r_1 és r_2 sugarú körök $2\pi r_1$ és $2\pi r_2$ kerületével.

Figyelembevételét, hogy

$$\begin{aligned}b &= a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \\ \frac{a+b}{2} &= \frac{a}{2}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}), \\ \sqrt{ab} &= a\sqrt[4]{1-\varepsilon^2},\end{aligned}$$

a binomiális sor alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}2\pi r_1 &= 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 - \frac{1}{32}\varepsilon^6 - \dots \right), \\ 2\pi r_2 &= 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{32}\varepsilon^4 - \frac{7}{128}\varepsilon^6 - \dots \right).\end{aligned}$$

Ha tehát ε elegendően kicsiny, akkor jó közelítéssel írhatjuk, hogy

$$s \approx 2\pi r_1, \quad \text{vagy} \quad s \approx 2\pi r_2.$$

Mindkét közelítés ε -ban harmadrendű. Még jobb közelítésre jutunk, ha alkalmas α és β együtthatók mellett olyan kör-sugarat választunk, amellyel

$$s \approx 2\pi(\alpha r_1 + \beta r_2).$$

α és β számára a következő feltételi egyenleteket nyerjük:

$$\alpha + \beta = 1$$

és

$$\frac{\alpha}{16} + \frac{3\alpha}{32} = \frac{3}{64}, \quad \text{azaz} \quad 4\alpha + 6\beta = 3.$$

Ezekből $\alpha = \frac{3}{2}$ és $\beta = -\frac{1}{2}$. Így

$$\begin{aligned} s &\approx 2\pi(\alpha r_1 + \beta r_2) = 2\pi\left(\frac{3}{2}r_1 - \frac{1}{2}r_2\right) = \\ &= 2\pi a\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 - \dots\right) \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy az

$$s \approx 2\pi\left(\frac{3}{2}\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ab}\right)$$

közelítés ε -ban legalább hetedrendű.

8.2.7. Elemi függvények hatványsora.

Foglaljuk össze néhány elemi függvény hatványsorát:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots, \quad |x| < 1.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

9. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

9.1. Alapfogalmak

9.1.1. Bevezetés

Ha szemügyre veszünk valamely a fizikában, elektrotechnikában, mechanikában tanult képletet, rendszerint azt látjuk, hogy az a mennyiség, amelyet a képlettel kiszámítunk, több más mennyiségtől függ. Pl. az egyfázisú váltakozó áram W teljesítménye a következőképpen számítható a feszültség U effektív értékéből, az áramerősség I effektív értékéből és a φ fázisszögből:

$$W = U \cdot I \cdot \cos \varphi .$$

Egy a , b élű téglalapalakú keresztmetszetnek az egyik élére, pl. az a hosszúságúra vonatkozó másodrendű statikai nyomatéka:

$$I = \frac{ab^3}{3} .$$

Geometriai számításokra vonatkozó képleteink is általában több változót tartalmaznak. Pl. egy általános háromszög területét a

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

képletből számítjuk, ahol a és b két oldal hossza és γ a közbezárt szög.

Végül tekintsük a következő példát. Galilei nevezetes kísérletei szerint a φ hajlásszögű lejtőn a $t = 0$ időpillanatban zérus kezdősebességgel induló test által megtett út:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \sin \varphi .$$

A megtett út nemcsak az időtől, hanem a lejtő hajlásszögétől is függ. Galilei eljárása, hogy ti. a lejtő hajlásszögét egy-egy kísérlet-sorozatban rögzítette, rámutat arra, miképpen jutunk sok esetben egyváltozós függvényre: a valójában több változótól függő kifejezésben egy változó kivételével a többi állandó értéken tartjuk.

Ez az eljárás, amelyet a kísérleti fizikus számtalanszor alkalmaz, a többváltozós függvények vizsgálatára is kijelöl egy utat.

Korábbi tanulmányainkban a valós egyváltozós függvények analízisével (határérték, differenciálás, integrálás, stb.) foglalkoztunk.

A következőkben a valós többváltozós függvények analízisével, azaz többváltozós függvények határértékével, differenciálásával, integrálásával és ezek legegyszerűbb geometriai, mechanikai, fizikai alkalmazásával foglalkozunk olymódon, hogy megfelelően általánosítjuk az egyváltozós függvények analízisében tanult fogalmakat és eljárásokat.

9.1.2. Definíciók, jelölések

Ha a valós számokból képezett rendezett szám n -esek halmazának egy meghatározott részhalmaza minden egyes eleméhez egy meghatározott valós számot rendelünk hozzá, akkor *valós értékű n -változós valós függvényről* beszélünk:

$$f: X \rightarrow Y,$$

$$\text{ahol } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n, \\ Y \subset \mathbf{R}.$$

X elemei alkotják a függvény *értelmezési tartományát* és Y elemei alkotják a függvény értékkészletét:

$$X = D(f) \text{ és } Y = R(f).$$

Ha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$, akkor

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R(f)$$

a függvény *helyettesítési értéke*. Ezt a helyettesítési értéket sokszor célszerű egyetlen betűvel jelölni, pl.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$$

és szokás ezt a függvény *függő változójának* hívni, míg az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok a *független változók* (*argumentumok*) konkrét értékei.

Szokás az n -változós függvényt $\mathbf{R}^n$ -ből $\mathbf{R}$ -be vezető *leképezésnek* is hívni.

Ha

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$$

és

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y \in R(f),$$

akkor az

$$(x_1, x_2, \dots, x_n; y) \in D(f) \times R(f) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

elemek (rendezett szám $(n+1)$ -esek) összessége az f függvény *grafikonját* alkotja.

Célszerű a független változók minden egyes rendezett szám n -esét az n -dimenziós tér egy P pontja koordinátáinak tekinteni és az

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

függvényértéket röviden

$$f(P)$$

módon jelölni, amikor is a többváltozós f függvényt egyszerűen pont-függvénynek fogjuk fel, vagyis egy olyan hozzárendelési utasításnak, amely szerint az értelmezési tartomány minden egyes P pontjához egyetlen meghatározott $f(P)$ függvényértéket rendelünk hozzá.

A továbbiakban egyszerűség kedvéért a többváltozós függvény független változóinak a számát $n = 2$ -re (kivételesen $n = 3$ -ra) korlátozzuk azért, hogy a megfelelő konkrét geometriai szemléltetés lehetőségeit kihasználhassuk.

9.1.3. Kétváltozós függvény ábrázolása

Jelölje x és y az $f(x, y)$ kétváltozós függvény független változóit és legyen a függvényérték:

$$f(x, y) = z.$$

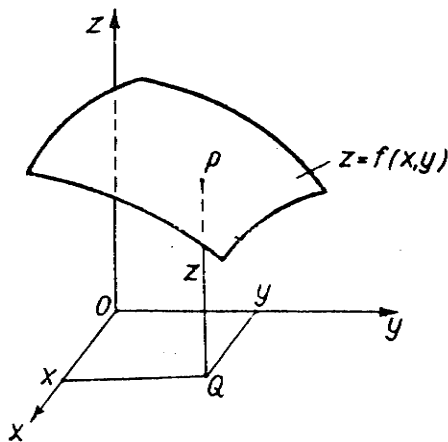
Válasszunk egy térbeli (háromdimenziós) Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, amelynek páronként egymásra merőleges tengelyei, az x , y és z tengely – ebben a sorrendben – jobbsodrású rendszert alkot. A független változók mindegyik (x, y) párja az (x, y) -sík egy Q pontját határozza meg. Ezeknek a Q pontoknak az összessége szemlélteti az f függvény $D(f)$ értelmezési tartományát. Ha most $D(f)$ minden egyes Q pontja fölé (vagy alá, aszerint, hogy $f(x, y)$ pozitív, vagy negatív) felvisszük a megfelelő

$$f(x, y) = z$$

koordinátát, nyerjük az f függvény grafikonjának egy $P(x, y, z)$ pontját. Ezeknek a P pontoknak az összessége gyakran egy felületet, a

$$z = f(x, y)$$

egyenletű felületet adja, amelyet az f függvény képének, ábrájának tekintünk.



4. ábra

Egy ilyen $z = f(x, y)$ egyenletű felület ábrázolásakor célszerű mindenekelőtt a felületre írt speciális görbeseregeket vizsgálni, illetve megrajzolni. Ezek közül a legegyszerűbbek a felület különböző síkmetszetei, pl. a tengelysíkokkal (az (x, y) -, (x, z) - és (y, z) síkokkal) párhuzamos, ún. *koordinátasíkokkal* képezett síkmetszetei. Legyen pl. az (x, y) -sík $x = a$, $y = b$ koordinátájú pontja Q és vegyünk fel ezen a Q ponton átmenő egy-egy olyan (x, y) -síkra merőleges, azaz z -tengellyel párhuzamos síkot, amelyek közül az egyiknek $x = a$, a másiknak pedig $y = b$ az egyenlete. Az $x = a$ egyenletű sík párhuzamos az (y, z) -síkkal és a $z = f(x, y)$ egyenletű felületből kimetszi a $z = f(a, y)$ egyenletű felületi görbét, míg az $y = b$ egyenletű sík, amely az (x, z) -síkkal párhuzamos, a felületből a $z = f(x, b)$ egyenletű görbét metszi ki. Természetesen az $x = a$ és $y = b$ helyett bármely – a függvény értelmezési tartományához tartozó – x és y értéket választhatunk és ilymódon az (y, z) ill. (x, z) síkokkal párhuzamos felületi görbeseregeket nyerünk. Teljesen hasonlóan nyerhetünk z értékét rögzítve, (x, y) -síkkal párhuzamos síkmetszeteket, amelyeknek ($z = c =$ állandó mellett)

$$c = f(x, y)$$

lesz az egyenletük.

Például az

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

kétváltozós függvényt szemléltető

$$z = 2x^2 + y^2$$

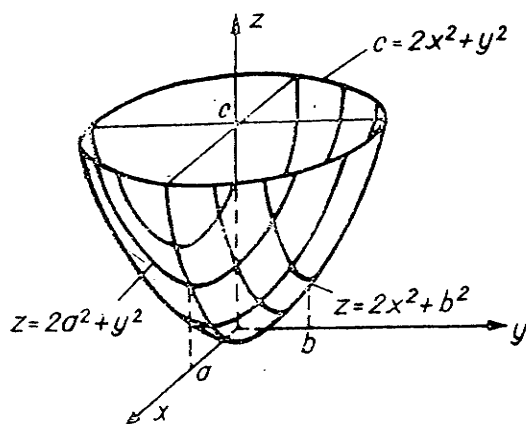
egyenletű felület esetén az (x, z) -síkkal párhuzamos síkmetszetek a

$$z = 2x^2 + b^2$$

egyenletű parabolák ($b =$ állandó), az (y, z) -síkkal párhuzamos síkmetszetek a

$$z = 2a^2 + y^2$$

egyenletű parabolák ($a =$ állandó) és az (x, y) -síkkal párhuzamos síkmetszetek



5. ábra

a

$$c = 2x^2 + y^2$$

egyenletű ellipszisek (ahol c = állandó természetesen nem lehet negatív). A felületet, amelyenél két koordinátasíkkal párhuzamos síkmetszetek parabolák, míg a harmadikkal párhuzamos síkmetszetek ellipszisek elliptikus paraboloidnak hívják.

Könnyen belátható, hogy ez a

$$z = 2x^2 + y^2$$

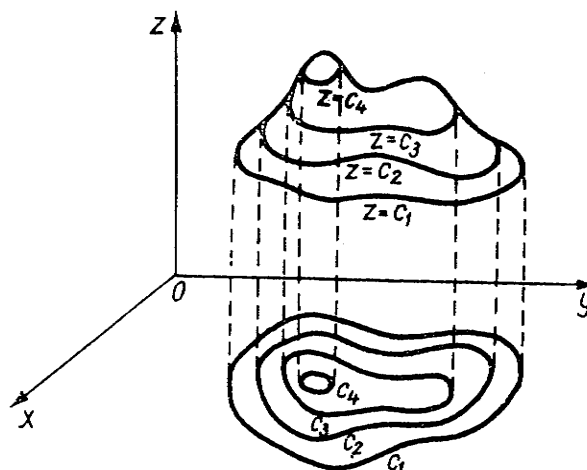
egyenletű felület olyan módon is előállítható, hogy pl. az (y, z) -síkbeli $z = y^2$ egyenletű parabolát az (x, z) -síkbeli $z = 2x^2$ egyenletű parabola mentén önmagával párhuzamosan úgy toljuk el, hogy a csúcspontja állandóan rajta legyen a $z = 2x^2$ egyenletű parabolán (vagy fordítva!).

Az ilyen módon, vagyis egy görbének egy másikon való translációjával előálló felületeket *transzlációs felületeknek* nevezzük. Az ilyen translációs felületek általános egyenlete

$$z = f_1(x) + f_2(y),$$

ahol f_1 és f_2 egyváltozós függvények (f_1 csak x -től, f_2 pedig csak y -től függ).

Az (x, y) -síkkal párhuzamos síkmetszeteket szokás *szintgörbéknek* (*nívógörbéknek*) is nevezni. Ezeknek segítségével lehet a felületet az (x, y) -síkból is ábrázolni, mégpedig oly módon, hogy a szintgörbét rávetítjük az (x, y) -síkra és ezeket a megfelelő $z = c_i$ (c_i = állandó) értékekkel kottázzuk. Ezen az elven készül például a terepfelszínek rétegvonalas térképe. Ez a kétváltozós függvény ún. *szintvonalas* ábrázolási módja.



6. ábra

Másik példaként vegyük az

$$f(x, y) = xy$$

függvényt szemléltető

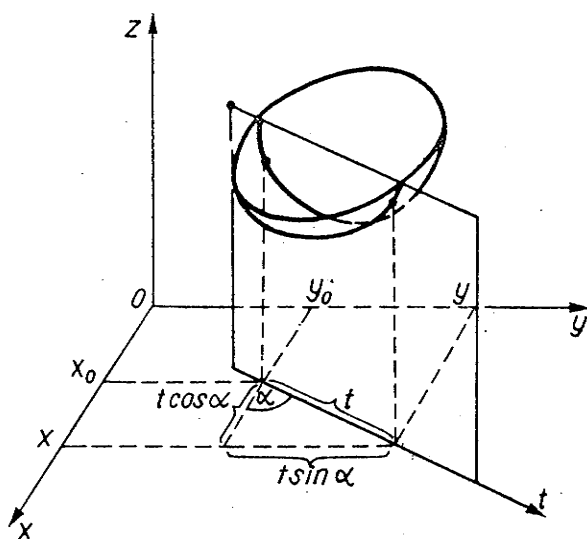
$$z = xy$$

egyenletű ún. nyeregfelület (hiperbolikus paraboloid) (y, z) - ill. (x, z) -síkkal párhuzamos metszeteit. Ha $x = a$, akkor $z = ay$, ha pedig $y = b$, akkor $z = bx$, tehát ezek a síkmetszetek egyenesek. Ez a felület tehát egyenesekből álló, pl. fonalmodellel könnyen szemléltethető. Bizonyos födémeket (vagy födémrészeket) éppen ezért hiperbolikus paraboloid alakúra, nyeregfelületként alakítanak ki.

Egyes esetekben szükségesnek mutatkozik a felületet olyan síkokkal is el metszeni, amelyek csak egy koordinátatengellyel párhuzamosak és amelyeket *vetítősíknak* is neveznek. A leggyakoribb a z -tengellyel párhuzamos, egyébként tetszőleges helyzetű síkokkal metszeni a felületet; ezek a síkok nyilván az (x, y) -síkra merőlegesek. Egy ilyen síkmetszet egyenletét könnyű felírni. Vegyünk az x -tengely pozitív szárával α szöget alkotó vetítősík (x, y) -síkon lévő nyomvonalán egy pontot: (x_0, y_0) . Az ábrából leolvasható, hogy

$$x - x_0 = t \cos \alpha,$$

$$y - y_0 = t \sin \alpha,$$



7. ábra

ahol a t paraméter az (x_0, y_0) és az (x, y) pontok előjeles távolsága: t pozitív, ha (x, y) az (x_0, y_0) ponttól a nyíl irányába esik. A vetítősík által a

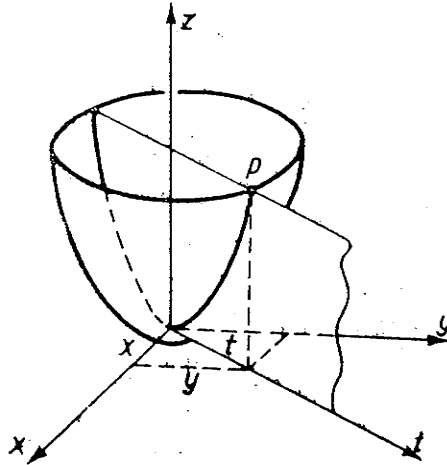
$$z = f(x, y)$$

egyenletű felületből kimetszett felületi görbe pontjaira nézve a z koordinata értéke csak a nyomvonalon lévő pontok x és y koordinátájától függ, tehát

$$z = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha).$$

Mivel itt x_0, y_0 és α állandó, azért az egyenlet jobb oldalán csak egy, a t paramétertől függő egyváltozós függvény áll. Ezzel az egyváltozós függvénnyel kapjuk tehát a metszetgörbe egyenletét.

Ezekon a speciális síkmetszeteken kívül még egyes esetekben másfajta metszeteket (felületi görbéket) is igénybe szokás venni egyes felületek vizsgálatánál: Így pl. koaxiális hengerfelületekkel, kúpfelületekkel vagy gömbökkel alkotott metszetgörbéket.



8. ábra

Egyes esetekben elég a felület egyetlen síkmetszetét vizsgálni. Ilyenek a gyakorlatban sokszor előforduló *forgásfelületek*. Ezeknél elég egy olyan síkkal való metszetet vizsgálni, amelyik a forgástengelyre illeszkedik, amikor is metszetként az ún. *meridiángörbét* nyerjük. Ez az a görbe, amelyet a forgástengely körül megforgatva nyerjük a forgásfelületet. Ebből a származtatási módból rögtön adódik az is, hogy hogyan kell egy adott meridiángörbéjű forgásfelület egyenletét felírni. Legyen pl. a forgástengely a z -tengely. Ebben az esetben bármely z -tengelyen átmenő (z, t) vetítősík ugyanolyan görbét metsz ki a felületből. Ezeknek a görbéknek tehát a különböző (z, t) -síkokban ugyanaz lesz az egyenlete:

$$z = f(t).$$

Az ábrából viszont nyilvánvaló, hogy

$$t = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ha ezt a t helyébe helyettesítjük, akkor bármely (x, y) párhoz tartozó z értékét megkaphatjuk a

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

egyenletből. Ez lesz tehát a forgásfelület egyenlete.

Például vegyünk fel az (x, z) -síkbán egy $z = x^2$ egyenletű parabolát. Forgassuk ezt meg a z -tengely körül és írjuk fel a keletkező forgásfelületet (forgási paraboloid) egyenletét. Mivel bármely (z, t) -síkbán a meridiánmetszet egyenlete $z = t^2$, a forgásfelület egyenlete:

$$z = x^2 + y^2.$$

9.1.4. Kettőnél több változós függvények szemléltetése.

Ha a többváltozós függvény független változóinak a száma 2-nél több, akkor már nem lehet szemléletes képet alkotni a függvény grafikonjáról. Ilyenkor csak absztrakt "képünk" lehet pl. az $(n + 1)$ -dimenziós tér egy

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

egyenletű "felületéről". Habár szoktunk is ilyenkor valamilyen analógia alapján a háromdimenziós térben megszokott és szemléletes tartalommal bíró megfogalmazásokat alkalmazni, ezeknek már nincs konkrét szemléletes tartalmuk. Egy ilyen $(n + 1)$ -dimenziós térbeli felületet *hiperfelületnek* szokás nevezni.

Háromváltozós függvényekkel találkozunk minden olyan alkalmazáskor, amikor valamilyen skaláris fizikai paraméter háromdimenziós térbeli eloszlását meg lehet adni a pont koordinátáinak a függvényeként (pl. nyomás, vagy hőmérséklet térbeli eloszlása). Ilyenkor legfeljebb arról lehet szó, hogy megadjuk az azonos függvényértékek geometriai helyét. Ez lehet esetleg egy

$$u = f(x, y, z)$$

egyenletű felület, ahol $u = \text{állandó}$. Az ilyen $u = \text{állandó}$ értékhez tartozó felületeket szokták *szintfelületnek* (*nívófelületnek*) nevezni. Persze, ha a szóbanforgó skaláris fizikai paraméter (nyomás, hőmérséklet stb.) nemcsak a helytől (helykoordinátáktól), hanem még az időtől is függ, vagyis ilyenkor valamilyen négyváltozós $f(x, y, z, t)$ függvénnyel van dolgunk, akkor már csak arról lehet szó, hogy egy rögzített $t = \text{állandó}$ időpillanathoz rögzített "pillanatfelvételt" képzeljünk el a szintfelületek seregéről.

9.2. Határérték, folytonosság

9.2.1. Pontfüggvény határértéke, folytonossága

Az n -változós, $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}$ -be vezető

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény $x_1, x_2, \dots, x_n$ független változóit az n -dimenziós tér P pontja koordinátáinak tekintjük. Az értelmezési tartomány pontjainak távolságát a következőképpen értelmezzük:

legyenek P_i és P_j koordinátái: $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ és $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}$; ekkor a két pont távolsága a

$$\rho(P_i, P_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - x_{jk})^2}$$

valós szám.

Fennállnak a következő tulajdonságok:

- a.) $\rho(P_i, P_j) \geq 0$;
- b.) $\rho(P_i, P_j) = 0$ akkor és csakis akkor, ha a két pont egybeesik, vagyis $P_i = P_j$;
- c.) $\rho(P_i, P_j) = \rho(P_j, P_i)$ (szimmetria);
- d.) háromszög egyenlőtlenség:

$$\rho(P_1, P_2) + \rho(P_2, P_3) \geq \rho(P_1, P_3).$$

Az ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező távolságfogalom bevezetésével az n -dimenziós tér ($\mathbf{R}^n$) ún. *metrikus tér*. $\mathbf{R}^n$ részhalmazait *tartományoknak* nevezzük. Ilyen pl. egy f függvény értelmezési tartománya. Azt a pontot, amelynek minden koordinátája zérus, *origónak* nevezzük és O -val jelöljük. Azt mondjuk, hogy $H \subset \mathbf{R}^n$ tartomány *korlátos*, ha van olyan $r > 0$ szám, melyre minden $P \in H$ pont origótól mért távolsága

$$\rho(P, O) < r.$$

Mivel P mindegyik koordinatájára igaz, hogy

$$|x_k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \rho(P, O), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

továbbá

$$\rho(P, O) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{n} \cdot \max |x_i|,$$

azért nyilvánvaló, hogy $H \subset \mathbf{R}^n$ akkor és csakis akkor korlátos, ha az összes pontjának koordinátáiból álló számhalmaz korlátos.

Tegyük fel azt, hogy $H \subset \mathbf{R}^n$ korlátos tartomány. Tekintsük H valamennyi két-két pontjának ($P' \in H$ és $P'' \in H$) a $\rho(P', P'')$ távolságát. Ekkor a $\rho(P', P'')$ korlátos számhalmaz legkisebb felső korlátját a H tartomány *átmérőjének* nevezzük:

$$d(H) = \sup \rho(P', P'').$$

(Ha $H = \emptyset$, vagyis H üres halmaz, ill. ha H csak egyetlen pontból áll, akkor az átmérője zérus.)

Legyenek adva az $\alpha \leq t \leq \beta$ zárt intervallumban értelmezett

$$\varphi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

folytonos függvények, melyekre

$$a_k = \varphi_k(\alpha), \quad b_k = \varphi_k(\beta), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ha most a P pont koordinátáit

$$x_k = \varphi_k(t) \text{ - vel}$$

azonosítjuk, akkor miközben t befutja az $[\alpha, \beta]$ zárt intervallumot, a P pont végigmegy az $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pontból a $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ pontba vezető és a $\{\varphi_k(t)\}$ függvényrendszerrel

meghatározott folytonos úton. Ha a H halmaz bármely két A és B pontja összeköthető olyan folytonos úttal, hogy a $t \in [a, b]$ -hez tartozó P pontjai H -hoz tartoznak, akkor a H halmazt *összefüggőnek* nevezzük. Ha az itt szereplő $\varphi_k(t)$ függvények mind lineárisak ($\varphi_k(t) = a_k + (b_k - a_k)t$, $0 \leq t \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$), akkor az A -ból B -be vezető folytonos út (n -dimenziós) egyenes.

A $H \subset \mathbf{R}^n$ tartományt *konveznek* nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az azokat összekötő egyenesszakaszt is tartalmazza.

A távolságfogalom lehetőséget nyújt arra, hogy $\mathbf{R}^n$ -ben pontok környezetéről, pontsorozatok limeszéről stb. lehessen beszélni.

Legyen a H összefüggő ponthalmaz egy belső pontja a $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pont. Ennek a pontnak $r > 0$ sugarú *környezetét* alkotják azok a $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ pontok, amelyeknek a távolsága

$$0 \leq \rho(P, Q) < r.$$

Nyilvánvaló, hogy a P és Q pontok valamennyi megfelelő koordinátájára teljesül:

$$0 \leq |y_i - x_i| < r, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Amikor a P pont r -sugarú környezetéről beszélünk, akkor általában feltesszük, hogy $\rho(P, Q) \neq 0$. A P pont r sugarú környezetét *zárt*nak nevezzük, ha azokat a Q pontokat is e környezethez számítjuk, amelyekre $\rho(P, Q) = r$. Ellenkező esetben a környezet *nyitott*.

Ha a $P_k(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ pontok x_{kj} ($j = 1, 2, \dots, n$) koordinátái külön-külön mind végtelen számsorozatot alkotnak, azaz $k = 1, 2, \dots$, akkor azt mondjuk, hogy adva van egy (P_k) végtelen *pontsorozat*.

Egy (P_k) pontsorozat *korlátos* ha van olyan véges átmérőjű H halmaz, hogy

$$P_k \in H, \quad \text{minden } k\text{-ra}$$

A (P_k) pontsorozat *torlódási pontja* (*sűrűsödési pontja*) az az A pont, amelynek bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetébe a pontsorozatnak végtelen sok eleme beletartozik.

Minden korlátos végtelen pontsorozatnak legalább egy torlódási (sűrűsödési) pontja van. (Bolzano és Weierstrass tétele).

Az egyetlen egy helyen sűrűsödő korlátos pontsorozat *konvergens* (összetartó, van határértéke); sűrűsödési pontja a *pontsorozat határértéke* (limesze). Minden más esetben a pontsorozat *divergens* (széttartó, nincs határértéke).

Ha a (P_k) pontsorozat konvergens, és határértéke az A pont, akkor minden előre megadott tetszőszerinti (kicsiny) pozitív ε számhoz lehet találni olyan N pozitív egész számot (küszöbszámot), hogy

$$\rho(P_k, A) < \varepsilon, \quad \text{hacsak } k > N(\varepsilon).$$

Megfordítva, ha e feltétel teljesül, akkor a pontsorozat konvergens, és határértéke a A pont

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = A,$$

vagy

$$P_k \rightarrow A, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty.$$

A (P_k) pontsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy $\rho(P_k, P_i) < \varepsilon$, ha $k > N$ és $i > N$. (*Cauchy-kritérium*).

Mivel a P_k pontokat és az A pontot is egyértelműen meghatározzák az $(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$, illetve $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ rendezett valós szám n -esek, vagyis a koordinátáik, azért a pontsorozatok vizsgálata visszavezethető a koordináták

$$(x_{kj}), \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

végtesen számsorozatainak a vizsgálatára.

Igy pl.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = A$$

ekvivalens azzal, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = a_j, \quad \text{minden } j\text{-re} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Itt lényeges azt kihangsúlyozni, hogy valamennyi j -re, mégpedig egymástól függetlenül

$$x_{kj} \rightarrow a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad \text{ha } k \rightarrow \infty.$$

E bevezető után rátérhetünk az n -változós $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvények határértékének a vizsgálatára. Mivel minden $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ valós rendezett szám- n -es az n -dimenziós tér egy P pontját határozza meg, azért az adott $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -változós függvényt az $f(P)$ pontfüggvénnyel azonosíthatjuk.

Tegyük fel azt, hogy a (P_k) végtesen pontsorozat ($k = 1, 2, \dots$) mindegyik eleme be tartozik az $f(P)$ pontfüggvény értelmezési tartományába.

$$P_k \in D(f) \quad \text{minden } k\text{-ra.}$$

Ha bármely (P_k) végtesen pontsorozatra, melynek limesze az A pont teljesül az, hogy

$$\lim_{P_k \rightarrow A} f(P_k) = a,$$

akkor azt mondjuk, hogy az $f(P)$ függvénynek létezik a határértéke az A pontban és ez a határérték a :

$$\lim_{P \rightarrow A} f(P) = a,$$

vagy

$$f(P) \rightarrow a, \quad \text{ha } P \rightarrow A.$$

Ezzel a definícióval ekvivalens a következő:

$$\lim_{P \rightarrow A} f(P) = a,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(P) - a| < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad 0 < \rho(P, A) < \delta.$$

Az itt szereplő δ természetesen függ ε -tól és általában A -tól. Még megjegyezzük azt, hogy amíg minden P (illetve P_k) pontra igaz, hogy benne van $D(f)$ -ben (azaz f értelmezési tartományában), addig nem kell hogy $A \in D(f)$ legyen.

A függvény határértékének létezése akkor és csakis akkor van biztosítva, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon,$$

hacsak P' és P'' benne van az A pont δ -sugarú környezetében, ahol természetesen $P' \in D(f)$ és $P'' \in D(f)$, míg lehet, hogy $A \notin D(f)$. (*Cauchy-kritérium*).

Ha most a P pontot az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett valós szám- n -essel és az A pontot $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -nel azonosítjuk, akkor mondhatjuk, hogy

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a,$$

és ez azt jelenti, hogy

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - a| < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad 0 < \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} < \delta.$$

Amikor itt a $P \rightarrow A$ előírásnak megfelelően azt írjuk, hogy

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

akkor ezzel ekvivalens az, hogy egyszerre és egymástól függetlenül

$$x_i \rightarrow a_i$$

valamennyi i -re ($i = 1, 2, \dots, n$), vagyis a határérték-független a határátmenet módjától.

Ahhoz, hogy az $f(P)$ függvénynek az A pontban létezzék a határértéke, nem kellett feltételezni azt, hogy magán az A helyen $f(P)$ értelmezve legyen, hiszen a $P \rightarrow A$ határátmenetben csak annyit követelünk meg, hogy P az A -hoz elegendően közel kerüljön, azaz a $\rho(P, A)$ távolságra

$$0 < \rho(P, A) < \delta$$

teljesüljön, alkalmasan kicsiny pozitív δ mellett és közben P az A -tól különböző maradhat. Tehát a határérték vizsgálatánál elég annyit feltételezni, hogy $f(P)$ az A pont környezetében – de magában az A pontban nem – kell, hogy értelmezve legyen.

Az $f(P)$ függvény folytonosságához azonban már három dolognak kell teljesülnie:

1. $f(A)$ létezik,
2. $\lim_{P \rightarrow A} f(P)$ létezik és

$$3. \lim_{P \rightarrow A} f(P) = f(A).$$

Azt mondjuk, hogy az $f(P)$ függvény az A pontban *folytonos*, ha bármely tetszőlegesen kicsiny pozitív ε számhoz megadható egy olyan ε -tól (és általában az A ponttal megjelölt helytől is) függő pozitív δ szám, úgy, hogy

$$|f(P) - f(A)| < \varepsilon,$$

ha

$$0 < \rho(P, A) < \delta(\varepsilon, A).$$

Tehát a folytonos f függvény $f(P)$ és $f(A)$ helyettesítési értékei tetszőlegesen kevéssel térnek el egymástól, ha a P és A pontok távolsága elegendően kicsiny, vagyis P az A -hoz elegendően közel van. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy $f(A)$ -hoz képest $f(P)$ csak kicsit változhat, ha A -ból P -be (akármilyen irányban) csak egy kicsit megyünk arrébb. Vagy másképpen fogalmazva, ha a P pontokon keresztül (akármilyen irányból) az A ponthoz közelítünk "minden határon túl", akkor a megfelelő $f(P)$ helyettesítési értékek "minden határon túl" megközelítik az $f(A)$ függvényértéket:

$$f(P) \rightarrow f(A), \quad \text{ha } P \rightarrow A.$$

Itt lényeges az, hogy "akármilyen irányban" (vagy "akármilyen irányból"). Ezt világítja meg a következő kétváltozós függvényre vonatkozó *példa*:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, y = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény az origóban, azaz a $(0, 0)$ pontban nem folytonos, mert ha $P(x, y) \rightarrow O(0, 0)$, azaz $x \rightarrow 0$ és $y \rightarrow 0$, akkor $f(x, y)$ különböző számértékekhez közeledhet, attól függően, hogy milyen úton közeledünk (az (x, y) -síkban) az origóhoz. Válasszunk például origón átmenő egyeneseket és azok mentén közeledjünk az origó felé, azaz legyen

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha,$$

ahol α rögzített állandó és írjuk elő azt, hogy $t \rightarrow 0$. Ekkor azonban $f(x, y)$ átmegy a következő $\varphi(t)$ egyváltozós függvénybe:

$$f(x, y) = \varphi(t) = \frac{2t^2 \sin \alpha \cos \alpha}{t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} \equiv \sin 2\alpha.$$

t -től függetlenül. Függvényünk tehát az origóban csak az x és y tengelyek irányában folytonos, így a szó szoros értelmében véve nem az.

Ha az $f(P)$ függvény egy összefüggő T tartomány minden belső pontjában és a T -t határoló pontokban is folytonos, akkor azt mondjuk, hogy $f(P)$ a *zárt T tartományban folytonos*. Természetesen a határpontokban a határértéket úgy kell érteni, hogy a határatmenet közben T tartománybeli "belső" pontokon keresztül közelítünk a határ kiszemelt pontjához "minden határon túl".

Egy T tartományban folytonos függvénynél előfordulhat az, hogy amikor az A helyen a tetszőlegesen kicsire választott $\varepsilon > 0$ -hoz alkalmas δ -t választunk, úgy hogy

$$|f(P) - f(A)| < \varepsilon$$

legyen, ha

$$0 < \rho(P, A) < \delta(\varepsilon, A),$$

akkor ez a δ csak ε -tól függ és A -tól nem, vagyis minden $A \in T$ helyen ε -hoz egységes Δ -t lehet találni az egész T -ben, ilyenkor azt mondjuk, hogy $f(P)$ a T tartományban *egyenletesen folytonos*.

Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan a zárt tartományban folytonos többváltozós függvényekre érvényesek a következő tételek:

- 1.) Zárt tartományban folytonos függvény korlátos. (Weierstrass I. tétele.)
- 2.) Ha az $f(P)$ függvény a zárt T tartományban folytonos, akkor létezik legalább egy olyan tartománybeli pont, ahol a függvény az ezen tartománybeli értékkészletének felső határát (maximumát), és legalább egy olyan pont, ahol értékkészletének alsó határát (minimumát) felveszi. (Weierstrass II. tétele.)
- 3.) Ha $f(P)$ a zárt T tartományban folytonos, és abszolút minimuma T -ben m , abszolút maximuma pedig M , akkor f legalább egy pontban felveszi a m és M közötti bármely valós c -nek megfelelő helyettesítési értéket. (Bolzano tétele.)
- 4.) Zárt tartományban folytonos függvény a tartományban egyenletesen folytonos.

9.3. Kétváltozós függvények deriválása

9.3.1. A parciális derivált fogalma

A következőkben a többváltozós függvényekre vonatkozó kérdéseket részletesen csak a kétváltozós esetre leszűkítve tárgyaljuk, azért, hogy a megfelelő szemléltetési lehetőségeket kihasználhassuk. Eredményeink természetesen általánosíthatók a kettőnél több-, általában n -változós függvényekre.

Legyen $f(x, y)$ kétváltozós függvény az (a, b) pontban és ennek a környezetében értelmezve. Ha $f(x, y)$ -ban az y változó értékét lerögzítjük: $y = b$, akkor az $f(x, b)$ egyváltozós függvényre jutunk. Ha ez az egyváltozós függvény az $x = a$ helyen deriválható, akkor a

$$\left. \frac{df(x, b)}{dx} \right|_{x=a}$$

deriváltat a kétváltozós $f(x, y)$ függvény (a, b) -helyen vett x szerinti parciális deriváltjának nevezzük és így jelöljük:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} = f'_x(a, b)$$

Ezt a parciális deriváltat a következő határérték definiálja:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = f'_x(a, b)$$

Ha ez a parciális derivált létezik, akkor $f(x, y)$ -nak az (a, b) -helyen, rögzített $y = b$ mellett, az x -szerinti parciális megváltozása így írható:

$$f(a + \Delta x, b) - f(a, b) = f'_x(a, b) \cdot \Delta x + \varepsilon(a, b, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $\Delta x \rightarrow 0$. Az $f'_x(a, b)$ deriváltat tartalmazó első tagot, amelyben a tetszőleges Δx megváltozást dx -szel lehet azonosítani, a *parciális megváltozás főrészének* hívjuk, a második tag, amely Δx -szel elosztva is zérushoz tart, ha $\Delta x \rightarrow 0$, az *elenyésző rész*. A főrés az $f(x, y)$ függvény x -szerinti *parciális differenciálja*:

$$d_x f(x, y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = f'_x(a, b) dx.$$

Az $f'_x(a, b)$ parciális derivált *geometriai jelentése* nyilvánvaló:

A $z = f(x, y)$ egyenletű felületet az $y = b$ egyenletű (x, z) - síkkal párhuzamos - vetítősík a

$$z = f(x, b)$$

egyenletű felületi görbében metszi és ennek a görbének az (a, b) -pontban vett érintőjének iránytangense

$$\operatorname{tg} \alpha = f'_x(a, b).$$

Teljesen hasonlóan, ha az $f(x, y)$ függvényben az x változó értékét lerögzítjük: $x = a$, akkor a csak y -től függő $f(a, y)$ egyváltozós függvényre jutunk. Ha most ez a függvény az $y = b$ helyen deriválható, akkor a

$$\frac{df(a, y)}{dy} \Big|_{y=b}$$

deriváltat a kétváltozós $f(x, y)$ függvény (a, b) -helyen vett y -szerinti parciális deriváltjának nevezzük:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = f'_y(a, b) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}.$$

Ha ez a határérték létezik, akkor $f(x, y)$ -nak az (a, b) -helyen, rögzített $x = a$ mellett, az y -szerinti parciális megváltozása így írható:

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f'_y(a, b) \cdot \Delta y + \varepsilon(a, b, \Delta y) \cdot \Delta y,$$

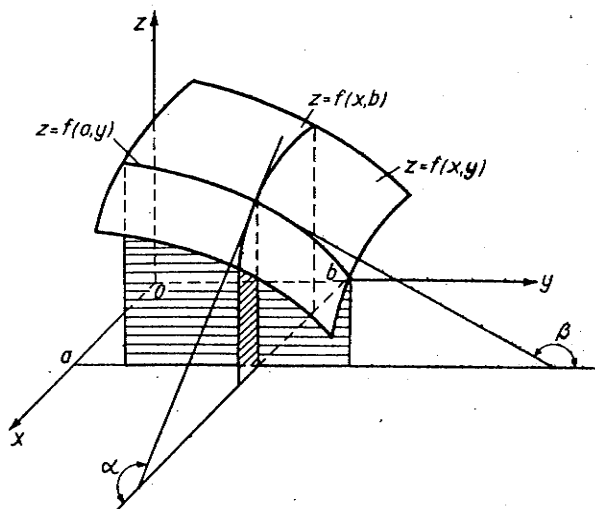
ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $\Delta y \rightarrow 0$. E megváltozás főrésze, a $\Delta y \equiv dy$ tetszőleges megváltozás mellett definiálja az adott helyen $f(x, y)$ -nak y -szerinti *parciális differenciálját*:

$$d_y f(x, y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = f'_y(a, b) \cdot dy.$$

Az $f'_y(a, b)$ parciális derivált jelenti a $z = f(x, y)$ felületből az $x = a$ egyenletű (y, z) - síkkal párhuzamos - vetítősíkkal kimetszett

$$z = f(a, y)$$

egyenletű görbének az (a, b) pontbeli érintője irántangensét:



9. ábra

Az egyváltozós függvényeknél láttuk azt, hogy ha a függvény egy pontban deriválható, akkor ott folytonos. A két- és többváltozós függvényeknél ez azonban nincs mindig így: abból, hogy $f'_x(a, b)$ és $f'_y(a, b)$ léteznek még nem következik mindig az, hogy $f(x, y)$ az (a, b) pontban folytonos.

Példaként tekintsük a már korábban vizsgált

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvényt, amelyről láttuk, hogy a $(0, 0)$ -helyen nem folytonos. Viszont léteznek az $f'_x(0, 0)$ és $f'_y(0, 0)$ parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \\ f'_y(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0. \end{aligned}$$

Vegyük észre azt, hogy

$$f'_x(0, y) = \frac{2}{y}, \quad \text{ha } y \neq 0$$

és

$$f'_y(x, 0) = \frac{2}{x}, \quad \text{ha } x \neq 0;$$

ezekből pedig

$$\lim_{y \rightarrow 0} f'_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f'_y(x, 0) = \infty,$$

ami azt jelenti, hogy a $(0,0)$ -pont környezetében az x - és y -szerinti parciális deriváltak nem lehetnek korlátosak.

Érvényes azonban a következő tétel:

Ha az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek a T tartományban $((x, y) \in T \subset D(f))$ léteznek és korlátosak az $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ parciális deriváltjai, akkor ott $f(x, y)$ folytonos.

Legyenek ugyanis

$$(x, y) \in T \quad \text{és} \quad (x + h, y + k) \in T,$$

továbbá T -ben mindenütt

$$|f'_x(x, y)| < A \quad \text{és} \quad |f'_y(x, y)| < A,$$

akkor

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= f(x + h, y + k) - f(x, y) = \\ &= [f(x + h, y + k) - f(x, y + k)] + \\ &+ [f(x, y + k) - f(x, y)]. \end{aligned}$$

Mindkét szögletes zárójelen belül egy-egy egyváltozós függvény értékváltozása szerepel: az elsőben csak x , a másodikban csak y változik. Alkalmazhatjuk az egyváltozós függvényeknél tanult Lagrange-féle középértéktételt:

$$\Delta f(x, y) = h \cdot f'_x(x + \vartheta_1 h, y + k) + k \cdot f'_y(x, y + \vartheta_2 k),$$

ahol

$$0 < \vartheta_1 < 1 \quad \text{és} \quad 0 < \vartheta_2 < 1.$$

Figyelembevéve azt, hogy f'_x és f'_y korlátosak, azért

$$|\Delta f(x, y)| < A(|h| + |k|) < \varepsilon,$$

hacsak $|h|$ és $|k|$ elegendően kicsik.

Tehát az egyváltozós függvényekkel ellentétben, a többváltozós függvényeknél a parciális deriváltak létezése egy pontban nem biztosítja ott a függvény folytonosságát. Éppen ezért a többváltozós függvényeknél a deriválhatóság fogalmát nem azonosítjuk azaz a ténnyel, hogy a függvénynek valamennyi független változója szerint léteznek egy pontban az összes elsőrendű parciális deriváltjai, hanem további megszorítást teszünk. Ehhez azonban szükségünk van arra, hogy a parciális deriváltaknak differencialhányadosok határértéke helyett más – hányados nem tartalmazó – bevezetését adjuk meg.

9.3.2. Teljes differenciál, differenciálhatóság

Legyen $f(x, y)$ olyan kétváltozós függvény, amelynek az (x_0, y_0) helyen léteznek és folytonosak az x -szerinti és y -szerinti parciális deriváltjai. Állítsuk elő $f(x, y)$ -nak azt a teljes megváltozását, amely egyidejűleg x -nek x_0 -ról $(x_0 + \Delta x)$ -re és y -nak y_0 -ról $(y_0 + \Delta y)$ -re

történő megváltozása következtében áll elő. A rövidség kedvéért jelöljük z -vel az $f(x, y)$ helyettesítési értéket, továbbá $z_0 = f(x_0, y_0)$ és $z_0 + \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Tehát a függvényérték teljes (totális) megváltozása:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Bővítsük a jobboldalon álló különbséget a következő módon:

$$\Delta z = \{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)\} + \{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\}.$$

Vegyük észre azt, hogy most mindkét zárójelen belül csak egy-egy változó értéke változik meg, mégpedig az elsőben csak x , a másodikban pedig csak y . Tehát mindkét zárójelen belüli kifejezést egyváltozós függvények értékváltozásaként foghatjuk fel. Ezekre a zárójelen belül álló kifejezésekre tehát külön-külön alkalmazhatjuk az egyváltozós függvények differenciálszámításánál tanult középértéktételt. Így írható:

$$\Delta z = f'_x(\xi, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, \eta) \cdot \Delta y,$$

ahol ξ az x_0 és $x_0 + \Delta x$ közé eső, η pedig az y_0 és $y_0 + \Delta y$ közé eső értéket jelent. Mivel feltételeztük azt, hogy f'_x és f'_y parciális deriváltak folytonos függvények, azért f'_x -nek a $(\xi, y_0 + \Delta y)$ helyen felvett értéke az (x_0, y_0) helyen felvett értékétől csak olyan kis értékkel különbözhet, amely zérushoz tart akkor, ha Δx és Δy egyszerre (és egymástól függetlenül) zérushoz tartanak. Hasonló a helyzet f'_y -nal is. Tehát

$$f'_x(\xi, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1$$

és

$$f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2,$$

ahol

$$\varepsilon_1 \rightarrow 0 \text{ és } \varepsilon_2 \rightarrow 0, \text{ ha } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

Ezeket Δz kifejezésébe behelyettesítve nyerjük, hogy

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y,$$

ahol

$$\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \text{ ha } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

A függvényérték teljes megváltozására nyert eredményünket úgy tekinthetjük, mint a kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának a definícióját.

Azt mondjuk, hogy az $f(x, y)$ kétváltozós függvény az (x_0, y_0) helyen akkor és csakis akkor differenciálható, ha megadhatók olyan csak x_0 -tól, y_0 -tól függő és Δx -tól, Δy -tól független A, B számok, hogy a függvény teljes megváltozását így lehessen felírni:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y, \end{aligned}$$

ahol

$$\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \text{ ha } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

Könnyű belátni azt, hogy A és B a folytonos $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ elsőrendű parciális deriváltak (x_0, y_0) -helyen felvett értékei:

$$A = f'_x(x_0, y_0),$$

$$B = f'_y(x_0, y_0).$$

A Δz -re kapott kifejezés csak akkor érvényes, ha az (x_0, y_0) -helyen léteznek és folytonosak f -nek x és y -szerinti f'_x és f'_y parciális deriváltjai.

Ha az ε_1 - és ε_2 -t tartalmazó két ún. hibatagot elhanyagolhatónak tekintjük (egy bizonyos hibahatáron belül), akkor a függvényérték teljes megváltozására, vagyis a Δz véges növekményre a következő közelítő egyenlőséget nyerjük:

$$\Delta z \approx f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

(feltéve, hogy

$$\sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2} < \delta,$$

ahol $\delta > 0$ elegendően kicsiny).

Ennek segítségével kis $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ változások mellett közelítőleg ki lehet számítani a függvényérték Δz változását.

A Δx és Δy véges növekmények helyett dx , dy differenciálokat írva nyerjük a függvény ún. teljes (vagy totális) differenciálját:

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

A dz teljes differenciál a Δz teljes megváltozás főrésze.

Fenáll, hogy

$$df(x, y) = d_x f(x, y) + d_y f(x, y),$$

ahol

$$d_x f(x, y) = f'_x(x, y)dx,$$

$$d_y f(x, y) = f'_y(x, y)dy,$$

vagyis a teljes differenciál egyenlő a parciális differenciálok összegével.

Megjegyzés. Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény x - és y -szerinti parciális deriváltjait szabad azonosítani a parciális differenciálokkal felírható megfelelő differenciálok hányadosaival, de nem szabad őket a $df(x, y)$ teljes differenciálnak a dx -szel, dy -nal képezett hányadosainak tekinteni:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y) = \frac{d_x f(x, y)}{dx} \neq \frac{df(x, y)}{dx},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f'_y(x, y) = \frac{d_y f(x, y)}{dy} \neq \frac{df(x, y)}{dy}$$

Ennek a megjegyzésnek egyik fontos alkalmazását találjuk például a termodinamikában, a Clapeyron-féle egyenlettel összefüggésben. A Clapeyron-féle egyenlet szerint az ideális gáz állapotegyenlete:

$$pv = RT,$$

ahol most p a gáz nyomása, v a móltérfogat (az ideális gáz gramm-molekulasúlynyi mennyiségének a térfogata), T az abszolút hőmérséklet, R pedig az ún. univerzális gázállandó.

Legyen először p függvénye T -nek és v -nek, azaz

$$p = R \frac{T}{v},$$

amikor is

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v} \quad \text{és} \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -R \frac{T}{v^2};$$

másodszor v függvénye T -nek és p -nek, azaz

$$v = R \frac{T}{p},$$

amikor is

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p} \quad \text{és} \quad \frac{\partial v}{\partial p} = -R \frac{T}{p^2};$$

végül pedig T függvénye p -nek és v -nek, azaz

$$T = \frac{1}{R} \cdot pv,$$

amikor is

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{1}{R} v \quad \text{és} \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{1}{R} p.$$

Ha most képezzük a következő szorzatot:

$$\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -R \frac{T}{v^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{R} v = -\frac{RT}{pv} \equiv -1.$$

(Ha itt a balszélen a ∂p , ∂v , ∂T szimbólumok közönséges differenciálok lennének, akkor ez a szorzat nem (-1) -gyel, hanem 1 -gyel lenne azonos, ami pedig nem igaz!)

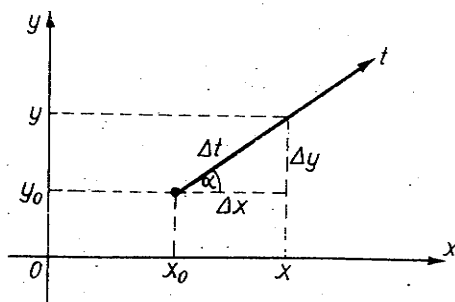
9.3.3. Iránymenti derivált

Legyen az adott $f(x, y)$ kétváltozós függvény az (x_0, y_0) helyen differenciálható, azaz létezenek és legyenek folytonosak az (x_0, y_0) helyen az $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ parciális deriváltak. Ekkor – ha z -vel jelöljük röviden az $f(x, y)$ függvényértékeket – írhatjuk, hogy

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y,$$

ahol $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ és $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, ha $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát Δt -vel, ahol Δt geometriai jelentése az ábra alapján nyilvánvaló: Δt az (x_0, y_0) és (x, y) pontok

előjeles távolsága; pozitív, ha (x, y) az (x_0, y_0) ponttól a nyíl irányába esik, különben negatív.



10. ábra

Ezt nyerjük:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x_0, y_0) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x_0, y_0) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

ami viszont

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \sin \alpha$$

miatt így is írható

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin \alpha + \varepsilon_1 \cdot \cos \alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin \alpha.$$

Ha most előírjuk azt, hogy $\Delta t \rightarrow 0$, amikor is $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, akkor nyerjük a következő határértéket:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin \alpha.$$

Ezt a differenciáhányadost az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) -helyen az α irányban vett *iránymenti deriváltjának* nevezzük.

Az iránymenti derivált geometriai jelentése nyilvánvaló: a $z = f(x, y)$ egyenletű felületet az (x_0, y_0) helyen egy olyan (x, y) -síkra merőleges vetítősíkkal metsszük el, amely az (x, z) -síkhhoz α szög alatt hajlik és a nyomvonala az (x, y) -síkban a t -tengely; az így kimetszett felületi görbe érintőjének az iránytangensét adja az iránymenti derivált.

Vegyük észre azt, hogy $f(x, y)$ -nak x -és y -szerinti parciális deriváltja speciális $\alpha = 0$ -hoz, illetve $\alpha = \frac{\pi}{2}$ -hez tartozó iránymenti deriváltak.

Az is belátható, hogy az iránymenti derivált egy adott helyen csak a két parciális deriválttól és az α szögtől függ:

$$\frac{dz}{dt} = f'_x \cdot \cos \alpha + f'_y \cdot \sin \alpha.$$

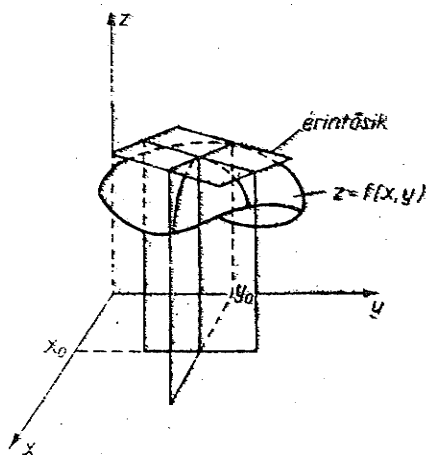
Ebből rögtön következik, hogy ha két függvénynek az adott helyen a parciális deriváltak megegyeznek, akkor e két függvénynek ezen a helyen az azonos irányban vett

iránymenti deriváltjaik is egyenlők. Ennek viszont az a következménye, hogy az összes, az (x_0, y_0) helyen áthaladó (x, y) -síkra merőleges vetítősíkok által a $z = f(x, y)$ egyenletű felületből kimetszett görbék (x_0, y_0) helyhez tartozó érintőegyenesei egy síkba, a felület e pontbeli érintősíkja esnek. Könnyű belátni, hogy az érintősík egyenlete:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

ahol

$$z_0 = f(x_0, y_0).$$



11. ábra

Ha bevezetjük itt a

$$z - z_0 = \Delta z,$$

$$x - x_0 = \Delta x,$$

$$y - y_0 = \Delta y$$

jelöléseket, ahol most Δz az érintősíktól mért z -koordináta megváltozását jelenti, akkor könnyű belátni azt, hogy ha egy (x_0, y_0) -helyen az $f(x, y)$ függvény értékének a teljes megváltozása helyett közelítésben csak e megváltozás fő részét tartjuk meg, vagyis a teljes megváltozást a teljes differenciállal helyettesítjük, akkor ez geometriailag azt jelenti, hogy a $z = f(x, y)$ egyenletű felületet egy pontjának környezetében az érintősíkjával helyettesítjük, azaz e pont környezetében egy közelítő linearizálást hajtunk végre:

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) dy = df(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

9.3.4. Kétváltozós összetett függvény deriválása

Legyen először az (x_0, y_0) helyen deriválható kétváltozós $f(x, y)$ függvényben

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

ahol $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ és $x(t)$, $y(t)$ a t_0 helyen deriválhatók. Ekkor az

$$f(x(t), y(t))$$

összetett függvényre jutunk.

Ha most t értéke t_0 -ról $(t_0 + \Delta t)$ -re változik, akkor f értékének megváltozását röviden Δz -vel jelölve, lesz

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$$

(ahol $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ és $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, ha $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$) miatt, valamint

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x_0 = \dot{x}(t_0) \cdot \Delta t + \varepsilon_1^* \cdot \Delta t$$

és

$$\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y_0 = \dot{y}(t_0) \cdot \Delta t + \varepsilon_2^* \cdot \Delta t,$$

ahol ε_1^* és $\varepsilon_2^* \rightarrow 0$, ha $\Delta t \rightarrow 0$ és $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, ha $\Delta t \rightarrow 0$, azaz

$$\Delta z = \{f'_x(x_0, y_0) \cdot \dot{x}(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot \dot{y}(t_0)\} \Delta t + \varepsilon \cdot \Delta t,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $\Delta t \rightarrow 0$, és így végül

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x_0, y_0) \cdot \dot{x}(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot \dot{y}(t_0),$$

vagyis röviden

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Például az iránymenti deriváltra kapott eredmény abból is származtatható, hogy most

$$f(x, y) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha),$$

ahonnan

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin \alpha,$$

mert $x(t) = x_0 + t \cdot \cos \alpha$ és $y(t) = y_0 + t \cdot \sin \alpha$ miatt $\dot{x}(t) \equiv \cos \alpha$ és $\dot{y}(t) \equiv \sin \alpha$.

Ha most a deriválható $f(x, y)$ -ban x helyébe az $x(u, v)$ és y helyébe az $y(u, v)$ deriválható függvényeket helyettesítjük, akkor az $f(x(u, v), y(u, v))$ összetett függvény u - és v -szerinti parciális deriváltját így számítjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x(u, v), y(u, v))}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial f(x(u, v), y(u, v))}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

9.3.5. Kétváltozós függvény magasabbrendű parciális deriváltjai

Ha az $f(x, y)$ függvénynek léteznek és folytonosak az x - és y -szerinti parciális deriváltjai a tetszőlegesen (x, y) -helyen, akkor ezek a parciális deriváltak az (x, y) -nak kétváltozós függvényei lesznek:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

és lehetséges, hogy ezek újból deriválhatók, azaz léteznek f -nek másodrendű parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x)'_x = f''_{xx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f'_x)'_y = f''_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_y)'_x = f''_{yx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y)'_y = f''_{yy}. \end{aligned}$$

Ezek közül az első és az utolsó f -nek x -szerinti, ill. y -szerinti tiszta másodrendű parciális deriváltja, viszont a két középső f -nek x - és y -szerinti (ill. y - és x -szerinti) vegyes másodrendű parciális deriváltja.

Érvényes a következő *tétel*: ha f -nek léteznek és folytonosak a vegyes másodrendű parciális deriváltjai, akkor ezek egymással egyenlők, függetlenül a deriválás sorrendjétől, vagyis

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be:

Legyen $h \neq 0$ és $k \neq 0$, továbbá négy pont az (x, y) -síkban: $P_1(x, y)$, $P_2(x + h, y)$, $P_3(x, y + k)$ és $P_4(x + h, y + k)$. f -nek e pontokban felvett értékeiből képezzük a következő kifejezést:

$$A = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y).$$

Ezt kétféleképpen alakíthatjuk át. Először tekintsük y -t rögzített paraméternek és vezessük be a

$$\varphi(x) = f(x, y + k) - f(x, y)$$

függvényt. Ezzel

$$A = \varphi(x + h) - \varphi(x) = h \cdot \varphi'(x + \vartheta h), \quad \text{ahol } 0 < \vartheta < 1.$$

Azonban

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y + k) - f'_x(x, y) = k \cdot f''_{xy}(x, y + \vartheta' k), \quad \text{ahol } 0 < \vartheta' < 1,$$

tehát

$$A = hk f''_{xy}(x + \vartheta h, y + \vartheta' k).$$

Másodszor tekintsük x -et rögzített paraméternek és vezessük be a

$$\psi(y) = f(x + h, y) - f(x, y)$$

függvényt. Ezzel

$$A = \psi(y + k) - \psi(y) = k \cdot \psi'(y + \vartheta_1 k), \quad \text{ahol } 0 < \vartheta_1 < 1.$$

Azonban

$$\psi'(y) = f'_y(x + h, y) - f'_y(x, y) = h \cdot f''_{yx}(x + \vartheta'_1 h, y), \quad \text{ahol } 0 < \vartheta'_1 < 1,$$

tehát

$$A = hk f''_{yx}(x + \vartheta'_1 h, y + \vartheta_1 k).$$

Az A -ra kapott kétféle kifejezés egyenlőségéből, hk -val való rövidítés után, azt kapjuk, hogy

$$f''_{xy}(x + \vartheta h, y + \vartheta' k) = f''_{yx}(x + \vartheta'_1 h, y + \vartheta_1 k)$$

és ebből $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ határátmenet után:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

A másodrendű deriváltak újbóli deriválásával (feltéve, hogy ez lehetséges) jutunk el $f(x, y)$ -nak harmad-, negyed-, és így tovább, általában n -edrendű parciális deriváltjaihoz. Ha ezek a deriváltak folytonosak, akkor ezekre is érvényes az előbbi tétel megfelelő általánosítása, tehát pl. $f'''_{yyx} = f'''_{xyy}$. Az összetett függvények magasabbrendű parciális deriváltjainál értelemszerűen lehet alkalmazni az összetett függvények deriválására vonatkozó láncszabályt.

Példaként írjuk fel az $f(x, y)$ függvényre vonatkozó ún. Laplace-féle kifejezést úgy, hogy az x és y változók helyébe polárkoordinátákat vezetünk be. Jelölje röviden az $f(x, y)$ függvényértékeket z és legyen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

az ún. Laplace-féle kifejezés.

Felhasználjuk az

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

illetve

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

összefüggéseket, valamint a

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{r} \end{aligned}$$

parciális deriváltakat.

Az adott függvény x - és y -szerinti elsőrendű parciális deriváltjaira ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}.\end{aligned}$$

Ennek analógiájára számítjuk ki az x -szerinti és az y -szerinti tiszta másodrendű parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \right) \cdot \cos \varphi - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \right) \cdot \frac{\sin \varphi}{r} = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cdot \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r} + 2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r^2} + \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r} \right) \cdot \sin \varphi + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r} \right) \cdot \frac{\cos \varphi}{r} = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cdot \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r} - 2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r^2} + \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}.\end{aligned}$$

Ha most a két utolsó eredményt összeadjuk, kapjuk a végeredményt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}.$$

9.3.6. Kétváltozós függvény magasabbrendű totális differenciáljai

Láttuk azt, hogy ha az $f(x, y)$ kétváltozós függvény folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkezik, akkor létezik a teljes differenciálja:

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Láthatóan $df(x, y)$ a parciális deriváltakon keresztül az (x, y) függvénye. Ha tehát léteznek és folytonosak az $f(x, y)$ függvény megfelelő magasabbrendű parciális deriváltjai is, akkor beszélhetünk a $d^2 f(x, y)$ második (vagy másodrendű) totális differenciálról, mint a $df(x, y)$ első (vagy elsőrendű) totális differenciál totális differenciáljáról, és így tovább a magasabbrendű totális differenciálokról is.

A definíció alapján – figyelemmel arra, hogy a független változók dx és dy differenciáljai a független változók konstansnak tekinthető tetszőleges megváltozásával azonosak, tehát x -től és y -től függetlenek – írhatjuk:

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= d(df(x, y)) = d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy\right) = \\ &= dx \cdot d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) + dy \cdot d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \\ &= dx \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} dy\right) + dy \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy\right) = \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

És teljesen hasonlóan adódik $f(x, y)$ -nak harmadrendű totális differenciáljára:

$$d^3 f(x, y) = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} dy^3.$$

Matematikai indukcióval be lehet azt bizonyítani, hogy ezeket a képleteket formálisan a következőképpen lehet előállítani:

$$d^n f(x, y) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y).$$

9.3.7. A Taylor-formula általánosítása kétváltozós függvények esetére

Tegyük fel azt, hogy az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek léteznek és folytonosak az x - és y - szerinti parciális deriváltjai egészen az $(n+1)$ -edik deriváltakig bezárólag. A Taylor-formula az $f(a+h, b+k)$ függvényértékeket állítja elő közelítőleg a független változók adott h és k növekményeinek polinomjaként. Vezessünk be először az

$$\begin{aligned} x &= a + ht, \\ y &= b + kt \end{aligned}$$

összefüggésben szereplő lineáris függvényekkel egy közös t paramétert. Így a következő egyváltozós függvényre jutunk:

$$\varphi(t) = f(a + ht, b + kt),$$

ahol nyilván

$$\varphi(0) = f(a, b) \quad \text{és} \quad \varphi(1) = f(a + h, b + k).$$

Felhasználjuk az egyváltozós függvényre megismert Taylor-formulát:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}$$

ahol $0 < \vartheta < 1$.

Fejezzük ki a φ deriváltjainak a helyettesítési értékeit az f függvényből.

Felhasználjuk egyrészt azt, hogy x és y a t paraméter lineáris függvényei, tehát

$$dx = h dt,$$

$$dy = k dt,$$

másrészt pedig azt, hogy $\varphi(t)$ p -edrendű differenciálja azonos $f(x, y)$ -nak p -edrendű totális differenciáljával:

$$d^p \varphi(t) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) \Big|_{\substack{x=a+ht \\ y=b+kt}} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) \cdot dt^p,$$

ahonnan

$$\varphi^{(p)}(t) = \frac{d^{(p)} \varphi(t)}{dt^p} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) \Big|_{\substack{x=a+ht \\ y=b+kt}}$$

Vegyük még azt figyelembe, hogy ha $t = 0$, akkor $x = a$, $y = b$ és ha $t = \vartheta$, akkor $x = a + \vartheta h$, $y = b + \vartheta k$, azaz

$$\begin{aligned} \varphi^{(p)}(0) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(a, b), \\ \varphi^{(n+1)}(\vartheta) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(a + \vartheta h, b + \vartheta k). \end{aligned}$$

Mindezekkel végeredményben:

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(a + \vartheta h, b + \vartheta k), \\ &\text{ahol } 0 < \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Ha most speciálisan $a + h$ helyett x -et, $b + k$ helyett y -t írunk és ennek megfelelően h helyett $(x - a)$ -t, k helyett pedig $(y - b)$ -t, akkor a Taylor-formula következő alakjára jutunk:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \left((x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left((x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left((x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left((x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(\xi, \eta), \end{aligned}$$

ahol az utolsó tagban, az ún. maradéktagban az $(n+1)$ -edrendű deriváltakat a (ξ, η) pontban kell venni, amely az (x, y) -síkból az (a, b) pontot az (x, y) ponttal összekötő egyenesszakasz egy alkalmas közbenső pontját jelenti.

A Taylor-formula speciális esetben, ha $n = 0$, a kétváltozós függvényre vonatkozó *középértéktétel* kifejező képletbe megy át:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h \cdot f'_x(a + \vartheta h, b + \vartheta k) + k \cdot f'_y(a + \vartheta h, b + \vartheta k),$$

ahol $0 < \vartheta < 1$.

Ebből a következő nevezetes tétel származtatható:

Ha az (a, b) pontban és ennek környezetében mindenütt az f'_x és f'_y elsőrendű parciális deriváltak értéke 0, akkor ott $f(x, y) \equiv$ állandó.

9.3.8. Kétváltozós függvény lokális szélső értéke létezésének szükséges feltétele.

Legyen $f(x, y)$ az (a, b) helyen és ennek egy bizonyos környezetében totálisan differenciálható. A függvénynek az (a, b) helyen *lokális maximuma* van, ha

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0$$

bármilyen kicsiny $|h|$ és $|k|$ mellett. És viszont *lokális minimumról* beszélünk, ha

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \geq 0$$

tetszőleges $|h|$ és $|k|$ mellett.

Nyilvánvaló, hogy ha $f(a, b)$ lokális maximum, vagy minimum, akkor szükségképpen maximuma vagy minimuma van az

$$F(t) = f(a + t \cos \alpha, b + t \sin \alpha)$$

egyváltozós függvénynek is a $t = 0$ helyen, tetszőleges α mellett. Ennek viszont szükséges feltétele az, hogy $F'(0) = 0$ legyen, azaz

$$f'_x(a, b) \cdot \cos \alpha + f'_y(a, b) \cdot \sin \alpha = 0$$

legyen. Ez azonban tetszőleges α mellett csak úgy lehetséges, ha egyszerre teljesül, hogy

$$f'_x(a, b) = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(a, b) = 0.$$

Ennek a geometriai jelentése nyilvánvalóan az, hogy a $z = f(x, y)$ egyenletű felületnek az (a, b) helyen az érintősíkjá párhuzamos az (x, y) síkkal.

Teljesen hasonlóan lehet azt belátni, hogy egy tetszőleges, totálisan deriválható többváltozós függvénynek *csak ott lehet lokális szélsőértéke*, ahol a függvény valamennyi elsőrendű parciális deriváltja zérussal egyenlő. Hogy azután ezen a helyen ténylegesen lokális maximum, vagy minimum van-e, azt további vizsgálattal lehet eldönteni.

9.3.9. Kétváltozós függvény lokális szélsőértéke létezésének egy elégséges feltétele

A következőkben feltesszük azt, hogy az $f(x, y)$ függvénynek az (a, b) helyen és ennek a környezetében nemcsak az első-, hanem a másodrendű parciális deriváltjai is léteznek és folytonosak.

Legyenek az (a, b) -helyen az elsőrendű parciális deriváltak zérusok:

$$f'_x(a, b) = 0, \quad f'_y(a, b) = 0.$$

Ekkor a Taylor-formula szerint:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= \frac{1}{2} \{ f''_{xx}(a+\vartheta h, b+\vartheta k) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(a+\vartheta h, b+\vartheta k) \cdot hk + \\ &\quad + f''_{yy}(a+\vartheta h, b+\vartheta k) \cdot k^2 \}, \\ 0 &< \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Ebből, bizonyos feltételek mellett, el lehet dönteni azt, hogy az (a, b) -helyen ténylegesen van-e lokális szélsőérték, és hogy az milyen. Ehhez ugyanis azt kell megállapítani, hogy elegendően kicsiny $|h|$ és $|k|$ mellett ez a függvényérték-különbség milyen előjelű.

Hogy ez a vizsgálat kényelmesebb legyen, azért bevezetjük $f(x, y)$ másodrendű parciális deriváltjainak az (a, b) -helyen felvett értékei számára a következő jelöléseket:

$$f''_{xx}(a, b) = A, \quad f''_{xy}(a, b) = B, \quad f''_{yy}(a, b) = C;$$

továbbá legyen

$$h = t \cdot \cos \alpha, \quad k = t \cdot \sin \alpha$$

tetszőleges α -val és legyen

$$t = \sqrt{h^2 + k^2} \geq 0$$

elegendően kicsiny. Ekkor a másodrendű parciális-deriváltak feltételezett folytonossága alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} f''_{xx}(a+\vartheta h, b+\vartheta k) &= A + \varepsilon_1, \\ f''_{xy}(a+\vartheta h, b+\vartheta k) &= B + \varepsilon_2, \\ f''_{yy}(a+\vartheta h, b+\vartheta k) &= C + \varepsilon_3, \end{aligned}$$

ahol nyilván $t \rightarrow 0$ esetén $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, 3$). És ha még

$$\varepsilon_1 \cdot \cos^2 \alpha + 2\varepsilon_2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \varepsilon_3 \cdot \sin^2 \alpha = \varepsilon,$$

ahol természetesen

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

akkor

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{t^2}{2}(A \cdot \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \cdot \sin \alpha + C \sin^2 \alpha + \varepsilon).$$

Mármost négy eset lehetséges:

1.) Tegyük fel, hogy

$$A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

egyetlen α -nál sem válik 0-vá. Ekkor azonban (mivel α -nak folytonos függvénye) minden α -ra ugyanolyan előjelű. Legyen pl. pozitív. A $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ intervallumban felvett legkisebb (pozitív) értéke legyen m . Ekkor azonban elegendően kicsiny t mellett biztosan $|\varepsilon| < m$ és így az $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ előjelét

$$A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

előjele határozza meg. Mivel ez pozitív, azért ez esetben biztos, hogy $f(a, b)$ *lokális minimum*.

2.) Teljesen hasonlóan látható be az, hogy ha

$$A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

minden α -ra negatív, akkor $f(a, b)$ *lokális maximum*.

3.) Ha az

$$A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

kifejezés felvesz egyaránt pozitív és negatív értékeket, akkor egyidejűleg az

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

függvényérték-különbség is ugyanúgy viselkedik alkalmasan kicsiny $|t|$ mellett. Ebben az esetben $f(x, y)$ -nak az (a, b) -helyen *sem lokális minimuma, sem lokális maximuma nem lehet*.

4.) Végül tegyük fel azt, hogy

$$A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

bizonyos α értékre 0 lesz, egyébként más α értékeknél mindig pozitív, vagy mindig negatív. Ekkor azonban ε előjelének ismerete nélkül semmi biztosat nem lehet mondani az $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ különbség előjeléről, tehát további vizsgálat (magasabbrendű deriváltak bevonása) nélkül *nem lehet azt eldönteni*, hogy lokális szélsőérték van-e, vagy sem.

Hogy a fenti négy eset közül melyikkel állunk szemben, azt a következőképpen lehet eldönteni:

a.) Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Ekkor írhatjuk:

$$A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha = \frac{(A \cos \alpha + B \sin \alpha)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \alpha}{A}$$

Ha most $AC - B^2 > 0$, akkor a tört számlálója két olyan nem negatív összeadandó összege, amelyek egyszerre nem lehetnek 0-val egyenlők. Hiszen a második tag csak akkor 0, ha $\sin \alpha = 0$, de ekkor az első tag értéke $A^2 \neq 0$. Így tehát, ha $A > 0$, akkor az 1.) esettel van dolgunk, tehát lokális maximuma van. (Még azt vegyük észre, hogy ha $A \neq 0$, akkor $AC - B^2 > 0$ miatt kell, hogy $C \neq 0$ is legyen, sőt A és C mindketten egyszerre pozitívak, vagy negatívak!)

b.) Tegyük fel, hogy $A \neq 0$ és $AC - B^2 < 0$. Ekkor az a.) esetben is alkalmazott átalakítással nyert tört számlálója $\sin \alpha = 0$ esetén pozitív, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{B}{A}$ esetén pedig negatív. Tehát a 3.) esettel van dolgunk, vagyis lokális szélsőérték nincsen.

c.) Tegyük fel, hogy $A \neq 0$ és $AC - B^2 = 0$. Ekkor azonban

$$A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha = \frac{(A \cos \alpha + B \sin \alpha)^2}{A}.$$

Ez azonban 0, ha $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{B}{A}$, egyébként A előjelével azonos előjelű. Tehát a 4.) esettel állunk szemben, vagyis nem lehet tudni - a magasabbrendű deriváltak vizsgálatával nélkül - hogy van-e lokális szélsőérték vagy sem.

d.) Tegyük fel, hogy $A = 0$ de $B \neq 0$. Ekkor

$$A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha = \sin \alpha (2B \cos \alpha + C \sin \alpha).$$

Ha α zérustól kevéssé különbözik, akkor a zárójelben lévő kifejezés előjele B előjelével megegyezik; $\sin \alpha$ azonban különböző előjelű aszerint, hogy α nagyobb vagy kisebb mint 0, tehát a 3.) esettel van dolgunk, azaz nincs lokális szélsőérték.

e.) Tegyük fel végül azt, hogy $A = B = 0$. Ekkor azonban nem tudjuk eldönteni azt, hogy van-e lokális szélsőérték, mert $C \sin^2 \alpha$ csak akkor 0, ha $\sin \alpha = 0$, egyébként pedig C -vel azonos előjelű.

Ha most még figyelembe vesszük azt, hogy a d.) esetben $AC - B^2 < 0$, az e.) esetben pedig $AC - B^2 = 0$, összefoglalva a következőket mondhatjuk:

Az $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeinek a meghatározása céljából először képezzük az $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ elsőrendű parciális deriváltjait. Ezeket 0-val tesszük egyenlővé, azaz megoldjuk az

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 0, \\ f'_y(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Legyen $x = a$, $y = b$ egy megoldás. képezzük $f(x, y)$ másodrendű parciális deriváltainak a helyettesítési értékét az (a, b) -helyen:

$$f''_{xx}(a, b) = A, \quad f''_{xy}(a, b) = B, \quad f''_{yy}(a, b) = C.$$

Ha most:

$AC - B^2$	> 0		< 0	$= 0$
A	> 0	< 0	nincs lokális szélsőértéke	nem dönthető el, hogy van-e lokális szélsőérték
akkor	lokális	lokális		
$f(x, y)$ -nak	minimuma van	maximuma van		

Megjegyzés

Az előbbieken tárgyalt vizsgálat lényegét vissza lehet vezetni a másodrendű parciális deriváltak (a, b) helyen felvett helyettesítési értékeivel, mint együttthatókkal felírható

$$Q(\xi, \eta) = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

kvadratikus alak értékkészlete előjeleloszlásának a vizsgálatára:

Ugyanis *lokális minimum* akkor és csakis akkor van, ha ez a kvadratikus alak (a $\xi = 0$, $\eta = 0$ eset kizárásával) mindig csak pozitív helyettesítési értéket vesz fel (*definit pozitív*); *lokális maximum* pedig akkor és csakis akkor, ha ez a kvadratikus alak (a $\xi = 0$, $\eta = 0$ eset kizárásával) mindig csak negatív helyettesítési értéket vesz fel (*definit negatív*). Minden más esetben vagy nincs lokális szélsőérték, vagy pedig ezt csak további vizsgálat alapján lehet eldönteni,

A $Q(\xi, \eta)$ kvadratikus alakot fel lehet írni mátrixokkal is:

$$Q(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Az itt szereplő (másodrendű) kvadratikus mátrix (valós elemű és szimmetrikus mátrix) hasonlósági transzformációjával mindig diagonalizálható és akkor

$$Q(\xi, \eta) = \lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2,$$

ahol λ_1 és λ_2 ennek a mátrixnak a sajátértékei. Innen pedig látható, hogy (a $\xi' = 0$, $\eta' = 0$ esetet kizárva) ez csak akkor adhat pozitív helyettesítési értéket, ha a sajátértékek mind pozitívak, és viszont csak akkor adhat negatív helyettesítési értéket, ha a sajátértékek mind negatívak.

Ez adja a kezünkbe a "kulcsot", hogy mindezt általánosítsuk arra az esetre, ha f n -változós függvény:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Tegyük fel azt, hogy az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ helyen

$$f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad \text{minden } i\text{-re;}$$

továbbá

$$f''_{x_i x_j}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_{ij} \equiv a_{ji}$$

és ezekkel az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

jelölések mellett felírjuk a

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \underline{\xi}^T \underline{A} \underline{\xi}$$

kvadratikus alakot, akkor ha (a $\underline{\xi} \neq 0$ eset kizárásával) ennek az értékkészlete mindig pozitív, akkor lokális maximuma van. A $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ kvadratikus alak definit pozitív (negatív) voltát az biztosítja, hogy $\underline{A}$ valamennyi sajátértéke pozitív (negatív).

9.3.10. Kétváltozós függvények kötött szélsőértékfeladatairól

Legyen adva az $f(x, y)$ függvény, amelyről feltesszük, hogy folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkezik. Keressük ennek lokális szélsőértékeit a

$$g(x, y) = 0$$

feltétel mellett. Ez a feltételi egyenlet azt jelenti, hogy x és y nem független változók, hanem egyikük "kötött" olyan értelemben, hogy a másiknak valamilyen függvénye, pl. y az x -nek valamilyen függvénye: $\varphi(x) = y$. Így azonban valójában nem egy kétváltozós függvénynek, hanem csak egy egyváltozós függvénynek a szélsőérték feladatáról van szó. Ha valóban $\varphi(x)$ az a függvény, amely a $g(x, y) = 0$ feltételi egyenlet szerint y -t mint x -nek a függvényét állítja elő, akkor a feladat arra redukálódik, hogy az

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

egyváltozós függvénynek határozzuk meg a lokális szélsőértékeit.

Az igazi problémát gyakorlatilag az adja, hogy az esetek nagy részében a feltételi egyenletből nem tudjuk, vagy csak nehezen tudjuk az egyik változót a másik explicit függvényeként előállítani és így az egyváltozós függvény szélsőérték feladatára való visszavezetést ténylegesen nem tudjuk, vagy csak nehezen tudjuk végrehajtani. Éppen ezért olyan módszerre van szükség, amely ezt a redukciót megkerüli. Ilyen a *Lagrange-féle multiplikátorok módszere*, amelynek lényegére – a legegyszerűbb vizsgált esetben – a következő megfontolások vezetnek.

Ahhoz, hogy az

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

függvénynek lokális szélsőértéke legyen szükséges, hogy $F'(x) = 0$ legyen, azaz

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Az itt szereplő $\frac{d\varphi}{dx}$ deriváltat azonban nem ismerjük, viszont

$$g(x, \varphi(x)) = 0$$

x megengedett értékei mellett azonosság és ebből deriválással

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

adódik. Ha most feltesszük azt, hogy $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, akkor innen

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

adódik. Ezt figyelembevéve a szélsőérték levezetésének szükséges feltételére felírt egyenletünk így alakul:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0.$$

Ez a feltétel biztosan teljesül, ha alkalmas állandó mellett fennáll, hogy

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\lambda,$$

azaz egyidejűleg teljesülnek a következő egyenletek:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy a

$$\phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

háromváltozós függvénynek valamennyi elsőrendű parciális deriváltja zérussal egyenlő:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} &= g(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Ezzel új módszert, a Lagrange-féle multiplikátor módszerét találtuk a kötött szélsőérték feladat megoldására:

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett a lokális szélsőértékeit úgy keressük, hogy határozatlan λ állandó (szorzó tényező, multiplikátor) bevezetésével a kötött szélsőérték feladatot a

$$\phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

függvény "szabad" szélsőérték feladatára vezetjük vissza.

Bizonyos feltételek mellett a fentiek általánosíthatók több független változó és több feltételi egyenlet esetére is. További részletekbe (valamint a szélsőérték létezése elégséges feltételeinek vizsgálataiba) nem bocsájtkozunk.

Példaként határozzuk meg az

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy$$

függvény (kvadratikusan alak) szélső értékeit a

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

feltétel mellett.

Mindenekelőtt a feltételi egyenletből megállapítható, hogy

$$|x| \leq 1, \quad |y| \leq 1, \quad |z| \leq 1,$$

azaz a változók tartománya folytonos, összefüggő és korlátos. Minthogy pedig $f(x, y, z)$ mint racionális egész függvény, e tartomány minden belső és határhelyén folytonos, azért ismert tétel (Weierstrass) szerint $f(x, y, z)$ e tartományon belül vagy ennek határán legalább egy helyen eléri a maximumát, illetve a minimumát. Ily módon feltételes szélsőérték létezése eleve biztosítva van, s így csak azoknak a helyeknek a meghatározásával kell foglalkoznunk, ahol ezek bekövetkeznek.

Bevezetjük az

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

függvényt.

Feltételes szélsőérték csak ott lehetséges, ahol

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + y - \lambda x = (2 - \lambda)x + y = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + x - \lambda y = x + (2 - \lambda)y = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} &= 4z - \lambda = (4 - \lambda)z = 0, \\ -\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Tehát a

$$\begin{pmatrix} (2 - \lambda) & 1 & 0 \\ 1 & (2 - \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (4 - \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek azok a megoldásai, melyekre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

adják azokat a helyeket, ahol szélső érték lehet. A feltételi egyenlet szerint x, y, z nem lehetnek egyszerre 0-val egyenlők, tehát kell, hogy az egyenletrendszer együtthatómátrixának a determinánsa 0 legyen, azaz

$$(4 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0.$$

Ez az egyenlet az adott kvadratikus alakhoz tartozó

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

kvadratikus mátrixhoz tartozó karakterisztikus egyenlet, gyökei a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4;$$

a sajátértékeknek megfelelő

$$\underline{x}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

megoldások pedig az

$$|\underline{u}_i|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

feltétel szerint egységnyi abszolút értékű sajátvektorok.

$\lambda_1 = 1$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \underline{0},$$

ahonnan

$$x_1 : y_1 : z_1 = 1 : -1 : 0,$$

tehát a feltétel szerint:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = 0.$$

$\lambda_2 = 3$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \underline{0},$$

ahonnan

$$x_2 : y_2 : z_2 = 1 : 1 : 0,$$

tehát a feltétel szerint

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = 0.$$

Végül $\lambda_3 = 4$ esetén

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underline{0},$$

ahonnan

$$x_3 : y_3 : z_3 = 0 : 0 : 1$$

tehát a feltétel szerint

$$x_3 = 0, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = 1.$$

További bonyolult vizsgálat helyett gyorsabban célt érünk, ha az $f(x, y, z)$ függvénynek kiszámítjuk a helyettesítési értékét a kapott helyeken:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 1,$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 3,$$

$$f(0, 0, 1) = 4.$$

Tehát minimum van az 1. esetben és maximum a 3. esetben. Figyelemre méltó, hogy f -nek a helyettesítési értékei megegyeznek $\underline{A}$ sajátértékeivel, vagyis a sajátértékek maguk bizonyos feltételeknek megfelelő szélsőértékei az $\underline{A}$ -val képezhető kvadratikus alaknak.

9.3.11. Implicit függvények (függvényrendszerek) és deriválásuk

Gyakran fordul elő, hogy egy

$$F(x, y) = 0$$

egyenlet olyan hozzárendelési utasítást definiál, amely megengedett x -értékekhez meghatározott y értékeket rendel hozzá és ilyenkor azt mondjuk, hogy adva van implicit formában egy bizonyos $f(x)$ függvény, amely x -hez az $f(x) = y$ függvényértékeket rendeli hozzá. Ilyenkor az

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

azonosság teljesül $f(x)$ értelmezési tartományában, vagy annak egy részében.

Be lehet azt bizonyítani, hogy ha az (x_0, y_0) helyen, illetve ennek a környezetében az $F(x, y)$ függvény eleget tesz a következő feltételeknek:

$$1.) F(x_0, y_0) = 0,$$

2.) léteznek és folytonosak az F'_x és F'_y parciális deriváltak az (x_0, y_0) helyen és ennek környezetében,

$$3.) F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

akkor létezik az x_0 hely egy bizonyos környezetében értelmezett $f(x)$ függvény, amely az x_0 helyen deriválható és amelyre fennáll:

$$y_0 = f(x_0),$$

$$F(x, f(x)) \equiv 0,$$

függetlenül attól, hogy $f(x)$ -et explicite elő tudjuk-e állítani, vagy sem.

Az

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

deriváltat az

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

azonosság x -szerinti deriválásával lehet előállítani:

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F'_x + F'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

ahonnan, mivel feltevés szerint $F'_y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Az előbbiek – bizonyos feltételek teljesülése esetén – általánosíthatók kettőnél több változót összekapcsoló függvényekre, sőt több függvényből álló függvényrendszerekre is.

Igy például, ha az (x_0, y_0, z_0) helyen és ennek környezetében az $F(x, y, z)$ függvény eleget tesz a következő feltételeknek:

$$1.) F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

2.) léteznek és folytonosak az F'_x, F'_y, F'_z parciális deriváltak az (x_0, y_0, z_0) helyen és ennek a környezetében,

3.) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,
akkor létezik az (x_0, y_0) hely egy bizonyos környezetében értelmezett $f(x, y)$ függvény, amely az (x_0, y_0) helyen deriválható és amelyre fennáll:

$$z_0 = f(x_0, y_0),$$

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0,$$

függetlenül attól, hogy $f(x, y)$ -t explicite elő tudjuk-e állítani, vagy sem.

Az $F(x, y, z) = 0$ egyenlettel implicit megadott $f(x, y) = z$ helyettesítési értékkel rendelkező függvény parciális deriváltjai a következő egyenletekből fejezhetők ki:

$$F'_x + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$F'_y + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

ahonnan az $F'_z \neq 0$ feltevés miatt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Legyen végül példaként adva a $F(x, y, z)$ és $G(x, y, z)$ függvényekből álló függvényrendszer, amelyekkel az

$$F(x, y, z) = 0$$

$$G(x, y, z) = 0$$

egyenletrendszer a feltevés szerint y -t és z -t mint az x független változó deriválható függvényeit definiálja. Kérdés az, hogy milyen feltétel mellett lehet ezeknek az implicit adott függvényeknek a deriváltjait előállítani.

Feltesszük azt, hogy az adott egyenletrendszerrel definiált $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ függvények az x -helyen y -t és z -t adják helyettesítési értéként:

$$\varphi(x) = y,$$

$$\psi(x) = z.$$

Ezekkel

$$F(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0,$$

$$G(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0.$$

Ezt a két azonosságot x -szerint deriválva kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} F'_x + F'_y \cdot \varphi' + F'_z \cdot \psi' &= 0, \\ G'_x + G'_y \cdot \varphi' + G'_z \cdot \psi' &= 0, \end{aligned}$$

vagy pedig átrendezve:

$$\begin{aligned} F'_y \cdot \varphi' + F'_z \cdot \psi' &= -F'_x, \\ G'_y \cdot \varphi' + G'_z \cdot \psi' &= -G'_x, \end{aligned}$$

Annak a feltétele, hogy ebből az egyenletrendszerből φ' és ψ' kifejezhető legyen:

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = F'_y G'_z - F'_z G'_y \neq 0.$$

Ha ez teljesül, akkor

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{F'_z G'_x - F'_x G'_z}{F'_y G'_z - F'_z G'_y}, \\ \psi'(x) &= \frac{F'_x G'_y - F'_y G'_x}{F'_y G'_z - F'_z G'_y}. \end{aligned}$$

9.3.12. Függvényrendszerek, transzformációk, leképezések

Legyen adva egy bizonyos kétváltozós $f(x, y)$ függvény, amelynek x és y a független változói. Gyakori az olyan feladat, amelynél célszerű az x, y független változók helyett az

$$\begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \end{cases}$$

függvényrendszer közvetítésével új változókat u -t és v -t bevezetni. Feltesszük azt, hogy egy (u, v) értékpárhoz ez a függvényrendszer

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x \\ y(u, v) &= y \end{aligned}$$

módon egy-egy meghatározott (x, y) értékpárt rendel hozzá. Megköveteljük azt, hogy $x(u, v)$ és $y(u, v)$ folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkezzenek. Továbbá azt, hogy egy (u, v) értékpárnak csak egy (x, y) értékpár feleljen meg és megfordítva, vagyis a függvényrendszerrel meghatározott transzformáció kölcsönösen egyértelmű és megfordítható legyen.

A következőkben meg fogjuk vizsgálni azt, hogy milyen geometriai kép kapcsolható egy ilyen függvényrendszerrel meghatározott transzformációhoz és hogy milyen feltétel biztosítja azt, hogy létezzék egyértelmű inverz transzformáció és végül hogy az inverz transzformáció létezése esetén hogyan lehet az adott függvényrendszer deriváltjaiból kiszámítani az inverz függvények deriváltjait.

Mindenekelőtt lássuk a geometriai szemléltetés lehetőségét. Válasszunk a síkban két derékszögű koordinátarendszert. Az egyiknek a tengelyei legyenek x és y , a másiké pedig u és v . Az (u, v) -síkból megrajzolva az $u = u_0$ egyenletű koordinátavonalat (amely a v -tengellyel párhuzamos egyenes), meg lehet keresni ennek a képét az (x, y) -síkból. Ez ugyanis nem egyéb, mint az

$$\begin{aligned}x &= x(u_0, v), \\y &= y(u_0, v)\end{aligned}$$

paraméteres egyenletrendszerrel meghatározott görbe. Ezt a görbét az jellemzi, hogy e mentén a u értéke állandó: u_0 , és csak a v változik (ez most a paraméter).

Teljesen hasonlóan jutunk a $v = v_0$ egyenletű koordinátavonal (u -tengellyel párhuzamos egyenes) képre. Ezt ugyanis az

$$\begin{aligned}x &= x(u, v_0), \\y &= y(u, v_0)\end{aligned}$$

paraméteres egyenletrendszer határozza meg. Ezt a görbét az jellemzi, hogy e mentén a v értéke állandó: v_0 , és csak az u változik (most ez a paraméter).

A különböző $u = \text{állandó}$, $v = \text{állandó}$ koordinátavonalak hálózatának az (x, y) -síkon megfelel egy görbevonalakból álló hálózat. E hálózatot alkotó görbeseregek vonalai az (x, y) -sík görbevonalaú koordinátavonalai. Az (u, v) sík egy tetszőleges $P'(u_0, v_0)$ pontjának megfelel az (x, y) -síkon az a P pont, melyen átmegy az $u = u_0$, $v = v_0$ koordinátavonal. Így tehát az (u_0, v_0) értékpárt úgy tekinthetjük, hogy az az (x, y) -síkbeli P pont görbevonalaú koordináta-értékpárja. Maga az adott függvényrendszer által meghatározott transzformáció tehát egyrészt úgy tekinthető, hogy az az (u, v) -sík pontjainak leképezését adja az (x, y) -sík pontjaira, másrészt pedig lehetővé teszi azt, hogy az (x, y) -sík pontjait görbevonalaú koordinátákkal jellemezhessük.

Ha az (u, v) -sík különböző pontjainak az (x, y) -síkon különböző pontok felelnek meg, akkor az adott leképezés egyértelmű. Ha továbbá értelmezhető az ugyancsak egyértelmű

$$\begin{cases} u(x, y), \\ v(x, y) \end{cases}$$

függvényrendszer, mely az előbbi leképezés inverzét jelenti, akkor a leképezés kölcsönösen megfordítható és egyértelmű. (Itt feltesszük azt, hogy az $u(x, y)$, $v(x, y)$ függvényrendszer (x, y) -helyen vett helyettesítési értékei:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= u, \\v(x, y) &= v\end{aligned}$$

adják az (x, y) -hoz rendelt (u, v) értékpárt.)

További vizsgálatainkat a legegyszerűbb speciális esettel folytatjuk, azaz legyen $x(u, v)$ és $y(u, v)$ lineáris:

$$\begin{aligned}x &= a_1 u + b_1 v + c_1, \\y &= a_2 u + b_2 v + c_2.\end{aligned}$$

Ez egy lineáris transzformáció. Nem jelenti az általánosság megszorítását az az egyszerűsítő feltevés, ha $c_1 = c_2 = 0$. Ez ugyanis azt jelenti, hogy az (u, v) -sík origójának a képe, azaz az (x, y) -sík (c_1, c_2) pontja nem más, mint az (x, y) -sík origója. Ha $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, akkor egy az (x, y) -síkban végrehajtott párhuzamos eltolás mindig a $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ esetre vezet és megfordítva. Éppen ezért legyen az egyszerűség kedvéért:

$$\begin{aligned}x &= a_1 u + b_1 v, \\y &= a_2 u + b_2 v.\end{aligned}$$

Könnyű azt belátni, hogy most az $u = \text{állandó}$ és a $v = \text{állandó}$ koordinátavonalaknak az (x, y) -síkon adódó képei egymás között párhuzamos egyenesek lesznek. Ugyanis, ha $u = u_0$, akkor

$$b_1 y = b_2 x + (a_2 b_1 - a_1 b_2) u_0$$

és ha $v = v_0$, akkor

$$a_1 y = a_2 x + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v_0.$$

Tehát valóban mindegyik $u = \text{állandó}$ vonal a

$$b_1 y = b_2 x + C_1$$

egyenessel párhuzamos egyenes és hasonlóan a $v = \text{állandó}$ vonalak az

$$a_1 y = a_2 x + C_2$$

egyenessel párhuzamos egyenesek lesznek.

Felmerül a kérdés, hogy mi az egyértelmű inverz leképezés létezésének a feltétele? Erre könnyű választ adni, hiszen az adott függvényrendszernek megfelel a következő mátrix-egyenlet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

ahol

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

az együtthatók mátrixa. Létezik egyértelmű inverz leképezés, ha $\underline{A}$ nem-szinguláris, azaz létezik az $\underline{A}^{-1}$ inverz mátrix. Ennek pedig szükséges és elégséges feltétele az, hogy

$$\det(\underline{A}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

legyen. Ekkor

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

és az inverz leképezést meghatározó $u(x, y)$, $v(x, y)$ függvények az

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \begin{pmatrix} (b_2 x - b_1 y) \\ (-a_2 x + a_1 y) \end{pmatrix}$$

összefüggésből olvashatók ki:

$$\begin{aligned} u &= \frac{b_2x - b_1y}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ v &= \frac{-a_2x + a_1y}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{aligned}$$

Inverz leképezés nem létezik akkor, ha

$$\det(\underline{A}) = a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

azaz, ha

$$a_2 = \lambda a_1 \quad \text{és} \quad b_2 = \lambda b_1.$$

Könnyű belátni, hogy ez esetben bármely (u, v) -síkbeli pont képe az (x, y) -sík egyetlen egyenesére esik, ugyanis

$$\begin{aligned} x &= a_1u + b_1v; \\ y &= \lambda(a_1u + b_1v) = \lambda x \end{aligned}$$

és az

$$\begin{aligned} x(u, v) &= a_1u + b_1v, \\ y(u, v) &= a_2u + b_2v \end{aligned}$$

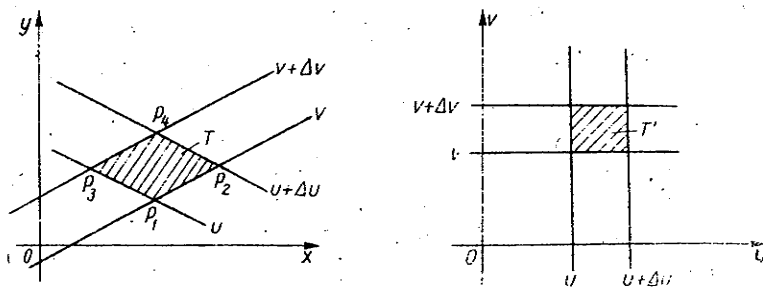
függvények nem függetlenek egymástól, mert tetszőleges (u, v) értékpár mellett fennáll az

$$y(u, v) \equiv \lambda x(u, v)$$

azonosság.

Az előbbieket szerint tehát az egyértelmű inverz leképezésnek a feltétele a $\det(\underline{A})$ determináns értékétől függ. E determinánsnak fontos geometriai jelentést adhatunk.

Tekintsük az (u, v) -sík $u = \text{állandó}$, $u + \Delta u = \text{állandó}$, $v = \text{állandó}$, $v + \Delta v = \text{állandó}$ koordinátavonalaival határolt $T' = \Delta u \cdot \Delta v$ területű derékszögű négyszöget és ennek képét az (x, y) -síkon, a T területű parallelogrammát.



12. ábra

A T parallelogramma csúcspontjainak a koordinátái:

$$\begin{aligned} P_1: \quad x_1 &= a_1 u + b_1 v, \quad y_1 = a_2 u + b_2 v; \\ P_2: \quad x_2 &= a_1(u + \Delta u) + b_1 v, \quad y_2 = a_2(u + \Delta u) + b_2 v; \\ P_3: \quad x_3 &= a_1 u + b_1(v + \Delta v), \quad y_3 = a_2 u + b_2(v + \Delta v); \\ P_4: \quad x_4 &= a_1(u + \Delta u) + b_1(v + \Delta v), \quad y_4 = a_2(u + \Delta u) + b_2(v + \Delta v). \end{aligned}$$

Az előjeles területi mértékszámot – a vektoralgebrában tanultak alapján – a következő determináns adja:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 \Delta u & b_1 \Delta v \\ a_2 \Delta u & b_2 \Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \Delta u \Delta v = \\ &= \det(A) \cdot \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

A T és T' területek között tehát a következő összefüggés áll fenn:

$$T = |\det(A)| \cdot \Delta u \Delta v = |\det(\underline{A})| \cdot T'.$$

A $\det(\underline{A})$ abszolút értéke tehát a leképezésnek megfelelő lokális területtorzulás mértékét jelenti.

Térjünk most át az általános eset tárgyalására. Legyen adva az x -et, ill. y -t helyettesítési értéként előállító

$$\begin{cases} x(u, v), \\ y(u, v) \end{cases}$$

függvényrendszer. Mindkét függvény az (u_0, v_0) -helyen és ennek egy bizonyos környezetében folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkezik. Szorítkozzunk az (u_0, v_0) -hely egy elegendően kicsiny környezetére, azért, hogy jó közelítéssel helyettesíthessük a függvényeket elsőfokú Taylor-polinommal, azaz legyen

$$\begin{aligned} x(u, v) &\approx x(u_0, v_0) + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_0 (u - u_0) + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_0 (v - v_0), \\ y(u, v) &\approx y(u_0, v_0) + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)_0 (u - u_0) + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)_0 (v - v_0). \end{aligned}$$

(Itt a parciális deriváltak 0 indexe azt jelenti, hogy ezeket a parciális deriváltakat az (u_0, v_0) -helyen kell venni.)

Ez a közelítőleg érvényes egyenletrendszer, adott (x, y) értékpár mellett u -ra, v -re nézve inhomogén lineáris egyenletrendszer. Mondhatjuk tehát, hogy az (u_0, v_0) -hely elegendően kicsiny környezetében van egyértelmű inverz transzformáció, ha az (u, v) -ismeretlenek együtthatóiból alkotott mátrix determinánsa nem zérus. Ez a determináns az x -et, y -t előállító, u -tól, v -től függő függvényrendszer ún. *függvénydeterminánsa* (Jacobi-féle determinánsa):

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tegyük fel azt, hogy $D \neq 0$, azaz létezik az adott (x, y) -hoz tartozó (u, v) -t meghatározó

$$\begin{cases} u(x, y), \\ v(x, y) \end{cases}$$

egyértelmű inverz leképezés (transzformáció). Ekkor fennállnak az

$$\begin{aligned} x &= x(u(x, y), v(x, y)), \\ y &= y(u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

azonosságok.

Deriváljuk mindkettőt először x -szerint, azután y -szerint. Nyerjük a következő egyenletrendszereket az ismeretlen u'_x, v'_x , illetve u'_y, v'_y deriváltakra nézve:

$$\begin{cases} x'_u u'_x + x'_v v'_x = 1, \\ y'_u u'_x + y'_v v'_x = 0 \end{cases}$$

illetve

$$\begin{cases} x'_u u'_y + x'_v v'_y = 0, \\ y'_u u'_y + y'_v v'_y = 1 \end{cases}$$

Írjuk ezeket mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x \\ v'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_y \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mindkét egyenletrendszer együtthatómátrixa ugyanaz; és mivel a feltevés szerint

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

azért létezik az együtthatómátrix inverze. Írhatjuk tehát:

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ v'_x \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} y'_v & -x'_v \\ -y'_u & x'_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} y'_v \\ -y'_u \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u'_y \\ v'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} y'_v & -x'_v \\ -y'_u & x'_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -x'_v \\ x'_u \end{pmatrix},$$

azaz

$$u'_x = \frac{y'_v}{D}, \quad v'_x = -\frac{y'_u}{D}, \quad u'_y = -\frac{x'_v}{D}, \quad v'_y = \frac{x'_u}{D}.$$

Ezek figyelembevételével nevezetes összefüggést lehet megállapítani az inverz és az eredeti függvényrendszer függvénydeterminánsa között:

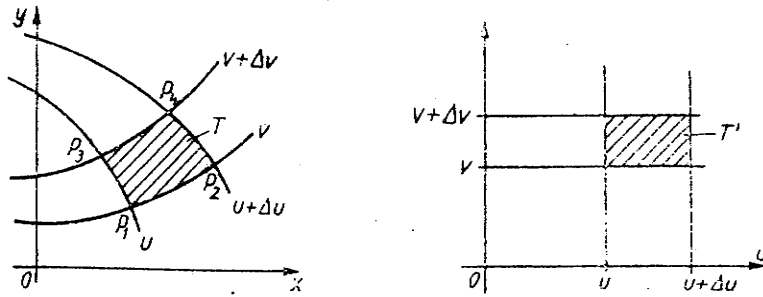
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x v'_y - u'_y v'_x =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x'_u y'_v - x'_v y'_u}{D^2} = \\
&= \frac{1}{D} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},
\end{aligned}$$

azaz

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1.$$

A függvénydetermináns abszolút értéke a lokális területtorzulás mértékét adja. Tekintsük ugyanis az (u,v) -síkon azt a T' területű derékszögű négyszöget, amelyet az $u =$ állandó, $u + \Delta u =$ állandó, $v =$ állandó, $v + \Delta v =$ állandó koordinátavonalak határolnak: $T' = \Delta u \cdot \Delta v$. (Feltesszük azt, hogy $\Delta u > 0$ és $\Delta v > 0$ elegendően kicsinyek ahhoz, hogy $x(u,v)$ és $y(u,v)$ elsőfokú Taylor-polinommal legyenek megközelíthetők.) A T' területű idom megfelelője az (x,y) -síkbán a T területű síkrész.



13. ábra

Az (x,y) -síkbeli idomot határoló vonalak metszéspontjainak koordinátái jó közelítéssel:

$$\begin{aligned}
P_1: \quad x_1 &= x(u, v), \quad y_1 = y(u, v); \\
P_2: \quad x_2 &= x(u + \Delta u, v) \approx x_1 + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \quad y_2 = y(u + \Delta u, v) \approx y_1 + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u; \\
P_3: \quad x_3 &= x(u, v + \Delta v) \approx x_1 + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \quad y_3 = y(u, v + \Delta v) \approx y_1 + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v; \\
P_4: \quad x_4 &= x(u + \Delta u, v + \Delta v) \approx x_1 + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \\
&\quad y_4 = y(u + \Delta u, v + \Delta v) \approx y_1 + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v.
\end{aligned}$$

A T területű síkrész jó közelítéssel parallelogrammának tekinthető és így egyenlő lesz a következő kifejezés abszolút értékével:

$$\begin{aligned}
&\left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} x'_u \Delta u & x'_v \Delta v \\ y'_u \Delta u & y'_v \Delta v \end{array} \right| = \\
&= \left| \begin{array}{cc} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{array} \right| \Delta u \Delta v = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Delta u \Delta v.
\end{aligned}$$

Fennáll tehát jó közelítéssel:

$$T = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| T'.$$

Vizsgáljuk meg végül azt az esetet, amikor az

$$\begin{cases} x(u, v), \\ y(u, v) \end{cases}$$

függvényrendszer olyan, hogy az (u, v) -helyen és annak egy bizonyos környezetében a függvénydetermináns azonosan zérus:

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv 0.$$

Mint tudjuk, ebben az esetben nem beszélhetünk egyértelmű inverz függvényrendszer létezéséről. A $D \equiv 0$ azonosság bekövetkezhet pl. akkor, ha az x'_u, y'_u, x'_v, y'_v parciális deriváltak mind azonosan zérusok. Ezt az esetet eleve kizárhatjuk, mert ez azt jelentené, hogy x és y is függetlenek u -tól és v -től, azaz azonosan állandók lennének.

Célszerűségből megváltoztatva az eddigi jelöléseinket, legyen

$$x = \xi(u, v),$$

$$y = \eta(u, v)$$

és tegyük fel pl. azt, hogy legalább $\frac{\partial \xi}{\partial u} \neq 0$, azaz $\xi(u, v)$ biztosan tartalmazza az u változót, tehát feltehető, hogy az $x = \xi(u, v)$ egyenletből u kifejezhető. Legyen tehát

$$u = \varphi(x, v)$$

és akkor

$$x = \xi(\varphi(x, v), v)$$

v -ben azonosság. Deriváljuk ezt v -szerint, akkor

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0,$$

ahonnan

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial v}}{\frac{\partial \xi}{\partial u}}.$$

Másrészt viszont $u = \varphi(x, v)$ -t behelyettesítve $y = \eta(u, v)$ -be, lesz

$$y = \eta(\varphi(x, v), v),$$

ahonnan v -szerinti deriválással adódik:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \eta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial v},$$

vagy ide behelyettesítve a $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ -re előbb kapott eredményt:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u}}{\frac{\partial \xi}{\partial u}},$$

ahonnan

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = D.$$

Mivel pedig $D \equiv 0$ és feltevés szerint $\frac{\partial \xi}{\partial u} \neq 0$, azért kell, hogy

$$\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

legyen, azaz az y -t előállító

$$\eta(\varphi(x, v), v)$$

függvény nem tartalmazhatja a v változót és így kell, hogy η csak x -től függjön, azaz

$$y = f(x)$$

legyen. Következésképpen az x -et ill. y -t előállító

$$\begin{cases} \xi(u, v) \\ \eta(u, v) \end{cases}$$

függvények nem lehetnek egymástól függetlenek: a kettő között funkcionális kapcsolatnak kell fennállnia.

Megfordítva is áll az, hogy ha az x és y változók között fennáll pl. az $F(x, y) = 0$ egyenlettel meghatározott funkcionális kapcsolat, akkor ebbe helyettesítve az x -et, ill. y -t előállítható $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ függvényeket és deriválva u , illetve v szerint:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Ebben a homogén lineáris egyenletrendszerben nem lehet egyszerre $\frac{\partial F}{\partial x}$ és $\frac{\partial F}{\partial y}$ zérussal egyenlő (ez esetben F nem függene sem x -től, sem y -től) és így kell, hogy az egyenletrendszer determinánsa 0 legyen, azaz

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = D \equiv 0.$$

Ha tehát a $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ függvényrendszer függvénydeterminánsa azonosan 0, akkor ez szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a két függvény között funkcionális kapcsolat álljon fenn, azaz e függvények nem lehetnek egymástól függetlenek (értékkészletükkel nem kaphatunk független változókat).

Megjegyzés

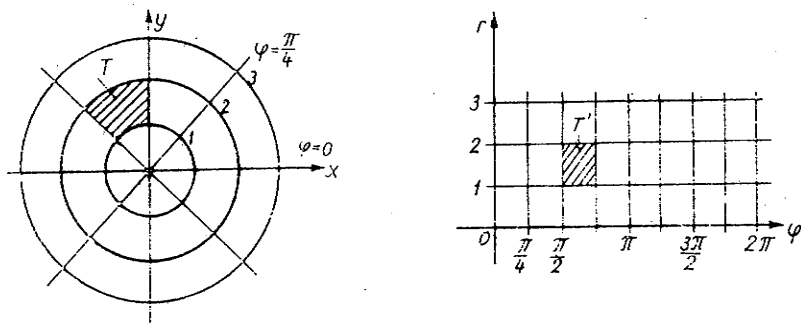
Mindaz, amit az előzőekben két kétváltozós függvényből álló függvényrendszerekről elmondottunk, értelemszerűen általánosítható pl. három háromváltozós függvényből álló függvényrendszerekre is. Bár ezt itt nem részletezzük, a megfelelő eredményeket a kétváltozós esetre való hivatkozással a későbbiekben fel fogjuk használni.

Példaként tekintsük az

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi,$$

$$y(r, \varphi) = r \sin \varphi.$$

függvényrendszert.



14. ábra

A függvényrendszer által előállított leképezés szerint az (r, φ) -sík mindazon pontjainak, amelyek a $0 \leq \varphi < 2\pi$, $r > 0$ sávba esnek, az (x, y) -síkon egy és csakis egy pont felel meg. Tehát ha csak erre az (r, φ) -síkbeli részre szorítkozunk, akkor a leképezés kölcsönös és egyértelmű. A leképezés szerint az (r, φ) -sík $r = \text{állandó}$ és $\varphi = \text{állandó}$ vonalainak az (x, y) -síkon origó középpontú koncentrikus körök és az origóból induló félsugarak felelnek meg. Ezek a vonalak az (x, y) -sík ún. polárkoordináta-vonalai.

Az inverz leképezést explicite is elő lehet állítani, pl. így:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (r > 0)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

A függvényrendszer függvénydeterminánsa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

és ez az origó kivételével mindenütt 0-tól különbözik.

Ha az (x, y) -síkon kiválasztjuk (elegendően kicsiny Δr és $\Delta \varphi$ mellett) az $r = \text{állandó}$, $r + \Delta r = \text{állandó}$, $\varphi = \text{állandó}$ és $\varphi + \Delta \varphi = \text{állandó}$ koordinátavonalakat, akkor az ezek által

határolt síkrész területe (jó közelítéssel):

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| \Delta r \Delta \varphi = r \Delta r \Delta \varphi,$$

tehát a lokális területtorzulás mértéke: r .

9.4. Többszörös függvények integrálása

9.4.1. Kétváltozós függvény paraméteres integrálja

Legyen adva az (x, y) -sík $\mathcal{T}$ tartományában, amelyet az

$$a \leq x \leq b,$$

$$c \leq y \leq d$$

egyenlőtlenségek definiálnak, az $f(x, y)$ folytonos kétváltozós függvény, amelyhez a $z = f(x, y)$ egyenletű felület tartozik.

Az $x =$ állandó sík ezt a felületet a

$$z = f(x = \text{állandó}, y)$$

egyenletű síkgörbében metszi. E "görbe alatti" területet a következő integrállal lehet kiszámítani:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Ha itt x helyébe egy másik állandót írunk, egy hasonló integrálra jutunk. Egy ilyen integrálnál ugyan x állandó, de integrálról integrálra változhat: az integrál az x paraméter függvénye. Innen ered az elnevezés: *paraméteres integrál*. Az integrálandó $f(x, y)$ függvény folytonossága miatt $F(x)$ az x -nek folytonos függvénye. Ugyanis a folytonosság következtében biztos, hogy bármilyen kicsiny pozitív ε mellett pl.

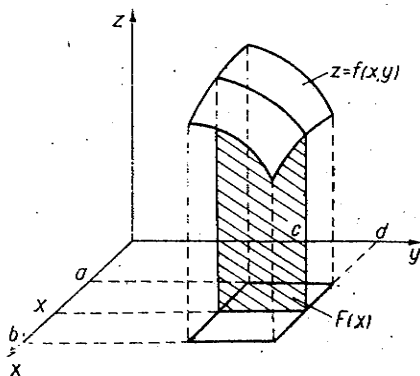
$$|f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

ha $|\Delta x|$ elegendően kicsiny. Ekkor azonban

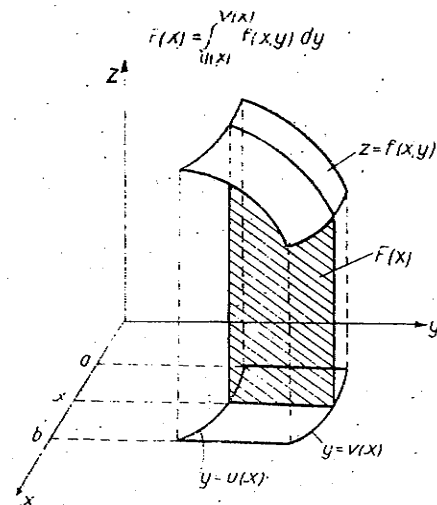
$$\begin{aligned} |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_c^d f(x + \Delta x, y) dy - \int_c^d f(x, y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_c^d |f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| dy < \varepsilon |d - c| = \varepsilon_1, \end{aligned}$$

hacsak $|\Delta x|$ elegendően kicsiny.

Be lehet azt is bizonyítani (ennek részletezésével itt nem foglalkozunk), hogy a paraméteres integrál akkor is folytonos, ha a határai nem állandók,



15. ábra



16. ábra

hanem az $x \in [a, b]$ paraméternek folytonos függvényei, vagyis ha a T tartományt pl. az $x = a$, $x = b$ egyenletű egyenesek mellett a folytonos $u(x)$, $v(x)$ függvényeknek megfelelő $y = u(x)$ és $y = v(x)$ egyenletű görbék határolják:

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy.$$

Ha a T tartományban $f(x, y)$ az x szerint még differenciálható is és az f'_x parciális derivált e tartományban folytonos, továbbá (az x -től függő határok esetén) a határok is x -nek differenciálható függvényei, akkor a paraméteres integrál a paraméter szerint differenciálható.

Állandó határok mellett

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy,$$

azaz a deriválás egyszerűen, az integrálás jele alatt elvégezhető (Leibniz); változó határok esetén pedig

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, v(x)) \cdot \frac{dv}{dx} - f(x, u(x)) \cdot \frac{du}{dx}.$$

Ezeket a szabályokat egyszerűen lehet igazolni. Legyen először

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

amikor

$$\begin{aligned}\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\int_c^d f(x + \Delta x, y) dy - \int_c^d f(x, y) dy \right) = \\ &= \int_c^d \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy \rightarrow \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy, \quad \text{ha } \Delta x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

A változó határok esetére vonatkozó szabály igazolására tekintsük a következő háromváltozós függvényt:

$$\phi(x, u, v) = \int_u^v f(x, y) dy,$$

ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$. A láncszabály alkalmazásával:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{du}{dx},$$

azaz

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, v(x)) \frac{dv}{dx} - f(x, u(x)) \frac{du}{dx},$$

amint állítottuk.

9.4.2. Tartományintegrál általános definíciója és tulajdonságai

Ismeretes az, hogy az egyváltozós, korlátos és legalább végesszámú szakaszonként folytonos $f(x)$ függvény $x \in (a, b)$ intervallumhoz tartozó (Riemann-) határozott-integráljára a következő megfontolásokkal jutottunk. Felosztottuk az $[a, b]$ intervallumot az

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n \equiv b$$

osztópontok közbeiktatásával n részre. Az i -edik részintervallum hossza

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

és ebben a részintervallumban $\inf f(x) = m_i$, $\sup f(x) = M_i$, azaz

$$m_i \leq f(x) \leq M_i, \quad \text{ha } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Mindegyik részintervallumban egy tetszőleges közbenső hely ξ_i . Fennáll az integrálközelítő összegekre a következő reláció:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = S_n.$$

$f(x)$ feltételezett legalább szakaszonkénti folytonossága miatt lehet olyan finom felosztást választani, hogy egy-egy rész-szakaszon két tetszőleges függvényérték különbsége, tehát $f(x)$ ingadozása (oszillációja) már kisebb mint

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b - a},$$

ahol ε egy előre megadott kicsiny pozitív szám. Ekkor azonban

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon,$$

vagyis

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} (S_n - s_n) = 0,$$

és így létezik a következő határérték:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta x_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Ennek a gondolatmenetnek analógiájára a Riemann-integrál fogalmát ki lehet terjeszteni mérhető, összefüggő korlátos tartományokra kiterjesztett pont-függvények Riemann-integráljára. Ezeket fogjuk *tartományintegráloknak* nevezni.

Legyen adva egy mérhető, összefüggő, korlátos T tartomány (ponthalmaz). Egydimenziós esetben pl. egy görbedarab (speciálisan egy egyenesszakasz), kétdimenziós esetben pl. egy felületdarab (speciálisan egy síkrész), háromdimenziós esetben egy térrész. Hogy a tartomány mérhető, azon azt értjük, hogy pl. egydimenziós esetben a szóbanforgó görbedarabnak van ívhossza, kétdimenziós esetben a felületdarabnak van felszíne, háromdimenziós esetben a térrésznek van térfogata. Jelölje a T tartomány mértékét T :

$$\text{mes}(T) = T$$

Jelölje a T tartomány egy tetszőleges pontját P , azaz

$$P \in T.$$

Legyen adva egy a T tartomány pontjaiban értelmezett $f(P)$ függvény, amelyről feltesszük, hogy korlátos és legalább résztartományonként folytonos. Ha a tartomány egydimenziós, akkor a P pont egyetlen változóval (pl. koordinátával, vagy ívhosszparaméterrel) adható meg, tehát $f(P)$ egyváltozós függvény. Ha a tartomány két- vagy háromdimenziós, akkor P két, vagy három koordinátával (paraméterrel) adható meg, tehát az $f(P)$ pontfüggvényt két-vagy háromváltozós függvénnyel lehet azonosítani.

Osszuk fel a T tartományt ΔT_i résztartományokra úgy, hogy

$$\bigcup_{i=1}^n \Delta T_i = T,$$

mes $(\Delta T_i) = \Delta T_i \neq 0$, mes $(T) = T$ és

$$\sum_{i=1}^n \Delta T_i = T.$$

Legyen ΔT_i egy tetszőleges pontja P_i :

$$P_i \in \Delta T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

és $\inf(f(P)) = m_i$, $\sup(f(P)) = M_i$, ha $P \in \Delta T_i$, azaz

$$m_i \leq f(P_i) \leq M_i.$$

Fennáll, hogy

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta T_i \leq \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta T_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta T_i = S_n.$$

Finomítsuk most a T tartomány részekre osztását oly módon, hogy a résztartományok száma minden határon túl növekedjék ($n \rightarrow \infty$), ezzel egyidejűleg a résztartományok közül a legnagyobb mértékszámúnak a mértékszáma is minden határon túl csökkenjen ($\max \Delta T_i \rightarrow 0$), azonban ügyeljünk arra, hogy közben valamennyi résztartomány legnagyobb átmérője is 0-hoz tartson.

$f(P)$ legalább is résztartományonkénti folytonossága miatt lehet olyan finom beosztást választani, hogy egy-egy résztartományban két tetszőleges függvényérték különbsége, tehát $f(P)$ ingadozása (oszillációja) már kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{T}$, azaz

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{T},$$

ahol ε egy előre megadott tetszőlegesen kicsiny pozitív szám. Ekkor azonban

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta T_i < \frac{\varepsilon}{T} \sum_{i=1}^n \Delta T_i = \varepsilon,$$

vagyis

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta T_i \rightarrow 0}} (S_n - s_n) = 0,$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta T_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n m_i \Delta T_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta T_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n M_i \Delta T_i$$

és így létezik az alsó- és felső integrálközelítőösszeg által közrefogott integrálközelítő összeg határértéke is, és ez definiálja $f(P)$ -nek a T tartományra kiterjesztett tartományintegrálját:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta T_i = \int_{(T)} f(P) dT.$$

A tartományintegrálnak ez az általános definíciója speciális esetként magában foglalja az egyváltozós $f(x)$ függvény $a \leq x \leq b$ intervallumra vonatkozó Riemann-integrálját (határozott integrálját). Két- és háromdimenziós tartományintegrálok két- és háromváltozós függvények megadott tartományokra kiterjesztett kettős-, illetve hármasintegráljai lesznek.

A tartományintegrálok definíciója alapján könnyen beláthatók a következő tulajdonságok:

a.) Végeszámú $f_i(P)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) függvény összegének a T tartományra kiterjesztett integrálja egyenlő az összeadandó függvények tartományintegráljainak az összegével:

$$\int_{(T)} \sum_{i=1}^n f_i(P) dT = \sum_{i=1}^n \int_{(T)} f_i(P) dT.$$

Összeget tagonként lehet integrálni.

b.) Az integrálandó függvény állandó szorzója (együtthatója) kiemelhető az integrálból elé:

$$\int_{(T)} c f(P) dT = c \int_{(T)} f(P) dT.$$

c.) Ha az T tartomány n részből áll:

$$T = \bigcup_{i=1}^n T_i$$

és

$$T = \text{mes}(T) = \sum_{i=1}^n \text{mes}(T_i) = \sum_{i=1}^n T_i,$$

akkor

$$\int_{(T)} f(P) dT = \sum_{i=1}^n \int_{(T_i)} f(P) dT.$$

d.) Ha T -ben minden P -re teljesül, hogy

$$|f(P)| \leq M, \quad P \in T,$$

akkor mivel

$$\int_{(T)} dT = T,$$

azért

$$\left| \int_{(T)} f(P) dT \right| \leq \int_{(T)} |f(P)| dT \leq M \cdot T.$$

e.) Ha $f(P)$ és $g(P)$ T -re kiterjesztett tartományintegrálja létezik és

$$|f(P) - g(P)| < \varepsilon, \quad \text{ha } P \in T,$$

akkor

$$\left| \int_{(T)} f(P) dT - \int_{(T)} g(P) dT \right| \leq \varepsilon \cdot T,$$

azaz ε -nal együtt a 0-hoz tart. Tehát a tartományintegrál az integrálandó függvénnyel együtt folytonosan változik.

f.) Ha $T = T_1 \cup T_2$ és $\text{mes}(T_2) = \varepsilon$, továbbá $|f(P)| \leq M$, ha $P \in T$, akkor

$$\left| \int_{(T)} f(P) dT - \int_{(T_\infty)} f(P) dT \right| = \left| \int_{(T_\varepsilon)} f(P) dT \right| \leq \varepsilon \cdot M,$$

ami ε -nal együtt a 0-hoz tart. Tehát a tartományintegrál az integrálási tartománnyal együtt folytonosan változik.

g.) A folytonos $f(P)$ függvény tartományintegrálja egyenlő a tartomány egy bizonyos P_k pontjában vett függvényértéknek és a tartomány mértékének a szorzatával:

$$\int_{(T)} f(P) dT = f(P_k) \cdot T, \quad \text{ahol } P_k \in T.$$

Innen

$$f(P_k) = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(P) dT$$

és ez az adott folytonos $f(P)$ függvénynek az *integrál-közéértéke* a T tartományban.

h.) Ha az $f(P)$ függvénynek egy, a P_0 pontot tartalmazó ΔT tartományra vonatkozó integrálközéértékét képezzük, és azután a

$$\text{mes}(\Delta T) = \Delta T \rightarrow 0$$

határátmenetet elvégezzük (azaz a ΔT tartományt a P_0 pontra húzzuk össze), akkor $f(P_k) \rightarrow f(P_0)$ miatt

$$f(P_0) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta T} \int_{(T)} f(P) dT.$$

Ezt a határátmenetet "tartomány szerinti deriválásnak" nevezzük. A tartományintegrál P pontban vett tartomány szerinti deriváltja az integrálandó függvénynek e pontban felvett helyettesítési értékével egyenlő:

$$\frac{d}{dT} \int_{(T)} f(P) dT = f(P).$$

i.) Az integrálszámítás közéértéktételének általánosításaként érvényes a következő tétel:

Ha $f(P)$ és $p(P)$ a T tartományban folytonos és $p(P)$ az előjelét nem váltja T -ben, akkor

$$\int_{(T)} f(P) p(P) dT = f(P_k) \int_{(T)} p(P) dT,$$

illetve

$$f(P_k) = \frac{\int_{(T)} f(P) p(P) dT}{\int_{(T)} p(P) dT},$$

ahol $f(P_k)$ az $f(P)$ függvénynek T -hez tartozó infimuma és supremuma között fekvő, a T tartomány legalább egyik P_k helyén felvett értéke, az $f(P)$ függvénynek e T tartományra vonatkozó, $p(P)$ súlyfüggvénnyel képezett integrálközéértéke (súlyozott integrálközéértéke).

9.4.3. Kétváltozós függvény kettős integrálja

Az előző pontban definiált tartományintegrál speciális eseteként tekintsük a következő esetet. Legyen adva az (x, y) -sík egy bizonyos zárt görbével határolt, mérhető síkrésze a T tartomány. Ennek bármely P pontja az (x, y) koordinátákkal adható meg. Tehát az x, y változók változási tartománya a T síkrész:

$$(x, y) \in T.$$

Legyen továbbá adva a T tartományban az

$$f(P) \equiv f(x, y)$$

folytonos kétváltozós függvény. Ez a függvény a T tartomány "felett" egy bizonyos felületdarabot határoz meg:

$$z = f(x, y)$$

e felületdarab egyenlete.

A tartományintegrál értelmezése szerint

$$\int_{(T)} f(P) dT$$

annak a hengerszerű testnek a térfogatát adja, amelyet az (x, y) -sík T tartománya, e tartomány határgörbéjére állított, z -tengellyel párhuzamos alkotójú hegerpalást és a $z = f(x, y)$ egyenletű felületnek a T tartományhoz tartozó darabja határol. (Hallgatólag feltettük azt, hogy $f(x, y) \geq 0$ a T tartományban.) Ez a geometriai jelentés, a szemléletesség folytán, nagyban hozzásegít a következők egyszerűbb megértéséhez.

A tartományintegrál definíciójához hozzátartozik a T tartomány ΔT_i területű résztartományokra osztása. Ezt a felosztást kényelmes úgy elvégezni, hogy x -irányban választunk n -darab Δx_j szélességű rész-szakaszt ($j = 1, 2, \dots, n$) és y -irányban m -darab Δy_k szélességű rész-szakaszt ($k = 1, 2, \dots, m$). Az ezeknek megfelelő osztópontokon át koordinátatengelyekkel párhuzamos koordinátavonalakat húzunk, vagyis a T tartományt koordinátavonalak derékszögű négyzöges hálózataival borítjuk be. Az x -irányban kiválasztva a j -edik részsakaszt, y -irányban pedig a k -adikat, a megfelelő résztartomány területe $\Delta x_j \cdot \Delta y_k$ lesz. Ennek a résztartománynak egy tetszőleges pontja legyen a (ξ_j, η_k) pont és ebben a pontban a függvényérték: $f(\xi_j, \eta_k)$. Képezzük az

$$f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \Delta y_k$$

szorzatokat az egész T tartományban, majd vegyük ezek összegét:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \Delta y_k.$$

(Az összegzés során természetesen azokat a tagokat, amelyeknek megfelelő $\Delta x_j \Delta y_k$ területek a T tartományon kívülre esnek, az összegzésből ki kell hagyni!)

Ez az összeg az $f(x, y)$ függvény T tartományra kiterjesztett tartományintegráljának egy integrálközelítő összege, azaz az előbb említett hengerszerű test térfogatának egy közelítő értéke. Annál jobb ez a közelítés, minél finomabb a T tartomány résztartományokra való felosztása. Kimutatható, hogy ha egyidejűleg $\max \Delta x_j \rightarrow 0$ és $\max \Delta y_k \rightarrow 0$, akkor ennek az összegnek a határértéke az adott függvény tartományintegrálját, azaz a szóban forgó hengerszerű test térfogatát szolgáltatja.

(A térfogatot illetően megjegyezzük azt, hogy persze ugyanúgy, ahogyan az egyváltozós függvény határozott integráljának a geometriai jelentésénél, a görbe alatti területnél láttuk, itt is előjeles térfogati mértékszámot kapunk és ha T -ben $f(x, y)$ értékkészlete egyaránt pozitív és negatív előjelű függvényértékekből áll, akkor a pozitív és negatív térfogati mértékszámok algebrai összege a végeredmény.)

Az előbbieket szerint tehát

$$\begin{aligned} \int_{(T)} f(P) dT &= \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \Delta y_k = \\ &= \int_{(T)} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

A kettős szummára tekintettel jelöljük a határértéket az $f(x, y)$ függvény (T) tartományra kiterjesztett (Riemann szerinti) *kettős integráljaként* kettős integráljellel.

Legyen most egyszerűség kedvéért a T tartomány egy olyan derékszögű négyszög, amelynek oldalai párhuzamosak az x , illetve y tengellyel, azaz legyen

$$T: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Az $f(x, y)$ folytonos függvény T tartományra kiterjesztett kettős integrálja, vagyis a $z = f(x, y)$ egyenletű felület "alatti" térrész térfogatának kiszámítása céljából tekintsük előbb az $x = \text{állandó}$ síkok által kimetszett görbék "alatti" területeket, amelyeket az x folytonos függvényeként az

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

paraméteres integrál határozza meg.

A test $[a, x]$ szakaszra eső darabjának a térfogata szintén az x függvénye: $V(x)$. Ha az $F(x)$ függvénynek az $[x, x + dx]$ szakaszon $F_{\min}$ a legkisebb és $F_{\max}$ a legnagyobb értéke, akkor a test e szakaszhoz tartozó darabjának a térfogata, azaz a $V(x)$ függvénynek dx -hez tartozó ΔV megváltozása eleget tesz az

$$F_{\min} dx \leq \Delta V \leq F_{\max} dx.$$

Mivel pedig $f(x, y)$ folytonossága miatt $F(x)$ folytonos, azért

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F_{\min}}{F(x)} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F_{\max}}{F(x)} = 1$$

miatt

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{F(x)dx} = 1,$$

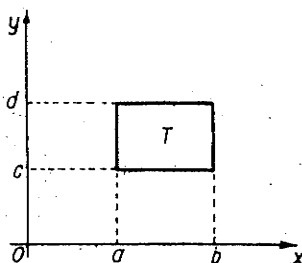
tehát a $V(x)$ térfogatfüggvény differenciálja:

$$dV = F(x)dx = \int_c^d f(x, y)dy \, dx.$$

A test térfogata tehát az $a \leq x \leq b$ intervallumban:

$$V = \int_{(T)} \int f(x, y)dx \, dy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dy \, dx.$$

Eszerint a hengersizű test térfogata, vagyis az $f(x, y)$ függvény $\mathcal{T}$ tartományra vonatkozó kettős integrálja két egymást követő egyszerű integrálásra, vagyis *kétszeres integrálásra* vezethető vissza.



17. ábra

Nem szorul bővebb magyarázatra annak a megállapítása, hogy a kettős integrál kiszámításánál követett integrálási sorrendet meg lehet cserélni. Az előbb $f(x, y)$ -nak vettük először rögzítettnek gondolt x mellett az y -szerinti integrálját c -től d -ig, majd az így nyert egyváltozós $F(x)$ függvénynek vettük az x szerinti integrálját a -tól b -ig. De lehetne fordítva is:

$$V = \int_{(T)} \int f(x, y)dx \, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx \, dy.$$

Tekintsük most az általános esetet. Határolják a $\mathcal{T}$ tartományt az

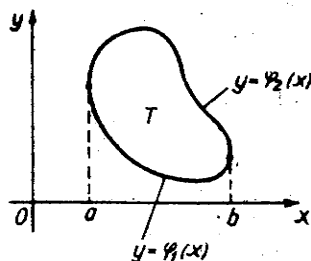
$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x)$$

egyenletű, egyrétű, folytonos görbék, miközben $x \in [a, b]$, azaz

$$\mathcal{T} : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Az előzőkhöz hasonló megfontolások szerint egy tetszőleges $[a, b]$ -be eső, rögzített x -hez tartozó síkmetszet görbe "alatti" terület, mint az x függvénye:

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$



18. ábra

Igy a hengerszerű test térfogata:

$$\begin{aligned} V &= \int_{(T)} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_a^b F(x) dx = \\ &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Ha itt az integrálás sorrendjét meg akarjuk cserélni, akkor előbb meg kell állapítanunk azt, hogy a T tartomány határa megadható az

$$x = \psi_1(y), \quad x = \psi_2(y)$$

egyenletű, egyrétű, folytonos görbékkel is, miközben $y \in [c, d]$, azaz

$$T : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d.$$

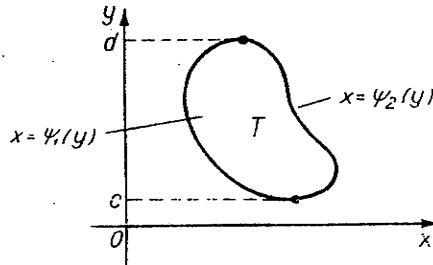
Igy egy tetszőleges $[c, d]$ -be eső, rögzített y -hoz tartozó síkmetszet görbe "alatti" terület, mint az y függvénye:

$$G(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx;$$

és a hengerszerű test térfogata:

$$V = \int_{(T)} f(x, y) dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_c^d G(y) dy = \\
&= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.
\end{aligned}$$



19. ábra

(Bonyolultabb esetekben sokszor kénytelenek vagyunk a T tartományt előbb több, végezzámú résztartományra felosztani és az ezekre kiterjesztett kétszeres integrálokat kiszámítva, ezeknek az összegét képezni.)

Az előbbieken a T tartományt az x és y koordinátatengelyekkel párhuzamos egyeneseikkel bontottuk fel résztartományokra. Ezért adódott x és y szerinti integrállokként a kétszeres integrál. De nem ez a T tartomány résztartományokra való bontásának az egyetlen lehetséges módja és nem is ez a legelőnyösebb minden esetben.

A következőkben megvizsgáljuk azt, hogy a T tartománynak más görbeseregekkel való felosztása esetén hogyan kell a kettős integrált kétszeres integrálásra visszavezetni. Amint az igazolható (és a szemlélet alapján nyilvánvaló) a kettős integrál értéke csak az $f(x, y)$ függvénytől és a T tartománytól függ, a tartomány felosztási módjától független. (Bármilyen felosztást veszünk is, ugyanannak a hengerszerű testnek a térfogatáról van szó.)

9.4.4. Kettős integrál változóinak transzformációja

Tekintsük az (x, y) -sík T tartományában folytonos $f(x, y)$ függvénynek a T tartományra kiterjesztett kettős integrálját:

$$V = \int_{(T)} \int f(x, y) dx dy.$$

Vezessük be az

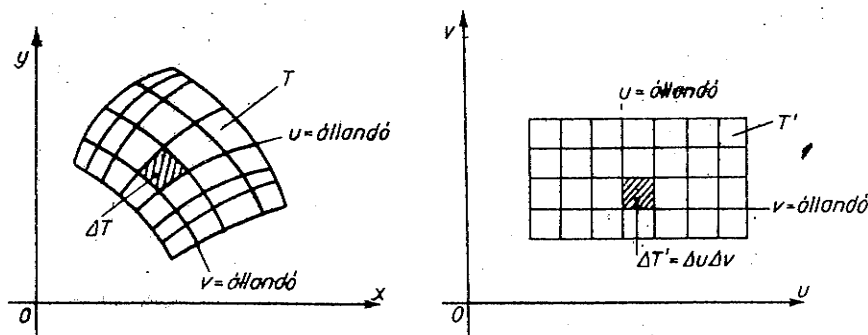
$$\left. \begin{array}{l} x(u, v) \\ y(u, v) \end{array} \right\}$$

függvényrendszer közvetítésével az u, v változókat x és y helyébe. Ezt megtehetjük akkor, ha ez a függvényrendszer kölcsönösen egyértelmű és megfordítható módon képezi le egymásra az (x, y) -sík T tartományát az (u, v) -ík T' tartományára. Mint tudjuk, ennek szükséges – és kicsinyben elégséges – feltétele az, hogy az adott függvényrendszer

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

függvénydeterminánsa (Jacobi-féle determinánsa) zérustól különböző legyen.

Az új változókra való áttérés azt jelenti, hogy az (x, y) -síkbán-lévő T tartományt $u = \text{állandó}$ és $v = \text{állandó}$ görbékkel bontjuk fel ΔT területű résztartományokra. Ennek megfelel az (u, v) -síkbeli T' tartomány koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesekkel $\Delta T' = \Delta u \Delta v$ területű négyszögekre való felbontása.



20. ábra

Mint ismeretes, jó közelítéssel fennáll, hogy

$$\Delta T \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta T' = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v.$$

Ennek megfelelően az integralközelítő összegre ezt kapjuk

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f(x(u_j, v_k), y(u_j, v_k)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{j,k} \Delta u_j \Delta v_k,$$

ahonnan az $m, n \rightarrow \infty$ úgy, hogy $\max \Delta u_j \rightarrow 0$ és $\Delta v_k \rightarrow 0$, határátmenettel kapjuk a következő kettős integrált:

$$\begin{aligned} V &= \int_{(T)} \int f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{(T')} \int f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \end{aligned}$$

9.4.5. Háromváltozós függvény hármas integrálja

A korlátos és folytonos

$$f(P) \equiv f(x, y, z)$$

háromváltozós függvénynek a mérhető, háromdimenziós $\mathcal{V}$ (més $\mathcal{V} = V$) tartományra (azaz a V köbtartalommal bíró térrészre) kiterjesztett integrálját úgy értelmezzük, hogy a tartományt koordinátasíkokkal párhuzamos ($x = \text{állandó}$, $y = \text{állandó}$, $z = \text{állandó}$) síkokkal részekre osztjuk. Egy ilyen résztartomány a $\Delta V_i = \Delta x_j \Delta y_k \Delta z_l$ köbtartalmú derékszögű paralelepipedon. Ennek egy tetszőszerinti pontja a $P_i(\xi_j, \eta_k, \zeta_l)$ pont. Képezzük a

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p f(\xi_j, \eta_k, \zeta_l) \Delta x_j \Delta y_k \Delta z_l$$

integrálközelítő összeg határértékét úgy, hogy a felosztást minden határon túl finomítjuk, azaz $m, n, p \rightarrow \infty$ miközben $\max \Delta x_j, \max \Delta y_k, \max \Delta z_l \rightarrow 0$. Ha ez a határérték létezik, akkor ez definiálja az adott függvény $\mathcal{V}$ tartományra kiterjesztett hármasintegrálját (tartományintegrálját):

$$\int_{(\mathcal{V})} f(P) dV = \iiint_{(\mathcal{V})} f(x, y, z) dx dy dz.$$

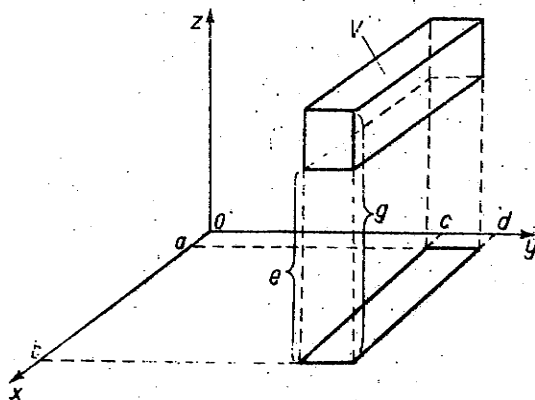
A kettős integrálhoz teljesen hasonlóan jutunk arra, hogy az $f(x, y, z)$ függvény hármas integrálja visszavezethető háromszoros integrálásra.

Legyen pl. $\mathcal{V}$ a következő derékszögű paralelepipedon:

$$\mathcal{V} : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad e \leq z \leq g.$$

Ekkor

$$\iiint_{(\mathcal{V})} f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^g \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz.$$



21. ábra

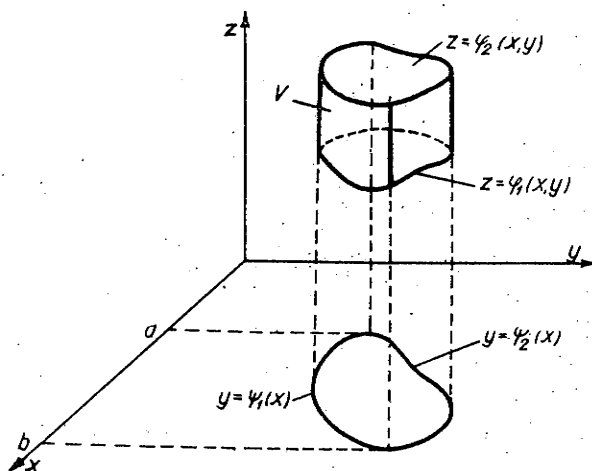
Vagy pedig tegyük fel azt, hogy a V térrészt a

$$z = \varphi_1(x, y), \quad z = \varphi_2(x, y)$$

egyenletű felületek határolják, miközben

$$\psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x),$$

$$a \leq x \leq b.$$



22. ábra

Ekkor

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Természetesen itt is (ugyanúgy, mint a kettős integrálok kiszámításánál), a határok megfelelő megváltoztatásával az integrálás sorrendjét meg lehet cserélni.

Megjegyzés

A többszörös integrál az egyes változók szerinti közös integrálok szorzataként számítható abban a speciális esetben, amikor az integrálok határai állandók és az integrálandó függvény olyan tényezők szorzata, melyek egyenként csak egyetlen változónak a függvényei.

Pl. ha

$$f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$$

és

$$T: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

akkor

$$\begin{aligned}\int_{(T)} \int f(x, y) dx dy &= \int_c^d \int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(y) dx dy = \\ &= \int_a^b \varphi(x) dx \cdot \int_c^d \psi(y) dy.\end{aligned}$$

9.4.6. Hármass integrál változóinak transzformációja

A

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$$

hármass integrálban az

$$x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$$

függvények közvetítésével vezessük be az u, v, w új változókat. Ha ez a függvényrendszer kölcsönösen megfordítható és egyértelmű módon képezi le az (x, y, z) koordinátarendszer V térrészét az (u, v, w) koordinátarendszer V' térrészére, aminek szükséges és kicsinyben elégsége feltétele az, hogy a függvényrendszer

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

függvénydetermináns (Jacobi-féle determináns) 0-tól különböző legyen, akkor

$$\begin{aligned}\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{(V')} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.\end{aligned}$$

9.4.7. Kettős és hármass integrálok néhány alkalmazása

A kettős integrál geometriai jelentésével kapcsolatban láttuk azt, hogy az (x, y) -sík T tartományára kiterjesztett

$$\int_{(T)} \int f(x, y) dx dy$$

kettős integrál annak a hengerszerű testnek az előjeles *térfogatát* adja, melyet az (x, y) -sík T síkrésze, e síkrész határgörbéjére állított, z -tengellyel párhuzamos alkotójú hengerpalást és a $z = f(x, y)$ egyenletű felület határol.

Ha speciálisan $f(x, y) \equiv 1$, akkor

$$\int_{(T)} \int dx dy = \text{mes}(T) = T,$$

ez pedig a T síkrész területe.

Ennek analógiájára az $f(x, y, z) \equiv 1$ függvénynek a tér valamely zárt V tartományára kiterjesztett hármas integrálja

$$\iiint_{(V)} dx \, dy \, dz = \text{mes}(V) = V,$$

ez pedig a V térrész térfogata.

Lássunk most néhány *mechanikai alkalmazást*. Legyen $\rho(P)$ a mérhető T tartományt betöltő tömegeloszlás sűrűsége, mint a hely függvénye. Osszuk fel a T tartományt elegendően kicsiny részekre. Az i -edik résztartomány mértéke legyen ΔT_i . E résztartomány egy belső pontja P_i . Jó közelítéssel ennek a résztartománynak a tömege

$$\rho(P_i) \cdot \Delta T_i.$$

Az egész *tömeg* ezek összegének a határértéke, midőn a résztartományok száma minden határon túl növekszik és mindegyiknek még a legnagyobb átmérője is minden határon túl csökken, azaz

$$\int_{(T)} \rho(P) dT.$$

Ha a tömegeloszlás *tömegközéppontjának* (*súlypontjának*) egy rögzített ponttól (vagy egyenestől, vagy síktól) való r_s távolságát akarjuk meghatározni, akkor – feltéve, hogy $r(P_i)$ jelöli az i -edik résztartományban kiszemelt P_i pontnak ugyanonnan mért távolságát – mivel

$$r(P_i) \rho(P_i) \Delta T_i$$

jelenti jó közelítéssel, az i -edik részben foglalt tömeg elsőrendű nyomatékát és ezek összegének határértéke, azaz

$$\int_{(T)} r(P) \rho(P) dT$$

adja az egész *tömeg elsőrendű nyomatékát*, kapjuk, hogy

$$r_s = \frac{\int_{(T)} r(P) \rho(P) dT}{\int_{(T)} \rho(P) dT}.$$

Igy pl. az elsőrendű nyomatékot az (y, z) -síkra számolva, a *tömegközéppont* x_s koordinátájára kapjuk, hogy

$$x_s = \frac{\int_{(T)} x \rho(P) dT}{\int_{(T)} \rho(P) dT}.$$

Ha viszont a T tartomány elegendő kicsiny résztartományokra való felosztásakor a $\rho(P_i) \Delta T_i$ tömeget az $r(P_i)$ távolság négyzetével szorozzuk, azaz az

$$r^2(P_i) \rho(P_i) \Delta T_i$$

szorzatok összegének vesszük a határértékét, akkor a

$$\int_{(T)} r^2(P) \rho(P) dT$$

tartományintegrál a T -ben foglalt tömeg *tehetetlenségi (másodrendű) nyomatékát* fogja megadni.

Például síkbeli, $\rho(P) \equiv \rho(x, y)$ sűrűségű tömegeloszlás esetén, ha az (x, y) koordinátarendszert a tömegeloszlás síkjában választjuk, akkor az egyes koordinátatengelyekre vonatkozó *azidús másodrendű nyomatékok*:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{(T)} \int y^2 \cdot \rho(x, y) dx dy, \\ I_y &= \int_{(T)} \int x^2 \cdot \rho(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Az origóra vonatkozó ún. *poláris másodrendű nyomaték* viszont:

$$I_p = \int_{(T)} \int (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y) dx dy = I_x + I_y.$$

Szokás még definiálni az (x, y) -tengelyekre vonatkozó ún. *centrifugális másodrendű nyomatékokat*, a következőképpen:

$$I_c = \int_{(T)} \int xy \cdot \rho(x, y) dx dy.$$

Térbeli, $\rho(P) \equiv \rho(x, y, z)$ sűrűségű tömegeloszlás esetén az egyes koordinátatengelyekre vonatkozó *azidús másodrendű nyomatékok*:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int \int \int_{(V)} (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ I_{yy} &= \int \int \int_{(V)} (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ I_{zz} &= \int \int \int_{(V)} (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Az ún. *deviációs nyomatékok*:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int \int \int_{(T)} xy \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ I_{yz} &= \int \int \int_{(T)} yz \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ I_{xz} &= \int \int \int_{(T)} xz \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Az origóra vonatkozó *poláris tehetetlenségi nyomaték*:

$$I_p = \int \int \int_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}).$$

Anélkül, hogy itt részletekbe bocsátkoznánk, megjegyezzük, hogy az

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2(I_{xy}xy + I_{yz}yz + I_{xz}xz) = 1$$

egyenletű másodrendű felület az ún. *tehetetlenségi ellipszoid*. (Az egyes együtthatók az előbbiekben definiált axiális és deviációs másodrendű nyomatékok.) Ennek az ellipszoidnak a főtengelyei az ún. *fő tehetetlenségi irányokkal* megegyeznek, a középpontja pedig a koordináta-rendszer kezdőpontja. Ha a koordináta-rendszert a kezdőpont körül úgy forgatjuk el, hogy a koordináta-tengelyek az ellipszoid főtengelyével egybeessenek, akkor ebben a koordináta-rendszerben az ellipszoid egyenlete nem fog tartalmazni vegyes másodfokú tagokat, vagyis ezekre a tengelyekre vonatkozólag a deviációs nyomatékok zérusok. A fő tehetetlenségi irányokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok, az ún. *főtehetetlenségi nyomatékok* szélső értékek. Ha a koordináta-rendszer kezdőpontján át húzunk egy g egyenest és megkeressük ennek az egyenesnek a tehetetlenségi ellipszoiddal való egyik M metszéspontját, akkor az $\overline{OM}$ távolság megadja a g -re mint tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték reciprokának a négyzetgyökét.

Befejezésül még egy mechanikai alkalmazásra mutatunk rá. A P_i pontban lévő m_i tömegpont (*Newton-féle*) *potenciáljának* értéke, a tőle r_i távolságra lévő R pontban:

$$\phi_i = \frac{m_i}{r_i};$$

az $m_1, m_2, \dots, m_n$ tömeg pontrendszeré:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}.$$

Ennek alapján, a T tartományt $\rho(P)$ sűrűséggel betöltő tömegeloszlás (*Newton-féle*) potenciáljára az R pontban:

$$\phi = \int_{(T)} \frac{\rho(P)}{r(P)} dT.$$

Itt $r(P)$ jelenti a $\overline{PR}$ távolságot.

Ha pl. $R(\xi, \eta, \zeta)$ és a tartomány a $\mathcal{V}$ térrész, akkor

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho(x, y, z)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dx dy dz.$$

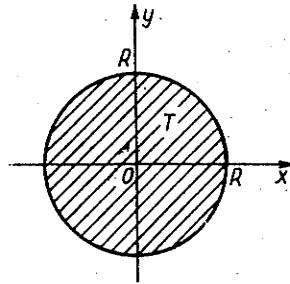
Példák

1. Határozzuk meg a

$$\iint_{(T)} f(x, y) dx dy$$

kettős integrálban az integrálás határait, ha

$$T: x^2 + y^2 \leq R^2.$$



23. ábra

Ha az integrálást először x szerint és azután y szerint végezzük, akkor

$$-\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2},$$

$$-R \leq y \leq R$$

és így lesz:

$$\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} f(x, y) dx dy.$$

Ha viszont először y szerint és azután x szerint integrálunk, akkor

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$-R \leq x \leq R$$

és így lesz:

$$\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y) dy dx.$$

2. A $\iint_{(T)} f(x, y) dx dy$ integrálban a T tartomány az (x, y) sík első negyedében lévő síkrész, amelyet az $x = 0$, $y = 2 - x$, $y = x^2$ egyenletű görbék határolnak. Mik lesznek az integrálás határai?

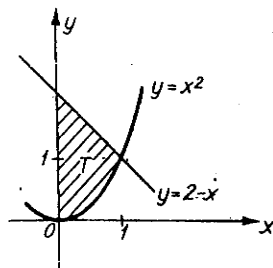
Ha először y szerint integrálunk és azután x szerint, akkor

$$x^2 \leq y \leq 2 - x,$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

Igy tehát

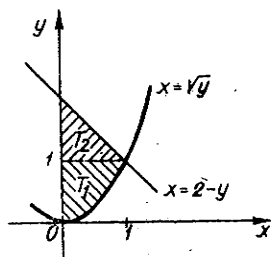
$$\int_{(T)} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy dx.$$



24. ábra

Ha az integrálás sorrendjét megcseréljük, akkor az alaptartományt két részre kell bontanunk:

$$\begin{aligned} T_1\text{-ben: } & 0 \leq x \leq \sqrt{y}, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ T_2\text{-ben: } & 0 \leq x \leq 2 - y, \quad 1 \leq y \leq 2. \end{aligned}$$



25. ábra

Ennek megfelelően az adott integrál két integrál összegével lesz egyenlő:

$$\begin{aligned} \int_{(T)} f(x, y) dx dy &= \int_{(T_1)} f(x, y) dx dy + \int_{(T_2)} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

3. Az x, y derékszögű koordináták helyett vezessük be új változónak az r, φ

polárkoordinátákat a

$$\int_{(T)} f(x, y) dx dy$$

kettős integrálban, ahol a T tartomány az

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

egyenletű körrel bezárt síkrész.

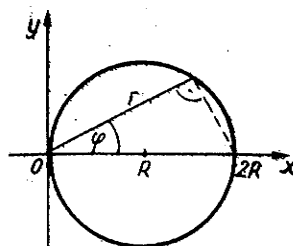
Kiszámítjuk először az

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

összefüggésekkel meghatározott függvényrendszer Jacobi-féle determinánsát:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r. \end{aligned}$$



26. ábra

Egyszerű geometriai összefüggés alapján a tartomány határgörbéjének polárkoordinátás egyenlete:

$$r = 2R \cos \varphi,$$

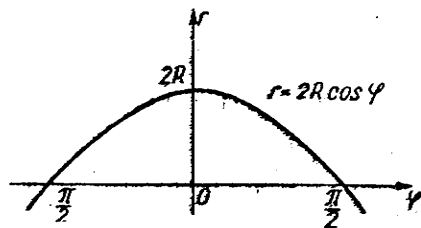
ahol

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ennek megfelelően a felvett függvényrendszer a T tartományt T' -re képezi le, ahol

$$0 \leq r \leq 2R \cos \varphi,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$



27. ábra

T' -ben mindenütt

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = r,$$

azaz

$$dx \, dy = r \, dr \, d\varphi$$

és így

$$\begin{aligned} \int_{(T)} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{(T')} \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2R \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi. \end{aligned}$$

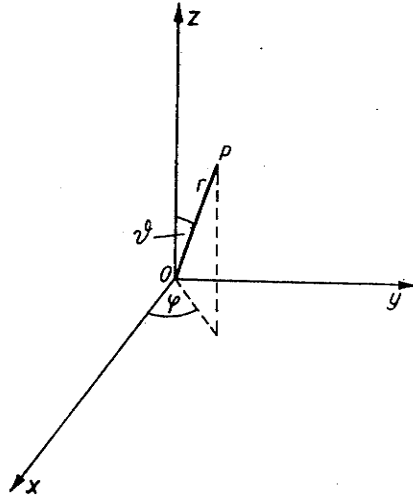
4. A

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

hármass integrál V tartománya legyen az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

egyenletű gömbfelület által bezárt térrész. Alakítsuk át az integrált, új változókként gömbkoordinátákat vezetve be.



28. ábra

A $P(x, y, z)$ pont gömbkoordinátáival:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \varphi \sin \vartheta, & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} &= r \cos \varphi \cos \vartheta, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi \sin \vartheta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \varphi \sin \vartheta, & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} &= r \sin \varphi \cos \vartheta, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \cos \varphi \sin \vartheta, \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \vartheta, & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} &= -r \sin \vartheta, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned}$$

azért

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= r^2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

A $\mathcal{V}$ tartománynak megfelelő $\mathcal{V}'$ tartományban az új változók változási intervallumai a következők:

$$0 \leq r \leq R,$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

és mivel ebben

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} \right| = r^2 \sin \vartheta,$$

azért

$$dx \, dy \, dz = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

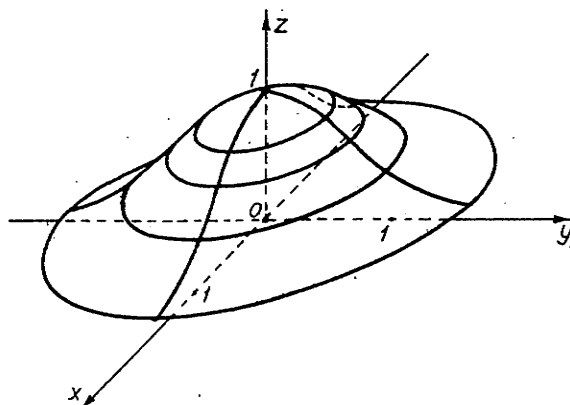
Igy végül

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{(V')} f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi. \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az

$$\int_{(T)} \int e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

kettős integrált az $x^2 + y^2 \leq R^2$ tartományban.



29. ábra

Ezt az integrált x és y szerinti kétszeres integrálással elemi úton nem tudjuk kiszámítani. Ezért polárkoordinátákat vezetünk be:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Ekkor

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{és} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r.$$

A transzformáció után az integrálási határokat a következő egyenlőtlenségek adják:

$$0 \leq r \leq R,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Igy

$$\begin{aligned} I &= \int_{(T)} \int e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (-2r) e^{-r^2} dr d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [e^{-r^2}]_0^R d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-R^2} - 1) d\varphi = \pi(1 - e^{-R^2}) . \end{aligned}$$

Ezt a végeredményt használjuk fel a következő improprius integrál kiszámítására:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx .$$

Ugyanis

$$\int_{(D)} \int e^{-x^2-y^2} dx dy$$

az egész síkra kiterjesztve megfelel I határértékének, ha $R \rightarrow \infty$, tehát

$$\int_{(D)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi .$$

Másrészt

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \cdot \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2$$

Ha most $a \rightarrow \infty$ (ez felel meg az integrál egész síkra való kiterjesztésének), akkor

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi .$$

Igy végül

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(Ez az ún. *Gauss-féle hibaintegrál*.)

6. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, melyet az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ egyenletű gömbből az $x^2 - Rx + y^2 = 0$ egyenletű hengerfelület kivág. (Ez az ún. Viviani-féle test.)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R \cos \varphi} (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} (-2r) dr d\varphi = \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{R \cos \varphi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \\
&= \frac{R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right),
\end{aligned}$$

vagyis a Viviani-féle test térfogata:

$$K = \frac{2R^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$$

Vegyük még azt észre, hogy ha a Viviani-féle testet tartalmazó, (y, z) -sík "előtti" félgömbtestből magát a Viviani-féle testet elhagyjuk, akkor a maradék test térfogata:

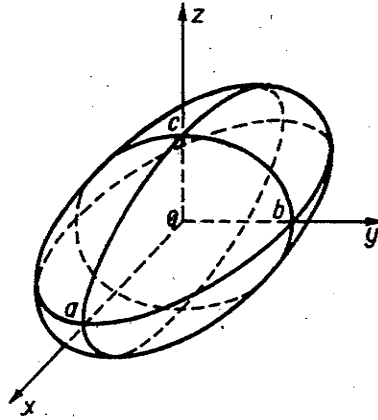
$$\frac{2R^3\pi}{3} - \frac{2R^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right) = \frac{8R^3}{9}.$$

Ez pedig a teljes gömb köré írt, $2R$ élhosszúságú kocka térfogatának a kilencedrésze!

7. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amelyet az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű ellipszoid határol.



31. ábra

Az ellipszoid egyenletéből:

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

A test nyolcadának a térfogata:

$$\frac{K}{8} = \int_{(T)} \int c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

ahol T :

$$0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$0 \leq x \leq a.$$

Érdemes új változókat bevezetni az

$$x = au \cos v,$$

$$y = bu \sin v$$

összefüggésekkel.

Mivel

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -au \sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = b \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = bu \cos v,$$

azért

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a \cos v & -au \sin v \\ b \sin v & bu \cos v \end{vmatrix} = abu.$$

Ezekkel

$$\frac{K}{8} = c \int_{(T)} \int \sqrt{1 - u^2} a bu du dv,$$

ahol most $T' : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

Lesz tehát

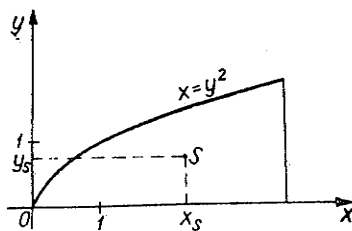
$$\frac{K}{8} = -\frac{abc}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (-2u)(1 - u^2)^{\frac{1}{2}} du dv = \frac{abc}{3} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Végeredményben:

$$K = \frac{4abc\pi}{3}.$$

(Ha $a = b = c = R$, akkor ellipszoid helyett R sugarú gömbről van szó és ekkor $K = \frac{4R^3\pi}{3}$.)

8. Határozzuk meg az $x = y^2$, $y = 0$, $x = 4$ egyenletű vonalakkal határolt (első síknegyedben fekvő) homogén síklemez súlypontjának a koordinátáit.



32. ábra

A lemez területe:

$$T = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy \, dx = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} [x^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{16}{3}.$$

A lemez statikai nyomatéka az x -tengelyre:

$$M_x = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \, dx = \frac{1}{4} [x^2]_0^4 = 4.$$

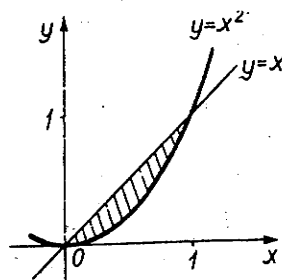
A lemez statikai nyomatéka az y -tengelyre:

$$M_y = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} x \, dy \, dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{5} [x^{\frac{5}{2}}]_0^4 = \frac{64}{5}.$$

Igy a súlypont koordinátái:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{M_y}{T} = \frac{12}{5}, \\ y_s &= \frac{M_x}{T} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

9.) Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű parabola és az $y = x$ egyenletű egyenes által bezárt homogén (egységnyi sűrűségű) síkmező poláris másodrendű nyomatékát az origóra.



33. ábra

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{(T)} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) \, dx = \\ &= \left[\frac{4}{3} \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3} \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

10. Számítsuk ki a ρ sűrűségű, R_1 belső sugárral és $R_2 (> R_1)$ külső sugárral bíró homogén gömbhéj Newton-féle potenciálját egy a középpontjától c távolságra fekvő pontban, amely nem tartozik a gömbhéjhoz.

Válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy az origó a határoló gömbök közös középpontja és az adott pont a z tengely $(0, 0, c)$ pontja legyen. Ekkor a keresett ϕ potenciál:

$$\phi = \rho \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}},$$

ahol $\mathcal{V}$ az R_1 és R_2 sugarú gömbfelületek közötti térrész.

Vezessük be (a változatosság kedvéért a 4. példától eltérő módon) az

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta,$$

$$y = r \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$z = r \sin \varphi$$

összefüggésekkel az r , φ és ϑ új változókat. Ekkor

$$\phi = \rho \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{r^2 \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + (r \sin \varphi - c)^2}} dr d\vartheta d\varphi,$$

ahol a $\mathcal{V}'$ tartomány határait a következő egyenlőtlenségek adják:

$$R_1 \leq r \leq R_2,$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Vagyis háromszoros integrál alakjában:

$$\phi = \rho \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - 2cr \sin \varphi + c^2}} d\varphi dr d\vartheta.$$

Itt a belső integrál:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - 2cr \sin \varphi + c^2}} d\varphi &= \left[-\frac{r}{c} \sqrt{r^2 - 2cr \sin \varphi + c^2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{r}{c} (\sqrt{(r+c)^2} - \sqrt{(r-c)^2}), \end{aligned}$$

tehát

$$\phi = \frac{2\pi\rho}{c} \int_{R_1}^{R_2} r (\sqrt{(r+c)^2} - \sqrt{(r-c)^2}) dr.$$

Mármint két esetet kell megkülönböztetni:

a.) $c < R_1$, azaz az adott pont a belső gömbön belül van. Ekkor az integrálban $c < r$, tehát

$$\int_{R_1}^{R_2} r (\sqrt{(r+c)^2} - \sqrt{(r-c)^2}) dr = \int_{R_1}^{R_2} r [(r+c) - (r-c)] dr =$$

$$= 2c \int_{R_1}^{R_2} r dr = c(R_2^2 - R_1^2),$$

vagyis a potenciál ebben az esetben c -től független:

$$\phi = 2\pi\rho(R_2^2 - R_1^2) = \text{állandó}.$$

b.) $c > R_2$, azaz az adott pont a külső gömbön kívül van. Ekkor az integrálban $c > r$, tehát

$$\int_{R_1}^{R_2} r(\sqrt{(r+c)^2} - \sqrt{(r-c)^2})dr = \int_{R_1}^{R_2} r[(r+c) - (c-r)]dr = 2 \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr = \frac{2}{3}(R_2^3 - R_1^3),$$

vagyis a potenciál ebben az esetben:

$$\phi = \frac{4\pi\rho}{3c}(R_2^3 - R_1^3).$$

Míthogy egy R sugarú gömb térfogata $\frac{4R^3\pi}{3}$, azért a szóban forgó gömbhéj tömege:

$$M = \frac{4\pi\rho}{3}(R_2^3 - R_1^3),$$

tehát ebben az esetben a keresett potenciál $\phi = \frac{M}{c}$, vagyis ugyanaz, mintha a gömbhéj egész tömege a középpontban (egyetlen pontban) volna egyesítve.

10. Vektoranalízis

10.1. Vektor-skalár függvények

10.1.1. Bevezető alapfogalmak

A *vektoranalízis* olyan függvények analízise, melyeknél a változók között vektorok szerepelnek. Mint tudjuk, a függvény általában egy olyan hozzárendelési utasítás, amely egy X halmaz egy-egy x eleméhez ($x \in X$) hozzárendeli egy Y halmaz pontosan egy-egy y elemét ($y \in Y$), az f függvény az X halmazt az Y halmazba képezi le:

$$f : X \rightarrow Y .$$

$y = f(x)$ az x helyen vett függvényérték, vagyis y az x -nek az f függvénnyel létrehozott képe. x a függvény ún. független változója, y a függő változó (a függvényérték). Az X halmaz a függvény értelmezési tartománya, az Y halmaz a függvény értékhalmaza (értékkészlete). Mármost a vektoranalízis körébe olyan függvények tartoznak, amelyeknél pl. az X halmaz elemei skalárok és Y elemei vektorok, vagy fordítva; vagy lehet, hogy X elemei is és Y elemei is vektorok. A különböző függvénytípusok elnevezésénél azt a megállapodást követjük, hogy a függvények neveinél két-két jelzőt használunk, az elsőt a függvényérték típusa, a másodikat pedig a független változó értékek típusa megjelölésére. Így pl. a *vektor-skalár függvényeknél* vektor a függvényérték és skalár a független változó; a *skalár-vektor függvény* függvényértékei skalárok és vektor a független változó; a *vektor-vektor függvény* pedig olyan függvény, melynél a függvényérték is, meg a független változó is vektor.

Valamennyi vektoranalízisbeli problémát le lehet írni közös négyes skaláris függvényekkel, ill. függvényrendszerekkel is. A vektoros írásmódnak azonban kettős célja van: 1. a vektoros írásmód egyszerűbb és tömörebb; 2. az alkalmazásokban – ezeket tartjuk elsősorban a szemünk előtt – a vektorok mindig valamilyen konkrét fizikai vagy geometriai jelentésűek és ezek mindig valamilyen koordináta-rendszerből (bázisrendszerből) független (invariáns) jelleget hordoznak; a vektoranalízis egyik fő célja éppen az, hogy ezeket az invariáns tulajdonságokat kiemelje.

A lineáris algebrában pl. vektornak tekinthetünk minden rendezett számhármast (vagy általában szám- n -est). Azonban nem minden szám-hármas jelenthet egy konkrét geometriai, ill. fizikai vektort (elmozdulást, sebességet, erőt stb.). A konkrét geometriai, ill. fizikai jelentésű vektorok mindig olyan irányított egyenesdarabokat jelentenek, amelyek bármely koordináta-rendszerben (bázisrendszerben) ugyanazt kell, hogy jelentsék.

Legyen pl. a $\mathbf{v}$ vektor egy térben mozgó pont sebességvektora. Ha most megválasztunk és lerögzítünk egy térbeli Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert, amelynek tengelyeit az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázis egységvektorok adják meg, akkor ebben a bázisrendszerben

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 ,$$

tehát a v_1, v_2, v_3 számok rendezett hármasa meghatározza v -t ebben a bázisrendszerben és a v vektort ekkor a

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

oszlopvektor fogja reprezentálni. Ha most egy másik pl e'_1, e'_2, e'_3 bázisrendszert választunk, akkor ugyanaz a v sebességvektor

$$v = v'_1 e'_1 + v'_2 e'_2 + v'_3 e'_3$$

alakban adható meg és ekkor a v -nek ebben a bázisrendszerben a

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}$$

oszlopvektor fog megfelelni. E két oszlopvektor nem egyenlő egymással, bár ugyanazt a v vektort reprezentálják. Éppen ezért a v_i és v'_i ($i = 1, 2, 3$) számok között meghatározott összefüggéseknek kell fennállniuk. Ezekről az ún. transzformációs összefüggésekről részletesen fogunk beszélni majd a vektor-vektor függvények tárgyalásakor. Erre a problémára itt most csak azért térünk ki, hogy a vektoranalízis tanulmányozásakor már mindjárt az elején felhívjuk a figyelmet arra, hogy a vektorok mátrix-reprezentációjakor nem szabad kritikátlanul használni a lineáris algebrában tanultakat, mert ez az alkalmazásokban értelmetlen zavarokat kelthet.

A következőkben most röviden összefoglaljuk és kiegészítjük azokat a geometriában tanult ismereteinket, amelyek a térgörbékre, ill a felületekre vonatkoznak.

10.1.2. Egyváltozós (egyparaméteres) vektor-skalár függvények, térgörbék

Legyen az r vektor a skaláris t változó (paraméter) megadott függvénye:

$$r(t), \quad t \in [\alpha, \beta];$$

ez egy ún. egyváltozós (egyparaméteres) vektor-skalár függvény. Ez a függvény a t skaláris független változó minden szóba jöhető értékéhez ($\alpha \leq t \leq \beta$) egy-egy meghatározott r vektoriális függvényértéket rendel hozzá. (Megjegyezzük azt, hogy itt és a továbbiakban is megengedjük azt a – főleg az alkalmazásokban – szokásos jelölésbeli pontatlanságot, hogy magát a hozzárendelési utasítást, vagyis a függvényt, és annak a helyettesítési értékeit is ugyanazzal a betűjellel jelöljük.) A függvény értelmezési tartománya rendszerint a t változónak az az intervalluma ($\alpha \leq t \leq \beta$), mely tartalmazza mindazon t értékeket, amelyekhez $r(t)$ függvényértékek tartoznak. Az értelmezési tartomány valamennyi t értékéhez tartozó különböző $r(t)$ vektorok összessége alkotja a függvény értékkészletét.

Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben, melynek bázisvektorai a páronként egymásra merőleges és az indexek sorrendjében jobbsodrású rendszert alkotó e_1, e_2, e_3 egységvektorok:

$$r(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3.$$

Tehát az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvény az $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) egyváltozós (skalár-skalár) függvényekből álló függvényrendszer tömörebb kifejezése.

Az $\mathbf{r}(t)$ függvénynek

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$$

határértéke létezik és ez az $\mathbf{r}_0$ vektor, ha a tetszőleges kicsiny pozitív ε -hoz található olyan pozitív δ , hogy

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |t - t_0| < \delta.$$

Az $\mathbf{r}(t)$ függvény a t_0 helyen *folytonos*, ha

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvényt a különböző t értékekhez tartozó $\mathbf{r}(t)$ helyvektorok végpontjainak összességével *szemléltetjük*. Ha a függvény folytonos, akkor általában a függvényt szemléltető pontok összessége egy folytonos *térgörbén* (speciális esetben *síkgörbén*) helyezkedik el. Ez a térgörbe a függvény képe; ennek egyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

E szemléltetéssel összefüggően kézenfekvő az az értelmezés, hogy az $\mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ vektor-skalár függvény a t értékeivel számozott számegyenes (t -tengely) $\alpha \leq t \leq \beta$ szakaszt leképezni az $\mathbf{r}(t)$ függvénnyel meghatározott térgörbének az $\mathbf{r}(\alpha)$, $\mathbf{r}(\beta)$ helyvektorú pontok közötti ívére. Ha e térgörbedarab egyes pontjaihoz hozzáírva képzeljük azokat a t értékeket, amelyek a megfelelő pontokat meghatározzák, egy *görbe vonalú skálát*, *számozott pontsort* kapunk.

A mechanikai (fizikai) alkalmazások többségében t időt jelöl és akkor az $\mathbf{r}(t)$ függvény egy *pontmozgást* ír le. Az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

egyenlet a *pontmozgás pályagörbéjének* az egyenlete. Ha az idő múlásának, vagyis t növekedésének megfelelően végigkövetjük a pályagörbén a pont mozgását, akkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletű térgörbét – a befutási értelemnek megfelelően – *irányított térgörbének* tekinthetjük.

Az $\mathbf{r}(t)$ függvény a t_0 helyen *differentiálható*, ha a tetszőleges $\Delta t = t - t_0$ megváltozáshoz tartozik egy olyan Δt -től független és csak t_0 -tól függő $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ vektor, amellyel $\mathbf{r}(t)$ megváltozása ($\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$) így fejezhető ki:

$$\Delta \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \Delta t + \mathbf{h}(t_0, \Delta t) \Delta t,$$

ahol a t_0 -tól és Δt -től függő $\mathbf{h}(t_0, \Delta t)$ vektorra teljesül, hogy

$$|\mathbf{h}(t_0, \Delta t)| \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Az ezzel az összefüggéssel definiált $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ vektor az $\mathbf{r}(t)$ függvény t_0 helyhez tartozó *deriváltja*.

Koordinátákban:

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{x}_1(t_0)\mathbf{e}_1 + \dot{x}_2(t_0)\mathbf{e}_2 + \dot{x}_3(t_0)\mathbf{e}_3.$$

A differenciálható vektor-skalár függvény $\Delta \mathbf{r}$ megváltozásának a főrészt a függvény differenciáljának nevezzük:

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t)dt \approx \Delta \mathbf{r};$$

e szerint a függvényérték megváltozása "kicsinyben jó közelítéssel" a független változó $\Delta t \equiv dt$ megváltozásának homogén lineáris függvénye.

A deriváltat szokták differenciáhányadosként is jelölni:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Ha a deriváltvektor zérustól különböző, azaz $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$, akkor ez a vektor az $\mathbf{r}(t)$ függvény által meghatározott térgörbe t_0 paraméterű pontjához tartozó érintő vektorát adja meg.

A derivált értelmezése alapján könnyen igazolhatók a következő deriválási szabályok. Legyenek $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)$ és $u(t)$ deriválható függvények, c_1 és c_2 pedig skaláris állandók; akkor

$$\frac{d}{dt}(c_1 \mathbf{r}_1 + c_2 \mathbf{r}_2) = c_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + c_2 \dot{\mathbf{r}}_2,$$

$$\frac{d}{dt}(u \cdot \mathbf{r}) = \dot{u} \mathbf{r} + u \dot{\mathbf{r}},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2,$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (\text{itt a tényezők sorrendje nem cserélhető fel}),$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) = \dot{\mathbf{r}}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{r}}_2 \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dot{\mathbf{r}}_3 \quad (\text{a tényezők sorrendjét}$$

az egyes tagokban legfeljebb ciklikusan szabad felcserélni) .

10.1.3. Térgörbék ívhossza

Valamely térgörbedarab ívhosszát – a síkgörbékhez hasonlóan – úgy számítjuk ki, hogy a görbedarabon elegendően sűrűn veszünk fel osztópontokat, azokat a befutás sorrendjében egyenes darabokkal (húrokkal) kötjük össze és az így nyert törtvonal hosszúságát tekintjük a görbedarab hosszúsága közelítő értékének, majd ennek vesszük a határértékét úgy, hogy a felosztást minden határon túl finomítjuk.

Ha a görbedarab befutásakor a t paraméter α -tól β -ig növekszik és a felvett osztópontok rendre az

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta$$

paraméterértékeknek felelnek meg, akkor a keletkezett törtvonal hosszúságát a

$$\sum_{k=1}^n |\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})|$$

összeg adja. Ha a beosztás minden határon túl való finomításakor (azaz ha $\max(t_k - t_{k-1})$ is 0-hoz tart) ez a törtvonalhossz meghatározott véges határértékhez konvergál, akkor a szóbanforgó görbedarabot *rektifikálhatónak* (kiegyenesíthetőnek), azaz mérhető hosszúságúnak mondjuk. Ha most feltesszük azt, hogy az $\mathbf{r}(t)$ függvény $\dot{\mathbf{r}}(t)$ deriváltja az $[\alpha, \beta]$ intervallumban folytonos, akkor az $\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})$ különbség vektorokat egyenként az $\dot{\mathbf{r}}(t_k)(t_k - t_{k-1})$ vektorokkal lehet helyettesíteni és így a törtvonal hosszúsága jó közelítéssel a következő összeggel lesz egyenlő:

$$\sum_{k=1}^n |\dot{\mathbf{r}}(t_k)|(t_k - t_{k-1}).$$

Ez pedig a beosztás minden határon túl való finomításakor az

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

integrálhoz tart és be lehet bizonyítani azt, hogy maga a törtvonal hosszúsága is ehhez a határértékhez tart. Tehát $\dot{\mathbf{r}}(t)$ folytonossága esetén az adott térgörbedarab rektifikálható és hosszúsága:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)} dt,$$

hasonlóan a síkgörbékre vonatkozó ismert képlethez.

Ha most az integrál alsó határát $t_0 =$ állandónak és a felső határát változó t -nek választjuk, akkor az

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

deriválható függvényt kapjuk. Az ívhosszúságnak, mint a t paraméter függvényének a t szerinti deriváltja:

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)}.$$

Ha most feltesszük azt, hogy a vizsgált görbedarabon $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, akkor tehát

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \frac{ds}{dt} > 0$$

és így az $s(t)$ függvény monoton növekvő, tehát létezik ennek egyértelmű inverze, más szóval a t paraméter kifejezhető az s ívhosszúság függvényében! Tehát a térgörbét meg lehet adni az s ívhossz-paraméter függvényében:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t(s)).$$

Az ívhossz-paraméter szerinti deriváltat felül-pont helyett vesszővel jelölve ezt kapjuk:

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \mathbf{e},$$

ez pedig érintő-irányú egységvektor.

Ha az $\mathbf{r}(t)$ függvény egy pontmozgást ír le, akkor a sebességvektor:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}.$$

Ezt pedig így értelmezzük: a sebességvektor iránya az érintő irányával megegyezik, a nagysága pedig a megtett útnak az idő szerinti deriváltjával, az ún. pályasebességgel egyenlő:

$$|\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}.$$

10.1.4. Kétváltozós (kétparaméters) vektort-skalár függvények, felületek.

Legyen az $\mathbf{r}$ vektor a skaláris u és v paraméterek függvénye:

$$\mathbf{r}(u, v);$$

ez egy kétváltozós (kétparaméteres) vektor-skalár függvény. Ez a függvény az (u, v) független változók minden szóba jöhető értékpárjához hozzárendel egy-egy meghatározott $\mathbf{r}$ vektor függvényértéket. A függvény értelmezési tartománya az (u, v) független változóknak az a kétdimenziós T tartománya, mely tartalmazza mindazon (u, v) értékpárokat, amelyekhez $\mathbf{r}(u, v)$ vektorok tartoznak. Az értelmezési tartomány valamennyi (u, v) értékpárjához tartozó különböző $\mathbf{r}(u, v)$ vektorok összessége alkotja a függvény értékkészletét.

Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben:

$$\mathbf{r}(u, v) = x_1(u, v)\mathbf{e}_1 + x_2(u, v)\mathbf{e}_2 + x_3(u, v)\mathbf{e}_3.$$

Tehát $\mathbf{r}(u, v)$ az $x_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$ kétváltozós (skalár-skalár) függvényekből álló függvényrendszer tömörebb kifejezése.

Az $\mathbf{r}(u, v)$ függvénynek $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$ határátmenet esetén (ez azt jelenti, hogy $u \rightarrow u_0$ és $v \rightarrow v_0$ egyszerre és egymástól függetlenül) van *határértéke* és ez $\mathbf{r}_0$, azaz

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0,$$

ha a tetszőleges kicsiny pozitív ε -hoz található olyan pozitív δ , hogy

$$|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}_0| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \delta.$$

Az $\mathbf{r}(u, v)$ függvény az (u_0, v_0) helyen *folytonos*, ha

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0).$$

Az $\mathbf{r}(u, v)$ kétparaméters vektor-skalár függvényt a különböző (u, v) értékpárokhöz tartozó $\mathbf{r}(u, v)$ helyvektorok végpontjainak összességével *szemléltethetjük*. Ha a függvény folytonos, akkor a függvényt szemléltető pontok összessége általában *egy* folytonos *felületen* helyezkedik el. E szemléltetés kapcsán kézenfekvő az az értelmezés, hogy az $\mathbf{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skalár függvény az (u, v) értékpárokkal meghatározott T síktartománybeli pontokat leképezi az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

egyenletű felület F darabjának a pontjaira. Az F felületdarab az (u, v) paraméterek T tartományának a képe.

Az $\mathbf{r}(u, v)$ kétparaméters vektor-skalár függvény egy-egy $v_0 = \text{állandó}$, illetve $u_0 = \text{állandó}$ paraméterérték lerögzítésével átmegy az

$$\mathbf{r}(u, v_0),$$

illetve

$$\mathbf{r}(u_0, v)$$

egyparaméteres vektor-skalár függvényekbe. Ezeknek a képei speciális felületi görbék, ún. *paramétervonalak*:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$$

egy ún. u -vonal,

$$\mathbf{r}(u_0, v)$$

pedig egy ún. v -vonal egyenlete. A paramétervonalak az (u, v) -síkbeli koordinátavonalak képei. A paramétervonalak hálózata ahhoz hasonlóan hálózza be az F felületdarabot, ahogyan behálózza az (u, v) -síkbeli T tartományt a koordinátavonalak hálózata. E szemléltetés alapján mondhatjuk, hogy a felület egyes pontjaihoz tartozó u és v értékek a *felületi pontok görbe vonalú koordinátái*.

Ha egy tetszőleges t paraméter közvetítésével, az

$$u = u(t),$$

$$v = v(t)$$

egyenletrendszerrel, az u és v paraméterek között valamilyen függvénykapcsolatot írunk elő, akkor az

$$\mathbf{r}(u(t), v(t)) = \mathbf{r}(t)$$

egyparaméteres vektor-skalár függvénnyel egy bizonyos *felületi görbét* adunk meg.

Az $\mathbf{r}(u, v)$ függvény az (u_0, v_0) helyen (totálisan) *deriválható*, ha a független változók tetszőleges

$$\Delta u = u - u_0, \quad \Delta v = v - v_0$$

megváltozásához tartozik két olyan Δu -tól és Δv -tól független, és csak u_0 -tól, v_0 -tól függő $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$, illetve $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ vektor, amelyekkel $\mathbf{r}(u, v)$ megváltozása ($\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$) így fejezhető ki:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0)\Delta u + \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)\Delta v + \mathbf{h}_1\Delta u + \mathbf{h}_2\Delta v,$$

ahol az (u_0, v_0) értékpártól és a $\Delta u, \Delta v$ megváltozásoktól függő $\mathbf{h}_1$ és $\mathbf{h}_2$ vektorokra teljesül, hogy

$$|\mathbf{h}_i|^2 \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{ha} \quad \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} \rightarrow 0.$$

Az ezzel az összefüggéssel definiált $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ vektorok az $\mathbf{r}(u, v)$ függvény u - illetve v -szerinti *parciális derivált vektorai*.

$$\mathbf{r}'_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{r}'_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

A $\Delta \mathbf{r}$ (teljes) megváltozás főrésze a függvény ún. *teljes (totális) differenciálja*:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv \approx \Delta \mathbf{r};$$

e szerint a függvényérték teljes megváltozása "kicsinyben jó közelítéssel" a független változók $\Delta u \equiv du, \Delta v \equiv dv$ megváltozásának homogén lineáris függvénye.

Az $\mathbf{r}(u, v)$ függvény az (u_0, v_0) helyen akkor és csakis akkor differenciálható (totálisan), ha e helyen léteznek és folytonosak az $\mathbf{r}'_u(u, v)$ és $\mathbf{r}'_v(u, v)$ parciális deriváltak.

A parciális deriváltak koordinátákkal így fejezhetők ki:

$$\mathbf{r}'_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial u} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{r}'_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x_1}{\partial v} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial v} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial v} \mathbf{e}_3.$$

Ezek a parciális deriváltvektorok az u - ill. v - paramétervonalak érintővektorai.

Ha a felület egy pontjában $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$, akkor ott a felület érintősíkjának, azaz magának a felületnek *normalis vektora*:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v.$$

A felület érintősíkjának benne van az érintési ponton átmenő valamennyi

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$$

egyenlettel megadott felületi görbe érintője; ha csak $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \neq 0$, akkor ennek a felületi görbének az érintővektora:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'_u \dot{u} + \mathbf{r}'_v \dot{v}.$$

10.1.5. Felületdarab felszíne

Valamely felületdarab felszínének kiszámítására a következőképpen járunk el. Az (u, v) -síkon a vizsgált felületdarabnak megfelelő T tartományban háromszöges hálózatot készítünk. Mindegyik háromszög szögpontjainak megfelelő felületi pontokon át háromszöglapot fektetünk, így a felületdarabba beírt poliéder felületet nyerünk.

Azt várná az ember, hogy ha most az (u, v) -síkbeli hálózatot minden határon túl finomítjuk, azaz a háromszögek számát minden határon túl növeljük és oldalaiuk hosszúságát egyidejűleg minden határon túl csökkentjük, akkor a megfelelő poliéderfelületek felszínei meghatározott határértékekhez fognak közelíteni, s ezt tekinthetnénk a vizsgált felületdarab felszínének. A helyzet ezzel szemben az, hogy már olyan egyszerű felület, mint egy egyenes körhenger palástja esetén is előfordulhat, hogy a beírt poliéderfelületek felszínei – a hálózat finomításának módjától függően – végtelenhez, vagy különböző véges határértékhez tartanak. Kimutatható azonban, hogy ha az (u, v) -sík vizsgált részén $\mathbf{r}'_u$ és $\mathbf{r}'_v$ folytonosak, továbbá a hálózat finomítását úgy végezzük, hogy valamennyi háromszög mindenegybes szöge egy 180° -nál kisebb korlát alatt maradjon, akkor a leírt módon származó poliéderfelületek felszínei valóban egy meghatározott határértékhez közelednek, s ezt tekinthetjük a vizsgált felületdarab felszínének.

Hogy ezt a határértéket kiszámítsuk, készítsünk az (u, v) -sík T tartományában olyan háromszöges hálózatot, mely az $u = \text{állandó}$, $v = \text{állandó}$ vonalakkal megrajzolt négyszögrács négyszögeinek egyik átlójukkal történő felezésével keletkezik. A hálózat egyik háromszögeinek oldalai ekkor Δu és Δv nagyságúak lesznek; az ennek a háromszögnek megfelelő felületbe írt háromszög megfelelő oldalvektorai legyenek $\Delta \mathbf{r}_1$ és $\Delta \mathbf{r}_2$. Ennek a háromszögnek a területe:

$$\frac{1}{2} |\Delta \mathbf{r}_1 \times \Delta \mathbf{r}_2|.$$

Pótoljuk a $\Delta \mathbf{r}_1$ vektort a vele közelítőleg egyenlő $\mathbf{r}'_u \Delta u$ vektorral, a $\Delta \mathbf{r}_2$ vektort pedig az $\mathbf{r}'_v \Delta v$ vektorral, akkor a kérdéses háromszög területe közelítőleg:

$$\frac{1}{2} |\mathbf{r}'_u \Delta u \times \mathbf{r}'_v \Delta v| = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \cdot \frac{1}{2} \Delta u \Delta v = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \Delta T,$$

ahol ΔT -vel jelöltük az (u, v) -síkbeli háromszög területét; a parciális deriváltvektorokat a háromszög egyik szögpontjában vesszük. A beírt poliéderfelület felszínének közelítő értéke így

$$\sum |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \Delta T,$$

s a hálózat minden határon túl való finomításakor ez a

$$\int_{(T)} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dT = \int_{(T)} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$$

kettős integrálhoz tart határértékben, ahol T az (u, v) -sík azon részét jelenti, amely a vizsgált felületdarabnak felel meg. Kimutatható, hogy a hálózat finomításakor az alkalmazott közelítéseknek elkövetett hiba 0-hoz tart, úgyhogy végeredményben a keresett felszín:

$$F = \int_{(T)} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv.$$

Példák.

1.) Határozzuk meg az

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + b t \mathbf{e}_3, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

függvény által meghatározott közönséges csavarvonal egy menetének a hosszúságát.

Az adott függvény deriváltja:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -a \sin t \mathbf{e}_1 + a \cos t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3$$

és ezzel az ívhosszdifferenciál:

$$ds = |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt,$$

tehát a görbedarab ívhossza:

$$s = \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2.) Határozzuk meg az origó középpontú R sugarú gömbfelület felszínét.

A felületdarabot az

$$\mathbf{r}(u, v) = R \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + R \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + R \sin u \mathbf{e}_3,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

függvény határozza meg.

Most

$$\mathbf{r}'_u = -R \sin u \cos v \mathbf{e}_1 - R \sin u \sin v \mathbf{e}_2 + R \cos u \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{r}'_v = -R \cos u \sin v \mathbf{e}_1 + R \cos u \cos v \mathbf{e}_2$$

és ezekkel

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = R^2 \cos u.$$

Végül pedig

$$F = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos u du dv = R^2 \int_0^{2\pi} [\sin u]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv = 2R^2 \int_0^{2\pi} dv = 4R^2\pi,$$

ami a jól ismert eredményt adja.

10.2. Skalár-vektor függvények

10.2.1. Alapfogalmak

Skalár-vektor függvénynek nevezzük azt az

$$u(\mathbf{r})$$

függvényt, mely az $\mathbf{r}$ független változó vektor minden egyes szóbajöhető értékéhez hozzárendel egy-egy meghatározott $u(\mathbf{r})$ skaláris függvényértéket:

$$u(\mathbf{r}) = u .$$

Ha $\mathbf{r}$ helyvektort jelöl, akkor az $u(\mathbf{r})$ függvény az u skalárértékeket a tér $\mathbf{r}$ helyvektorú pontjaihoz rendeli hozzá. A függvény értelmezési tartománya az az $\mathbf{r}$ helyvektorú pontokból álló V tartomány (térrész; speciálisan kétdimenziós esetben: síkrész), melyekhez $u(\mathbf{r})$ függvényértékek tartoznak. Az értelmezési tartomány valamennyi $\mathbf{r}$ vektorához tartozó különböző $u(\mathbf{r})$ helyettesítési értékek összessége alkotja a függvény értékkészletét.

Skalár-vektor függvénnyel lehet jellemezni (leírni) skaláris mennyiségek (pl. hőmérséklet-, nedvesség-, légnyomás-, tömeg-, sűrűség-, potenciál-, stb. értékeknek) térbeli (vagy síkbeli) eloszlását. Ezért az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvényt *skalármezőnek*, *skalártérnek*, *skaláreloszlásnak* is szokás nevezni.

Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 ,$$

így

$$u(\mathbf{r}) \equiv u(x_1, x_2, x_3) .$$

Tehát $u(\mathbf{r})$ az $u(x_1, x_2, x_3)$ többváltozós (skalár-skalár) függvénnyel azonosítható.

Az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvénynek létezik a

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} u(\mathbf{r}) = u_0$$

határértéke, ha a tetszőleges kicsiny pozitív ε -hoz található olyan pozitív δ , hogy

$$|u(\mathbf{r}) - u_0| < \varepsilon , \quad \text{ha} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta .$$

Az $u(\mathbf{r})$ függvény az $\mathbf{r}_0$ helyen folytonos, ha

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}_0) .$$

A folytonos $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvényeket síkbeli $\mathbf{r}$ helyvektor esetén *szintvonalakkal*, térbeli $\mathbf{r}$ helyvektor esetén pedig *szintfelületekkel* (általában ún. *szintalakzatokkal*) szemléltetjük. Ezek az azonos u függvényértékű pontok geometriai helyei. Az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvény egy szintalakzatának az (implicit) egyenlete tehát:

$$u(\mathbf{r}) = c , \quad \text{ahol } c = \text{állandó} ,$$

azaz, ha $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ (vagy $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$), akkor ez az egyenlet koordinátákkal felírva így fest:

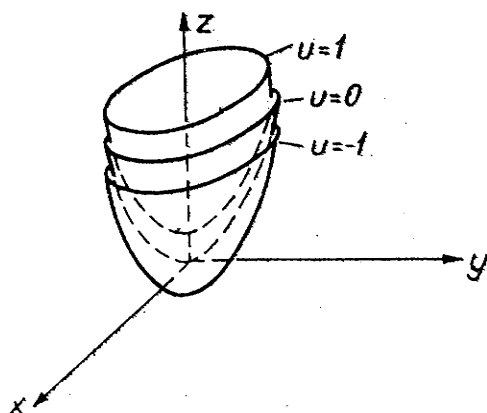
$$u(x_1, x_2, x_3) = c$$

(vagy pedig $u(x, y, z) = c$).

Példaként ábrázoljuk néhány szintfelülettel az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ helyvektor (x, y, z) koordinátáinak függvényeként megadott

$$u(\mathbf{r}) = z - x^2 - y^2$$

skaláreloszlást.



34. ábra

$u(\mathbf{r})$ helyébe különböző $c = \text{állandó}$ értékeket helyettesítve, a

$$z - c = x^2 + y^2$$

egyenletű felületek adódnak, melyek mind egybevágó, z -forgástengelyű, forgási paraboloidok. Ezek egymástól csak abban különböznek, hogy a z -tengely irányában c -vel el vannak tolva.

10.2.2. Skalár-vektor függvény deriváltja: a gradiens vektor

Az $\mathbf{r}_0$ helyvektorú pont környezetében értelmezett $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvény e pontban *differenciálható*, ha a független változó vektor $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ megváltozásához tartozik egy olyan $\Delta\mathbf{r}$ -től független és csak $\mathbf{r}_0$ -tól függő $\mathbf{g}(\mathbf{r}_0)$ vektor, amellyel $u(\mathbf{r})$ megváltozása ($\Delta u = u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_0)$) így fejezhető ki:

$$\Delta u = \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta\mathbf{r} + h \cdot \Delta\mathbf{r},$$

ahol az $\mathbf{r}_0$ -tól és $\Delta\mathbf{r}$ -től függő h vektor $\mathbf{0}$ -hoz tart, ha $\Delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$:

$$h \rightarrow \mathbf{0}, \quad \text{ha} \quad \Delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Az ezzel az összefüggéssel definiált $\mathbf{g}(\mathbf{r}_0)$ vektor az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvény $\mathbf{r}_0$ helyhez tartozó *deriváltja*. Ezt a vektort nevezzük a skalár-vektor függvény *gradiensének*:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \text{grad } u .$$

A differenciálható skalár-vektor függvény Δu megváltozásának a főrésze e függvény *differenciálja*:

$$du = \text{grad } u \cdot d\mathbf{r} \approx \Delta u ;$$

e szerint a függvényérték megváltozása "kicsinyben jó közelítéssel" a független változó $\Delta \mathbf{r} \equiv d\mathbf{r}$ megváltozásának homogén lineáris függvénye.

Szokás a skalár-vektor függvény deriváltját, a gradiens vektort szimbolikusan a következő differenciálhányados alakban is jelölni:

$$\text{grad } u = \frac{du}{d\mathbf{r}} = \frac{d}{d\mathbf{r}} u .$$

Térbeli Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 ,$$

$$d\mathbf{r} = dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3 ,$$

$$u(\mathbf{r}) = u(x, y, z) ;$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) \cdot (dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3) =$$

$$= \text{grad } u \cdot d\mathbf{r}$$

Igy a gradiens vektor komponensekre bontott alakja:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 .$$

Szokás még bevezetni a szimbolikus "nabla" vektort (*Hamilton-féle operátort*; az ezzel való formális szorzás differenciálási utasítást jelent):

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} ,$$

akkor írhatjuk:

$$\text{grad } u = \nabla u .$$

(Még megjegyezzük azt, hogy az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvény du differenciáljának a képzését formálisan a

$$d = d\mathbf{r} \cdot \nabla =$$

$$= dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

differenciál-operátorral való szorzással lehet értelmezni.)

10.2.3. Skalár-vektor függvény iránymenti deriváltja

Vizsgáljuk az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvényt szemléltető

$$u(x_1, x_2, x_3) = c$$

egyenletű szintfelületsereg egyik felületét, azt, amelyik a c állandó egy bizonyos rögzített értéke mellett adódik. Ha valamely

$$\mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$$

vektor-skalár függvénnyel megadott térgörbe rajta van ezen a felületen, akkor az

$$u(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = c$$

egyenlet a térgörbe t paraméterében azonosan teljesül.

A baloldal most végeredményben csak t -től függ és ha ez a függvény differenciálható, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

Figyelembevéve azonban azt, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \text{grad } u$$

és hogy

$$\frac{dx_1}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{dt} \mathbf{e}_3 = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

és ez nem más, mint a szintfelületen felvett térgörbe érintővektora, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \text{grad } u = 0.$$

Ez az eredmény az $u(x_1, x_2, x_3) = c$ egyenletű szintfelület bármely pontján átmenő differenciálható $\mathbf{r}(t)$ függvénnyel megadott felületi görbére érvényes. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\text{grad } u$ vektor a szintfelület egy pontjában merőleges az e ponton átmenő valamennyi érintővel rendelkező felületi görbe érintővektorára, vagyis az ezeket tartalmazó síkra, azaz a szintfelület érintősíkjára: $\text{grad } u$ e pontban a szintfelület normálvektorával párhuzamos.

Vizsgáljuk most az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvényt az $\mathbf{r}_0$ helyvektorú ponton átmenő valamely egyenes mentén:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{e},$$

ahol $\mathbf{r} = \cos \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cos \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cos \alpha_3 \mathbf{e}_3$ az egyenes irányát megadó egységvektor és $\mathbf{r}_0 = x_{01} \mathbf{e}_1 + x_{02} \mathbf{e}_2 + x_{03} \mathbf{e}_3$. Az s paraméter $\mathbf{r}_0$ -ból e irányában, vagyis az egyenes mentén, az elmozdulás nagyságát méri. Ha most ez az elmozdulás Δs nagyságú és eközben $u(\mathbf{r}(s))$ megváltozása

$$\Delta u = u(\mathbf{r}_0 + \Delta s \mathbf{e}) - u(\mathbf{r}_0),$$

akkor a

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{u(\mathbf{r}_0 + \Delta s \mathbf{e}) - u(\mathbf{r}_0)}{\Delta s}$$

differenciáhányados az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvénynek az $\mathbf{e}$ irányában a Δs szakaszra eső átlagos értékváltozási sebességét fogja megadni. Ennek a határértéke a $\Delta s \rightarrow 0$ határátmenet mellett pedig az $u(\mathbf{r})$ függvénynek $\mathbf{r}_0$ pontbeli, $\mathbf{e}$ irányában vett *értékváltozási sebességét* fogja meghatározni.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{r}_0 + \Delta s \mathbf{e}) - u(\mathbf{r}_0)}{\Delta s}$$

Ezt a határértéket az $u(\mathbf{r})$ függvény $\mathbf{r}_0$ pontbeli, $\mathbf{e}$ irányában vett *iránymenti deriváljának* hívjuk.

A kiszámítása a láncszabálynak megfelelően történik: az $u(\mathbf{r})$ függvényben $\mathbf{r}$ helyébe az

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{e}$$

függvényt helyettesítjük és így kapjuk az

$$u(\mathbf{r}(s))$$

közvetett függvényt, amelyből adódik

$$\frac{du(\mathbf{r}(s))}{ds} = \frac{du}{d\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad } u \cdot \mathbf{e};$$

szokták ezt $\frac{\partial u}{\partial s}$ -sel jelölni, ahol s az elmozdulást méri $\mathbf{e}$ irányában és a parciális deriválás jele arra utal, hogy $\mathbf{e}$ iránya bármilyen lehet.

Könnyű azt belátni, hogy ez az értékváltozási sebesség akkor a legnagyobb, ha a választott irány a skalár-vektor függvény kiszemelt pontjabeli (az ezen átmenő) szintfelületének az u növekvő értéke irányába mutató normálisa. Jelölje $\mathbf{n}$ ezt a normális egységvektort és jelölje s helyett n a kiszemelt felületi ponttól az ebben az irányban mért elmozdulást; ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \cdot \mathbf{n}.$$

Fennáll, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{grad } u \cdot \mathbf{e} = |\text{grad } u| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}}) \leq |\text{grad } u| = \frac{\partial u}{\partial n},$$

amint állítottuk.

Az alkalmazásokban igen gyakori az az eset, hogy konkrét fizikai jelentésű u skaláris változó nemcsak az $\mathbf{r}$ helyvektortól, hanem a t időtől is függ. Ilyenkor beszélünk *instacionárius* (azaz időtől is függő) *skaláreloszlásról* és ezt egy

$$u(\mathbf{r}; t) = u(x_1, x_2, x_3; t)$$

függvény írhatja le. Ebben az esetben a gradiens vektor az $u(\mathbf{r}; t)$ függvénynek rögzített (állandó) t mellett képezett $\mathbf{r}$ szerinti "parciális" deriváltja:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 .$$

Ezt hívják *momentán derivátnak*. Ez a vektor a kiválasztott és rögzített (állandó) t időpontban jellemzi a skaláreloszlásnak az egyes szintfelületekre merőleges irányban vett lokális ($\mathbf{r}$ helyvektorú pontbeli) elmozduláshoz viszonyított relatív értékváltozását (értékváltozási sebességét). A gradiens vektor a skaláreloszlás inhomogeneitásának a mértéke. Ebben az esetben lehet beszélni az $u(\mathbf{r}; t)$ függvénynek rögzített (állandó) t melletti "parciális" differenciáljáról:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{r}} u &= d\mathbf{r} \cdot \text{grad } u = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) u = \\ &= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 . \end{aligned}$$

Ez az $u(\mathbf{r}; t)$ függvény $d\mathbf{r}$ elmozduláshoz tartozó értékváltozásának a főrésze, állandó t mellett.

Ha az időtől is függő $u(\mathbf{r}; t)$ instacionárius skaláreloszlásnak egy-egy kiválasztott pontbeli és csak az idő változása következtében ($\mathbf{r}$ = állandó mellett) beálló megváltozását tekintjük, beszélünk e függvény idő szerinti értékváltozási sebességéről, az $u(\mathbf{r}; t)$ függvény ún. *lokális deriváltjáról*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} ,$$

és rögzített $\mathbf{r}$ helyvektorhoz tartozó parciális differenciáljáról:

$$d_t u = \frac{\partial u}{\partial t} dt .$$

Az $u(\mathbf{r}; t)$ függvény *teljes* (vagy *totális*) differenciálja viszont:

$$\begin{aligned} du &= d_{\mathbf{r}} u + d_t u = \\ &= \text{grad } u \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial u}{\partial t} dt = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 \right) + \frac{\partial u}{\partial t} dt . \end{aligned}$$

Vizsgáljuk végül az instacionárius $u(\mathbf{r}; t)$ skaláreloszlást valamely

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

egyenlettel megadott pályagörbe mentén, amikor is az

$$u(\mathbf{r}(t); t)$$

összetett függvény ún. *totális deriváltja*:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{d_{\mathbf{r}}u}{dt} + \frac{d_t u}{dt} = \mathbf{grad} u \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right) + \frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}$$

Itt a zárójelben lévő első tag az ún. *konvektív derivált*, a második pedig a már előbb is említett *lokális derivált*.

Ha az $u(\mathbf{r}; t)$ skaláreloszlás homogén ($\mathbf{r}$ -től független), akkor a konvektív derivált zérus (mert most $\mathbf{grad} u \equiv 0$) és ekkor a totális derivált egyenlő a lokális deriválttal:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t};$$

ha viszont a skaláreloszlás stacionárius (azaz időben nem változó), akkor (mivel most $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$) a totális derivált egyenlő a konvektív deriválttal:

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{grad} u \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

10.3. Vektor-vektor függvények

10.3.1. Alapfogalmak

Legyen az $\mathbf{y}$ változó az $\mathbf{x}$ független változó függvénye:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}).$$

Ezt a függvényt *vektor-vektor függvénynek* nevezzük. Az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény mindenegyes szóba jöhető $\mathbf{x}$ vektorhoz hozzárendel egy-egy meghatározott $\mathbf{y}$ vektort. Ha itt $\mathbf{x}$ helyvektort jelöl ($\mathbf{x} \equiv \mathbf{r}$), akkor az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény az $\mathbf{y}$ vektorokat a (síknak, vagy) térnek az $\mathbf{x}$ helyvektorokkal meghatározott pontjaihoz rendeli hozzá. A függvény *értelmezési tartománya* az az $\mathbf{x}$ dimenziójával megegyező dimenziójú (síkbeli vagy térbeli) $\mathcal{T}$ tartomány, mely tartalmazza mindazon pontokat, melyekhez $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektorok tartoznak. Az értelmezési tartomány valamennyi $\mathbf{x}$ vektorpárhoz tartozó különböző $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektorok összessége alkotja a függvény *értékkészletét*.

Vektor-vektor függvénnel lehet jellemezni (leírni) vektoriális mennyiségek (pl. áramló folyadék sebessége, elektromos, mágneses erő, stb) térbeli (vagy síkbeli), általában $\mathcal{T}$ tartománybeli eloszlását. Ezért az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvényt *vektormezőnek*, *vektortérnek*, *vektoreloszlásnak* is szokás nevezni. Ha a t skaláris változó az időt jelenti és az $\mathbf{y}$ vektor változó az $\mathbf{x}$ helyvektoron kívül az időtől is függ, azaz

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}; t),$$

akkor azt mondjuk, hogy ez a vektoreloszlás *instacionárius* (időben változó, nem állandósult). A következőkben egyelőre ettől az esettől eltekintünk és általában mindig csak stacionárius vektoreloszlásra gondolunk.

Térbeli Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

s így

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= y_1(\mathbf{x}) \mathbf{e}_1 + y_2(\mathbf{x}) \mathbf{e}_2 + y_3(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 = \\ &= y_1(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_1 + y_2(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_2 + y_3(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Innen kiolvasható, hogy tehát a (térbeli) vektor-vektor függvény tulajdonképpen egy háromváltozós (háromparaméteres) vektor-skalár függvénnyel, vagy az

$$y_i(\mathbf{x}) = y_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3$$

skalár-vektor függvényrendszerrel, illetve többváltozós (háromváltozós) skalár-skalár függvényekből álló függvényrendszerrel azonosítható.

Az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvénynek létezik a

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$$

határértéke, ha a tetszőleges kicsiny ε -hoz található olyan pozitív δ , hogy fennáljon

$$|\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta.$$

Az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény az $\mathbf{x}_0$ helyen *folytonos*, ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0).$$

A vektor-vektor függvényeket többféleképpen lehet *szemléltetni*:

a.) Mind az $\mathbf{x}$, mind az $\mathbf{y}$ vektorokat helyvektoroknak tekintjük és az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvényt úgy értelmezzük, hogy az a független változó $\mathbf{x}$ helyvektorokat (illetve az ezek által kijelölt pontokat) *leképezi* a függő változó $\mathbf{y}$ helyvektorokra (illetve az ezek által kijelölt pontokra). Más fogalmazásban: az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény az $\mathbf{y}$ helyvektorok egy 'nyalábját' leképezi (transzformálja) a megfelelő $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ ugyancsak helyvektor-nyalábra. Ha az $\mathbf{y}(\mathbf{y})$ vektor-vektor függvény folytonos, akkor az $\mathbf{x}$ helyvektor-nyalábnak az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ helyvektor-nyalábra való leképezését úgy tehetjük még szemléletesebbé, hogy rendre meghatározzuk valamilyen felületnek (vagy térgörbének) a megfelelőit úgy, hogy csak a kiválasztott felületekre (vagy térgörbékre) eső pontok $\mathbf{x}$ helyvektorainak az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ képvektorait határozzuk meg.

b.) Az egyes $\mathbf{x}$ helyvektorokhoz (ezek végpontjaihoz) hozzárendelt $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektorok eloszlását úgy tesszük szemléletessé (folytonos $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ esetén), hogy ún. *vektorvonalakat* (áramlási térben megadott sebességeloszlás esetén *áramvonalakat*, erőterben *erővonalakat*) képzelünk el (esetleg rajzolunk fel): olyan vonalakat, amelyek minden pontjában az érintő iránya megegyezik az ahhoz a ponthoz hozzárendelt $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor irányával. Megállapodunk

továbbá abban, – azért, hogy a vektoreloszlás egyes vektorainak irányán kívül, azok abszolút értékéről is hozzávetőlegesen szemléletes képünk legyen, – hogy a vektorvonalak sűrűségét arányosnak vesszük a vektoreloszlás vektorainak abszolút értékével, azaz a tér egy tetszés szerinti pontjában a vektor nagyságát a szóban forgó pontban a vektor irányára merőlegesen elképzelt egységnyi területű síkdarabon áthaladó vektorvonalak számával tekintjük arányosnak.

A vektorvonalakat meghatározó differenciálegyenlet vektoros alakban:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{x})dt ,$$

vagy

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) \times d\mathbf{x} = \mathbf{0} ;$$

koordinátákkal kifejezve:

$$dx_1\mathbf{e}_1 + dx_2\mathbf{e}_2 + dx_3\mathbf{e}_3 = dt(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) ;$$

vagy skaláris differenciálegyenletrendszer alakjában:

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i(x_1, x_2, x_3) , \quad i = 1, 2, 3 .$$

10.3.2. Homogén lineáris vektor-vektor függvények: tenzorok

A vektor-vektor függvényeknek egyik – mind elméleti, mind gyakorlati szempontból nagyon fontos-osztályát alkotják a *homogén lineáris vektor-vektor függvények*, amelyeket *homogén lineáris operátorokkal, tenzorokkal* adunk meg.

(Megjegyezzük azt, hogy itt és a következőkben a tenzor fogalmát leszűkítjük az ún. másodfajú tenzorokra és ezeket is csak ortogonális és normált bázisrendszerben tekintjük.)

Az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény homogén lineáris, ha tetszőleges $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}$ vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ (valós) skalárok mellett fennáll, hogy

$$\mathbf{y}(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_1\mathbf{y}(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathbf{y}(\mathbf{x}_2) ,$$

azaz speciálisan

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{y}(\mathbf{x}_2) ,$$

$$\mathbf{y}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{y}(\mathbf{x}) ,$$

tehát a homogén lineáris $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény összeg- és aránytartó leképezést (transzformációt) határoz meg. Az ilyen homogén lineáris vektor-vektor függvények jelölésére alkalmazzuk a homogén lineáris operátorokat, tenzorokat. Tehát az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ függvényjelölés helyett az $\mathbf{A}$ tenzorral ezt írjuk:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} .$$

A homogén linearitást kifejező előző függvényegyenletet ezzel így írhatjuk:

$$A(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 A(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 A(\mathbf{x}_2),$$

ill. speciálisan

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2),$$

$$A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x}),$$

A tenzorról szemléletes képet úgy kaphatunk, hogy a (háromdimenziós) tér $\mathbf{x}$ "tárgyvektorainak" halmazához hozzárendelt $\mathbf{y}$ "képvektorok" halmazát vizsgáljuk. E vizsgálat céljából megválasztunk és lerögzítünk egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortonormált (ortogonális és normált) bázisrendszert.

Az, hogy ez a bázisrendszer ortogonális azt jelent, hogy a bázisvektorok páronként egymásra merőlegesek, tehát a skaláris szorzatuk 0:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

(Két vektor skaláris szorzatát így is szokták jelölni:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

a következőkben fogjuk ezt a jelölést is használni.)

Az, hogy a bázisrendszer normált, azt jelenti, hogy a bázisvektorok hossza, abszolút értéke, vagyis a normája 1:

$$|\mathbf{e}_i| = \sqrt{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i} = \sqrt{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)} = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Tehát a bázisrendszer vektoraira teljesül:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k, \\ 1, & \text{ha } i = k \end{cases}$$

ahol $i, k = 1, 2, 3$.

A bázisrendszer vektorainak megfeleltetjük a következő oszlopvektorokat:

$$\mathbf{e}_1 \sim \underline{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \sim \underline{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 \sim \underline{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tehát az $\mathbf{y}_i$ bázisvektorokat az $\underline{\mathbf{e}}_i$ oszlopvektorok reprezentálják (mátrixos írásmódban). Ezt a bázisrendszert szoktuk természetes bázisrendszernek tekinteni.

Még megemlíjtük azt, hogy – megállapodás szerint – az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszerrel meghatározott koordinátarendszerünk jobbsodrású, tehát pl.

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3.$$

Mármost a függvénykapcsolat homogén linearitását kifejező függvényegyenlet alapján belátható, hogy elegendő a tenzor vizsgálatához a bázisrendszer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisvektoraihoz hozzárendelt képvektorokat megadni.

Legyenek az $\mathbf{e}_k$ vektoroknak az $\mathbf{A}$ tenzorral előállított képvektora:

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{A}\mathbf{e}_k = a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + a_{3k}\mathbf{e}_3, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ezeket az $\mathbf{a}_k$ vektorokat a lerögzített bázisrendszerben az $\underline{\mathbf{a}}_k$ oszlopvektorok reprezentálják:

$$\mathbf{a}_k \sim \underline{\mathbf{a}}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3.$$

A tetszőleges

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

vektor $\mathbf{A}$ tenzorral előállított $\mathbf{y}$ képvektora:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = \\ &= x_1(\mathbf{A}\mathbf{e}_1) + x_2(\mathbf{A}\mathbf{e}_2) + x_3(\mathbf{A}\mathbf{e}_3) = \\ &= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\mathbf{e}_1 + \\ &= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\mathbf{e}_2 + \\ &= (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\mathbf{e}_3; \end{aligned}$$

és mivel az $\mathbf{y}$ vektornak a választott bázisrendszerben a komponensekre bontott alakja:

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3,$$

azért az y_i és x_k koordináták között a következő lineáris egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

vagy rövidebben és tömörebben írva:

$$y_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik}x_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Mindez indokolja, hogy a választott bázisrendszerben az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorokat az $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}}$ oszlopvektorokkal reprezentáljuk:

$$\mathbf{x} \sim \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} \sim \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

és a köztük előírt homogén lineáris kapcsolatot létesítő $\mathbf{A}$ tenzort pedig a (harmadrendű, kvadratikus) $\underline{\mathbf{A}}$ mátrixszal reprezentáljuk:

$$\mathbf{A} \sim \underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{a}}_1 \quad \underline{\mathbf{a}}_2 \quad \underline{\mathbf{a}}_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Tehát azt az egyenletet, amely kifejezi, hogy az y képvektor az x tárgyvektornak az A tenzorral előállított képe, azaz

$$y = Ax,$$

az adott bázisrendszerben a formailag teljesen megegyező

$$\underline{y} = \underline{A}\underline{x}$$

mátrixegyenlettel lehet reprezentálni.

Vezessük be a tetszőleges a és b vektorokkal képezhető speciális tenzort:

$$a \circ b,$$

amely a tetszőleges x vektorhoz a következő definíció szerint rendel hozzá y vektort:

$$\begin{aligned} y &= (a \circ b)x = a(b \cdot x) = \\ &= a(b, x), \end{aligned}$$

ahol $b \cdot x = (b, x)$ a két vektor skaláris szorzata. Az $a \circ b$ tenzort az a és b vektorok diádikus szorzatának (röviden *diádnak*) hívjuk. E definíció szerint az $y = (a \circ b)x$ képvektor az a vektorral párhuzamos, mégpedig a -nak $(b \cdot x)$ skalárszorosa.

Könnyű ellenőrizni azt, hogy ha a, b, x, y vektorokat az adott bázisrendszerben a megfelelő $\underline{a}, \underline{b}, \underline{x}, \underline{y}$ oszlopvektorokkal reprezentáljuk, akkor $a \circ b$ diádnak megfelel az $\underline{a}\underline{b}^T$ mátrix és a $b \cdot x = (b, x)$ skaláris szorzatnak a $\underline{b}^T \underline{x}$ sorvektor-oszlopvektor szorzat.

Mármost az A tenzort és az e_1, e_2, e_3 ortonormált bázisrendszerben neki megfelelő $\underline{A}$ mátrixot az

$$\underline{A} = \sum_{k=1}^3 \underline{a}_k \circ \underline{e}_k \sim \underline{A} = \sum_{k=1}^3 \underline{a}_k \underline{e}_k^T$$

diádösszeg alakjában lehet előállítani, aminek az a jelentősége, hogy belőle közvetlenül leolvasható, hogy a diádok jobboldali vektortényezőinek, az egymásra páronként merőleges $\underline{e}_k$ bázis egységvektoroknak az A tenzorral előállított képvektorai éppen a diádokban szereplő baloldali tényezők, az $\underline{a}_k$ vektorok; ezeknek a vektoroknak megfelelő (őket reprezentáló) oszlopvektorokat írjuk egymás mellé a tenzort az adott bázisrendszerben reprezentáló $\underline{A}$ mátrix oszlopaiként. Az $\underline{a}_k$ vektorokat szokták az A tenzor adott bázisrendszerre vonatkozó *vektorkoordinátáinak* is nevezni. Az A tenzornak a rögzített bázisban k -adik vektorkoordinátája i -edik *skaláris koordinátája*, a tenzort reprezentáló mátrix i -edik sora k -adik eleme:

$$a_{ik} = (e_i, a_k) = (e_i, A e_k) \sim a_{ik} = \underline{e}_i^T \underline{a}_k = \underline{e}_i^T \underline{A} \underline{e}_k,$$

ahol $i, k = 1, 2, 3$.

A tenzorok között végezhető algebrai műveleteket a tenzorokat az adott és lerögzített bázisrendszerben reprezentáló mátrixokkal végeztethetjük el, a mátrixalgebra szabályai szerint.

10.3.3. Speciális tenzorok

A következőkben összefoglaló jelleggel bemutatunk néhány speciális tenzort és mátrixaikat az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortonormált bázisrendszerben.

a.) *Zérustenzor*, $\mathbf{0}$ az az elfajuló tenzor, amely minden $\mathbf{x}$ vektorhoz a zérusvektort rendeli hozzá. Mátrixa a harmadrendű zérusmátrix:

$$\mathbf{0} \sim \underline{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b.) *Egységtenzor (identitástenzor)*, $\mathbf{E}$ az a tenzor mely minden $\mathbf{x}$ vektorhoz önmagát (vagyis $\mathbf{x}$ -et) rendeli hozzá:

$$\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Mátrixa a harmadrendű egységmátrix:

$$\mathbf{E} \sim \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diádösszeg alakjában az egységtenzor így fest:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \circ \mathbf{e}_k.$$

c.) *Tenzor adjungáltja (csatolja, transzponáltja).*

Tetszés szerinti $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorpárra valamely $\mathbf{A}$ tenzorral általában

$$(\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}) \neq (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

vagyis a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{A}$ -val előállított képvektorának és az $\mathbf{u}$ vektornak a skaláris szorzata általában nem egyenlő az $\mathbf{u}$ vektor $\mathbf{A}$ -val előállított képvektorának és a $\mathbf{v}$ vektornak a skaláris szorzatával. Viszont minden $\mathbf{A}$ tenzorhoz tartozik egy egyértelműen meghatározott $\mathbf{A}^*$ tenzor, $\mathbf{A}$ -nak az adjungáltja, amellyel

$$(\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Könnyű belátni, – a mátrixalgebra szabályai alapján – hogy ha a $\mathbf{A}$ tenzor mátrixa $\underline{\mathbf{A}}$, akkor az adjungált $\mathbf{A}^*$ tenzor mátrixa $\underline{\mathbf{A}}^T$, vagyis $\underline{\mathbf{A}}$ transzponáltja.

Ugyanis

$$\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{A}} \mathbf{v} = (\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{A}} \mathbf{v})^T = \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{u}},$$

azaz

$$\underline{\mathbf{u}}^T (\underline{\mathbf{A}} \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T (\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{u}}).$$

Ha az $\mathbf{A}$ tenzor mátrixot az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortonormált bázisrendszerben diádösszeg alakjában írjuk fel:

$$\mathbf{A} \sim \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{a}}_1 \mathbf{e}_1^T + \underline{\mathbf{a}}_2 \mathbf{e}_2^T + \underline{\mathbf{a}}_3 \mathbf{e}_3^T,$$

akkor $\mathbf{A}^*$ mátrixa diádösszeg alakjában felírva a következő lesz:

$$\mathbf{A}^* \sim \underline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{e}_1 \underline{\mathbf{a}}_1^T + \mathbf{e}_2 \underline{\mathbf{a}}_2^T + \mathbf{e}_3 \underline{\mathbf{a}}_3^T.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy ha

$$\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{a}}_1 \quad \underline{\mathbf{a}}_2 \quad \underline{\mathbf{a}}_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}}_1^T \\ \underline{\mathbf{a}}_2^T \\ \underline{\mathbf{a}}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

megfelelően annak, hogy

$$a_{ik} = \mathbf{e}_i^T \underline{\mathbf{A}} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k^T \underline{\mathbf{A}}^T \mathbf{e}_i.$$

d.) *Reguláris, vagy nem elfajuló* az a $\mathbf{A}$ tenzor, mely csak a zérusvektorhoz rendeli hozzá a zérusvektort. Ha egy rögzített ortonormált bázisrendszerben e tenzor $\underline{\mathbf{A}}$ mátrixát tekintjük, akkor kell, hogy $\det(\underline{\mathbf{A}}) \neq 0$ legyen. Ebben az esetben létezik az $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ inverz mátrix és ez reprezentálja az $\mathbf{A}^{-1}$ inverz (vagy reciprok) tenzort. Ha tehát $\det(\underline{\mathbf{A}}) \neq 0$, akkor az

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{v}$$

összefüggésből egyértelműen következik a

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}$$

összefüggés.

Fennáll az $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ azonosság.

Az $\mathbf{A}$ tenzor $\underline{\mathbf{A}}$ mátrixából az $\mathbf{A}^{-1}$ tenzor $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ mátrixát a mátrixalgebrában tanultak szerint számítjuk ki:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \sim \underline{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \\ \det \underline{\mathbf{A}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \\ \text{adj}(\underline{\mathbf{A}}) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

és végül

$$\mathbf{A}^{-1} \sim \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{\text{adj}(\underline{\mathbf{A}})}{\det(\underline{\mathbf{A}})}.$$

Ha létezik az $\mathbf{A}$ tenzor inverze (reciproka), vagyis $\mathbf{A}$ reguláris, akkor a tenzor $\mathbf{a}_k = \mathbf{A} \mathbf{e}_k$ ($k = 1, 2, 3$) vektorkoordinátái lineárisan függetlenek, ilyenkor a tenzor nem írható fel háromnál kevesebb diád összegeként, vagyis $\mathbf{A}$ mátrixának ($\underline{\mathbf{A}}$ -nak) a rangja három:

$$\rho(\underline{\mathbf{A}}) = 3.$$

Ha viszont nem létezik inverz-tenzor (ilyenkor mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ szinguláris, vagy elfajuló), tehát

$$\det(\underline{\mathbf{A}}) = 0,$$

akkor az $\mathbf{a}_k$ vektorkoordináták lineárisan összefüggők, a tenzor mátrixának a rangja biztosan kisebb 3-nál: $\rho(\underline{\mathbf{A}}) < 3$.

Ebből következik az, hogy ha egy tenzor egyetlen egy diád, vagy legfeljebb két diád összegeként adható meg, akkor ez a tenzor biztosan szinguláris.

e.) *Önadjungált (szimmetrikus) és ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) tenzor.*

Önadjungált (szimmetrikus) a $\mathbf{A}$ tenzor, ha azonos az adjungáltjával (transzponáltjával), azaz

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*.$$

Ekkor az $\mathbf{A}$ tenzor $\underline{\mathbf{A}}$ mátrixa szimmetrikus mátrix:

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T,$$

azaz

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Ebben az esetben, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ tetszőleges vektorok, akkor

$$(\mathbf{u}, \mathbf{A} \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Ezzel szemben az $\mathbf{A}$ tenzor ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus), ha

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$$

Ilyenkor az $\mathbf{A}$ tenzor $\underline{\mathbf{A}}$ mátrixa ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus), tehát a transzponáltja (-1) -szerese:

$$\underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{A}}^T,$$

azaz

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

tehát $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Ebben az esetben, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ tetszőleges vektorok, akkor

$$(\mathbf{u}, \mathbf{A} \mathbf{v}) = -(\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Az antiszimmetrikus A tenzorhoz mindig található egy olyan a vektor, hogy tetszőleges u, v vektorok mellett teljesüljön a következő azonosság:

$$(u, Av) - (v, Au) = 2uav,$$

ahol a jobboldalon az u, a, v vektorok vegyes szorzata áll. Ezt az a vektort a ferdén szimmetrikus A tenzor *vektorinvariánsának* nevezzük. Fennáll, hogy

$$Av = a \times v,$$

azaz a v vektornak az A ferdén szimmetrikus tenzorral előállított képvektora azonos a tenzor vektorinvariánsának, a -nak a v vektorral képezett vektoriális szorzatával. Ha ugyanis az e_1, e_2, e_3 ortonormált bázisrendszerben

$$A \sim \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

és

$$v \sim \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{Av} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2v_3 - a_3v_2) \\ (a_3v_1 - a_1v_3) \\ (a_1v_2 - a_2v_1) \end{pmatrix}$$

és ez éppen az $a \times v$ vektoriális szorzatot reprezentáló oszlopvektor:

$$a \times v = (a_2v_3 - a_3v_2)e_1 + (a_3v_1 - a_1v_3)e_2 + (a_1v_2 - a_2v_1)e_3.$$

Érdemes még azt megjegyezni, hogy a tetszőleges a és b vektorokból képezett $b \circ a - a \circ b$ tenzor ferdén szimmetrikus és a vektorinvariánsa az $a \times b$ vektoriális szorzat, vagyis ha x tetszőleges vektor, akkor ennek a képe (a három vektor vektoriális szorzatára vonatkozó kifejtési tétellel összhangban):

$$\begin{aligned} (b \circ a - a \circ b)x &= (a \times b) \times x = \\ &= (a, x)b - (b, x)a. \end{aligned}$$

Ha most T egy tetszőleges tenzor, akkor ezt mindig fel lehet bontani egy szimmetrikus (önadjungált) és egy ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) tenzor összegére:

$$T = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*),$$

ahol

$$\frac{1}{2}(T + T^*) = T_s = T_s^*$$

a szimmetrikus (önadjungált) rész és

$$\frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) = \mathbf{T}_a = -\mathbf{T}_a^*$$

az antiszimmetrikus (ferdén szimmetrikus) rész.

A $\mathbf{T}$ tenzor vektorinvariánsának az antiszimmetrikus rész vektorinvariánsát szokták tekinteni:

$$\mathbf{T}_a \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*)\mathbf{x} = \mathbf{t} \times \mathbf{x}.$$

Mindez mátrixrepresentációban így fest:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}} &= \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} t_{11} & \frac{1}{2}(t_{12} + t_{21}) & \frac{1}{2}(t_{13} + t_{31}) \\ \frac{1}{2}(t_{21} + t_{12}) & t_{22} & \frac{1}{2}(t_{23} + t_{32}) \\ \frac{1}{2}(t_{31} + t_{13}) & \frac{1}{2}(t_{32} + t_{23}) & t_{33} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(t_{12} - t_{21}) & \frac{1}{2}(t_{13} - t_{31}) \\ \frac{1}{2}(t_{21} - t_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(t_{23} - t_{32}) \\ \frac{1}{2}(t_{31} - t_{13}) & \frac{1}{2}(t_{32} - t_{23}) & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

a vektorinvariáns komponensekre bontott alakja:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2}\{(t_{32} - t_{23})\mathbf{e}_1 + (t_{13} - t_{31})\mathbf{e}_2 + (t_{21} - t_{12})\mathbf{e}_3\}$$

f.) *Izometrikus tenzor* az $\mathbf{M}$ tenzor, ha tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok esetén ezek skaláris szorzata egyenlő $\mathbf{e}$ vektorok $\mathbf{M}$ -mel előállított $\mathbf{Ma}$ és $\mathbf{Mb}$ képvektorainak skaláris szorzatával:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{Ma}, \mathbf{Mb}).$$

Ha ezt átírjuk mátrix-representációba, akkor

$$\underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{b}} = (\underline{\mathbf{Ma}})^T (\underline{\mathbf{Mb}}) = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{M}}^T \underline{\mathbf{Mb}}$$

és ez tetszőleges $\underline{\mathbf{a}}$ és $\underline{\mathbf{b}}$ oszlopvektorok mellett csak úgy teljesülhet, ha

$$\underline{\mathbf{M}}^T \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{E}},$$

vagyis

$$\underline{\mathbf{M}}^T = \underline{\mathbf{M}}^{-1},$$

tehát az izometrikus tenzor mátrixának transzponáltja megegyezik az inverzával. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathbf{M}$ adjungáltja azonos $\mathbf{M}$ inverzával:

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^{-1}.$$

Ennek a következménye, hogy

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{Ma}|,$$

továbbá az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög (pontosabban e szög cosinusa) ugyanakkora, mint az $\mathbf{Ma}$ és $\mathbf{Mb}$ képvektorok által bezárt szög (cosinusa).

Mindezek alapján könnyű az izometrikus $\mathbf{M}$ tenzor $\underline{\mathbf{M}}$ mátrixát az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortonormált bázisrendszerben felírni. A bázisvektoroknak az $\mathbf{M}$ tenzorral előállított képvektorai ugyanis ugyancsak páronként egymásra merőleges egységvektorok lesznek:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{M}\mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ha tehát

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \cos \alpha_k \mathbf{e}_1 + \cos \beta_k \mathbf{e}_2 + \cos \gamma_k \mathbf{e}_3,$$

akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \sim \underline{\mathbf{M}} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\mathbf{e}}_k \mathbf{e}_k^T = (\tilde{\mathbf{e}}_1 \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 \quad \tilde{\mathbf{e}}_3) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ez a mátrix ún. *ortogonális mátrix*; a determinánsa $+1$ vagy -1 attól függően, hogy az $\mathbf{e}_k$ bázisvektorok $\tilde{\mathbf{e}}_k$ képvektorai ugyanolyan, vagy ellentétes sodrású bázisrendszert alkotnak.

Ha $\det(\underline{\mathbf{M}}) = +1$, akkor az $\mathbf{M}$ tenzor azt a leképezést írja le, amelynél a tér rögzített origóból kiinduló helyvektorait merev testszerűen elforgatjuk: az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszert merev testszerűen az $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ bázisrendszernek megfelelő helyzetbe forgatjuk. (A következőkben – egyszerűség kedvéért – csak erre a speciális esetre szorítkozunk.) Ha viszont $\det(\underline{\mathbf{M}}) = -1$, akkor az azt jelenti, hogy a merev testszerű elforgatás mellett még egy tükrözést is végre kell hajtani ahhoz, hogy a pl. jobbsodrású $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszerből a balsodrású $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ bázisrendszerre jussunk.

Az előzők egyik fontos alkalmazásaként vizsgáljuk meg azt, *hogyan transzformálódnak egy tetszőleges vektornak egy adott ortonormált bázisrendszerre vonatkozó skaláris koordinátái*, illetve egy tetszőleges tenzor mátrixának az elemei, ha az adott ortonormált bázisrendszert az origó körül merev testszerűen új helyzetbe elforgatjuk.

Legyenek az eredeti bázisvektorok $\mathbf{e}_k$ ($k = 1, 2, 3$) és az elforgatott helyzetű bázisvektorok $\tilde{\mathbf{e}}_k$ ($k = 1, 2, 3$). Ez utóbbiaknak az előzőkre vonatkoztatott skaláris koordinátái (iránykoszinuszai) az $\underline{\mathbf{M}}$ ortogonális mátrix oszlopaiban helyezkednek el.

Ha most a tetszőleges $\mathbf{x}$ vektornak mindkét bázisrendszerben a komponensekre bontott alakja:

$$x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

illetve

$$\tilde{x}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{x}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3$$

és ezek ugyanezt a vektort állítják elő, akkor

$$x_1 \mathbf{e} + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \tilde{x}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{x}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3;$$

ebből pedig rendre a következő egyenletrendszert lehet felírni:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \sum_{k=1}^3 x_k(\mathbf{e}_k, \tilde{\mathbf{e}}_1) = \cos \alpha_1 \cdot x_1 + \cos \beta_1 \cdot x_2 + \cos \gamma_1 \cdot x_3, \\ \tilde{x}_2 &= \sum_{k=1}^3 x_k(\mathbf{e}_k, \tilde{\mathbf{e}}_2) = \cos \alpha_2 \cdot x_1 + \cos \beta_2 \cdot x_2 + \cos \gamma_2 \cdot x_3, \\ \tilde{x}_3 &= \sum_{k=1}^3 x_k(\mathbf{e}_k, \tilde{\mathbf{e}}_3) = \cos \alpha_3 \cdot x_1 + \cos \beta_3 \cdot x_2 + \cos \gamma_3 \cdot x_3,\end{aligned}$$

amit mátrixalakban így is írhatunk:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ha tehát az adott $\mathbf{x}$ vektort az $\mathbf{e}_k$ ($k = 1, 2, 3$) bázisrendszerben az

$$\mathbf{x} \sim \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

oszlopvektorral, az $\tilde{\mathbf{e}}_k$ ($k = 1, 2, 3$) bázisrendszerben pedig az

$$\mathbf{x} \sim \tilde{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$$

oszlopvektorral reprezentálható, akkor

$$\tilde{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{M}}^T \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{M}}^{-1} \underline{\mathbf{x}},$$

illetve az inverz összefüggéssel:

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{M}} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}.$$

Tekintsük most az $\mathbf{A}$ tenzorral előírt

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

leképezést.

Az eredeti bázisrendszerben ezt az

$$\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}},$$

az új bázisrendszerben pedig az

$$\tilde{\underline{\mathbf{y}}} = \tilde{\underline{\mathbf{A}}} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}$$

mátrix-egyenlet reprezentálja.

Ha most figyelembe vesszük, hogy

$$\underline{y} = \underline{M}\underline{\tilde{y}} \quad \text{és} \quad \underline{x} = \underline{M}\underline{\tilde{x}},$$

akkor ezt kapjuk:

$$\underline{M}\underline{\tilde{y}} = \underline{A}\underline{M}\underline{\tilde{x}},$$

vagy $\underline{M}^{-1}$ -gyel ezt az egyenletet balról szorozva:

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{M}^{-1}\underline{A}\underline{M}\underline{\tilde{x}},$$

tehát végeredményben:

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{M}^{-1}\underline{A}\underline{M},$$

vagy ami ugyanaz:

$$\underline{A} = \underline{M}\underline{\tilde{A}}\underline{M}^{-1}.$$

Tehát az adott $\underline{A}$ tenzornak a két különböző bázisrendszerben felírt mátrixai között hasonlósági reláció áll fenn. A hasonlósági transzformációt a nem-szinguláris $\underline{M}$ transzformáló mátrix realizálja.

Megjegyezzük azt, hogy mi itt a bázistranszformációt csak a legegyszerűbb, merev testszerű forgatásnak megfelelő speciális esetben részleteztük. Be lehet azt bizonyítani, hogy általánosságban is igaz az, hogy egy tenzort különböző bázisrendszerekben *hasonló mátrixok* reprezentálnak.

10.3.4. Önadjungált (szimmetrikus) tenzorral előírt leképezés

A következőkben látni fogjuk, hogy minden önadjungált (szimmetrikus) tenzorral előírt leképezés három, páronként egymásra merőleges irányban meghatározott mértékű nyújtásnak felel meg. Ez a kérdés összefügg a tenzorok sajátérték- sajátvektor-problémájával. Ez pedig pontos megfelelője a kvadratikus mátrixok sajátérték-, sajátvektor-problémájának.

Az $\underline{A}$ tenzor *sajátértéke* a λ szám és *sajátvektora* az $\underline{s}$ vektor, ha

$$\underline{A}\underline{s} = \lambda\underline{s}, \quad \text{ahol} \quad \underline{s} \neq \underline{0},$$

tehát a sajátvektor párhuzamos a képvektorával.

Ha egy rögzített bázisban a tenzort $\underline{A}$ mátrixával és az $\underline{s}$ vektort $\underline{s}$ oszlopvektorával reprezentáljuk, akkor ebben a bázisrendszerben a

$$(\lambda \underline{E} - \underline{A})\underline{s} = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek minden nem-triviális ($\underline{s} \neq \underline{0}$) megoldása sajátvektor. Ilyen megoldás csak akkor van, ha λ gyöke a

$$\det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenletnek. Ennek az egyenletnek a gyökei a sajátértékek.

Ha új bázisrendszerre térünk át (az $\underline{A}$ mátrixon hasonlósági transzformációt hajtunk végre), akkor a sajátértékeket meghatározó *karakterisztikus polinom változatlan (invariáns) marad*.

Ha ugyanis

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M},$$

akkor

$$\begin{aligned} \det(\lambda \underline{E} - \tilde{\underline{A}}) &= \det(\underline{M}^{-1}(\lambda \underline{E} - \underline{A})\underline{M}) = \det(\underline{M}^{-1}) \cdot \det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) \cdot \det(\underline{M}) = \\ &= \det(\lambda \underline{E} - \underline{A}), \end{aligned}$$

mert hiszen mátrixok szorzatának determinánsa azonos a tényezómátrixok determinánsainak a szorzatával és mivel $\underline{M}^{-1}\underline{M} = \underline{E}$, azért

$$\det(\underline{M}^{-1}) \cdot \det(\underline{M}) = \det(\underline{M}^{-1}\underline{M}) = \det(\underline{E}) = 1.$$

Ezért a karakterisztikus polinom együtthatóival képezett

$$\begin{aligned} I_1 &= -a_2, \\ I_2 &= a_1, \\ I_3 &= -a_0 \end{aligned}$$

számokat a tenzor első, második, harmadik *skalárinvariánsának* nevezzük.

Ezeket a skalárinvariánsokat az $\underline{A}$ matrix elemeiből, illetve a sajátértékekből (a karakterisztikus egyenlet $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gyökeiből) a következőképpen lehet előállítani:

ha

$$\underline{A} \sim \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

akkor

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} = Sp(\underline{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_2, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = a_1, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(\underline{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -a_0. \end{aligned}$$

Ezek közül különösen fontos szerepet játszik az alkalmazásokban az első és a harmadik skalárinvariáns.

Három fontos tételt vegyünk szemügyre:

1. Minden $\underline{A}$ tenzorhoz, amelynek sajátértékei valósak, lehet találni olyan ortonormált bázist, amelyben $\underline{A}$ mátrixa felső háromszögmátrix (azaz olyan kvadratikusan mátrix, amelynek a főátló alatti elemei mind zérusok).

Legyen az eredeti bázisban $\mathbf{A}$ mátrixa $\underline{\mathbf{A}}$. Legyenek továbbá a

$$\det(\lambda \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei, vagyis $\mathbf{A}$ sajátértékei a valós $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok.

A λ_1 -hez tartozó sajátvektor legyen az $\mathbf{s}_1 \sim \underline{\mathbf{s}}_1$ egységvektor:

$$\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{s}}_1 = \lambda_1 \underline{\mathbf{s}}_1 \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{s}}_1^T \underline{\mathbf{s}}_1 = 1.$$

Vegyünk fel az $\mathbf{s}_1$ -re merőleges síkban két tetszőleges, egymásra merőleges egységvektort:

$$\underline{\mathbf{w}}_2 \sim \underline{\mathbf{w}}_2, \quad \underline{\mathbf{w}}_3 \sim \underline{\mathbf{w}}_3,$$

$$\underline{\mathbf{s}}_1^T \underline{\mathbf{w}}_2 = \underline{\mathbf{s}}_1^T \underline{\mathbf{w}}_3 = \underline{\mathbf{w}}_2^T \underline{\mathbf{w}}_3 = 0,$$

$$\underline{\mathbf{w}}_2^T \underline{\mathbf{w}}_2 = \underline{\mathbf{w}}_3^T \underline{\mathbf{w}}_3 = 1.$$

Képezzük az $\underline{\mathbf{s}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2, \underline{\mathbf{w}}_3$ oszlopvektorokból a

$$\underline{\mathbf{T}} = (\underline{\mathbf{s}}_1 \quad \underline{\mathbf{w}}_2 \quad \underline{\mathbf{w}}_3)$$

mátrixot. Ez nyilvánvalóan ortogonális, azaz

$$\underline{\mathbf{T}}^T \equiv \underline{\mathbf{T}}^{-1}, \quad \text{mert} \quad \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{E}}.$$

Fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{T}} &= \\ &= \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{s}}_1 \quad \underline{\mathbf{w}}_2 \quad \underline{\mathbf{w}}_3) = (\lambda_1 \underline{\mathbf{s}}_1 \quad \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{w}}_2 \quad \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{w}}_3) = \\ &= (\underline{\mathbf{s}}_1 \quad \underline{\mathbf{w}}_2 \quad \underline{\mathbf{w}}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\mathbf{T}}\tilde{\underline{\mathbf{A}}}, \end{aligned}$$

azaz $\underline{\mathbf{A}}$ hasonló az

$$\tilde{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{A}}_2 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz ($\tilde{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{T}}$), amelynek első oszlopa a λ_1 első elem kivételével csupa 0 (a kételemű $\underline{\mathbf{0}}$ oszlopvektor), és a jobb alsó sarokban álló másodrendű mátrixot jelöljük $\underline{\mathbf{A}}_2$ -vel. Pontokkal jelöljük $\tilde{\underline{\mathbf{A}}}$ -nak azokat az elemeit, amelyek a konkrét gondolatmentünkben nem játszanak szerepet.

$\underline{\mathbf{A}}$ -nak a karakterisztikus polinomja:

$$\det(\lambda \underline{\mathbf{E}} - \tilde{\underline{\mathbf{A}}}) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \det(\lambda \underline{\mathbf{E}}_2 - \underline{\mathbf{A}}_2) = \det(\lambda \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}})$$

(itt $\underline{\mathbf{E}}_2$ a másodrendű egységmátrix), ezért nyilván λ_2 és λ_3 gyökei a

$$\det(\lambda \underline{\mathbf{E}}_2 - \underline{\mathbf{A}}_2) = 0$$

másodfokú egyenletnek, tehát sajátértékei az $\underline{A}_2$ másodrendű mátrixnak.

Most megismételve ugyanazt a gondolatmenetet az $\underline{A}_2$ mátrix-szal, eljutunk a $\underline{T}_2$ másodrendű ortogonális mátrixszal ($\underline{T}_2^T \underline{T}_2 = \underline{E}_2$) a

$$\underline{T}_2^T \underline{A}_2 \underline{T}_2 = \underline{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \cdot \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz.

Egészítsük ki a $\underline{T}_2$ -t harmadrendűre így:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{T}_2 \end{pmatrix}$$

akkor nyilván $\underline{Z}$ ortogonális, azaz $\underline{Z}^T \underline{Z} = \underline{E}$.

Nyilvánvaló továbbá, hogy a

$$\underline{M} = \underline{TZ}$$

mátrix is ortogonális, mert

$$\underline{M}^T \underline{M} = (\underline{TZ})^T (\underline{TZ}) = \underline{Z}^T \underline{T}^T \underline{TZ} = \underline{E}.$$

Végeredményben tehát

$$\underline{M}^T \underline{AM} = \underline{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda_2 & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

azaz $\underline{A}$ hasonló olyan $\underline{B}$ felső háromszögmátrixhoz, melynek főátlójában $\underline{A}$ sajátértékei állnak és ezek alatt $\underline{B}$ összes többi eleme 0. A transzformáció $\underline{M}$ mátrixa ortogonális.

2. Ha az $\underline{A}$ tenzor önadjungált (szimmetrikus), azaz $\underline{A}^* = \underline{A}$, akkor minden sajátértéke valós.

Legyen a tetszőlegesen megválasztott és rögzített bázisban $\underline{A}$ mátrixa a (valós elemű) szimmetrikus $\underline{A}$ mátrix: $\underline{A}^T = \underline{A}$. Ekkor azt állítjuk, hogy az

$$\underline{A}\underline{u} = \lambda\underline{u} \quad (\underline{u} \neq \underline{0})$$

egyenletben szereplő λ sajátérték valós.

Tegyük fel ugyanis az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

(i a képzetes egység). Ekkor azonban ($\underline{A}$ elemei ugyanis mind valósak) szükségképpen az $\underline{u}$ oszlopvektor elemei is komplexek, azaz (felbontva valós és képzetes részre):

$$\underline{u} = \underline{a} + i\underline{b}.$$

Vagyis

$$\underline{A}(\underline{a} + i\underline{b}) = \underline{A}\underline{a} + i\underline{A}\underline{b} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha + i\beta)(\underline{a} + i\underline{b}) = \\
 &= (\alpha\underline{a} - \beta\underline{b}) + i(\beta\underline{a} + \alpha\underline{b}),
 \end{aligned}$$

és így

$$\underline{A}\underline{a} = \alpha\underline{a} - \beta\underline{b},$$

$$\underline{A}\underline{b} = \beta\underline{a} + \alpha\underline{b}.$$

Szorozzuk most meg az első egyenletet balról $\underline{b}^T$ -vel, a másodikat ugyancsak balról $\underline{a}^T$ -vel és vonjuk ki ezeket egymásból:

$$\underline{a}^T \underline{A}\underline{b} - \underline{b}^T \underline{A}\underline{a} = \alpha(\underline{a}^T \underline{b} - \underline{b}^T \underline{a}) + \beta(\underline{a}^T \underline{a} + \underline{b}^T \underline{b}).$$

Mivel azonban $\underline{A}^T = \underline{A}$, azért

$$\underline{a}^T \underline{A}\underline{b} - \underline{b}^T \underline{A}\underline{a} = 0$$

és továbbá

$$\underline{a}^T \underline{b} - \underline{b}^T \underline{a} = 0;$$

így marad a következő egyenlőség:

$$\beta(\underline{a}^T \underline{a} + \underline{b}^T \underline{b}) = 0,$$

azaz

$$\beta(|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2) = 0.$$

De a zárójel nem lehet 0, mert akkor $\underline{u} = \underline{0}$ lenne, így kell, hogy $\beta = 0$ legyen; de akkor λ csakis valós lehet!

3. Minden önadjungált (szimmetrikus) $\underline{A}$ tenzorhoz tartozik olyan ortogonális és normált bázisrendszer – ezt éppen az egymásra páronként merőleges sajátvektorai jelölik ki – amelyben $\underline{A}$ tenzor mátrixa a főátlóban a sajátértékeit tartalmazó $\underline{\Lambda}$ diagonálmátrix.

Legyen tehát $\underline{A}^* = \underline{A}$. Ekkor (a 2. tétel alapján) minden sajátértéke valós: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valósak.

Legyen egy tetszőleges ortonormált bázisban a $\underline{A}$ tenzort reprezentáló $\underline{A}$ mátrix szimmetrikus ($\underline{A}^T = \underline{A}$). De akkor az 1. tétel alapján van olyan $\underline{M}$ ortogonális mátrix ($\underline{M}^T \underline{M} = \underline{E}$), mely $\underline{A}$ -t hasonlósági transzformációval a $\underline{B}$ felső háromszögmátrixba viszi át, azaz

$$\underline{M}^T \underline{A} \underline{M} = \underline{B}.$$

Vegyük mindkét oldal transzponáltját:

$$\underline{B}^T = (\underline{M}^T \underline{A} \underline{M})^T = \underline{M}^T \underline{A}^T \underline{M} = \underline{M}^T \underline{A} \underline{M} = \underline{B},$$

vagyis $\underline{B}$ is szimmetrikus, de akkor csak diagonálmátrix lehet:

$$\underline{B} = \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Fennáll tehát

$$\underline{\mathbf{M}}^T \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{M}} = \underline{\Lambda},$$

azaz ($\underline{\mathbf{M}}^T = \underline{\mathbf{M}}^{-1}$)

$$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{M}} \underline{\Lambda}.$$

Legyenek most az $\underline{\mathbf{M}}$ ortogonális mátrix oszlopvektorai $\underline{\mathbf{s}}_1, \underline{\mathbf{s}}_2, \underline{\mathbf{s}}_3$:

$$\underline{\mathbf{M}} = (\underline{\mathbf{s}}_1 \quad \underline{\mathbf{s}}_2 \quad \underline{\mathbf{s}}_3).$$

Ezeknek megfelelnek a páronként egymásra merőleges $\underline{\mathbf{s}}_1, \underline{\mathbf{s}}_2, \underline{\mathbf{s}}_3$ egységvektorok. Írhatjuk:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{M}} &= \underline{\Lambda} (\underline{\mathbf{s}}_1 \quad \underline{\mathbf{s}}_2 \quad \underline{\mathbf{s}}_3) = ((\underline{\Lambda} \underline{\mathbf{s}}_1) \quad (\underline{\Lambda} \underline{\mathbf{s}}_2) \quad (\underline{\Lambda} \underline{\mathbf{s}}_3)) = \\ &= \underline{\mathbf{M}} \underline{\Lambda} = (\underline{\mathbf{s}}_1 \quad \underline{\mathbf{s}}_2 \quad \underline{\mathbf{s}}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = ((\lambda_1 \underline{\mathbf{s}}_1) \quad (\lambda_2 \underline{\mathbf{s}}_2) \quad (\lambda_3 \underline{\mathbf{s}}_3)). \end{aligned}$$

De ez azt jelenti, hogy

$$\underline{\Lambda} \underline{\mathbf{s}}_1 = \lambda_1 \underline{\mathbf{s}}_1,$$

$$\underline{\Lambda} \underline{\mathbf{s}}_2 = \lambda_2 \underline{\mathbf{s}}_2,$$

$$\underline{\Lambda} \underline{\mathbf{s}}_3 = \lambda_3 \underline{\mathbf{s}}_3,$$

azaz az $\underline{\mathbf{s}}_i$ oszlopvektorokkal reprezentált $\underline{\mathbf{s}}_i$ vektorok éppen az $\underline{\mathbf{A}}$ tenzor sajátvektorai. Mivel ezek páronként egymásra merőleges egységvektorok, azért ortonormált bázisrendszernek lehetnek a bázisvektorai és ebben a bázisrendszerben az $\underline{\mathbf{A}}$ tenzort a $\underline{\Lambda}$ diagonálmátrix reprezentálja:

$$\underline{\mathbf{A}} \sim \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Mindezek alapján lehet az önadjungált (szimmetrikus) $\underline{\mathbf{A}}$ tenzort a következő alakban is írni (ezt hívjuk $\underline{\mathbf{A}}$ spektrálfelbontásnak):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} &= \lambda_1 \underline{\mathbf{s}}_1 \circ \underline{\mathbf{s}}_1 + \lambda_2 \underline{\mathbf{s}}_2 \circ \underline{\mathbf{s}}_2 + \lambda_3 \underline{\mathbf{s}}_3 \circ \underline{\mathbf{s}}_3 = \\ &= \sum_{k=1}^3 \lambda_k \underline{\mathbf{s}}_k \circ \underline{\mathbf{s}}_k, \end{aligned}$$

ahol

$$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{s}}_k = \lambda_k \underline{\mathbf{s}}_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$(\underline{\mathbf{s}}_i, \underline{\mathbf{s}}_k) = \delta_{ik}.$$

Minden önadjungált (szimmetrikus) tenzorhoz tartozik tehát három, páronként egymásra merőleges irány (a sajátirányok), amelyek irányában az $\underline{\mathbf{A}}$ tenzor a sajátértékeinek megfelelő arányú λ_k -szoros ($k = 1, 2, 3$) nyújtást ír elő. (Ez az ún. *főtengetéltétel* tartalma.)

10.3.5. Tenzor felbontása izometrikus és önadjungált (szimmetrikus) tenzor szorzatára.

Alapvető jelentőségű a következő tétel:

Minden nem-elfajuló (reguláris) tenzort (A) elő lehet állítani egyértelműen egy izometrikus (M) és egy önadjungált (szimmetrikus) (S) tenzor szorzataként:

$$A = MS,$$

ahol $M^* = M^{-1}$ és $S^* = S$. (Feltesszük, hogy $A \sim \underline{A}$ és $\det(\underline{A}) \neq 0$.)

Ugyanis A^*A biztosan önadjungált (szimmetrikus), sőt a mátrixa $\underline{A}^T \underline{A}$ biztosan $\det(\underline{A}) \neq 0$ miatt – definit pozitív, tehát a sajátértékei mind pozitívak: $\lambda_k^2 > 0$; a sajátvektorai pedig ortonormált bázisrendszert alkotnak: $(s_i, s_j) = \delta_{ij}$. Ezért

$$A^*A = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 s_k \circ s_k = \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_k s_k \circ s_k \right)^2 = S^2,$$

ahol S biztosan reguláris és önadjungált (szimmetrikus):

$$S = \sum_{k=1}^3 \lambda_k s_k \circ s_k;$$

ennek létezik az inverze és ez is önadjungált (szimmetrikus):

$$S^{-1} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k} s_k \circ s_k \quad (\equiv (S^{-1})^*).$$

Mivel pedig

$$\begin{aligned} (AS^{-1})^*(AS^{-1}) &= S^{-1}A^*AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \\ &= S^{-1}SSS^{-1} = E, \end{aligned}$$

azért

$$AS^{-1} = M$$

izometrikus tenzor (hiszen $M^* = M^{-1}$).

Tehát

$$MS = AS^{-1}S = A$$

és éppen ezt akartuk belátni.

E felbontás alapján egy tetszőleges nem-elfajuló (reguláris) tenzor által létesített leképezésnek azt az egyszerű geometriai interpretációt adhatjuk, hogy

$$Ax = M(Sx),$$

azaz először a tér x vektorain végrehajtjuk az S által előírt leképezést, vagyis S ortogonális és normált sajátvektorai irányában végzünk a sajátértékeinek megfelelő arányú

nyújtásokat, majd az így kapott képvektorokon az M izometrikus tenzornak megfelelően egy origó körüli merev testszerű forgatást végzünk. (S sajátvektorait mindig lehet olyan sorrendbe rendezni, hogy $\det(\underline{M}) = +1$ legyen!)

(Még megjegyezzük azt, hogy a $\det(\underline{A}) \neq 0$ kikötést azért kellett tennünk, hogy az állításunk szerinti felbontás egyértelmű legyen. Be lehet ugyanis bizonyítani, hogy elfajuló A tenzort is fel lehet bontani izometrikus és önadjungált tenzor szorzatára, azonban akkor a felbontás nem egyértelmű!)

10.3.6. Vektor-vektor függvény deriváltja. Deriválttenzor

Az általános (nem szükségképpen homogén lineáris) $y(x)$ vektor-vektor függvény az x helyvektorú pontban *differenciálható*, ha az x vektor Δx megváltozásához található olyan csak x -től függő és Δx -től független D tenzor, amellyel $y(x)$ megváltozása ($\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$) így fejezhető ki:

$$\Delta y = D\Delta x + H\Delta x,$$

ahol az x -től is és Δx -től is függő H tenzor olyan, hogy bármely bázisrendszerben a mátrixának elemei mind zérushoz tartanak:

$$H \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad |\Delta x| \rightarrow 0.$$

Az ezzel az összefüggéssel definiált D tenzort az $y(x)$ vektor-vektor függvény *deriváltjának* nevezzük.

A Δy megváltozás főrésze az $y(x)$ függvény *differenciálja*:

$$dy = Ddx \approx \Delta y.$$

Eszerint a differenciálható $y(x)$ vektor-vektor függvényt az jellemzi, hogy a Δy megváltozás a független változó x vektor $dx \equiv \Delta x$ megváltozásának "kicsinyben jó közelítéssel" homogén lineáris függvénye. A D deriválttenzor az x helyvektorú pontban azt a "kicsinyben jó közelítéssel" érvényes leképezést írja le, amely az elegendően kicsiny hosszúságú $\Delta x \equiv dx$ vektorhoz a Δy vektort jól megközelítő dy vektort rendeli hozzá.

Válasszunk és rögzítsünk le egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert az e_k ($k = 1, 2, 3$) bázisrendszerrel, és mindent vonatkoztassunk erre. Ekkor

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad dx = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, \quad dy = dy_1 e_1 + dy_2 e_2 + dy_3 e_3.$$

Feltesszük azt, hogy léteznek és folytonosak a $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ ($i, k = 1, 2, 3$) parciális deriváltak.

Ekkor egyrészt

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3} dx_3 = \\ &= \frac{\partial y}{\partial x_1} (e_1 \cdot dx) + \frac{\partial y}{\partial x_2} (e_2 \cdot dx) + \frac{\partial y}{\partial x_3} (e_3 \cdot dx) = \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \circ e_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \circ e_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3} \circ e_3 \right) dx, \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \mathbf{e}_1 dy_1 + \mathbf{e}_2 dy_2 + \mathbf{e}_3 dy_3 = \\ &= \mathbf{e}_1(\text{grad } y_1 d\mathbf{x}) + \mathbf{e}_2(\text{grad } y_2 d\mathbf{x}) + \mathbf{e}_3(\text{grad } y_3 d\mathbf{x}) = \\ &= (\mathbf{e}_1 \circ \text{grad } y_1 + \mathbf{e}_2 \circ \text{grad } y_2 + \mathbf{e}_3 \circ \text{grad } y_3) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

A választott bázisrendszerben mátrixokkal (és oszlop- illetve sorvektorokkal) ez így írható:

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1} \mathbf{e}_1^T + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_2} \mathbf{e}_2^T + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_3} \mathbf{e}_3^T \right) d\mathbf{x} = \\ &= (\mathbf{e}_1(\text{grad } y_1)^T + \mathbf{e}_2(\text{grad } y_2)^T + \mathbf{e}_3(\text{grad } y_3)^T) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

tehát a $\mathbf{D}$ deriválttenzort reprezentáló $\underline{\mathbf{D}}$ mátrixot (oszlopvektorokra, illetve sorvektorokra particionált alakban, valamint összes skalárelemével részletesen) így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \sim \underline{\mathbf{D}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{grad } y_1)^T \\ (\text{grad } y_2)^T \\ (\text{grad } y_3)^T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ha bevezetjük a nabla operátort:

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

és a neki megfelelő

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

oszlopvektort, akkor mátrix-reprezentációban ezt írhatjuk:

$$\underline{\mathbf{D}} = (\nabla \mathbf{y}^T)^T,$$

vagyis a választott ortonormált bázisrendszerben a deriválttenzor mátrixa egyenlő a ∇ oszlopvektorból és $\mathbf{y}^T$ sorvektorból képezett diádikus szorzat transzponáltjával.

A deriválttenzor mátrixa transzponáltjának ezt a ∇ oszlopvektorral felírt alakját fel lehet használni arra, hogy az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény adott irányban vett iránymenti deriváltját formálisan értelmezzük. Ha ugyanis az adott bázisrendszerben a $d\mathbf{x}$ független változó vektor megváltozáshoz tartozó $\Delta \mathbf{y} (\approx d\mathbf{y})$ függvényértékváltozást megközelítő differenciálvektort sorvektorral reprezentáljuk, akkor írhatjuk:

$$d\mathbf{y}^T = (\underline{\mathbf{D}} d\mathbf{x})^T = d\mathbf{x}^T \underline{\mathbf{D}}^T =$$

$$= (d\mathbf{x}^T \nabla) \mathbf{y}^T,$$

vagyis a $d\mathbf{y}$ vektort reprezentáló $d\mathbf{y}^T$ sorvektort úgy lehet származtatni, hogy az $\mathbf{y}$ vektort reprezentáló $\mathbf{y}^T$ sorvektorra alkalmazzuk a skaláris $(d\mathbf{x}^T \nabla)$ differenciáloperátort, amely a következő skaláris szorzattal ekvivalens:

$$(d\mathbf{x}^T \nabla) = (d\mathbf{x}, \nabla) = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Ha most az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvénynek az

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$$

egyenletű térgörbe menti lokális értékváltozását vizsgáljuk, ahol s az ívhossz-paraméter, akkor mivel

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \cos \beta + \mathbf{e}_3 \cos \gamma,$$

ez pedig a térgörbe érintő egységvektorát jelent, akkor az $\mathbf{e}$ egységvektor irányában vett értékváltozási sebességre, azaz az $\mathbf{e}$ irányban vett *iránymenti deriváltra* ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{ds} &= (\mathbf{e}, \nabla) \mathbf{y} = \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \mathbf{y} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_2} \cos \beta + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_3} \cos \gamma = \\ &= \mathbf{D} \mathbf{e}, \end{aligned}$$

ami formalisan megfelel az $\mathbf{y}(\mathbf{x}(s))$ összetett függvény láncszabaly szerint képezett következő kifejezésnek:

$$\frac{d\mathbf{y}(\mathbf{x}(s))}{ds} = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{D} \mathbf{e}$$

Eszerint az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvénynek az adott pontban és az adott $\mathbf{e}$ egységvektor irányában vett iránymenti deriváltja az a vektor, amely az $\mathbf{e}$ -nek a $\mathbf{D}$ deriválttenzorral előállított $\mathbf{D} \mathbf{e}$ képvektora. Még megjegyezzük azt, hogy ennek az iránymenti deriváltvektornak a skaláris koordinátáit az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszerben a következő skaláris szorzatok adják:

$$(\text{grad } y_1, \mathbf{e}), (\text{grad } y_2, \mathbf{e}), (\text{grad } y_3, \mathbf{e}),$$

amint azt a $\mathbf{D}$ tenzor $\mathbf{D}$ mátrixának sorvektorokra partícionált alakjából a $\mathbf{D} \mathbf{e}$ kifejezésével azonnal be lehet látni.

A deriválttenzor azt a kicsinyben jó közelítéssel homogén lineáris leképezést írja le, amely a független változó $\mathbf{x}$ helyvektorok terében valamely $\mathbf{x}$ helyvektorú pontnak eleghetően kicsiny abszolút értékű $d\mathbf{x}$ vektorral jellemzett környezetét, az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ helyvektorok terében $\mathbf{x}$ -hez hozzárendelt $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ helyvektorú pontnak megfelelően kicsiny abszolút értékű $d\mathbf{y}$ vektorral jellemzett környezetébe viszi át: a $\mathbf{D} d\mathbf{x} = d\mathbf{y}$ vektor a $d\mathbf{x}$ vektornak $\mathbf{D}$ tenzorral előállított képe. Ezt a leképezést azután (ha a $\mathbf{D}$ tenzor nem elfajuló) az egyértelmű izometrikus és önadjungált tenzortényezőkre bontás alapján még geometriailag egy nyújtás-forgatásra bonthatjuk.

Tekintsünk most egy *instacionárius vektoreloszlást*, azaz tegyük fel azt, hogy az $\mathbf{y}$ vektor az $\mathbf{x}$ helyvektoron kívül a t időtől is függ:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}; t).$$

Ebben az esetben a $\mathbf{D}$ deriválttenzor a függvénynek állandó t mellett képezett $\mathbf{x}$ szerinti "parciális deriváltja", az ún. *momentán derivált*:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}},$$

mátrix reprezentációban:

$$\mathbf{D} \sim \underline{\mathbf{D}} = (\nabla \mathbf{y}^T)^T.$$

Ez a derivált a vektoreloszlás inhomogeneitásának a mértékét jellemzi. Az $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ függvénynek rögzített (állandónak tekintett) t melletti parciális differenciálja a $d\mathbf{x}$ változáshoz tartozó $\Delta \mathbf{y}$ megváltozás főrésze:

$$d_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \mathbf{D}d\mathbf{x}.$$

Ez a $d_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$ vektor a $d\mathbf{x}$ vektornak $\mathbf{D}$ tenzorral előállított képvektora.

Ha az időtől is függő $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ vektoreloszlásnak egy rögzített $\mathbf{x}$ helyvektorral kijelölt pontjában (lokálisan, helyhez kötötten) csak az idő változása következtében ($\mathbf{x}$ = állandó mellett) bekövetkező megváltozását tekintjük, beszélhetünk az $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ függvény egy pontbeli értékváltozási sebességéről, az $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ függvény ún. *lokális deriváltjáról* (idő szerinti parciális deriváltjáról):

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}$$

és rögzített $\mathbf{x}$ helyvektorhoz tartozó parciális differenciáljáról:

$$d_t\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}dt.$$

Az $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ függvény *totális (teljes) differenciálja*, azaz $\Delta \mathbf{y}$ teljes megváltozás főrésze, az előzőekben definiált két parciális differenciál összege:

$$d\mathbf{y} = d_{\mathbf{x}}\mathbf{y} + d_t\mathbf{y} = \mathbf{D}d\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}dt.$$

Vizsgáljuk most az $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ függvényt valamely $\mathbf{x}(t)$ vektor-skalár függvénnyel meghatározott pályagörbe mentén. Ekkor az $\mathbf{y}(\mathbf{x}(t); t)$ összetett függvény t idő szerinti *totális deriváltja*:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \frac{d_{\mathbf{x}}\mathbf{y}}{dt} + \frac{d_t\mathbf{y}}{dt} = \\ &= \mathbf{D} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \\ &= \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial y_1}{\partial t} \right) \mathbf{e}_1 + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial y_2}{\partial t} \right) \mathbf{e}_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial y_3}{\partial t} \right) \mathbf{e}_3 .$$

Ha az instacionárius $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ vektoreloszlás *homogén*, akkor a totális derivált első tagja (mert $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$) és így a totális derivált a *lokális deriváltra* redukálódik:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} .$$

Ha viszont $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ *stacionárius* (azaz időben állandósult), akkor (mivel most $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \equiv \mathbf{0}$) a totális derivált egyenlő az $(\frac{d\mathbf{x}}{dt})$ sebességvektort tartalmazó ún. *konvektív deriválttal*:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{D} \frac{d\mathbf{x}}{dt} .$$

Az alkalmazások szempontjából fontos szerepet játszik a $\mathbf{D}$ deriválttenzor első skalárinvariánsa és kétszeres vektorinvariánsa. Az így értelmezett skalár-vektor függvény az adott $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény *divergenciája* és a másik, vektor-vektor függvény az adott $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ *rotációja*. A választott $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortonormált bázisrendszerben ezek a következők ($\mathbf{D}$ mátrixa $\underline{\mathbf{D}}$):

$$\text{div } \mathbf{y} = \text{Sp}(\underline{\mathbf{D}}) = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{y} ;$$

$$\text{rot } \mathbf{y} = \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 =$$

$$= \nabla \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} .$$

A vektor-vektor függvény deriváltjának, divergenciájának és rotációjának *fizikai értelmezése* céljából tegyük fel azt, hogy $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ egy stacionárius folyadékáramlás sebesség-vektoreloszlását határozza meg. Vizsgáljuk meg ennek a sebességeloszlásnak a megváltozását, ha a független változó helyvektort $\mathbf{x}$ -ről $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ -re változtatjuk meg. Feltesszük azt, hogy $|d\mathbf{x}|$ elegendően kicsiny és így jó közelítéssel a vektoreloszlás megváltozását a főrészével, vagyis a $d\mathbf{y}$ differenciállal helyettesíthetjük. A $d\mathbf{y}$ differenciál a definíció szerint

$$\mathbf{y}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{y}(\mathbf{x}) \approx d\mathbf{y} = \mathbf{D} d\mathbf{x} = \mathbf{D}_s d\mathbf{x} + \mathbf{D}_a d\mathbf{x} ,$$

ahol $\mathbf{D}_s$ a $\mathbf{D}$ deriválttenzor önadjungált (szimmetrikus) részét, $\mathbf{D}_a$ pedig az antiszimmetrikus részét jelöli. Ezeket a következő mátrixok reprezentálják az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszerben:

$$\mathbf{D}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) \sim \underline{\mathbf{D}}_s =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3} + \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} ;$$

$$D_a = \frac{1}{2} (D + D^*) \sim \underline{D}_a =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} ;$$

Vizsgáljuk meg külön a sebességvektor közelítő megváltozásának azt a részét, amelyet a D_s , illetve a D_a tenzorok jellemeznek: $D_s dx$, ill $D_a dx$.

A D_s önadjungált (szimmetriks) tenzor sajátvektorai legyenek az s_1, s_2, s_3 egységvektorok. Ezek a mondott sorrendben egy jobbsodrású derékszögű bázisrendszert alkotnak. A koordináta-rendszert elforgatva úgy, hogy ezek a bázisvektorok legyenek a tengelyek irányai, legyen

$$x = \tilde{x}_1 s_1 + \tilde{x}_2 s_2 + \tilde{x}_3 s_3$$

és

$$y = \tilde{y}_1 s_1 + \tilde{y}_2 s_2 + \tilde{y}_3 s_3 .$$

Az új bázisrendszerben

$$D_s \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{x}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{x}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial \tilde{x}_3} \end{pmatrix}$$

és

$$D_s dx = \left(\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 \right) s_1 + \left(\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{x}_2} d\tilde{x}_2 \right) s_2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial \tilde{x}_3} d\tilde{x}_3 \right) s_3 .$$

Az y sebességvektor s_1 irányú komponensének $\tilde{y}_1$ -nek ugyanezen irányban vett fajlagos értékváltozását $\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{x}_1}$ jellemzi. És hasonló a jelentése a $\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{x}_2}$, $\frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial \tilde{x}_3}$ parciális deriváltaknak is.

Válasszunk ki most képzeletben az $y(x)$ sebességi vektortérben egy olyan l élhosszúságú, kockaalakú folyadékkal kitöltött térrészt, amelynek az élei az s_1, s_2, s_3 sajátvektorokkal párhuzamosak. Vizsgáljuk meg ennek a kockának a méreteit Δt idő elteltével: az s_1 irányú él megváltozott hossza

$$l + l \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{x}_1} \Delta t$$

és hasonlóan a másik két megváltozott élhossz:

$$l + l \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{x}_2} \Delta t , \quad \text{ill} \quad l + l \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial \tilde{x}_3} \Delta t .$$

A megváltozott élhosszakkal bíró folyadékkal kitöltött térrész térfogata:

$$l^3 \left(1 + \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{x}_1} \Delta t \right) \left(1 + \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{x}_2} \Delta t \right) \left(1 + \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial \tilde{x}_3} \Delta t \right) \approx \\ \approx l^3 + l^3 \left(\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial \tilde{x}_3} \right) \Delta t .$$

A ki nem írt, elhanyagolt tagok Δt -ben legalább másodfokúak. A térfogat megváltozása tehát jó közelítéssel

$$l^3 \left(\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial \tilde{x}_3} \right) \Delta t .$$

Ezt a megváltozást ($l^3 \Delta t$)-vel elosztva, vagyis a térfogatváltozást térfogategységre és időegységre vonatkoztatva, a D tenzor első skalárinvariánsát kapjuk. (Kimutatható, hogy a közelítések hibája $l \rightarrow 0$ és $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenet esetén is 0-hoz tartanak.)

Tehát a kocka térfogategységre és időegységre vonatkoztatott fajlagos térfogatváltozása, a fajlagos térfogatváltozás sebessége, azaz a folyadék szétáramlásának a gyorsasága (innen származik a divergencia elnevezés):

$$\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial \tilde{x}_3} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \text{div } \mathbf{y} .$$

A D_a antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{y}$, így

$$D_a dx = \left(\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{y} \right) \times dx .$$

Mármost figyelembevéve azt, hogy egy $\mathbf{e}$ egységvektorral meghatározott tengely körül ω szögsebességgel forgó test $\mathbf{x}$ helyvektorú pontjának a sebességvektora az $\underline{\omega} = \omega \mathbf{e}$ szögsebességvektorral $\underline{\omega} \times \mathbf{x}$ alakban fejezhető ki, azt mondhatjuk, hogy a

$$D_a dx = \left(\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{y} \right) \times dx$$

kifejezésben szereplő $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{y}$ vektor a folyadékrészecskék forgó (örvénylő) mozgását jellemzi: $\text{rot } \mathbf{y}$ a pillanatnyi és lokális szögsebességvektor kétszerese. Ez indokolja a rotáció elnevezést.

Összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy a stacionárius folyadékáramlás sebességvektora az $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ helyvektorú pontban a következő módon bontható fel összegre, jó közelítéssel:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \approx \mathbf{y}(\mathbf{x}) + D_s d\mathbf{x} + D_a d\mathbf{x} .$$

A jobboldal első tagja a folyadékrészecskék haladó mozgását (transzlációját), a második a szétáramlást, a harmadik pedig a lokális örvénylest jellemzi.

Még megemlítjük azt, hogy a vektoranalízis alkalmazásaiban fontos szerepet játszik egy skaláreloszlás gradiens vektorterének a divergenciája:

$$\text{div grad } u = \nabla(\nabla u) .$$

Szokás ezt szimbolikusan a $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$ ún *Laplace-féle operátorral* (a Laplace-deltával) így is írni:

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u .$$

Térbeli x, y, z Descartes-féle koordinátarendszerben:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

Kétdimenziós esetben, tehát az (x, y) -síkban:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Tekintve, hogy ez a Laplace-féle Δu kifejezés a matematikai fizika számos parciális differenciálegyenletében igen fontos szerepet játszik, valamilyen egyszerű fizikai jelentésének kell lennie. Ezt vizsgáljuk most meg, egyszerűség kedvéért a kétdimenziós esetre korlátozódva. Tekintsük tehát az $u(x, y)$ függvényt, az erre felírt Δu Laplace-féle kifejezést és állapítsuk meg ennek a fizikai jelentését. Tegyük fel azt, hogy az $u(x, y)$ függvény amely egy síkbeli skaláreloszlást ír le, pl. az origó környezetében értelmezett és ott legyen legalább kétszer folytonosan differenciálható. Képezzük az $u(x, y)$ függvény integrálközepértékét egy origó körüli R sugarú körlapon (legyen ez a $\mathcal{T}$ tartomány):

$$\bar{u} = \frac{1}{R^2 \pi} \int_{(\mathcal{T})} \int u(x, y) dx dy .$$

Meg fogjuk határozni ennek az $\bar{u}$ átlagértéknek az eltérését az origóban felvett $u_0 = u(0, 0)$ értéktől. E célból az $u(x, y)$ függvényt az origóhoz tartozó másodfokú Taylor-polinomjával közelítjük:

$$u(x, y) \approx u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \right] .$$

Itt a 0 indexek origóbeli értékeket jelölnek. Vegyük most a jobboldal kettős integrálját a $\mathcal{T}$ tartományban. Könnyű azt belátni, hogy mindazokból a tagokból, amelyek x -ben, ill. y -ban páratlan fokszámú tényezőket tartalmaznak (a szimmetria miatt ugyanis x szerint és y szerint is $-R$ -től $+R$ -ig kell integrálni) zérust kapunk és csak a következő tagok maradnak meg:

$$u_0 \int_{(\mathcal{T})} \int dx dy = u_0 R^2 \pi ,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_0 \int_{(\mathcal{T})} \int x^2 dx dy = \frac{R^4 \pi}{8} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_0 ,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0 \int_{(\mathcal{T})} \int y^2 dx dy = \frac{R^4 \pi}{8} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0 ,$$

Tehát végrede eredményben:

$$\bar{u} = \frac{1}{R^2 \pi} \int_{(\mathcal{T})} \int u(x, y) dx dy \approx u_0 + \frac{R^2}{8} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0 \right) .$$

Ebből pedig az $\bar{u}$ és u_0 értékek különbségére, jó közelítéssel ezt kapjuk:

$$\bar{u} - u_0 \approx \frac{R^2}{8} (\Delta u)_0 .$$

Tehát a Δu Laplace-féle kifejezés egy pontbeli értéke arányos az $u(x, y)$ függvény e pontot körülvevő tartományra vonatkozó átlagértékének (integrálközepértékének) és e pontbeli függvényértéknek a különbségével

10.3.7. Vektor-vektor függvény irányított görbementi integrálja (vonali-integrál).

Ha a rektifikálható (mérhető hosszúságú), irányított L görbe darabot az

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

vektor-skalár függvény határozza meg ($\dot{\mathbf{x}}(t)$ létezik és folytonos, továbbá $|\dot{\mathbf{x}}(t)| \neq 0$; az irányítást, a befutás értelmét az $\dot{\mathbf{x}}(t)$ érintővektorok szabják meg) és az

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = y_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 + y_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + y_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3$$

vektor-vektor függvény (vektoreloszlás) e görbe pontjaiban folytonos, akkor ennek az adott L ment (L -be beleértjük az irányítást, azaz a befutás értelmét is) integrálja:

$$\begin{aligned} \int_{(L)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{y}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [y_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\dot{x}_1(t) + y_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\dot{x}_2(t) + \\ &\quad + y_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\dot{x}_3(t)] dt = \\ &= \int_{(L)} (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3) . \end{aligned}$$

Ha pl. $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ egy erőteret (térbeli erőeloszlást) ír le és egy tömegpontot az L görbén (pályagörbén) végigvezetünk, akkor ez a vonaliintegrál az erőter munkáját adja meg számszerűleg.

A görbementi integrálra – kimutathatóan – érvényesek a következő tulajdonságok:

$$\int_{(L)} (y_1(\mathbf{x}) + y_2(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} = \int_{(L)} y_1(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{(L)} y_2(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} ;$$

$$\int_{(L)} c\mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = c \int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} , \text{ ahol } c = \text{állandó} ;$$

ha $(-L)$ jelöli az L görbedarabot ellenkező irányban befutva, akkor

$$\int_{(-L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = - \int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} ;$$

ha az L_1 görbedarab végpontja és az L_2 görbedarab kezdőpontja egybeesik és $(L_1 + L_2)$ -vel jelöljük e két görbedarab egymáshoz fűzésével keletkezett görbét, akkor

$$\int_{(L_1+L_2)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{(L_1)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{(L_2)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Végül megemlítjük, hogy ha az L görbe egy meghatározott irányban körüljárt zárt görbét jelent, akkor a zárt L görbe mentén vett integrált szokták így is jelölni:

$$\oint_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

10.3.8. Vektoreloszlás (egyértékű) skaláris potenciálja.

Egy $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektoreloszlásról akkor mondjuk, hogy van *skaláris potenciálja*, ha létezik olyan $u(\mathbf{x})$ skaláreloszlás, hogy teljesüljön a

$$\text{grad } u(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x})$$

összefüggés. Ilyenkor beszélünk *potenciálos vektoreloszlásról*.

Tegyük fel azt, hogy a folytonos $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektoreloszlásnak van $u(\mathbf{x})$ skaláris potenciálja. Akkor a

$$\int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

vonaleintegrál egyszerűen számítható. Tegyük fel ugyanis azt, hogy az L görbét az $\mathbf{x}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ vektor-skalár függvény állítja elő és $\mathbf{x}(t)$ folytonosan deriválható, valamint $|\dot{\mathbf{x}}(t)| \neq 0$. Ekkor

$$\int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{y}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt,$$

de mivel $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \text{grad } u$ a feltevés szerint, ezt így írhatjuk:

$$\int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \text{grad } u \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt.$$

Tudjuk azonban, hogy ez az integrandusz nem más, mint az $u(\mathbf{x}(t))$ összetett függvény t szerinti deriváltja:

$$\frac{du(\mathbf{x}(t))}{dt} = \text{grad } u \cdot \dot{\mathbf{x}}(t),$$

és így

$$\int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du(\mathbf{x}(t))}{dt} dt = u(\mathbf{x}(\beta)) - u(\mathbf{x}(\alpha)),$$

vagyis ha $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$ az L görbe kezdőpontjára, $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$ pedig a végpontjára mutató helyvektor, akkor

$$\int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{(L)} \text{grad } u \cdot d\mathbf{x} = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}).$$

Ez a szabály megfelel a határozott integrálnak a primitív függvény segítségével történő kiszámítására vonatkozó jól ismert Newton-Leibniz-féle szabálynak.

Ha most az L görbe zárt görbe, azaz a végpontja egybeesik a kezdőpontjával, tehát $b \equiv a$, akkor

$$\oint_{(L)} \text{grad } u \cdot d\mathbf{x} = u(a) - u(a) = 0 .$$

Ahhoz tehát, hogy az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektoreloszlásnak legyen $u(\mathbf{x})$ skaláris potenciálja, *szükséges*, hogy bármely zárt görbe mentén vett integrálja 0 legyen:

$$\oint_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0 .$$

Meg fogjuk mutatni azt, hogy ez a feltétel *elégséges* is. Legyen ugyanis $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ egy olyan vektoreloszlás, amely a tér egy bizonyos tartományában folytonos és az abban haladó bármely zárt görbe mentén vett integrálja zérus. Vegyünk fel ebben a tartományban egy a helyvektorú pontot és kössük ezt össze a változó x helyvektorú ponttal két különböző L_1 és L_2 görbével. Ekkor

$$\int_{(L_1)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{(L_2)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} .$$

Ugyanis az L_1 és $(-L_2)$ görbe együttvéve zárt görbét alkot, s az ennek mentén vett vonalintegrál a feltevés szerint zérus, azaz

$$\int_{(L_1 + (-L_2))} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{(L_1)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_{(L_2)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0 .$$

Ennek következtében az a és x helyvektorú pontokat összekötő bármely L görbe mentén vett integrált – az összekötő görbe feltüntetése nélkül – így jelölhetjük:

$$\int_a^x \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} ,$$

hiszen ez a vonalintegrál csak az a és x helyvektorú pontoktól (a kezdő és végponttól) függ, az azokat összekötő görbe választásától nem.

Tekintsük most az

$$u(x) = \int_a^x \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

képlettel definiált skalár-vektor függvényt. Megmutatjuk, hogy

$$\text{grad } u = \mathbf{y}(\mathbf{x}) ,$$

azaz $u(\mathbf{x})$ potenciálja az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvénynek. Tekintsük e célból az $u(\mathbf{x})$ skalár-vektor függvény helyettesítési értékét egy x_0 helyvektorú pontban és $u(\mathbf{x})$ megváltozását, ha az x_0 helyvektort Δx -szel megváltoztatjuk:

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) =$$

$$= \int_a^{x_0 + \Delta x} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_a^{x_0} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} .$$

Az itt szereplő második integrált számítsuk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x}_0$ helyvektorú pontokat összekötő valamely L görbe mentén, az első pedig azon görbe mentén, mely L -ből az $\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$ helyvektorú pontokat összekötő egyenesdarab hozzáfűzésével keletkezik. Ha ezt az egyenesdarabot S -sel jelöljük, akkor tehát

$$\Delta u = \int_{(L+S)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_{(L)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{(S)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} .$$

Legyen az S egyenesdarab egy paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\Delta \mathbf{x} , \quad 0 \leq t \leq 1 .$$

Igy tehát $\dot{\mathbf{x}}(t) = \Delta \mathbf{x}$ és ezzel

$$\int_{(S)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_0 + t\Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} dt .$$

Vegyük most figyelembe azt, hogy $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x}_0$ helyen – feltevésünk szerint – folytonos, tehát

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0 + t\Delta \mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) + \underline{\varepsilon}(t) ,$$

ahol nyilván $|\underline{\varepsilon}(t)|$ kicsiny, ha $|\Delta \mathbf{x}|$ elég kicsiny. Így tehát

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta \mathbf{x} dt + \int_0^1 \underline{\varepsilon}(t) \cdot \Delta \mathbf{x} dt = \\ &= \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta \mathbf{x} + \int_0^1 \underline{\varepsilon}(t) \cdot \Delta \mathbf{x} dt . \end{aligned}$$

Be lehet azt bizonyítani, hogy ez az utolsó integrál $\underline{\varepsilon} \cdot \Delta \mathbf{x}$ alakú eredményt ad, ahol $|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0$ esetén biztosan $|\underline{\varepsilon}| \rightarrow 0$. Végeredményben tehát

$$\Delta u = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta \mathbf{x} + \underline{\varepsilon} \cdot \Delta \mathbf{x} ,$$

ahol $|\underline{\varepsilon}| \rightarrow 0$, ha $|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0$ és ez éppen azt jelenti, hogy $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0)$ az $u(\mathbf{x})$ függvény deriváltjának, azaz $\text{grad } u$ -nak $\mathbf{x}_0$ helyen vett értékével egyenlő, amint állítottuk.

Ezzel kimutattuk azt, hogy ha az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvénynek bármely zárt görbe mentén vett integrálja zérus, akkor van $u(\mathbf{x})$ potenciálja; egy ilyen potenciál függvényt szolgáltat ugyanis rögzített $\mathbf{a}$ mellett az

$$u(\mathbf{x}) = \int_a^{\mathbf{x}} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

görbementi integrál.

Világos, hogy $u(\mathbf{x})$ -szel együtt $u(\mathbf{x}) + C$ is potenciálja $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ -nek, ahol C tetszőszerinti állandó. Más potenciál azután nincs is, mert ha $u(\mathbf{x})$ mellett pl. $u_1(\mathbf{x})$ is potenciál, akkor

$$\text{grad } u = \mathbf{y} , \quad \text{grad } u_1 = \mathbf{y}$$

és így

$$\text{grad}(u - u_1) = 0 ;$$

ha tehát bevezetjük az $u - u_1 = u_2$ jelölést, azaz $\text{grad } u_2 = 0$, viszont tudjuk, hogy

$$u_2(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \text{grad } u_2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{0} \cdot d\mathbf{x} = 0 ,$$

úgyhogy bármely $\mathbf{x}$ helyen $u_2(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{a}) = \text{állandó} = C$. Vagyis

$$u_1(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + C .$$

képlet adja meg, ahol $\mathbf{a}$ rögzített vektor, C tetszőszerinti állandó és az integrál az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x}$ helyvektorú pontokat összekötő valamely görbe mentén számítható.

Mivel az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x}$ helyvektorú pontokat összekötő görbe tetszőleges lehet, azért – a számítás egyszerűbbé tétele érdekében – célszerű koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesszakaszokból összefűzött törtvonalat választani integrálási útként.

Még megjegyezzük azt, hogy a Δu -ra kapott kifejezés főrésze, vagyis az $u(\mathbf{x})$ potenciál differenciálja:

$$\Delta u \approx du = \text{grad } u \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} ,$$

tehát $u(\mathbf{x})$ meghatározásának a feladata ekvivalens azzal, hogy az adott

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = du$$

teljes differenciálból kell az ismeretlen $u(\mathbf{x})$ potenciált meghatározni.

Ha tehát vektorainkat az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszerre vonatkoztatjuk, vagyis

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 , \\ d\mathbf{x} &= dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{y} &= y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3 , \\ \text{grad } u &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 , \end{aligned}$$

akkor

$$\begin{aligned} du &= y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3 = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned}$$

és

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3) + C .$$

A gyakorlatban úgy járunk el, hogy ezt az integrált számítjuk ki pl. koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesszakaszokból összefűzött törtvonal mentén és azután deriválással ellenőrizzük azt, hogy valóban teljesül-e, hogy

$$\text{grad } u = \mathbf{y}(\mathbf{x}) ;$$

ha igen, akkor $u(\mathbf{x}) + C$ a keresett potenciál.

10.3.9. Vektor-vektor függvény irányított felület menti integrálja.

Képzünk egy áramló folyadékot; az $\mathbf{x}$ helyvektorú folyadékreszecske sebessége legyen $\mathbf{y}(\mathbf{x})$. Szemeljünk ki egy felületdarabot és határozzuk meg azt, hogy egy adott kicsiny Δt időközben mekkora térfogatú folyadékmennyiség lép át a kiszemelt felületdarabon.

Tegyük fel először azt, hogy a felületdarab egy síklap és hogy az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ sebesség irány és nagyság szerint a síklap minden pontjában állandó: $\mathbf{y}$. Minthogy az $\mathbf{y}$ sebességű pont Δt idő alatt $\mathbf{y}\Delta t$ vektorral mozdul el, azért a Δt időtartam alatt a vizsgált síklapon átlépett folyadékreszecskek egy hasábot fognak kitölteni, amelynek alapja a vizsgált síklap, oldalainak a vektora pedig $\mathbf{y}\Delta t$. A keresett folyadékmennyiség térfogata tehát ennek a hasábnak a térfogatával lesz egyenlő. Mivel pedig, ha $\mathbf{m}$ jelenti a síklapra merőleges egységvektort, akkor a hasáb magassága

$$|\mathbf{y}\Delta t \cdot \mathbf{m}| = |\mathbf{y} \cdot \mathbf{m}|\Delta t,$$

azért a keresett térfogat

$$V = |\mathbf{y} \cdot \mathbf{m}|f\Delta t,$$

ahol f jelenti a vizsgált síklap területét. Ha még abban is megállapodunk, hogy a síklapon a felvett irányba mutató $\mathbf{m}$ normális egységvektor irányában átlépett folyadékmennyiség térfogatát pozitív előjellel, az ellenkező irányban átlépettet pedig negatív előjellel vesszük számításba, akkor nyilván az előjeles térfogat a következő lesz:

$$V = \mathbf{y} \cdot \mathbf{m}f\Delta t,$$

vagy ha még bevezetjük az $\mathbf{f} = f\mathbf{m}$ vektort, az ún. felületvektort, amelynek az iránya a felvett $\mathbf{m}$ normális irányával, a nagysága pedig a felületdarab felszínével egyenlő, akkor ezt még így is írhatjuk:

$$V = \mathbf{y} \cdot \mathbf{f}\Delta t.$$

Ha most a kiválasztott felületdarab nem sík, és pontjaiban az $\mathbf{y}$ sebesség nem állandó, hanem az $\mathbf{x}$ helyvektornak folytonos $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ függvénye, akkor a következőképpen járhatunk el. Előállítjuk az F felületdarab egyenletét

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$$

alakban; az (u, v) -sík T tartománya feleljen meg az F felületdarabnak. T -ben háromszöges hálózatot készítünk ugyanúgy, ahogyan a felszín meghatározásakor is tettük és a T -beli háromszögek mindegyik szögpontjának megfelelő felületi pontokon át háromszöglapokat veszünk, amelyek az F felületdarabot megközelítő poliéderfelületet adnak.

Az (u, v) -sík minden egyes háromszögében választunk egy pontot és a felület ennek megfelelő pontjához tartozó $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ sebességvektort tekintjük a kérdéses háromszöglaphoz tartozó sebességnek. Így a keresett folyadékmennyiség közelítő értékekül

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{y}(\xi_k) \cdot \Delta \mathbf{f}_k \Delta t$$

adódik, ahol ξ_k jelenti a k -edik háromszögben kiválasztott pontnak megfelelő felületi pont helyvektorát, Δf_k pedig a k -edik háromszöglapra merőleges, annak területével egyenlő nagyságú vektort. Ki lehet azt mutatni, hogy ha $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ a felület pontjaiban folytonos, továbbá az (u, v) -síknak a vizsgált felületdarabnak megfelelő részén $\mathbf{x}'_u$ és $\mathbf{x}'_v$ folytonosak, $\mathbf{x}'_u \times \mathbf{x}'_v$ is folytonos és sehol sem zérus, az (u, v) -síkon a háromszöges hálózatot minden határon túl finomítjuk olyan módon, hogy a háromszögek számát minden határon túl növeljük, oldalaik hosszát minden határon túl csökkentjük és egyidejűleg ügyelünk arra, hogy valamennyi háromszögben minden szög egy 180° -nál kisebb korlát alatt maradjon, akkor a

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{y}(\xi_k) \cdot \Delta \mathbf{f}_k$$

összeg meghatározott határértékhez tart; ennek a Δt -szerese adja a keresett folyadékmennyiséget.

Ha most $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ tetszőleges folytonos vektor-vektor függvény (elvonatkoztatva a konkrét fizikai jelentésétől), akkor ez a határérték az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvény F felületdarab menti, adott normális mellett számított *felületi integrálját* adja és ezt így jelöljük:

$$\int_{(F)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} ,$$

vagy röviden

$$\int_{(F)} \mathbf{y} d\mathbf{f} .$$

Érvényesek a következő tulajdonságok:

$$\int_{(F)} (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \cdot d\mathbf{f} = \int_{(F)} \mathbf{y}_1 \cdot d\mathbf{f} + \int_{(F)} \mathbf{y}_2 \cdot d\mathbf{f} ;$$

$$\int_{(F)} c\mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} = c \int_{(F)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} \quad (c = \text{állandó}) ;$$

$$\int_{(F_1 + F_2)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} = \int_{(F_1)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} + \int_{(F_2)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} ;$$

$$\int_{(-F)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} = - \int_{(F)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} .$$

(itt $-F$ jelenti ugyanazt a felületdarabot, mint F , de ellenkező irányba mutató felületi normálissal).

Ha most végül figyelembe vesszük azt, hogy

$$\Delta \mathbf{f} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{x}'_u \times \mathbf{x}'_v) \Delta u \Delta v ,$$

akkor ezt a kiszámításra alkalmas képletet nyerjük:

$$\int_{(F)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{(F)} \mathbf{y}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}'_u(u, v) \times \mathbf{x}'_v(u, v)) du dv ,$$

feltéve, hogy az $\mathbf{x}'_u \times \mathbf{x}'_v$ felületi normális a kívánt irányba mutat. (Ha ugyanis ez a normális éppen ellenkező irányú, akkor persze az egészet (-1) -gyel még meg kell szorozni!)

10.3.10. Térbeli és síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-féle tétel.

Bizonyos felületmenti integrálok a bemutatott módszertől eltérő módon is kiszámíthatók. Legyen ugyanis V olyan térrész, melyet egy, vagy több olyan felületdarab határol, amely mentén irányított felületmenti integrál értelmezhető. Ezeket a felületdarabokat jelölje $F_1, F_2, \dots, F_n$. Ha a V térrészben és a határán az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektoreloszlás a deriválttenzorával együtt folytonos, akkor érvényes a következő, ún. Gauss-Osztrogradszkij-féle tétel:

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{y} dV = \sum_{k=1}^n \int_{(F_k)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f},$$

ahol az F_k ($k = 1, 2, \dots, n$) felületdarabok normálisait mindenütt a V térrészből kifelé mutatónak kell választani. Tehát a tett feltevések mellett felületi integrálokat át lehet alakítani térfogati integrálra (és megfordítva).

Ennek a fontos tételnek az igazolására először is megjegyezzük azt, hogy ki lehet mutatni – az előző feltevések mellett, hogy az F_k felületdarabokat P_k ($k = 1, 2, \dots, n$) háromszöglapokból összerakott poliéderfelületekkel és a V térrészt az ezek által határolt V' térrésszel helyettesíthejük úgy, hogy ezáltal mind a felületmenti, mind a térfogati integrálok értéke tetszőlegesen kevésbé változzék meg. Elég tehát a tételt arra a speciális esetre igazolni, amikor az F_k határoló felületek háromszöglapokból álló poliéderfelületek. Ebből az általános eset határátmenettel adódik.

Szorítkozzunk azután még speciálisabban arra az esetre, amikor a V térrészt egyetlen F tetraéderfelület határolja. Bármely poliéderfelületekkel határolt térrész ugyanis tetraéderekre bontható olyan módon, hogy a tetraéderek “szabad” lapjai éppen a kérdéses poliéder felületek lapjaival essenek egybe, “belső” lapjaik pedig két-két egymással érintkező tetraédernek közösek legyenek. Ha a Gauss-Osztrogradszkij-féle tétel érvényes az egyes tetraéderekre külön-külön, akkor érvényes az egész térrészre is, mert az egyes tetraéderekre vonatkozó térfogati integrálok összege éppen a vizsgált egész térrészre vonatkozó integrált adja, az egyes tetraéderfelületekre vonatkozó irányított felületmenti integrálok összege pedig éppen a kívánt poliéderfelületekre vonatkozó felületmenti integrálok összege, hiszen a “belső” lapokra vonatkozó integrálok kétszer, ellenkező előjellel szerepelnek, s így az összegezésnél kiesnek.

Legyen tehát speciálisan V az F tetraéderfelület belseje. Világos, hogy ha a Gauss-Osztrogradszkij-féle tétel igaz két függvényre, akkor igaz ezeknek az összegére is. Ezért tehát az

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = y_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + y_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + y_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3$$

komponensekkel felírt függvény három tagja közül elegendő az egyikre igazolni a tételt, a másik kettőre az igazolás hasonló, s ebből már következik a tétel érvényessége az összegükre is.

Igazoljuk pl. a tételt a harmadik (a z -tengellyel párhuzamos) komponensre, azaz legyen speciálisan

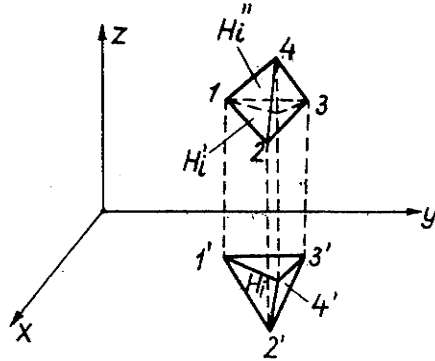
$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) \equiv y_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3.$$

Minthogy most

$$\operatorname{div} (y_3 \mathbf{e}_3) = \frac{\partial y_3}{\partial x_3},$$

azért

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} (y_3 \mathbf{e}_3) dV = \iiint_{(V)} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3.$$



35. ábra

Vetítsük az F tetraéder egyes lapjait az (x_1, x_2) -síra. (Az ábrán $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$!). Világos, hogy a tetraéder bármilyen helyzete esetén a V térrész (x_1, x_2) -síkon lévő vetülete bizonyos számú háromszögekre bomlik olyan módon, hogy V -nek egy-egy ilyen háromszög feletti részét alulról F -nek egy lapja, vagy F egy lapjának egy része határolja, s ugyanígy felülről is F -nek egy másik lapja, vagy F egy lapjának egy része. Ha H_i jelöli az egyik ilyen (x_1, x_2) -síkon lévő háromszöget, jelölje H_i' a V térrész H_i feletti részét alulról, H_i'' pedig a V térrész feletti részét felülről határoló háromszöget, V_i pedig a V -nek H_i feletti része, akkor

$$\iiint_{(V_i)} \operatorname{div} (y_3 \mathbf{e}_3) dV = \int_{(H_i)} \int \left(\int_{f_i(x_1, x_2)}^{g_i(x_1, x_2)} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2,$$

ahol most $x_3 = f_i(x_1, x_2)$ a H_i' és $x_3 = g_i(x_1, x_2)$ pedig a H_i'' síklap egyenlete.

Csakhogy

$$\int_{f_i(x_1, x_2)}^{g_i(x_1, x_2)} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = y_3(x_1, x_2, g_i(x_1, x_2)) - y_3(x_1, x_2, f_i(x_1, x_2)),$$

úgyhogy tehát

$$\iiint_{(V_i)} \operatorname{div} (y_3 \mathbf{e}_3) dV = \int_{(H_i)} \int y_3(x_1, x_2, g_i(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 - \int_{(H_i)} \int y_3(x_1, x_2, f_i(x_1, x_2)) dx_1 dx_2.$$

Tudjuk azonban, hogy

$$\int_{(H_i)} \int y_3(x_1, x_2, g_i(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \int_{(H_i')} (y_3 \mathbf{e}_3) \cdot d\mathbf{f}$$

és

$$\int_{(H_i)} \int y_3(x_1, x_2, f_i(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \int_{(H_i'')} (y_3 \mathbf{e}_3) \cdot d\mathbf{f},$$

ahol a H_i'' menti integrál felfelé mutató, a H_i' pedig lefelé mutató normálissal nem számítva. Ennélfogva

$$\iiint_{(V_i)} \operatorname{div} (y_3 \mathbf{e}_3) dV = \int_{(H_i')} (y_3 \mathbf{e}_3) \cdot d\mathbf{f} + \int_{(H_i'')} (y_3 \mathbf{e}_3) \cdot d\mathbf{f}.$$

Ha most i -nek szóba jöhető értékeire összegezzünk, akkor a baloldali integrálok összege kiadja az

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} (y_3 \mathbf{e}_3) dV$$

térfogati integrált, a jobboldali integrálok összege pedig az F mentén V -ből kifelé mutató normálissal számított integrált, nem számítva F -nek az (x_1, x_2) -síkra (azaz (x, y) -síkra) merőleges lapjait. Az ezekre vonatkozó felületi integrál azonban úgyis zérus, mert az $y_3 \mathbf{e}_3$ vektor és a $d\mathbf{f}$ vektor merőleges egymásra és így a skaláris szorzatuk zérus. Vagyis a jobboldali integrálok összege hiánytalanul kiadja a

$$\int_{(F)} (y_3 \mathbf{e}_3) \cdot d\mathbf{f}$$

integrált és valóban

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} (y_3 \mathbf{e}_3) dV = \int_{(F)} (y_3 \mathbf{e}_3) \cdot d\mathbf{f}.$$

Lássunk egy fontos *fizikai alkalmazást*. Legyen $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ egy áramló folyadék sebességvektoreloszlása és tekintsünk egy V térrészt, amelyet az F felület határol. Tudjuk, hogy a V -ből kifelé mutató normálissal számított integrál

$$\int_{(F)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} \cdot \Delta t$$

az F -en V -ből kifelé Δt idő alatt áltépett folyadék térfogatának és az ugyanezen idő alatt V -be belépett folyadék térfogatának különbségét adja. Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor a belépő és kilépő folyadék térfogata csak abban az esetben különböző, ha a V térrészben *források* folyadékot termelnek, vagy *nyelők* folyadékot fogyasztanak (a nyelőt negatív forrásnak tekinthetjük). Ha a forrás alatt az időegységben termelt folyadék térfogatát a *forrás erősségének* nevezzük, akkor a Δt idő alatt termelt folyadék térfogata a forrás erősségének Δt -szerese. Ugyahogy a V térrészben foglalt források erőssége

$$\int_{(F)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f}.$$

Ez azonban a Gauss-Osztrogradskij-tétel szerint nem más, mint

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{y} dV .$$

Ha most a térrészt egy $\mathbf{x}_0$ helyvektorú pontot körülvevő, elegendően kicsiny ΔV térfogatú térrésznek választjuk, akkor kihasználva az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektoreloszlás deriválttenzorának, és ezzel együtt a divergenciájának feltevés szerinti folytonosságát, akkor jó közelítéssel ezt kapjuk:

$$\iiint_{(\Delta V)} \operatorname{div} \mathbf{y} dV \approx (\operatorname{div} \mathbf{y})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \cdot \Delta V .$$

Igy tehát a divergencia nem más, mint egy pontban lévő *forrás erősségének a sűrűsége* (a nyelöt negatív erősségű forrásnak tekintve):

$$(\operatorname{div} \mathbf{y})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{(F)} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} .$$

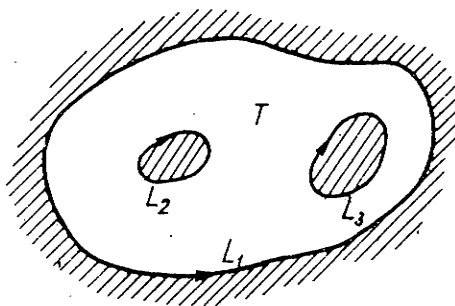
Az összenyomhatatlan folyadék áramlása például forrásmentes, ha a sebesség vektoreloszlás divergenciája minden pontban zérus:

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0 .$$

A Gauss-Osztrogradskij-tétel síkbeli (kétdimenziós) alakjára a következő meg gondolással jutunk. Tekintsük az (x_1, x_2) -síknak oly T részét, melyet véges számú $L_1, L_2, \dots, L_n$ görbe határol. Ezekről feltesszük, hogy

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$

egyenletekkel állíthatók elő és $\dot{\mathbf{x}}(t)$ mindenütt létezik, folytonos és nem zérus. Állítsunk ezután a T síkidomra egységnyi magasságú hengerszerű V térrészt. Ezt tehát az $x_3 = 1$ egyenletű síknak T feletti T' darabja, maga a T és az $L_1, L_2, \dots, L_n$ görbékre állított egységnyi magasságú $F_1, F_2, \dots, F_n$ hengerfelületek határolják.



36. ábra

Legyenek most $p(x_1, x_2)$ és $q(x_1, x_2)$ T -ben folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező kétváltozós függvények. Alkalmazzuk az x_3 -tól független

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + q(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$$

kétdimenziós vektoreloszlásra és a V térrészre a Gauss-Ostrogradszkij-féle tételt:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{y} dV &= \int_{(T)} \int \mathbf{y}(\dot{\mathbf{x}}) \cdot d\mathbf{f} + \int_{(T')} \int \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} + \\ &+ \int_{(F_1)} \int \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} + \dots + \int_{(F_n)} \int \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} \end{aligned}$$

(a felületi normálisok mindenütt V -ből kifelé irányítandók.)

A baloldali integrálra ezt kapjuk:

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{y} dV = \int_{(T)} \int \int_0^1 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) dx_3 dx_1 dx_2 = \int_{(T)} \int \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2,$$

tekintettel arra, hogy $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ és $\frac{\partial q}{\partial x_2}$ nem függenek x_3 -tól.

A jobboldali (felületi) integrálok közül az első kettő zérus, mert $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ merőleges a T ill. T' felületdarabok (x_3 -tengellyel párhuzamos) normálisaira.

Ha most az L_1 görbe egy paraméteres előállítását:

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

akkor az F_1 felületdarabot a következőképpen adhatjuk meg:

$$\mathbf{x}(u, v) = x_1(u)\mathbf{e}_1 + x_2(u)\mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_3, \quad \alpha \leq u \leq \beta, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Ekkor azonban

$$\mathbf{x}'_u \times \mathbf{x}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{x}_2\mathbf{e}_1 - \dot{x}_1\mathbf{e}_2,$$

úgy hogy

$$\mathbf{y} : (\mathbf{x}'_u \times \mathbf{x}'_v) = (p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2) \cdot (\dot{x}_2\mathbf{e}_1 - \dot{x}_1\mathbf{e}_2) = -q\dot{x}_1 + p\dot{x}_2,$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_{(F_1)} \int \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^1 (-q(x_1(u), x_2(u))\dot{x}_1(u) + p(x_1(u), x_2(u))\dot{x}_2(u)) dv du = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (-q(x_1(u), x_2(u))\dot{x}_1(u) + p(x_1(u), x_2(u))\dot{x}_2(u)) du = \\ &= \oint_{(L_1)} (-qdx_1 + pdx_2), \end{aligned}$$

vagyis egy L_1 görbe menti integrálra jutottunk. Arra kell eközben ügyelni, hogy L_1 befutási iránya úgy legyen megválasztva, hogy az $\dot{x}_2\mathbf{e}_1 - \dot{x}_1\mathbf{e}_2$ vektor T ből kifelé irányuljon, ami

$(-\dot{x}_1)$ és $\dot{x}_2$ előjelének vizsgálatával könnyen megállapítható módon annyit jelent, hogy az L_1 görbe befutásakor a T síkrész balkezünk felé essék.

Hasonlóképpen számolva a többi felületi integrált is, végül ezt kapjuk:

$$\int_{(T)} \int \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_{(L_1)} (-q dx_1 + p dx_2) + \dots + \oint_{(L_n)} (-q dx_1 + p dx_2),$$

ahol az $L_1, L_2, \dots, L_n$ görbék befutási iránya úgy választandó meg, hogy a T síkrész befutás közben balkez felé essék. Ez a képlet fejezi ki az ún. *síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-féle tételt*.

Ha ezt speciálisan a $p = x_1, q = x_2$ függvéypárra alkalmazzuk, akkor mivel

$$\int_{(T)} \int \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 2T,$$

ahol itt most T -vel jelöltük az adott síkrész területét, a következő területszámítási képletre jutunk:

$$T = \frac{1}{2} \oint_{(L_1)} (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) + \dots + \frac{1}{2} \oint_{(L_n)} (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2).$$

10.3.11. Green-féle tételek

Alkalmazzuk a térbeli Gauss-Osztrogradszkij-féle tételt egy speciális vektoreloszlásra:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \mathbf{grad} v(\mathbf{x}),$$

ahol $u(\mathbf{x})$ és $v(\mathbf{x})$ olyan legalább kétszer folytonosan deriválható skaláreloszlások, amelyek a V zárt térrészben és annak F határfelületén adottak.

Mivel

$$\operatorname{div} \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \operatorname{div} (u(\mathbf{x}) \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) = \mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} v(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{grad} v(\mathbf{x}),$$

azért lesz

$$\iiint_{(V)} (\mathbf{grad} u \mathbf{grad} v + u \operatorname{div} \mathbf{grad} v) dV = \int_{(F)} u \mathbf{grad} v \cdot d\mathbf{f}.$$

Ez az 1. *Green-féle tétel*.

Ha itt most u és v szerepét felcseréljük, akkor

$$\iiint_{(V)} (\mathbf{grad} u \mathbf{grad} v + v \operatorname{div} \mathbf{grad} u) dV = \int_{(F)} v \mathbf{grad} u \cdot d\mathbf{f}.$$

A felületi integrálokat természetesen mindkét esetben a zárt V térrészből kifelé mutató felületi normálisokkal számoljuk.

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból, akkor jutunk a 2. *Green-féle tételre* (vagy szokták ezt a Green-tétel szimmetrikus alakjának is hívni):

$$\iiint_{(V)} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{(F)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dF.$$

Itt

$$\begin{aligned}\Delta v &= \nabla \cdot (\nabla v) = \operatorname{div} \operatorname{grad} v, \\ \Delta u &= \nabla \cdot (\nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u.\end{aligned}$$

A felületi integrálokban szereplő $\operatorname{grad} v df$ és $\operatorname{grad} u \cdot df$ skaláris szorzatok helyett a $\frac{\partial v}{\partial n} dF$ és $\frac{\partial u}{\partial n} dF$ kifejezéseket írtuk, figyelembe véve azt, hogy ha n jelenti a felület kifelé mutató normális egységvektorát, akkor egyrészt $df = n dF$ ($dF = |df|$), másrészt pedig a $\operatorname{grad} v \cdot n$ és $\operatorname{grad} u \cdot n$ skaláris szorzatok a $v(x)$ és $u(x)$ skaláreloszlások n irányában vett $\frac{\partial v}{\partial n}$ és $\frac{\partial u}{\partial n}$ iránymenti deriváltjával egyenlők.

Teljesen analóg módon kapjuk a síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-féle tételből pl. a 2. Green-féle tétel síkbeli megfelelőjét:

$$\int_{(T)} \int (u \Delta v - v \Delta u) dT = \oint_{(L)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

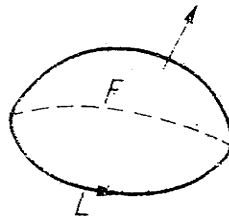
Ezek a tételek fontos alkalmazást nyernek a matematikai fizika differenciálegyenleteinél.

10.3.12. A Stokes-félé tétel

A síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-féle tétel felhasználásával további nevezetes integrálátalakítási tételre juthatunk. Legyen e célból F olyan felületdarab, amelynek mentén irányított felületmenti integrál számítható és tegyük fel, hogy ezt véges számú $L_1, L_2, \dots, L_n$ irányított görbe határolja. Ha most $y(x)$ olyan vektoreloszlás, amely F pontjaiban és határain deriválttenzorával együtt folytonos, akkor érvényes Stokes tétele:

$$\int_{(F)} \operatorname{rot} y \cdot df = \sum_{k=1}^n \oint_{(L_k)} y \cdot dx,$$

feltéve, hogy itt az L_k görbéket olyan irányban futjuk be, hogy az F -menti integrálnak megfelelően irányított normálist e görbék mentén körülvezetve, F balkéz felé esik.

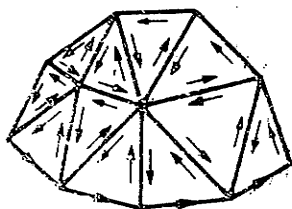


37. ábra

Stokes tételének igazolását elég arra a speciális esetre elvégezni, amikor a F felület egy háromszöglapokból álló poliéderfelület és az L_k görbék az ezt határoló törtvonalak, mert a

tett feltevések mellett kimutatható, hogy az F felület helyettesíthető poliéderfelületekkel úgy, hogy ezáltal mind a felületmenti integráltól, mind a görbementi integráloktól való eltérés tetszőlegesen kicsivé tehető és így az általános eset a speciálisból határáttmenettel nyerhető.

Feltehetjük azután azt, hogy F egyetlen háromszöglap, melyet egyetlen L háromszög határol. Ha ugyanis a tétel igaz a poliéderfelület mindegyik háromszöglapjára, akkor igaz az egész felületre is; hiszen az egyes lapokra vonatkozó felületmenti integrálok összege az egész felületre kiterjesztett felületmenti integrált adja, míg az egyes lapok kerületeire vett görbementi integrálok összege csak a külső határoló törtvonalak mentén vett görbementi integrálok összegét adja, mert a kerületek megfelelő befutása mellett az összes "belső" él mentén vett integrál kétszer szerepel, ellenkező előjellel és így az összegezésnél kiesik.



38. ábra

Legyen tehát F egyetlen háromszöglap és L ennek a kerülete. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy F az (x_1, x_2) -síkra kerüljön. Ha ebben a koordinátarendszerben

$$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3,$$

akkor – az F felület egyenlete $x_3 = 0$ lévén – felfelé mutató normális mellett:

$$\int_{(F)} \text{rot } \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} = \int_{(F)} \text{rot } \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_3 dx_1 dx_2 = \int_{(F)} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Ha azonban a síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-féle képletben y_1 helyébe y_2 -t és y_2 helyébe $(-y_1)$ -et írunk, akkor (az L görbe befutása pozitív körüljárásnak felel meg)

$$\int_{(F)} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_{(L)} (y_1 dx_1 + y_2 dx_2) = \oint_{(L)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{x}$$

Ezzel tehát a kérdéses háromszögre s így, előbbi megjegyzéseink szerint, Stokes tételét az általános esetre igazoltuk.

Még megjegyezzük azt, hogy Stokes tétele alapján a rotáció vektornak egy tetszőleges $\mathbf{e}$ egységvektor irányába eső komponensét egy pontban úgy lehet definiálni, hogy felvesszünk az $\mathbf{e}$ -re merőlegesen egy síklapot és ebben egy kiszemelt pontot pozitív értelemben körüljáró síma L zárt görbét, amelynek a legnagyobb átmérője is elegendően kicsiny. ΔF

jelentse az L -lel körülvevett felület darabot. Ekkor Stokes tétele szerint jó közelítésben:

$$\text{rot } \mathbf{y} \cdot \mathbf{e} \Delta F \approx \oint_{(L)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{x}$$

és ebből

$$\text{rot } \mathbf{y} \cdot \mathbf{e} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{(L)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{x}.$$

Stokes tételének ismeretében érdemes visszatérni a *vektoreloszlás egyértékű potenciálja* létezésének a problémájára.

Tekintettel arra, hogy egy áramló folyadék sebesség-vektoreloszlásának a rotációja a folyadékrészecskék örvénylő (forgó) mozgását jellemzi, az olyan vektoreloszlást melyre $\text{rot } \mathbf{y} = \mathbf{0}$, *örvénymentes vektoreloszlásnak* nevezzük.

Ha az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektoreloszlásnak van potenciálja, akkor

$$\mathbf{y} = \text{grad } u$$

és így amennyiben $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ deriválttenzora folytonos, akkor

$$\text{rot } \mathbf{y} = \text{rot } (\text{grad } u) \equiv \mathbf{0}.$$

Ha tehát a vektoreloszlásnak van potenciálja, akkor az örvénymentes. Nevezetes, hogy ez az állítás – *bizonyos megszorítással* – meg is fordítható. Tegyük fel ugyanis, hogy az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektoreloszlás örvénymentes a térnek egy bizonyos V részében. Tudjuk hogy $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ -nek V -ben van egyértékű skaláris potenciálja, ha a kérdéses térrészben bármely L zárt görbe mentén

$$\oint_{(L)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Ha mármost a kérdéses térrészben fekvő bármely zárt L görbére rá lehet feszíteni olyan F felületet, amely mentén felületmenti integrál számítható, ugyancsak a kérdéses V térrészben fekszik és a határa éppen az L görbe, akkor alkalmazhatjuk Stokes tételét:

$$\oint_{(L)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{x} = \int_{(F)} \int \text{rot } \mathbf{y} \cdot d\mathbf{f} = \int_{(F)} \int \mathbf{0} \cdot d\mathbf{f} = 0;$$

ebben az esetben tehát van a vektoreloszlásnak egyértékű skaláris potenciálja.

Előbbi okoskodásunk jogosultsága a V térrésznek azon tisztán geometriai természetű tulajdonságán múlik, hogy lehet-e benne minden zárt L görbéhez a kívánt tulajdonságú felületet találni. Minthogy a görbementi integrál tetszőleges pontossággal megközelíthető a görbébe beírt törtvonalmenti integrállal, azért itt megelégedhetünk azzal is, hogy minden zárt görbe helyett minden zárt törtvonalhoz lehessen megfelelő felületet találni. Mármost az olyan V térrészt, melynek megvan az a tulajdonsága, hogy minden benne futó zárt törtvonalhoz található olyan benne fekvő felületdarab, amelynek az adott törtvonal a határgörbéje, *egyszeresen összefüggő térrésznek* nevezzük. Ilyen pl. egy gömb belseje, vagy általánosabban minden konvex térrész. Így nevezzük az olyan térrészt, mely bármely

két pontjával együtt az azokat összekötő egyenesdarabot is tartalmazza. Ilyenkor ugyanis a $P_0P_1P_2 \dots P_nP_0$ törtvonalnak megfelelő poliéderfelületet alkotnak a térrész egy P pontjának segítségével nyert $PP_0P_1, PP_1P_2, \dots, PP_nP_0$ háromszöglapok.

Nem egyszerűen összefüggő pl. a térből egy egyenes pontjainak az elhagyása után viszsamaradó térrész. Mert hiszen az "egyenest megkerülő" törtvonalakhoz nem lehet megfelelő felületet találni, hiszen az ilyen vonalakra ráfeszített bármely felületet a térrészből elhagyott egyenes valahol átdöfi és akkor az ilyen felületből legalább a dőléspontot ki kell hagyni.

Előbbi okoskodásunk végeredményét tehát a következő tételben lehet megfogalmazni:

Egyszeresen összefüggő térrészben folytonos deriválttenzorral rendelkező vektoreloszlásnak akkor és csakis akkor van ebben a térrészben egyértékű skaláris potenciálja, ha örvénymentes, vagyis a rotációja azonosan zérus.

Ha ez a feltétel teljesül, akkor a potenciált a már ismert

$$u(\mathbf{x}) = \int_a^{\mathbf{x}} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + C$$

képlet szolgáltatja.

Ha az a térrész, amelyben $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ örvénymentes, nem egyszerűen összefüggő, akkor benne általában nem lehet $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ -hez egyértékű skaláris potenciált találni. Ha azonban ilyen esetekben a kérdéses térrésznek valamely egyszerűen összefüggő részére szorítkozunk, pl. egy pontja körül elképzelt elég kicsiny sugarú gömb belsejére, akkor abban már lehet találni a vektoreloszláshoz egyértékű skaláris potenciált.

Az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektorokat komponenseikre bontva:

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 ,$$

az örvénymentesség feltétele azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial y_3}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial y_2}{\partial x_3} , \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial y_3}{\partial x_1} , \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial y_1}{\partial x_2} .$$

Ez tehát egy egyszerűen összefüggő térrészben szükséges és elégséges feltétele annak, hogy található legyen olyan $u(x_1, x_2, x_3)$ függvény, amelyre

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = y_1 , \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = y_2 , \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = y_3 .$$

10.3.13. Görbevonallú ortogonális koordinátarendszerek

Háromváltozós (háromparaméters) vektor-skalár függvényekkel lehet leírni különböző általános görbevonallú koordinátarendszereket. Az alapgondolat a következő:

Legyen adva az u_1, u_2, u_3 független skaláris változóktól függő

$$\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$$

vektor-skalár függvény. Jelentsenek a helyettesítési értékek, vagyis az $\mathbf{x}$ vektorok a rögzített O pontból kiinduló helyvektorokat és legyen lerögzítve az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortonormált bázisrendszer. Ebben az $\mathbf{x}$ vektor felbontása:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 .$$

Az $\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$ vektor-skalár függvénnyel tehát adott a következő függvényrendszer:

$$x_1(u_1, u_2, u_3) ,$$

$$x_2(u_1, u_2, u_3) ,$$

$$x_3(u_1, u_2, u_3) .$$

Feltesszük azt, hogy ennek a függvényrendszernek létezik az inverze, vagyis ebből az egyenletrendszerből:

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3) ,$$

$$x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3) ,$$

$$x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$$

az u_1, u_2, u_3 változók egyértelműen kifejezhetők, mint x_1, x_2, x_3 függvényei. Ennek az a feltétele, hogy a

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3}$$

függvénydetermináns (Jacobi-féle determináns) 0-tól különbözzék. (Ez a determináns egyenlő a $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3}$ parciális deriváltvektorok vegyes szorzatával.)

Ha a három paraméter közül az egyiknek a helyébe konstans értékeket írunk, s közben a másik két paraméter tetszőlegesen változhat, akkor egy-egy kétparaméteres vektor-skalár függvényre jutunk, amelyek felületekkel szemléltethetők. Három lehetséges felületsereg nyerhető ily módon. Ezek egyenletei:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, c_3) ,$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, c_2, u_3) ,$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(c_1, u_2, u_3) .$$

Ha egyszerre két paraméter helyébe írunk konstans értékeket, akkor egyparaméteres vektor-skalár függvényekre és ezekkel meghatározott térgörbékre jutunk. Ezek a térgörbék az előbbi felületek közül kettő-kettőnek a metszészvonalai. E térgörbék egyenletei:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, c_2, c_3) ,$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(c_1, u_2, c_3) ,$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(c_1, c_2, u_3) .$$

Végül, ha a három paraméter mindegyike állandó ($u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3$), akkor ez az értékhármass a tér egyetlen pontját határozza meg. Mondhatjuk tehát, hogy az u_1, u_2, u_3 számhármass a tér pontjai *görbevonalú koordinátái*. Egy ponton átmenő fenti felületek a *koordinátafelületek* és ezek metszészvonalai a *koordinátavonalak*.

A tér tetszőleges x helyvektorú $P(u_1, u_2, u_3)$ pontján átmenő koordinátavonalak érintővektorait a

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3}$$

parciális deriváltvektorok adják meg. Speciális esetben ezek a vektorok a tér valamennyi pontjában lehetnek páronként egymásra merőlegesek, azaz a tér egy-egy pontján átmenő koordinátavonalak páronként merőlegesen metsződhetnek. Ebben az esetben *ortogonális görbevonalú koordinátarendszerről* beszélünk. A következőkben csak erre az esetre szorítkozunk.

Bevezetjük az $\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$ függvény parciális deriváltvektorainak abszolút értékeire a következő jelöléseket:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \right| = h_1, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \right| = h_2, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3} \right| = h_3.$$

Ezek az ún. *Lamé-féle együtthatók*.

Bevezetjük továbbá az $\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$ parciális deriváltvektorainak irányába mutató egységvektorokat:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3}.$$

Ezek a tér minden pontjához lokálisan hozzárendelnek egy-egy ortonormált bázisrendszert:

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ *lokális ortonormált bázisrendszer*.

A következőkben megvizsgáljuk azt, hogy milyen összefüggések érvényesek egy tetszőleges $\mathbf{a}$ vektornak az eredeti, lerögzített $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszerre vonatkozó koordinátái és a tér egy tetszőleges pontjához tartozó $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ lokális bázisrendszerre vonatkozó koordinátái között. A transzformációs összefüggések meghatározásának az az alapja, hogy egy vektor koordinátái ugyanúgy transzformálódnak, mint a koordinátavonalak menti lokális ívhosszdifferenciálok.

Az eredeti $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszerben, helytől függetlenül a koordinátavonalak menti ívhosszdifferenciálok azonosak a dx_1, dx_2, dx_3 koordinátadifferenciálokkal.

A tér egy tetszőleges $P(u_1, u_2, u_3)$ pontjában viszont az ehhez a ponthoz lokálisan hozzárendelt $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisrendszerben a koordinátavonalak menti ívhosszdifferenciálok:

$$d_1 s = h_1 du_1, \quad d_2 s = h_2 du_2, \quad d_3 s = h_3 du_3$$

és ezekből:

$$du_1 = \frac{1}{h_1} d_1 s, \quad du_2 = \frac{1}{h_2} d_2 s, \quad du_3 = \frac{1}{h_3} d_3 s.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a megadott $x(u_1, u_2, u_3)$ függvénnyel adott az

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3), \quad x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3), \quad x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$$

összefüggésrendszer és ebből származtatható az

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3), \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$$

inverz összefüggés-rendszer, akkor ezekből a következő összefüggések nyerhetők:

$$\begin{pmatrix} d_1 s \\ d_2 s \\ d_3 s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 du_1 \\ h_2 du_2 \\ h_3 du_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix},$$

illetve

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 s \\ d_2 s \\ d_3 s \end{pmatrix}.$$

Ezek alapján, ha egy tetszőleges a vektornak az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisrendszerben megfelel az

$$a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$$

felbontás és ugyanakkor a tér tetszőleges $P(u_1, u_2, u_3)$ pontjához kötött $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ lokális bázisrendszerben az

$$\tilde{a}_1 \mathbf{b}_1 + \tilde{a}_2 \mathbf{b}_2 + \tilde{a}_3 \mathbf{b}_3$$

felbontás, akkor az a_k ($k = 1, 2, 3$) és $\tilde{a}_k$ ($k = 1, 2, 3$) koordináták között a következő transzformációs formulák írhatók fel:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

illetve

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{pmatrix}.$$

A két transzformációs formulában szereplő kvadratikus mátrixok természetesen egymásnak inverzei.

10.3.14. A gradiens vektor kiszámítása görbevonalú ortogonális koordinátarendszerben

Legyen adva egy $\phi(\mathbf{x})$ skalár-vektor függvény az $\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$ függvénnyel bevezetett görbevonalú ortogonális koordinátarendszerben, a vele ekvivalens

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3))$$

közvetett függvénnyel. A $\text{grad } \phi$ vektor komponensekre bontott alakja a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ lokális bázisrendszerben:

$$\text{grad } \phi = \phi_1 \mathbf{b}_1 + \phi_2 \mathbf{b}_2 + \phi_3 \mathbf{b}_3 ,$$

ahol ϕ -nek $\mathbf{b}_i$ irányban az iránymenti deriváltja

$$\phi_i = \mathbf{b}_i \cdot \text{grad } \phi \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Tehát

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \lim_{d_1 s \rightarrow 0} \frac{\phi(u_1 + du_1, u_2, u_3) - \phi(u_1, u_2, u_3)}{d_1 s} = \\ &= \lim_{du_1 \rightarrow 0} \frac{\phi(u_1 + du_1, u_2, u_3) - \phi(u_1, u_2, u_3)}{h_1 du_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\phi_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} , \quad \phi_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} ,$$

tehát végeredményben

$$\text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{b}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{b}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{b}_3 .$$

10.3.15. A divergencia és a rotáció kiszámítása görbevonalú ortogonális koordinátarendszerben.

Felhasználjuk a divergencia koordinátamentes definícióját:

$$\text{div } \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{(F)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} ,$$

ahol F a P pontot tartalmazó (és arra összehúzó) ΔV térrészt határoló felület, kifelé mutató normálissal.

Válasszuk ΔV -nek azt a $P(u_1, u_2, u_3)$ ponton átmenő koordinátavonalakkal, mint "élekkel" meghatározott "hasábot", amelynek "élhosszai" $\mathbf{b}_1$ irányban $d_1 s = h_1 du$, $\mathbf{b}_2$ irányban $d_2 s = h_2 du_2$ és $\mathbf{b}_3$ irányban $d_3 s = h_3 du_3$. Két-két szemközti lapon az $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ vektormezőnek a lapra merőleges kifelé irányított normálisú komponenseivel számított felületi integráljai jó közelítéssel:

$$\begin{aligned} &-a_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad \text{és} \quad a_1 h_2 h_3 du_2 du_3 + \frac{\partial(a_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} du_1 du_2 du_3 ; \\ &-a_2 h_1 h_3 du_1 du_3 \quad \text{és} \quad a_2 h_1 h_3 du_1 du_3 + \frac{\partial(a_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} du_1 du_2 du_3 ; \\ &-a_3 h_1 h_2 du_1 du_2 \quad \text{és} \quad a_3 h_1 h_2 du_1 du_2 + \frac{\partial(a_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} du_1 du_2 du_3 . \end{aligned}$$

Ezek összege jó közelítéssel:

$$\int_{(F)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} \approx \left(\frac{\partial(a_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(a_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial(a_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right) du_1 du_2 du_3.$$

Mivel pedig

$$\Delta V \approx d_1 s d_2 s d_3 s = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3,$$

azért ($\Delta V \rightarrow 0$ határátmenet után)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(a_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(a_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial(a_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right)$$

A rotáció egyes komponensei a Stokes-tétel alapján határozhatók meg:

$$\mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{(L)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}.$$

Tekintsük csak a $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ vektornak $\mathbf{b}_1$ irányú összetevőjét. Válasszuk a $\mathbf{b}_1$ -re merőleges koordinátafelületen a $d_2 s$ és $d_3 s$ "élekkel" meghatározott "négyszöget". Ennek a kerülete mentén a vonalintegrál jó közelítéssel:

$$\begin{aligned} a_2 h_2 du_2 + \left(a_3 h_3 du_3 + \frac{\partial(a_3 h_3)}{\partial u_2} du_2 du_3 \right) + \left(-a_2 h_2 du_2 - \frac{\partial(a_2 h_2)}{\partial u_3} du_2 du_3 \right) + \\ + (-a_3 h_3 du_3) = \\ = \left(\frac{\partial(a_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(a_2 h_2)}{\partial u_3} \right) du_2 du_3 \end{aligned}$$

és ezt $\Delta F \approx d_2 s d_3 s = h_2 h_3 du_2 du_3$ -mal osztva, majd $\Delta F \rightarrow 0$ határátmenetet végrehajtva ez adódik:

$$\mathbf{b}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial(a_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(a_2 h_2)}{\partial u_3} \right).$$

Teljesen hasonlóan:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial(a_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(a_3 h_3)}{\partial u_1} \right), \\ \mathbf{b}_3 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(a_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(a_1 h_1)}{\partial u_2} \right). \end{aligned}$$

Végeredményben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{b}_1 & h_2 \mathbf{b}_2 & h_3 \mathbf{b}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}$$

Még megjegyezzük azt, hogy a $\phi(\mathbf{x})$ skaláreloszlás Laplace-féle kifejezése:

$$\begin{aligned} \Delta \phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right) \end{aligned}$$