BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA PÉLDATÁR
I. kötet
FELADATOK

Szerkesztő:
Csató Tamásné

Műegyetemi Kiadó, 2004.

(Kilencedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **050667**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 26,6 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 099/04

TARTALOMJEGYZÉK

1. Algebra 5
   11. Egyenlőtlenségek 5
   12. Vektoralgebra 7
   13. Analitikus geometria 9
   14. Determinánsok 23
   15. Mátrixok 33
   16. Lineáris egyenletrendszerek 45
   17. n dimenziós lineáris terek és lineáris transzformációk 57

2. Halmazelmélet. Egyváltozós valós függvények 75
   21. Halmazelméleti alapfogalmak 75
   22. Az egyváltozós függvény fogalma, ábrázolása 78
   23. Az egyváltozós függvény határértéke és folytonossága 85
   24. Az egyváltozós függvény differenciálszámitása 94
   25. A differenciálszámitás alkalmazásai 98
   26. Határozatlan és határozott integrál 107
   27. Határozatlan és határozott integrál 113
   28. Az integrálszámitás alkalmazásai és közelitő módszerei . . . 115
   29. Improprius integrálok 123

3. Többváltozós valós függvények 127
   31. Síkbeli és térbeli ponthalmazok, tartományok 127
   32. Többváltozós függvény fogalma, ábrázolása, határértéke, folytonossága 128
   33. Többváltozós függvény differenciálszámitása 131
   34. Többszörös integrálok 141

4. Sorozatok és sorok 151
   41. Numerikus sorozatok 151
   42. Numerikus sorok 155
   43. Függvénysorozatok, függvénysorok 161
   44. Hatványsorok. Taylor-sorok 164
   45. Fourier-sorok 167

5. Differenciálegyenletek 170
   51. Elsőrendü differenciálegyenletek 170

52. Elsőrendű differenciálegyenletek 174
53. Másod- és magasabbrendű differenciálegyenletek 178
54. Másod- és magasabbrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek, vegyes feladatok 180
55. Differenciálegyenletrendszerek és parciális differenciálegyenletek 183
56. Differenciálegyenletek megoldása közelítő módszerekkel . 189

6. Vektoranalizis 191
61. Egyparaméteres vektor-skalár függvények 191
62. Kétparaméteres vektor-skalár függvények 194
63. Skalár-vektor függvények 199
64. A vektor-vektor függvény és integráljai. Gradiens, divergencia, rotáció 202
65. Integrál-tételek és potenciál 209
66. Görbevonalu koordinátarendszerek 215

7. Komplex függvénytan 219
71. Komplex algebra 219
72. A komplex változós függvény fogalma, határértéke, folytonossága, differenciálhatósága, regularitása 224
73. Leképezések 227
74. Komplex változós integrál 233
75. Komplex tagu sorozatok és sorok 237
76. Komplex változós függvények szinguláris helyeinek osztályozása. Reziduum 242

8. Valószinüségszámitás 249
81. Kombinatorika. Boole-algebra 249
82. Klasszikus valószinüségszámitás 254
83. Valószinüségi változó és eloszlásai 259

9. Számitógépek programozása 263
91. A programozás alapfogalmai 263
92. Direkt programok (Ural 2. gépre) 276
93. Algoritmusok 282
94. Programok Elliot autókódban 293
95. Algol 60 295

1. ALGEBRA

11. EGYENLŐTLENSÉGEK

Oldjuk meg a következő algebrai egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldást a számegyenesen.

1101. $5x + 3 \leqq 2 - 4x$

1102. $\frac{x - 5}{2} - \frac{5}{6} \leqq 1 - \frac{2 - 5x}{3}$

1103. $4 - 3\left(\frac{2 - 5x}{4} - 2\right) < x$

1104. $\frac{x - a}{3} + 4 > 1 - a$

1105. $0 < 4 - 7x < 1$

1106. $\frac{5x - 1}{4} \leqq x + 1 < -2 + 2x$

1107. $(x - 4)(x - 6) < 0$

1108. $(3x + 6)(5 - 3x) \leqq 0$

1109. $(2x - 3)(4x - 7) > 0$

1110. $-3(x + 1)(x + 2) > 0$

1111. $x^2 - 5x + 6 > 0$

1112. $(5x - 1)(3x - 1) < (6x + 1)(3x - 1)$

1113. $a^2x^2 - 2x - 5 \leqq 0$

1114. $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

1115. $(x + 1)(x + 2)(x + 3) > 0$

1116. $(x - 3)(x^2 - 4x - 12) > 0$

1117. $(5x + 1)(-x^2 + 9) < 0$

1118. $(x - 2)^2 (x^2 - 5x - 6) < 0$

1119. $-(3x - 2)^{2n} (x^3 - 4x^2 - 21x) \geqq 0$ $(n \geqq 0$ egész$)$

1120. $1 < x^2 < 4$

1121. $4 < (2x + 3)^2 < 9$

1122. $\frac{5}{4x+3} < 0$

1123. $\frac{5}{4x - 8} < 2$

1124. $\frac{4x - 1}{4x + 1} < -1$

1125. $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x + 3} < x - 2$

1126. $-3 < \frac{5}{4 - x} < -1$

1127. $-1 < \frac{x - 1}{3 - 2x} < 2$

1128 $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x - 7} > 0$

Oldjuk meg a következő exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségeket

1129 $\frac{1}{3^x} \geqq 9$

1130. $3^x > 4^x$

1131. $2^{x+1} - 5 \cdot 2^{x-2} < 3$

1132. $4^{x+1} + 4^{-x+2} < 65$

1133. $(3^x + 2)(5 - 2^x) < 0$

1134. $0 < 10 - 5^x < 9$

1135. $0 < \frac{2^x}{1 - 2^x} < 1$

1136. $\lg(x+1) > 1$

1137. ${}^{2}\log(3x-1) \leqq -1$

1138. ${}^{5}\log\frac{4x-1}{3-2x} > 0$

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket

1139. $\sin x > \frac{1}{2}$

1140. $\cos x < -\frac{1}{2}$

1141. $\operatorname{tg} x \geqq 1$

1142. $\sin x . \operatorname{tg} x > \frac{3}{2}$

1143. $0 < \sin 2x < 1$

1144. $-1 < \cos\frac{x}{3} \leqq 0$

Oldjuk meg a következő vegyes feladatokat

1145. $|2x+3| < 2$

1146. $|2 - x^2| > 3$

1147. $|(2x-6)(3x-3)| < 6$

1148. $|x+1| + |4-x| < 5$

1149. $x + |x| < 4$

1150. $x - |2x-3| < 0$

1151. $\sin|2x-4| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

1152. $\left|\frac{5^x}{5-5^x}\right| < 5$

1153. $-3 < \lg\left|\frac{x}{x+1}\right| < -2$

1154. $\frac{1}{2} < |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

12. VEKTORALGEBRA

I. Oldjuk meg a következő feladatokat anélkül, hogy a bennük szerepelő vektorokat koordinátákra bontanánk.

1201. Határozzuk meg szükséges és elégséges feltételét annak, hogy az α és β számok minden értékére fennálljon:

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} \perp \beta \bar{a} - \alpha \bar{b} .$$

1202. Mi jellemzi azokat a $\bar{b}$ vektorokat, melyeknek $\bar{a}$-ra való vetülete egyenlő $\bar{a}$-nak $\bar{b}$-re való vetületével?

1203.* Igazoljuk, hogy

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}| \text{ (geometriailag).}$$

1204. Bizonyítsuk be a háromszögekre vonatkozó szinusz-tételt.

1205. Bizonyítsuk be a háromszögekre vonatkozó koszinusz-tételt.

1206. Igazoljuk az

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2$$

azonosságot.

1207. Igazoljuk, hogy

$$(\bar{a}+\bar{b})^2 + (\bar{a}-\bar{b})^2 = 2\bar{a}^2 + 2\bar{b}^2 .$$

1208. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést:

$$|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}| \leq |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}| .$$

Milyen esetben érvényes az egyenlőség?

1209. Mutassuk ki, hogy ha

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d} \quad \text{és}$$

$$\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d}, \quad \text{akkor}$$

$$\bar{a} - \bar{d} \parallel \bar{b} - \bar{c} .$$

1210. Igazoljuk, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást.

1211.* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög sulyvonalai egy pontban metszik egymást és ez a pont (sulypont) mindegyik sulyvonalat 2:1 arányban osztja.

1212. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges háromszög sulyvonalaival, mint oldalakkal háromszög szerkeszthető.

1213. Igazoljuk, hogy a háromszög sulyvonalainak négyzetösszege ugy arány-lik az oldalak négyzetösszegéhez, mint 3:4.

1214. Fejezzük ki a háromszög területét a csucsaiba mutató helyvektorokkal.

1215. Mutassuk ki, hogy bármely háromszögben

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}$$

ahol t a háromszög területének, a, b, c a háromszög oldalainak, α, β, γ a megfelelő szembenfekvő szögeknek mérőszáma.

1216. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a tetraéder magasságai egy ponton menjenek át?

1217. Irjuk fel a kör egyenletét, ha ismerjük egyik átmérője két végpontját. $[A(\bar{r}_1)\,;\ B(\bar{r}_2)]$.

1218. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(\bar{r}_1)$ ponton és egyenlő távol van a $B(\bar{r}_2)$ és $C(\bar{r}_3)$ pontoktól.

1219. Adva van két pont: $A(\bar{r}_1)$ és $B(\bar{r}_2)$. Keressük meg azon $P(\bar{r})$ pontok mértani helyét, amelyekre nézve az $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ skalárszorzat értéke c (konstans).

13. ANALITIKUS GEOMETRIA

1301. Számitsuk ki a $P_1(2, 0, 3)$ pontnak a $P_2(-5, 1, 7)$ ponttól vett távolságát.

1302. Határozzuk meg azt a pontot, amely a $P_1(2, 0, 3)$, és $P_2(-5, 1, 7)$ pontokat összekötő egyenesszakaszt 7:2 arányban osztja.

1303. Határozzuk meg a $P_1(2, 0, 3)$ pontnak a $P_2(-5, 1, 7)$ pontra vett tükörképét.

1304. $P_1(1, 1)$; $P_2(2, 2)$; $P_3(3, -1)$ egy paralelogramma három egymásután következő csucsa. Keressük meg a negyedik csucspont koordinátáit.

1305.

$$\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$$

$$\bar{b} = \bar{5i} - \bar{j} + z\bar{k}$$

Határozzuk meg z értékét ugy, hogy $\bar{a}$ és $\bar{b}$ merőlegesek legyenek egymásra.

1306. Határozzuk meg az

$$\bar{a} = \bar{i} + \bar{2j} + \bar{k} \quad \text{és}$$

$$\bar{b} = \bar{5i} - \bar{3j} + \bar{4k}$$

vektorok bezárta szöget, továbbá $\bar{a}$ vetületét $\bar{b}$-re.

1307. Adottak A(3, 5); B (6, -2) pontok. Számitsuk ki az $\overrightarrow{AB}$ vektor vetületét a koordinátatengelynek az első negyedében fekvő szögfelezőjére.

1308. Adott négy pont: A (1, -2, 3); B (4, -4, 3); C(2, 4, 3) és D (8, 6, 6). Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$ vektornak a $\overrightarrow{CD}$ irányába eső vetületét.

1309. Határozzuk meg az $\bar{a} = 5\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$ vektor irányába mutató egységvektort és az $\bar{a}$ vektor irányszögeit.

1310. Irjuk fel az

$$\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 8\,\bar{k} \quad \text{és}$$
$$\bar{b} = \bar{i} - 9\bar{j} + 3\bar{k}$$

vektorok egymásra eső vetületét.

1311. Mikor egyenlő két vektornak egymásra eső vetülete?

1312. Bontsuk fel az

$$\bar{a} = \bar{j} + 6\bar{k} \quad \text{vektort}$$
$$\bar{c} = 3\bar{i} + 4\bar{k} \quad \text{irányu}$$

és $\bar{c}$-re merőleges komponensekre.

1313.* Bontsuk fel a

$$\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k} \quad \text{vektort.}$$
$$\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k},$$
$$\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k},$$
$$\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$$

vektorok irányába eső összetevők összegére.

1314. Bontsuk fel a

$$\bar{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k} \quad \text{vektort}$$

$$\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k},$$
$$\bar{b} = -2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k},$$
$$\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{k} \quad \text{vektorok}$$

irányába eső összetevők összegére.

1315. Az alábbi vektor-párok közül melyik lehet rombusznak, vagy téglalapnak két szomszédos oldalát megadó vektora

A: $\bar{a}\,[3,\ 5,\ -4]$, $\bar{b}\,[2,\ -10,\ -11]$

B: $\bar{c}\,[1,\ -10,\ -7]$, $\bar{d}\,[2,\ 5,\ -11]$

1316. Irjunk fel egy olyan 4 egységnyi hosszuságu vektort, amely párhuzamos az $\bar{a} = 3\bar{j} + 5\bar{k}$ vektorral.

1317. Határozzuk meg az

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} \quad \text{és}$$
$$\bar{b} = 4\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$$

vektorok által kifeszitett paralelogramma területét.

1318. Számitsuk ki a

$$\bar{v}_1 = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 12\,\bar{k},$$
$$\bar{v}_2 = 10\bar{i} + 5\bar{j} - 5\bar{k},$$
$$\bar{v}_3 = -9\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}$$

vektorok által kifeszitett paralelepipedon köbtartalmát.

1319. Számitsuk ki az

A (5, 4, 0)

B (0, 5, -1)

C (2, 0, -2)

csucspontu háromszög területét.

1320. Egy háromszög csucspontjai:

A (1, 5, 6)
B (-2, -1, 0)
C (2, 2, 1).

Számitsuk ki az AC oldalhoz tartozó magasságot.

1321. Mekkora a háromszög kerülete, ha két csucspontja: P_1 (2, 3, 5); P_2 (4, -3, 0), sulypontja pedig: S (3, 2, 1) ?

1322. A koordinátarendszer kezdőpontját kössük össze a P_1 (10, -5, 10); P_2(-11, -2, 10); P_3 (-2, -14, -5) pontokkal. Bizonyitsuk be, hogy ezek egy kocka élei, és számitsuk ki a kocka térfogatát.

1323. Számitsuk ki a tetraéder térfogatát, ha csucspontjaink koordinátái:

A (3, -1, -1)
B (5, -2, 3)
C (4, 0, -2)
D (5, 0, 1).

1324. Egy sikban van-e a következő négy pont?

P_1 (2, 0, 0)
P_2 (3, -5, -5)
P_3 (4, 4, 3)
P_4 (7, 3, 1)

1325. Egy tetraéder csucspontjai: P_1 (5, 4, -2); P_2 (-1, 5, 1); P_3 (2, 2, 4); P_4 (3, 1, -2).

a) Mennyi a tetraéder $\overrightarrow{P_1P_2}$ élének hossza?

b) Mennyi a tetraéder térfogata?

c) Mennyi a $P_1P_2P_3$ háromszög területe?

d) Milyen irányu a P_2-ből huzott magasság?

1326. Milyen szög alatt hajlik az

$$x = 2t - 5$$
$$y = -t + 1$$
$$z = 3t - 6$$

egyenes a

$$2x + y - 3z + 5 = 0$$

sikhoz?

1327. Mi a hajlásszöge a következő egyeneseknek?

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2y}{5} = -\frac{z+1}{3} \quad \text{és}$$

$$x = t$$
$$y = 2t - 3$$
$$z = -5$$

1328. Mekkora távolságra van a $P(2, 4, -3)$ pont az

$$\frac{x-1}{5} = \frac{2-y}{3} = -z \quad \text{egyenestől?}$$

1329. Mi annak az egyenesnek az egyenletrendszere, amely átmegy a $P_0(2, -3, 5)$ ponton és párhuzamos a $\bar{v}(4, 1, -2)$ vektorral?

1330. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a $P_0(5, 1, -8)$ ponton megy át és párhuzamos a z tengellyel.

1331. Állapitsuk meg a

$$\frac{2x+3}{5} = -y = \frac{1-4z}{7}$$

egyenes egy irányvektorát, valamint egy pontjának koordinátáit.

1332. Határozzuk meg a $P_0(5, -2)$ pontra illeszkedő és a

$$2x - 3y = 4$$

egyenesre merőleges [XY] sikban fekvő egyenes egyenletét.

1333. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P_0(5, 7, 1)$ pontra illeszkedik és párhuzamos a következő két sikkal?

$$2x + y - z + 7 = 0$$
$$x - 8y + 2z - 3 = 0.$$

1334. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P_0(2, 4, -3)$ pontra illeszkedik és merőleges az alábbi pontokkal megadott sikra?

$$P_1(4, 7, -2)$$
$$P_2(1, 0, 9)$$
$$P_3(0, 0, 1).$$

1335. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely az origón megy át; és az [xy] koordináta-sikhoz 45°, az [yz] koordináta-sikhoz 30° szög alatt hajlik.

1336.* Határozzuk meg a következő sikok metszésvonalának egyenletrendszerét:

$$2x + y - 5z + 3 = 0 \text{ és}$$

$$x - y + 2z = 0.$$

1337. Mik az egyenletrendszerei azoknak az egyeneseknek, amelyek benne vannak a

$$-3x + 2y - 5z + 3 = 0 \quad \text{sikban}$$

és merőlegesek az

$$\frac{1 - 2x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{5z}{4} \quad \text{egyenesre?}$$

1338. Egy paralelepipedon egyik csucsa $P_0(4, 3, 1)$, az ebből kiinduló három élvektorai:

$$\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$$

$$\bar{c} = -2\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$$

Irjuk fel a testátlók egyenletrendszereit.

1339.* Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P_1(-1, 0, 2)$ pontra illeszkedik, az

$$\frac{x - 10}{3} = -\frac{y + 1}{6} = \frac{z - 7}{2}$$

egyenesre merőleges és attól 7 egység távolságra halad?

1340. Mi az egyenletrendszere az

$$x = 4 + t$$

$$y = -1 - t$$

$$z = 10 + 6t$$

egyenes vetületének a

$$3(x - 2) - 2(y - 1) + 4(z + 2) = 0 \quad \text{sikon?}$$

1341. Igazoljuk, hogy az

$$x - 3 = \frac{y - 8}{3} = \frac{z - 3}{4} \quad \text{és}$$

$$4 - x = \frac{9 - y}{2} = \frac{9 - z}{5}$$

egyenesek egy sikban vannak és határozzuk meg metszéspontjuk koordinátáit.

1342. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely benne fekszik

az $$x = \frac{y + 13}{5} = \frac{5 - z}{3} \quad \text{és}$$

az $$\frac{1 - x}{5} = \frac{y + 8}{3} = z - 2$$

egyenesek sikjában, átmegy metszéspontjukon és felezi hajlásszögüket.

1343. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely az origóra illeszkedik és a következő egyeneseket metszi.

$$x - 4 = -\frac{y + 7}{3} = \frac{z - 2}{2} \quad \text{és}$$

$$\frac{5 - x}{3} = \frac{9 - y}{5} = z + 9.$$

1344. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a

$$2x + 4y - z + 5 = 0$$

sikra merőleges és a következő egyeneseket metszi.

$$\frac{x}{2} = -y = z$$

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z}{3}.$$

1345. Határozzuk meg λ értékét ugy, hogy a következő egyenesek messék egymást:

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{1 - 2y}{3} = -z$$

$$\frac{x+3}{\lambda} = \frac{2y-3}{4} = 1+z\,.$$

1346.* Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges és illeszkedik a következő egyenesekre (normáltranszverzális):

$$\begin{aligned} x &= 3+2t \\ y &= -2t \\ z &= -2-t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -1-3t \\ y &= 2+t \\ z &= 4+t \end{aligned}$$

és határozzuk meg a normáltranszverzális azon szakaszának hosszát, amely az adott egyenesek közé esik.

1347. Egy háromszög csucspontjai: $P_1(1, 1, 1)$; $P_2(5, 1, 4)$; $P_3(3, 3, 2)$. Irjuk fel a P_1 csucsnál levő szög felező egyenesének egyenletrendszerét.

1348. Egy háromszög csucspontjai: $P_1(5, 1, -2)$; $P_2(1, 0, 3)$; $P_3(3, 5, -1)$. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges a háromszög sikjára és átmegy a háromszög sulypontján.

1349. Mi az egyenlete annak a siknak, amely a koordinátarendszer kezdőpontját tartalmazza és normálvektora: $\bar{n}[1, 2, 4]$?

1350. Mi az egyenlete annak a siknak, amelynek egy pontja $P_0(-2, 3, 7)$ és amely merőleges az $x = y = z$ egyenesre?

1351. Mi az egyenlete annak a siknak, amely a $P_0(5, -\frac{3}{2}, 0)$ pontra illeszkedik és párhuzamos a

$$3x - y + \frac{5}{3}z - 1 = 0 \qquad \text{sikkal?}$$

1352. Mi az egyenlete az $[y, z]$ koordinátasiknak?

1353. Határozzuk meg a következő sík metszéspontját:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$$

1354. Irjuk fel a $P_1(2, 3, 1)$; $P_2(-4, 2, -5)$; $P_3(0, 1, 0)$ pontokra illeszkedő sik egyenletét.

1355. Mi az egyenlete a $P_0(0, 2, -5)$ pontra illeszkedő és az

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{1-z}{4} \quad \text{és}$$

$$\frac{2x-1}{3} = 2 - y = \frac{z}{2}$$

egyenesekkel párhuzamos siknak?

1356.* Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely illeszkedik a

$$2x + y - 2z + 4 = 0 \quad \text{és}$$
$$2x - 3y + 6z - 5 = 0$$

sikok metszésvonalára és felezi e sikok hajlásszögét.

1357. Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely a $P_1(2, 7, -3)$ pontra és az

$$x = 2t - 1$$
$$y = t + 4$$
$$z = -3t + 2$$

egyenesre illeszkedik.

1358. Mi az egyenlete annak a siknak, amely a $P_0(2, 1, 6)$ pontra illeszkedik és merőleges a

$$2x + 5y - 3z + 8 = 0$$
$$x - 2y + z - 5 = 0$$

sikokra?

1359. Határozzuk meg a $P_0(2, -1, -2)$ pontra illeszkedő és az $\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{5z-1}{6}$ egyenesre merőleges sik egyenletét.

1360. Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely az

$$x = 2 + 3t$$
$$y = -3 + t$$

$$z = 5 - 2t$$

egyenesre merőleges és a döféspont koordinátái: D (-1, -4, 7).

1361. Mi az egyenlete annak a siknak, amely merőleges az $5(x - 1) + 4y - (z + 1) = 0$ sikra és tartalmazza a következő sikok metszésvonalát:

$$2x - y + z + 3 = 0$$

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

1362. Határozzuk meg azoknak a sikoknak az egyenletét, amelyek az

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{3 - y}{5} = \frac{z + 2}{5}$$

egyenest a koordinátasikokra vetitik.

1363. Mi az egyenlete annak a siknak, amely a P_1 (5, 4, 2) és P_2(1, 3, 4) pontokra illeszkedik és egyenlő hosszu darabokat vág le az Y és Z koordinátatengelyek pozitiv feléből.

1364. Egy tetraéder csucspontjai:

A (1, -2, 0)

B (2, 3, 1)

C (-1, 2, 2)

D (3, 1, 4).

Irjuk fel:

a) BCD sik egyenletét,

b) BC élen átmenő, AD éllel párhuzamos sik egyenletét,

c) az A csucspontra illeszkedő és BCD sikkal párhuzamos sik egyenletét.

1365. Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely az X, Y, Z koordinátatengelyeket rendre -4, 5, ill. -7-ben metszi.

1366. Mi az egyenlete annak a siknak, amelyben a következő egyenesek benne vannak?

$$x = 9 + 2t \qquad x = 1 - 5t$$

$$y = 14 + 3t \qquad y = 2 + 4t$$

$$z = -5 - t \qquad z = -1 - 2t.$$

1367. Adva van két egyenes

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} = -\frac{z}{3}$$

Irjuk fel azoknak a sikoknak az egyenletét, amelyek egy-egy egyenesre illeszkednek és párhuzamosak egymással.

1368. Mi az egyenlete annak a siknak, amely az X tengelyre illeszkedik és amelyből az

$$x + y = 1$$

$$x - z = 1$$

$$2x + y - z = 1$$

sikok egyenlő szárú háromszöget metszenek ki? Hány ilyen sik van?

1369. Az $x + 2y - z + \lambda = 0$ sik egyenletében határozzuk meg λ értékét ugy hogy a sik tartalmazza a

$$2x - y + z = 0$$

$$26x + 2y + 4z + 3 = 0$$

sikok metszésvonalát.

1370. Igazoljuk, hogy az

$$x - 1 = 4 - y = \frac{z-3}{2} \quad \text{és az}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{7-y}{3} = 4 - z$$

egyenesek egy sikban vannak és irjuk fel a sik egyenletét.

1371. Irjuk fel a $P_1(1, -3, 0)$ és $P_2(3, 7, -4)$ pontokat összekötő egyenes-szakaszt merőlegesen felező sik egyenletét.

1372. Irjuk fel az

$$x = 1,$$

$$y = 3 + 3t,$$

$$z = 4 + t,$$

egyenesre illeszkedő és a $P_1(2, 1, 3)$ ponttól egységnyi távolságra haladó sikok egyenleteit.

1373. Határozzuk meg az

$$x + y + z - 7 = 0,$$

$$2x - 3y - z + 3 = 0,$$

$$x - y + z - 5 = 0$$

sikok metszéspontjának a $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(4, 5, 6)$, $P_3(7, 8, 0)$ pontokon átfektetett siktól vett távolságát.

1374. Határozzuk meg a $P_1(1, 5, -3)$ és $P_2(2, 3, -5)$ pontokat összekötő egyenesdarabnak az

$$2x + 3y - 6z = 0$$

sikra való merőleges vetületét.

1375. Határozzuk meg annak a tetraédernek a térfogatát, amelynek egyik csucspontja $P_1(2, 1, 2)$, a többiek pedig a P_1-ből a következő sikokra bocsátott merőlegesen döféspontjai:

$$x - 3y + z - 2 = 0,$$

$$x + y - 3z + 4 = 0,$$

$$x - y + 2z - 6 = 0.$$

1376. Határozzuk meg a következő párhuzamos sikok közti távolságot:

$$2x + y - 3z + 6 = 0$$

$$4x + 2y - 6z - 5 = 0.$$

1377.* Egy háromszög csucspontjainak koordinátái:

$$A(1, 7, 2);\ B(3, 8, 0);\ C(-2, -1, 5).$$

Mik a koordinátái:
a) a magassági pontnak,
b) a körülírható kör középpontjának,
c) a beírható kör középpontjának?

1378. Egy háromszög csucspontjainak koordinátái:

$$A(1, 7, 0);\ B(2, -5, 3);\ C(6, 2, -9).$$

Mi a mértani helye az AB alapon álló, az adott háromszög sikjában fekvő $\underline{k}$-szor akkora területü háromszögek harmadik csucsainak?

1379. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyek egyenlő távolságra vannak a következő három ponttól:

$P_1\,(2,\ 2,\ 1)$

$P_2\,(8,\ 6,\ 2)$

$P_3\,(6,\ 3,\ 5)$?

1380. Bontsuk fel a $\bar{v}[10,\ 6,\ -8]$ vektort a következő egyenesekkel párhuzamos összetevőkre:

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{1-2z}{3}\ ,$$

$$2x = \frac{1-y}{5} = \frac{1+z}{2}\ ,$$

$$\frac{2x+3}{-3} = \frac{y+5}{4} = -z\ .$$

1381. Határozzuk meg λ értékét ugy, hogy az

$$\bar{r} = \bar{r}_o + \bar{v}_o t \quad \text{és} \quad \bar{r}' = \bar{r}_1 + \bar{v}_1 t$$

egyenesek messék egymást:

Az adatok: $\bar{r}_o[1,\ 2,\ 3]$, $\bar{r}_1[4,\ 1,\ -3]$,

$\bar{v}_o[3,\ -1, \lambda]$, $\bar{v}_1[2,\ 0,\ -1]$.

1382. Számitsuk ki a következő egyenesek egymástól való távolságát:

$$\frac{2x-1}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{5z-6}{4} \quad \text{és}$$

$$x = y = z.$$

1383. Adva van három sik:

$$2x + 4y + 3z = 1\ ,$$

$$x + 7y + 4z = 3\ ,$$

$$3x - 5y - z = 2.$$

Van-e olyan vektor, amely mindhárom sikkal párhuzamos és ha igen, melyik az?

1384. Határozzuk meg az X tengelynek azt a pontját, amely egyenlő távol van a következő sikoktól:

$$3\,(x-1) + 2(y+2) - z + 6 = 0,$$

$$-x + 2y + 3z - 1 = 0.$$

1385. Melyik az $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} = z + 1$ egyenesnek az a pontja, mely egyenlő távolságra van a következő sikoktól?

$$4x + 2y - z + 6 = 0,$$
$$2x - 4y + z - 5 = 0.$$

1386. Mekkora az a távolság, melynek vetülete az

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -\frac{z}{6}$ egyenesre 2 egység, az

$x = \frac{y-1}{4} = \frac{1-z}{8}$ egyenesre 3 egység, az

$\frac{1-2x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z+1}{4}$ egyenesre 1 egység?

1387. Tükrözzük a P_1 (2, 4, -3) pontot a

a) Q (1, 3, 7) pontra, az
b) $x = 2y = 2z$ egyenesre és az
c) $x - 2y + 5z = 0$ sikra
és állapitsuk meg a négy pont által meghatározott tetraéder térfogatát.

1388. Adva van a $2x - 3y - 4z + 12 = 0$ sikban négy pont:

P_1(0, 0 3); P_2 (0, 4, 0); P_3(-6, 0, 0); P_4(-2, 0, 2).

Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a P_4 ponton megy át és felezi a $P_1P_2P_3$ háromszög területét.

1389.* Egy háromszög csucspontjai:

P_1(1, 1, 1); P_2(2, 2, 2); P_3(-1, 2, 0).

Határozzuk meg annak a siknak az egyenletét, mely az X tengelyre illeszkedik és amelyre nézve a háromszög vetületének területe az eredetinek fele.

1390. Egy tetraéder csucsponjai: P_1(1, 1, 1); P_2(-1, 1, 1); P_3(1, -1, 1); P_4(1, 1, -1). Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely a $P_2P_3P_4$ sikkal párhuzamos és a tetraédert egyenlő térfogatu részekre osztja.

14. DETERMINÁNSOK

Az alábbi feladatok közül többen előfordul a j betű. Jelentése mindig $\sqrt{-1}$.

Számítsuk ki a következő determinánsok értékét:

1401. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

1402. $\begin{vmatrix} j & j & j \\ j & 2+2j & j \\ j & j & 1+3j \end{vmatrix}$

1403. $\begin{vmatrix} 1 & 1+j & 1+2j \\ -1 & -1+j & -1+2j \\ 3 & 3+j & 3+2j \end{vmatrix}$

1404. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3+j & 4+3j \\ 1 & 3 & 5+j & 7+3j \\ 1 & 4 & 7+j & 10+3j \\ 1 & 1 & 1+j & 1+3j \end{vmatrix}$

1405. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & 0 \end{vmatrix}$

1406. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & j & 0 \end{vmatrix}$

1407. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-j & j & 1+j \\ -2j & -1 & 2j \end{vmatrix}$

1408. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

1409. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

1410. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

1411. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

1412. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

1413. $\begin{vmatrix} -j & 2j & 2j \\ 2j & -j & 2j \\ 2j & 2j & -j \end{vmatrix}$

Igazoljuk a következő azonosságokat:

1414. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2\,(x^3+y^3)$

1415. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$

Számitsuk ki a következő determináns értékét:

1416. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+j & 1 \\ 1 & 1 & 1+3j \end{vmatrix}$

Igazoljuk a következő azonosságokat:

1417. $\begin{vmatrix} b & a & a & a & a & a \\ a & b & a & a & a & a \\ a & a & b & a & a & a \\ a & a & a & b & a & a \\ a & a & a & a & b & a \\ a & a & a & a & a & b \end{vmatrix} = (b+5a)\,(b-a)^5$

1418. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = 1 + ab + ad + cd + abcd$$

1419. $$\begin{vmatrix} a+d & 3a & b+2a & b+d \\ 2b & b+d & c-b & c-d \\ a+c & c-2d & d & a+3d \\ b-d & c-d & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

1420 $$\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 \\ 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 \end{vmatrix} = 0$$

1421. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = -3(4-x^2)(1-x^2)$$

1422. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = bcd + acd + abd + abc + abcd$$

1423. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = abc - a - c$$

1424. $$\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

1425. $$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (a+c)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\,abc\,(a+b+c)^3$$

1426. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y).$

(Az itt szereplő determinánst az x, y, z elemek által generált Vandermonde determinánsnak nevezzük. Jelölés: $V_3(x, y, z)$.)

1427. $\begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \\ \sin 5a & \sin 5b & \sin 5c \end{vmatrix} = 64 \sin a \sin b \sin c\,(\sin^2 a - \sin^2 b)(\sin^2 a - \sin^2 c)(\sin^2 b - \sin^2 c)$

1428. $\begin{vmatrix} \sin^3 a & \sin^2 a \cos a & \sin a \cos^2 a & \cos^3 a \\ \sin^3 b & \sin^2 b \cos b & \sin b \cos^2 b & \cos^3 b \\ \sin^3 c & \sin^2 c \cos c & \sin c \cos^2 c & \cos^3 c \\ \sin^3 d & \sin^2 d \cos d & \sin d \cos^2 d & \cos^3 d \end{vmatrix} =$

$= \sin(a - b) \sin(a - c) \sin(a - d) \sin(b - c) \sin(b - d) \sin(c - d)$

1429. $\begin{vmatrix} \sin 2t & \cos 2t & 1 \\ \sin t & \cos t & \cos t \\ \cos t & -\sin t & \sin t \end{vmatrix} = 0$

1430. $\begin{vmatrix} \cos(a - b) & \cos(b - c) & \cos(c - a) \\ \cos(a + b) & \cos(b + c) & \cos(c + a) \\ \sin(a + b) & \sin(b + c) & \sin(c + a) \end{vmatrix} =$

$= -2 \sin(a - b) \sin(b - c) \sin(c - a)$

1431. $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix} = \sin 2a \sin(b - c) + \sin 2b \sin(c - a) + \sin 2c \sin(a - b)$

1432. Számitsuk ki a következő determinánsok értékét:

$\begin{vmatrix} 0,1 & 1 & 0 \\ 0,01 & -0,1 & 1 \\ 0,001 & 0,01 & -1 \end{vmatrix}$

1433. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+j & 1-2j & 3+2j & 4j \\ (2+j)^2 & (1-2j)^2 & (3+2j)^2 & (4j)^2 \\ (2+j)^3 & (1-2j)^3 & (3+2j)^3 & (4j)^3 \end{vmatrix}$$

1434. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

1435. Számitsuk ki az alábbi determináns négyzetét önmagával való szorzása utján.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}^2 = ?$$

1436. Végezzük el négyféleképpen az alábbi szorzást, az eredményt a determinánsok értékének kiszámitásával is ellenőrizzük.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 \\ j & j & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & j & -j \\ j & 1 & j \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

1437. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}^2 = ?$$

1438. Számitsuk ki a következő determináns értékét négyzetének meghatározása utján:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1439. Bizonyitsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & u_1 & 0 & u_2 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & v_1 & 0 & v_2 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

1440. Számitsuk ki a következő determináns reciprok determinánsát és ellenőrizzük a számitást. A reciprokának nevezzük és A^{-1}-gyel jelöljük az olyan determinánst, melyre $A \cdot A^{-1} = I$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

1441.* Bizonyitsuk be, hogy a

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

determináns reciproka eggyel egyenlő, ha $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + 1 = 0$

1442. Oldjuk meg a determináns kifejtése nélkül az alábbi egyenleteket:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & a \\ b & b & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$

1443. Bizonyitsuk be:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = \begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1444.* Diszkutáljuk a

$$\begin{vmatrix} b - x & a \\ a & c - x \end{vmatrix} = 0$$ egyenletet!

1445. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} 1 - x & -1 & 0 \\ 3 & 2 - x & 1 \\ 0 & 5 & 1 - x \end{vmatrix} = 0$$ egyenlet összes megoldását!

1446. Határozzuk meg A értékét ugy, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & A & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ legyen.

1447.

$$D(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots\cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots\cdots & y_n'(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Irjuk fel a $\frac{d}{dt} D(t)$ függvényt!

1448.* Számitsuk ki a következő un. Vandermonde determináns értékét

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1449. Számitsuk ki azon D_n és D_{n+1} determinánsok értékét, amelyeket az előző determinánsból kapunk ugy, hogy benne az utolsó sor kitevőit n-re, ill. (n+1)-re változtatjuk.

1450.* Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \cdots\cdots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1!\,2!\,\ldots\ldots\,(n-1)!}$$

Ahol $V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az $x_1, x_2, \ldots x_n$ elemek által generált Vandermonde-determináns.

1451. Bizonyitsuk be:

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots\cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots\cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & & & \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots\cdots & (2n-1)^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ha} \quad n > 3.$$

1452. Bizonyitsuk be, hogy ha $n \geq 3$, akkor

$$\begin{vmatrix} a + a_1b_1 & a + a_1b_2 & \cdots\cdots & 1 + a_1b_n \\ 1 + a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \cdots\cdots & 1 + a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + a_nb_1 & 1 + a_nb_2 & \cdots\cdots & 1 + a_nb_n \end{vmatrix} = 0$$

1453. Bizonyitsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda_3 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_n$$

1454.* Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = f(x) - x\frac{d\,f(x)}{dx} \quad \text{ahol}$$

$$f(x) = (a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)$$

1455.* Igazoljuk hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots\dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots\dots & a_1 \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots\dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(x_1)\dots f(x_n),$$

ahol $f(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$ és x_i az $x^n = 1$ egyenlet gyöke.

1456. Bizonyitsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & a_n \end{vmatrix} = a_n A_{n-1} + A_{n-2}$$

ahol A_{n-1} és A_{n-2} ugyanolyan tipusu $(n-1)$-ed, ill. $(n-2)$-ed rendü determináns mint A_n.

1457.* Bizonyitsuk be, hogy az n-ed rendü determináns kifejtésében egyik tagként szerepel a mellékátlóban álló elemek szorzata is, éspedig pozitiv előjellel, ha n-nek néggyel való osztásakor a maradék 0 vagy 1, minden más esetben az előjel negativ.

1458. Bizonyitsuk be, hogy ha egy determinánsban a fő átló fölött (vagy alatt) álló minden elem 0, akkor a determináns értéke megegyezik a főátlóban álló elemek szorzatával.

1459. Bizonyitsuk be, hogy ha a determináns valamennyi elemét ugyanazzal a c számmal szorozzuk, akkor a determináns értéke c^n-nel szorzódik.

1460. Bizonyitsuk be, hogy ha a determináns első r oszlopában az r-ik soron tul csupa 0 elem áll, akkor a determináns értéke megegyezik a bal felső sarokban álló r-rendü aldetermináns és az eredeti determinánsból ezen aldetermináns sorainak és oszlopainak törlése után visszamaradó aldetermináns (kiegészitő aldetermináns) szorzatával.

1461.* Bizonyitsuk be, hogy ha a másodrendü determináns második sorában álló elemek a fölöttük álló elem komplex konjugáltjai, akkor a determináns értéke vagy nulla vagy pedig tiszta képzetes szám.

1462.* Bizonyitsuk be, hogy ha egy determináns elemeinek komplex konjugáltjából képeztünk determinánst (ugyanabban az elrendezésben) akkor az eredeti determináns konjugáltját kapjuk.

1463.* Igazoljuk, hogy ha az $|a_{ik}|$ determinánsban a_{ik} és a_{ki} komplex konjugáltak, akkor a determináns értéke valós.

1464.* Bizonyitsuk be, hogy ha egy n-edrendü determinánsban $a_{ji} = -a_{ij}$ és n páratlan, a determináns értéke nulla.

1465.* Legyen az $|a_{ik}|$ n-edrendü determinánsban $a_{ii} = 0$ $a_{ik} = j\,a_{ki}$ ahol a_{ki} valós (ha $i > k$)

1. Melyek n azon értékei, amelyek mellett bármely a_{ki} választás esetén valós értékü a determináns és
2. melyek mellett lesz tiszta képzetes szám?
3. Bizonyitsuk be, hogy páratlan n esetén a determináns értéke $A\,(1 \pm j)$ ahol A valós.

1466.* Bizonyitsuk be, hogy ha a harmadrendü determináns soraiban ugyanavval a differenciával biró elsőrendü számtani sorozatok állnak, akkor a determináns értéke 0. Igaz-e a tétel általánositása negyedrendü determinánsra és ugyanazzal a második differenciával biró másodrendü számtani sorozatra?

1467.* Bizonyitsuk be, hogy a $z_1\ z_2\ z_3$ pontok akkor, és csak akkor feksze-nek egy egyenesen a komplex számsikban, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \overline{z}_3 \end{vmatrix} = 0$$

1468. Számitsuk ki az

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

determináns értékét, melynek elemei az uj koordináta tengelyeknek a régiekkel bezárt szögeinek irány cosinusai. A koordináta-rendszerek itt derékszögüek.

15. MÁTRIXOK

Jelölés:

1. $\underline{\underline{A}}$ transzponálja $\underline{\underline{A}}'$, ahol $a'_{ik} = a_{ki}$. $\underline{\underline{A}} = (a_{ik})$

2. $\underline{\underline{A}}$ algebrai adjungáltja adj $\underline{\underline{A}}$, ugy kapjuk hogy $\underline{\underline{A}}'$ elemei helyére a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánst irjuk.

3. Inverz mátrix $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{\text{adj}\underline{\underline{A}}}{\det \underline{\underline{A}}}$ akkor és csak akkor létezik, ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

4. Mátrix nyoma $\text{Sp}\, \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

5. Derivált mátrix $\frac{d\,\underline{\underline{A}}}{dx} = \left(\frac{d\,a_{ik}}{dx}\right)$

6. Konjugált mátrix $\overline{\underline{\underline{A}}} = \left(\bar{a}_{ik}\right)$, ahol $\overline{a_{ik}}$ a_{ik} komplex konjugáltját jelenti.

7. Adjungált mátrix $\underline{\underline{A}}^* = (\overline{\underline{\underline{A}}'})$ (transzponált konjugáltja).

8. Def. $\underline{\underline{A}}$ unitér mátrix, ha $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{E}}$

9. Def. $\underline{\underline{A}}$ valós elemü mátrix ortogonális, ha $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$

10. Adjungált mátrix inverze $\breve{\underline{\underline{A}}} = (\underline{\underline{A}}^*)^{-1}$

11. Mátrix rangja: rang $\underline{\underline{A}}$, a lineárisan független oszlop ill. sorvektorok maximális száma.

12. $j = \sqrt{-1}$

1501. Végezzük el a következő müveleteket:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = ?$$

1502. $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = ?$$

1503. $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3\underline{\underline{A}} = ?$$

1504. $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad 3\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{B}} - 4\underline{\underline{C}} = ?$$

1505. $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1-j \\ 2j & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4j & 1+2j \\ 4 & 3-j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} -2j & 1 \\ 1 & 1+j \end{pmatrix}, \quad j\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{B}} + 3\underline{\underline{C}} = ?$$

1506. Végezzük el az alábbi müveleteket:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1507. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1508. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1509. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1510. $$(5,\ 1,\ 0,\ -3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1511. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1512. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1513. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

1514. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$

1515. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2$

1516. $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}^k$

1517. $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k$

1518. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

1519. Számitsuk ki $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$ értékét:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

1520. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1521. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Számitsuk ki az $\underline{\underline{A}}^2$, $\underline{\underline{A}}^3$, $\underline{\underline{A}}^{-1}$, $\underline{\underline{A}}^{-2}$ mátrixokat.

1522. Számitsuk ki $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}$, majd $\underline{\underline{B}}\ \underline{\underline{A}}$ értékét.

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1523. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1524. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 2j & 3j \\ 2j & j & 4j \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1525. $\underline{\underline{A}} = (1 \quad 4j \quad 3)$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2j \\ 3 \\ j \end{pmatrix}$

1526. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{D}} = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$

Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}\ \underline{\underline{C}}\ \underline{\underline{D}}$ mátrixot.

1527. Vizsgáljuk meg az

$$\underline{\underline{X}}\ \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$$

egyenletet, ahol $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{X}}$ másodrendü négyzetes mátrix, $\underline{\underline{0}}$ null mátrix.

1528. Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{0}}$ egyenlet megoldását, ahol $\underline{\underline{A}}$ másodrendü négyzetes mátrix.

1529. Határozzuk meg a következő mátrixok transzponáltját:

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

1530.

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

1531. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Határozzuk meg $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})'$ mátrixot.

1532. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ -j & j \\ 1 & 1-j \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2j & 4 \\ 0 & -j \\ 2 & 1+j \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})'$ mátrixot!

1533. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}})'$ mátrixot.

1534. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ -j & j \\ 1 & 1-j \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & -j & 0 \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}})'$ mátrixot.

1535. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ j & j & -j \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Határozzuk meg $\underline{\underline{A}}'$ és $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}'$ mátrixokat!

1536. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -j & -2 & j \end{pmatrix}$ Határozzuk meg $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}'$ mátrixot!

1537. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}'$ mátrixot)

1538. Bizonyitsuk be, hogy minden kvadratikus mátrix előállitható, mint egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összege.

1539. Számitsuk ki a következő inverz mátrixokat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

1540. $$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

1541. $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

1542. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

1543. $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

1544. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Oldjuk meg a $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$ mátrix-egyenleteket.

1545. Legyen az (a_{ik}) mátrix determinánsa 1. Számitsuk ki az (A_{ik}) mátrix determinánsának értékét, ahol A_{ik} az a_{ik} elemhez tartozó előjeles aldeterminánsa.

1546. Bizonyitsuk be a következő összefüggéseket; (feltéve, hogy a kijelölt müveletek elvégezhetők)

1. $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{B}}'$ 2. $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}'$ 3. $(\underline{\underline{A}}^{-1})' = (\underline{\underline{A}}')^{-1}$

4. $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}'$ 5. $(\underline{\underline{A}}')' = \underline{\underline{A}}$

1547.* Bizonyitsuk be, hogy szimmetrikus mátrix inverze is szimmetrikus.

1548. Bizonyitsuk be, hogy páros rendü antiszimmetrikus mátrix inverze is antiszimmetrikus.

1549. Null - osztó-e vagy sem a 3x3-as mátrixok körében az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrix?}$$

($\underline{\underline{A}}$ null osztó ha lehet találni hozzá egy olyan $\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{0}}$ mátrixot, hogy vagy $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$ vagy $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$.)

1550. Null-osztó-e vagy sem a 4 x 4-es mátrixok körében

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -8 & 12 & -7 & 4 \\ 6 & -7 & 5 & 1 \end{pmatrix} ?$$

1551. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix és det $\underline{\underline{A}} = 0$, akkor $\underline{\underline{A}}$ adj $\underline{\underline{A}}$ = adj $\underline{\underline{A}}$ $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$. Vagyis adj $\underline{\underline{A}}$ két oldali nullosztó, ha adj $\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$.

1552. Vizsgáljuk meg az $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ alaku mátrixokat!

a) Két ilyen alaku mátrix szorzata is ilyen alaku-e?
b) Kommutativ-e az ilyen alaku mátrixok szorzata?
c) Van-e köztük olyan, amellyel bármely ilyen alaku mátrixot jobbról szorozva a bal oldali tényezőt kapjuk vissza?
d) Van-e köztük olyan, amellyel balról szorozva a jobb oldali tényezőt kapjuk vissza?
e) Van-e köztük olyan, amellyel bármely ilyen alaku mátrixot jobbról, ill. balról szorozva nulla mátrixot kapunk?

1553. Vizsgáljuk meg az $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alaku mátrixokat!

a) Ilyenek szorzata is ilyen alaku-e?
b) Kommutativ-e az ilyen alaku mátrixok szorzata?
c) Irjuk fel az $M(a,b)$ jelöléssel az $[M(1,0)]^2$, $[M(0,1)]^2$, $M(a,b)\cdot M(c,d)$, $M(a,b)\cdot M(a,-b)$ szorzatokat.
d) Irjuk fel az előbbi szorzatokat az $\underline{\underline{E}}_1 = M(1,0)$ $\underline{\underline{E}}_2 = M(0,1)$ mátrixokkal kifejezve.

1554. Keressük meg az összeadás, kivonás és szorzás müveletének szabályait a $q = a\,e + b\,i + c\,j + d\,k$ alaku un. hiperkomplex számok körében, ahol

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

és a, b, c, d tetszőleges komplex számok.

1555.* $\underline{\underline{D}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mutassuk meg, hogy az $a\underline{\underline{E}} + b\underline{\underline{D}}_1$ alaku mátrixokra, ahol a és b skalár számok, ugyanazok a müveleti szabályok érvényesek, mint az $a + bj$ alaku komplex számokra.

1556.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{P}}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{M}}_{32}(W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{X}}_{33}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Mivel egyenlők a $\underline{\underline{P}}_{23}\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}_{23}$, $\underline{\underline{M}}_{32}(w)\,\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}\,M_{32}(w)$, $\underline{\underline{X}}_{33}(x)\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}_{33}(x)$ mátrixok?

1557. Ha $\underline{\underline{P}}_{ik}$ az a mátrix, amelyik az $\underline{\underline{E}}$ mátrixból ugy keletkezik, hogy $\underline{\underline{E}}$-ben az i-edik sort a k-adikkal felcseréljük, akkor mi jellemzi a $\underline{\underline{P}}_{ik}\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{P}}_{ik}$ mátrixokat? ($\underline{\underline{E}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n x n-es mátrixok.)

1558. Ha $i \neq k$, jelöljük $\underline{\underline{M}}_{ik}(t)$-vel azt az n x n-es mátrixot, amelyik az egység mátrixtól csak annyiban különbözik, hogy i-edik sorának k-adik eleme nem 0, hanem t. Ha $\underline{\underline{B}}$ tetszés szerinti n x n-es mátrix, hogyan lehet jellemezni az $\underline{\underline{M}}_{ik}(t)$. $\underline{\underline{B}}$ és a $\underline{\underline{B}}\,M_{ik}(t)$ szorzatokat?

1559. Bizonyitsuk be, hogy egy négyzetes mátrixhoz mindig találhatunk olyan mátrixot, amellyel az adott mátrixot balról megszorozva a szorzat mátrix fő átlója alatt csupa nulla áll.

1560. Hogyan jellemezhető az a mátrix, amely egy adott mátrixból egy diagonális mátrixszal jobbról ill. balról szorozva keletkezik.

1561. Bizonyitsuk be, hogy bármely négyzetes mátrixhoz találhatunk két másikat ugy, hogy az elsővel balról szorozva és a kapott szorzatot a másodikkal jobbról szorozva a fő diagonális alatt is és fölött is csupa nulla áll. (Nem biztos, hogy a főátlóban álló minden elem zérustól különböző lesz.)

1562. Keresendő véges számu mátrix, amelyek lineár-kombinációival bármely n x n-es mátrix előállitható.

1563. Melyek azok a mátrixok, amelyek valamennyi n x n-es mátrixszal felcserélhetők?

1564. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1565. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 18 \end{pmatrix}$

1566. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

1567. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 22 & 6 \end{pmatrix}$

1568. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1569. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1570. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

1571. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1572. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 8 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 & 3 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -3 & -5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1573. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1574. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 18 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 12 & 11 \end{pmatrix}$

1575. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -7 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1576.* Bizonyitsuk be, hogy ha egy mátrix rangja r, akkor előállitható r db. 1 rangu mátrix összegeként.

1577.* Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-edrendü kvadratikus mátrixok, és $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, $\det \underline{\underline{B}} \neq 0$, akkor $\operatorname{rang} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \operatorname{rang} \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \operatorname{rang} \underline{\underline{A}}$

1578.* Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-ed rendü kvadratikus mátrixok és $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, akkor $\operatorname{rang} (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) \leq \operatorname{rang} \underline{\underline{A}}$, és $\operatorname{rang} (\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}) \leq \operatorname{rang} \underline{\underline{A}}$

1579. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 + 3j & 3 + 4j \\ 2 + 2j & 4 + j \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 + j & 4 + 2j \\ 1 + 2j & 3 + 4j \end{pmatrix}$

Számitsuk ki az $(\overline{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}})$, $\overline{\underline{\underline{A}}}\,\overline{\underline{\underline{B}}}$, és $(\overline{\underline{\underline{A}}})^{-1}$ mátrixokat.

1580. Bizonyitsuk be, a következő összefüggéseket, feltéve hogy a kijelölt müveleteket elvégezhetők:

1. $(\overline{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}}) = \overline{\underline{\underline{A}}} + \overline{\underline{\underline{B}}}$ 2. $\overline{\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}} = \overline{\underline{\underline{A}}}\,\overline{\underline{\underline{B}}}$ 3. $(\overline{\underline{\underline{A}}}^{-1}) = (\overline{\underline{\underline{A}}})^{-1}$

4. $\overline{\det \underline{\underline{A}}} = \det \overline{\underline{\underline{A}}}$ 5. $\overline{\overline{\underline{\underline{A}}}} = \underline{\underline{A}}$

1581. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+3j & 3+4j \\ 2+2j & 4+j \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2+j & 4+2j \\ 1+2j & 3+4j \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})^*$, $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^*$, és $\breve{\underline{\underline{A}}}\,\breve{\underline{\underline{B}}}$ mátrixokat.

1582. Oldjuk meg a következő mátrix-egyenleteket;

$(\underline{\underline{A}}^{-1})^* \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{Y}}\,(\underline{\underline{A}}^{-1})^* = \underline{\underline{B}}$, ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & j \end{pmatrix}$$

1583. Oldjuk meg az $(\underline{\underline{A}}^*)^{-1} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{Y}}\,(\underline{\underline{A}}^*)^{-1} = \underline{\underline{B}}$ mátrix egyenleteket, ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -j & -2 & j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1584. Számitsuk ki $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^*$ mátrixot ha

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & 0 \end{pmatrix}$$

1585. Bizonyitsuk be a következő összefüggéseket, feltéve, hogy a kijelölt müveletek elvégezhetők.

1. $(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{A}}^* + \underline{\underline{B}}^*$,
2. $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{B}}^* \cdot \underline{\underline{A}}^*$,
3. $(\underline{\underline{A}}^{-1})^* = (\underline{\underline{A}}^*)^{-1}$,
4. $\det \underline{\underline{A}}^* = (\det \underline{\underline{A}})^*$,
5. $(\underline{\underline{A}}^*)^* = \underline{\underline{A}}$.

1586. Igazoljuk, hogy ha $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ és $\breve{\underline{\underline{A}}}$, $\breve{\underline{\underline{B}}}$, $\breve{\underline{\underline{C}}}$ létezik, akkor $\breve{\underline{\underline{A}}}\,\breve{\underline{\underline{B}}} = \breve{\underline{\underline{C}}}$.

1587. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{U}}$ unitér mátrix, akkor $\underline{\underline{U}}^{-1}$, $\underline{\underline{U}}'$, és $\underline{\underline{U}}^*$ és $\bar{\underline{\underline{U}}}$ is unitér.

1588.* Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{U}}_1$ és $\underline{\underline{U}}_2$ unitér mátrixok, akkor $\underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{U}}_2$ és $\underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1$ is unitér.

1589.* Bizonyitsuk be, hogy unitér mátrix determinánsa +1 vagy -1.

1590. Legyen $\underline{\underline{A}}$ tetszés szerinti, $\underline{\underline{U}}$ pedig unitér mátrix és $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{U}}$. Mivel egyenlő a $\underline{\underline{B}}^*$ mátrix?

1591.
$$\underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} j \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} j & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{U}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} j \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} j & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Mivel egyenlők az $\underline{\underline{U}}_1^{-1}$, $\underline{\underline{U}}_2^{-1}$, $(\underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{U}}_2)^{-1}$ és $(\underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1)^{-1}$ mátrixok?

1592. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{D}}_1$ és $\underline{\underline{D}}_2$ ortogonális mátrixok, akkor $(\underline{\underline{D}}_1 \underline{\underline{D}}_2)$ is ortogonális.

1593.* Bizonyitsuk be, hogy ortogonális mátrix determinánsa +1 vagy -1.

1594.
$$\underline{\underline{D}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kiszámitandók a $(\underline{\underline{D}}_1 \underline{\underline{D}}_2)^{-1}$, $\det \underline{\underline{D}}_1$ és $\det \underline{\underline{D}}_2$!

1595.* Legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ két n-edrendü kvadratikus mátrix. Bizonyitsuk be, hogy $\mathrm{Sp}\,(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} + \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{B}}$

1596. Legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-edrendü kvadratikus mátrix, továbbá $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$. Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix nyomát.

1597.* Legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ két olyan mátrix, hogy $\underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{A}}$ létezzenek, és kvadratikus mátrixok legyenek. Bizonyitsuk be, hogy ekkor $\mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{B}}) = \mathrm{Sp}\,(\underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{A}})$.

1598.
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Határozzuk meg $\underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{A}}$ nyomát.

16. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZEREK

Megoldhatók-e a következő egyenletrendszerek? Ha igen oldjuk meg.

1601.

$$(1-j)x_1 + (2+j)x_2 = 1 - j,$$
$$(1+j)x_1 + (1-j)x_2 = 1 + j.$$

1602.

$$j\,x_1 + x_2 = 1,$$
$$-x_1 + (1+j)x_2 = 2 + j.$$

1603.

$$2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 = 7,$$
$$3\,x_1 - 4\,x_2 - 3\,x_3 = 1,$$
$$x_1 + 14\,x_2 + x_3 = 2.$$

1604.

$$2\,x \quad - z = 1,$$
$$2x + 4y - z = 1,$$
$$-x + 8y + 3z = 2.$$

1605.

$$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = 1,$$
$$(1-j)x_1 + 2\,x_2 + (1-j)x_3 = j,$$
$$-2j\,x_1 + (1+j)x_2 + 3\,x_3 = -j.$$

1606.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$$
$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$
$$3x_1 + (4+j)x_2 + 7\,x_3 = -2 + 2j.$$

1607.

$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$
$$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = -2 + 2j,$$
$$3x_1 + (1+3j)x_2 + (-2+2j)x_3 = -2.$$

1608.

$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$
$$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = -2 + 2j,$$
$$x_1 + (1-j)x_2 - 2j\,x_3 = -2 - 2j.$$

1609.

$$jx_1 + (1+j)x_2 + (1-j)x_3 = 1,$$
$$-x_1 + 2j\,x_2 - 2j\,x_3 = j,$$
$$-jx_1 + (-2+2j)x_2 + (-2-2j)x_3 = 1+j.$$

1610.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$$
$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$
$$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = -2 + 2j.$$

1611.

$$x_1+(1+j)x_2+2j\,x_3 = 1$$
$$(1-j)x_1+2x_2+(1-j)x_3 = j,$$
$$(3-2j)x_1+(5+j)x_2+2x_3=1+2j.$$

1612.

$$x_1+(1+j)x_2 + 2j\,x_3 = 1,$$
$$(1-j)x_1+2x_2+(1-j)x_3 = j,$$
$$-jx_1 +(1-j)x_2+(1-3j)x_3=1+j.$$

1613.

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1,$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7,$$
$$3x_1 - 7x_2+ x_3 - 5x_4 = -8,$$
$$x_2 - x_3 - x_4 = -1.$$

1614.

$$x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 3,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

1615.

$$x_1 + x_2 \quad + 4x_4 = 3,$$
$$x_2 - x_3 + 3x_4 = 1,$$
$$x_1 -2x_2 + 3x_3 -5x_4 = 0,$$
$$3x_1 -x_2 + 4x_3 = 5,$$

1616.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2,$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0,$$

1617.

$$4x_1+x_2 - 2x_3 + x_4 = 3,$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2,$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1,$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1.$$

1618.

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8,$$
$$x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9,$$
$$2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5,$$
$$x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0.$$

1619.

$$5x + 4z + 2t = 3,$$
$$x - y + 2z + t = 1,$$
$$4x + y + 2z = 1,$$
$$x + y + z + t = 0.$$

1620.

$$x_1 +2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 = 13,$$
$$2x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 10,$$
$$2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5 = 11,$$
$$2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5 = 6,$$
$$2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5 = 3.$$

1621.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = -3,$$
$$x_5 + x_6 + x_7 = -9,$$
$$x_6 + x_7 + x_8 = -6,$$
$$x_7 + x_8 + x_1 = -2,$$
$$x_8 + x_1 + x_2 = 2.$$

1622.

$$x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$jx_1 + x_3 + x_4 = j,$$
$$jx_1 + jx_2 + x_4 = -1,$$
$$jx_1 + jx_2 + jx_3 = -j,$$

1623.

$$7x_1 + 3x_2 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 = -3,$$
$$4x_1 + 9x_2 = 11.$$

1624.

$$x_1 - 8x_2 = 3,$$
$$2x_1 + x_2 = 1,$$
$$4x_1 + 7x_2 = -4.$$

1625.

$$x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$jx_1 + x_3 + x_4 = j,$$
$$jx_1 + jx_2 + x_4 = -1,$$
$$jx_1 + jx_2 + jx_3 = -j,$$
$$jx_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1.$$

1626.

$$x_1 + x_2 + x_3 = j,$$
$$x_1 + (1+j)x_2 + x_3 = 1,$$
$$-x_1 + (-1+j)x_2 - x_3 = 1 - 2j,$$
$$-jx_1 + (1-j)x_2 - jx_3 = -j.$$

1627.

$$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = 1,$$
$$2j\,x_1 + (-2+2j)x_2 - 4x_3 = -j.$$

1628.

$$(1+j)x_1 + (2-j)x_2 + j\,x_3 = 2 + j,$$
$$2x_1 + j\,x_2 - j\,x_3 = -1 - j.$$

1629.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 3,$$
$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4,$$
$$-7x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5,$$
$$x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -2.$$

1630.

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7,$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1,$$
$$x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0.$$

1631.

$$x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5 = 1,$$
$$3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5 = 4,$$
$$x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5 = 0.$$

1632.

$$3x_1-x_2+2x_3-x_4+5x_5 = 28,$$
$$x_1+x_3+4x_4-2x_5 = 10,$$
$$2x_1+7x_2-3x_3+6x_5 = 37,$$
$$-8x_2+4x_3-5x_4+x_5 = -19.$$

1633.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,$$
$$3x_1+ 2x_2 + x_3 + x_4 -3x_5 = -2,$$
$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23,$$
$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12.$$

1634.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 +\ldots+ nx_n = 1,$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 +\ldots+ nx_1 = 2,$$
$$\vdots$$
$$x_n + 2x_1 + 3x_3 +\ldots+ nx_{n-1} = n.$$

1635.

$$x_2 + x_3 +\ldots+ x_{n-1} + x_n = 1,$$
$$x_1 + x_3 +\ldots+ x_{n-1} + x_n = 2,$$
$$x_1 + x_2 +\ldots+ x_{n-1} + x_n = 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + x_2 +\ldots+ x_{n-2} + x_{n-1} = n.$$

1636.

$$2x_1 + x_2 +\ldots+ x_n = 1,$$
$$x_1 + 2x_2 +\ldots+ x_n = 2,$$
$$\vdots$$
$$x_1 + x_2 +\ldots+ 2x_n = n.$$

1637.

$$\binom{0}{0}x_0 + \binom{1}{0}x_1 + \binom{2}{0}x_2 + \dots + \binom{n}{0}x_n = \binom{n+1}{n},$$

$$\binom{1}{1}x_0 + \binom{2}{1}x_1 + \binom{3}{1}x_2 + \dots + \binom{n+1}{1}x_n = \binom{n+2}{2},$$

$$\binom{2}{2}x_0 + \binom{3}{2}x_1 + \binom{4}{2}x_2 + \dots + \binom{n+2}{2}x_n = \binom{n+3}{3},$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{n}x_0 + \binom{n+1}{n}x_1 + \binom{n+2}{n}x_2 + \dots + \binom{2n}{n}x_n = \binom{2n+1}{n+1}$$

1638.*

$$1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0,$$

$$1 + 2x_1 + 4x_2 + \dots + 2^n x_n = 0,$$

. . . . . .

$$1 + n\,x_1 + n^2 x_2 + \dots + n^n x_n = 0.$$

1639.

$$\frac{x_1}{a_1 - b_1} + \dots + \frac{x_n}{a_1 - b_n} = 1,$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_1}{a_n - b_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n - b_n} = 1,$$

ahol $a_i \neq b_k$ $(i, k = 1, 2, \dots\dots n)$

1640. Diszkutáljuk a következő egyenletrendszert:

$x + y + z = a,$

$x + (1+a)y + z = 2a,$ ahol $\underline{a}$ konstans

$x + y + (1+a)z = 0.$

1641. Diszkutáljuk az

$ax + y + z = 1,$

$x + ay + z = a,$

$x + y + az = a^2,$ egyenletrendszer megoldását.

1642. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$uv - 3vw + w = -13,$$
$$-3uv + 4vw - 2w = 12,$$
$$2uv + vw = 10.$$

1643. Határozzuk meg az

$$x + y + 2z = 0,$$
$$2x - y + z = 0,$$
$$x + y + z = t,$$
$$2x - 2y + z = u,$$ egyenletrendszerből u-t, mint t függvényét.

1644.

$$x_1 + x_2 = a_1 a_2,$$
$$x_1 + x_3 = a_1 a_3,$$
$$x_1 + x_4 = a_1 a_4,$$
$$x_2 + x_3 = a_2 a_3,$$
$$x_2 + x_4 = a_2 a_4,$$
$$x_3 + x_4 = a_3 a_4.$$

Milyen feltételeknek kell az a_i-k-re teljesülni, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen? Oldjuk meg az egyenletrendszert.

1645. Meghatározandó u és v ugy, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen. Oldjuk is meg az egyenletrendszert.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14,$$
$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 44,$$
$$x_1 + 8x_2 + 27x_3 = 134,$$
$$-x_1 - 6x_2 - 15x_3 = u,$$
$$x_1 - 2x_2 - 15x_3 = v.$$

Határozzuk meg a és c értékét ugy, hogy a következő egyenletrendszereknek

1. csak egy megoldása legyen
2. végtelen sok megoldása legyen
3. ne legyen megoldása

1646.

$$3x + 5y - z = 1,$$
$$x + ay + 2z = 2,$$
$$x + 9y - 5z = c.$$

1647.

$$x_1 + jx_2 = j,$$
$$ax_1 - x_2 = c.$$

1648.

$$ax_1 + x_2 = 1,$$
$$-x_1 + (1+j)\,x_2 = c.$$

1649.

$$jx_1 + (1+j)x_2 + (1-j)x_3 = 1,$$
$$-x_1 + 2j\,x_2 - 2j\,x_3 = c,$$
$$-jx_1 + (-2+2j)x_2 + ax_3 = 1 + j.$$

1650.

$$x_1 + (1+j)\,x_2 + 2j\,x_3 = 1,$$
$$(1-j)x_1 + 2x_2 + a\,x_3 = c,$$
$$-2jx_1 + (1+j)x_2 + 3x_3 = j.$$

1651.

$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$
$$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = c,$$
$$x_1 + (1-j)x_2 + ax_3 = -2 - 2j.$$

Homogén egyenletrendszerek

1652. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$jx_1 + jx_3 = 0,$$
$$(1+j)x_1 + x_2 + 2jx_3 = 0.$$

1653.

$$x + 2y + z + t = 0,$$
$$2x + y + z + 2t = 0,$$
$$x + 2y + 2z + t = 0,$$
$$x + y + z + t = 0.$$

1654.

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + 6x_3 = 0,$$
$$3x_1 + 4x_3 = 0,$$
$$-x_2 + 2x_3 = 0.$$

1655. $x_1 + x_2 + x_3 = 0,$

$x_1+(1+j)x_2 + x_3 = 0,$

$-x_1 + (-1+j)x_2 - x_3 = 0,$

$-jx_1 +(1-j)x_2 - j\,x_3 = 0.$

1656. $x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 = 0,$

$-x_1+x_2 - 6x_4 + x_5 = 0,$

$3x_2 + x_3+5x_4 - x_5 = 0,$

$2x_3-7x_4 + 7x_5 = 0.$

1657. $3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0,$

$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0,$

$x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0,$

$x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0.$

1658.* Bizonyitsuk be, hogy ha az n egyenletü n ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa 0, de van (n-1)-ed rendü, 0-tól különböző aldeterminánsa, akkor a rendszer összes megoldása

$$x_1 = c\,a_1; \qquad x_2 = c\,a_2; \ldots ; x_n = c\,a_n,$$

alakú, ahol c tetszőleges szám, $a_1, \ldots\ldots a_n$ pedig a rendszer egy megoldása.

1659.* Jelöljük az n-ed rendü $A = |a_{ik}|$ determináns a_{ik} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsát A_{ik}-val. Mutassuk meg, hogy ha $A = 0$, akkor az

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots\ldots\ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots\ldots\ldots & A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots\ldots\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrix bármely két sora arányos egymással, azaz az 1, 2, ... n számok közül választott bármely i, j párhoz megadható olyan c szám, amelyre

$$A_{i1} = cA_{j1}, \qquad A_{i2} = cA_{j2}, \ldots\ldots, A_{in} = cA_{jn}.$$

1660. Határozzuk meg a-t ugy, hogy az

$5x + 2y - 3z = 0,$

$3x - 2y \qquad = 0,$

$4x + 3y + az = 0,$

egyenletrendszernek ne legyen a triviálistól különböző megoldása.

1661. Milyen c értékek mellett van triviálistól különböző megoldása a

$x + 9y = cx,$
$-x - 2y = cy,$

egyenletrendszernek?

1662. Határozzuk meg a értékét ugy, hogy a következő egyenletrendszereknek legyen triviálistól különböző megoldása.

$ax_1 + x_2 = 0,$
$-x_1 + (1+j)x_2 = 0.$

1663. $x_1 + jx_2 - x_3 = 0,$
$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = 0$
$x_1 + (1-j)x_2 + ax_3 = 0.$

1664. $x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = 0$
$(1-j)x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0,$
$-2j\,x_1 + (1+j)x_2 + 3x_3 = 0.$

1665. $ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
$jx_1 + x_3 + x_4 = 0,$
$jx_1 + jx_2 + x_4 = 0,$
$jx_1 + jx_2 + jx_3 = 0.$

1666. Milyen λ értékek mellett van nemcsak triviális megoldása a következő egyenletrendszernek:

$3x_1 + jx_2 = \lambda x_1,$

$jx_1 + \frac{1}{2}x_2 = \lambda x_2 .$

Vegyes feladatok

1667. Határozzuk meg a következő sikok kölcsönös helyzetét:

$3x + y + 7z = 11,$

$2x - 3y + 5z = 4,$

$5x - 2y + 10z = 13.$

1668. Határozzuk meg a következő sikok kölcsönös helyzetét:

$x + y - z - 4 = 0,$

$2x - 3y + z + 5 = 0,$

$4x - y - z + 3 = 0.$

1669. Határozzuk meg a következő sikok metszéspontját:

$x + y + z = 1,$

$8x - y + 2z = 0,$

$25x - 2y + 7z = 1.$

1670. Határozzuk meg a következő sikok kölcsönös helyzetét és közös pontjait:

$x + 2y + 3z = 1,$

$2x - z = 0,$

$4x + 2y + 2z = 1,$

$3x + 4y + 6z = 2.$

1671. Meghatározható-e az a és b szám ugy, hogy a következő három sik

$2x + 3y - z = 6,$

$x - 3y + 2z = 5,$

$4x - 3y + az = 6,$

1. egy egyenesben messe egymást,
2. ne legyen a három siknak közös pontja.

1672. Irjuk fel a $(3; 3; 3)$; $(1; -1; 1)$; és $(0, 0, 1)$ ponton átmenő sik egyenletét.

1673. Egy sikban van-e a következő négy pont:

$P_1(1, 2, -1)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(0, 0, 2)$, $P_4(-1, 0, 1)$.

1674. Mi annak a feltétele, hogy az (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ pontok egy sikban legyenek?

1675. Mi annak a feltétele, hogy az $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ pontok
1. egy sikban legyenek,
2. egy egyenesen legyenek.

1676. Mi a feltétele annak (determináns alakban), hogy az $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$ és $(x_3\ y_3)$ pontok egy egyenesen feküdjenek?

1677. Mi annak a feltétele, hogy az

$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$

egyenesek egy pontban messék egymást?

1678. Mi annak a feltétele, hogy az

$A_i\,x + B_i\,y + C_i\,z + D_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots . n)$ sikoknak

1. pontosan egy közös pontjuk legyen.
2. pontosan egy közös egyenesük legyen.

1679. Irjuk fel azt a másodfoku polinomot, amely az 1; -1+j; -1-j helyeken rendre az 1; -1-j; -1+j értékeket veszi fel.

1680. Irjuk fel azt a másodfoku polinomot, amely a 0; 1+j; 2+2j; helyeken rendre az 1; 1+2j; 1+8j értékeket veszi fel.

1681. Irjuk fel azt a másodfoku polinomot, amely az 1; 1+j; 2+2j; helyeken rendre az 1; 2j; 8j; értékeket veszi fel.

1682. Irjuk fel azt a harmadfoku polinomot, amely az 0; 1; 1+j; 1-j; helyeken rendre a 0; 1; -2+2j; -2 -2j értékeket veszi vel.

1683. Irjuk fel azt a harmadfoku polinomot, amely a j; -1; 1+j; 2+2j helyeken rendre a -j; -1; -2+2j; -16 + 16j értékeket veszi fel.

1684.* Legyenek $a_o, a_1, \ldots . a_n$ páronként különböző, $b_o, b_1, \ldots . b_n$ tetszőleges számok.
Bizonyitsuk be, hogy ekkor pontosan egy olyan

$$f(x) = c_o + c_1\,x + \ldots + x_n\,x^n$$

polinom van, amelyre $f(a_i) = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots . , n)$

1685. Irjuk fel a $P_1(0,0)$, $P_2(1,3)$, $P_3(3,3)$ pontokon átmenő kör egyenletét!

1686. Irjuk fel a z_1 z_2 z_3 pontokon átmenő kör egyenletét!

$z_1 = 3j$, $z_2 = 1 + 4j$, $z_3 = 2 + 3j$.

1687. $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + 3j$, $z_3 = 3 + 3j$,

1688. $z_1 = -1+j$, $z_2 = 1+3j$, $z_3 = 3+j$.

Polinomok felbontása tényezőkre és az együtthatók és gyökök közti összefüggések

1689. Az $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ egyenlet egyik gyöke $-j$. Határozzuk meg a többi gyököt!

1690. Az $x^3 + x^2 - 2 = 0$ polinom egyik gyöke $x_1 = 1$. Határozzuk meg a másik két gyökét!

1691. Az $z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 8z + 4 = 0$ egyenlet egyik gyöke $-1+j$. Határozzuk meg a többi gyököt!

1692. Határozzuk meg a-t és b-t ugy, hogy az $x^4 + 3x^2 + ax + b$ polinom maradék nélkül osztható legyen $x^2 - 2ax + 2$-vel.

1693. Egy polinom $(x-1)$, $(x+1)$, $(x-2)$-vel való osztása utáni maradékai rendre: 3 ; -1; 17. Határozzuk meg az $(x-1)(x+1)(x-2)$ szorzattal való osztás utáni maradékot!

1694. Egy valós együtthatós polinom $(x-j)$, $(x-1)$-gyel való osztása utáni maradékai rendre: 0; -2. Határozzuk meg az $(x-j)(x+j)(x-1)$ szorzattal való osztás utáni maradékot!

1695. Egy polinom $(x-j)$; $(x+j)$-vel való osztása utáni maradékai rendre $-3-j$; $-3+j$. Határozzuk meg az $(x-j)(x+j)$ szorzattal való osztás utáni maradékot!

1696. Az $x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b$ polinom $(x-1)$; $(x-j)$-vel való osztása utáni maradékai rendre 7 ; $6-j$. Határozzuk meg a és b értékét!

1697. Az $x^3 + ax^2 + bx - 1$ polinom $(x-1)$; $(x+1)$-gyel való osztása utáni maradékai rendre: 3; -1. Határozzuk meg a és b értékét!

1698. Az $x^4 + ax^3 + x^2 + bx + 4$ polinom $(x-1)$; $(x-2)$-vel való osztása utáni maradékai rendre: 6; $24 + 6j$. Határozzuk meg a és b értékét!

1699. Az $x^3 - 6x^2 + bx - 6$ polinom gyökei számtani haladványt alkotnak. Határozzuk meg b értékét!

1700. Az $x^3 - 7x^2 + bx - 8$ polinom gyökei mértani haladványt alkotnak. Határozzuk meg b értékét!

17. n DIMENZIÓS LINEÁRIS TEREK ÉS LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

Jelölések, definiciók

1. Definició

Bizonyos elemek R halmazát lineáris térnek nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

a) Bármely két $\underline{x}$ és $\underline{y}$ elemnek megfelel egy $\underline{z}$ elem, amelyet az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ elem összegének nevezünk és $x + y$-nak jelöljük.

b) Bármely $\underline{x}$ elemnek és bármely λ számnak, ahol λ egy bizonyos alapul vett test tetszőleges eleme lehet, megfelel egy $\lambda\,\underline{x}$ elem: ezt az elemet a λ szám és $\underline{x}$ elem szorzatának nevezzük.

Ezeknek a müveleteknek eleget kell tenniük a következő követelményeknek.

I. 1. $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$

2. $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$

3. Van olyan 0 elem, melyre $\underline{x} + 0 = \underline{x}$ bármely $\underline{x}$-re.

4. Minden $\underline{x}$-hez létezik olyan $-\underline{x}$-szel jelölt elem, hogy $\underline{x} + (-\underline{x}) = 0$

II. 1. $1\,\underline{x} = \underline{x}$

2. $\alpha(\beta\,\underline{x}) = \alpha\beta\,(\underline{x})$

III. 1. $(\alpha + \beta)\,\underline{x} = \alpha\underline{x} + \beta\,\underline{x}$

2. $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\,\underline{x} + \alpha\,\underline{y}$

2. Definició

A lineáris tér elemeit vektoroknak nevezzük és aláhuzott betüvel jelöljük. Pl.: $\underline{a}$. [Kivéve, ha kimondottan a valós 3 (ill. 2 és 1) dimenziós tér vektorairól van szó.]

3. Definició

Az R lineáris teret n-dimenziósnak nevezzük, ha létezik benne n lineárisan független vektor, és nincsen benne nagyobb számu lineárisan független vektor.

4. Definició

Az n-dimenziós R tér bármely n számu lineárisan független vektorát az R bázisának nevezzük.

5. Definició

Az R tér R' alterének nevezzük R elemeinek olyan halmazát, amely az R-ben bevezetett összeadás és számmal való szorzás müveletére nézve maga is lineáris teret alkot.

6. Definició

Az olyan lineáris teret melyben skaláris szorzat van értelmezve, euklidesi térnek nevezzük.

7. Definició

Az R térben skaláris szorzat van értelmezve, ha bármely két $\underline{x}, \underline{y} \in R$ vektornak megfelel egy $(\underline{x}, \underline{y})$ szám ugy, hogy ez a megfeleltetés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $(\underline{x}, \underline{y}) = \overline{(\underline{y}, \underline{x})}$ [$\overline{(\underline{y}, \underline{x})}$ alatt az $(\underline{y}, \underline{x})$ szám konjugált komplexét értjük.]
2. $(\lambda \underline{x}, \underline{y}) = \lambda (\underline{x}, \underline{y})$
3. $(\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{y}) = (\underline{x}_1, \underline{y}) + (\underline{x}_2, \underline{y})$
4. $(\underline{x}, \underline{x})$ nem negativ valós szám, amely csak akkor tünik el, ha $\underline{x} = 0$.

8. Definició

Két vektort ortogonálisnak nevezünk, ha skaláris szorzatuk nulla. Jelölés: $(\underline{x}, \underline{y}) = 0$

9. Definició

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektor rendszert ortonormáltnak nevezzük, ha

$$(\underline{e}_i, \underline{e}_k) = \begin{cases} 1 \text{ ha } i = k \\ 0 \text{ ha } i \neq k \end{cases}$$

10. Definició

$f(\underline{x})$ legyen az n dimenziós valós tér vektorain értelmezett skalár értékü függvény. $f(\underline{x})$ lineáris függvény, ha

1° $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$

2° $f(\lambda \underline{x}) = \lambda f(\underline{x})$

11. Definició

$f(\underline{x})$ legyen az n dimenziós komplex tér vektorain értelmezett skalár függvény.

$f(\underline{x})$ első faju lineáris függvény, ha

1° $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$

2° $f(\lambda \underline{x}) = \lambda f(\underline{x})$

$f(\underline{x})$ másod faju lineáris függvény, ha

1° $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$

2° $f(\lambda \underline{x}) = \bar{\lambda} f(\underline{x})$

12. Definició

$A(\underline{x}, \underline{y})$ az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektor bilineáris függvénye, ha

1° rögzitett $\underline{y}$-ra $A(\underline{x}, \underline{y})$ első faju lineáris függvénye $\underline{x}$-nek.

2° rögzitett $\underline{x}$-re $A(\underline{x}, \underline{y})$ másod faju lineáris függvénye $\underline{y}$-nak.

13. Definició

Legyen A az R tér lineáris transzformációja. Az R_1 lineáris alteret A-ra nézve invariánsnak nevezzük, ha R_1 minden $\underline{x}$ vektorára. $A \cdot \underline{x}$ is benne van R_1-ben.

14. Definició

Legyen A a komplex euklidesi tér lineáris transzformációja.

Az $(A\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, A^* \underline{y})$ feltétellel meghatározott A^* transzformációt az A transzformáció adjungáltjának nevezzük. Itt $\underline{x}$ és $\underline{y}$ a tér bármely két vektora lehet.

15. Definició

Az A lineáris transzformációt önadjungáltnak nevezzük, ha $A^* = A$

16. Definició

U unitér transzformáció, ha $UU^* = U^*U = E$

17. Definició

Az n-dimenziós valós euklidesi tér A lineáris transzformációja ortogonális, ha a tér bármely két $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorára

$$(A\,\underline{x},\ A\underline{y}) = (\underline{x},\ \underline{y})$$

1701. Keressünk maximális lineárisan független rendszert a következő vektorok között

$\underline{a}_1\,(2,\ -2,\ -4)$, $\underline{a}_2\,(1,\ 9,\ 3)$ $\underline{a}_3\,(-2,\ -4,\ 1)$, $\underline{a}_4\,(3,\ 7,\ -1)$.

1702. Lineárisan függetlenek-e a következő vektor-hármasok:

1. esetben $\underline{f}_1\,(1,1,0,-j)$, $\underline{f}_2\,(1+j,\ 0,0,j)$, $\underline{f}_3\,(0,0,2-j,\ 1)$.

2. esetben $\underline{f}_1\,(1,1,0,-j)$, $\underline{f}_2\,(1+j,\ 0,0,j)$, $\underline{f}_3\,(3+2j,\ 1,0,j)$.

1703. Felírható-e a $\underline{b}$ vektor az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként?

$\underline{b}\,(1,j,\ 1+j)$, $\underline{a}_1\,(j,\ -1,\ -j)$ $\underline{a}_2\,(1+j,\ 2j,\ -2+2j)$, $\underline{a}_3\,(1-j,\ -2j\ -2-2j)$

1704. Bizonyitsuk be, hogy ha egy vektorrendszer vektorai között előfordul a zérusvektor, akkor ezek feltétlenül lineárisan összefüggőek.

1705. Mutassuk meg, hogy ha egy lineárisan függő vektorrendszerhez még hozzá veszünk tetszőleges vektorokat, akkor az összes vektorok együtt szintén lineárisan függnek.

1706.* Bizonyitsuk be, hogy ha az R tér R' alterének ugyanaz a dimenziója, mint R-nek, akkor R' egybeesik R-rel.

1707.* Mutassuk meg, hogy az n - dimenziós térben az összes kisebb dimenziószámokhoz léteznek alterek.

1708. Mutassuk meg, hogy egy vektorrendszer által generált altér dimenziója annyi, amennyi a lineárisan független vektorok maximális száma a generáló vektorok között.

1709. a) Van-e közös vektora az öt dimenziós tér $\underline{f}_1$ és $\underline{f}_2$, ill. $\underline{g}_1$ és $\underline{g}_2$ által generált altereinek?

$\underline{f}_1$ (1 0 0 0 0), $\underline{f}_2$ (0 1 0 0 0), $\underline{g}_1$ (0 0 1 0 0), $\underline{g}_2$ (0 0 0 1 0).

b) Mutassuk meg, hogy ha az R tér két alterében, R_1-ben és R_2-ben csak a zérusvektor közös, akkor dimenzióik összege nem nagyobb R dimenziójánál.

1710. Bizonyitsuk be, hogy az

$l_1 = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3$,

$l_2 = -x_1 + x_2 + 6x_3$,

$l_3 = 2x_1 - x_2 - x_3$,

lineáris formák lineárisan függetlenek.

1711. Bizonyitsuk be, hogy az

$l_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$,

$l_2 = 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4$,

$l_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$,

$l_4 = \quad x_2 + 2x_3 - 3x_4$,

lineáris formák lineárisan függőek és állitsuk is elő egyiküket a másik három lineáris kombinációjaként.

1712.* Bizonyitsuk be, hogy az $x_1, x_2, \ldots x_n$ változók n-nél több lineáris formája nem lehet lineárisan független.

1713.* Bizonyitsuk be, hogy n változó n db lineáris formája akkor és csak akkor lineárisan független, ha e lineáris formák rendszerének determinánsa 0-tól különböző.

1714. $l_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4$,

$l_2 = 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4$,

$l_3 = x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4$,

$l_4 = 2x_1 + x_2 - x_3$.

Keressünk meg a fenti lineáris formák között egy maximális lineárisan független rendszert.

n dimenziós valós és komplex euklidesi tér

1715.* Mutassuk meg, hogy a valós euklidesi térben a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix nem alkalmas skaláris szorzat bevezetésére, viszont az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix igen.

1716. Mutassuk meg, hogy a valós euklidesi térben tetszőleges n elemü bázisra nézve a skaláris szorzat az

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k$$

képlettel van megadva, ahol $a_{ki} = a_{ik}$ és $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ill. $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ az $\underline{x}$ ill. $\underline{y}$ vektorok koordinátái.

1717.* Mutassuk meg, hogy ha a valós euklidesi térben valamely n elemü bázisra nézve a skaláris szorzat az $(\underline{x}, \underline{y}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n$ formulával van megadva, ahol $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ill. $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ az $\underline{x}$ ill. $\underline{y}$ vektorok koordinátái, akkor a bázis ortogonális és normált.

1718. Mutassuk meg, hogy a $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix nem alkalmas skaláris szorzat bevezetésére, viszont az $\begin{pmatrix} 1 & j \\ -j & 2 \end{pmatrix}$ mátrix igen.

1719.* Igazoljuk, hogy páronként ortogonális vektorok rendszere lineárisan független.

1720. Adott $\underline{f}_1$ (1, j, 0), $\underline{f}_2$ (1, 0, j), $\underline{f}_3$ (1, j, 1). Lineárisan független-e ez a három vektor? Ha igen, akkor ezen vektorok lineáris kombinációjából állitsunk elő ortonormált vektor-rendszert.

1721. Legyen $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ lineárisan független vektor-hármas a 3 dimenziós komplex euklidesi térben. Állitsunk elő ezen vektorok lineáris kombinációjából ortonormált vektor-rendszert.

1722. Adott a négydimenziós valós euklidesi térben egy $\underline{f}$ vektor. Bontsuk fel két vektor összegére ugy, hogy az egyik összeadandó vektor

a) esetben a $[\underline{b}_1, \underline{b}_2]$

b) esetben a $[\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3]$ altérben feküdjék, a másik legyen ortogonális erre az altérre.

a) eset: $\underline{f}(5, 2, -2, 2)$, $\underline{b}_1(2, 1, 1, -1)$, $\underline{b}_2(1, 1, 3, 0)$.

b) eset: $\underline{f}(-3, 5, 9, 3)$, $\underline{b}_1(1, 1, 1, 1)$, $\underline{b}_2(2, -1, 1, 1)$

$\underline{b}_3(2, -7, -1, -1)$.

1723. Mutassuk meg, hogy az előbbi feladatban szereplő $\underline{f}$ vektor az ottani felbontás szerint a) $[\underline{b}_1, \underline{b}_2]$ altérben fekvő komponensével zárja be a legkisebb szöget, ezen altér vektorai közül.

Bilineáris függvények a valós és a komplex n dimenziós térben

1724. Legyen R a $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ valós számhármasok háromdimenziós tere. Legyen megadva R-ben az $A(\underline{x}; \underline{y})$ bilineáris forma az

$$A(\underline{x}; \underline{y}) = \xi_1\eta_1 + 2\xi_2\eta_2 + 3\xi_3\eta_3$$

képlettel.
Válasszuk R-ben bázisnak az

$$\underline{e}_1(1, 1, 1), \quad \underline{e}_2(1, 1, -1), \quad \underline{e}_3(1, -1, -1)$$

vektorokat. Határozzuk meg az $A(\underline{x}; \underline{y})$ bilineáris forma $\underline{\underline{A}}$ mátrixát erre a bázisra nézve.

1725. Az $\underline{e}_1(1, 0, 0)$, $\underline{e}_2(0, 1, 0)$, $\underline{e}_3(0, 0, 1)$ bázisban az $A(\underline{x}; \underline{y})$ bilineáris forma mátrixa

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg ezen bilineáris forma mátrixát az $\underline{f}_1(1, 1, 1)$, $\underline{f}_2(1, 1, -1)$, $\underline{f}_3(1, -1, -1)$ bázisban!

1726.* Mutassuk meg, hogy ha $f(\underline{x})$ és $g(\underline{y})$ lineáris függvények, akkor $f(\underline{x}).g(\underline{y})$ bilineáris függvény az n dimenziós valós euklidesi térben.

1727. Legyen az $\underline{\underline{A}}(\underline{x}, \underline{y})$ bilineáris forma mátrixa $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & j \\ -j & 2 \end{pmatrix}$ az $\underline{e}_1$ (1, 0), $\underline{e}_2$ (0, 1) bázisban. Határozzuk meg ezen bilineáris forma mátrixát az $\underline{f}_1$ (j, 0), $\underline{f}_2$ (1, -j) bázisban.

Lineáris transzformációk és a velük végezhető müveletek

1728. Legyen R a valós háromdimenziós tér, A pedig az a lineáris transzformáció, amely a vektoroknak az xy sikra való vetitéséből áll. Válasszuk bázisnak a tengelyek irányába mutató egység vektorokat. Mi lesz ebben a bázisban az A transzformáció mátrixa?

1729. Határozzuk meg az előző feladat transzformációjának a mátrixát az $\underline{e}'_1$, $\underline{e}'_2$, $\underline{e}'_3$ bázisra vonatkozólag, ahol $\underline{e}'_1 = \underline{e}_1$, $\underline{e}'_2 = \underline{e}_2$, $\underline{e}'_3 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$.

1730. Legyen az $\underline{e}_1$ (1, 0, 0), $\underline{e}_2$ (0, 1, 0), $\underline{e}_3$ (0, 0, 1) bázisban az A transzformáció mátrixa

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg ezen transzformáció mátrixát az $\underline{f}_1$ (1, 1, 1), $\underline{f}_2$ (1, 1, -1), $\underline{f}_3$ (1, -1, -1) bázisban.

1731. Legyen R a valós háromdimenziós tér, és legyen A az origón áthaladó valamely tengely körüli elforgatás. Keressük meg R ezen A transzformációra nézve invariáns altereit.

1732. Irjuk fel annak a valós háromdimenziós vektortérben értelmezett lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ vektorokat az

$\bar{a}_1$ (3; 4; -1)
$\bar{a}_2$ (1; 0; -3)
$\bar{a}_3$ (0; 1; 4)

vektorokba viszi át.

1733. Adjuk meg annak a transzformációnak a mátrixát, mely az

$\underline{x}_1\ (0, 0, 1)$ $\qquad$ $\underline{y}_1\ (2, 3, 5)$

$\underline{x}_2\ (0, 1, 1)$ vektorokat átviszi az $\underline{y}_2\ (1, 0, 0)$ vektorokba,

$\underline{x}_3\ (1, 1, 1)$ $\qquad$ $\underline{y}_3\ (0, 1, -1)$

a) az $\underline{e}_1\ (1, 0, 0)$, $\quad \underline{e}_2\ (0, 1, 0)$ $\quad \underline{e}_3\ (0, 0, 1)$

b) az $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$

bázis választása esetén.

1734. Irjunk fel egy olyan $\underline{\underline{M}}$ mátrixot, amelyre $\underline{\underline{M}}\underline{x} = \underline{0}$ minden $\underline{x}$ vektorra.

1735. Irjunk fel olyan $\underline{\underline{M}}$ mátrixot, amelyre $\underline{\underline{M}}\underline{x} = \underline{x}$ minden $\underline{x}$ vektorra.

1736. Irjunk fel olyan $\underline{\underline{M}}$ mátrixot, amelyre $\underline{\underline{M}}\bar{x} = \bar{a} \times \bar{x}$ minden $\bar{x}$ vektorra. $[\bar{a}\ (a_1, a_2, a_3).]$

1737. Irjunk fel olyan $\underline{\underline{M}}$ mátrixot, amelyre $\underline{\underline{M}}\bar{x} = \bar{a}\ (\bar{b}\ \bar{x})$ minden $\bar{x}$ vektorra.
$[(\bar{a}\ (a_1, a_2, a_3), \quad \bar{b}\ (b_1, b_2, b_3)]$

1738. Határozzuk meg azt a lineáris transzformációt, amely egyenértékü a következő két transzformáció egymásutáni végrehajtásával.

$x_1 = 5y_1 - y_2 + 3y_3,$ $\qquad$ $y_1 = 2z_1 + z_3\ ,$

$x_2 = y_1 - 2y_2,$ $\qquad$ $y_2 = z_2 - 5z_3,$

$x_3 = 7y_2 - y_3,$ $\qquad$ $y_3 = 2z_2\ .$

Lineáris transzformációkra nézve invariáns alterek
Sajátvektor, sajátérték

1739. Legyen R a sik. Az A transzformáció abból álljon, hogy a sik λ_1-szeresen nyujtjuk az X tengely mentén és λ_2-szeresen az Y tengely mentén: Keressük meg ezen A transzformációra nézve invariáns altereit R-nek.

1740. Keressük meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1741. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1742. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1743. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1744. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1745. Határozzuk meg azokat a sajátvektorokat, amelyek az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

trianguláris mátrix a_{11} a_{22} a_{33} sajátértékeinek rendre megfelelnek.

1746.* Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ és $a \neq 0$, akkor a $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei $a\lambda_1$, $a\lambda_2$, ... $a\lambda_n$ ($\underline{\underline{A}}$ n-ed rendü négyzetes mátrix).

1747. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ n-ed rendü négyzetes mátrix, és sajátértékei: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, akkor $\underline{\underline{A}}^m$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots \lambda_n^m$ ha $m > 0$ egész. Ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, akkor $m < 0$ esetén is igaz az állitás. (m itt is egész.)

1748. Irjuk fel a következő mátrixok karakterisztikus polinomját:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 9 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

1749. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1750. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1751. Irjuk fel az $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

mátrix karakterisztikus polinomját, $P(\lambda)$-t. Határozzuk meg a $P(\underline{\underline{A}})$ mátrixot.

1752. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix kielégiti saját karakterisztikus egyenletét!

1753. Legyen $\underline{\underline{A}}$ diagonális mátrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ahol az összes λ_i-k különbözőek. Határozzuk meg azt a legalacsonyabb foku $P(t)$ polinomot, amelyre $P(\underline{\underline{A}}) = \mathbf{0}$.

1754. Igazoljuk, hogy az alábbi $\underline{\underline{A}}$ mátrix karakterisztikus egyenlete nem minimál egyenlet. Határozzuk meg $\underline{\underline{A}}$ minimál egyenletét, majd ellenőrizzük, hogy $\underline{\underline{A}}$ kielégiti-e?

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

1755. Határozzuk meg az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix minimál egyenletét!

1756. Határozzuk meg a következő mátrixok minimál polinomjait:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Határozzuk meg a következő mátrixok minimál egyenletét:

1757. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1758. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1759. Állítsuk elő az $\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mátrixot mátrix polinommal.

Előbb általánosan, majd az $a = -4$ $b = 4$ $c = 2$ választás esetén is.

1760. Határozzuk meg $\sqrt{\underline{\underline{A}}}$ mátrixot, ha $\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, és keressük meg sajátértékeit.

1761. Irjuk fel a következő mátrixokat:

$\sin \underline{\underline{A}} = ?$ a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

1762. $e^{\underline{\underline{A}}} = ?$ a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

1763. $\ln \underline{\underline{B}} = ?$ a) $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

1764. Verifikáljuk a szorzat deriválási szabályát:

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{A}}'\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}'$ a következő mátrixokon:

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \cos t & \cos\alpha \\ \sin t & \sin\alpha \end{pmatrix}$

ahol α konstans, t változó.

Keressük meg a következő mátrixok elemi osztóit:

1765. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

1766. 1. $\begin{pmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 5-x & 30 & -48 \\ 3 & 14-x & -24 \\ 3 & 15 & -25-x \end{pmatrix}$

1767. Vizsgáljuk meg a következő mátrixok ekvivalenciáját:

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Adjungált lineáris transzformációk

1768. Bizonyítsuk be, hogy az euklidesi térben minden $A(\underline{x}, \underline{y})$ bilineáris formának megfelel egy olyan A lineáris transzformáció, amelyre $A(\underline{x}, \underline{y}) \equiv (A\underline{x}, \underline{y})$ ortonormált bázis választása esetén. Majd hatá-

rozzuk meg azt a lineáris transzformációt, amely az $A(\underline{x}, \underline{y}) = \xi_1\bar{\eta}_1 + j\xi_2\bar{\eta}_1 + {}^2\xi_3\bar{\eta}_3$ bilineáris formának megfelel.

1769. Bizonyitsuk be, hogy ortonormált bázis választása esetén, minden A lineáris transzformációnak megfelel az euklidesi térben az $A(\underline{x}, \underline{y}) \equiv (A\,\underline{x}, \underline{y})$ képlet alapján egy bilineáris forma. Majd határozzuk meg azt a bilineáris formát, amely az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 0 & -1 \\ 1 & j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixszal megadott transzformációnak megfelel.

1770. Önadjungált-e az A transzformáció, ha mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1-2j & 2+3j \\ 1+2j & 0 & 5j \\ 2-3j & -5j & 6 \end{pmatrix}$$

1771. Bizonyitsuk be, hogy minden lineáris transzformációt fel lehet irni $A = A_1 + jA_2$ alakban, ahol A_1 és A_2 önadjungált transzformációk, és ez az előállitás egyértelmü.
Legyen az A transzformáció mátrixa

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & j & -2 \\ j & 1 & 1 \\ 0 & 2j & 3 \end{pmatrix}$$

Irjuk fel ezt a transzformációt a fenti alakban.

1772.* Bizonyitsuk be, hogy önadjungált transzformációk valós együtthatókkal képzett lineáris kombinációja ismét önadjungált transzformáció.

1773.* Bizonyitsuk be, hogy ha A tetszőleges lineáris transzformáció, akkor az AA^* és A^*A transzformációk önadjungáltak.

1774.* Bizonyitsuk be, hogy ha A és B önadjungált transzformációk, akkor önadjungáltak az $AB + BA$ és $j(AB - BA)$ transzformációk is.

1775. Legyen az $\underline{e}_1\,(1, 0, 0)$ $\underline{e}_2\,(0, 1, 0)$ $\underline{e}_3\,(0, 0, 1)$ bázisban az A transzformáció mátrixa

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hozzuk a transzformáció mátrixát diagonális alakra.

1776. Emeljük a $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot 28-adik hatványra!

1777.* Bizonyitsuk be, hogy valós euklidesi térben egy transzformáció akkor és csak akkor önadjungált, ha ortogonális normált bázis esetén a mátrixa szimmetrikus.

1778.* Bizonyitsuk be, hogy két unitér transzformáció szorzata ismét unitér transzformáció.

1779.* Bizonyitsuk be, hogy ortonormált bázist ortonormált bázisba átvivő transzformáció unitér.

1780. Határozzuk meg annak a transzformációnak a mátrixát, amely az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ bázist a $\underline{g}_1$, $\underline{g}_2$, $\underline{g}_3$ bázisba viszi át.
$\underline{e}_1$ (1, 0, 0), $\underline{e}_2$ (0, 1, 0), $\underline{e}_3$ (0, 0, 1), $\underline{g}_1$ (0, j, 0), $\underline{g}_2$ (0, 0, j), $\underline{g}_3$ (j, 0, 0). Határozzuk meg az $\underline{a}$ (1, 2, j) vektor transzformáltjának a hosszát.

1781.* Bizonyitsuk be, hogy az olyan transzformáció, amely minden vektor hosszát változatlanul hagyja, unitér.

1782.* Bizonyitsuk be, hogy unitér transzformáció minden sajátértéke egységnyi abszolut értékü. Legyen az U transzformáció mátrixa

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg sajátértékeit.

1783. Bizonyitsuk be, hogy ha az U transzformáció mátrixa a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mátrix, ahol $|\lambda_i| = 1$, akkor U unitér transzformáció.

Ortogonális transzformáció valós euklidesi térben

1784. Határozzuk meg annak a transzformációnak a mátrixát, amely az $\underline{e}_1(1, 0, 0)$, $\underline{e}_2(0, 1, 0)$, $\underline{e}_3(0, 0, 1)$ bázist átviszi az $\underline{f}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\underline{f}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\underline{f}_3(0, 0, 1)$ bázisba. Ortogonális-e ez a transzformáció? Határozzuk meg az $\underline{a}(2, 3, 6)$ vektor transzformáltjának az abszolut értékét és a transzformáció sajátértékeit.

1785.* Bizonyitsuk be, hogy két ortogonális transzformáció szorzata ujra ortogonális transzformáció.

1786. Bizonyitsuk be, hogy a 2 dimenziós valós euklidesi tér minden ortogonális transzformációjának mátrixa, melynek determinánsa +1,

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

alakban irható, ami a φ szöggel való eiforgatás mátrixa.

1787. Bizonyitsuk be, hogy ha a valós n dimenziós tér A transzformációjának mátrixa egy ortonormált bázisban

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \sum a_{\alpha_i} a_{\alpha_k} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = k \\ 0 & \text{ha } i \neq k, \end{cases}$$

akkor A ortogonális transzformáció.

1788.* Bizonyitsuk be, hogy ha a valós euklidesi tér egy A lineáris transzformációja megtartja a vektorok hosszát, akkor ortogonális.

1789.* Bizonyitsuk be, hogy két valódi ortogonális transzformáció szorzata valódi, egy valódi és egy nem valódi ort. transzformáció szorzata nem valódi. (Valódinak nevezünk egy ortogonális transzformációt akkor, ha mátrixának determinánsa +1. Nem valódinak pedig akkor, ha mátrixának determinánsa -1.)

1790. Valódi-e az az ortogonális transzformáció, melynek mátrixa

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

2. HALMAZELMÉLET. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

21. HALMAZELMÉLETI ALAPFOGALMAK

2100.* Jelöljük:
A-val: a 2-vel osztható valós számok halmazát,
B-vel: a 3-mal osztható valós számok halmazát,
C-vel: a 4-gyel osztható valós számok halmazát.

Képezzük páronként két-két halmaz egyesitését, közös részét (metszetét) és különbségét. Milyen számokból állnak a kapott halmazok?

2101. Jelöljük:
M-el: Magyarország lakóinak a halmazát,
F-el: a világ férfi lakóinak a halmazát,
A-val: a világ analfabétáinak a halmazát.

Fejezzük ki ezekkel azokat a halmazokat, amelyek a következő személyeket tartalmazzák:
a) Az összes külföldi analfabétát.
b) Az összes analfabéta férfit.
c) A világ teljes férfi lakosságát és a magyarországi nőket.
d) Az irástudó magyar férfiakat.
e) Az irástudó magyar nőket.
f) A magyar analfabéta nőket és a külföldi irástudó férfiakat.

2102. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt halmazok. Hozzuk egyszerübb alakra a $[(A - B) \cap (B - C)] \cup (C - A)$ kifejezést.

2103. Álljon fenn az A, B, C halmazokra az $A \supset B \supset C$ összefüggés. Hozzuk egyszerübb alakra a $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) - (A \cap B \cap C)$ kifejezést.
Szemléltessük sikidomokkal a következő feladatokban szereplő halmazokat, vizsgáljuk meg nem nyiltak, vagy zártak-e.

2104. $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq 2\}$

2105. $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 2\}$

2106. $C = \{(x, y) : |x| < y < 3\}$

2107. $D = \{(x, y) : |x| < 2, \ |y| < 3\}$

2108. $F = \{(x, y) : x \geqq 0, \quad y < -2\}$

Igazoljuk, hogy az alábbi összefüggések tetszőleges A, B, C, D halmazokra fennállnak:

2109.* $A \subset (A - B) \cup B$

2110.* $(A \cup B) - B \subset A$

2111.* $A - C \subset (A - B) \cup (B - C)$

2112.* $A - (A - B) = B - (B - A)$

2113.* $A - (A - B) - (A - C) = A \cap B \cap C$

2114.* $(A - C) \cap (B - D) = (A \cap B) - (C \cup D)$

2115.* $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

2116.* $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

2117.* $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B = (A \cap C) - (B \cap C)$

2118.* $(A - B) \cup C = [(A \cup C) - B] \cup (B \cap C)$

2119.* $A \cap B \cap C = A - \{A - [B - (B - C)]\}$

2120.* $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

2121.* $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

2122.* Igazoljuk, hogy $A - B \subset C$ és $A \subset B \cup C$ ekvivalens állítások.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi számhalmazok közül melyiknek van alsó, ill. felső határa és ez hozzátartozik-e az adott halmazhoz?

2123.* Negativ egész számok halmaza.

2124. Negativ valós számok halmaza.

2125. Az 1-nél nem kisebb valós számok halmaza.

2126. A 2-nél kisebb abszolut értékü valós számok halmaza.

2127. A 3-nál nem nagyobb abszolut értékü valós számok halmaza.

2128. Az 1-nél nagyobb abszolut értékü valós számok halmaza.

2129. A 2 szám 2 sugaru környezetébe eső valós számok halmaza.

2130. Az $x^2 + 3x + 2 = 0$ egyenlet gyökeinek a halmaza.

2131. Azon számok halmaza, melyekre az $f(x) = x(x-1)(x-2)$ függvény nem negativ értéket vesz fel.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi halmazok alsó, ill. felső határa - amennyiben létezik - hozzátartozik-e az adott halmazhoz?

2132. $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ végtelen tizedestörttel megadható számok halmaza, ha a_i nem mind 9-es.

2133. $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ végtelen tizedestörttel megadható számok halmaza, ha a_i nem mind egyenlő.

2134. Azoknak a racionális számoknak a halmaza, melyeknek négyzete $\leqq 10$.

2135. Azoknak az irracionális számoknak a halmaza, melyeknek köbe $\leqq 8$.

2136. Azoknak a valós számoknak a halmaza, melyeknek négyzete > 2

2137. Az $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ alaku számok halmaza, ahol $n = 1, 2, \dots$

Vizsgáljuk meg, hogy az $x = 0$, $y = 0$ pont milyen kapcsolatban van a következő halmazokkal: (Lehetséges esetek: hozzájuk tartozik, nem tartozik hozzájuk, belső pont, határpont, külső pont, torlódási pont.)

2138. $\left\{ (x, y) ; \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{n} \right\}$ ahol $n = 1, 2, \dots$

2139. $\left\{ (x, y) ; \quad x = 0, \quad y \text{ egész} \right\}$

2140. $\left\{ (x, y) ; \quad y \geqq x^2 \right\}$

2141. $\left\{ \text{az } (1, 0) \text{ pont kettő sugaru környezete} \right\}$

2142. $\left\{ (x, y) ; \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{n} \right\}$ ahol $n = 1, 2, \dots$

Szemléltessük az alábbi ponthalmazokat az XYZ derékszögü koordinátarendszerben, és vizsgáljuk meg, hogy nem zártak vagy nyiltak-e:

2143. $\{(x, y, z);\quad 0 > x > -1\}$

2144. $\{(x, y, z);\ |z| \leqq 1;\quad |y| < 2\}$

2145. $\{(x, y, z);\quad 0 < x < 1,\quad -1 < y < 1,\quad -2 \leqq z \leqq 0\}$

2146. $\{(x, y, z);\quad x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$

2147. $\{(x, y, z);\quad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geqq 3\}$

2148. $\{(x, y, z);\quad 0 \leqq z \leqq 4,\quad x^2 + 4y^2 = 4\}$

2149. $\{(x, y, z);\ x^2 - y^2 = 4,\quad 0 \leqq z \leqq 1\}$

22. AZ EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY FOGALMA, ÁBRÁZOLÁSA (FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓ)

Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét.

2200. $y = \dfrac{3}{2x+1}$

2201. $y = \sqrt{9 - x^2}$

2202. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{x}$

2203. $y = \lg x^2$

2204. $y = {}^{2}\log(x^2 - 1)$

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

2205. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \leqq -2 \\ 0, & \text{ha } -2 < x < 1 \\ -1, & \text{ha } 1 \leqq x \end{cases}$

2206. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } -3 \leqq x < -2 \\ 1, & \text{ha } x = -2 \\ -x, & \text{ha } -2 < x < 0 \\ x-2, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq 2 \end{cases}$

2207. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ egész szám} \\ 1, & \text{ha az } x\text{-et közvetlenül megelőző egész szám páros} \\ -1, & \text{ha az } x\text{-et közvetlenül megelőző egész szám páratlan} \end{cases}$

2208. $f(x) = [x]$

/ $[x]$ = a legnagyobb egész szám, amely $\leqq x$ /

2209. $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$

2210. $f(x) = x - |x|$

2211.* $f(x) = x \operatorname{sg}(\sin x)$

2212. $y = |x - 4|$

2213. $y = |5 + x| - 4$

2214. $y = -|x+3| + 2$

Páros és páratlan függvények

Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyik páros, melyik páratlan, és melyik nem tartozik egyik csoportba sem.

2215. $y = \frac{1}{x^3}$

2216. $y = 4x^2 - \frac{1}{x^4 + 2}$

2217. $y = x - x^2$

2218. $y = \frac{x}{x^2 + 4x^6}$

2219. $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2}$

2220. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$

2221.* $y = x^2 \sin x$

2222. $y = \frac{\cos 2x}{x^4}$

Inverz függvények

Határozzuk meg, és ábrázoljuk az alábbi függvények inverzeit. Állapítsuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát, értékkészletét. Az adott függvények közül melyeknek létezik egyértékű inverze?

2223. $y = 1 + x^2$

2224. $y = \frac{2x}{x - 1}$

2225. $y = 2x^3$

2226. $y = \begin{cases} x^4 - 3 & \text{ha } x \geqq 0 \\ x - 3 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

2227.* $y = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{ha } x \leqq 1 \\ -x & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

Racionális függvények

2228. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $P_1(3, 1)$ és a $P_2(-2, 3)$ pontokon átmenő egyenesre, átmegy a $P(1, -2)$ ponton és illeszkedik az (x, y) sikra.

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

2229. $y = 5 - 4x$

2230. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2$

2231. $y = 3 - x^2$

2232.* $y = -2x^2 + 4x - 1$

2233. $y = 2x^2 + 3x + 1$

2234. $y = 4x^2 - 8x$

2235. $y = 2(x - 3)^3$

2236. $y = \frac{1 - 2x^3}{3}$

2237. $y = -x^4 + 3$

2238. $y = \frac{3}{x - 2}$

2239. $y = -\frac{3}{2x}$

2240. $y = \frac{2x + 3}{5x - 4}$

2241.* $y = \frac{2x}{3 - x}$

2242. $y = \frac{1}{(x+2)^3}$

Trigonometrikus függvények

Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

2243. $y = 3 \sin x$

2244. $y = 1 - \cos x$

2245. $y = \operatorname{tg} 2x$

2246.* $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

2247. $y = 2 + \sin x$

2248. $y = 2 \sin x$

2249. $y = 1 - \operatorname{tg} x$

2250. $y = -\operatorname{ctg} x$

2251. $y = \cos \frac{x}{3}$

2252. $y = \sin (x + 2)$

2253.* $y = \sin (3x - 1)$

2254.* $y = 2 \cos \left(\frac{x+2}{3}\right)$

2255.* $y = 2 \sin \left(4x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

2256. $y = 5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 3x$

2257.* $y = \sin^2 x$

2258. $y = \cos^2 2x$

2259. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

a)* $4 \cos x = \frac{1}{\sin x}$

b) $\cos 2x = \sin x - \cos x$

c) $\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{8}{3} \sin x \cos x$

d) $\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$

2260. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

a) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

b) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$

c)* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$

d) $\frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\sin 2\alpha \cos\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$

2261. Alakitsuk át összeggé a következő szorzatokat:

a) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}$ b) $\cos 2x \cos(x-1)$ c) $\sin\frac{3x}{2}\sin(2x+1)$

2262. Számitsuk ki logarléc pontossággal az alábbi szögfüggvények értékét:

a) $\sin 10$ b) $\sin 0,02$

c) $\cos 235^{\circ}$ d)* $\operatorname{tg}(-1,5)$

Egyszerü és összetett harmonikus rezgések

2263. Keressük meg az alábbi $y = A\sin(wt+\varphi_0)$ alakban megadott rezgőmozgások jellemző adatait: amplitudó (A), periódus (T), rezgésszám ($\frac{1}{T}$), kezdőfázis (φ_0).

a) $y = 2\sin(3t+5)$ b) $y = \sin(\frac{t-1}{2})$

2264. Határozzuk meg az alábbi összetett rezgőmozgások periódusait. Állapitsuk meg, melyek azok a rezgőmozgások, amelyek felirhatók $y = A\sin(wx+\varphi_0)$ alakban.

a) $y = 2\sin(3x+3)+\sin 2x$ b) $y = 3\sin(3x+5)+3\sin(x+3)$

c) $y = \sin x + 3\cos x$ d) $y = \cos(2x+3) - \sin(2x+1)$

e) $y = \sin\frac{\pi}{3}x + \sin\frac{\pi}{4}x$ f) $y = 3\sin 3x + 2\sin(3x+4)$

2265. Határozzuk meg az alábbi rezgések eredőjét.
$y = A\sin(wt+\varphi)$ alakban:

a)* $y = \sin t + \cos t$ b) $y = 2\sin t + \frac{\cos t}{2}$

c) $y = 3\sin t + 2\cos(t+\frac{\pi}{4})$ d) $y = \sin(t-2)+2\sin(t+4)$

e) $y = -3\sin 2t + 4\cos 2t$

Trigonometrikus függvények inverz függvényei

(Ciklometrikus függvények)

Képezzük az alábbi trigonometrikus függvények inverzeit. Állapitsuk meg az inverz függvények értelmezési tartományát valamint a főérték érték-készletét.

2266.* $y = 1 + \cos x$

2267. $y = \frac{1}{2} \sin x$

2268. $y = \cos (2x + 1)$

2269. $y = 2 \sin (3x + 2) + 1$

2270. $y = \operatorname{tg} 2x$

2271. $y = 3 + \operatorname{tg} x$

Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, érték-készletét és ábrázoljuk a függvényeket.

2272. $y = \operatorname{Arc} \cos (x+2)$

2273.* $y = \operatorname{Arcsin} (1 - x)$

2274. $y = 3 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2} + 1$

2275. $y = \frac{1}{3} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x - 5}{2}\right)$

2276. Irjuk fel egyszerübb alakban az alábbi függvényeket.

a) $y = \cos (\arccos 2x) + \cos (\arcsin x)$

b)* $y = \cos (\operatorname{Arcsin} x)$

c) $y = \operatorname{tg} (\arcsin x) + \sin (\operatorname{arc} \cos 2x)$

d) $y = \sin (\operatorname{Arccos} 2x) - \sin (2 \arcsin x)$

e) $y = \cos^2 (\operatorname{arctg} \frac{x}{2}) \cdot \sin\left[\operatorname{arctg} (2x - 1)\right]$

2277. Számitsuk ki az alábbi kifejezések értékét.

a)* $y = \cos\left[\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \operatorname{tg}\left[\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

b) $y = \cos\left[\operatorname{Arctg} (-8)\right] - \sin\left[\operatorname{Arccos} 0,7\right]$

c) $y = \operatorname{Arcsin} (-0,36) + \operatorname{Arccos} (0,83)$

d) $y = \operatorname{Arctg} (-0,5) \cdot \operatorname{Arctg} 5$

Exponenciális és logaritmus függvények

2278. Határozzuk meg az alábbi függvények inverzeit. Állapitsuk meg az inverz függvények értelmezési tartományát, értékkészletét.

a) $y = 3^{x+2}$ b) $y = e^{x-1} + 2$

c) $y = {}^{2}\log(3x-1) - 4$ d) $y = 3\,{}^{10}\log\left(\frac{x-1}{4}\right)$

Határozzuk meg az alábbi függvények inverzeit. Ábrázoljuk az eredeti és az inverz függvényeket és határozzuk meg a függvényértéket logarlécpontossággal az $x = 2$ helyen.

2279. $y = 2^x$ 2280.* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2281. $y = e^{x+1}$ 2282. $y = 10^x - 3$

2283. $y = 2^{x-3} + 1$ 2284. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

2285. $y = 1 + {}^{3}\log(x+2)$ 2286. $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x-1)$

Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

2287.* $y = \lg(\lg x) + \lg(\cos x)$ 2288.* $y = \sqrt{\lg(\sin x)} + \ln(3 - x^2)$

2289. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket logarléc segitségével.

a) $y = \lg 35{,}2 + \lg 0{,}13$ b) $y = e^{3{,}4} - 10^{2{,}1}$

c) $y = e^{0{,}28} - e^{0{,}028}$ d) $y = \ln 15{,}5 \cdot \ln 250$

2290. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket ill. egyenletrendszert.

a) $4^x + 2^{x+1} = 80$ b) $2^{\sqrt{x+1}} \cdot 4^{x-4} = 1$

c) $x(1 - \lg 5) = \lg(2^x + x - 1)$ d) ${}^{2}\log x + {}^{4}\log x = 1$

e) $\left(\lg \frac{x}{2}\right)^2 + (\lg x)^2 = (\lg 2x)^2$ f) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 2 \\ 3^{\lg(2y-x)} = 1 \end{cases}$

Az általánositott hatványfüggvény

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, számitsuk ki a függvény értékét az $x = 1,5$ helyen, és készitsük el a függvény grafikonját.

2291. $y = x^{e} - 1$

2292. $y = 2x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

2293. $y = \sqrt{x^{-\pi}}$

A hiperbolikus függvények és inverzeik

Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. Ábrázoljuk a függvényeket, és az inverz függvényeket.

2294. $y = \operatorname{sh} 2x$

2295. $y = 2 \operatorname{ch} (x - 1)$

2296. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} x$

2297. $y = 2 + \operatorname{cth} (x - 3)$

2298. $y = \operatorname{arth} \frac{x}{3}$

2299. Irjuk fel egyszerübb alakban az alábbi függvényeket:

a) $y = \operatorname{sh} (\operatorname{ar\,ch} 2x) - \operatorname{ch} (\operatorname{ar\,sh} x)$

b)* $y = \operatorname{th} \left[\operatorname{ar\,sh} (x + 1)\right] + \operatorname{sh} (2 \operatorname{ar\,ch} x)$

23. AZ EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

Igazoljuk a függvény határértékének definiciója alapján, hogy:

2300.* $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}$

2301. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$

2302.* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x + 6}{3x + 1} = \frac{5}{3}$

Határozzuk meg - amennyiben létezik - az f(x) függvény határértékét $x \to a$ esetén. Ha létezik A véges határérték, akkor határozzuk meg, hogy az $x = a$ hely milyen δ sugaru környezetében közelitik már meg a függvényértékek a határértéket ε-nál kisebb hibával.

2303. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + \frac{x}{2}}$, $a = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$

2304. $f(x) = x^2 + 5$, $a = 1$, $\varepsilon = 10^{-2}$

2305. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$, $a = -3$, $\varepsilon = 10^{-1}$

2306. $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 3}$, $a = 3$, $\varepsilon = 10^{-2}$

Határozzuk meg - amennyiben létezik - az f(x) függvény határértékét $x \to +\infty$ esetén. Ha létezik A véges határérték, akkor határozzunk meg adott $\varepsilon > 0$-hoz olyan $x_p(\varepsilon)$ értéket, melyre $|f(x) - A| < \varepsilon$, hacsak $x > x_p(\varepsilon)$.

2307.* $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$, $\varepsilon = 10^{-2}$

2308. $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{1 - 4x}$, $\varepsilon = 10^{-2}$

2309. $f(x) = 2^{-x}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Határozzuk meg - amennyiben létezik - az f(x) függvény határértékét $x \to -\infty$ esetén. Ha létezik A véges határérték, akkor határozzunk meg adott $\varepsilon > 0$-hoz olyan $x_R(\varepsilon)$ számot, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad x < x_R(\varepsilon)$$

2310. $f(x) = \dfrac{5 - 2x}{1 - 4x}$, $\varepsilon = 10^{-1}$

2311. $f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$, $\varepsilon = 10^{-1}$

Legyen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. Határozzunk meg előre megadott P számhoz olyan $c(P) > 0$ számot, hogy:

$f(x) > P$, hacsak $0 < |x - a| < \delta(P)$.

2312.* $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 0$, $P = 10^4$

2313. $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$, $a = -1$, $P = 10^3$

Legyen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. Határozzunk meg adott R számhoz olyan $\delta(R) > 0$ számot, hogy: $f(x) < R$, ha $0 < |x - a| < \delta(R)$.

2314. $f(x) = \frac{4-4x^2}{x^4-x^2}$, $a = 0$, $R = -10^4$

2315. $f(x) = 2 - \left|\frac{1}{x-3}\right|$, $a = 3$, $R = -10^3$

2316.* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1-x)^2+2}{5} = +\infty$. Határozzunk meg adott $P = 10^3$ számhoz olyan $x_k(P)$ számot, hogy

$$\frac{(1-x)^2+2}{5} > P, \quad \text{hacsak} \quad x > x_k(P).$$

2317.* $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 2) = +\infty$. Határozzunk meg adott $P = 10^9$ számhoz olyan $x_1(P)$ számot, hogy

$$-2x^3 + 2 > P, \quad \text{hacsak} \quad x < x_1(P).$$

2318. $f(x) = 1 - 3^{-x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Határozzunk meg adott $R = -10^4$ számhoz olyan $x_1(R)$ számot, hogy:

$$f(x) < R, \quad \text{hacsak} \quad x < x_1(R)$$

Határozzuk meg az alábbi függvények jobb, illetve bal oldali határértékét az adott $\underline{a}$ helyen.

2319.* $y = \frac{|x-2|}{x-2}$, $a = 2$.

2320. $y = \frac{x-2}{3+x}$, $a = -3$.

2321. $y = \operatorname{Arctg}\frac{1}{x}$, $a = 0$.

2322. $y = 3^{\frac{x}{x-1}}$, $a = 1$.

2323. $y = \frac{x^2-1}{x^2+4x}$, $a = -4$.

2324. $y = \frac{x^2+3x-2}{x^3+2x}$, $a = 0$.

2325. $y = e^{\frac{x}{1-x^2}}$, $a = -1$.

2326. $y = \frac{x}{\sin x}$, $a = \pi$.

2327. Határozzuk meg - amennyiben létezik - az $f(x) = x^2 + \frac{x}{|x|}$ függvény bal oldali határértékét az $a = 0$ helyen. Ha létezik bal oldali véges A határérték, akkor határozzuk meg adott $\varepsilon = 10^{-2}$-hez olyan $\delta(\varepsilon) > 0$-t, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad 0 < a - x < \delta(\varepsilon)$$

2328. Határozzuk meg - amennyiben létezik - az $f(x) = e^{-\frac{1}{x+4}}$, függvény jobb oldali határértékét az $a = -4$ helyen. Ha létezik véges A határérték, akkor határozzuk meg adott $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz olyan $\delta(\varepsilon) > 0$-t, hogy

$$|f(x) - A| > \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad 0 < x - a < \delta(\varepsilon).$$

2329. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x}{x+4}$ függvény bal oldali határértékét az $a = -4$ helyen. Határozzunk meg adott $P = 10^3$ számhoz olyan $\delta(P) > 0$-t, amelyre:

$$f(x) > P, \qquad \text{ha} \qquad 0 < a - x < \delta(P).$$

Határozzuk meg az alábbi határértékeket.

2330.* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$

2331. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$

2332. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$

2333. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$

2334. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$

2335. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ (n pozitiv egész)

2336. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$ (m és n pozitiv egész)

2337. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3+x)^2 - 9}{x}$

2338. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$

2339. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$

2340. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 26x^2}{4x^2 - 2}$

2341. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 - 4x^2 + 2}{4x^2 + 5x + 1}$

2342. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 3}{5 - x^6}$

2343.* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6} - x}{3\sqrt[4]{x^8 - 7x^3 + 4}}$

2344. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{3 - x^3}}{\sqrt{x} + \sqrt{2 + x^2}}$

2345.* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2 + 3}}{x + 1}$

2346. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt[5]{x^5 - 3x^2}}$

2347. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

2348. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$

2349. $\lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x^2}$

2350.* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3 + x + x^2} - \sqrt{9 - 2x + x^2}}{x^2 - 3x + 2}$

2351. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 4x + 8}}$

2352.* $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

2353. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

2354. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$

2355. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$

2356. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x(\sqrt{x^2+1} - x)\right]$

2357. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$

2358.* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

2359. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$

2360.* $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

2361. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3x^2}$

2362. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$

2363. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

2364. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

2365. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^4 + x^3}{x(1-\cos x)}$

2366.* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$

2367. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{Arc\,tg} 2x}{x}$

2368.* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$

2369. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m, n pozitív egész)

2370. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$

2371. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

Határozzuk meg - amennyiben létezik - az f(x) függvény jobb és bal oldali határértékét a szakadási helyeken, valamint $x \to +\infty$, illetve $x \to -\infty$ esetén.

2372. $f(x) = \dfrac{(x-1)\operatorname{Arc\,tg} x}{2x}$

2373. $f(x) = \dfrac{2x}{x - \sin x}$

2374.* $f(x) = \dfrac{x^2 + 3^x}{3^x - 2^x} + \dfrac{|x-2|}{x-2}$

Vizsgáljuk meg, hol nem folytonos az alábbi f(x) függvény és állapitsuk meg, hogy ezeken a helyeken milyen jellegü szakadása van?

2375. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x - 4}$

2376. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + x}{x^2 + 3x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 2, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

2377. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 3 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

2378. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 4x}, & \text{ha } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \\ 5, & \text{ha } x = 0 \\ 2, & \text{ha } x = -4 \end{cases}$

2379. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$

2380. $f(x) = 2\dfrac{x}{|x|} + 3x$

2381. $f(x) = \dfrac{1}{|x-3|} + \dfrac{1}{x-3}$

2382. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2 + 3x + 2}, & \text{ha } x < -1 \\ x^2, & \text{ha } -1 \leqq x \leqq 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

2383. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 1 \\ 2, & \text{ha } x = 2 \\ \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} & \text{különben} \end{cases}$

2384. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

2385. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x(x+1)}$

2386. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

2387. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x > 0 \\ \frac{x-2}{x+1}, & \text{ha } x \leqq 0 \end{cases}$

2388. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$

2389. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x < 2 \\ e^{\frac{2x+1}{x-3}}, & \text{ha } x \geqq 2 \end{cases}$

2390. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{2-x}{x^2(x-5)}}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 3, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

2391. $f(x) = \begin{cases} \ln x^2, & \text{ha } -\infty < x \leqq -1 \\ \operatorname{arth} x, & \text{ha } -1 < x < 0 \\ e^{\frac{1}{x^2-1}}, & \text{ha } 0 \leqq x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2-2x}, & \text{ha } 1 \leqq x < +\infty \end{cases}$

2392. $f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{1+x}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

2393. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+3^{\frac{1}{x-2}}}{1-3^{\frac{1}{x-2}}}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 5, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

2394. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+2^{\frac{1}{x+3}}}{1-2^{\frac{2}{x+3}}}, & \text{ha } x \leqq -2 \\ \dfrac{\sin x}{e^{x}-1}, & \text{ha } -2 < x < 0 \\ \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}}, & \text{ha } 0 \leqq x \end{cases}$

2395. Adjunk meg egy olyan racionális törtfüggvényt, amelynek megszüntethető szakadása van $x = 0$-nál és $x = -1$-nél; nullahelye van $x = +1$-nél és nem megszüntethető szingularitása van $x = 2$-nél.

Állapitsuk meg, mely intervallumokban folytonosak az alábbi függvények:

2396. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{ha } x < 0 \\ \dfrac{x}{2x-3}, & \text{ha } x \geqq 0 \end{cases}$

2397. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcth} x, & \text{ha } |x| > 1 \\ \dfrac{\sin x}{x^2-x}, & \text{ha } |x| \leqq 1 \end{cases}$

2398. $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{2} + \ln (x+1)$

2399. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{x+1}, & \text{ha} \quad x \leqq 0 \\ \dfrac{\pi}{4} - x, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq 2 \\ \dfrac{1}{\lg(x-2)}, & \text{ha} \quad 2 < x \end{cases}$

24. AZ EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY DIFFERENCIÁLSZÁMITÁSA

Határozzuk meg az x helyhez tartozó különbségi hányados határértékeként az alábbi függvények x helyhez tartozó differenciálhányadosát:

2400.* $y = x^2$

2401.* $y = \sqrt{x}$

2402. $y = \dfrac{1}{x}$

2403. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2404. $y = 3^x$

Számitsuk ki az alábbi függvények első differenciálhányadosát:

2405. $y = \dfrac{8x^{11} - 7x^9 + 5x^4}{x^2}$

2406. $y = \dfrac{9 - x^2}{x+3}$

2407. $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^4}$

2408. $y = 2 + \dfrac{x^2-1}{x} - \dfrac{x+1}{x^3}$

2409. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

2410. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x + x^3 + x^4}{\sqrt[3]{x}}$

2411* $u = 3v^2 - \dfrac{1}{v^3}$ $\quad \left[\dfrac{du}{dv}\right]_{v=1} = ?$

2412. $u + 2\sqrt{v} = 7$ $\quad \left[\dfrac{du}{dv}\right]_{v=4} = ?$

2413. $2s - 5r^2 = \dfrac{3}{r}$ $\quad \left[\dfrac{ds}{dr}\right]_{r=2} = ?$

2414. $r = 2\sqrt{s^3} - \frac{5}{3\sqrt{s}} + 1$ $\qquad \frac{dr}{ds} = ?$

2415.* $3u - 2v^3 = 0$ a) $\left[\frac{du}{dv}\right]_{v=2} = ?$

b) $\left[\frac{dv}{du}\right]_{u=1} = ?$

2416. $pv^{1,5} = 2$ a) $\frac{dp}{dv} = ?$

b) $\frac{dv}{dp} = ?$

2417.* $y = \sqrt{x} \cdot (3x - x^2)$

2418. $y = (1 - x^3)(x^2 + 3x)$

2419. $y = (2 + \frac{1}{x^3})(3 - 2x)$

2420. $y = \frac{3x - 1}{2}(x^2 + 6x)$

2421. $y = (x + 2)\sqrt{x^3}$

2422. $y = (\sqrt{x} - 2^2)\sqrt[4]{x}$

2423. $y = (1 + x)(3x^2 + 2x + 1)$

2424. $y = (\frac{x}{2} + 5)(3x^4 - 8x^2)\sqrt{x}$

2425.* $y = \frac{1 + x}{1 - x}$

2426. $y = \frac{2x^2 + 3x}{1 + 2x}$

2427. $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{3x - 1}$

2428. $y = \frac{x^3 + 4}{1 + 2x}$

2429.* $y = \frac{x^3 + x}{x^4 - 1}$

2430. $y = \frac{2x^2 - 4x}{\sqrt{x} - 3x^2}$

2431. $y = \frac{x^3 + x}{x^6 + 1}$

2432.* $y = \sin^2 x$

2433.* $y = \sin x^2$

2434. $y = \sqrt[3]{x - 5x^2}$

2435. $y = \mathrm{tg}^3 x$

2436. $y = \sin\frac{x - 1}{2}$

2437.* $y = \frac{1}{\cos 3x}$

2438. $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \sin 2x$

2439. $y = \frac{x^3}{\sin^2 x}$

2440. $y = \cos (5x^2 - 3x)$

2441. $y = \operatorname{tg} \sqrt{1 - x^2}$

2442. $y = \arcsin 2x$

2443. $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

2444. $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$

2445. $y = \frac{x}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{3}$

2446. $y = \operatorname{arc\,tg}^2 5x$

2447. $y = \arccos \frac{1}{2x}$

2448. $y = \arcsin \sqrt{x - x^2}$

2449. $y = \arcsin \operatorname{tg} x$

2450.* $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$

2451. $y = e^{3x} + \frac{1}{e^x}$

2452.* $y = \frac{2}{e^x} + \sqrt[3]{e^{2x}}$

2453. $y = \left(e^{3x} - e^{4x}\right)^3$

2454. $y = \frac{e^x + e^{x^2}}{1 - e^{2x}}$

2455.* $y = \sqrt{3^x} + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2456. $y = 5^{\sin 2x}$

2457. $y = e^{e^x}$

2458. $y = \cos e^{-3x^2}$

2459. $y = \arcsin e^{2x}$

2460. $y = \frac{e^x}{\cos e^{2x}}$

2461. $y = \ln (5x - 1)$

2462.* $y = \lg \cos x$

2463. $y = \lg \frac{x}{2}$

2464. $y = \ln 3 + \ln^2 (1 - 2x)$

2465. $y = \operatorname{tg} \ln \left(\frac{x}{2} - 1\right)$

2466. $y = \ln \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$

2467. $y = \sin^2 \cos x + 3e^{\ln x}$

2468. $y = \operatorname{arc\,tg} \sin x \cdot \ln 2x$

2469. $y = \ln \arcsin x$

2470. $y = \operatorname{arctg} {}^{3}\log x$

2471. $y = \operatorname{th} 2x \cdot \operatorname{ch} 2x$

2472. $y = \operatorname{sh}^2 6x$

2473. $y = \operatorname{ch} 5x^2$

2474.* $y = e^{3x} \cdot \operatorname{sh} 2x$

2475. $y = x^2 \cdot \operatorname{th} 3x$

2476. $y = \dfrac{x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 5x}$

2477. $y = \operatorname{th}(e^{2x} - e^{x})$

2478. $y = \operatorname{sh} \operatorname{tg} 3x$

2479. $y = \operatorname{sh}\sqrt{5x+1} \cdot \operatorname{ch}(3x^2 - 2x + 1)$

2480. $y = \operatorname{ar\,sh} 5x + \operatorname{ar\,ch} 5x$

2481. $y = \operatorname{ar\,ch} x^4$

2482. $y = \operatorname{ar\,th} \dfrac{1}{x}$

2483. $y = \operatorname{ar\,th}^2 6x$

2484. $y = e^{\operatorname{ar\,sh} \frac{x}{2}}$

2485. $y = x^3 \operatorname{ar\,sh} 4x$

2486. $y = \ln \operatorname{ar\,ch}\sqrt{x}$

2487. $y = \dfrac{\operatorname{ar\,sh} 2x}{\operatorname{ar\,ch} 4x}$

2488.* $y = x^{\frac{1}{x}}$

2489. $y = x^{\sqrt{2} - \sin x}$

2490. $y = x^{\operatorname{arc\,tg} x}$

2491. $y = \sqrt[x]{x^2 - 1}$

2492. $y = (\sin x)^x$

2493. $y = \sin x^x$

Határozzuk meg az alábbi implicit függvényekben y-nak x szerinti differenciálhányadosát az (x_o, y_o) pontban.

2494.* $xy - y^2 - 3 = 0, \quad x_o = 4, \quad y_o = 3$

2495. $3x^2y + 4x + 2y^3 + 1 = 0, \quad x_o = 1, \quad y_o = -1$

2496. $x^2 \sin y + y + x = 0, \quad x_o = \pi, \quad y_o = -\pi$

2497. $3y - x^2 \sin y = 0, \quad x_o = \sqrt{\pi} \quad y_o = \dfrac{\pi}{2}$

2498. $e^{2x+y} + \sin(x+2y) = e^{\frac{\pi}{4}} + 1, \quad x_o = 0, \quad y_o = \frac{\pi}{4}$

2499. $-yx^2 + \operatorname{arc\,tg} y = 0, \quad x_o = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad y_o = 1$

25. A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI

Irjuk fel az alábbi egyenlettel megadott görbe adott pontbeli érintőjének egyenletét.

2500. $y = x^2 + 2x \qquad x_o = 1$

2501. $y = \frac{1}{x^2} \qquad x_o = -1$

2502. $y = -x^2 + 2 \qquad x_o = 0,$

2503. $y = \frac{1}{1+x^2} \qquad x_o = 1,$

2504. $y = \cos x \qquad x_o = \frac{\pi}{3}$

2505. $y = \operatorname{tg} x \qquad x_o = \frac{\pi}{4}$

2506.* $x = 3 \cos t$
$y = 3 \sin t$
$t_o = \frac{\pi}{3}$

2507. $x = 2 \cos t$
$y = \sin t$
$t_o = \frac{3\pi}{2}$

2508. $x = a \operatorname{ch} t$
$y = b \operatorname{sh} t$
$t_o = 1$

2509. $x = 2(t - \sin t)$
$y = 2(1 - \cos t)$
$t_o = \frac{\pi}{4}$

2510. $x = t^2$
$y = 2 \cos t$
$t_o = \pi$

2511. $x = \sin^2 t$
$y = \sin 2t$
$t_o = \frac{\pi}{6}$

2512.* $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ (r, φ polárkoordináták), $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

2513. $r = e^{3\varphi}$ (r, φ polárkoordináták), $\varphi_0 = 0$

2514. $r = \varphi$ (r, φ polárkoordináták), $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

2515. $r = 1 + \cos\varphi$ (r, φ polárkoordináták), $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

Számítsuk ki az alábbi polárkoordinátás egyenlettel megadott görbe érintője és az érintési ponthoz mutató rádiusvektor által bezárt szöget

2516.* $r = \frac{a}{\varphi}$ $a > 0$ 2517. $r = a \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}$

Írjuk fel az alábbi egyenlettel megadott görbe adott pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét.

2518.* $y = \frac{x+1}{x-1}$ $x_0 = 2$

2519. $y = x + \frac{1}{x}$ $x_0 = 4$

2520. $x = t^2 - 1$ $y = t^3 - 4$ $t_0 = 2$

2521. $x = \operatorname{ch} t$ $y = \operatorname{sh} t$ $t_0 = \ln 3$

2522. $x = 4t + t^2$ $y = 2t^2$ $t_0 = 1$

2523. $x = \sin t$ $y = \cos 2t$ $t_0 = \frac{\pi}{6}$

2524. Melyek az $x^2 + y^2 = 25$ kör azon pontjai, melyekben az érintő párhuzamos a $3x - 4y + 7 = 0$ egyenessel?

2525. Keressük meg az $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ görbe azon pontjait, ahol

a) az érintő párhuzamos az X tengellyel

b) az érintő az X tengely pozitív irányával 45°-os szöget zár be.

2526. Keressük meg az $y = \sin x + \cos x$ görbe azon pontjait, ahol az érintő párhuzamos az X tengellyel.

2527. Az $y = x^3 + 1$ görbe mely pontjaiban lesz az érintő:

a) párhuzamos az $y = 3x - 1$ egyenessel?
b) merőleges az $x + 12y - 5 = 0$ egyenesre?

2528. Az $y = \frac{x}{1 - x^2}$ görbének mely pontjaiban lesz az érintőnek az X tengely pozitív irányával bezárt szöge 45°?

2529. Hol metszi a $y = \frac{6x - x^2}{4}$ parabola $x = 2$ helyhez tartozó érintője az X tengelyt?

2530. Milyen szög alatt metszi az Y tengelyt az $y = \sqrt{3} \sin x$ görbe.

2531. Az $y = \frac{ax - x^3}{4}$ görbe "a" milyen értéke mellett metszi az X tengelyt 45°-os szögben az $x = 0$ helyen?

Vizsgáljuk meg az adott pont környezetében az alábbi függvény viselkedését.

2532.* $y = 3x^3 - x^4$ $\quad x_o = 1$

2533. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$ $\quad$ a) $x_1 = -1$
b) $x_2 = 1$

2534. $y = \text{arc tg} \frac{1}{x}$ $\quad x_o = 1$

2535. $y = e^{\sin x}$ $\quad x_o = \frac{\pi}{2}$

Vizsgáljuk meg az alábbi függvények menetét:

2536.* $y = x^3 - x^2 - 2x$

2537. $y = x^2 + 6x + 8$

2538. $y = \frac{6x}{x^2 + 1}$

2539. $y = x + \frac{1}{x}$

2540. $y = x^3 + \frac{1}{5x}$

2541. $y = \frac{x^2}{x + 1}$

2542. $y = (x-2)^2 . (x-3)^2$

2543. $y = \frac{1}{5} \frac{x^2 - 3x - 19}{x + 4}$

2544. $y = x + \sin x$

2545. $y = x + \operatorname{Arc\,tg} x$

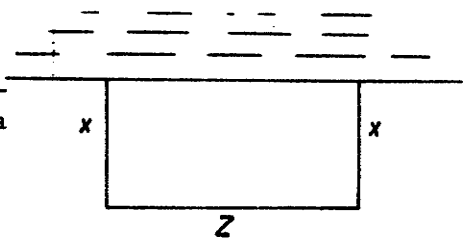
2546. $y = e^x \cdot \cos x$

2547. $y = \ln \sin x$

2548. $y = \ln (1 + x^2)$

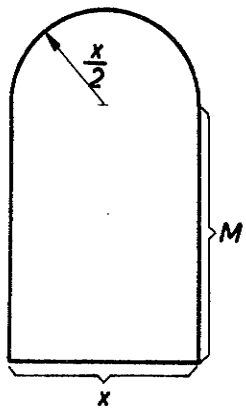
2549.* Osszuk fel 12-t két részre ugy, hogy a részek
a) szorzata maximum legyen,
b) négyzetösszege minimum legyen.

2550. Egy folyó partján egy 3200 m^2 területü, téglalap alaku telket kell elkeriteni, a lehető legrövidebb keritéssel. A folyó partján nem állitunk keritést. Hogyan válasszuk a telek méreteit?



2550.

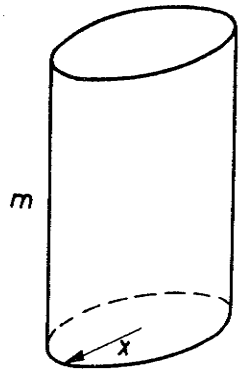
2551. Egy ablak egy téglalapból és föléje rajzolt félkörből áll. Kerülete 4 m. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy területe maximális legyen.



2551.

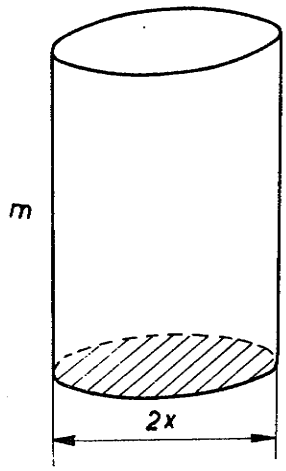
2552. "V" térfogatu, négyzetalapu, felül nyitott tartályt akarunk készitení, a legkevesebb anyagból. Mekkorák legyenek az oldalélek?

2553. 1000 cm^2 felszinü zárt egyenes kör hengerek közül melyiknek a legnagyobb a köbtartalma?



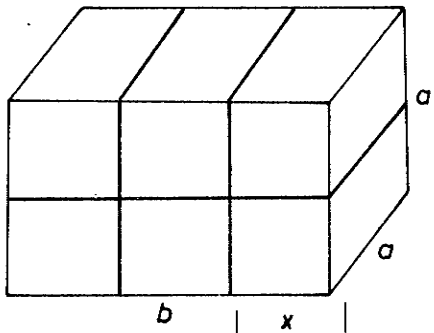
2553.

2554. 1000 cm^2 felszinü felül nyitott hengerek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?



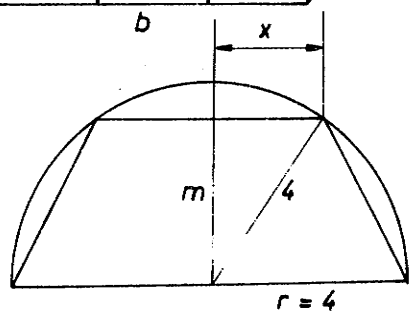
2554.

2555. Egy "V" térfogatu, a és b alapélü, a magasságu csomagot a rajzon látható módon kössünk át zsineggel. Hogyan válasszuk a méreteket, hogy a legkevesebb zsineg kelljen az átkötéshez.



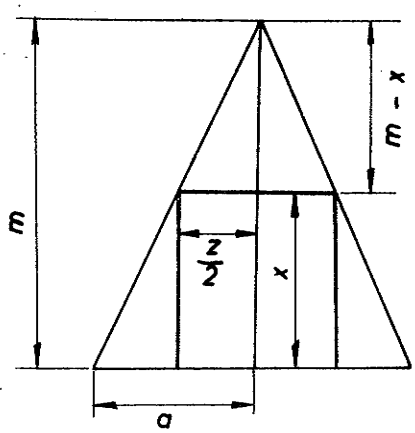
2555.

2556. Az r = 4 cm sugaru félkörbe az átmérőn fekvő maximális területü trapézt rajzolunk. Hogyan kell a trapézt méretezni.



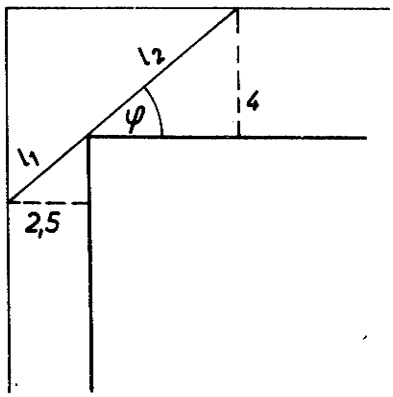
2556.

2557. 2a alapu, m magasságu, egyenlőszáru háromszögbe maximális területü téglalap rajzolandó. Milyen magas lesz a téglalap?



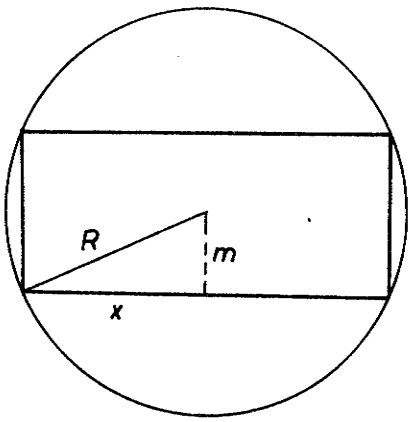
2557.

2558. Derékszögben hajló folyosón milyen széles táblát lehet átvinni, ha a folyósóágak szélessége 4 m és 2,5 m?



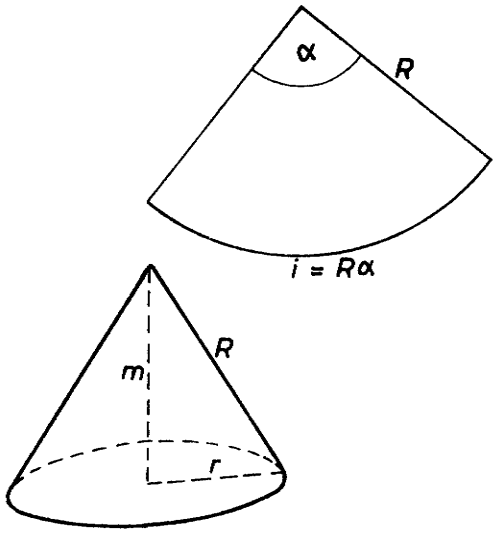
2558.

2559. Egy r sugaru körbe irható derékszögü négyszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe?



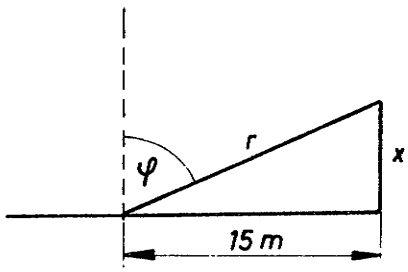
2559.

2560. Egy adott sugaru körcikkből tölcsért formálunk. Milyen középponti szög mellett lesz ennek térfogata a legnagyobb?



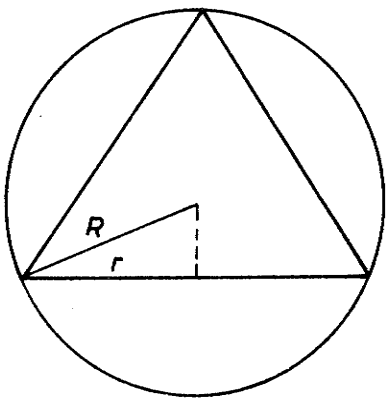
2560.

2561. Az utcai lámpák távolsága 30 m. Az uttest megvilágitása a fényforrás távolságának négyzetével forditva, a beeső fénysugár függőlegessel bezárt szöge cosinusával egyenesen arányos. Milyen magasan kell a lámpákat elhelyezni ahhoz, hogy két lámpa között fele uton az uttest megvilágitása a legjobb legyen?



2561.

2562. Határozzuk meg az adott R sugaru gömbbe beirt maximális térfogatu kup adatait.



2562.

Számitsuk ki az alábbi határértékeket:

2563.* $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^{\alpha} - 3^{\alpha}}{x - 3}$,

2564. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 8}$

2565. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 8}$

2566. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$

2567. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a \ln x}{\ln \sin x}$

2568. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

2569. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}}$

2570. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

2571. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x \cdot e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}$

2572. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$

2573. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} x$

2574. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

2575. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

2576. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x}$

2577. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} 2x}$

2578. $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt{x} \ln x$

2579. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right)$

2580. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

2581.* $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

2582. $\lim\limits_{x \to +0} x^x$

2583. $\lim\limits_{x \to +0} \left(\dfrac{1}{x} \right)^{\sin x}$

Határozzuk meg az alábbi függvény $y = ax + b$ alaku asszimptotái-nak egyenletét:

2584.* $y = \frac{x^2}{1+x}$

2585. $y = \frac{1}{1+e^{-x^2}}$

2586. $y = \frac{x^3 - 2x^2}{3x^2 - 1}$

2587. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x+2}$

2588. $y = \frac{2x}{x+4}$

Számitsuk ki az alábbi függvény görbéjéhez az adott pontban illeszkedő simuló kör adatait.:

2589.* $y = x^3 - 1$ $x_o = 1$

2590. $y = x^2$ $x_o = 0$

2591. $y = e^x$ $x_o = 0$

2592. $y = \ln x$ $x_o = 1$

2593. $y = \frac{1}{x}$ $x_o = 2$

2594.* Számitsuk ki $\sin 30^o = \frac{1}{2}$ értékének felhasználásával $\sin 31^o$ közelitő értékét.

2595. Egy kocka élei 10 cm hosszuak. Mekkora lesz közelitően a térfogata, ha éleit 0,2 cm-rel megnöveljük?

2596.* Hány cm-rel kell növelni egy $V = 1000$ l térfogatu gömb sugarát, hogy a térfogat közelitően

a) 1 b) 5 c) 10 literrel növekedjék?

2597. Egy négyzetalapu hasáb méretei: $a = 0,5$ dm, $m = 4$ dm, térfogata $V = 1$ dm^3. a kismértékü változtatása m milyen megváltozását eredményezi, ha V mindig 1 marad?

2598. Egy négyzetalapu hasáb alapéle $a = 30$ cm, magassága $m = 50$ cm. Növeljük alapélét 31 cm-re. Mennyivel növekszik közelitően a térfogat?

2599. Keressük meg az alábbi egyenletek egyik gyökét közelitő módszerrel.

a) $f(x) = x^3 + 1,1x^2 + 0,9x - 1,4 = 0$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $x - e^{-x} = 0$ d) $e^x = 4x$

e) $x^3 - 6x + 3 = 0$ f) $x^4 + 10x - 100 = 0$

g) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ h) $x + e^x = 0$

i) $x = \cos x$ j) $x^2 = \cos x$

26. HATÁROZATLAN ÉS HATÁROZOTT INTEGRÁL

Alapintegrálokra visszavezethető egyszerü feladatok

2600. $\int \frac{4 + 7x + x^4 + x^7}{\sqrt{x}} dx$

2601. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$

2602. $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

2603. $\int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) dx$

2604. $\int \frac{2 - x^2}{x^2 - 1} dx$

2605. $\int_{-3}^{0} \frac{3}{\sqrt{1 - 5x}} dx$

2606. $\int \frac{3}{1 - 5x} dx$

2607. $\int \frac{3}{(1-5x)^2} dx$

2608. $\int \frac{3}{1 - 5x^2} dx$

2609. $\int \frac{x}{1 - 2x} dx$

2610. $\int_0^1 \frac{1 - x}{1 + \sqrt{x}} dx$

2611. $\int \frac{1}{e^{3-x}} dx$

2612. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{3x}}\,dx$

2613. $\int \frac{e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{3}{2}x}}{4e^{\frac{x}{4}}}\,dx$

2614. $\int_0^2 \frac{1-e^{x}}{1+e^{\frac{x}{2}}}\,dx$

2615. $\int \left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)^3 dx$

2616. $\int (\cos 4x - \sin\frac{x}{5})\,dx$

2617. $\int \left[\operatorname{ch}\frac{1-x}{3} - \operatorname{sh}(1+6x)\right] dx$

2618. $\int \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(1+x)} + \frac{1}{\cos^2 4x}\right] dx$

2619. $\int (1-\operatorname{th}^2 3x)\,dx$

2620. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\sin(3x) - 2\right]^2 dx$

2621.* $\int \frac{2\,dx}{\operatorname{ch} 2x + 1}$

Trigonometrikus szorzat integrálok

2622. $\int \sin 7x \sin 3x\,dx$

2623. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \sin 6x\,dx$

2624. $\int \cos 3x \cos 8x\,dx$

2625. $\int \sin 0,4x \cos 0,6x\,dx$

2626. $\int_0^{\pi} \sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{3}x\,dx$

2627. $\int \sin 0,1x \sin 0,2x\,dx$

Teljes négyzetté kiegészitve alapintegrálra visszavezethető feladatok

2628. $\int \frac{dx}{6 + 2x + x^2}$

2629. $\int \frac{7\,dx}{x^2 - 3x + 4}$

2630. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 1}$

2631. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x^2}}$

2632. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

2633. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x + x^2}}$, $2x - 3 > 1$

Alapintegrálokra visszavezethető vegyes feladatok

2634. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,dx$

2635. $\int \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx$

2636. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

2637. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$

2638. $\int \frac{(x - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

2639. $\int_2^3 \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x - \sqrt{2}}\,dx$

2640. $\int e^x \operatorname{sh} 3x\,dx$

2641. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}\,dx$

2642. $\int \frac{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}{x}\,dx$

2643. $\int 2x\left(1 - 3x^2\right)^5 dx$

2644. $\int \sin 3x\sqrt{1 - \cos 3x}\,dx$

2645. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

2646. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

2647. $\int_1^e \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

2648. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

2649. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$

2650. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$

2651. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2652. $\int \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{1-x^2}\right)dx$

2653. $\int \frac{9x^2}{4x^3+5}\,dx$

2654. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$

2655. $\int 4\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}\,dx$

2656. $\int (\sin^3 x + \cos^4 x)\,dx$

2657. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^5 x\,dx$

2658. $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^{10} x}\,dx$

2659. $\int x^6 \operatorname{tg} x^7\,dx$

Racionális törtfüggvények

2660. $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx$

2661. $\int \frac{x}{2x^2-3x-2}\,dx$

2662. $\int \frac{dx}{(x+8)(x-2)}$

2663. $\int \frac{x-3}{x^3-x}\,dx$

2664. $\int \frac{x}{(x+1)(x-2)(x-4)}\,dx$

2665. $\int \frac{3x}{(x+6)(x-2)^3}\,dx$

2666. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$

2667. $\int_0^1 \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx$

2668. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$

2669. $\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$

2670. $\int \frac{dx}{x(x+2)^3}$

Parciális integrálás

2671. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x\,dx$

2672. $\int x \cos^2 x\,dx$

2673. $\int (2x-x^2)\,\mathrm{sh}\,x\,dx$

2674.* $\int x^2\,\mathrm{ch}^2\,2x\,dx$

2675. $\int x \ln x\,dx$

2676. $\int \ln^2 x\,dx$

2677. $\int \arccos x\,dx$

2678. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$

2679. $\int x^5 \operatorname{arctg} x\,dx$

2680. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x\,dx$

2681. $\int e^{6x} \cos 4x\,dx$

2682. $\int e^{\frac{x}{2}} \sin 3x\,dx$

2683. $\int e^x \sin^2 x \, dx$

2684. $\int \operatorname{ch} x \cos 5x \, dx$

2685. $\int \frac{\sin x}{e^{3x}} \, dx$

Integrálás helyettesitéssel

2686.* $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}}$

2687. $\int \frac{dx}{x(1-\sqrt[3]{x})}$

2688. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

2689. $\int x \sqrt[4]{x+3} \, dx$

2690. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

2691. $\int_0^1 4\sqrt[7]{4x+2} \, dx$

2692. $\int \frac{x+4}{\sqrt{6x+8}} \, dx$

2693. $\int_0^1 (x-3)\sqrt[5]{x+1} \, dx$

2694. $\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{8}}}$

2695. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} \, dx$

2696. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

2697. $\int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} \, dx$

2698. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \, dx$

2699.* $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

2700. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^{x}}$

2701. $\int_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

2702. $\int \frac{e^{2x}}{\left(e^{x} + 1\right)^{\frac{1}{4}}} dx$

2703. $\int \frac{e^{x}\sqrt{e^{x} - 1}}{e^{x+3}} dx$

2704. $\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{1 + e^{x}} dx$

2705. $\int \frac{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x + 1} dx$

2706.* $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^{2})^{3}}}$

2707. $\int \frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2} - 1}} dx, \quad x > 1$

2708. $\int \sqrt{4x^{2} + 4x}\, dx, \; 2x+1 > 1$

2709. $\int \sqrt{x^{2} + 2x + 2}\, dx$

2710.* $\int_{0}^{4} x^{2}\sqrt{16 - x^{2}}\, dx$

2711. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9 - x^{2}}}$

2712. $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^{2} + 4x + 2}} dx$

2713.* $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

2714. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 1}$

2715. $\int \frac{2\, dx}{5 \cos x + 1}$

2716. $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$

2717. $\int \frac{2 \cos x}{1 + \cos x} dx$

2718. $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x\,(1 + \cos x)} dx$

Vegyes integrálási feladatok

2719. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2}\, dx$

2720. $\int \frac{x^2\, dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$

2721. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 3}}\, dx$

2722.* $\int \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{(1 + x)^3}}\, dx$

2723. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}}$

2724. $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

2725. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1 + x^2}\, dx$

2726. $\int \frac{e^x (1 + e^x)}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx$

2727. $\int \frac{e^x\sqrt{1 + e^x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx$

2728. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx$

2729. $\int \frac{x\, e^x\, dx}{\sqrt{1 + e^x}}$

2730. $\int x\, e^{x^2} (x^2 + 1)\, dx$

2731. $\int \ln (x^2 + 1)\, dx$

2732. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$

2733. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

2734. $\int \sin \ln x\, dx$

2735. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$

2736. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\, dx$

2737. $\int \arccos \frac{1}{x}\,dx, \quad x > 1$

2738. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

2739. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\,dx$

2740. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$

2741. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 1}$

2742. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$

2743.* $\int \frac{\cos x}{\cos x + 2 \sin x}\,dx, \; |x| < \frac{\pi}{2}$

2744.* $\int \frac{\operatorname{tg} x \cos^6 x}{\sin^4 x}\,dx$

2745. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,dx, \; \cos \frac{x}{2} \geq 0$

2746. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$

28. AZ INTEGRÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI ÉS KÖZELITŐ MÓDSZEREI

Területszámitás

2800.* Számitsuk ki az $y = 4x - x^2$ görbe alatti területet az $1 \leq x \leq 3$ intervallumon.

2801. Számitsuk ki az $y = x(x-1)$ és az $y = 3x$ görbék közti területet.

2802. Számitsuk ki az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola és az $y = -x + \frac{5}{2}$ egyenes közti idom területét.

2803. Mekkora véges nagyságu területet határol az $y = 4 - x^2$ parabola és az X tengely?

2804. Határozzuk meg x_0-t ugy, hogy az $y = e^{-2x}$ görbe alatti terület az $(x_0, 1)$ intervallumon 5,5 egység legyen.

2805. Az $y = x$ az $y = 0$ és az $x = 1$ egyenesek közti háromszöget az $y = x^3$ két részre osztja. Mi a két rész területének aránya?

2806. Mekkora az $y = x^2$ és az $y = 1 - x^2$ görbék közti terület?

2807. Határozzuk meg azt a területet, amelyet az $y = \sqrt{x}$ görbe, az Y tengely és a görbének az $x = 4$ abszcisszáju pontjába huzott érintő határol.

2808. Határozzuk meg x_o-t ugy, hogy az $y = \frac{1}{x}$ görbe alatti terület az $(1, x_o)$ intervallumon 10 egység legyen.

2809. Határozzuk meg x_o-t ugy, hogy az $y = x^2$ görbe alatti terület a $(0, x_o)$ és az $(x_o, 1)$ intervallumon egyenlő legyen.

2810. Igazoljuk hogy az $y = x^2$ és $y = 2x$ görbék közti terület egyenlő az $y = \sqrt{x}$ és $y = \frac{x}{2}$ görbék közti területtel.

2811. Határozzuk meg az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ görbék közti területet.

2812. Számitsuk ki az $x = y^2$ és az $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$ parabolák közti területet.

2813. Határozzuk meg az $y = x^2 - 4x + 3$ függvény görbéje és a tengelyek által bezárt véges nagyságu sikrész területét.

2814. Határozzuk meg az $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ görbék által bezárt idom területét.

2815. Határozzuk meg milyen területü részekre bontja az $x^2 + y^2 = 16$ kört az $y^2 = 6x$ parabola.

2816. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ görbe $x > 0$ darabja és a görbe aszimptotája által bezárt terület nagyságát.

Forgástest térfogata

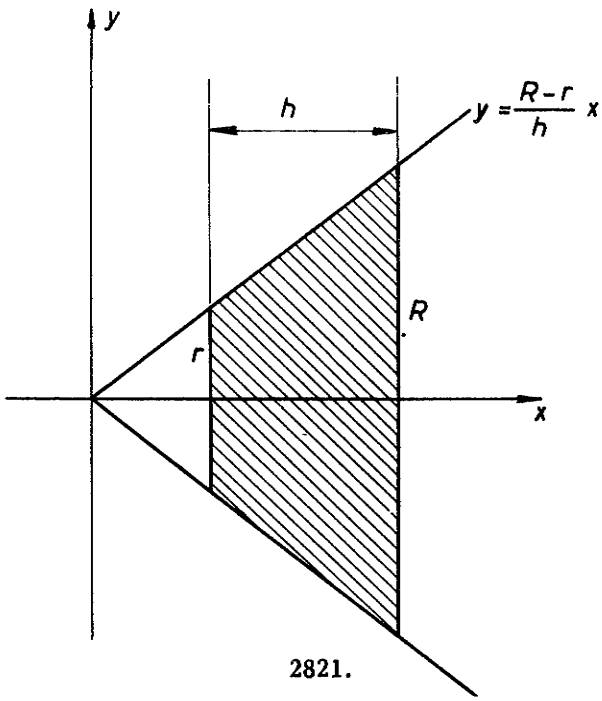
2817. Számitsuk ki a 2 sugaru $\frac{\pi}{2}$ középponti szöghöz tartozó gömbcikk térfogatát.

2818. Számitsuk ki azon forgási paraboloid köbtartalmát, melyet az $y = 4x^2$ parabola tengelye körüli megforgatásával kapunk és a csucsától 1 egység távolságra a tengelyére merőleges sikkal elmetszünk.

2819. Forgassuk meg az $y = 5 - x^2$ görbe $1 \leq y \leq 3$ szakaszát az Y tengely körül. Számitsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

2820. Forgassuk meg az X tengely körül az $y^2 - x^2 = 1$ görbe (0, 3) intervallum fölötti szakaszát. Számitsuk ki a kapott test térfogatát.

2821. Számitsuk ki a csonkakup térfogatát, melynek tengelymetszete az ábrán látható.



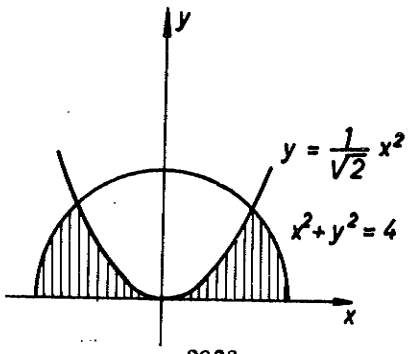
2821.

2822. Egy hordó dongájának egyenlete

$$y = 1 + \cos\frac{x}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Számitsuk ki a hordó köbtartalmát.

2823.* Az $x^2 + y^2 = 4$ kör felső felét elmetsszük az $y = \frac{1}{\sqrt{2}} x^2$ parabolával. Számitsuk ki a bevonalkázott sikrész X tengely körüli megforgatásával nyert test térfogatát.



2823.

Forgassuk meg az alábbi görbéket a megadott intervallumon, és számitsuk ki az igy adódó forgástest térfogatát.

2824. $y = ax$ $\quad 0 \le x \le m$

2825. $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ $\quad 1 \le x \le 3$

2826. $y = xe^x$ $\quad 0 \le x \le 1$

2827. $y = \operatorname{ch} x$ $\quad -2 \le x \le 2$

2828. $y = \frac{1}{x}$ $\quad 1 \le x \le 4$

2829. $y = \sin x$ $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

2830. $y = \operatorname{tg} 2x$ $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{8}$

2831. $y = \operatorname{sh} x$ $\quad -1 \le x \le 1$

2832. $y = \ln x$ $\quad 1 \le x \le 2$

2833. $y = \frac{1}{1+x}$ $\quad 0 \le x \le 2$

Ivhossz számitás

Számitsuk ki az alábbi görbék megadott intervallum feletti ivének hosszát.

2834. $y = \ln(1 - x^2)$ $\quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$

2835. $y = x^{\frac{3}{2}}$ $\quad 0 \le x \le 4$

2836. $y = e^x$ $\quad \ln 2 \le x \le \ln 3$

2837. $y = 1 - \ln(\cos x)$ $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

2838. Határozzuk meg x_0-t ugy, hogy az $y = \operatorname{ch} x$ görbe $0 \le x \le x_0$ feletti szakaszának hossza $\frac{3}{4}$ egység legyen.

2839. Határozzuk meg az $y = \ln \frac{1}{\sin x}$ görbének a $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{3}$ intervallum feletti ivének hosszát.

2840. Számitsuk ki az $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ görbe ivhosszát, ha $0 < a \le x \le b$.

Forgástest palástjának felszine

Forgassuk meg az X tengely körül az alábbi görbék megadott intervallum fölötti szakaszát. Számitsuk ki az igy keletkezett forgástest palástjának felszinét.

2841. $y = \operatorname{ch} x$ $\quad -2 \le x \le 2$

2842. $y = \sqrt{25 - x^2}$ $\quad -5 \le x \le 5$

Sulypont meghatározás

2843. Határozzuk meg az $y^2 = x$ görbe, az $x = 4$ egyenes és az X tengely közé eső sikrész sulypontját.

2844. Határozzuk meg az $y = \sin x$ görbe félhulláma alatti sikrész sulypontját. $(0 \le x \le \pi)$

Határozzuk meg az alábbi görbék és egyenesek határolta sikidomok sulypontját.

2845. $y = x^3$ $\quad y = 0$ $\quad x = 1$

2846. $y = \frac{1}{x}$ $\quad y = 0$ $\quad x = 1$ $\quad x = 4$

2847. Számitsuk ki az $y = \operatorname{ch} x$ görbe $0 \leq x \leq 1$ intervallum feletti ivének sulypontját. A sürüség $\rho(x) = \operatorname{th} x$.

2848. Határozzuk meg az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ félköriv sulypontját.

Az integrálszámitás alkalmazása paraméteres és polárkoordinátás alakban adott görbék esetén

2849. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x &= 5 \cos t \\ y &= 5 \sin t \end{aligned} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

kör és

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2u \\ y &= 3 + u \end{aligned} \qquad -\infty < u < +\infty$$

egyenes által meghatározott körszeletek területét.

2850.* Számitsuk ki a cisszois görbe alatti területet. $(y \geq 0)$

2851. Mekkora a forgástest térfogata, ha az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin 2t \end{aligned} \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

görbe megadott szakaszát forgatjuk meg az X tengely körül.

2852. Számitsuk ki az

$$\begin{aligned} x &= t \sin t \\ y &= t \cos t \end{aligned} \quad \text{görbe}$$

$0 \leq t \leq t_1$ darabjának ivhosszát.

2853. Számitsuk ki az

$$\begin{aligned} x &= e^t \sin t \\ y &= e^t \cos t \end{aligned} \quad \text{görbe}$$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ darabjának ivhosszát.

2854. Számitsuk ki az

$$\begin{aligned} x &= (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y &= (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{aligned} \quad 0 \le t \le \pi$$

görbe ivhosszát.

2855. Számitsuk ki a hiperbolikus spirális megadott ivének hosszát

$$r = \frac{1}{\varphi} \qquad \frac{\pi}{8} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} .$$

2856. Számitsuk ki az $r = \frac{1}{1+\varphi}$ görbe ivhosszát. $(0 \le \varphi \le 2)$

2857. Számitsuk ki az $r = a\,\varphi$ archimedesi spirális $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ közti ivének hosszát. $(a > 0)$

2858. Forgassuk meg az X tengely körül az

$$\begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{aligned} \quad \text{görbe}$$

$0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ szakaszát. Számitsuk ki az igy keletkezett forgástest palástjának felszinét.

2859.* Forgassuk meg az X tengely körül az

$$\begin{aligned} x &= a\,(\cos t + \ln \operatorname{tg} \tfrac{t}{2}) \\ y &= a \sin t \end{aligned} \quad \text{görbe}$$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$ szakaszát. Számitsuk ki a forgástest palástjának a felszinét.

2860. Számitsuk ki az $r = \frac{1}{\varphi}$ spirális $1 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ szektorának területét.

2861. Határozzuk meg az $r = 4$ kör és az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta közé eső területet.

2862. Határozzuk meg φ_0-t ugy, hogy az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta φ_0 és $\varphi = \frac{\pi}{4}$ közti szektorának területe 2 egység legyen.

Számitsuk ki az alábbi szektorszerü idomok területét.

2863. $r = e^{\varphi}$ $\qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$

2864. $r = \cos \varphi$ $\qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

2865. $r = \frac{a \sin 3\varphi}{\sin \varphi}$ $\qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$

2866. Számitsuk ki az

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,(t - \sin t) \\ y &= r\,(1 - \cos t) \end{aligned}\right\} \text{görbe}$$

egy ive alatti lemezszerü idom sulypontját.

2867. Határozzuk meg a félkör lemez sulypontját.

2868. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x &= r\,(t - \sin t) \\ y &= r\,(1 - \cos t) \end{aligned}$$

ciklois egy teljes ivének a sulypontját.

Integrálás közelitő módszerekkel

2869.* Számitsuk ki a következő integrál értékét téglalap, trapéz, ill. Simpson-szabállyal. (Mindhárom esetben 10 egyenlő részre osszuk fel az intervallumot, a szükséges függvényértékeket 4 tizedesjegyre számoljuk.) Hasonlitsuk össze az eredményeket az integrál pontos értékével.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

2870. Számitsuk ki a következő integrál értékét Simpson-szabállyal, (osszuk az intervallumot 10 egyenlő részre, a szükséges függvényértékeket 4 tizedesre adjuk meg.)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$$

2871. Számitsuk ki a következő integrál értékét Simpson-szabállyal, (hat egyenlő részre osszuk fel az intervallúmot, a szükséges függvényértékeket 4 tizedesjegyre adjuk meg.)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

29. IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

Döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi integrálok, amennyiben igen, számitsuk ki az értékűket.

2900. $\displaystyle\int_0^6 \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6-x}} dx$

2901. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2902. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

2903. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

2904. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

2905. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$

2906. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

2907. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

2908. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

2909. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

2910. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{6x}\, dx$

2911. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-4x}\, dx$

2912. $\displaystyle\int_0^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx$

2913. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

2914. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \cos^2 x\, dx$

2915. $\displaystyle\int_0^{\infty} (a + bx + cx^2)\, e^{-x}\, dx$

2916.* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$

2917. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$

2918. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + x)^2}\, dx$

2919. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

2920. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$

2921. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$

2922. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

2923. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$

2924. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\, dx$

2925. $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{x - 1}\, dx$

Döntsük el, konvergensek-e az alábbi integrálok.

2926. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^n}$

2927. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

2928. $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(b > a)$

3. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

31. SIKBELI ÉS TÉRBELI PONTHALMAZOK, TARTOMÁNYOK

A sik mely pontjai jellemezhetők a következő egyenlőtlenségekkel:

3100. $x^2 + y^2 < 1 \qquad x > 0, \qquad y > 0$.

3101. $x + y \leqq 1$ és $x > 0, \qquad y > 0$.

3102. $|x + y| \leqq 1$.

3103. $|x| + |y| < 1$.

3104. $\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2} < x < \infty \qquad -\infty < y < \infty$

3105. $x^2 \leqq y \leqq x \; ; \qquad 0 \leqq x \leqq 1$.

3106. $x \leqq y \leqq 2 + \sqrt{4 - x^2} \; ; \qquad 0 \leqq x \leqq 2$.

3107. $-\frac{1}{2}x + 1 < y < \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \; ; \qquad 0 < x < 2$.

3108. $0 < r < 2\varphi, \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$.

3109. $0 < r < 2\sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$.

Jelöljük ki a tér azon ponthalmazait, amelyeket a következő egyenlőtlenségek határoznak meg:

3110. $x + y + z < 1$ és $x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$.

3111. $|x + y + z| < 2{,}5$.

3112. $\ln \frac{z}{xy} > 0$.

3113. $\left| \frac{1}{z^2 - x^2 - y^2} \right| \leqq 1$.

3114. $z^2 - x^2 - y^2 - 1 \geqq 10$.

3115. $x^2 + y^2 \leqq z \leqq 4$.

3116. $-2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}} \leqq z \leqq 2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}}$.

3117. $z^2 - x^2 - y^2 \geqq 0$, $z \geqq 0$.

3118. $0 \leqq z \leqq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqq 1$.

3119. $0 \leqq z \leqq 1 - 2x - y$, $0 \leqq y$, $0 \leqq x$.

32. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY FOGALMA, ÁBRÁZOLÁSA, HATÁRÉRTÉKE, FOLYTONOSSÁGA

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

3200. $z = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}$.

3201. $z = \ln(x + y)$.

3202. $z = \ln xy$, ahol $z > 0$.

3203. $z = \sin(x^2 + y^2)$, ahol $|z| \geqq 0,5$.

3204. $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 1$.

3205. $u = \frac{1}{z^2 - x^2 + y^2}$.

3206. $u = \sqrt{xyz}$.

3207. $u = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}}$.

3208. $u = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.

3209.* $u = \text{Arc}\sin(z - x - y)$.

Felületábrázolás

3210. $z = x^2 - y$.

3211. $z = e^{x+y}$.

3212. $z = \sin(x^2 + y^2)$.

3213. $z = x + \sin y$.

3214.* Igazoljuk, hogy a $z = x^2 - y^2$ felületnek az X tengellyel 45°-os szöget bezáró minden első vetitősikkal való sikmetszete egyenes.

3215. Igazoljuk, hogy az

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$$

háromtengelyü ellipszoidból a Z tengelyen átmenő minden sik ellipszist metsz ki. Mekkora szöget zár be az X tengellyel az a sik, amelyben a metszet kör?

Ábrázoljuk a következő kétváltozós függvényeket:

3216. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

3217. $2x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$.

3218. $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 1$.

3219. $z = -x^2 + y^2$.

3220. $z = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$.

3221. $z = \dfrac{1}{y - x + 1}$.

3222. $z = \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2}$.

3223. $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.

3224. $z = e^{-(x^2+y^2)}$.

Irjuk fel a következő forgásfelületek egyenletét:

3225. $\left.\begin{array}{l} z = x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\}$ Z tengely körüli forgatásával keletkező felület.

3226. $\begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ z = 0 \end{cases}$ görbe X tengely körüli forgatásával keletkező felület.

3227. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ görbe X tengely körüli forgatásával keletkező felület.

3228. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ görbe Y tengely körüli forgatásával keletkező felület.

3229. $\begin{cases} z = 2x \\ y = 0 \end{cases}$ görbe Z tengely körüli forgatásával keletkező felület.

3230. Van-e határértéke az

$$f(x, y) = \frac{xy - x + y}{xy + x + y}$$

függvénynek az 0 (0, 0) helyen?

3231. Van-e határértéke az

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

függvénynek az 0 (0, 0) pontban?

3232. Létezik-e a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to a}} \frac{1}{x - y}$$

határérték?

3233.* Mutassuk ki, hogy

$$f(x, y) = \frac{\sin xy}{y}$$

függvény alkalmas kiegészitéssel az egész (x, y) sikon folytonossá tehető.

3234. Mi a szakadási helyek mértani helye az

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

függvénynél?

3235.* Folytonossá tehető-e alkalmas kiegészitéssel az

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

függvény az egész térben?

3236. Milyen pontok képezik a

$$z = \cos \frac{1}{xy}$$

függvény szakadási helyeinek halmazát?

3237. Létezik-e az

$$f(x, y) = x \cos y$$

függvény esetében a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to \infty}} f(x, y)$$

határérték?

3238. Létezik-e, és ha igen, mivel egyenlő

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$$

hatérérték, ha

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}.$$

3239. Mivel egyenlő a

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to \infty}} \frac{2xy - 1}{y + 1}$$

határérték?

3240. Hol nem folytonos a

$$z = \frac{1}{\sin x \sin y}$$

függvény?

33. DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

Képezzük az alábbi függvények x és y szerinti első parciális differenciálhányadosát:

3300. $z = e^x \cos y - x \ln y$;

3301. $f(x, y) = y^2 \ln\sqrt{xy}$;

3302. $f(x, y) = x^2 \operatorname{tg} y - e^{2y} \sin x$;

3303. $u = \dfrac{x^3 - y^2}{xy}$; $u_x(1, 3) = ?$ $u_y(2, 5) = ?$

3304. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

3305. $z = \operatorname{Arc}\sin \dfrac{x}{y}$;

3306. $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1 - x}{1 - y}$;

3307. $z = \dfrac{\ln y}{\ln x} + \dfrac{\ln x}{\ln y}$;

3308. $z = x^y + y^x$;

3309.* $v = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 .$$

3310. $u = e^{xyz} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = ?$

3311. Bizonyitandó a következő egyenlőség:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z} ;$$

ha $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

3312.

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Igazoljuk, hogy fennáll a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

egyenlőség.

3313.* $x = a \cos u \sin v,$

$y = b \cos u \cos v,$

$z = c \sin u.$

Határozzuk meg $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ -t.

3314. Határozzuk meg $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ értékét, ha

$$u = \frac{1}{r}\left(Ae^{-ar} + Be^{ar}\right) \text{ és}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Határozzuk meg az alábbi differenciálhányadosokat:

3315. $z = \frac{x^3}{\sqrt{y}} - 3xy^2, \quad \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin 2t \end{cases}, \quad \frac{dz}{dt} = ?$

3316. $u = \operatorname{Arc}\cos \frac{z}{xy}, \quad \begin{cases} x = \operatorname{sh}^3 t \\ y = \operatorname{ch}^3 t \\ z = 1 + t^2 \end{cases}, \quad \frac{dz}{dt} = ?$

3317. $z = \ln xy$

$x = \operatorname{tg} t, \quad \frac{dz}{dt} = ?$

$y = \sqrt{t}$

3318. $z = \operatorname{Arc\,tg} x + y$

$x = e^{2t}, \quad \frac{dz}{dt} = ?$

$y = \cos 2t$

3319. $z = \frac{\sqrt{y}}{x^2} - 2y^2x^2, \quad \frac{dz}{dt} = ?$

$x = \ln(1 + t)$

$y = \operatorname{ch} 2t$

3320. $z = e^x \sin y$

$x = \sin t, \quad \frac{dz}{dt}$?

$y = 3t^2 - 1$

3321. $z = e^{x+2y}$

$x = \sin 2t$, $\frac{dz}{dt} = ?$

$y = \sqrt{t^2 - 1}$

3322. $z = \mathrm{sh}\sqrt{x^2 + y^2}$

$x = 2t^3 - 1$, $\frac{dz}{dt} = ?$

$y = e^t$

Határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott P_o pontban, az adott irányban:

3323. $z = x^2 + 3y^2$, $P_o(-2, 1)$, $\alpha = 30^o$.

3324. $z = 2x^2 - y^2$, $P_o(1, 1)$, $\alpha = 45^o$.

3325. $z = \mathrm{ch}^2 xy - \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{y}{x}$, $P_o(2, -1)$, $\alpha = 120^o$.

3326. $z = \frac{1}{xy}$, $P_o(1, -1)$

$y + 3x - 1 = 0$ egyenes irányában.

3327. $z = x^2 - y^2$, $P_o(1, 1)$

E $\frac{3}{\sqrt{13}}\bar{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\bar{j}$ irányában.

3328. $u = 3x^2 + 2y^2 - z = f(x, y, z)$ $P_o(1, 2, 5)$

$v = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ irányában.

3329. $u = e^{-(x^2+y^2)} - z = f(x, y, z)$

$P_o(1, 0, 1)$ és a $\bar{v} = [3, 2, -5]$ irányában.

Határozzuk meg az alábbi függvények teljes differenciálját:

3330. $z = \sin(x^2 + y^2)$;

3331. $u = \ln(x + y + z)$.

Határozzuk meg az alábbi parciális deriváltakat:

3332. $z = \ln(x + y)$

$x = \frac{1}{uv}$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

$y = u + 3v$

3333. $z = 3xy$

$x = \sin(u + v)$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

$y = \cos(u + v)$

3334. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = ue^v$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

$y = u^2 - 3v$

3335. $w = 2x + 3y + 5zx$

$x = \sqrt{u^2 + v^2}$

$y = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$, $\frac{\partial w}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial w}{\partial v} = ?$

$z = 2u + v$

3336. $w = x\,y\,z$

$x = \ln(u + v)$

$y = u^2 + 3v$, $\frac{\partial w}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial w}{\partial v} = ?$

$z = 2uv$

3337. $w = \sin(x + 2y + z)$

$x = \frac{1}{uv}$

$y = 3u - 2v$, $\frac{\partial w}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial w}{\partial v} = ?$

$z = ue^v$

3338. $z = \operatorname{Arc}\sin xy$

$x = we^{uv}$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial w} = ?$

$y = 2u - 3wv$

3339. $z = \ln xy$

$x = \frac{1}{uvw}$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial w} = ?$

$y = v\sqrt{uw}$

3340. $z = ch\,(x + y)$

$x = uv + w^2$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial w} = ?$

$y = 3u - 2v^2 w$

Kis változások közelitő meghatározása

3341. Egy fénytörő közeg felületére 43° alatt esik be egy 1,5 törésmutatóju fénysugár. Egy másik - 3%-kal kisebb törésmutatóju - sugár, 4%-kal nagyobb szög alatt esik be. Mennyi lesz a törési szög megváltozása?

3342. Egy bikonvex lencse fókusztávolsága:

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Ha $n = 1,5$, $r_1 = 8$ cm; $r_2 = 10$ cm és r_1, r_2 mérési hibája $\pm 0,02$ cm az n-é pedig $\pm 0,03$, mennyi lesz f hibája?

3343. Egy egyenáramu körben $U = 110$ V feszültség hatására $I = 15$A az áramesőrsség. Ohm törvénye alapján $R = \frac{U}{I}$. A feszültségmérő leolvasásánál $\pm\frac{1}{20}$ V, az ampermérőnél pedig $\pm\frac{1}{10}$ A hibát követhetünk el. Mekkora a számitott ellenállás relativ hibája?

3344. A mérés egy háromszög két oldalát 27 és 34 m-nek, a közbezárt szöget 73°-nak találta. A mérési hibák $\pm 0,04$ méter, illetve $\pm 0,07^o$-nak vehetők. Mennyi a harmadik oldal számitással nyert értékének lehetséges hibája?

3345. Mennyi lenne a Nap és Föld közti vonzóerő relativ megváltozása, ha a Nap távolsága 10^5 km-rel, és a Föld tömege ugyanakkor 3‰-kel megváltozna? A Nap-Föld távolsága $1,5.10^8$ km.

3346. Az ingaóra járását ingája szabályozza, melyet fizikai ingának kell tekinteni. A fizikai inga lengésideje:

$$T = 2\sqrt{\frac{K}{Mgs}}$$

Tegyük fel, hogy pontatlan elkészités folytán K 2‰-kel, M pedig 5‰-kel kisebb a kelleténél. Milyen pontatlanságot okoz ez az inga járásában.

3347. Egy test fajsulyát az

$$f = \frac{G_1}{G_1 - G_2}$$

képlettel számitjuk, ahól G_1 a test sulya levegőben, G_2 pedig ugyanannak vizben. (A levegő fajsulyát 0-nak, a vizét 1-nek vesszük.) Egy sárgarézből készült test sulyát $G_1 = 100$ kg-nak, vizben pedig $G_2 = 88$ kg-nak mértük. A mérési bizonytalanságok: $\pm\frac{5}{100}$ kg G_1-nél, illetve $\pm\frac{8}{100}$ kg G_2-nél. Mennyi a számitott fajsuly százalékos hibája?

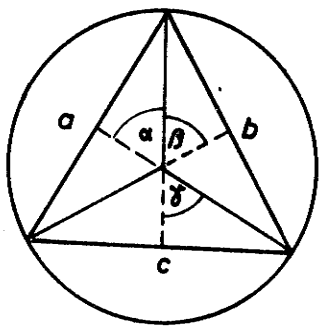
3348. Egy egyenes körkup adatai: magassága $M = 17$ cm, alapkörének sugara $R = 5$ cm. Ha a kup magasságát 0,02 cm-rel kisebbre vesszük, mennyivel kell alapkörének sugarát növelni, hogy a térfogata változatlan maradjon.

3349. Egy optikai lencse fókusztávolsága $f = 30$ cm. A tárgytávolság $t = 35$ cm. $\Delta f = \pm 0,15$, $\Delta t = \pm 0,2$. Mekkora a számitott képtávolság, k relativ hibája?

3350. Egy elektromos rezgőkör rezonáns körfrekvenciáját az $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ formulával számitjuk. Mekkora a rezgőkör számitott frekvenciájának százalékos hibája, ha $\frac{\Delta L}{L} = 0,03$ és $\frac{\Delta C}{C} = 0,02$?

Szélsőérték feladatok

3351. A körbe irt háromszög területe mikor a legnagyobb?



3351.

Határozzuk meg a következő függvények szélső értékeit (helyi szélső értékeit):

3352. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

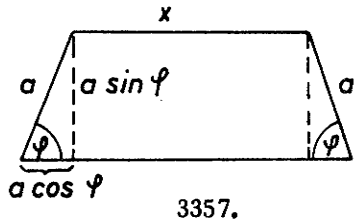
3353. $z = x^3 y^2 (4 - x - y)$

3354. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, ahol $0 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq 4$.

3355. $z = e^{-x^2 - y^2} (2x^2 + 3y^2)$

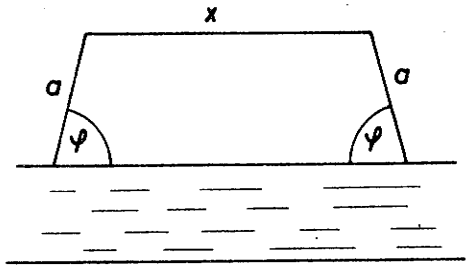
3356. $z = \cos x \cos y \cos (x + y)$, $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$.

3357. Egy egyenlő száru trapéz alaku telek kerülete 400 méter. Mikor (mekkora a-nál és φ-nél) a legnagyobb a telek területe?



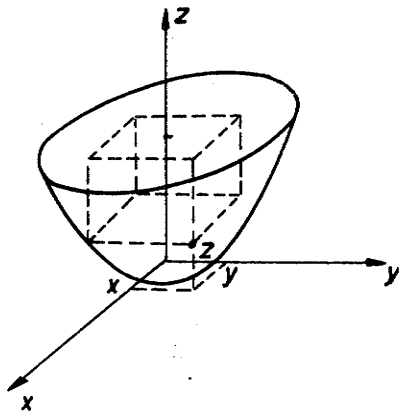
3357.

3358. Egy folyó mentén keritsük el 200 méter hosszu keritéssel, a legnagyobb egyenlő száru trapéz alaku területet.



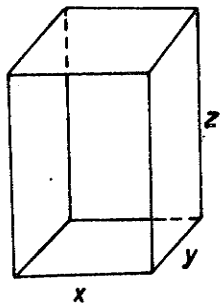
3358.

3359. A $z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloidnak a $z = 5$ sik által kimetszett szeletébe irjuk be a legnagyobb térfogatu, koordinátatengelyekkel párhuzamos élü, derékszögü hasábot.



3359.

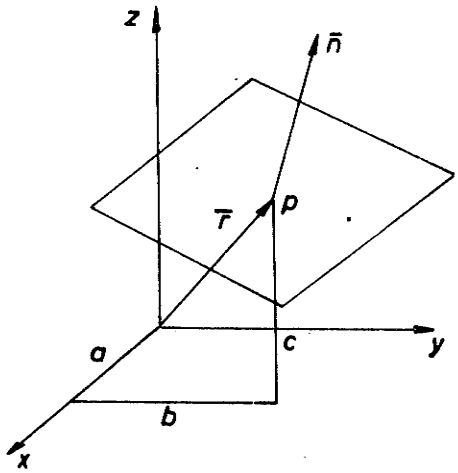
3360. Mosdófülke térfogata Vm^3. A fülkét elöl nem kell elhatárolni. Hogyan méretezzük, hogy a legkevesebb területü falat kelljen burkolni?



3360.

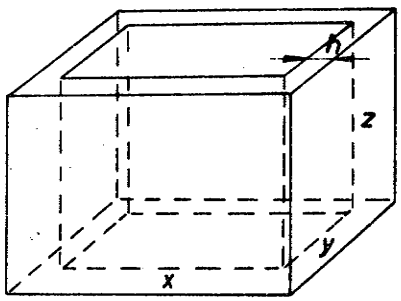
3361. Adott körbe irjunk olyan háromszöget, melynél az oldalak négyzetösszege a legnagyobb.

3362. Egy adott ponton keresztül haladó sikok közül melyik van legmesszebb az origótól.



3362.

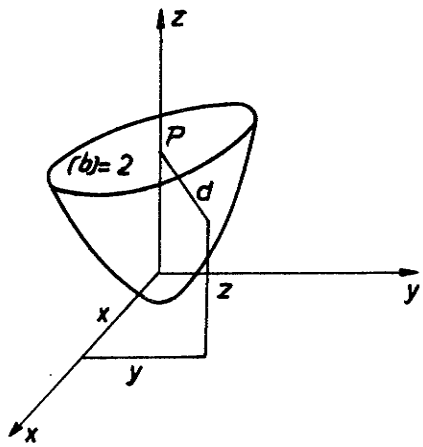
3363. Határozzuk meg a felülről nyitott derékszögü hasáb alaku láda méreteit ugy, hogy adott V térfogat és h falvastagság mellett a legkevesebb anyagból legyen elkészithető.



3363.

3364. Határozzuk meg a $z = \cos(x^2 + y^2)$ függvény szélsőértékeit.

3365. Tekintsük a P (0, 0, 2) távolságát a $z = 4x^2 + 9y^2$ elliptikus paraboloid pontjaitól. Határozzuk meg a felület azon pontjait, amelynek a P ponttól vett távolsága lokális extrémumot mutat.



3365.

Felületek normálisa és érintősikja

Irjuk fel az alábbi felületeket az (x, y) sikbeli P_o ponthoz tartozó felületi pontban érintő sikok egyenletét.

3366. $z = x^2 + 2y^2$; $P_o(2, -1)$

3367. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$; $P_o(1, 1)$

3368. $z = \sin^2 x - y^2$; $P_o(\frac{\pi}{6}, 2)$

3369. Határozzuk meg az $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ ellipszoidnak azokat az érintősikjait, amelyek párhuzamosak a $2x + 3y + 2z = 0$ sikkal.

3370. Fektessünk az $xyz = 1$ felülethez az $x + y + z - 3 = 0$ sikkal párhuzamos sikot.

3371. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ felület azon pontjait, amelyekben vett érintősikok merőlegesek az (y, z) sikra.

3372. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gömb $P(1, 2, 2)$ pontjában vett érintősiknak a koordinátarendszer tengelyeivel bezárt szögeit.

3373.* Bizonyitandó, hogy az $xyz = a^3$ felület érintősikjai a koordinátasikokkal állandó térfogatu tetraédereket alkotnak.

3374.* Bizonyitandó, hogy a $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ felület érintősikjai a koordinátatengelyekből állandó összegü darabokat vágnak le.

3375. Az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ hiperboloidot az $(1, 0, 0)$ pontjában érintő sik két egyenesben metszi. Meghatározandó a közöttük levő szög.

Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit a megadott feltételek mellett:

3376. $z = x + y \qquad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

3377. $u = x^m + y^m \qquad x + y = 2c; \qquad c > 0, \qquad m > 1$

3378. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \cdot a$

$a > 0, \qquad k > 1$

3379. $z = xy, \qquad x^2 + y^2 = 1$

3380. $u = xyz, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 3$

3381. $u = x^2 y^3 z^4$

$2x + 3y + 4z = M$

34. INTEGRÁLSZÁMITÁS

Határozzuk meg a megadott $z = f(x, y)$ felület alatti térrész ama darabjának térfogatát, mely az (x, y) sik megadott tartománya felett helyezkedik el:

3400. $z = x^2 + y^2$ tartomány az $y = \sqrt{x}$ parabola és az $y = \frac{x}{2}$ egyenes határolta sikrész.

3401. $z = x^2 + y^2$ és a tartomány a (0, 0), (3, 0), (0, 2) csucspontu háromszög.

3402. $z = x^2 - 2xy$ a tartomány pedig az $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$ egyenesekkel határolt téglalap.

Határozzuk meg az alábbi kettős integrálok értékét:

3403. $\iint\limits_T \sin(x + y)\, dx\, dy = ?$ T: $\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

3404.* $\iint\limits_T e^{x+y}\, dx\, dy = ?$ T: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

3405. $\iint\limits_T (x + y)\, dx\, dy = ?$ T: $x^2 + y^2 \le 1$

3406. $\iint\limits_T xy\, dx\, dy$ T: $(x - 2)^2 + y^2 \le 4$

3407. $\iint\limits_T xy\, dx\, dy = ?$ T határai a következő körök:

$(x - 1)^2 + y^2 = 1$ és $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

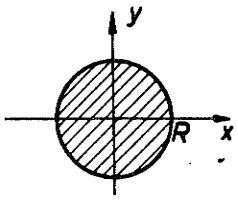
3408. $\iint\limits_T y \sin x\, dx\, dy = ?$ T határai: $2x = y$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$ egyenesek.

3409. $\iint\limits_T (y^2 - 2x)\, dx\, dy$ T határai: $y^2 = x + 3$ és $y = 0$ egyenletü görbék

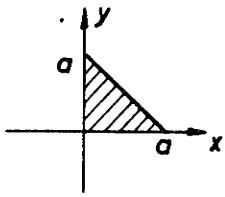
3410. $\iint\limits_T xy\, dx\, dy$ T : a (0, 0); (2, 1); (0, 2) csucspontu háromszögek.

3411. $\iint\limits_T (3x - y^2)\,dx\,dy$ T: a (0, 0); (3, 0); (2, 1); (1, 1) csucspontu trapéztartomány.

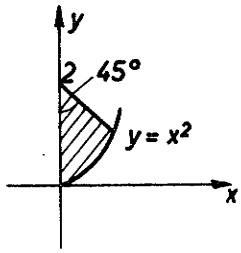
Alakitsuk át az $\iint\limits_T f(x, y)\,dt$ kettős integrált kétszeres integrállá kétféleképpen. A T tartomány az ábrán látható.



3412.*



3413.



3414.

Cseréljük fel az integrálás sorrendjét a következő integrálokban:

3415. $\int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx\,dy$ 3416. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_{\sqrt{y}}^{4-\frac{y}{2}} f(x, y)\,dx\,dy$

3417. $\int\limits_0^2 \int\limits_{\sqrt{y}}^{4} f(x, y)\,dx\,dy$ 3418. $\int\limits_0^4 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx$

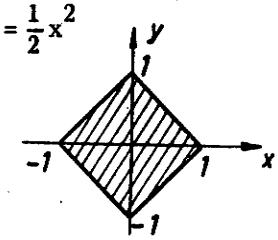
Határozzuk meg az alábbi két-két görbe által határo' terület nagyságát:

3419.* $y^2 = x$, $y^2 = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{3}x$

3420. $xy = 1$, $xy = 4$ $y = x$ $y = 2x$ $x > 0$, $y > 0$

3421. $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$

3422. $\iint\limits_T (x + y)\,dx\,dy = ?$, ahol a T tartomány az ábrán látható négyszögtartomány.



3422.

3423. $\iint\limits_T xy\,dx\,dy = ?$ A tartomány: az $x > 0$ félsík

$y = x^2$

$y = 9x^2$

$y = 1$ görbék által határolt része.

3424. Legyen T az $x \geq 0$ $y \geq 0$ és $x^2 + y^2 \leq$ a egyenlőségek által meghatározott tartomány. Bizonyítandó a következő egyenlőség:

$$\iint\limits_T x^2\,dx\,dy = \iint\limits_T y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Számítsuk ki a következő kétszeres integrálokat:

3425.* $\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^1 y \cdot e^{-x^2}\,dx\,dy = ?$

3426. $\int\limits_0^1 \int\limits_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y \cdot \cos x^2\,dx\,dy =$

3427. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \frac{x \sin y}{y}\,dy =$

3428. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx =$

Határozzuk meg a következő hármas integrálokat:

3429. $\iiint\limits_V (x - 2y + 4z)\,dV$ V-t az $x + y + z = 1$

$x = 0$

$y = 0$

$z = 0$

egyenletü felületek határolják.

3430. $\iiint\limits_V (x^2 + 2y + z^2)\, dV = ?$ V-t az

$$x + z = 2$$
$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$y = 2$$
$$z = 0$$

egyenletü felületek határolják.

3431.* $\iiint\limits_V zyx^2\, dV = ?$ V-t az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad z \geq 0$$
$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0$$

felületek határolják.

3432. $\iiint\limits_V e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz = ?$ V-t az:

$$x = 1 \qquad y = x$$
$$y = 0 \qquad z = x + y$$
$$z = 0$$

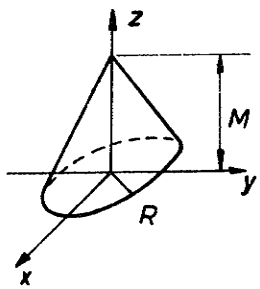
egyenletü felületek határolják.

3433. $\iiint\limits_V (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = ?$

ahol V az $x^2 + y^2 \leq 4$ hengernek $z = 0$ és $z = 8$ sikok közé eső része.

3434.* $\iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = ?$

V az ábrán látható Z tengelyü, R alapsugaru, M magasságu egyenes körkup.



3434.

3435. Számitsuk ki az R sugaru és $\frac{2\pi}{3}$ nyilásszögü gömbcikk térfogatát.

3436. Határozzuk meg a $z = Ax^2 + By^2$; $A > 0$, $B > 0$ elliptikus paraboloid által a $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ négyszögre mint alapra állitott hasábból levágott test térfogatát.

3437. Mekkora az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipszoid köbtartalma?

3438. Határozzuk meg a Viviani-féle test köbtartalmát, azaz annak a testnek a köbtartalmát, amelyet az

$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ gömbből az

$x^2 - Rx + y^2 = 0$ hengerfelület kivág.

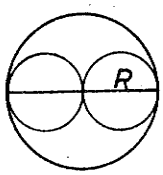
3439. Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ nyeregfelület, $z > 0$ része, a $z = 0$ sik és az $x^2 + y^2 = 1$ körhenger határolta test köbtartalmát.

3440. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ felület, a $z = 0$ sik és az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ körhenger határolta test köbtartalmát.

3441. Mekkora a $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kup, a $z = 0$ sik és az $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ henger által határolt test térfogata?

3442. Határozzuk meg a $2x = y^2 + 4z^2$ elliptikus paraboloid és az $x = 1$ sik határolta test köbtartalmát.

3443. Egy R sugaru félgömbön két-két R átmérőjü furatot készitünk, az ábra szerint. Mennyi a megmaradó test köbtartalma?



3443.

3444. Számitsuk ki az $y^2 = x$ hengerből az $5x + 4z = 20$ és az $x = 1$ sikkal, valamint a $z = 0$ sikkal lemetszett homogén rész sulypontjának koordinátáit.

3445.* Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ felület $z > 0$ része, a $z = 0$ sik és az $x = 1$ sik által határolt homogén test sulypontjának helyzetét.

3446. Számitsuk ki a

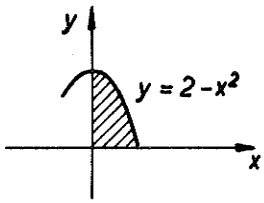
$$z = y^2 - x$$
$$x = 2$$
$$z = 0$$

egyenletü felületek által határolt homogén test sulypontjának koordinátáit.

3447. Határozzuk meg a $z = \frac{1}{x+3}$ felület, az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és $-3y + x = 1$ sik által határolt homogén test sulypontjának z_s koordinátáját.

3448. Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ nyeregfelület $z > 0$, $y > 0$ része, az $x^2 + y^2 = 1$ henger és az $y = 0$, $z = 0$ sikok által meghatározott homogén test sulypontját.

3449. Számitsuk ki az ábrán látható egységnyi sürüségü parabolaszeletnek az origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.



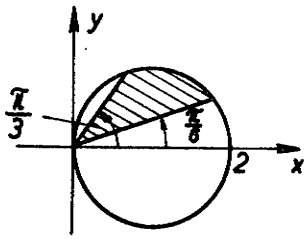
3449.

3450. Határozzuk meg az (x, y) sik $y=0$, $y=2x$ és $y = -x + 6$ egyenesei által határolt egységnyi sürüségü háromszöglemez X és Y tengelyre vett tehetetlenségi nyomatékát.

3451. Határozzuk meg az $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ egyenletü egységnyi sürüségü lemniszkátalemez origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

3452.* Határozzuk meg az $r = \varphi$ egyenletü archimedesi spirális és a $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ egyenletü félegyenesek közti egységnyi sürüségü lemez sulypontját és poláris (tehetetlenségi) nyomatékát.

3453. Számitsuk ki az ábrán látható egységnyi sürüségü lemez origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.



3453.

3454. Határozzuk meg a $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kup és a $z = 0$ sik által határolt egységnyi sűrűségű test Z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

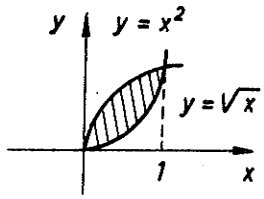
3455. Mennyi az $R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2$ egységnyi sűrűségű gömbhéj Z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

3456. Határozzuk meg a

$$z = 2x + 3y \qquad (x > 0)$$
$$2x = 5y$$
$$z = 0$$
$$x = 0$$
$$y = 1$$

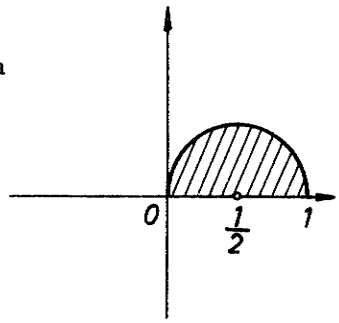
határfelületekkel rendelkező egységnyi sűrűségű test tehetetlenségi nyomatékát mindhárom tengelyre.

3457. Számitsuk ki az ábrán látható egységnyi sűrűségű sikrész tehetetlenségi nyomatékát a Z tengelyre vonatkozólag.



3457.

3458. Számitsuk ki az ábrán látható lemezszerű test poláris tehetetlenségi nyomatékát, ha a sűrűsége $\rho = xy + 1$.



3458.

3459. Egy egységnyi sűrűségű test határfelületei:

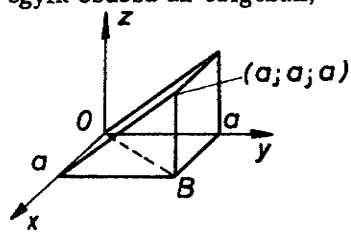
$$z = 3 - x^2 - y^2$$
$$z = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Számitandó a test mindhárom tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka.

3460. Határozzuk meg a $z = 4 - y^2$; $z > 0$ parabolikus henger, az $x^2 + y^2 = 1$ körhenger és a $z = 0$ sik által határolt egységnyi sűrűségű test Z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

3461.* Számitsuk ki egy kockának a test átlójára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. (Legyen egy "a" élő kocka egyik csucsa az origóban, és a tengelyek a kocka élei.)

3462. Számitsuk ki az ábrán látható egységnyi sűrűségű félkockának az OB lapátlóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.



3462.

3463. Számitsuk ki az A (1, 0, 0); B(1, 1, 0); C(1, 0, 1) csucspontu gulának az OC élre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. (A test sűrűsége egységnyi.)

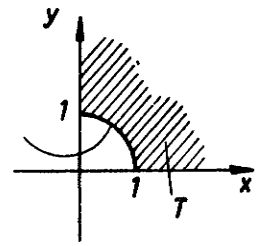
3464. Számitsuk ki az $y_1 = \sin x$ és $y_2 = -\sin x$ görbék $0 \le x \le \pi$ szakaszai által határolt sikrész Y tengely körüli forgatásával nyert test köbtartalmát.

3465.* Mekkora az $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ körnek az X tengely körüli forgásával nyert tórus felszine és köbtartalma?

3466. Határozzuk meg a $z = 0$ és $z = e^{-x^2-y^2}$ felületek közti térrész térfogatát.

3467.* Határozzuk meg a $z = 0$ sik, az $x^2 + y^2 = 1$ henger és a $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ felületek közé eső térrész köbtartalmát.

3468.* Milyen n kitevőkre konvergens az $\iint_T \frac{dx\ dy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^n}$ integrál, az ábrán vonalkázott végtelen kiterjedésü T tartományon? Határozzuk meg az integrál értékét.



3468.

3469. Milyen n kitevő mellett konvergens a

$\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n}$ integrál, abban a végtelen kiterjedésü V tartományban, amely az $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$ térnyolcadból olymódon jött létre, hogy abból eltávolitjuk az $x^2+y^2+z^2 < 1$ feltételnek eleget tevő pontokat. Határozzuk meg az integrál értékét.

3470. $\iint\limits_T e^{-(x+y)}\,dx\,dy = ?$ T az $x > 0$, $y > 0$ siknegyed.

3471. $\iint\limits_T e^{-(x+y)}\,dx\,dy = ?$ T az $x < 0$, $y > 0$ siknegyed.

3472. $\iiint\limits_V e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz?$ V az egész tér.

3473. Milyen n kitevő mellett konvergens az $\iint\limits_T \frac{dx\,dy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n}$ integrál?

T az origó körüli egységsugaru kör.

3474. Milyen n kitevőkre konvergens az $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n}$ integrál?

V az origó középpontu egységsugaru gömb.

3475. Határozzuk meg a $z = e^{-(x^2+y^2)}$ felület és az (x, y) sik határolta végtelen kiterjedésü homogén egységnyi sürüségü test Z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

4. SOROZATOK ÉS SOROK

41. NUMERIKUS SOROZATOK

Irjuk fel az alábbi végtelen sorozat első néhány tagját. Vizsgáljuk meg, hogy e sorozat korlátos-e, monoton-e, konvergens-e? Határozzuk meg a konvergens sorozatok határértékét.

4101. $a_n = 3n$. (Itt, és a további sorozatokban is $n = 1, 2, \ldots$)

4102. $a_n = (-1)^n n$.

4103. $a_n = 2 + 4n$

4104.* $a_n = n - n^2$.

4105. $a_n = n^2 + (-1)^n n^2$.

4106. $a_n = \frac{5}{n}$

4107. $a_n = -\frac{3}{n^2}$.

4108. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

4109. $a_n = \frac{n+1}{2n^2 - 1}$

4110. $a_n = \frac{n^2}{10n + 2}$

4111* $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1} - \frac{n+2}{n+3} + \frac{5}{1 + (-1)^n 5n^2}$

4112. $a_n = 3^n$

4113. $a_n = 2^n + (-1)^{n+1} 4^n$.

4114. $a_n = \frac{1}{4^n - 1}$

4115. $a_n = \frac{2^n - 4^n}{2^n + 4^n}$

4116. $a_n = \frac{2^{n^2}}{4^n + 1}$.

4117. $a_n = n^2 + \frac{2}{4^n + 1}$.

4118. $a_n = \frac{2n+3}{5n-1} \cdot \frac{3^n}{2^{2n}-1}$.

4119.* $a_n = \frac{n^2 - 8 \cdot 4^n}{n^2 + 6 \cdot 4^n}$

4120. $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^5$.

4121.* $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

4122. $a_n = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^{2^n}$

4123. $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{ha} \quad n = 2m, \\ \frac{2n-1}{2n+1}, & \text{ha} \quad n = 2m - 1. \end{cases}$

4124. $a_n = \begin{cases} 2, & \text{ha} \quad n = 3m, \\ \frac{4n^2 - 1}{2n^2 + 2n}, & \text{ha} \quad n = 3m - 1, \\ \frac{2^n + n}{2^{n-1} + 3}, & \text{ha} \quad n = 3m - 2. \end{cases}$

4125.* $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha} \quad n = 10^5, \\ \frac{n+1}{2n+3}, & \text{ha} \quad n > 10^5. \end{cases}$

4126. $a_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n}$

4127.* $a_n = \frac{1 + 3 + \ldots + 2n - 1}{2 + 4 + \ldots + 2n}$

4128.* $a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$, $(n \geqq 3)$.

4129. $a_n = \frac{10^n}{n!}$, $(n \geqq 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$.

4130.* $a_1 = 0; \quad a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3^n}, \quad (n \geqq 2)$

4131. $a_1 = -2;\quad a_n = (-1)^n a_{n-1} - 8,\quad (n \geqq 2)$.

4132. $a_1 = -1;\quad a_n = -4 + 3a_{n-1},\quad (n \geqq 2)$.

4133. $a_1 = 6;\quad a_n = 5 - \frac{6}{a_{n-1}},\quad (n \geqq 2)$.

4134. $a_1 = 1;\quad a_2 = 1;\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\quad (n \geqq 3)$.

4135.* a_1 milyen megválasztásával lesz konvergens az $a_n = 2a_{n-1}^2 + a_{n-1}$ rekurziós formulával $(n = 1, 2, \ldots)$ megadott sorozat.

4136. $a_n = \sqrt{n+3}$ (itt, és a további sorozatokban is $n \geqq 1$).

4137. $a_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n}$.

4138.* $a_n = \sqrt[4]{\frac{2^n+1}{n+2^n}}$

4139.* $a_n = \sqrt[n]{n}$.

4140. $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$.

4141. $a_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

4142. $a_n = \lg n$.

4143. $a_n = \frac{1}{n}\lg\frac{n^3+1}{n^3}$.

4144. $a_n = \sin n$.

4145. $a_n = \operatorname{tg} n$.

4146. $a_n = \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n}$.

4147.* $a_n = \frac{2^n}{3^n+1}\sin\frac{1}{n}$.

4148. $a_n = \frac{n+1}{tn+2}$ ($t > 0$ rögzitett)

Vizsgáljuk meg, konvergensek-e az alábbi sorozatok. Ha igen, határozzuk meg a $N(\varepsilon)$ indexszámot (küszöbindexet), melynél nagyobb indexü tagok a számsorozatban az előírt ε-nál kisebb hibával közelitik meg a sorozat határértékét.

4149. $a_n = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ (itt, és a további sorozatokban is $n \geqq 1$).

4150. $a_n = \frac{2}{(n+1)^2}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

4151. $a_n = \frac{3 - n^3}{5 + 2n^3}$, $\varepsilon = 10^{-9}$.

4152. $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$, $\varepsilon = 10^{-1}$.

4153. $a_n = \frac{1}{3^n + 1}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

4154.* $a_n = \frac{4^n}{3.4^n + 1}$, $\varepsilon = 10^{-30}$.

4155.* $a_n = \lg \frac{n+1}{n+2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

4156. Határozzuk meg, hogy az $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ $n = 1, 2, \ldots$ sorozatnak véges, vagy végtelen sok tagja esik-e az $A = 2,0001$ szám ε-sugaru környezetébe, ha $\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi $+\infty$-hez divergáló sorozatokban milyen $N(K)$ indexszámtól (küszöbindextől) kezdve lesznek a sorozat tagjai az adott K számnál nagyobbak.

4157. $a_n = n^2$, $K = 10^6$ (itt, és a további sorozatokban is $n \geq 1$).

4158. $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1}$, $K = 6500$.

4159. $a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$, $K = 10^{20}$.

4160.* $a_n = \frac{1}{\sin \frac{n}{n^2+2}}$, $K = 10^{20}$.

42. NUMERIKUS SOROK

Vizsgáljuk meg konvergencia szempontjából az alábbi végtelen sorokat:

4201. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$.

4202.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,5^n}{n}$.

4203. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{10n+2}$.

4204.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+2}{n^2+1}$.

4205.* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n+2}-27}$.

4206.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+2}$.

4207. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$.

4208. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+1}$.

4209. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{2^{n+4}+3^n}$.

4210.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{5^n+3^n}$.

4211. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{10n+3} - \frac{3^n+3}{3^{n+1}+n}\right)$.

4212. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3^n}\right)$.

4213. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3^n}\right)$.

4214. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$.

4215. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

4216.* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

4217. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$

4218. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$

4219. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 n}{n^2}$.

4220. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+2n}}$, (k>0, rögzitett).

4221. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+n^2}}$, (k rögzitett).

4222. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^3}}$, (k rögzitett).

4223. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+n^2}$, (k rögzitett).

4224.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$.

4225.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,2^n}{n^3+1}$.

4226. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n\,5^n-3}$.

4227. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$.

4228. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$, $(n! = 1\cdot 2 \cdot \cdots \cdot n)$.

4229. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$.

4230.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

4231. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,2^n}$.

4232. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,4^n}$.

4233.* $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$.

4234. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

4235. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}$

4236. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,n!}{(2n)^n}$

4237. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

4238.* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4239. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\cos\frac{n}{2}\right)^{4n}}{n^n+1}$.

4240. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n+1}{n^n-1}$.

4241. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-5n+6}$.

4242. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+5n^2+6n}$.

4243. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)(k+n+1)}$,

$(0 < k < 1$ rögzitett).

4244. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

4245. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

4246.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{3^n}$.

4247. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^n}$.

4248. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{n}\right)^n$.

4249. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n\, n!}{n^n}$.

4250.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Vizsgáljuk meg, hogy abszolut ill. feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok:

4251. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

4252. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2-2}$.

4253. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}$.

4254. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n \ln}{n^2+3}$.

4255. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + 2}$

4256. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n + 1}{n^2\, 3^n + 2^n}$.

4257.* $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots +$

4258. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

4259. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\lg n}$.

4260. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$.

4261. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

4262.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3}}$.

4263. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$.

4264.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$.

4265. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$.

Számitsuk ki a következő sorok összegét:

4266. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

4267.* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^2}{k^2 + 1}\right)^n$, ($k \neq 0$ rögzitett).

4268. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

4269.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$.

4270. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$.

4271. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$.

4272. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$.

4273. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2}$.

4274. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{5}{n^2 - 5n}$

4275. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{ha} \quad n = 2k, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n, & \text{ha} \quad n = 2k-1, \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$

Számitsuk ki az alábbi konvergens sor k-adik részletösszegét, s_k-t, és becsüljük meg, mekkora H hibát követünk el, ha a sor összegét s_k-val közelitjük meg.

4276.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 1}$; s_3 .

4277. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; s_6 .

4278. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; s_6 .

4279. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,5^n}{n^3\,5^n + 1}$; s_4 .

4280. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,!}$; s_5 .

4281. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\,!}$; s_5 .

4282. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n\,4^n}$; s_4 .

4283. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{n\,4^n}$; s_4 .

4284. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; s_8 .

4285. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$; s_7 .

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi konvergens sorok milyen k indexü részletösszegei közelitik meg a sor összegét az előirt kicsiny $\varepsilon > 0$-nál kisebb hibával.

4286.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

4287.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

4288. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$. 4289. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

4290. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 1}{6^n + 2}$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

4291. Legyen $t > 0$. Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{(t+n)(t+n+1)}$ sor konvergens, de összegének határértéke $t \to \infty$ esetében nem egyenlő a sor tagjai határértékének összegével.

4292. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, bizonyitandó, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2a_{n+1}) = 2a_1 - A$.

4293. Igazoljuk, hogy fennáll a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ egyenlőség.

4294. Igazoljuk, hogy fennáll az $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} +$

$+ \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \ldots = \frac{15}{16} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \right)$
egyenlőség.

4295. Legyen $a_n = \frac{1}{2^{k\sigma}}$, $2^k \leqq n < 2^{k+1}$, σ állandó. Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor $\sigma > 1$ esetében konvergens és összege $\frac{2^{\sigma}}{2^{\sigma} - 2}$.

4296. Legyen $a_n = \frac{1}{2^{k\sigma}}$, $2^{k-1} < n \leqq 2^k$, σ állandó. Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor $0 < \sigma < 1$ esetében divergens.

Irjuk fel közönséges tört alakjában a következő végtelen szakaszos tizedes törteket:

4297. $0,\dot{3}\dot{2}$ 4298. $0,\dot{1}3\dot{2}$

4299. $0,483\dot{6}$

43. FÜGGVÉNYSOROZATOK, FÜGGVÉNYSOROK

Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat egyenletes konvergencia szempontjából az adott intervallumon.

4300.* $s_n(x) = x^n$ $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$

4301.* $s_n(x) = x^n$ $0 \leqq x \leqq 1$

4302. $s_n(x) = \frac{1}{x+n}$ $0 < x < +\infty$

4303. $s_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$ $-\infty < x < +\infty$

4304. $s_n(x) = x + \frac{1}{x^n}$ $1 \leqq x < +\infty$

4305. $s_n(x) = x + \frac{1}{x^n}$ $2 \leqq x < +\infty$

Határozzuk meg a következő függvénysorok konvergencia és abszolut konvergencia tartományát.

4306.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ 4307. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

4308. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ $x > 0$ 4309. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

4310. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}$ 4311. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^n}$

4312. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$

4313. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx^2}$

4314. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$

4315. $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Arctg} x)^n$

4316. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$

4317. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^2 \cdot (x+1)^2 \dots (x+n)^2}$

Mutassuk meg, hogy az alábbi függvénysorok a megadott intervallumban egyenletesen konvergensek.

4318.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

4319. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}}$ $\quad 1 \leqq x < +\infty$

4320. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

4321. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ $\quad 1 \leqq x < +\infty$

4322. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ $\quad 0 \leqq x < +\infty$

4323. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^4}}$ $\qquad -\infty < x < +\infty$

4324. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{x}{n})$ $\qquad -\infty < x < +\infty$

Határozzuk meg, amennyiben létezik, az s(x) összegfüggvény differenciálhányadosát az x_o helyen $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal.

4325.* $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln 2} \cdot \frac{2^{kx}}{k^4}$ $\qquad x_o = -1$

4326. $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ $\qquad x_o = \frac{\pi}{2}$

Számitsuk ki, amennyiben létezik, az s(x) összegfüggvény adott intervallumra vonatkozó határozott integrálját $\varepsilon = 10^{-1}$ pontossággal.

4327. $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^k}{2^k}$ $\qquad [0;\ 1,5]$

4328. $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}$ $\qquad [0;\ 1]$

4329.* Bizonyitsuk be, hogy $x \to +\infty$ esetén az

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} + \frac{x}{(x+2)(x+3)} + \frac{x}{(x+3)(x+4)} + \ldots +$$

$$+ \frac{x}{(x+n)(x+n+1)} + \ldots$$

sor összegének határértéke nem egyenlő a sor tagjai határértékének összegével.

44. HATVÁNYSOROK. TAYLOR-SOROK

Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciatartományának R sugarát.

4400.* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

4401. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

4402. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \cdot x^k$

4403. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \cdot x^k$

4404. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 4^k}$

4405. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2 \cdot 2^k}$

4406. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$

4407. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} \cdot x^k$

Írjuk fel a következő függvények $x = 0$ helyhez tartozó Taylor-sorát (Mac Laurin-sorát!). Állapitsuk meg a Taylor-sor konvergencia tartományát.

4408. $y = \sqrt{e^x}$

4409. $y = \sin x \cos x$

4410. $y = \cos\sqrt{x}$

4411. $y = \operatorname{sh} \frac{x}{3}$

4412. $y = \operatorname{ch}^2 x$

4413. $y = \frac{x}{1+x}$

4414. $y = \frac{1}{8 - x^3}$

4415.* $y = \frac{3x - 1}{4 + 6x^2}$

4416. $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

4417. $y = \ln(1 + x^2)$

4418. $y = \ln(1 - x^2)$

4419. $y = \ln \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

4420. $y = \ln (x^2 + 5x + 6)$

4421. $y = \operatorname{arc\,tg} 2x$

4422. $y = e^{x^2+1}$

4423. $y = e^x \cdot \operatorname{ch} x$

4424. $y = \sin (3x + 3)$

4425. $y = x^2 \cdot \sqrt{e^{-3x+1}}$

4426. $y = \cos^2 2x$

4427. $y = 10^x$

4428.* $y = \operatorname{tg} x$

4429. $y = \operatorname{th} x$

4430. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + x^2}}$

4431. $y = \sqrt{4 + x}$

4432. $y = \sqrt[4]{2 - 4x^3}$

4433. $y = \dfrac{1}{(1 - x)^3}$

4434. $y = \operatorname{arsh} x$

4435. $y = \sqrt[3]{8 + x}$

4436. $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$

4437. $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4 + 8x}}$

4438. $y = \dfrac{x}{(3 - x)^2}$

4439. $y = \dfrac{\sqrt{4 - x}}{\sqrt{16 - x^2}}$

Irjuk fel a következő függvények $x = x_0$ helyhez tartozó Taylor-sorát. Állapitsuk meg a Taylor-sor konvergencia tartományát.

4440.* $y = \ln x$ $\quad x_0 = 1$

4441. $y = \ln x$ $\quad x_0 = e$

4442. $y = \ln (5a + x)$ $\quad x_0 = a \quad a > 0$

4443. $y = e^{\frac{x}{2}}$ $\quad x_0 = 1$

4444. $y = x \cdot e^{x-1}$ $\quad x_0 = 1$

4445. $y = \sin x$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{3}$

4446. $y = \cos x$ $\qquad x_o = \frac{\pi}{4}$

4447. $y = \sqrt{1 + x}$ $\qquad x_o = 2$

4448. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + x}}$ $\qquad x_o = 5$

4449. $y = \sqrt{4 - x^2}$ $\qquad x_o = 1$ ill. $x'_o = 3$

4450. $y = 2x^3 - x^2 + x - 3$ $\qquad x_o = 1$

4451. $y = x^3 - x^2 + 2x + 10$ $\qquad x_o = 2$

Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvényt másodrendü Taylor-polinomja mekkora hibával közeliti meg a megadott intervallumon.

4452. $y = \operatorname{tg} x$ $\qquad x \in [0;\ 0,4]$

4453. $y = \sin x$ $\qquad x \in [0;\ 0,5]$

4454. $y = \cos x$ $\qquad x \in [0;\ 0,2]$

4455. $y = e^x$ $\qquad x \in [0;\ 0,1]$

4456. $y = \operatorname{sh} x$ $\qquad x \in [-0,2;\ 0]$

Határozzuk meg a következő függvényértékek közelitő értékét $\varepsilon = 10^{-3}$ pontossággal.

4457.* $\sqrt[3]{9}$ $\qquad$ 4458. $\ln 1,2$

4459. $\ln 3$ $\qquad$ 4460. $\sin 0,5$

4461. $\cos 0,4$ $\qquad$ 4462. $\sqrt{10}$

4463. $e^{-0,1}$ $\qquad$ 4464. $\operatorname{sh} 0,2$

Számitsuk ki a következő határozott integrálok közelitő értékét $\varepsilon = 10^{-4}$ pontossággal.

4465.* $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}\, dx$

4466. $\int_0^{0,4} \frac{\cos x - 1}{x} dx$

4467. $\int_0^{0,2} \frac{e^x - 1}{x}\, dx$

4468. $\int_0^{1} e^{-x^2}\, dx$

4469. $\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx$

4470. $\int_0^{0,2} \sqrt{1 + x^3}\, dx$

4471. $\int_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[6]{1 + x^3}}$

4472. $\int_0^{0,1} \frac{dx}{2 + x^3}$

45. FOURIER-SOROK

Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát.

4500. $f(x) = x \qquad -\pi \leqq x < \pi \qquad f(x + 2k\pi) = f(x)$

4501. $f(x) = \operatorname{sgn} x \qquad -\pi \leqq x < \pi \qquad f(x + 2k\pi) = f(x)$

4502. $f(x) = |\sin x|$

4503. $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \leqq x < \pi \\ \pi - x & \text{ha } \pi \leqq x < 2\pi \end{cases} \qquad f(x + 2k\pi) = f(x)$

4504. $f(x) = \pi - \frac{x^2}{\pi} \qquad -\pi \leqq x < \pi \qquad f(x + 2k\pi) = f(x)$

4505. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha } 0 \leqq x < \pi \\ 0 & \pi \leqq x < 2\pi \end{cases} \qquad f(x + 2k\pi) = f(x)$

4506. $f(x) = \begin{cases} 2 & -4 \leqq x < -2 \\ 0 & -2 \leqq x < 2 \\ 2 & 2 \leqq x < 4 \end{cases}$ $\quad f(x + 8k) = f(x)$

4507. $f(x) = x^2 \quad -1 \leqq x < 1 \quad f(x + 2k) = f(x)$

4508.* $f(x) = \begin{cases} -2 & -2 \leqq x < -1 \\ x & -1 \leqq x < 1 \\ 2 & 1 \leqq x < 2 \end{cases}$ $\quad f(x + 4k) = f(x)$

4509. $y = \sin^2 x \cdot \cos 2x$

4510. $y = \sin 4x + \cos^2 x \cdot \sin 2x$

Állitsuk elő - az adott intervallumban - az alábbi $y = f(x)$ függvényt tiszta koszinuszos Fourier-sor segitségével.

4511. $y = x^3 \quad 0 \leqq x \leqq 1$

4512. $y = \sin ax \quad 0 \leqq x \leqq \pi$ (a nem egész szám)

4513. $y = x + 3 \quad -3 \leqq x \leqq 0$

Állitsuk elő - az adott intervallumban - az alábbi $y = f(x)$ függvényt tiszta szinuszos Fourier-sor segitségével.

4514. $y = (x - 2)^2 \quad 2 \leqq x \leqq 4$

4515. $y = \cos ax \quad 0 \leqq x \leqq \pi$ (a nem egész szám)

4516. $y = e^x \quad 0 \leqq x \leqq 1$

A Fourier-sor exponenciális alakjának felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát.

4517. $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leqq x < 0 \\ -1 & 0 \leqq x < 1 \end{cases}$ $\quad f(x + 2) = f(x)$

4518. $f(x) = e^x - 1 \quad 0 \leqq x < 2\pi \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

4519. $f(x) = e^x \quad -3 \leqq x < 3 \quad f(x + 6) = f(x)$

4520. $f(x) = \sin\sqrt{2x} \quad 0 \leqq x < \pi \quad f(x + \pi) = f(x)$

Állítsuk elő az alábbi függvények Fourier-transzformáltját:

4521. $$f(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ e^{-\beta t} & 0 < x < +\infty \end{cases} \qquad \beta > 0$$

4522. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{\beta t} & -\infty < x \leqq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-\beta t} & 0 \leqq x < +\infty \end{cases} \qquad \beta > 0$$

4523.* Állítsuk elő az $f(x) = e^{-|x|}$ függvény Fourier-transzformáltját. A Fourier-integrál felhasználásával határozzuk meg az alábbi integrált:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} \, dx$$

5. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

51. ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek adott $M(x_0, y_0)$ ponton áthaladó integrálgörbéjét.

5101. $y' = -\frac{1}{x^2}$ a) $M_1(1, 1)$

b) $M_2(-1, -1)$

c) $M_3(0, 1)$

5102. $y' = -y^2$ a) $M_1(0, 0)$

b) $M_2(1, 0,5)$

5103. $y' = y \ln y$ $M(1, 1)$

5104. $y' = y^{\frac{2}{3}}$ $M(1, 0)$

Vizsgáljuk meg a következő differenciálegyenletek által meghatározott iránymezőt és ennek alapján vázoljuk fel az integrálgörbéket.

5105. $y' = -2x$

5106. $y' = x^2 + c$

5107. $y' = -y$

5108. $y' = -\frac{x}{y}$

5109. $y' = -2xy$

Határozzuk meg az alábbi szeparálható differenciálegyenletek általános megoldását.

5110.* $(1 - x^2)\,dy + (1 - y^2)\,dx = 0$

5111. $x\,dx + y\,dy = xy\,(y\,dx - x\,dy)$

5112. $y\,dx + (x + xy)\,dy = 0$

5113. $(x^2y + 6y)\,dy + (xy^2 - x)\,dx = 0$

5114. $(y^2 + xy^2)\,dx + (x^2 - y\,x^2)\,dy = 0$

5115. $2xy\,(x + 1)y' = y^2 + 1$

5116. $y' = e^{x-y}$

5117. $e^y\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = 1$

5118. $xy' + y^2 = 1$

5119. $2x\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\,dy = 0.$

Határozzuk meg az alábbi szeparálható differenciálegyenleteknek az adott $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégitő partikuláris megoldását.

5120. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0,$ $\quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

5121. $x\,dy - y\,dx = 0,$ $\quad$ a) $y(1) = 1,$ $\quad$ b) $y(1) = 0.$

5122. $(1 - x)\,dx - y\,dy = 0,$ $\quad y(0) = 1.$

Vizsgáljuk meg az alábbi differenciálegyenleteket a tekintetben, hogy a sik mely pontjain halad át integrálgörbe, ill. mely pontokon halad át egyetlen integrálgörbe. Határozzuk meg ezután a differenciálegyenletek általános megoldását és ábrázoljuk az integrálgörbéket.

5123.* $(y^2 - 1)\,dx - (2y + xy)\,dy = 0$

5124. $2\,(xy + x - y - 1)\,dx = (x^2 - 2x)\,dy$

5125. $x\frac{dy}{dx} + y = y^2$

A következő differenciálegyenletek megoldását helyettesitéssel vezessük vissza szeparálható differenciálegyenletek megoldására.

5126.* $(x^2 + 2xy)\,y' = y^2 - 2xy$

5127. $(2\sqrt{xy} - y)\,dx + x\,dy = 0$

5128. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

5129. $xy' = y\,(1 + \ln y - \ln x)$

5130. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

5131.* $(x + y - 1)dx + (2x + 2y - 3)\,dy = 0$

5132. $(2x + y + 1)\,dx + (4x + 2y - 1)dy = 0$

5133. $y' = \sin(x - y)$ 5134. $y' = (x + y)^2$

5135.* $(3y - x)y' = 3x - y + 4$

5136. $(x - 2y - 1)\,dx + (2x - y + 1)\,dy = 0$

5137. $(x - 5y + 5)\,dx + (5x - y + 1)\,dy = 0$

5138.* $xy\,dy = (y^2 + x^3)\,dx$ 5139. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$

5140. $(y^4 - 3x^2)\,dy + xy\,dx = 0$ 5141. $(x^2y^2 - 1)\,dy + 2xy^3\,dx = 0$

Oldjuk meg a következő egzakt differenciálegyenleteket!

5142.* $\left(\frac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(-\frac{x^2}{2y^2} + 2xy + y\right)dy = 0$

5143. $x\,dx + y\,dy + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$

5144. $2 + 4ye^{xy} + (3 + 4xe^{xy})\,y' = 0$

5145. $\cos x - e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y \quad y' = 0$

5146. $\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{yy'}{x^2 + y^2} = 0$

5147. $\frac{(1 - y^2)\,dx + (1 - x^2)\,dy}{(1 + xy)^2} = 0$

5148. $(\cos x - x\cos y)\,dy - (\sin y + y\sin x)\,dx = 0$

5149. $(y\cos^2 x - \sin x)\,dy - y\cos x\,(y\sin x + 1)\,dx = 0$

5150. $(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\,dx + (y^2 + 3xy\sqrt{y^2 + 1})\,dy = 0$

Oldjuk meg az alábbi - egyváltozós multiplikátorral egzakttá tehető - differenciálegyenleteket!

5151.* $y\,dx + (ye^x - 1)\,dy = 0$ 5152. $(1 - xy)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$

5153. $y(2x + y^3)\,dx - x(2x - y^3)\,dy = 0$

5154. $(x \cos y - y \sin y)\,dy + (x \sin y + y \cos y)\,dx = 0$

Határozzuk meg a következő lineáris differenciálegyenletek általános megoldását, ill. az előírt $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását.

5155.* $y' - xy = x^3$ $\quad y(0) = 1$

5156. $xy' + 2y = 3x$

5157. $xy' + 2y = x^4$

5158.* $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$

5159. $2(1 - x^2)y' - (1 + x)y = \sqrt{1 - x^2}$

5160. $y' \cos x + y \sin x - \cos^2 x = 0$ $\quad y(0) = 2$

5161. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ $\quad y(\pi) = -1$

5162. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}\, y = 1$

5163. $y' + ay = e^{nx}$ $\quad$ a, n állandó

5164. $xy' = x + \frac{1}{2} y$ $\quad y(1) = 1$

5165. $y' - 2xy = x$ $\quad y(0) = 0$

5166. $(1 + x^2)\, y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

5167. $y' + \frac{3}{x} y = \frac{2}{x^3}$ $\quad y(1) = 1$

5168. $y\,dx + 2\,(x + y)\,dy = 0$

5169. $y^2\,dx = (3 - 2xy)\,dy$

Oldjuk meg a következő lineárisra visszavezethető differenciálegyenleteket:

5170.* $2(y - 2xy - x^2\sqrt{y}) + x^2 y' = 0$

5171.* $xyy' + y^2 = x^2$

5172. $3y^2 y' + y^3 + x = 0$

5173. $2yy' + y^2 = -x^2$

5174. $2xy' - y = \frac{2x^3 - 1}{y}$

5175. $y' + xy = x^3 y^3$

5176. $xy' = y + 2xy^2$

Keressük meg a következő differenciálegyenletek szinguláris megoldásait.

5177.* $y = xy' + y' + y'^2$

5178. $y'^2 - yy' + e^x = 0$

5179. $(1+y'^2)2xy - (xy'+y)^2 = 0$

5180.* $y'^2 - y^3 = 0$

Oldjuk meg a következő implicit elsőrendü differenciálegyenleteket.

5181.* $y = y' \sin y' + \cos y'$

5182. $e^{y'} \cdot y'^2 = y$

5183. $e^{y'} + y' = x$

5184. $x = ay' + by'^2$

5185. $y'^2 - 2xy' = 0$

5186. $x^3 - y'^3 = xy'$

5187.* $y = xy' + 4y'^2$

5188. $y = xy' - \sin y'$

5189.* $y = x(1 + y') + y'^2$

5190. $y = -xy' - y'^2$

5191. $y^2 (y' - 1) = (2 - y')^2$

Állapitsuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenletek a tanult tipusok melyikéhez tartoznak és oldjuk meg őket.

5192. $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$

5193. $(1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0$

5194. $y' = \frac{1}{2x + y}$

5195. $y'^2 - 2y'x + x^2 - y^2 = 0$

5196. $y' = \sqrt{|y|}$

5197. $y' = \frac{1 - y \sin x}{\cos x}$

5198. $y(3x - 2y)dx + x(x - 2y)\, dy = 0$

5199. $(x + 2x^2y)\, dy + (2y + 3xy^2)\, dx = 0$

5200. $(3x^2 + 4xy)\, dx + (2x^2 + 3y^2)\, dy = 0$

5201. $y' = \frac{x^3 - y}{x}$

5202. $y'^3 = 4yy'$

5203. $(2x - 4y + 5)\, y' = x - 2y + 3$ 5204. $xy^3y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$

5205. $\frac{x^2y'}{y} + 2x \ln y = 0$ 5206. $(2xy' + y)\sqrt{1 + x} = 1 + 2x$

5207. $2yy' = x\,(y'^2 + 4)$ 5208. $x^3y' = 2x^2y + y^3$

5209. $2xy' = x + 3y$ Ábrázoljuk az integrálgörbéket!

5210. $y'^2 - 4xy' + 4y = 0$

5211. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ Ábrázoljuk az integrálgörbéket!

5212. $2x^3y' + x^3 - x^2y = 0$ 5213. $(2xy^3 - y)\, dx + 2x\, dy = 0$

5214. $(x - 2xy - y^2)\, dy + y^2\, dx = 0$ 5215. $y^2\, dx + (xy + 1)\, dy = 0$

5216. $(3x^2 + 2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\, dy = 0$

5217. $xy' + y\,(1 - y) = 0$ 5128. $x\, dy - (x^2 + y)\, dx = 0$

5219. $xy' = y\,(1 + xy)$ 5220. $y' = (4x + y - 1)^2$

5221. $(3x - y - 1)\, dx + (x - 3y + 5)\, dy = 0$

5222. $xy\, dy = (y^2 + x^3)\, dx$ 5223. $(x^2 - x)\, y' = y^2 + y$

5224. $(1 + x^2)\, dy + (1 + y^2)\, dx = 0$ 5225. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

5226. $xy' - y = x^3 + 1$ 5227. $y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^2 x$

5228. $y'^3 + 1 = 0$ 5229. $(y^2 - xy)\, dx + x^2\, dy = 0$

5230. $x = y'^3 + 1$

5231.* Határozzuk meg mindazon körök differenciálegyenletét, melyeknek középpontjai az $y = x$ egyenesen vannak.

5232.* Határozzuk meg annak a görbeseregnek az egyenletét, amelyiknek mindegyik görbéjére fennáll, hogy az (x, y) koordinátáju P pontjához tartozó normálisnak az x tengelyig terjedő darabja ugyanakkora, mint a P pontnak az origótól való távolsága.

5233. Határozzuk meg annak a görbeseregnek az egyenletét, amelyiknek minden görbéjére fennáll, hogy az érintési pont felezi az érintőnek a koordináta-tengelyek közti darabját.

5234. Határozzuk meg mindazon görbék egyenletét, amelyeknél bármely ponthoz huzott érintőnek az érintési pont és az x tengely közti darabját felezi az érintőnek az y tengelyen levő pontja.

5235. Határozzuk meg annak a görbeseregnek az egyenletét, amelyiknek mindegyik elemére fennáll, hogy egy tetszőleges $P(x,y)$ pontjához tartozó normálisának e pontból az y tengelyig terjedő darabját felezi a normálisnak az x tengellyel való metszéspontja.

5236. Határozzuk meg azon görbék egyenletét, amelyeknek bármelyik pontjukhoz tartozó szubtangensük k = állandó.

5237. Határozzuk meg azon görbéknek az egyenletét, amelyeknek bármelyik pontjához tartozó normálisa átmegy az origón.

5238. Mi az egyenlete annak a görbének, amelyiknél a görbe alatti terület az a és x abszcisszáju pontok között arányos e pontok közötti görbeiv hosszával?

5239. Keressük azon görbéket, melyeknél valamely $P(x, y)$ pontnak az origótól való távolsága ugyanakkora, mint amekkora darabot a P ponthoz tartozó érintő az y tengelyből lemetsz.

5240. Keressük azon görbéket, melyeknél valamely $P(x,y)$ ponthoz tartozó szubnormális ugyanakkora, mint amekkora darabot a P ponthoz tartozó érintő az y tengelyből kimetsz.

5241. Egy görbét a következő érintőszerkesztés jellemez: a $P(x, y)$ pontbeli érintőt megkapjuk, ha a $(2x, 0)$ pontot P-vel összekötjük. Határozzuk meg a görbe egyenletét.

5242.* Határozzuk meg az $y = cx^2$ parabola-sereg ortogonális trajektóriáit.

5243. Egy görbe $P(x, y)$ pontjának abszcisszáját osszuk fel n egyenlő részre és kösslük össze a görbe-pontot a legközelebbi osztásponttal. Mi a görbe egyenlete, ha az előbbi szerkesztéssel kapott egyenes a görbe érintője?

5244. Határozzuk meg az $y = ax^{\sigma}$ görbesereg ortogonális trajektóriáját.

5245.* Határozzuk meg az $x^{\sigma} + y^{\sigma} = a^{\sigma}$ $(a > 0;\ \sigma \neq 0)$ görbék ortogonális trajektóriáinak egyenletét.

5246. Határozzuk meg azon görbéket, amelyek az $y = cx$ sugársor egyeneseit állandó α szög alatt metszik.

5247. Határozzuk meg az $r = a \cos\varphi$ görbesereget α szög alatt metsző görbék egyenletét.

5248. Mi az egyenlete azon görbéknek, amelyeknél az érintők tengelymetszeteinek előjeles összege 2a.

5249.* Egy folyadékkal telt hengeres edény ω = állandó szögsebességgel forog a hengeres edény tengelye körül. Határozzuk meg a szabad felszin alakját.

5250. A Newton-féle kihülési törvény szerint egy test lehülési sebessége arányos a test és a hütőközeg közötti hőmérsékletkülönbséggel. Ha a hütő közeg hőmérséklete $20^{\circ}C$ és a test 10 perc alatt $100^{\circ}C$-ról $60^{\circ}C$-ra hül le, hány perc mulva lesz a hőmérséklete $25^{\circ}C$?

5251. Bizonyitsuk be, hogy ha egy test a nehézségi erő hatására mozog ellenálló közegben, ugy hogy a közeg-ellenállásból eredő erő a mozgás irányával ellentétes irányu és a sebesség négyzetével arányos nagyságu, akkor elég hosszu idő elteltével a mozgás egyenletesnek tekinthető.

5252. Egy radioaktiv anyag atomjainak N száma az időnek a következő függvénye:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (\lambda \text{ bomlási állandó})$$

Tegyük fel, hogy a bomlás eredményeként keletkező elem maga is radioaktiv, tehát λ_1 bomlási együtthatóval tovább bomlik. Meghatározandó a radioaktiv bomlástermék atomjainak száma, mint az idő $M = M(t)$ függvénye, feltéve, hogy $M(0) = 0$.

5253.* Határozzuk meg két párhuzamos, végtelen hosszu, ellenkező előjelü töltéssel feltöltött egyenes vezető által létesitett elektrosztatikus tér erővonalainak egyenletét.

53. MÁSOD- ÉS MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Határozzuk meg a következő elsőrendűre visszavezethető differenciálegyenletek általános megoldását.

5301.* $x^2 y'' = 1 - \ln x$

5302. $y''' = \frac{2}{x^3}$

5303. $y''' = \frac{1}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}$

5304.* $xy'' - y' = x^3$

5305. $y'' = \frac{1}{x} y' + x \sin x$

5306. $x^2 y'' = 2x y' - 3$

5307. $(1 - x^2) y'' + x y' = 0$

5308. $y'' - \frac{1}{x} y' + y'^{12} = 0$

5309. $x \ln x \, y'' = y' + x \ln^2 x$

5310. $x y'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

5311. $a y'' = - (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$

5312.* $2y y'' = y'^2$

5313. $y'' + y'^{12} = 1$

5314. $2y'^2 = (y - 1) y''$

5315. $2 y'' + y'^3 = 0$

5316. $y^3 y'' = 1$

5317. $y y'' = y'^3$

5318. $1 + y'^2 = 2y'' y$

5319.* $x y'' - y' - x^2 y = 0$

5320. $xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0$

5321.* $x^2 yy'' = (y - xy')^2$

5322. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

5323.* $yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$

5324. $y'' - xy' - y = 0$

Vizsgáljuk meg a következő elsőrendűre visszavezethető differenciálegyenletek előírt kezdeti-, illetőleg határfeltételeket kielégítő partikuláris megoldása létezésének kérdését és határozzuk meg az illető partikuláris megoldást.

5325. a) $y'' = -2$; $y(-1) = y(1) = 0$

b) Kielégithető-e bármilyen $y(a) = u$, $y(b) = v$ határfeltétel?

c) Ábrázoljuk az $y(1) = 0$ feltételt kielégitő integrálgörbéket!

5326.* $3\,yy'' - 3\,y'^2 = 4\,y^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5327. $y''' = \frac{e^x}{x}$ $y(1) = 0$; $y'(1) = 0$ $y''(1) = 0$.

5328. $y''' = \ln x$, $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = -2$, ha $x = 1$.

5329. $2xy'' + y' = 0$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$.

5330. $y'' = xy'^3$ $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

5331. $y'' = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$; $y'(0) = 2$, $y(0) = 0$.

5332. $2xy' + y'' = 0$; a) $y = 0$; $y' = -1$, ha $x = 0$

b) $y = 0$, $y' = 0$, ha $x = 0$

5333. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5334. $y''^2 = y'$; a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

b) $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5335. $2yy'' = y'^2$; a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,

b) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5336. $yy'' = 2y'^2$; a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5337. $y'' = \frac{y\,y'^2}{1 + y^2}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

5338. Határozzuk meg az $yy'' + y'^2 = 1$ egyenletnek a $P(0, 1)$ ponton áthaladó, és ebben a pontban az $x + y = 1$ egyenessel érintkező integrálgörbéjét. (Miért kapunk egy integrálgörbét?)

Határozzuk meg a következő lineáris differenciálegyenletek általános megoldását a megfelelő homogén egyenlet egy $y_1(x)$ partikuláris megoldásának ismeretében.

5339.* $(x^2 - 2x + 2)\,y'' - x^2\,y' + (2x - 2)\,y = 0;$ $\qquad y_1 = e^x$

5340. $y'' + [\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x]\,y' + 2\,\mathrm{ctg}^2\,x\,y = 0;$ $\qquad y_1 = \sin x.$

5341. $x^2 \ln x\,y'' - xy' + y = x^2 \ln^2 x;$ $\qquad y_1 = x$

5342. $xy'' - (1 + x)\,y' + y = x^2 e^x;$ $\qquad y_1 = e^x.$

5343. $(2x - x^2)\,y'' + (x^2 - 2)\,y' + 2\,(1 - x)\,y = 2x^4 - 8x^3 + 12x^2;$ $\qquad y_1 = x^2.$

5344. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0;$ $\qquad y_1 = x.$

5345. $y'' + 2xy' - 2y = 0;$ $\qquad y_1 = x.$

54. MÁSOD-, ÉS MAGASABBRENDÜ ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK; VEGYES FELADATOK

Határozzuk meg a következő állandó együtthatóju homogén lineáris differenciálegyenletek általános, ill. a feltüntetett feltételeket kielégitő partikuláris megoldását.

5401.* $y'' + 5y' + 4y = 0;$ $\qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$

5402.* $y''' + 8y = 0.$

5403.* $y'' + 2y' + y = 0.$

5404. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

5405. $y'' - 2y' = 0.$

5406. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0;$ $\qquad y(0) = y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 1.$

5407. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0,$

5408. $y''' - y = 0,$

5409. $y'' - 3y' + 2y = 0;$ $\qquad y(0) = 3; \qquad y'(0) = 1.$

5410. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0,$

5411. $y''' + y'' = 0,$

5412. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0,$

5413. $y'' - 3y' + 2y = 0;$ $y(0) = 1,$ $y(1) = e^3.$

5414. $y'' + 9y = 0;$ $y(0) = 1,$ $y(\frac{\pi}{2}) = 2.$

5415. A λ paraméter mely értékei mellett létezik az $y'' + \lambda y = 0$ differenciálegyenletnek az $y(0) = y(\ell) = 0$ peremfeltételeket kielégitő nem triviális megoldása. Határozzuk meg ezt a megoldást!

5416.* Határozzuk meg az "a" paraméter értékeit ugy, hogy az $y''+ay'+ + y = 0$ egyenlet összes triviálistól különböző megoldása $x \to \infty$ esetén 0-hoz tart.

5417. k mely értékeinél lesz az $y'' + ky = 0$ egyenlet összes triviálistól különböző megoldása korlátos.

5418. k melyik értékeinél szolgáltatnak az $y'' + 2y' + k^2 y = 0$ egyenlet összes nem azonosan nulla megoldásai csillapitott harmonikus rezgést.

5419. k melyik értékeinél állitanak elő az $y'' + 2ky' + y = 0$ egyenlet összes nem triviális megoldásai csillapitott harmonikus rezgést.

Oldjuk meg a következő állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenleteket.

5420. $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

5421. $y'' + 3y' = e^x$

5422. $y'' - 6y' + 8y = x$

5423. $y''' - 2y'' + 5y' = 3$

5424. $y'' + 5y + 6y = 3$

5425. $y''' - 13y' - 12y = e^x$

5426. $y^{(4)} - 8y''' + 16y'' = 2x - 1$

5427. $y'' - 2y' + y = 6e^x$

5428. $y''' - y = x$

5429. $y'' - y = 4e^x$

5430. $y'' - 9y = 6\cos 3x$

5431. $y'' + 4y = \sin 2x$

5432. $y''' - 2y'' - y' + 2y = x$

5433. $y'' - 2y' = x$

5434. $y'' - y' + y = xe^x$

5435. $y'' + 2y' + 5y = xe^{-x}$

5436. $y'' - 6y' + 9y = 3x^2 e^{3x}$

5437. $y'' + 9y = 3x\cos x$

5438. $y''' + y'' = x^2 + 2x + e^x$

Oldjuk meg a következő állandó együtthatósra visszavezethető lineáris differenciálegyenleteket.

5439.* $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

5440.* $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 1 + x^2$

5441. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$

5442. $x^2 y'' + xy' - y = 0$

5443. $x^2 y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$

5444. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x$

5445.* $y'' + \frac{2}{x}y' - a^2 y = 2$

5446. $xy'' + 2y' - xy = e^x$

5447. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$

Állapitsuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenletek milyen tipusuak és oldjuk meg azokat.

5448. $yy'' = 1 + y'^2$

5449. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 6x^2 - 2 = 0$

5450. $x^2 y'' - 6y = 3x^3$

5451. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$

5452. $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$

5453. $xy'' - y' = 0$

5454. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$

5455. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$

5456. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

5457. $xy'' - y' = x^3$

5458. $yy'' = y'^2 + yy'^3$

5459. $y'' + y = \cos x$

5460. $2yy' - y'' = 0$

5461. $y' - 1 = yy''$

5462. $y' = \sin \frac{xy''}{\sqrt{1 - y'^2}}$

5463. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 2$

5464. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = x^2$

5465. $y'' = \frac{y y'^2}{1 + y^2}$

5466. $x^2y'' + 4xy' + 2y = -\cos x$

5467. $(1 - x^2)\, y'' - xy' + n^2 y = 0$

5468. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$

5469. $x^2 (yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2 y'^2 + y^2}$

5470. $y'' - 2y' + y = 4e^x$

5471. $2x^2y'' + 3xy' - 3y = \frac{1}{1+x}$

5472. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = e^x$

5473. $y'' - 6y' + 13y = 39$

5474. Az m tömegü pont az x-tengelyen mozog a kezdőpont felé irányuló és x-szel arányos nagyságu vonzó erő és a sebességgel arányos, vele ellentétes irányu közegellenállás hatására. Meghatározandó a tömegpont x-koordinátája, mint az idő $x = x(t)$ függvénye.

5475. Az x-tengelyen pozitiv irányban állandó v_1 sebességgel egy P pont mozog. Egy Q pont ugy mozog állandó v_2 nagyságu sebességgel, hogy sebessége mindig $\overrightarrow{QP}$ iránytu. Meghatározandó a Q pont pályája (üldözési görbe).

55. DIFFERENCIÁLEGYENLETRENDSZEREK ÉS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Oldjuk meg az alábbi elsőrendü differenciálegyenletrendszereket.

5501.* $\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -y.$

5502. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y.$

5503.* $\frac{dy}{dx} = z + \cos x, \quad \frac{dz}{dx} = -y + 1.$

5504. $\frac{dx}{dt} = y - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \sin t.$

5505. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}.$

5506.* $\frac{dy}{dx} = -7y + z, \quad \frac{dz}{dx} = -2y - 5z.$

5507. $\frac{dx}{dt} = y + z,$ $\frac{dy}{dt} = 5x + y - z,$ $\frac{dz}{dt} = y + z.$

5508. $\frac{dx}{dt}\ 2x + y,$ $\frac{dy}{dt} = y,$ $\frac{dz}{dt} = 3z$

5509. $\frac{dy}{dx} = 3y - z,$ $\frac{dz}{dx} = 17y - 5z.$

5510. $\frac{dx}{dt} = y + z,$ $\frac{dy}{dt} = z + x\ ,$ $\frac{dz}{dt} = x + y\ .$

5511. $\frac{dx}{dt} = -x + y + z,$ $\frac{dy}{dt} = x - y + z,$ $\frac{dz}{dt} = x + y - z.$

5512. $\frac{dx}{dt} = -5x - y\ ,$ $\frac{dy}{dt} = 2x - 3y\ .$

5513. $\frac{dx}{dt} = -5x - y + e^{t},$ $\frac{dy}{dt} = x - 3y + e^{2t},$

5514. $t\frac{dx}{dt} = x + 3y\ ,$ $t\frac{dy}{dt} = x - y\ .$

5515. $x\frac{dy}{dx} = 5y + 4z\ ,$ $x\frac{dz}{dx} = 4y + 5z.$

5516. $\frac{dx}{dt} = y,$ $\frac{dy}{dt} = z,$ $\frac{dz}{dt} = x.$

5517. $\frac{dy}{dx} = y + z\ ,$ $\frac{dz}{dx} = y + z + x\ .$

5518.* $\frac{dx}{dt} = -x + y,$ $\frac{dy}{dt} - y + 4z,$ $\frac{dz}{dt} = x - 4z.$

Határozzuk meg azt az elsőrendü általános parciális differenciálegyenletet, amelynek teljes megoldása:

5519. $u = ax + by + ab.$ 5520. $u^2 = 2\,(y - a)\,(bx - 1)$

5521.* $u = -\left[\frac{1}{a}(ax^2 + b + y)\right]^{-1}$ 5522. $u + \left[\frac{1}{a}\ (a^2x + b + y)\right]^{-1} = 0$

5523.* $(x - a)^2 + (y - b)^2 + a^2 = R^2$ ahol R állandó

5524.* Keressük meg az előző feladat teljes megoldásának burkolóját, ha

$$b = \alpha a + \beta \qquad \alpha, \beta \text{ állandók}$$

5525. $u = 2\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{ay + b}{x}$

5526. Írjuk fel az előző feladat teljes megoldásához a burkoló egyenletét, ha

$$b = 2\sqrt{a}$$

5527.* Határozzuk meg az

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

elsőrendű kvázilineáris differenciálegyenletnek az

$$x_o = t \qquad y_o = t \qquad u_o = 1$$

térgörbére illeszkedő megoldását.

5528. Határozzuk meg az

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyu$$

kvázilineáris parciális differenciálegyenlet

$$x_o = t \qquad y_o = t \qquad u_o = t$$

térgörbére illeszkedő megoldását.

5529. Határozzuk meg az előző feladat egy tetszőleges függvénytől függő általános megoldását.

5530. Keresendő az

$$5 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenlet $x_o = 2t$, $y_o = -t$, $u_o = 9t^2$ térgörbére illeszkedő integrálfelülete.

5531. Határozzuk meg az

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

parciális differenciálegyenlet $x_o = t$, $y_o = \frac{2}{t}$, $u_o = \ln t$ térgörbére illeszkedő integrálfelületét.

5532. Határozzuk meg az

$$uy \frac{\partial u}{\partial x} - ux \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

kvázilineáris elsőrendü parciális differenciálegyenletnek
a) egy tetszőleges függvénytől függő általános megoldását és egy a

b) $x_o = \frac{t}{\sqrt{2}}$, $y_o = \frac{t}{\sqrt{2}}$, $u_o = \sqrt{2t}$

térgörbére illeszkedő partikuláris megoldását.

5533. Határozzuk meg az

$$x \cos y \frac{\partial u}{\partial x} - \sin y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos y \sin y$$

kvázilineáris differenciálegyenlet
a) egy tetszőleges függvénytől függő általános megoldását és
b) $x_o = t$, $y_o = t$, $u_o = t^2 \sin t$ térgörbére illeszkedő integrálfelületét.

5534. Határozzuk meg az

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = xy$$

kvázilineáris elsőrendü parciális differenciálegyenlet tetszőleges függvénytől függő általános megoldását.

5535. Határozzuk meg az előző feladatnak az $x_o = \sqrt{t}$, $y_o = \frac{2}{t}$, $u_o = \sqrt{2}$ kezdeti térgörbére illeszkedő integrál felületét.

5536. Oldjuk meg a következő elsőrendü parciális differenciálegyenletet:

$$F \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 1 = 0 \quad \text{az}$$

$x_o = t$, $y_o = -t$, $u_o = 1$ kezdeti feltétellel.

5537. Oldjuk meg az

$$xy = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

elsőrendü parciális differenciálegyenletet az

$$x_o = t, \qquad y_o = t, \qquad u_o = t^2$$

kezdeti feltétel mellett.

5538. Határozzuk meg a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} = x + y$$

általános elsőrendü parciális differenciálegyenlet $x_o = t$, $y_o = -t$, $u_o = \frac{4}{3}$ térgörbére illeszkedő integrálfelületét.

5539. Határozzuk meg az $x_o = -t$, $y_o = 0$, $u_o = -\frac{t^3}{3}$ térgörbére illeszkedő integrálfelületet a

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

általános elsőrendü parciális differenciálegyenletnek.

5540. Oldjuk meg az

$$2\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 2$$

parciális differenciálegyenletet az $x_o = \frac{t^2}{4}$, $y_o = t$, $u_o = t$ kezdeti feltétel mellett.

5541. Adjuk meg a

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

általános elsőrendü parciális differenciálegyenletnek az

$$x_o = \frac{1}{2}\ (t - \sin t \cos t),$$

$$y_o = \frac{1}{2}\,(t + \sin t \cos t),$$

$$u_o = 2t$$

térgörbére illeszkedő integrál felületét.

5542.* Oldjuk meg a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

parciális differenciálegyenletet a $z(a, y) = \varphi(y)$; $z(b, y) = \psi(y)$ peremfeltételek mellett; s adjuk meg általános megoldását is.

5543.* Határozzuk meg a

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

másodrendü lineáris parciális differenciálegyenletnek a következő feltételeket kielégitő partikuláris megoldását

$$(1) : u(0, y) = 0,$$

$$(2) : u\left(\frac{\pi}{6} \cdot y\right) = 0,$$

$$(3) : u(x, 0) = \sin 6x.$$

5544.* Oldjuk meg a rezgő hur problémáját. A hur mozgásának másodrendü parciális differenciálegyenlete:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A peremfeltételek: $u(0, t) = 0$, $u(\ell, t) = 0$;

kezdeti feltételek: $u(x, 0) = f(x)$ és $\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = g(x)$.

56. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA KÖZELITŐ MÓDSZEREKKEL

Határozzuk meg a következő differenciálegyenleteknek az adott kezdeti feltételt kielégitő partikuláris megoldását sorfejtés segitségével.

5601. $(1 - x)^2 y'' - 2(1 - x)y' - 2y = 0;$

$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2.$

5602. $(1 - x^2) y'' - 2xy' + 12y = 0;$

$y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$

5603. $y'' - 4x^2 y = 2e^{x^2}, \quad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$

5604. $xy'' + (1 + x)y' + y = 0;$

$x \to 0$ esetén $\quad y \to 1 \quad$ és $\quad y' \to -1$

5605. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1 \quad$ és $\quad y'(0) = 0.$

5606. $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4} y = 0;$

$y(0) = 1, \qquad y'(0) = \frac{1}{2}.$

5607. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0;$

$y(0) = 0, \qquad y'(0) = \frac{1}{2}.$

(Elsőrendü Bessel-féle differenciálegyenlet.)

5608.* Határozzuk meg az $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását az

$$(1 - 2x^2 + x^4)y'' + (3x^3 - 3x)y' + (x^4 - 2x^2 - 1)y = 1 - x^2$$

differenciálegyenletnek, hatványsor segitségével; vizsgáljuk meg a konvergencia tartományt és lássuk be, hogy a végpontokban nem megoldható a differenciálegyenlet. (A megoldásnak lényeges szakadása van.)

5609. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását adjuk meg hatványsor alakjában, majd irjuk fel az általános megoldást.

5610. Határozzuk meg az

$$y''(2x+1)^2 - 2(2x+1)y' - 12y = 3x+1$$

differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet

a) $y(-\frac{1}{2}) = 0$, $y'(-\frac{1}{2}) = 0$, ill.

b) $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldások sorfejtéssel való keresésével ill. az inhomogén egyenlet megoldását kisérletező feltétellel.

5611. Határozzuk meg az

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$

differenciálegyenlet

a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, ill.

b) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

feltételeket kielégitő partikuláris megoldásait, és ezek ismeretében az általános megoldást.

5612. Oldjuk meg szukcessziv approximációval $|x| < 10^{-1}$ intervallumban $\varepsilon = 10^{-7}$ pontossággal az $y' = 1 + y^2$ differenciálegyenletet az $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Mutassuk meg, hogy a megoldás egy nevezetes függvény hetedrendü Taylor-polinomja.

5613. Határozzuk meg az $y' = yx$ differenciálegyenletnek az $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégitő partikuláris megoldását sorozatos közelitéssel.

6. VEKTORANALIZIS

61. EGYPARAMÉTERES VEKTOR-SKALÁR FÜGGVÉNYEK

Folytonosak-e az alábbi függvények?

6101. $\bar{r}(t) = \sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + t^2\bar{k}$

6102. $\bar{r}(t) = \frac{1}{t-1}\bar{i} + \operatorname{ch} t\,\bar{j} + e^t\bar{k}$ (c állandó)

6103. $\bar{r}(t) = e^{-\frac{1}{(t-2)^2}}\bar{i} + \frac{\sin(t-2)}{t-2}\bar{j} + 2\bar{k}$

6104. $\bar{r}(t) = t^2\bar{i} + \frac{\cos t - 1}{t}\bar{j} + \frac{\sin t}{t}\bar{k}$

Határozzuk meg az alábbi felületek metszésvonalát!

6105. $F_1 : z = x^2 + y^2$, [r, φ polárkoordináták]
$F_2 : r = \varphi$ henger

6106. $F_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,
$F_2 : (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ alapkörü egyenes körhenger

6107. $F_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,
$F_2 : x + 2y = 0$ sik

6108. $F_1 : z^2 = x^2 + y^2$,
$F_2 : x + y + z = 1$.

Igazoljuk, hogy az alábbi térgörbék az adott felületen helyezkednek el.

6109. $\bar{r}(t) = a\cos t\,\bar{i} + a\sin t\,\bar{j} + bt\,\bar{k}$,

$x^2 + y^2 = a^2$ alapkörü egyenes körhenger

6110. $\bar{r}(t) = t^2\cos t\,\bar{i} + t^2\sin t\,\bar{j} + t^2\bar{k}$,

$x^2 + y^2 = z^2$ kup.

Határozzuk meg az alábbi térgörbék megadott pontjához tartozó érintő-egyenes egyenletét.

6111. $\bar{r}(t) = (t - 3)\bar{i} + (t^2 + 1)\bar{j} + t^2\bar{k}$; $t = 2$.

6112. $\bar{r}(t) = \sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + \frac{1}{\cos t}\bar{k}$; $P_o(0, 1, 1)$.

6113. $\bar{r}(t) = \frac{1}{1+t}\bar{i} + 2\ln(1+t)\bar{j} + e^t\bar{k}$; $P_o(0, 0, 1)$.

6114. $\bar{r}(t) = \frac{1}{1+t}\bar{i} + \frac{1+t}{t}\bar{j} + t^2\bar{k}$; $P_o(\frac{1}{2}, 2, 1)$.

Keressük meg az alábbi térgörbék azon pontjait, ahol az érintő a kivánt tulajdonságu:

6115. $\bar{r}(t) = \frac{t^4}{4}\bar{i} + \frac{t^3}{3}\bar{j} + \frac{t^2}{2}\bar{k}$. Az érintő párhuzamos az $x + 3y + 2z = 0$ sikkal.

6116. $\bar{r}(t) = (-t\cos t + \sin t)\bar{i} + (t\sin t + \cos t)\bar{j} + (t + 1)\bar{k}$. Az érintő párhuzamos az (y, z) sikkal.

6117.* Bizonyitsuk be, hogy az $\bar{r}(t) = e^t\cos t\,\bar{i} + e^t\sin t\,\bar{j} + e^t\bar{k}$ görbe illeszkedik az $x^2 + y^2 = z^2$ kupra és ennek összes alkotóját ugyanazon szög alatt metszi.

6118. Az $x = e^{at}\cos t$,
$y = e^{at}\sin t$,
$z = e^{at}$ görbe milyen $\underline{a}$ érték mellett metszi az $x^2 + y^2 = z^2$ kup összes alkotóját 45°-os szög alatt?

Egy görbe szférikus indikatrixának nevezzük az origóból huzott, a görbe érintőivel párhuzamos egységvektorok végpontjainak geometriai helyét. Határozzuk meg az alábbi görbék szférikus indikatrixát.

6119. $x = a \cos t$; $y = a \sin t$; $z = bt$. (a, b állandók)

6120. $\bar{r}(t) = (2t - \sin 2t)\bar{i} + \cos 2t\, \bar{j} + 4 \sin t\, \bar{k}$.

Határozzuk meg, hogy az alábbi térgörbék érintőinek az (x, y) sikkal való döféspontjai milyen görbén helyezkednek el.

6121. $\bar{r}(t) = \cos t\, \bar{i} + \sin t\, \bar{j} + ct\bar{k}$. (c állandó)

6122. $\bar{r}(t) = e^t \cos t\, \bar{i} + e^t \sin t\, \bar{j} + ce^t\bar{k}$.

Határozzuk meg az alábbi görbék ivhosszát:

6123. $\bar{r}(t) = (\sin t - t\cos t)\bar{i} + (\cos t + t \sin t)\bar{j} + (t + 1)\bar{k}$;
$0 \leqq t \leqq 5$.

6124. $\bar{r}(t) = t \cos(3\ln t)\bar{i} + t \sin(3\ln t)\bar{j} + 2t\bar{k}$; $0 \leqq t \leqq 2$.

6125. $\bar{r}(t) = 3t^2\bar{i} + (\sqrt{2}t + 3)\bar{j} + 3t^2\bar{k}$; $0 \leqq t \leqq 1$.

6126. $\bar{r}(t) = at\, \bar{i} + \sqrt{3abt^2}\,\bar{j} + 2bt^3\bar{k}$; (a, b állandók)
$0 \leqq t \leqq 5$.

Irjuk fel az alábbi görbék egyenletét ivhossz paraméterrel:

6127. $\bar{r}(t) = a \cos t\, \bar{i} + a \sin t\, \bar{j} + bt\, \bar{k}$ (a, b állandók)

6128. $\bar{r}(t) = e^t \cos t\, \bar{i} + e^t \sin t\, \bar{j} + e^t\bar{k}$

6129. $\bar{r}(t) = (t + 3)\bar{i} + \frac{t^2}{2}\bar{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}}\bar{k}$

6130. Határozzuk meg az

$\bar{r}(t) = at \cos t\, \bar{i} + at \sin t\, \bar{j} + ct\bar{k}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

térgörbe menti $\rho(t) = |\bar{r}(t)|$ sűrüségü anyageloszlás tömegét. Határozzuk meg az alábbi térgörbék menti egyenletes eloszlásu tömeg sulypontját.

6131. $\bar{r}(t) = \bar{i} + \bar{j} + t\bar{k}$ $-a \leqq t \leqq a$

6131. $\bar{r}(t) = a \cos t\, \bar{i} + a \sin t\, \bar{j} + bt\bar{k}$ (a, b állandók)
$0 \leqq t \leqq \pi$

6133. Egy görbe önmagába eltolható, ha görbülete és torziója állandó. Bizonyitsuk be, hogy a hengerre irt csavarvonal önmagába eltolható.

6134. Irjuk fel az egységsugaru hengerre irt egységnyi emelkedésü csavarvonal egyenletét ivhosszparaméterrel, majd határozzuk meg az érintő. normális és binormális egységvektorokat, valamint a görbületet és a torziót.

6135. Határozzuk meg az

$\bar{r}(t) = \cos^2 t\bar{i} + \cos t \sin t\,\bar{j} + \sin t\,\bar{k}$

Viviani-görbe görbületét a $t = \pi/2$ pontban.

6136.* Bizonyitsuk be, hogy R sugaru körön állandó ω szögsebességgel mozgó pont gyorsulás-vektora $-\omega^2 R\bar{n}$

6137.* Bizonyitsuk be, hogy ha a centrum az origóban van, akkor a centrális mozgásra az $\bar{r} \times \ddot{\bar{r}} \equiv \bar{0}$ összefüggés jellemző.
[Centrális a mozgás, ha az őt létrehozó erő mindig valamely fix pont - a centrum - felé mutat.]

62. KÉTPARAMÉTERES VEKTOR-SKALÁR FÜGGVÉNYEK

Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket értelmezés és egyértékűség szempontjából

6201. $\bar{r}(u,v) = \frac{\sin u}{v}\bar{i} + \frac{u^2}{v-1}\bar{j} + e^{\frac{v^2}{u-2}}\bar{k}$.

6202. $\bar{r}(u,v) = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}\bar{i} + (u^2 + v^2)\bar{j} + uv\bar{k}$.

6203. $\bar{r}(u,v) = \sqrt{uv}\,\bar{i} + \frac{1}{u^2 + v^2}\bar{j} + \arcsin u\bar{k}$.

Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket határérték és folytonosság szempontjából:

6204. $\bar{r}(u,v) = \sin\frac{1}{u}\bar{i} + uv^2\bar{j} + uv^3\bar{k}$.

6205. $\bar{r}(u,v) = uv\bar{i} + e^{-\frac{1}{(v-3)^2}}\bar{j} + (u^2 - v^3)\bar{k}$.

6206. $\bar{r}(u,v) = \operatorname{tg} uv\bar{i} + \frac{e^v - 1}{u}\bar{j} + (u - v)\bar{k}$.

Állitsuk elő az alábbi függvény parciális derivált vektorait

6207. $\bar{r}(u,v) = (u^2 - 2v^3)\bar{i} + u^2v\bar{j} + (uv^2 - u)\bar{k}$

Számitsuk ki az alábbi függvény t szerinti derivált vektorát:

6208. $\bar{r}(u,v) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\bar{i} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\bar{j} + \operatorname{arctg}\frac{v}{u}\bar{k}$,

$u = e^t\cos t$; $v = e^t\sin t$.

Irjuk fel az alábbi felületek egyenleteit kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel.

6209. $z = x^2 + y^2$

6210. $z^2 = x^2 + 4y^2$.

6211. $z - x + y - 4 = 0$.

6212. $x + y^2 - 4z = 3$.

6213. $z = 1 - 4x^2 - 9y^2$.

6214. $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Irjuk fel gömbkoordinátákkal az alábbi felületek egyenleteit:

6215. Origó középpontu R sugaru gömb.

6216. Z tengelyre illeszkedő sik.

6217. Z tengelyü origó csucspontu ϑ félnyilásszögü kup.

Irjuk fel hengerkoordinátákkal az alábbi felületek egyenleteit:

6218. Z tengelyre merőleges sik.

6219. Z tengelyre illeszkedő sik.

6220. Z tengelyü egyenes körhenger.

Irjuk át implicit skaláris alakra az alábbi vektorfüggvényeket:

6221. $\bar{r}(u, v) = u \operatorname{ch} v\bar{i} + u \operatorname{sh} v\bar{j} + 2u\bar{k}$,

$-\infty < u < \infty$; $-\infty < v < \infty$

6222. $\bar{r}(u, v) = a \cos u \cos v\bar{i} + b \cos u \sin v\bar{j} + c \sin u\bar{k}$,

$0 \leqq u < \pi$; $0 \leqq v < 2\pi$, a, b, c állandók.

Irjuk fel az alábbi sikok vektoregyenletét:

6223. A sik illeszkedik a $P_1(2,3,1)$; $P_2(-1,2,4)$ és $P_3(5, -3, 2)$ pontokra.

6224. A sik illeszkedik a $P_0(1, -2, 3)$ pontra és az $\frac{x}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{1-z}{2}$ egyenesre.

Irjuk fel az adott vezérgörbéjü és alkotóirányu hengerfelületek egyenleteit:

6225. $y = x^2$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$.

6226. $x^2 - y^2 = 1$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{k}$.

6227. $r = \varphi$, $\bar{a} = \bar{j} + \bar{k}$ [r, φ polárkoordináták].

6228. $(x-2)^2 + y^2 = 1$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$.

Irjuk fel az adott vezérgörbéjü és csucspontu kupfelületek egyenleteit:

6229. $y = x^2$ $P_0(1, 1, 5)$.

6230. $x^2 + y^2 = 25$; $P_0(2,3,4)$.

6231. $r = e^{\varphi}$; $P_0(-1, 0, 6)$ [r, φ polárkoordináták].

6232. $\bar{r}(t) = \operatorname{ch} t\,\bar{i} + \operatorname{sh} t\,\bar{j} + t\bar{k}$; $P_0(0, 0, 10)$.

Irjuk fel az alábbi görbék Z tengely körüli forgatásával kapott felületek vektoregyenletét.

6233. $y = z^2$. 6234. $z = y^2$.

6235. $z = \operatorname{ch} y$. 6236. $x = e^z$.

6237. $(x-a)^2 + z^2 = b^2$, [$a > b$ konstansok].

6238. $x^2 - z^2 = 1$. 6239. $z^2 - y^2 = 1$.

6240.* Irjuk fel kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel annak a hiperbolikus paraboloidnak az egyenletét, melynek a hiperbolametszetei az (x, y) sikkal párhuzamos sikokban vannak (valós tengelyük az Y tengely, képzetes tengelyük az X-tengely); a $z = 3$ sikban $a = 4$, $b = 4$; az (y, z) sikban a parabolametszete pedig origó csucspontu és Y tengelyü.

Irjuk fel az alábbi térgörbék érintői által képezett felületek egyenleteit:

6241. $\bar{r}(u) = \cos u\,\bar{i} + \sin u\,\bar{j} + u\bar{k}$.

6242. $\bar{r}(u) = \cos^2 u\,\bar{i} + \sin u \cos u\,\bar{j} + \sin u\,\bar{k}$.

Határozzuk meg az alábbi felületek paramétervonalait:

6243. $\bar{r}(u, v) = a \cos u \cos v\,\bar{i} + a \cos u \sin v\bar{j} + a \sin u\bar{k}$. ($a$ állandó)

6244. $\bar{r}(u, v) = u \cos v\,\bar{i} + u \cos v\bar{j} + v\bar{k}$.

6245. $\bar{r}(u, v) = (a + b \cos u) \cos v\,\bar{i} + (a + b \cos u) \sin v\,\bar{j} + b \sin u\,\bar{k}$.
(a, b állandók)

6246. $\bar{r}(u, v) = u\bar{i} + v\bar{j} + uv\bar{k}$.

Határozzuk meg az (u, v) paramétersikon megadott alábbi görbék képeit a mellékelt felületeken:

6247. $u = -t$; $v = 2t$; $\bar{r}(u, v) = e^u \cos v\bar{i} + e^u \sin v\,\bar{j} + e^v\bar{k}$.

6248. $v = u$; $\bar{r}(u, v) = \cos u \cos v\bar{i} + \cos u \sin v\bar{j} + \sin u\,\bar{k}$.

Határozzuk meg az alábbi felületi görbék megadott pontjaihoz tartozó érintővektorokat:

6249. $\bar{r}(u, v) = e^u \cos v\,\bar{i} + e^u \sin v\bar{j} + e^v\bar{k}$;

$u = -t$; $v = 2t$; $t_0 = 0$.

6250. $\bar{r}(u, v) = \cos u \cos v\bar{i} + \cos u \sin v\bar{j} + \sin u\,\bar{k}$;

$u = 2t$; $v = 3t$; $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel megadott felületek megjelölt pontjaihoz tartozó érintősikok egyenleteit.

6251. $\bar{r}(u, v) = (u^2 - v)\bar{i} + (u - v^3)\bar{j} - (u + v)\bar{k}$;

$u = 1; \quad v = 2.$

6252. $\bar{r}(u, v) = e^u \cos v\, \bar{i} + e^u \sin v\, \bar{j} + e^{2u}\bar{k}$;

$u = 0; \quad v = \frac{\pi}{3}$

6253. $\bar{r}(u, v) = (u^2 + v^2)\bar{i} + uv\bar{j} - \bar{k}$;

$u = 1; \quad v = 3.$

6254. $z = x^2 + y^2$; $\quad x = 1; \quad y = 2$.

6255. $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$; $\quad x = 3; \quad y = 2$.

6256. $z = \frac{1}{xy}$; $\quad x = 1; \quad y = 1$

Számitsuk ki az alábbi felületdarabok felszinét:

6257. $\bar{r}(u, v) = 2 \sin u \cos v\bar{i} + 2 \sin u \sin v\, \bar{j} + 2 \cos u\bar{k}$,

$\pi/4 \leqq u \leqq \frac{3\pi}{4}; \quad 0 \leqq v \leqq 2\pi.$

6258. $\bar{r}(u, v) = u\cos v\bar{i} + u \sin v\, \bar{j} + u\bar{k}$,

$0 \leqq u \leqq 1; \quad 0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$.

6259. $\bar{r}(u, v) = u \sin v\, \bar{i} + u \sin v\, \bar{j} + u \cos v\, \bar{k}$,

$0 \leqq u \leqq 2; \quad 0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{4}$.

6260. $\bar{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u)\bar{i} + (\sin u + v\cos u)\bar{j} + (u + v)\bar{k}$,

$0 \leqq u \leqq 2\pi; \quad 0 \leqq v \leqq 1.$

6261. $\bar{r}(u, v) = (3 + 2 \cos u) \cos v\bar{i} + (3 + 2\cos u) \sin v\bar{j} + 2 \sin u\bar{k}$;

$0 \leqq u \leqq 2\pi; \quad 0 \leqq v \leqq 2\pi.$

6262. $z = \frac{x^2}{2y}$; $0 \leqq x \leqq 1; \quad 1 \leqq y \leqq 2.$

6263. $z = (x + y)^{3/2}$; $\quad x = 0; \quad y = 0; \quad x+y=3$ sikok között.

6264. $z = xy$; $x^2 + y^2 = 1$ körhengerbe eső $z = 0$ sik feletti része.

6265. $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ hengeren belüli része.

Határozzuk meg az alábbi felületekkel határolt zárt térrészek teljes felszinét:

6266. $z^2 = x^2 + y^2$; $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ henger és $z = 0$ sik.

6267. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ henger.

63. SKALÁR-VEKTOR FÜGGVÉNYEK

$(\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})$

Határozzuk meg és ábrázoljuk az alábbi skalár-vektor függvények szintfelületeit.

6301. $u(\bar{r}) = \frac{1}{|\bar{r}|}$.

6302. $u(\bar{r}) = z - x^2 - y^2$.

6303. $u(\bar{r}) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

6304. $u(\bar{r}) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$.

6305. $u(\bar{r}) = z - 2y + x^2$.

Határozzuk meg az alábbi skalár-vektor függvények gradiensét.

6306. $u(\bar{r}) = |\bar{r}|$.

6307.* $u(\bar{r}) = |\bar{r}|^3$.

6308. $u(\bar{r}) = \ln|\bar{r}|$.

6309. $u(\bar{r}) = \bar{a}\cdot\bar{r}$; $\bar{a}$ konstans vektor

6310. $u(\bar{r}) = \frac{1}{|\bar{r}|}$.

6311. $u(\bar{r}) = 3x^2y^3 - 2yz^2$.

Határozzuk meg a megadott pontokban az alábbi skalár-vektor függvények iránymenti deriváltjainak marximális értékét és a maximumhoz tartozó irányt.

6312. $u(\bar{r}) = \frac{1}{|\bar{r}|}$; $\bar{r}_0 = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$.

6313. $u(\bar{r}) = x^2 e^y + zx\cos y;$ $\bar{r}_0 = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}.$

6314. $u(\bar{r}) = \frac{x^2}{2} + xy - e^z;$ $\bar{r}_0 = 2\bar{i} - 3\bar{k}.$

6315. $u(\bar{r}) = (2\bar{i} - \bar{j})\bar{r} - |\bar{r}|;$ $\bar{r}_0 = \bar{j} - 3\bar{k}.$

Irjunk fel egy olyan skalár-vektor függvényt, melynek szintfelülete az alábbi:

6316. $z = x^2 - y^2$ 6317. $x^2 - 3y^2 + z^2 = 5$

6318. $z^2 = x + y$ 6319. $z = \frac{1}{x+y}$

Határozzuk meg az alábbi skalár-vektor függvények megadott ponton átmenő szinfelületét és a szintfelület ottani érintősikját.

6320. $u(\bar{r}) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{9};$ $\bar{r}_0 = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}.$

6321.* $u(\bar{r}) = \ell n|\bar{r}|;$ $\bar{r}_0 = 2\bar{i} - 3\bar{k}.$

6322. $u(\bar{r}) = e^{-|\bar{r}|};$ $\bar{r}_0 = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}.$

6323. $u(r) = x^2 + z + y;$ $\bar{r}_0 = 2\bar{j} - 5\bar{k}.$

Határozzuk meg az alábbi felületek mindazon pontjait, ahol az érintősik párhuzamos a megadott sikkal:

6324. $x^2 + y^2 + 3z^2 = 16;$ $2x - 3y + z = 3.$

6325. $x^2 + y^2 - z^2 = 0;$ $x + y - z + 5 = 0.$

6326. $z - x^2 - y^2 = 5;$ $2x + 2y - z - 3 = 0.$

Képezzük az alábbi skalár-vektor függvények ivhossz szerinti integrálját a megadott görbedarabok mentén:

6327. $u(\bar{r}) = x + y + z;$ $\bar{r}(t) = \cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + t\bar{k},$ $0 \leqq t \leqq 3\pi$

6328. $u(\bar{r}) = xyz;$ $\bar{r}(t) = 2\bar{i} + t\bar{j} + t\bar{k},$ $1 \leqq t \leqq 3.$

6329. $u(\bar{r}) = xy + yz + zx;$ $\bar{r}(t) = 2t\bar{i} - t\bar{j} + 3t\bar{k},$ $0 \leqq t \leqq 5.$

Számitsuk ki az alábbi felszin szerinti integrálokat:

6330. $\iint\limits_{(F)} \frac{df}{x+y+z}$; $F: x+y+z=1$, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

6331. $\iint\limits_{(F)} \frac{df}{|\bar{r}|}$; $F: x^2+y^2+z^2=16$, $x \geqq 0$; $y \geqq 0$; $z \geqq 0$.

6332. $\iint\limits_{(F)} \left\{ |\bar{r}|^2 - (\bar{r}\bar{k})^2 \right\} df$; $F: x^2+y^2=9$ henger, $z=-1$ sik; $z=2$ sik.

6333. $\iint\limits_{(F)} (z - x^2 - y^2)\, df$; $F: x^2+y^2+1=z$. $2 \leqq z \leqq 5$.

6334. $\iint\limits_{(F)} \frac{df}{|\bar{r}\,\bar{n}_o|}$; $\bar{n}_o$ a felületi normális egységvektor; $F: \bar{r}(u, v) = \cos u \cos v\, \bar{i} + \cos u \sin v\, \bar{j} + \sin u\, \bar{k}$; $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leqq v \leqq 2\pi$.

Határozzuk meg az alábbi felületdaraboknak a Z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát:

6335. $\bar{r}(u, v) = 2u \cos v\, \bar{i} + 2u \sin v\, \bar{j} + \frac{u}{2}\bar{k}$; $0 \leqq u \leqq 1$; $0 \leqq v \leqq 2\pi$.

6336. $\bar{r}(u, v) = 3 \sin u \cos v\, \bar{i} + 3 \sin u \sin v\, \bar{j} + 3 \cos u\bar{k}$. $\pi/4 \leqq u \leqq \frac{3\pi}{4}$; $0 \leqq v \leqq 2\pi$.

6337. $\bar{r}(u, v) = (3 + 2 \cos u) \cos v\bar{i} + (3 + 2 \cos u) \sin v\bar{j} + 2 \sin u\bar{k}$, $o \leqq u \leqq \pi$; $0 \leqq v \leqq 2\pi$.

64. A VEKTOR - VEKTORFÜGGVÉNY ÉS INTEGRÁLJAI GRADIENS, DIVERGENCIA, ROTÁCIÓ

Szemléltessük az alábbi vektortereket vektorvonalaikkal.

6401. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{k}$.

6402. $\bar{v}(\bar{r}) = \lambda \bar{r}$. (λ állandó)

6403. $\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|\bar{r}$.

Határozzuk meg az alábbi vektorterek erővonalainak egyenletét.

6404. $\bar{v}(\bar{r}) = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$, (a, b, c állandók).

6405. $\bar{v}(\bar{r}) = -cy\bar{i} + cx\bar{j}$, (c állandó).

6406. $\bar{v}(\bar{r}) = \dfrac{\bar{a} \times \bar{r}}{|\bar{a} \times \bar{r}|^2}$, ($\bar{a}$, állandó).

6407.* $\bar{v}(\bar{r}) = (z - y)^2\bar{i} + z\bar{j} + y\bar{k}$.

6408. $\bar{v}(\bar{r}) = (z - y)\bar{i} + (x - z)\bar{j} + (y - x)\bar{k}$.

Határozzuk meg az alábbi vektorfüggvények megadott görbe menti skalárértékü vonalintegrálját. A görbét általában növekedő paraméterértékek irányába futjuk be.

6409. $\bar{v}(\bar{r}) = (y^2 - x^2)\bar{i} + 2yz\bar{j} - x^2\bar{k}$;

$\bar{r}(t) = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k}$, $0 \le t \le 1$.

6410. $\bar{v}(\bar{r}) = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$;

$\bar{r}(t) = 2\cos t\,\bar{i} + 2\sin t\,\bar{j} + 3t\bar{k}$, $0 \le t \le 2\pi$.

6411. $\bar{v}(\bar{r}) = (z - y)\bar{i} + (x - z)\bar{j} + (y - x)\bar{k}$;

az integrálás utja: $\overrightarrow{AB}$ A(0, 0, 0), B(1, 1, 1).

6412. $\bar{v}(\bar{r}) = x(y^2 - z^2)\bar{i} + y(z^2 - x^2)\bar{j} + z(x^2 - y^2)\bar{k}$

az integrálás utja: az A(1, 3, 2), B(0, -4, 5)

pontokat a koordinátatengelyekkel párhuzamosan összekötő törtvonal, először az X, azután az Y, majd a Z tengellyel párhuzamosan haladva.

6413. $\bar{v}(\bar{r}) = (x^2 + y^2)\bar{i} + (x^2 - y^2)\bar{j}$;

$y = 2 - 3x$ egyenes mentén $0 \leq x \leq 1$.

6414. $\bar{v}(\bar{r}) = (x^2 - y + z)\bar{i} + (x + y^2 + z)\bar{j} + (x + y + z^2)\bar{k}$;

$\bar{r}(t) = \text{ch}t\,\bar{i} + \text{sh}t\,\bar{j} + 2t\bar{k}$, $0 \leq t \leq 3$.

6415. $\bar{v}(\bar{r}) = \left[y\,e^{xy} - yz\sin(xyz)\right]\bar{i} + \left[x\,e^{xy} - xz\sin(xyz)\right]\bar{j} -$
$- xy\sin(xyz)\,\bar{k}$;

az integrálás utja: az $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, \frac{\pi}{2})$ pontokat a koordinátatengelyekkel párhuzamosan összekötő tetszőleges törtvonal.

6416. $\bar{v}(\bar{r}) = (y^2 - x^2 - 2yz)\bar{i} - 2xz\bar{j} + 2xz\,\bar{k}$.

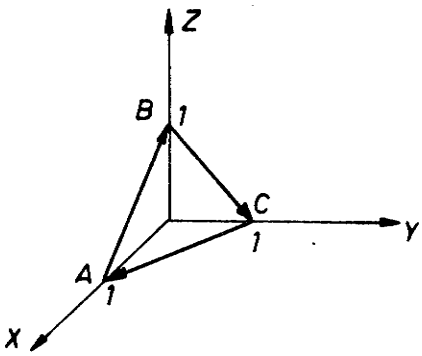
Az integrálás utja: $L = L_1 + L_2 + L_3$ görbe:

$$L_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad 0 \leqq t \leqq 1; \qquad L_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = 1, \\ z = (t-1)^2, \end{cases} \quad 1 \geqq t \geqq 0;$$

$$L_3 : \begin{cases} x = 0, \\ y = -t, \\ z = t^2, \end{cases} \quad -1 \leqq t \leqq 0.$$

6417. $\bar{v}(\bar{r}) = xy\,\bar{i} + yz\,\bar{j} + xz\,\bar{k}$.

Az integrálás utja: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$.



6417.

6418. $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{x}{x^2+y^2}\bar{i} + \frac{-y}{x^2+y^2}\bar{j}.$

Az integrálás utja:

a) $\overrightarrow{AB}$ egyenesszakasz $A(1,0)$, $B(0,1)$;

b) $\overset{\frown}{AB}$ origó középpontu negyedköriv;

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ törtvonal : $A(1,0)$, $B(0,1)$ $C(1,1)$;

d) $x = 1$, $y = 1$, $x = -1$ és $y = -1$

egyenesek által meghatározott négyzet, pozitiv irányu befutással.

6419. $\bar{v}(\bar{r}) = (zx + y)\bar{i} + (zy - x)\bar{j} - (x^2 + y^2)\bar{k}$.

Az integrálás utja: $x^2 + y^2 = 1$,

$z = 3$ görbe, pozitiv körüljárással.

6420. Számitsuk ki mekkora munkát végez a $\bar{v}(\bar{r})$ erőtér, amikor egy m tömegü testet az L görbe mentén A-ból B-be mozgat.

$$\bar{v}(\bar{r}) = \frac{x}{y}\bar{i} + \frac{y}{x}\bar{j} + 2\bar{k};$$

$$L : x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = bt;$$

$$A(t = 0), \qquad B(t = 2\pi).$$

6421. Határozzuk meg a $\bar{v}(\bar{r}) = (x - y)\bar{i} + \bar{k}$ függvény skalárértékü vonalintegrálját, a $z^2 = 2x$ és $9y^2 = 16xz$ felületek metszésvonalán az $A(0, 0, 0)$ és $B(2, \frac{8}{3}, 2)$ pontok között.

6422. Számitsuk ki mekkora munkát végez a $\bar{v}(\bar{r})$ erőtér, amikor egy egységnyi tömegü testet az L görbe mentén mozgat.

$$\bar{v}(\bar{r}) = y^2\bar{i} + x^2\bar{j};$$

$$L : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y \geq 0 \text{ része, pozitiv irányitással.}$$

6423. Határozzuk meg a $\bar{v}(\bar{r}) = (2a - y)\bar{i} + x\bar{j}$ függvény skalárértékü vonalintegrálját, az X tengelyen csuszás nélkül gördülő a sugaru kör origóból induló pontja által leirt görbe egy ive mentén.

Határozzuk meg az alábbi vektorfüggvények megadott görbe menti vektorértékü vonalintegrálját. A görbét növekedő paraméterértékek irányába futjuk be.

6424. $\bar{v}(\bar{r}) = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$;

$L : \bar{r}(t) = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$

6425. $\bar{v}(\bar{r}) = (x + y)\bar{i} + (x - z)\bar{j} - (y + z)\bar{k}$;

$\bar{r}(t) = \cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + 2t\bar{k}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$

6426. $\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|\,\bar{r}$;

$L : y = x^2 ; \quad z = \frac{1}{2} , \qquad 0 \leq x \leq 1.$

Határozzuk meg az alábbi vektorfüggvények skalárértékü felületi integrálját a megadott felületdarabok mentén. (A normálist zárt felület esetén kifelé irányitsuk, egyébként az $\bar{n}\bar{k} \geqq 0$ feltételnek megfelelően.)

6427. $\bar{v}(\bar{r}) = x\,\bar{i} + y\,\bar{j}$;

$\bar{r}(u, v) = 4\cos u \cos v\,\bar{i} + 4\cos u \sin v\,\bar{j} + 4 \sin u\,\bar{k},$

$0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} ,$

$0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} .$

6428. $\bar{v}(\bar{r}) = xy\,\bar{i} + (2x + y)\bar{j} + z\bar{k}$;

$\bar{r}(u, v) = (u + 2v)\bar{i} - v\bar{j} + (u^2 + 3v)\bar{k}, \qquad 0 \leq u \leq 3,$

$0 \leq v \leq 1.$

6429. $\bar{v}(\bar{r}) = yz\,\bar{i} - xz\,\bar{j} + z\,\bar{k}$;

$\bar{r}(u, v) = u \cos v\,\bar{i} + u \sin v\,\bar{j} + 2v\,\bar{k}, \qquad 0 \leq u \leq 1,$

$0 \leq v \leq 2\pi.$

6430. $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{1}{xz}\bar{i} + \frac{1}{yz}\bar{j}$;

$\bar{r}(u, v) = 5 \cos^3 u \cos v\,\bar{i} + 5\cos^3 u \sin v\,\bar{j} + 5\sin^3 u\,\bar{k},$

$0 \leq v \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{\pi}{2} .$

6431. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$;

F : Az XZ sikbeli (3,0) középpontu egységsugaru kör Z tengely körüli megforgatásával keletkező tórusz $z = 0$ sik feletti darabja.

6432. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$;

F : A $z = x^2 + y^2$ felület $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4$ darabja.

6433. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$;

F : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

6434. $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$;

F : A $z^2 = x^2 + y^2$ felület $0 \leq z \leq 4$ darabja.

6435. $\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|^3 \bar{r}$;

F : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ felület $z \geq 0$ része.

6436. $\bar{v}(\bar{r}) = (yz - 2x^2)\bar{i} + (2xy - z^2)\bar{j} + 2xz\,\bar{k}$;

F : Az $y = \sin x$ görbe $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ szakaszának az X tengely körüli megforgatásával keletkező felület.

6437.* $\bar{v}(\bar{r}) = xy\,\bar{i} - 5z^2\bar{j} + 8\bar{k}$;

F : $x + y = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

felületek metszetgörbéje által meghatározott siklemez.

6438. $\bar{v}(\bar{r}) = \text{grad}\ u(\bar{r})$, $u(\bar{r}) = x + y + z$;

F : A fenti skalárvektorfüggvény A(1,1,1) ponton átmenő szintfelületének $\left.\begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq 1 - x \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{array}\right\}$ része.

6439. $\bar{v}(\bar{r}) = \text{grad}\ u(\bar{r})$, $u(\bar{r}) = x^2 + y^2$;

F : A fenti skalárvektorfüggvény A(1, 0, 0) ponton átmenő szintfelületének $0 \leqq z \leqq 2$ része.

6440. $\bar{v}(\bar{r}) = (x - y)\bar{i} + (x + y)\bar{j} + z\,\bar{k}$;

F : A $z = 2x^2 + 3y^2$ felület $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$ része.

6441. $\bar{V}(\bar{r}) = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$;

F : Az $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ felület $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$ része.

Határozzuk meg az alábbi vektorfüggvények vektorértékü felületi integrálját a megadott felületdarabok mentén. (A normálist az $\bar{n}\bar{k} \geq 0$ feltételnek megfelelően irányitsuk.)

6442. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$;

F : Az $x + y + z = 1$ felület $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ része.

6443. $\bar{v}(\bar{r}) = xy\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + yz\,\bar{k}$;

F : Az $\bar{r}(u, v) = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + 2\bar{k}$ felület

$0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$ része.

6444. $\bar{v}(\bar{r}) = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z\bar{k}$;

F : $2x + 3y - 4z = 5$, $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$ része.

Számitsuk ki az alábbi vektorterek divergenciáját és rotációját.

6445. $\bar{v}(\bar{r}) = xy\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + yz\,\bar{k}$.

6446. $\bar{v}(\bar{r}) = (x^2 - y^2)\bar{i} + (y^2 - z^2)\bar{j} + (z^2 - x^2)\bar{k}$.

6447. $\bar{v}(\bar{r}) = (x^2 + y^3)\bar{i} + (12xy^2 - 3x)\bar{j} + xyz^2\bar{k}$.

6448. $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{x}{y}\bar{i} + \frac{y}{z}\bar{j} + xz\,\bar{k}$.

6449. $\bar{v}(\bar{r}) = \sin(x^2yz)\bar{i} + \sin(xy^2z)\bar{j} + \sin(xyz^2)\bar{k}$.

Igazoljuk derékszögü koordinátarendszerben a következő azonosságokat.

6450.* $\operatorname{div}[u(\bar{r})\cdot\bar{v}(\bar{r})] = u(\bar{r})\cdot\operatorname{div}\bar{v}(\bar{r}) + \bar{v}(\bar{r})\cdot\operatorname{gard} u(\bar{r})$.

6451. $\operatorname{div}[\bar{v}(\bar{r}) \times \bar{w}(\bar{r})] = \bar{w}(\bar{r})\cdot\operatorname{rot}\bar{v}(\bar{r}) - \bar{v}(\bar{r})\cdot\operatorname{rot}\bar{w}(\bar{r})$.

6452. $\operatorname{rot}[u(\bar{r})\cdot\bar{v}(\bar{r})] = u(\bar{r})\cdot\operatorname{rot}\bar{v}(\bar{r}) + \operatorname{grad}u(\bar{r}) \times \bar{v}(\bar{r})$.

Számitsuk ki az alábbi vektorterek divergenciáját és rotációját.

6453. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r} \times \bar{a}$, ($\bar{a}$ állandó).

6454. $\bar{v}(\bar{r}) = (\bar{a}\bar{r})\bar{r}$, ($\bar{a}$ állandó).

6455. $\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|\bar{a}$, ($\bar{a}$ állandó).

6456.* $\bar{v}(\bar{r}) = |r|^n \bar{r}$.

6457. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{a}\ln|\bar{r}|$, ($\bar{a}$ állandó).

6458. Számitsuk ki $\bar{v}(\bar{r})$ rotációját.
$\bar{v}(\bar{r}) = u(\bar{r}).\bar{a}$, ($\bar{a}$ állandó).

6459. Számitsuk ki $\bar{v}(\bar{r})$ rotációját.
$\bar{v}(\bar{r}) = \bar{a}\ln|\bar{r}| + |\bar{a}|\bar{r}$, ($\bar{a}$ állandó).

Számitsuk ki az alábbi vektor-vektorfüggvények divergenciáját.

6460. $\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|^3 \bar{a} \ln|\bar{r}|$, ($\bar{a}$ állandó).

6461. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{a}|\bar{r}| + |\bar{a}|\bar{r}$, ($\bar{a}$ állandó).

6462. $\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|\,(\bar{a} \times \bar{r})$, ($\bar{a}$ állandó).

Határozzuk meg az alábbi skalár-vektorfüggvények gradiensét.

6463. $u(\bar{r}) = |\bar{r}|^2 + \frac{1}{|\bar{r}|^2}$.

6464. $u(\bar{r}) = |\bar{r}|^2 \bar{a}\cdot\bar{r}$, ($\bar{a}$ állandó).

Igazoljuk az alábbi azonosságokat.

6465.* $\operatorname{div}\operatorname{grad}\ln|\bar{r}| = \frac{1}{|\bar{r}|^2}$. 6466. $\operatorname{div}\operatorname{grad} u(\bar{r}) = \Delta u$.

6467. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u(\bar{r}) = 0$. 6468. $\operatorname{div}\operatorname{rot} \bar{v}(\bar{r}) = 0$.

6469. $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \bar{v}(\bar{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div} \bar{v}(\bar{r}) - \Delta \bar{v}(\bar{r})$.

6470. $\operatorname{div}\left[u_1(\bar{r}) \cdot \operatorname{grad} u_2(\bar{r})\right] = u_1 \Delta u_2 + \operatorname{grad} u_1 \cdot \operatorname{grad} u_2$.

6471. Számitsuk ki $\operatorname{div}\operatorname{grad} u(\bar{r})$ értékét az $\bar{r}_o = 2\bar{j} - \bar{k}$ pontban.
$u(\bar{r}) = e^x y + xz^2 + yz^3$.

6472. Számitsuk ki grad div $\bar{v}(\bar{r})$ értékét az $r_o = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ pontban.
$\bar{v}(\bar{r}) = (x^3 - 2yz^2)\bar{i} + (xy^2 - z^3)\bar{j} + (z^2 - xyz)\bar{k}$

6473. div rot $\bar{v}(\bar{r}) = ?$

rot rot $\bar{v}(\bar{r}) = ?$ $\bar{v}(\bar{r}) = (y + z)\bar{i} + xy\,\bar{j} + (z^2 - x^2)\bar{k}$.

6474.* Határozzuk meg az invariáns definició alapján a $\bar{v}(\bar{r})$ vektorfüggvény divergenciáját. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$.

6475. Határozzuk meg az invariáns definició alapján a $\bar{v}(\bar{r})$ vektorfüggvény rotációjának $\bar{k}$ irányu összetevőjét.
$\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|^2\,\bar{a}$, ($\bar{a}$ állandó).

6476. Határozzuk meg az invariáns definició alapján az $u(\bar{r})$ skalár-vektor függvény gradiensét:
$u(\bar{r}) = |\bar{r}|^2$.

65. INTEGRÁL - TÉTELEK ÉS POTENCIÁL

6501. Szemléltessük a Gauss-Osztrogradszkij tételt.
$\bar{v}(\bar{r}) = y\,\bar{i} + z\,\bar{j} + x\,\bar{k}$; F : az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és
$x + y + z = a$ $(a > 0)$ sikok által meghatározott zárt felület.

Számitsuk ki az alábbi vektorfüggvények skalárértékü felületi integrálját a megadott felületdarabok mentén. (A normálist zárt felület esetén kifelé, egyébként az $\bar{n}\bar{k} \geq 0$ feltételnek megfelelően irányitsuk.)

6502.* $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$
F : $x^2 + y^2 = 4$ henger, $z = -1$ és $z = 2$ sikok által meghatározott zárt felület.

6503.* $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$
F : $x^2 + y^2 = 4$ henger $z < 2$ része, lezárva alulról a $z = -1$ sikkal.

6504. $\bar{v}(\bar{r}) = x^3\,\bar{i} + y^3\,\bar{j} + z^3\,\bar{k}$;
F : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

6505. $\bar{v}(\bar{r}) = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$;

F: az $\frac{1}{R^2}(x^2 + y^2) = \frac{z^2}{H^2}$ felület $0 \leq z \leq H$ darabja és a $z = H$ sík által meghatározott zárt felület.

6506. $\bar{v}(\bar{r}) = (x^2 + 3yz)\bar{i} + (2y^2 + 4x)\bar{j} + (5z - 4y)\bar{k}$.

F : origó középpontu, $R = 3$ sugaru gömb.

6507. $\bar{v}(\bar{r}) = 3xy\,\bar{i} + y^2\bar{j} - 4xz\,\bar{k}$;

F : P(0, 2, 1) középpontu, $R = 1$ sugaru gömb.

6508. $\bar{v}(\bar{r}) = \text{grad}\, u(\bar{r})$, $u(\bar{r}) = |\bar{r}|$.

F : Az $u(r)$ skalár-vektor függvény P(0, 3, 4) ponton átmenő szintfelülete.

6509. $\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|^n \cdot \bar{r}$;

F : $|\bar{r}| = 3$

6510. $\bar{v}(\bar{r}) = x^2y^3\,\bar{i} + \bar{j} + z\,\bar{k}$;

F : $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

6511. $\bar{v}(\bar{r}) = x^2\,\bar{i} + y^2\,\bar{j} + z^2\,\bar{k}$

F: Az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sikok és az $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ paraboloid által meghatározott, I. térnyolcadba eső zárt felület.

Szemléltessük a Green-tétel szimmetrikus alakját, az alábbi skalár-vektor függvényeken, a megadott térrészekben.

6512.* $u_1(\bar{r}) = |\bar{r}|$, $u_2(\bar{r}) = \frac{1}{|\bar{r}|}$, $V : |\bar{r}| \leq a$ (gömb).

6513. $u_1(\bar{r}) = |\bar{r}|^2$, $u_2(\bar{r}) = \ln|\bar{r}|$, $V : |\bar{r}| \leq 3$ "

Szemléltessük a Stokes-tételt az alábbi vektortereken a megadott felületdarabokon.

6514. $\bar{v}(\bar{r}) = (x^2 - y)\bar{i} + y\,\bar{j} - (z - xy)\bar{k}$.

F : A $z = -x^2 - y^2 + 4$ felület $z \geq 0$ része.

6515. $\bar{v}(\bar{r}) = (x - y)\bar{i} + (x + y)\bar{j} + xy\,\bar{k}.$

F : A $z = xy$ felület $x^2 + y^2 \leqq 4$ része.

Számitsuk ki az alábbi vektorfüggvények rotációjának a megadott felületre vonatkozó skalárértékü felületi integrálját.

6516.* $\bar{v}(\bar{r}) = (x + y + z)\bar{i} + xyz\,\bar{j} + x^2\,\bar{k}.$

F : A $z = x^2 + y^2$ felület $x^2 + y^2 \leqq 4$ része.

6517. $\bar{v}(\bar{r}) = (2z + 3)\bar{i} + (xy - z^2)\bar{j} + (x - 1)\bar{k}.$

F : Az $(x - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$ henger $0 \leqq y \leqq 2$ része, lezárva az $y = 2$ sikkal.

6518. $\bar{v}(\bar{r}) = z^2\,\bar{i} + x^2\,\bar{j} + y^2\,\bar{k}.$

F : Az $|\bar{r}| = 2$ felület $z \geqq 0$ része.

6519. $\bar{v}(\bar{r}) = xz^2\,\bar{i} + zy^2\,\bar{j} + yx^2\,\bar{k}.$

F : A $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geqq 0$ része.

6520. $\bar{v}(\bar{r}) = x^2y^3\,\bar{i} + \bar{j} + z\,\bar{k}.$

F : A $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ felület.

6521. $\bar{v}(\bar{r}) = y\,\bar{i} + z\,\bar{j} + x\,\bar{k}.$

F : A $z = 2\,(1 - x^2 - y^2)$ felület $z \geqq 0$ része.

Számitsuk ki az alábbi vektorfüggvények megadott zárt görbe menti skalárértékü vonalintegrálját.

6522. $\bar{v}(\bar{r}) = (2xy - z)\,\bar{i} + (x^2 + z)\,\bar{j} + (y - x)\,\bar{k};$

L : a $z = 2$ sikban fekvő $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ görbe.

6523. $\bar{v}(\bar{r}) = (y + z)\bar{i} + (z + x)\bar{j} + (x + y)\bar{k};$

$\bar{r}(t) = a\sin^2 t\,\bar{i} + 2a\sin t\cos t\,\bar{j} + a\cos^2 t\,\bar{k}, \quad 0 \leqq t \leqq \pi.$

Vizsgáljuk meg, hogy potenciálosak-e az alábbi vektorterek. Határozzuk meg - amennyiben léteznek - potenciálfüggvényeiket.

6524.* $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{i}}{x+y+z} + \frac{\bar{j}}{x+y+z} + \frac{\bar{k}}{x+y+z}$.

6525. $\bar{v}(\bar{r}) = [\cos(x+y) - \sin(x-y)]\,\bar{i} + [\cos(x+y) + \sin(x-y)]\,\bar{j}$

6526. $\bar{v}(\bar{r}) = yze^{xyz}\,\bar{i} + xze^{xyz}\,\bar{j} + xye^{xyz}\,\bar{k}$

6527. $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{2xy}{4-z^2}\,\bar{i} + \frac{x^2}{4-z^2}\,\bar{j} + \frac{2x^2yz}{(4-z^2)^2}\,\bar{k}$

6528. $\bar{v}(\bar{r}) = (2xy - z^2 - yz)\bar{i} + (x^2 + z^2 - xz)\,\bar{j} + (2yz - 2xz - xy)\bar{k}$

6529. $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{1}{x}\bar{i} + \frac{1}{y}\bar{j} + \frac{1}{z}\bar{k}$

6530. $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{a} \times \bar{r}$ ($\bar{a}$ állandó)

6531.* $\bar{v}(\bar{r}) = |\bar{r}|^n \cdot \bar{r}$ $n \neq -2$

6532. $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^n}$ $n \neq 2$

6533. $\bar{v}(\bar{r}) = (2xye^{x^2} - \frac{2}{x})\bar{i} + e^{x^2}\,\bar{j} - \frac{2}{z}\bar{k}$

6534. Határozzuk meg a $\bar{v}(\bar{r})$ vektortér ekvipotenciális felületeit.
$\bar{v}(\bar{r}) = 2x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} - \bar{k}$.

Számitsuk ki az alábbi vektorterek megadott görbe menti skalárértékü vonalintegrálját.

6535.* $\bar{v}(\bar{r}) = \operatorname{grad} u(\bar{r})$, $u(\bar{r}) = xyz + xy^2 + 3$,
$\bar{r}(t) = \cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + t\,\bar{k}$, $0 \le t \le 2\pi$.

6536. $\bar{v}(\bar{r}) = \operatorname{grad} u(\bar{r})$, $u(\bar{r}) = x^2y - zy^2 + xz + 5$;
$\bar{r}(t) = t\,\bar{i} + t^2\,\bar{j} + t^3\,\bar{k}$, $0 \le t \le 1$.

6537. $\bar{v}(\bar{r}) = (y+z)\bar{i} + (z+x)\,\bar{j} + (x+y)\,\bar{k}$;
$\bar{r}(t) = a\sin^2 t\,\bar{i} + 2a\sin t\cos t\,\bar{j} + a\cos^2 t\,\bar{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

Számitsuk ki mekkora munkát végez a $\bar{v}(\bar{r})$ erőtér, amikor egy egységnyi tömeget A-ból B-be mozgat.

6538. $\bar{v}(\bar{r}) = yz\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + xy\,\bar{k}$;

$A(1,2,3)$, $B(6,1,1)$.

6539. $\bar{v}(\bar{r}) = (x+y+z)^2\,\bar{i} + (x+y+z)^2\,\bar{j} + (x+y+z)^2\,\bar{k}$;

$A(1,2,-2)$, $B(2,3,-3)$.

6540. $\bar{v}(\bar{r}) = yz\,(2x+y+z)\bar{i} + xz\,(x+2y+z)\bar{j} + xy\,(x+y+2z)\bar{k}$,

$A(1,1,2)$, $B(1,2,3)$.

6541. Határozzuk meg λ értékét ugy, hogy az alábbi vektortér skalár-értékü vonalintegrálja az uttól független legyen.

$$\bar{v}(\bar{r}) = \frac{x}{y}|\bar{r}|^{\lambda}\,\bar{i} - \frac{x^2}{y^2}|\bar{r}|^{\lambda}\bar{j}, \qquad \bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j}.$$

6542. Határozzuk meg a λ, a, b paraméterek értékeit ugy, hogy az alábbi vektortér vektorértékü felületi integráljának az értéke nulla legyen, tetszőleges zárt felületre.

$$\bar{v}(\bar{r}) = (xz + ay^{\lambda} + bz^2)\bar{i} + (xy + az^{\lambda} + bx^2)\bar{j} + (yz + ax^{\lambda} + by^2)\bar{k}$$

6543. Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(|\bar{r}|) = f'' + 2\dfrac{f'}{|\bar{r}|}$ (a deriválás $|\bar{r}|$ szerint történik).

6544. Határozzuk meg azokat a feltételeket, amelyek mellett a

$\bar{v}(\bar{r}) = f(|\bar{r}|)\cdot\bar{r}$ vektortér

a) divergenciamentes,
b) konstans divergenciáju,
c) rotációmentes.

6545. Válasszuk meg az $u(\bar{r})$ skalárvektor függvényt ugy, hogy a $\bar{v}(\bar{r}) = u(\bar{r})\cdot\bar{r}$ vektortér rotációmentes legyen.

6546. Igazoljuk, hogy az F zárt felület által határolt térrész térfogata:

$$V = \frac{1}{3} \oiint_F \bar{r} \, d\bar{f}$$

6547. Igazoljuk, hogy $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{a} \times \bar{r}$ esetén

$$\oiint_F \bar{v}(\bar{r}) \times d\bar{f} = -2\bar{a}V$$

($\bar{a}$ konstans vektor, V az F zárt felület által határolt térrész térfogata).

6548. Igazoljuk, hogy $u(\bar{r}) = \bar{a}\bar{r}$ esetén

$$\oiint_F u(\bar{r}) \, d\bar{f} = \bar{a}V$$

($\bar{a}$ konstans vektor, V az F zárt felület által határolt térrész térfogata).

6549. Igazoljuk, hogy $\bar{v}(\bar{r}) = -y\bar{i} + x\bar{j}$ esetén

$$\oint_L \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{r} = 2T$$

(T az (x, y) síkban fekvő L zárt görbe által határolt tartomány területe).

6550. Igazoljuk, hogy $\bar{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$ esetén

$$\oiint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \\ 4\pi \end{cases}$$

aszerint, hogy az origó
a) az F felületen kívül,
b) az F felületen,
c) az F felület belsejében helyezkedik el.

66. GÖRBEVONALU KOORDINÁTARENDSZEREK

Határozzuk meg az alábbi görbevonalu koordinátarendszerek koordinátavonalait és koordinátafelületeit!

6601. $\bar{r}(u,v,w) = aw\cos u\cos v\,\bar{i} + b\,w\cos u\sin v\,\bar{j} + c\,w\sin u\,\bar{k}$, (a, b, c konstansok).

6602. $\bar{r}(u,v,w) = a\,w\cos v\,\bar{i} + b\,w\sin v\,\bar{j} + c\,u\,\bar{k}$ (a, b, c konstansok).

6603. $\bar{r}(u,v,w) = u\,v\cos w\,\bar{i} + u\,v\sin w\,\bar{j} + \frac{1}{2}(v^2 - u^2)\,\bar{k}$.

6604. $\bar{r}(u,v,w) = \mathrm{ch}\,u\cos v\,\bar{i} + \mathrm{sh}\,u\sin v\,\bar{j} + w\,\bar{k}$.

6605. $\bar{r}(u,v,w) = w\cos v\,\bar{i} + w\sin v\,\bar{j} + u\,(1 + w^2)\,\bar{k}$.

Döntse el, hogy az alábbi görbevonalu koordinátarendszerek ortogonálisak-e.

6606. $\bar{r}(u,v,w) = \sin u\,\mathrm{ch}\,v\,\bar{i} + \cos u\,\mathrm{sh}\,v\,\bar{j} + w\,\bar{k}$.

6607. $\bar{r}(u,v,w) = \mathrm{sh}\,u\sin v\sin w\,\bar{i} + \mathrm{sh}\,u\sin v\cos w\,\bar{j} + \mathrm{ch}\,u\cos v\,\bar{k}$.

6608. $\bar{r}(u,v,w) = w\cos v\,\bar{i} + w\sin v\,\bar{j} + u(1 + w^2)\,\bar{k}$

6609. $\bar{r}(u,v,w) = uv\cos w\,\bar{i} + uv\sin w\,\bar{j} + \frac{1}{2}(v^2 - u^2)\bar{k}$.

Irjuk fel az alábbi derékszögü rendszerben adott vektorokat gömbkoordinátákban!

6610. $\bar{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{6}}{2}\bar{j} + \sqrt{2}\,\bar{k}$.

6611. $\bar{v} = \frac{3}{4}\bar{i} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\bar{j} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\bar{k}$.

Irjuk fel az alábbi derékszögü rendszerben adott vektorokat hengerkoordinátákban:

6612. $\bar{v} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\bar{j} + 5\bar{k}$.

6613. $\bar{v} = \bar{i} + \sqrt{3}\bar{j} + 4\bar{k}$.

Irjuk fel az alábbi derékszögü rendszerben adott függvényeket gömbi koordinátarendszerben!

6614. $U(\bar{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - xy.$

6615. $U(\bar{r}) = x^2 + y^2 - z^2.$

Irja fel az alábbi derékszögü rendszerben adott függvényeket henger-koordinátarendszerben!

6616. $U(\bar{r}) = x^2 + y^2 - 6z^2.$ 6617. $U(\bar{r}) = 2xy + z^2 - 6xz - 6yz.$

6618.* Legyen $U = 3r^2 \sin^2 u \cos 2v$, ahol r, u, v gömbi koordináták. Számitsuk ki grad U értékét az $r=2$, $u=\pi/2$, $v=\pi/3$ pontban.

6619. Legyen $U = z^2 r^2 \sin 2v$, ahol r, v, z hengerkoordináták. Számitsuk ki $\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U$ értékét az $r=2$, $v=\pi/3$, $z=3$ pontban.

6620. Legyen $U = 2r^2[\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \cos 2\vartheta]$, ahol r, φ, ϑ gömbi koordináták. Határozza meg $\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U$ értékét az $r = 3,8$; $\varphi = \frac{4\pi}{7}$, $\vartheta = \frac{2\pi}{9}$ pontban.

Irjuk fel az alábbi derékszögü rendszerben adott függvényeket gömbi koordinátarendszerben!

6621. $$\bar{v}(\bar{r}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{k}$$

6622. $$\bar{v}(\bar{r}) = \left(x + \frac{2xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\bar{i} + \left(y + \frac{2yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\bar{j} + \left(z - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)\bar{k}$$

Irjuk fel az alábbi derékszögü rendszerben adott függvényeket henger-koordinátarendszerben!

6623. $$\bar{v}(\bar{r}) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y\right)\bar{i} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x\right)\bar{j} + 2\bar{k}.$$

6624. $$\bar{v}(\bar{r}) = -y\sqrt{x^2+y^2}\,\bar{i} + x\sqrt{x^2+y^2}\,\bar{j} + z \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\bar{k}.$$

6625.* Bizonyitsuk be, hogy hengerkoordinátarendszerben

$$\Delta U = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right].$$

6626.* Legyen $U=U(r)$ hengerkoordinátákban adott függvény (vagyis U csak r-től függ). Bizonyitsuk be, hogy ebben az esetben a $\Delta U = 0$ Laplace-egyenlet megoldása $U = A \ln r + B$, ahol A és B tetszőleges konstansok.
Gömbkoordinátarendszerben

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

Határozzuk meg a $\Delta U = 0$ Laplace-egyenlet megoldásait, ha

6627. U csak r-től függ,

6628. U csak φ-től függ,

6629. U csak ϑ-tól függ.

7. KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

71. KOMPLEX ALGEBRA

Számitsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

7100. $(\sqrt{2} - j) - j(1 - j\sqrt{2})$

7101.* $(3 + j)\frac{2 + j}{10}(3 - j)$

7102. $\frac{1 + 2j}{3 - 4j} + \frac{2 - j}{5j}$

7103. $\frac{5}{(1 - j)(2 - j)(3 - j)}$

7104. $(1 - j)^4 + \frac{\overline{(2 + j)}^2}{3 - 4j}$

7105. Mutassuk meg, hogy a $z_1 = 1 + j$ és $z_2 = 1 - j$ komplex számok kielégitik a $z^2 - 2z + 2 = 0$ egyenletet.

Mutassuk meg, hogy

7106. $\overline{\bar{z} + 3j} = z - 3j$

7107. $\overline{jz} = -j\bar{z}$

Mutassuk meg a komplex számok trigonometrikus alakjának felhasználásával, hogy

7108. $(-1 + j)^7 = -8(1 + j)$

7109. $(1 + j\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1 + j\sqrt{3})$

7110. $(1 + j)^n + (1 - j)^n = 2(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$

7111. Mutassuk meg, hogy $\bar{z}^4 = (\bar{z})^4$

7112. Bizonyitsuk be, hogy $|z|\sqrt{2} \geq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$

7113. Vizsgáljuk meg, milyen z számok oldják meg a $z^2 = (\bar{z})^2$ egyenletet.

7114.* Legyen z_1 és z_2 két tetszőleges komplex szám és $z_1 z_2 \neq 0$. Mi a szükséges és elégséges feltétele a

$$\mathrm{Re}\,(z_1 \bar{z}_2) = |z_1||z_2|$$

egyenlőség fennállásának?

7115.* Legyen z_1 és z_2 két tetszőleges komplex szám és $z_1 z_2 \neq 0$. Mi a szükséges és elégséges feltétele a

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

egyenlőség fennállásának?

Végezzük el a következő gyökvonásokat:

7116. $\sqrt{2j}$ 7117. $\sqrt[3]{-j}$

7118. $\sqrt[3]{-1}$ 7119. $\sqrt[6]{8}$

7120. $(-1+j\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$ 7121. $(-1)^{-\frac{3}{4}}$ 7122. $\sqrt[4]{1+j\sqrt{3}}$

Határozzuk meg az alábbi egyenletek gyökeit:

7123. $z^2 - j = 0$ 7124. $z^4 + 16 = 0$

7125. $5z^3 + 40 = 0$ 7126. $z^2 - (2+3j)z - 1 + 3j = 0$

7127. $z^2 - 2jz - 5 = 0$

7128. Határozzuk meg az $x^4 + 4 = 0$ egyenlet gyökeit, és ezek felhasználásával bontsuk fel az $x^4 + 4$ polinómot valós gyöktényezők szorzatára.

7129.* Legyenek egy valós együtthatós ötödfoku polinóm gyökei $z_1 = -1$; $z_2 = -2j$ $z_3 = 1 + 3j$. Határozzuk meg a polinóm többi gyökét és irjuk fel a polinomot.

7130. Határozzuk meg a $z_1 = 1 + 4j$ és $z_2 = 5 + j$ csucspontu szabályos háromszög harmadik csucspontját.

7131. Határozzuk meg a $z_1 = -4 + j$ és $z_2 = 3 - 3j$ csucspontu négyzet két másik csucspontját.

7132. Legyen $z_1 = 0$; $z_2 = 1 - 2j$ és $z_3 = 2 + 3j$ egy paralelogramma három csucspontja. Határozzuk meg a negyedik csucsot.

7133. Egy szabályos ötszög középpontja $z_0 = 0$, egyik csucsa

$$z_1 = 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2j\sin\frac{2\pi}{5} = 0,618 + 1,902j$$

Határozzuk meg a többi csucspontot.

7134. Egy szabályos hatszög két szomszédos csucspontja

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}, \qquad z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} + j\sin\frac{7\pi}{12},$$

középpontja az origó. Határozzuk meg a többi csucspontot.

7135. Egy szabályos ötszög egyik csucsa $z_1 = 3 - 4j$, középpontja $z = j$. Határozzuk meg a többi csucspontot.

7136. Legyenek egy szabályos háromszög csucspontjai $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ és $z_3 = \sqrt{3j}$. Forgassuk el a háromszöget a sulypontja körül pozitiv irányban 30°-kal és határozzuk meg az elforgatott háromszög csucspontjait.

7137.* Számitsuk ki

$$f(n) = \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^n$$

értékét $n = 1, 2, 3, 4$-re, és mutassuk meg, hogy $f(n+4) = -f(n)$.

7138. Határozzuk meg milyen értékeket vehet fel az $S_n = 1 + j + j^2 + \dots j^n$ kifejezés? ($n \geqq 0$ egész).

7139. Hajtsuk végre a $z_o = 2 + 3j$ komplex vektoron az

a) origóra való tükrözést
b) valós tengelyre való tükrözést
c) háromszorosára való nyujtást
d) negyedére való zsugoritást
e) négyszeres nyujtást és 30°-kal való forgatást
f) ötödére való zsugoritást és 60°-kal való forgatást.

7140. Irjuk fel az alábbi speciális egyenesek egyenletét.

a) a valós tengely
b) a képzetes tengely
c) a $z_o = 2 - 3j$ ponton átmenő, a valós tengellyel párhuzamos egyenes
d) a $z_o = 4 - 5j$ ponton átmenő, a képzetes tengellyel párhuzamos egyenes
e) az origón átmenő szögfelező.

7141. Irjuk fel az alábbi adatokkal meghatározott körök egyenletét:

a) $z_o = 0$ középpontu $r = 1$ sugaru

b) $z_o = 1$ " $r = 1$ "

c) $z_o = 1 + j\sqrt{3}$ " $r = 2$ " .

Mi a mértani helye a következő összefüggéseket kielégitő pontoknak:

7142. $|z - a| = |z - b|$ a, b állandó

7143. $\mathrm{Re}\,(az + b) = \alpha$ a, b komplex, α valós állandó

7144. $|z - a| + |z - b| = \alpha$ " "

7145. $|z| < 1 - \mathrm{Re}\, z$

7146. $0 \leqq \arg \frac{z - j}{z + j} < \frac{\pi}{4}$

Milyen görbesereget határoznak meg az alábbi összefüggések:

7147. $\mathrm{Re}\, \frac{1}{z} = \alpha$; α valós konstans

7148.* $\arg \frac{z - 1}{z + 1} = \alpha$ "

7149. $\left|\frac{z - 1}{z + 1}\right| = \alpha$ "

Állapitsuk meg, milyen sikrészeket határoznak meg az alábbi egyenlőtlenségek:

7150. $\mathrm{Im}\, z > 0$

7151. $\mathrm{Re}\, z \geqq 0$

7152. $\mathrm{Im}\, z > \frac{2}{3}\mathrm{Re}\, z + 1$

7153. $-2 < \mathrm{Re}\, z < 1$

7154. $0 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 2$

7155. $|\mathrm{Re}\, z| > 1$ $|\mathrm{Im}\, z| > 2$

7156. $1 < |z - 1| < 2$

7157. $\mathrm{Re}\, z > 0$ $|z - 2| > 1$

7158. $-\pi < \arg z < \pi$; $|z| > 2$

7159. $|2z + 3| > 4$

7160.* $\mathrm{Re}\, \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$

7161. $|z - 4| < |z|$ 7162. $\mathrm{Im}\,(z^2) > 0$

7163. Legyen $z_1 = z_2 = z_3$ és $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Bizonyitsuk be, hogy a z_k $k = 1, 2, 3$ pontok szabályos háromszög csucsain fekszenek

7164. Igazoljuk, hogy z_1, z_2, z_3 egy egyenesen fekszenek, ill. z_1-nél derékszöget alkotnak aszerint, hogy a $(z_1 - z_2) : (z_1 - z_3)$ osztóviszony tiszta valós vagy képzetes.

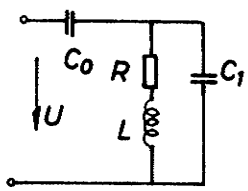
7165. Bizonyitsuk be, hogy egy tetszőleges z_1, z_2, z_3 csucspontu háromszög belső szögeinek összege 180°!

Elektrotechnikai alkalmazások

7166. Határozzuk meg a z impedanciát, amelyen eső feszültség abszolut értéke $U = 150$ V, fázisa $\varphi = 20^\circ$, az átfolyó áram $I = 8$A, fázisa $\varphi = -10^\circ$.

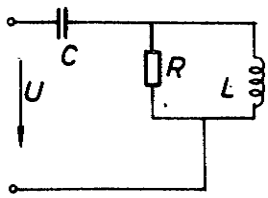
Határozzuk meg az alábbi kapcsolások eredő impedanciáját és a körben folyó áramot:

7167.* $C_0 = 0{,}3\,\mu F$ $L = 0{,}6$ H
$C_1 = 0{,}1\,\mu F$ $f = 500$ Hz
$U = 10$ V $R = 800\,\Omega$



7167.

7168. $C = 1\,\mu F$ $R = 100\,\Omega$
$L = 100$ mH $f = 50$ Hz
$U = 110$ V



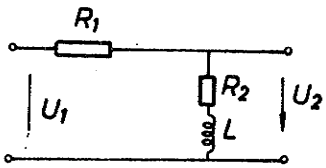
7168.

7169. Határozzuk meg az alábbi kapcsolási vázlat alapján az U_2-feszültséget.

$U_1 = 110$ V $L = 400$ mH

$R_1 = 100\,\Omega$ $f = 50$ Hz

$R_2 = 150\,\Omega$



7169.

72. A KOMPLEX VÁLTOZÓS FÜGGVÉNY FOGALMA, HATÁRÉRTÉKE, FOLYTONOSSÁGA, DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA, REGULARITÁSA

Irjuk fel kanonikus alakban az alábbi komplex számokat:

7200. $e^{\pi j} + e^{-1+2j}$ 7201. e^{3-2j}

7202. $\sin j - \sin(3+2j)$ 7203. $\cos(5-7j) + \cos(-4+2j)$

7204.* $\operatorname{tg}(1+j)$ 7205. $\ln(-5) + \ln j$

7206. $\ln(-3j) - \ln(3-4j)$ 7207. $\ln(-1-2j)$

7208. $(1+j)^j$ 7209. $(6-3j)^{2j}$

7210. $\arcsin 3j$ 7211. $\arccos(-4)$

7212. $\operatorname{arctg}(2-j)$ 7213. $e^{\sqrt{j}}$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

7214. $1^z = 5$ 7215. $\cos z = -2$

7215. $\sin z = 3$ 7217. $e^z = -4$

7218. Legyen $x > 0$ valós. Milyen feltétel mellett lesz $(-x)^{-x}$ tiszta képzetes?

7219. Vizsgáljuk meg mikor lesz valós $c^z = (a+jb)^{x+jy}$ $(a > 0)$, $(b > 0)$.

7220. Határozzuk meg mindazokat a z komplex számokat, amelyekre

$$e^{j\bar{z}} = \overline{e^{jz}}.$$

7221. k milyen értékére érvényes az $e^{z+\pi j} = ke^{z}$ azonosság?

7222.* Bizonyitsuk be, hogy

$$\left| e^{2z+j} + e^{jz^2} \right| \leqq e^{2x} + e^{-2xy}, \qquad (z = x + jy)$$

7223. Milyen z-re teljesül

$$\left| e^{-2z} \right| < 1.$$

7224. Milyen z-re valós e^{z^2}.

Igazoljuk, hogy

7225.* $|\sin(x + jy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$

7226. $|\cos(x + jy)|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x$

Igazoljuk, hogy

7227. $|\operatorname{sh} y| \leqq |\sin(x + jy)| \leqq \operatorname{ch} y$

7228. $|\operatorname{sh} y| \leqq |\cos(x + jy)| \leqq \operatorname{ch} y$

Vizsgáljuk meg, milyen z-re teljesül

7229. $\cos j\bar{z} = \overline{\cos jz}$

7230. $\sin j\bar{z} = \overline{\sin jz}$

7231. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\operatorname{ch} z = 0.$$

Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket:

7232. $$w = \begin{cases} 0, \text{ ha } |z| = 0, \text{ ill. } |z| \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q}, \text{ ha } |z| = \frac{p}{q}, \ (p, q) = 1 \end{cases}$$

7233. $$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z = 0 \\ \sin\varphi, & \text{ha } z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi); \ r > 0 \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg differenciálhatóság illetve regularitás szempontjából az alábbi függvényeket:

7234. $w = y^3 - 3x^2y + j(x^3 - 3xy^2)$

7235. $w = |z|$

7236. $w = \mathrm{Re}\, z$

7237. $w = \frac{1}{z^2}$

7238.* $w = \sqrt{z}$ (főérték)

7239. $w = \cos \bar{z}$

7240. $w = \overline{\sin 3z}$

7241. $w = \bar{z}^2$

7242. $w = z - \bar{z}$

7243. $w = 2x + xy^2 j$

7244. $w = e^x (\cos y - j \sin y)$

Igazoljuk, hogy az alábbi függvények első és második deriváltja minden z-re létezik és határozzuk meg $f'(z)$ ill. $f''(z)$-t.

7245. $f(z) = jz + 2$

7246. $f(z) = e^{-x} (\cos y - j \sin y)$

7247. $f(z) = z^3$

7248. $f(z) = \cos 4x \operatorname{ch} 4y - j \sin 4x \operatorname{sh} 4y$

Határozzuk meg z milyen értékeire létezik $f'(z)$. E helyen számitsuk ki az első deriváltat:

7249. $f(z) = \frac{1}{z}$

7250. $f(z) = x^2 + jy^2$

7251. $f(z) = z \,\mathrm{Im}\, z$

7252. $f(z) = x^3 - j(y - 1)^3$

Vizsgáljuk meg, harmonikusak-e az alábbi függvények, ha igen, keressük meg harmonikus társukat:

7253. $u(x, y) = 2x(1 - y)$

7254. $u = 2x - x^3 + 3xy^2$

7255. $u = \operatorname{sh} x \sin y$

7256. $u = \frac{y}{x^2 + y^2}; w(2) = 0$

7257. $v = e^x \sin y$

7258. $v = -\sin x \operatorname{sh} y$

Állapitsuk meg, hogy lehetnek-e az alábbi kétváltozós függvények egy reguláris komplex változós függvény valós ill. képzetes részei, ha igen határozzuk meg $f'(z)$-t.

7259.* $\operatorname{Re} f(z) = 3(x^2 - y^2) + 2y - 1$

7260. $\operatorname{Re} f(z) = \ln (x^2 + y^2)$

7261. $\operatorname{Im} f(z) = e^{-y} \sin x$

7262. $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

7263. Bizonyitsuk be, hogy, ha $f(z) = u + jv$ reguláris függvény, akkor $g(z) = -v + ju$ is reguláris.

Határozzuk meg a következő görbe-seregek ortogonális trajektóriáit:

7264.* $y(x + 1) = C$

7265. $\sin x \operatorname{ch} y = C$

7266. $e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} \cos \dfrac{y}{x^2 + y^2} = C$

7267. $x^2 - y^2 = C$

7268. Bizonyitsuk be, hogy, ha $f(z) = u + jv$ és $\overline{f(z)} = u - jv$ mindketten regulárisak egy tartományban, akkor $f(z) = \text{const}$.

73. LEKÉPEZÉSEK

Sztereografikus leképezés

7300.* Milyen összefüggés irható fel sztereografikus leképezésnél az egymásnak megfeleltetett gömbi illetve sikbeli pontok (ξ, η, ζ) és $(x, y, 0)$ derékszögü koordinátái között: feltéve, hogy egy egységnyi átmérőjü gömböt ugy helyezünk el az (x, y) sikon, hogy a gömb a sikot az origóban érintse.

Milyen pontokat feleltet meg a sztereografikus leképezés a z sik következő pontpárjainak:

7301. z és $-z$

7302. z és $\bar{z}$

7303. z és $-\bar{z}$

7304.* z és $\dfrac{1}{z}$

7305. z és $\dfrac{1}{\bar{z}}$

7306. z és $\dfrac{1}{\bar{\bar{z}}}$

7307. A számsik milyen pontjai felelnek meg a (ξ, η, ζ) ill. $(-\xi, -\eta, \frac{1}{2}+\zeta)$ pontoknak?

7308.* Igazoljuk, hogy a sztereografikus leképezés körtartó.

Lineáris függvények, ill. lineáris törtfüggvények által létesitett leképezések

7309.* Mutassuk meg, hogy a $w = jz + j$ függvény által létesitett leképezés a $\operatorname{Re} z > 0$ félsiknak az $\operatorname{Im} w > 1$ félsikot felelteti meg.

Határozzuk meg a w - siknak azt a tartományát, amelyet a következő függvények által létesitett leképezés feleltet meg a z sik adott tartományának.

7310. $w = (1 + j) z$ $\qquad \operatorname{Im} z > 0$

7311. $w = (1 - j) z$ $\qquad \operatorname{Im} z > 1$

7312. $w = 1 + jz$ $\qquad \begin{cases} \operatorname{Re} z > 0 \\ 0 < \operatorname{Im} z < 2 \end{cases}$

7313. $w = -jz - 1$ $\qquad |z| < 1$

7314. $w = (-1 + j)z$ $\qquad |z| > 1$

Határozzunk meg egy olyan lineáris függvényt, amely által létesitett leképezés a z sik adott tartományainak a w sik adott tartományait feleteti meg.

7315. $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$ $\qquad \operatorname{Im} w < 2$

7316. $\operatorname{Re} z > 3$ $\qquad \operatorname{Im} w < 2 - \operatorname{Re} w$

7317. $|z| < 1$ $\qquad |w - (2 + 2j)| < 3$

7318. $|z - 1| > 2$ $\qquad |w - 2j| > 1$

Határozzuk meg milyen tartományt feleltet meg a $w = \frac{1}{z}$ függvény által létesitett leképezés a következő tartományoknak:

7319.* $0 < y < \frac{1}{2C}$ 7320. $y > C$

7321. $x > 1, \quad y > 0$

7322.* Milyen görbét feleltet meg a $w = \frac{1}{z}$ függvény által létesitett leképezés az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolának?

7323. Milyen tartományt feleltet meg a $w = \frac{j}{z}$ függvény által létesitett leképezés az $x \geqq 0 \quad 0 \leqq y \leqq 1$ félig-végtelen sávnak?

7324. Milyen görbéket feleltet meg a $w = \frac{1}{z - j}$ függvény által létesitett leképezés a $\operatorname{Re} z = \text{const}$ és $\operatorname{Im} z = \text{const}$ egyeneseknek?

7325. Állapitsuk meg, hogy a $w = \frac{z - 1}{z + 1}$ függvény által létesitett leképezés milyen görbesereget feleltet meg az $y = mx$ és az $y = m(x + 1)$ sugársoroknak?

7326. Határozzuk meg mindazoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyeknek a $w = \frac{5z - 3}{jz + 2}$ függvény által létesitett leképezés egyeneseket feleltet meg.

7327. Milyen tartományt feleltet meg a $w = \frac{1}{z}$ függvény által létesitett leképezés az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott tartománynak?

$$|z - 4| \leqq 4; \qquad |z - 4j| \leqq 4 \quad \text{és} \quad |z - (1 + j)| \geqq \sqrt{2}$$

7328. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely által létesitett leképezés a $z_1 = 2$, $z_2 = j$ és $z_3 = -2$ pontoknak a $w_1 = 1$, $w_2 = j$ és $w_3 = -1$ pontokat felelteti meg.

7329. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a $z_1 = -j$, $z_2 = 0$ és $z_3 = j$ pontokat a $w_1 = -1$, $w_2 = j$ és $w_3 = 1$ pontokba viszi át. Milyen görbét feleltet meg ez a leképezés az Y tengelynek?

7330. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a $z_1 = \infty$, $z_2 = j$ és $z_3 = 0$ pontoknak a $w_1 = 0$, $w_2 = j$ és $w_3 = \infty$ pontokat felelteti meg.

Határozzunk meg egy olyan lineáris törtfüggvényt, amely a z sik adott tartományának a w sik adott tartományát felelteti meg.

7331.* $\operatorname{Im} z \geqq \operatorname{Re} z$ $\qquad$ $|w| \geqq 1$

7332. $|z| \leqq 2$ $\qquad$ $\operatorname{Re} w \leqq 2 \operatorname{Im} w$

7333. $|z| \geqq 4$ $\qquad$ $|w - 1| \leqq 1$

7334. $|z - j| \geqq 2$ $\qquad$ $\operatorname{Im} w - 1 \geqq \frac{\operatorname{Re} w}{2}$

7335.* Határozzuk meg milyen tartományt feleltet meg a $w = \frac{z - c^2}{z + c}$ függvény által létesitett leképezés ($c > 0$ valós) az $\operatorname{Im} w > 0$ félsiknak.

7336.* Igazoljuk, hogy a $w = e^{j\alpha} \frac{z - c}{\bar{c}z - 1}$ alaku lineáris törtfüggvények által létesitett leképezés az egységkört önmagára képezi le. (α tetszőleges valós konstans, c komplex de $|c| \neq 1$.

7337. Határozzunk meg olyan lineáris törtfüggvényeket, amelyek által létesitett leképezés a $|z| = 1$ kört önmagába, egy adott "a" pontot pedig adott "b" pontba visz át. ($|a| \neq 1$ és $|b| \neq 1$).

7338. Határozzunk meg olyan lineáris törtfüggvényeket, amelyek által létesitett leképezés a $|z| = 1$ kört és egy adott "a" pontot ($|a| \neq 1$) önmagába viszi át.

Határozzuk meg az alábbi leképezések fixpontjait

7339.* $w = \frac{z - 1}{z + 1}$ $\qquad$ 7340. $w = \frac{6z - 9}{z}$

7341. Határozzuk meg mindazokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyek által létesitett leképezésnek az origó fix pontja.

7342. Határozzuk meg mindazokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyek által létesitett leképezésnek a fix pontja $z_1 = 1$ és $z_2 = -1$.

Elemi függvények által létesitett leképezések

Határozzuk meg milyen tartományt feleltet meg az alábbi függvények által létesitett leképezés a z sik $|z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ tartományának.

7343. $w = z^2$ 7344. $w = z^3$

7345. $w = z^4$

7346. Milyen tartományt feleltet meg a $w = z^2$ függvény által létesitett leképezés a w sik

$$\begin{aligned} 1 &\leqq \operatorname{Re} w \leqq 2 \\ 1 &\leqq \operatorname{Im} w \leqq 2 \end{aligned}$$ tartományának?

7347. Milyen görbéket feleltet meg a $w = z^2$ függvény által létesitett leképezés az $\operatorname{Re} z = c$ ill. $\operatorname{Im} z = d$ egyeneseknek?

Határozzuk meg milyen görbéket ill. tartományt feleltet meg a $w = e^z$ függvény által létesitett leképezés alább megadott görbéknek ill. tartománynak.

7348. $x = ky$ (k valós állandó, $z = x + jy$)

7349. $\begin{cases} x \geqq 0 \\ 0 \leqq y \leqq \pi \end{cases}$ $(z = x + jy)$

Határozzuk meg milyen görbéket feleltet meg a következő függvények által létesitett leképezés a $\operatorname{Re} z = c$ ill. $\operatorname{Im} z = d$ egyeneseknek.

7350. $w = e^{jz}$ 7351. $w = e^{z+1}$

7352. $w = \cos z$ 7353. $w = \operatorname{ch} z$

7354. $w = \operatorname{sh} \bar{z}$ 7355. $w = \sin 2z$

Határozzuk meg milyen görbéket feleltet meg az alábbi függvények által létesitett leképezés a z sik $z = c$ ill. $\arg z = d$ görbéinek.

7356. $w = \ln z$ 7357. $w = \frac{1}{z}$

7358. $w = z + \frac{1}{z}$ 7359. $w = z^2$

7360.* Mutassuk meg, hogy a $w = \operatorname{ch} z$ függvény által létesitett leképezés a $z = jy$ $(0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$ szakasznak a $0 \leqq u \leqq 1$ $(v = 0)$ szakaszt felelteti meg. $(z = x + jy,\ w = u + jv)$.

Határozzuk meg milyen tartományt feleltet meg az alábbi függvények által létesitett leképezés a z sik adott tartományainak. $(z = x + jy)$

7361. $w = \operatorname{ch} z$ $\quad x \geqq 0$ $\quad 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$

7362. $w = \cos z$ $\quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ $\quad y \geqq 0$

7363. $w = \frac{z - 1}{z + 1}$ $\quad 0 \leqq x \leqq 1$ $\quad y \leqq 0$

7364.* Határozzuk meg hogyan változik meg a $w = z^2$ függvény által létesitett leképezésnél egy tetszőleges görbe $z_0 = 2 + j$ pontbeli érintőjének iránya.

7365. Hogyan változik meg a $w = \frac{1}{z}$ függvény által létesitett leképezésnél egy tetszőleges görbe $z_1 = 1$ ill. $z_2 = j$ ponthoz tartozó érintőjének iránya?

Határozzuk meg, hogy a z sik milyen pontjaiban lesz konformis az alábbi függvények által létesitett leképezés:

7366. $w = 2z + 1$ $\qquad$ 7367. $w = e^{-2jz}$

7368. $w = \operatorname{sh} z$ $\qquad$ 7369. $w = \cos jz$

7370. Határozzuk meg a nyujtási együtthatót, illetve az elforgatási szöget a $w = \frac{z - j}{z + j}$ függvény által létesitett leképezésnél a $z = 1$ és a $z = j$ pontban.

Határozzuk meg hogyan változik meg a $z(t) = t + jt$ egyenes $0 \leqq t \leqq \varepsilon$ szakaszának hossza igen kis ε esetén az alábbi függvények által létesitett leképezésnél.

7371.* $w = e^z$ $\qquad$ 7372. $w = \sin z$

7373. $w = \ln (1 + z^2)$

74. KOMPLEX VÁLTOZÓS INTEGRÁL

Határozzuk meg a komplex integrál definiciója alapján az alábbi függvények integrálját az a és b pontokat összekötő L egyenes-szakaszra azt a-ból kiindulva futva be.

7400. $f(z) = 1$ 7401. $f(z) = z$

Határozzuk meg $\int_L f(z)\,dz$ értékét, ha

7402. $f(z) = y - x - 3x^2 j$

L : a $z_1 = 0$ és $z_2 = 1 + j$ pontokat összekötő egyenes-szakasz, azt z_1-ből z_2 felé befutva.

7403. $f(z) = y - x - 3x^2 j$

L: a $z_1 = 0$ és $z_2 = j$ ill. $z_2 = j$ és $z_3 = 1 + j$

pontokat összekötő koordináta tengelyekkel párhuzamos egyenes-szakaszok, z_1-ből z_2, ill. z_2-ből z_3 felé befutva.

7404. $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$

L: $z = 2e^{j\varphi}$ $0 \leq \varphi \leq \pi$ növekedő φ irányában befutva

7405. $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$

L: $z = 2e^{j\varphi}$ $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = -\pi$ csökkenő φ irányában befutva

7406. $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$

L: $z = 2e^{j\varphi}$ $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$ növekvő φ irányában befutva.

7407. $f(z) = z - 1$

L: $z = e^{j\varphi} + 1$ $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$ növekedő φ irányában befutva

7408. $f(z) = z - 1$

L: az X tengely $0 \leqq x \leqq 2$ szakasza növekvő x irányában befutva

7409. $f(z)\begin{cases} 4y & \text{ha} \quad y > 0 \\ 1 & \text{ha} \quad y < 0 \end{cases} \qquad (z = x + jy)$

L: $y = x^3$ görbe $-1 \leqq x \leqq 1$ szakasza növekvő x irányában befutva.

7410. $f(z) = e^z$

L: a $z_1 = \pi j$ $z_2 = 1$ pontokat összekötő egyenes-szakasz z_1-ből z_2 felé befutva.

7411. $f(z) = e^z$

L: a $z_1 = \pi j$ pontból kiinduló $z_2 = 0$ pontig haladó és z_2-ből a $z_3 = 1$ pontig haladó törtvonal z_1-ből z_3 felé befutva!

7412. Igazoljuk, hogy $\int\limits_L (3z + 1)\, dz = 0$, ha az L görbe a $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + j$ $z_4 = j$ csucspontu négyzet határa; a körüljárási irány pozitiv.

7413. Számitsuk ki $\int\limits_L \pi e^{\pi \bar{z}}\, dz$ értékét, ha L a 7412. feladatban megadott zárt görbe.

7414. Számitsuk ki $\int\limits_L \bar{z}\, dz$ értékét, ha

L: $x = t$
$y = \sqrt{1 - t^2}$ $\quad -1 \leqq t \leqq 1$, a görbét növekvő t irányában befutva.

7415.* Legyen L a $|z| = 2$ kör $x > 0$ $y > 0$ ive. Az integrál kiszámitása nélkül mutassuk meg, hogy

$$\left| \int\limits_L \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leqq \frac{\pi}{3}$$

7416. Legyen az L zárt görbe a $z_1 = 0$ $z_2 = -4$ és $z_3 = 3j$ csucspontu háromszög határa. Becsüljük meg az integrál kiszámitása nélkül

$$\int\limits_L \left| (e^z - \bar{z})\, dz \right| \text{ értékét.}$$

7417. Mutassuk meg, hogy

$$I(R) = \left| \int_C \frac{\mathrm{Ln}\, z}{z^2}\, dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \ln R}{R} \quad \text{ha}$$

C: $|z| = R$ és $R > 1$; mutassuk meg továbbá, hogy $\lim\limits_{R \to \infty} I(R) = 0$.

Határozzuk meg az alábbi függvények regularitási tartományát és a Cauchy alaptétel alkalmazásával mutassuk meg, hogy

$$\int_C f(z)\, dz = 0, \quad \text{ha} \quad C: \text{ a } |z| = 1 \text{ kör.}$$

7418. $f(z) = \dfrac{z^2}{z - 3}$

7419. $f(z) = ze^{-z}$

7420. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 5}$

7421. $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$

7422. $f(z) = \mathrm{Ln}\,(z + 2)$

7423. Mutassuk meg, hogy $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z - 2 - j} = 2j\pi$ illetve

$\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z - 2 - j)^n} = 0$ ha C a $z_1 = 0$ $z_2 = 3$ $z_3 = 3j$ csucspontu háromszög tartomány határa pozitiv körüljárási iránnyal.

Határozzuk meg az alábbi függvények integrálját. Az integrációs ut a kezdő és végpontot ösz ekötő, tetszőleges, szakaszonként sima görbe.

7424. $\displaystyle\int_j^{\frac{j}{2}} e^z\, dz$

7425. $\displaystyle\int_0^{+2j} \cos \frac{z}{2}\, dz$

7426. $\displaystyle\int_1^3 (z - 2)^3\, dz$

7427. Legyen C a $z = 3$ kör pozitiv körüljárási iránnyal és

$$g(z_0) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0}\, dz \left(|z_0| \neq 3 \right)$$

Mutassuk meg, hogy $g(2) = 8\, j\, \pi$ és

$$g(z_0) = 0, \qquad \text{ha} \quad |z_0| > 3$$

7428.* Határozzuk meg

$$g(z_0) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - z_0)^3}\, dz$$

értékét, ha z_0 a C pozitiv körüljárásu, zárt Jordan görbe belsejébe esik.

Legyen C a $z_1 = -2 - 2j$ $z_2 = 2 - 2j$ $z_3 = 2 + 2j$ $z_n = -2 + 2j$ csucspontu négyzet határa pozitiv körüljárási iránnyal. Számitsuk ki az alábbi f(z) függvények C-re vonatkozó integrálját.

7429. $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z - j\frac{\pi}{2}}$

7430. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z\,(z^2 + 8)}$

7431. $f(z) = \dfrac{z}{2z + 1}$

7432. $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{z}{2}}{(z - x_0)^2}$; $|x_0| < 2$

7433. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{z^4}$

Legyen C a $|z - j| = 2$ kör pozitiv körüljárási iránnyal. Számitsuk ki az alábbi integrálokat.

7434. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 + 4}\, dz$

7435. $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2}\, dz$

7436.* Legyen C a $z = e^{j\varphi}$ $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ egységkör pozitiv irányu befutással és k valós állandó.
Mutassuk meg először, hogy

$$\int_C \frac{e^{kz}}{z} dz = 2j\pi$$

majd irjuk át az integrált trigonometrikus alakra és igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\pi} e^{k\cos\varphi} \cos(k \sin\varphi)\, d\varphi = \pi$$

75. KOMPLEX TAGU SOROZATOK ÉS SOROK. HATVÁNYSOROK. TAYLOR ÉS LAURENT-SOROK

Állapitsuk meg konvergensek-e az alábbi komplex tagu sorozatok, ha konvergensek határozzuk meg határértéküket.

7500. $z_n = (1 - \frac{1}{n}) e^{j\frac{\pi}{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$

7501. $z_n = (1 - j\frac{\pi}{n})^n$, $n = 1, 2, \ldots$

7502. $z_n = (1 + j\frac{\pi}{2n})^n$, $n = 1, 2, \ldots$

7503. $z_n = j^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

7504.* $z_n = 1 + j + j^2 + \ldots + j^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

7505. $z_n = 1 + \frac{j}{2} + \left(\frac{j}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{j}{2}\right)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Állapitsuk meg konvergensek-e az alábbi komplex tagu sorok:

7506. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{j}{3}\right)^k$

7507. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right)^k$

7508. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+jk)^2}$

7509. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-jk}{(1+j)^k}$

Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergencia-tartományának R sugarát:

7510. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

7511. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

7512. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!z^{2n}$

7513. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+jn}$

7514. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n \cdot n}$

Állapitsuk meg az alábbi hatványsorok konvergencia tartományát:

7515. $1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$

7516. $z+2z^2+3z^3+\ldots+nz^n+\ldots$

7517. $1-z+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{n}+\ldots$

7518. $z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\ldots+\frac{z^{2n-1}}{\sqrt{2n-1}}+\ldots$

7519. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}$

7520. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{(n+1)\,z^{2n-1}}$

7521. $(z+4)+\frac{(z+4)^2}{2}+\frac{(z+4)^3}{3}+\ldots+\frac{(z+4)^n}{n}+\ldots$

7522. $1+\frac{(z-2j)}{1^2\cdot 2}+\frac{(z-2j)^2}{2^2\cdot 2^2}+\frac{(z-2j)^3}{3^2\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(z-2j)^n}{n^2\cdot 2^n}+\ldots$

7523. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+2)}{4^n}$ 7524. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(z-1+0,5j)^n}{n!}$

Mutassuk meg, hogy

7525.* $e^z = e + e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ minden véges z-re

7526.* $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$ ha $|z+1| < 1$

7527. $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$; ha $|z-2| < 2$

7528. Határozzuk meg $w = \cos z$ $z = \frac{\pi}{2}$ helyhez tartozó Taylor sorát.

7529. Határozzuk meg $w = \operatorname{sh} z$ $z = j$ helyhez tartozó Taylor sorát.

7530. Mutassuk meg, hogy ha $0 < |z| < 2$

$$\frac{1}{4z - z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{4^{n+1}}$$

7531. Állitsuk elő

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

függvénynek $z - 1$ hatványai szerint haladó hatványsorát, és állapitsuk meg a sor konvergencia tartományát.

Fejtsük Taylor-sorba a következő függvényeket az adott z_o helyen és határozzuk meg a sor konvergencia tartományát:

7532. $w = \frac{1}{z}$; $z_o = 1$

7533. $w = \dfrac{1}{(z+1)(z-3j)}$ $\qquad z_o = j$

7534. $w = \cos z;$ $\qquad z_o = j + \dfrac{\pi}{2}$

7535. $w = \sin z;$ $\qquad z_o = j + \dfrac{\pi}{2}$

7536. $w = \dfrac{1}{z-1};$ $\qquad z_o = 2(1+j)$

7537. $w = \dfrac{1}{z-3};$ $\qquad z_o = 2(1+j)$

7538. $w = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)};$ $\qquad z_o = 2(1+j)$

7539. $w = z^3 \operatorname{ch}(z+3);$ $\qquad z_o = 0$

7540. $w = \operatorname{Ln}(1-z)$ $\qquad z_o = 0$

7541.* $w = \dfrac{e^z}{z^2(z-1)}$ $\qquad z_o = j$

7542.* Mutassuk meg a $w = \operatorname{sh} z$ függvény $z_o = j$ helyhez tartozó Taylor sorának felhasználásával, hogy

$$\lim_{z \to j} \frac{\operatorname{sh} z}{z-j} = -1$$

7543. Mutassuk meg a $w = \sin z^2$ függvény $z = 0$ helyhez tartozó Taylor-sorának felhasználásával, hogy $w^{(2k-1)}(0) = 0$ és $w^{(4k)}(0) = 0$ $k = 1, 2, \ldots$

7544. Határozzuk meg $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ függvény $z = 0$ helyhez tartozó Taylor-sorát, a sor konvergencia tartományát, ill. a $|z| > 1$ tartományon érvényes Laurent sorfejtését.

7545. Adjuk meg $w = \dfrac{z-1}{z^2}$ $z_o = 1$ helyhez tartozó Taylor-sorát, a sor konvergencia tartományát, ill. $|z-1| > 1$ tartományon érvényes Laurent-sorfejtését.

7546. Határozzuk meg $w = \frac{\operatorname{sh} z}{z^2}$ függvény $|z|>0$ tartományon érvényes Laurent-sorfejtését.

7547. Adjuk meg az $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ függvénynek két, z hatványai szerint haladó Laurent-sorát, és határozzuk meg mindkettőnek a konvergencia-tartományát.

7548. Határozzuk meg a $w = z^{-1}(1+z^2)^{-1}$ függvény két, z hatványai szerint haladó Laurent-sorát, és adjuk meg mindkét sor konvergencia tartományát.

Határozzuk meg a következő függvények $z_0 = 0$ hely környezetében érvényes Laurent-sorfejtésének néhány tagját:

7549. $w = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ 7550. $w = \frac{1}{e^z - 1}$

Határozzuk meg a következő függvények adott z_0 hely környezetében érvényes Laurent-sorfejtését.

7551. $f(z) = \frac{z^2+z+3}{z^2-1}$ $z_0 = 1$

7552. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ $z_0 = 0$

7553.* $f(z) = \frac{2z}{(z+1)^2(z-4)}$ $z_0 = -1$

7554. $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$ $z_0 = 2j\pi$

Határozzuk meg a következő függvények adott z_0 hely környezetében érvényes Laurent-sorfejtésének első néhány tagját.

7555.* $f(z) = \frac{1}{\operatorname{ch} z}$ $z_0 = j\frac{\pi}{2}$

7556. $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sh} z}$ $\qquad z_0 = 0$

7557. $f(z) = \frac{1}{\operatorname{Ln}(1+z)}$ $\qquad z_0 = 0$

Határozzuk meg a következő függvények adott tartományon érvényes Laurent sorfejtését:

7558. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $\qquad |z| < 1$

7559. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ $\qquad 1 < |z| < 2$

7560. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ $\qquad 2 < |z|$

7561. $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z+1)}$ $\qquad 0 < |z+1| < 1$

76. KOMPLEX VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK SZINGULÁRIS HELYEINEK OSZTÁLYOZÁSA. REZIDUUM

Mutassuk meg, hogy a következő függvények minden szinguláris helye pólus, határozzuk meg a pólusok rendszámát és a hozzájuk tartozó reziduumokat.

7600. $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$

7601. $f(z) = \operatorname{th} z$

7602. $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$

7603. $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

7604. $f(z) = \frac{z}{\cos z}$

7605. $f(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$

7606. Bizonyitsuk be, hogy ha $h(z)$ analitikus a z_0 helyen és $h(z_0) \neq 0$, akkor az $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$ függvénynek a z_0 hely elsőrendü pólusa és $\operatorname{Res}_{z = z_0} f(z) = h(z_0)$.

7607. Bizonyitsuk be, hogy ha $h(z)$ analitikus a z_0 helyen és $h(z_0) = 0$, akkor az $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$ függvénynek a z_0 helyen megszüntethető szingularitása van.

Határozzuk meg a következő függvények $z = 0$ helyhez tartozó reziduumát:

7608. $\frac{1}{\sin^2 z}$

7609. $\frac{1}{z^3 \sin z^2}$

7610. $z \cos \frac{1}{z}$

Határozzuk meg a következő függvények összes véges szinguláris helyeit és azok jellegét.

7611.* $w = \frac{z^3 + 1}{z^4 - 1}$

7612. $w = \frac{z^2 + 2 - zj}{z (z - 2j)^3}$

7613. $w = \frac{e^z}{z^2 (z - 1)}$

7614. $w = \frac{1}{\sin z + \cos z}$

7615. $w = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}$

7616. $w = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$

7617. $w = e^{\frac{1}{z-3+j}}$

7618. $w = \frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{z^2}$

7619. $w = \frac{z^2}{(z - 1)^2 (1 - e^z)}$

7620. $w = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$

Vizsgáljuk meg a következő függvények viselkedését a végtelen távoli pontban:

7621.* $f(z) = z^2 + 1$

7622. $f(z) = \dfrac{z^5 - 1}{z^2 + z + 1}$

7623. $f(z) = z^2 e^z$

7624. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$

7625. $f(z) = \operatorname{sh} z$

7626. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Jellemezzük a következő függvények összes szinguláris helyeit (a végtelen távoli pontot is beleértve):

7627. $f(z) = \dfrac{z^8 + 1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$

7628. $f(z) = \dfrac{2}{\sin z - \cos z}$

7629. $f(z) = z^4 \cdot e^{-z}$

7630. $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{1 + e^{3z}}$

7631. $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-2}}}{e^{2z} - 1}$

7632. Határozzuk meg az $f(z) = \dfrac{3z^3 + 2}{(z - 1)(z^2 + 9)}$ függvény integrálját a

$|z - 2| = 2$ ill. a
$|z| = 4$ görbékre, a görbék pozitiv irányu befutásával.

7633. Számitsuk ki az $f(z) = \dfrac{1}{z^3 (z + 4)}$ függvény integrálját a

$|z| = 2$ illetve

$|z + 2| = 3$ görbékre, a görbék pozitiv irányu befutásával.

Határozzuk meg a következő függvények $|z| = 2$ körre vonatkozó integrálját (pozitiv körüljárási iránnyal).

7634. $f(z) = \operatorname{tg} z$

7635. $\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2z} = f(z)$

7636. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{z\,(z^2 + 1)}$

Határozzuk meg - pozitiv körüljárási irány esetén - a következő függvények $|z| = 1$ körre vonatkozó integrálját:

7637. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 e^z}$

7638. $f(z) = \dfrac{1}{z \sin z}$

7639. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin z}$

7640. $f(z) = z e^{\frac{1}{z}}$

Számitsuk ki a következő integrálokat az adott C görbe pozitiv irányu befutásával:

7641. $\displaystyle\int_C \frac{e^z - 1}{z^3}\,dz$ C: $|z| = 2$

7642. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\operatorname{Ln}(1 + z)}$ C: $|z| = \frac{1}{2}$

7643. $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2 + 1}\,dz$ C: $|z - j| = 1$

7644.* $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\sin z}$ C: $|z| = 8$

7645. $\displaystyle\int_C \frac{z^8\,dz}{z^4}$ C: $\left|z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 1$

7646. $\displaystyle\int_C \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1}\,dz$ C: $|z| = 2$

7647. $\displaystyle\int_C \frac{z^3}{(z - 1)(z - 2)(z - 3)}$ C: $|z - 2| = 2$

7648. $\int\limits_C \frac{\operatorname{ctg} z}{z(z+1)} dz$ C: $|z| = 2$

7649. $\int\limits_C \frac{e^{\sin z}}{\cos 2z} dz$ C: $|z| = 1$

Határozzuk meg a reziduum tétel segitségével a következő valós integrálokat:

7650.* $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ 7651. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

7652. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}$ 7653. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

7654. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx; \quad a \geqq 0$ 7655. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)^2}$

7656. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$ 7657. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2} dx \quad (a > 0; \quad b > a)$

7658. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x \sin ax}{x^4+4} dx \quad (a > 0)$ 7659. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx$

Argumentum elv. Rouché tétel alkalmazásai

Határozzuk meg az argumentum elv segitségével az alábbi C zárt görbementi integrálokat a C görbét pozitiv irányban befutva:

7660.* $\int\limits_C \frac{z^3}{z^4+1} dz$ C: $|z| = 2$

7661. $\int\limits_C \frac{3z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 - z}$ C: $|z| = 1$

7662. $\int\limits_C \operatorname{tg} z \, dz$ C: $|z| = 4$

7663. $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{e^{2z} - 1} dz$ $|z| = 5$

7664. $\int\limits_C \frac{1}{z \operatorname{Ln} z} dz$ $|z - 1| = \frac{1}{2}$

Határozzuk meg Rouché tételének segitségével hány gyökük van az alább megadott egyenleteknek a kijelölt tartományokban:

7665. $z^8 - 4z^5 + z^3 - 1 = 0;$ $|z| < 1$

7666. $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0;$ $|z| < 1$

7667. $z^4 + z^3 + 1 = 0;$ $|z| < 2$

7668. $z^6 - z^4 + 2 = 0;$ $|z| < 2$

7669. $e^{z-\lambda} = z$ $\lambda > 1$ $|z| < 1$

Schwarz-Cristoffel transzformáció alkalmazásai

7670.* Határozzuk meg Schwarz-Cristoffel transzformáció segitségével azt a függvényt, amely az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsiknak a $-\frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{Re} w \leqq \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} w \geqq 0$ félig végtelen-sávot felelteti meg.

7671. Határozzuk meg azt a függvényt, amely az $\operatorname{Im} z \geqq 0$ félsiknak a $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ sávot felelteti meg.

7672. Határozzuk meg azt a függvényt, amely az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsiknak egy w_1, $w_2 = 0$, w_3 csucspontu egyenlő oldalu háromszöget feleltet meg.

7673. Határozzuk meg azt a függvényt, amely által létesitett leképezés a valós tengelyt egyenlő száru derékszögü háromszögbe viszi át.

7674. Mutassuk meg, hogy a

$$w = j \int_0^z (\zeta + 1)^{-\frac{1}{2}} (\zeta - 1)^{-\frac{1}{2}} \zeta^{-\frac{1}{2}} d\zeta$$

transzformáció az X tengelyt egy négyzet határára képezi le. Határozzuk meg a négyzet csucspontjait.

8. VALÓSZINÜSÉGSZÁMITÁS

81. KOMBINATORIKA. BOOLE-ALGEBRA. PERMUTÁCIÓ

8101. Hány hatjegyü telefonszám irható fel 1, 2, 3, 5, 7, 9 számokból? (Az egyes jegyek csak egyszer fordulhatnak elő.)

8102.* Hányféle sorrendben ülhet 26 ember
a) egy sorban
b) egy kerek asztal mellé
c) egy kerek asztal mellé ugy, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellé kerüljön.

8103. Hat fehér és hat fekete számozott golyó van;
a) hány féle sorrendben helyezhetők el ugy, hogy egy fekete, egy fehér váltakozzanak?
b) hány féle sorrendben helyezhetők el, ha elöl van a hat fehér és utána a hat fekete?

8104. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből hány (0-val nem kezdődő és különböző számjegyekből álló) 10-jegyü szám képezhető?

8105. Hány valódi telefonszámot lehet felirni a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha az egyes számjegyek csak egyszer fordulhatnak elő?

8106. Hány ötjegyü szám irható fel 1, 1, 2, 2, 2 -ből?

8107. Hány hatjegyü szám irható fel 1, 2, 3, 3, 4, 4-ből?

8108. Egy bolha ugrál egy egyenes mentén. Egy ugrás 1 cm, ezt vagy előre, vagy hátrafelé teszi meg. Hányféleképp juthat el a 0-ból a +8 pontba 18 ugrással?

8109. Hányféleképpen lehet kitölteni egy TOTO-szelvényt ugy, hogy 3 db. döntetlen, 7 db 1-es és 2 db 2-es tipp legyen? (12 mérkőzés)

Kombináció

8110.* 12 tanuló 3 csónakban hányféleképp helyezkedhet el? (négyszemélyes csónakok, számozás nélkül).

8111. Hányféle dobás lehetséges 3 kockával (a kockákat nem különböztetjük meg), ha ugyanaz a szám többször nem fordulhat elő?

8112. A lottó 90 számából ötöt kihuztak.
a) Hányféleképpen lehetséges ez?
b) Hányszor fordul elő, hogy a kihuzott 5 szám között előfordul a 17 és 33?

8113. 80 dobozba hányféleképpen lehet 5 golyót elhelyezni, hogy mindbe legfeljebb 1 jusson?

8114. Egy 20 tagu tanulócsoportból hányféleképpen választható ki 3 tagu bizottság?

8115. Egy 20 tagu tanulócsoportból 1 elnök és 3 bizottsági tag hányféleképpen választható ki?

8116. 15 sakkjátékosból 7 sakkparti hányféleképp állítható össze?

8117. 100 telefonelőfizetőt hányféleképpen lehet páronként összekapcsolni? (50 beszélgetés)

8118. Egy urnában 30 különböző golyó van. Hányféleképpen lehet ebből 7 golyót kihuzni visszatevés nélkül?

8119. Két kockával dobva (a kockák nem megkülönböztethetők) hány esetben kapunk két különböző számot?

8120. Egy sakkversenyen 20 sakkjátékos vesz részt. A játékosokat két tizes csoportba osztják. Hány olyan szétosztás van, melyben a két legerősebb játékos egy csoportba kerül?

8121.* 3 kockával hány különféle dobás lehetséges? (A kockákat nem különböztetjük meg.)

8122. Hány tagból áll összevonás után

$$(x+y+z)^5.$$

8123. Egy urnában 30 számozott golyó van. Hányféleképp lehet 7-et egymás után kihuzni:
a) visszatevés nélkül?
b) visszatevéssel?
(A golyók sorrendje nem számit.

8124. 5 pénzdarabot dobunk fel egyszerre. Hányféleképpen sikerülhet a dobás?

Variáció

8125.* 9 különböző szinből hányféle 3 sávos zászló készithető? (A szinek sorrendje nem számit. Lehet a zászló 2 szinből is, de nem kerülhetnek egymás mellé azonos szinü csikok. Pl. piros-fehér-piros lehet.)

8126. Hány 3, illetve 2 jegyü szám alkotható 0, 2, 5, 8-ból? (Egy számjegy csak egyszer szerepelhet.)

8127. Hány ötbetüs szót képezhetünk az l, m, n, r és a, e, i, o, u betükből? Egy betü sem ismétlődhet. Két magán- ill. mássalhangzó nem kerülhet egymás mellé.

8128. Hány 3 ill. 2 jegyü szám alkotható az 1, 4, 5, 3 számjegyekből, ha egy számjegy csak egyszer szerepelhet?

8129.* A kettes számrendszerben hány különböző tizjegyü szám van?

8130. Hány valódi 4 jegyü szám van a tizes számrendszerben? (0314 nem 4 jegyü.)

8131. A totószelvény hányféleképp tölthető ki ugy, hogy az első 6 mérkőzés tippje jó legyen? (13 mérkőzés)

8132. Egy kapcsolási rendszerben 30 jelfogó van. Minden jelfogónak 2 állapota lehetséges. Hány különféle állapota lehet a rendszernek? (A jelfogók számozottak.)

8133. Hány 4, 3 ill. 2-jegyü szám alkotható az 1, 4, 2 számjegyekből, ha egy számjegy többször is előfordulhat?

8134. Hány 4, 3 ill. 2-jegyü szám alkotható a 3, 0, 5 számjegyekből, ha egy számjegy többször is előfordulhat? (A 0 nem szerepelhet első helyen!)

8135. 32 lapos kártyából hányféleképp lehet nyolcat kihuzni?
a) visszatevés nélkül (sorrend számit)
b) visszatevéssel (sorrend számit)
c) egyszerre huzva nyolcat.

8136. Mennyi az elemek száma, ha belőlük 225-tel több harmadosztályu ismétléses variáció képezhető, mint ismétlés nélküli?

Vegyes feladatok

8137. 13 játékosból 5 sakkpartit állitanak össze. Hányféleképp lehetséges ez?

8138. 32 lapos kártyából hányféleképp lehet huzni?
a) 3 pirosat, visszatevés nélkül (sorrend számit)
b) 3 pirosat visszatevéssel (sorrend számit),
c) egyszerre 3 pirosat.

8139. 32 lapos magyar kártyából 5-öt kihuzunk. Határozzuk meg azon huzások számát, amelyekben a zöld ász előfordul. (Sorrend számit.)
a) visszatevés nélkül,
b) visszatevéssel.

8140. 1000 számozott munkadarabból 5 selejtes. Határozzuk meg azon 15 elemü mintavételek számát, melyek tartalmazzák az 5 selejtes darabot.

8141. 32 lapos magyar kártyából 5-öt kihuzunk. Határozzuk meg azon huzások számát, melyekben a piros és a zöld ász előfordul. (Sorrend számit.)

8142. Egy dobozban 30 cédula van 1-től 30-ig számozva. Hányféleképp huzhatunk ki 6-ot ugy, hogy ezek között kettőn meghatározott szám legyen?

8143. Egy összejövetelen mindenki mindenkivel kezet fogott. Igy összesen 105 kézfogás történt. Hányan vettek részt az összejövetelen?

8144. Egy szoba négy falát és mennyezetét öt különböző szinüre akarjuk megfesteni. Hétféle festékanyag áll rendelkezésre. Hányféleképp végezhető el a festés?

8145. Egy hosszu asztal mellé 4 nőt és 8 férfit akarunk leültetni. Hányféleképp történhet ez, ha 2-2 nőt egymás mellett ültetünk le?

8146. 150 rádiókészülékből 7 darab hibás. Hányféleképp választhatunk ezekből 10 darabot ugy, hogy köztük éppen 2 hibás legyen?

8147. 1000 számozott munkadarabból 7 selejtes. Hány olyan 10 elemü különböző mintavétel van, amelyben
a) 1 selejtes darab van,
b) 3 selejtes darab van,
c) mind a 7 selejt benne van?

8148. Egy urnában 30 piros és 20 fehér számozott golyó van. Meghatározandók azon különböző 10 elemü huzások száma, melyekben
a) 1 piros golyó van,
b) 5 piros golyó van,
c) a piros és fehér golyók aránya: 3/2.

8149. Hányféleképpen lehet n számu dobozba N számu ($N > n$) különböző tárgyat elhelyezni ugy, hogy legalább k doboz üres maradjon?

8150. Hányféleképpen lehet 4 dobozba 100 számozott golyót elhelyezni ugy, hogy az első dobozba 10, a másodikba pedig 50 golyó kerüljön?

8151. Hányféleképpen tudjuk 4 egyenlő részre osztani a 32 lapos magyar kártyát ugy, hogy mind a 4 király egy csomóba kerüljön?

8152. 8 fiu és 6 lány táncol. Hányféle (vegyes) pár alkotható belőlük, ha egyszerre 6 pár táncol?

Boole-algebra

8153. Ha A: 10 kockadobás közt nincs 4-es; mi $\bar{A}$ jelentése?

8154. Egy mühelyben három munkagép dolgozik: I., II., III. Legyen
A: I. elromlik egy éven belül,
B: II. elromlik egy éven belül,
C: III. elromlik egy éven belül.
Fejezzük ki a következő eseményeket: Egy éven belül:
1. csak az I. romlik el;
2. I. és II. elromlanak, de III. nem;
3. I., II., III. mindhárman elromlanak;
4. legalább egy gép elromlik;
5. legalább két gép elromlik;
6. pontosan egy gép romlik el;

7. pontosan két gép romlik el;
8. egyik gép sem romlik el;
9. legfeljebb két gép romlik el.

8155. Legyen A: egy telefonhivás $(t, t + T_1)$ időintervallum alatt érkezik be, B: ugyanez a hivás $(t, t + T_2)$ időközben érkezik be. Mi a kapcsolat A és B között T_1 és T_2 különböző értékei mellett?

8156.* Bebizonyitandó: $A = A + AB$, ahol B tetszőleges.

8157. Bizonyitsuk be, hogy ha A és B tetszőleges események, $B = \bar{A}B + AB$.

8158. Bebizonyitandó: Ha A és B két tetszőleges esemény, $A + B = A + \bar{A}B$; vagyis tetszőleges két esemény összege előállitható két egymást kizáró esemény összegeként.

8159. Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges A és B események összege előállitható három, egymást kizáró esemény összegeként, $A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$ alakban.

8160. Ha A és B két tetszőleges esemény, hogyan irható fel a C:/A és B közül csakis az egyik/ esemény?

8161. Bebizonyitandó: $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$ és $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$. Mi következik ebből események Boole-algebra értelmében vett $W = A.B.C... + ...$ tipusu kifejezése ellentettjének képzésére?

8162. Bebizonyitandó, hogy

$$A + B = \overline{\bar{A}\,\bar{B}}$$

8163. Bebizonyitandó, hogy

$$\overline{A + B + C} = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$$

82. KLASSZIKUS VALÓSZINÜSÉGSZÁMITÁS

Kombinatorikus valószinüségi feladatok

8201.* Jelentsen egy pénzdarabon a fej 1-t, az irás 0-t. Mi a valószinüsége, hogy 6 pénzdarabot dobva a nyert összeg ne legyen nagyobb 3-nál?

8202. 20 sakkjátékost két 10-es csapatba osztanak. Mi a valószínüsége, hogy a két legjobb azonos csapatba kerül?

8203. Egy urnában N cédula van, megszámozva 1-től N-ig. ($N \geqq 11$) Kihuzunk visszatevés nélkül 5-öt. Mi a valószínüsége, hogy a kihuzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

8204. Egy kockával ötször dobunk.
a) Mi a valószínüsége, hogy egyszer sem dobunk ötöst?
b) Mi a valószínüsége, hogy pontosan kétszer dobunk négyest?

8205. 500 csavar közt 10 hibás. Kiveszünk 5-öt. Mi a valószínüsége, hogy lesz köztük hibás?

8206. Az 1, 2, 3 ... 20 között rögzitünk egy számot, a-t. Két számot választunk ezután visszatevéssel. Mi a valószínüsége, hogy egyik $< a$ és a másik $\geqq a$?

8207. Egy kockát n-szer feldobunk egymás után. Mi a valószínüsége, hogy az n-dik dobásra kapunk először 6-ot?

8208. Mi a valószínüsége, hogy egy 6 jegyü telefonszám minden jegye különböző?

8209. 32 lapos kártyából háromszor huzunk visszatevés nélkül. Sorrend nem számit. Mi a valószínüsége, hogy
a) a kihuzottak közt csak egy vörös van?
b) a kihuzottak közt legalább egy vörös van?

8210. Két dobozba 7 golyót helyezünk el. Mi a valószínüsége, hogy az I. dobozban legfeljebb 3 golyó legyen?

8211. Mi a valószínüsége, hogy éppen 10 találat legyen a totón? (13 mérkőzés)

8212. Két kockát 5-ször feldobunk. Mi a valószínüsége, hogy egy dobásnál sem kapunk két egyforma számot?

8213. Egy kockával négyszer dobunk egymás után. Mi a valószínüsége, hogy az első két alkalommal ugyanazt a számot dobjuk, majd a harmadikra és negyedikre egymástól és az elsőtől különbözőt dobunk?

8214. N számu ember egy kerek asztalnál ül. Mi a valószínüsége, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellé kerül?

8215. N számu embert egy sorba állitva, mi a valószínüsége annak, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellé kerül?

8216. Egy kör alaku asztal mellett tizen ülnek: 5 férfi és 5 nő. Mi a valószinüsége, hogy két nő nem kerül egymás mellé?

8217.* Egy csomag magyar kártyából négyet kiveszünk,
a) mi a valószinüsége, hogy mind a négy szin előfordul?
b) mi a valószinüsége, hogy a négy közt a piros király is szerepel?

8218. Egy urnában 200 fehér és 300 fekete golyó van. Mi a valószinüsége, hogy hétszer huzva visszatevés nélkül, mindig fehéret huzunk? (Sorrend nem számit.)

8219. Egy sötét szobában 5 pár egyforma cipő van. Kiveszünk közülük találomra 5 darabot. Mi a valószinüsége, hogy lesz közte legalább egy pár?

8220. 5 dobozba 20 különböző tárgyat helyezünk el. Mi a valószinüsége, hogy az I. -be 8, a II. -ba 2, a III. -ba 1, a IV. -be 5 tárgy kerüljön?

8221. 9 golyót helyezünk el 4 urnában. Mi a valószinüsége, hogy minden urnába legalább 2 golyó jusson?

8222. Ketten fej vagy irást játszanak. Az nyer, aki először dob fejet.
a) Mi a valószinüsége annak, hogy a kezdő nyerjen?
b) Mi a valószinüsége annak, hogy ne a kezdő nyerjen?
c) Hányszor nagyobb tétet kell tenni a kezdőnek, hogy a játék igazságos legyen?

8223. Egy dobozban 4 lap van.
Az I. mindkét oldala vörös,
a II. mindkét oldala fehér,
a III. és a IV. egyik oldala fehér, a másik oldala vörös.
Mi a valószinüsége, hogy egyet kihuzva annak legalább egyik oldala vörös legyen?

Geometriai valószinüségi feladatok

8224. Kör alaku R sugaru céltáblára lövünk. (A találat valószinüsége arányos a területtel.) A céltáblát koncentrikus körökkel 10 részre akarjuk osztani ugy, hogy mind a 10 részben a találat valószinüsége ugyanakkora legyen. Hogyan kell a körök sugarait megválasztani?

8225. Egy rudat 3 darabra törünk. Mi a valószinüsége, hogy a három darabból háromszög alkotható?

8226. Választunk egy pontot egy R sugaru kör kerületén és egy másik pontot a körlapon. Mi a valószinüsége, hogy a két pont távolsága > R?

8227. A (0, 1) intervallumban három számot választunk x, y és z-t. Mi a valószinüsége, hogy az x, y, és z élekkel biró tégla testátlója kisebb 1-nél?

8228. Egy mező a következőképpen van aláaknázva: egy egyenes mentén 10-10 m-nyire van egy-egy akna. Egy 2 m széles tank halad át a mezőn egy olyan egyenes mentén, mely az aknákat összekötő egyenessel φ szöget zár be. Mi a valószinüsége, hogy sértetlenül átjut? (A tank felrobban, ha bármely része az akna 1 m-es körzetén belül kerül.)

8229. Egy t hosszuságu egyenes szakaszon kiválasztunk egy pontot. Mi a valószinüsége, hogy a P közelebb van az egyenesszakasz felező pontjához, mint a végpontok bármelyikéhez?

8230. Egy t hosszuságu egyenesszakaszon két pontot kiválasztunk. Mi a valószinüsége, hogy ezek közelebb vannak egymáshoz, mint bármely P a végponthoz?

8231. Egy 5 m oldalhosszuságu négyzet alaku bunkerre felülről tüzelnek. Az oldalfalak 1 m szélesek. Ha a találat olyan pontra esik, mely nem a falak felett van, elpusztul a bunker. Mi a valószinüsége, hogy egy a bunkert érő találat megsemmisiti a bunkert?

8232. Egy egységnyi oldalu négyzet két átellenes oldalán 1-1 pontot választunk. Mennyi a valószinüsége, hogy a két pont távolsága kisebb mint n? (Ahol $1 < n < \sqrt{2}$)

8233. Egy 10 km-es utszakasz két végpontján egy-egy óra van. Ezeken a mutatók percenként ugranak. Ha egy gépkocsi az I. órától olyankor indul, mikor $12^h\ 0'$-t mutat és 90 km/óra sebességgel halad, mi a valószinüsége, hogy II. órához olyan időpillanatban érkezik, mikor az $12^h\ 7'$-t mutat?

Feltételes valószinüségi feladatok

8234. Három kockával dobunk. Mi a valószinüsége, hogy az egyikkel 6-ot dobunk, ha a kapott számok összege = 12?

8235. Egy egységnyi hosszu intervallumon két pontot választunk. Mi a valószinüsége, hogy mindkét pont az intervallum első felébe esik, ha tudjuk, hogy a két pont egymástól való távolsága kisebb $\frac{1}{4}$ -nél?

8236. Egy négyzet alaku, 5 m oldalhosszuságu bunkert 1 m vastag betonlemez fed. Egy találat 60 cm mélyre hatol és 1 m sugaru bombatölcsért okoz. A bunker elpusztul, ha egy II. találat az I. -nek a helyétől legfeljebb 1 m-re csapódik be. Mi a valószinüsége, hogy a II. találat elpusztitja a bunkert, ha az I. találat olyan pontra esett, mely a fedél szélétől 2, ill. 3 méternyire van?

8237. Egy két gyermekes családban az egyik gyerek fiu. Mi a valószinüsége, hogy a másik gyerek is fiu?

8238. Egy urnában a db fehér és b db fekete golyó van. Egymásután huzunk kettőt visszatevés nélkül. Mi a valószinüsége, hogy ha I. huzásra feketét huztunk, akkor a II. -ra is feketét huzunk?

8239. Három kockával dobunk. Mi a valószinüsége, hogy legalább az egyik 6-ot mutat, azon feltevés mellett, hogy a kockák különbözőt mutatnak?

8240. Öt dobozunk van. Az első kettőben két-két fehér és egy-egy fekete, a harmadikban tiz fekete, a negyedikben és az ötödikben három-három fehér és egy-egy fekete golyó van. Találomra kiválasztunk egy dobozt és kiveszünk belőle egy golyót. Mi a valószinüsége annak, hogy ez a golyó fehér?

8241. Egy üzemben bizonyos alkatrészeket gyártanak 3 hétig. Az első héten készül el az egész mennyiség 25%-a, a másodikon a 35%-a és a harmadikon a 40%-a. Az egyes heteken a selejtszázalék sorrendben 7%, 6% és 8% volt. Ha visszatevéssel mintákat veszünk, mi a valószinüsége annak, hogy 20 darabból éppen 3 db lesz selejtes?

8242. Tegyük fel, hogy a férfiak 5%-a és a nők 0,25%-a szinvak. Egy csoportból, mely 20 férfiből és 10 nőből áll, egy személyt kiválasztunk. Megállapitjuk, hogy szinvak. Mi a valószinüsége, hogy férfit választottunk ki?

8243. Egy gépen 8 órától 16 óráig dolgoznak. 8 és 12 óra között 10%-ot, 12 és 14 óra között 15%-ot, 14 és 16 óra között 20%-ot áll a gép. Egy időpontban megvizsgálták, ekkor éppen áll. Mi a valószinüsége, hogy 12 és 14 óra között történt a vizsgálat?

8244. Három számozott dobozunk van. Az elsőben 3 fehér, a másodikban 2 fehér és 1 fekete, a harmadikban 2 fehér és 2 fekete golyó van.

Találomra választunk egy dobozt és egy golyót kiveszünk belőle. Ez a golyó fehér. Mi a valószinüsége annak, hogy az első dobozból való?

8245. Egy folyóban levő halállományban az egy és két kg közötti sulyu halak $\frac{5}{6}$-a, a többinek $\frac{3}{4}$-e ponty. A folyóban levő pontyok $\frac{5}{8}$-a egy és két kg közötti sulyu. Mi a valószinüsége annak, hogy egy halat kifogva ponty kerül horogra?

8246. Egy dobozban 10 piros és valahány fehér golyó van. Annak a valószinüsége, hogy egymás után visszatevés nélkül két fehéret huzzunk $\frac{2}{21}$. Mennyi a fehér golyók száma a dobozban?

83. VALÓSZINÜSÉGI VÁLTOZÓ ÉS ELOSZLÁSAI

8300. Ha egy pénzdarabot n-szer feldobunk, mennyi a fej- és irás-dobások számai közötti különbség várható értéke és szórása?

8301. Három kockával dobunk. 100 Ft-t nyer, aki mindhármon 6-ost dob, 10 Ft-t nyer, aki két kockán dob hatost. Ahhoz, hogy valaki részt vehessen a játékban, előre megszabott dijat kell fizetnie. Mennyi az igazságos tét?

8302. Egy sorsjátékra 1000 sorsjegyet adnak ki. A sorsjegyeket visszatevéssel huzzák. Mi a nyeremény várható értéke, ha két tárgyat sorsolnak: első huzásra egy 2500 Ft értékü motort és a második huzásra egy 500 Ft-os órát? (A kihuzott sorsjegyet az I. huzás után visszatesszük.)

8303. n dobozba N db golyót helyezünk el tetszőleges módon. Mennyi lesz az üres dobozok várható száma?

8304. Két kockával dobva, mi a valószinüsége, hogy a dobott számok összege 8?

8305.* Mi a valószinüsége, hogy egy pénzdarabot 5-ször feldobva, a fej és az irás dobások számának különbsége 3?

8306. Tekintsünk két urnát. Az I.-ből a fehér golyó kihuzásának valószinüsége: p_1, a II.-ből a fehér golyó kihuzásának valószinüsége: p_2. Mi a valószinüsége, hogy ha az I.-ből n_1-szer, a II.-ból n_2-szer huzunk visszatevéssel, a kihuzott n_1+n_2 golyó között K db fehér van?

8307. Egy gyártmány 14%-a selejt. Mi a valószinüsége, hogy 12 db gyártmányt kiemelve (visszatevéssel), ebből 3 selejtes?

8308. Egy urnában 3 fehér és 5 piros golyó van. 10-szer huzunk visszatevéssel. Mi a valószinüsége, hogy a kihuzott golyók között 2 fehér és 8 piros lesz?

8309. Egy pont a számegyenesen a 0 pontból indul és vagy jobbra, vagy balra egy egységet halad. Mi a valószinüsége, hogy n lépés esetén a $k > 0$ pontba jut?

8310. Egy erdőben 100 m^2-ként átlag 10 fa van. A fák törzsének keresztmetszete kör, átmérőjük 50 cm. Puskalövést adunk le. Mi a valószinüsége, hogy a 100 m távolságot befutó lövedék egy fát ér?

8311. Egy gyártmányból 2% hibás. Az alkatrészeket 100-as csomagokba rakják. Mi a valószinüsége, hogy
1. egy dobozban egy hibás sincs?
2. egy dobozban nincs 3-nál több hibás?

8312. Egy iskolába 730 diák jár. Mi a valószinüsége, hogy közülük 3-nak a születésnapja jan. 31.-re esik?

8313. Magyarországon átlagosan évi 1600 ikerpár születik. Mi a valószinüsége, hogy jan. 1.-n ikrek születnek?

8314. Augusztusi éjszakákon átlag 10 percenként 1 csillag lehullik. Mi a valószinüsége, hogy 1/4 óra alatt 2 csillaghullást észlelünk?

8315. Egy fonónő 800 orsót kezel. Percenként egy-egy orsón a fonalszakadás valószinüsége 0,005. Mi a valószinüsége, hogy 1 perc alatt 4 fonalszakadás következik be az általa kezelt 800 orsón?

8316. Egy csomagológép 1 kg-os csomagokat készit. A szórás 1,4 dg
Mi a valószinüsége annak, hogy
a) 1 csomag suly 0,98 és 1,02 kg közé esik?
b) 1 csomag sulya 0,995 és 1,005 kg közé esik?

8317. Egy tengely hossza normális eloszlásu valószinüségi változó. Várható értéke 20 cm, szórása 0,2 cm. Mi a valószinüsége, hogy a tengely hossza 19,7 cm és 20,3 cm közé essék?

8318. Egy csavar hossza 36 mm. Gyártásnál a szórás 0,2 mm. Mekkora türést kell megengedni, hogy a gyártott csavarok 96%-a megfelelőnek minősüljön?

8319. Hány kisérletet kell tenni kockadobásnál, ha azt kivánjuk, hogy a 6-os dobások relativ gyakorisága legalább 0,999 valószinüséggel kevesebb mint ε-nal térjen el $\frac{1}{6}$-tól.

8320. Legalább hány kisérletet kell végezni érmedobásnál, hogy legalább 0,996 biztonsággal a fejdobások relativ gyakorisága és valószinüsége kevesebb, mint $\frac{1}{100}$-dal térjenek el egymástól.

8321. Egy célpontra 1000 lövést adunk, a találat valószinüsége $\frac{1}{10}$. Milyen határok közé fog esni 90% valószinüséggel a találatok száma?

9. SZÁMITÓGÉPEK PROGRAMOZÁSA

91. A PROGRAMOZÁS ALAPFOGALMAI (SZÁMRENDSZEREK, ALAPVETŐ PROGRAMOK BLOKKSÉMÁBAN)

A° Számábrázolás a számitógépben, 2-es 8-as számrendszerek

9101. Irjuk át kettes, nyolcas és kettesben kódolt tizes (binárisban kódolt decimális) számrendszerbe a következő tizes számrendszerbeli egész számokat!

a) 5; b) -9; c) 17;
d) -12; e) -1024; f) 3125

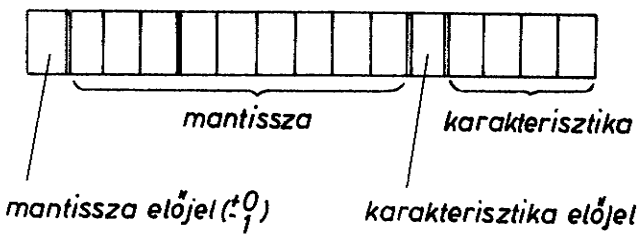
9102. Irjuk át kettes, nyolcas és kettesben kódolt tizes számrendszerbe a következő tizes számrendszerbeli tört számokat!

a) 0,5; b) -0,625; c) -0,999; d) 0,0625

9103. Irjuk át kettes, nyolcas és kettesben kódolt tizes számrendszerbe az alábbi tizes számrendszerü vegyes számokat!

a) -7,5; b) -72,625; c) 14,05; d) 100,33

9104. Irjuk fel, hogyan ábrázolódnának egy olyan lebegőpontos gépen a 9101. a), b), f,) a 9102. a), b, d) és 9103. feladat számai, mely a következő beosztásu:



9104.

9105. Irjuk át tizes és nyolcas számrendszerbe a következő kettes számrendszerü számokat.

a) 1010; b) -1010; c) -10011,01001;
d) 0,1

9106. Irjuk át tizes és kettes számrendszerbe a következő nyolcas számrendszerü számokat.

a) 15; b) -17,45; c) -0,345; d) 1000

9107. Végezzük el az alábbi nyolcas számrendszerbeli számok közötti müveleteket.

a) 13+7; b) 35-16,7; c) -3,05-77,73;
d) 12x3; e) 16:2

9108. Végezzük el az alábbi kettes számrendszerbeli számok közötti müveleteket.

a) 11+1,01; b) 1001,101+11,101; c) 110,001-10,1;
d) 1101,101·0,1; e) 101,1:10

9109. Végezzük el a következő számpárokra a bitenkénti (logikai) kizáróvagy müveletet.

a) 0000 és 0000; b) 1101 és 1101; c) 000 és 111;
d) 101011 és 100111

9110. Végezzük el a következő számpárokon a bitenkénti (logikai) összeadást.

a) 110011 és 111000; b) 11011 és 00000;
c) 1100 és 0011; d) 0000 és 0000

9111. Végezzük el a következő számpárokon a bitenkénti (logikai) szorzást.

a) 110010 és 111000; b) 1111 és 0000;
c) 011011 és 111010

B^0 Értékadó utasitás

Munkarekeszek használata

Az értékadó utasitáson a következő alaku kifejezéseket fogjuk érteni:

változó: = operandus$_1$ müveleti jel (+, -, x, /)

operandus$_2$

Jelentése: a bal oldali változó értéke legyen egyenlő a jobb oldali kifejezés értékével (az operandusok lehetnek számok, de változók is, sőt a bal oldali változó is).

Megjegyzés: A jobb oldalon csak két operandust engedünk meg - ez megfelel a direkt programozás, és egyes autokódok (Elliot) módszereinek,*) bonyolultabb programozási nyelveknél (pl. Algol 60) ez a megkötés nincs és müveleti jelnek sem csak a négy alapmüvelet használható - tehát pl. a:=b+c-d nem megengedett, ezt fel kell bontani a következőképpen:

a:=c-d

a:=a+b

Ezenkivül megjegyezzük, hogy x a szorzás jele / pedig az osztásé (/ jel helyett néha használjuk a vizszintes törtvonalat "———"-t is). Ezért változók jelölésére kis x-t nem használunk, hanem helyette nagy X-t. Számitásaink során gyakran használunk un. munkarekeszeket.

Munkarekesz: olyan segédváltozó (ill. a memóriában neki megfelelő rekesz), amely csak ideiglenesen tárol eredményeket, vagy részeredményeket.

Irjunk fel programot, amelyik kiszámitja a következő kifejezések aktuális értékét.

9112.

$$y = \frac{X^2-(3+X)^3-2X}{\left(\frac{X}{7}\right)^2+2}$$

---

*) Sőt egycimü gépeknél még két operandus sem lehet csak egy, (hiszen az utasításnak csak egy cimrésze van) itt két operandus között aritmetikai müveletet csak az aritmetikai egység akkumulátor regiszterén (szummátoron) keresztül lehet végezni.

9113. $$y = \frac{(X^3+2X^2+1)(5X+6)}{X^6 - 1} + 5X+6$$

X értéke legyen bemenő adat, s mint ilyen, nem igényel külön érték-adó utasitast a programtörzsben. (A programtól lényegében független adatbeviteli segédprogram elintézte ezt.)

9114. Irjunk programot, amely kiszámitja n darab, L hosszuságu D_k külső és D_b belső átmérőjü cső elkészitéséhez szükséges V térfogatot!

Bemenő adatok: n, L, D_k, D_b

9115. Irjunk fel olyan programot, amely kiszámitja a következő kifejezést.

$$y = \cfrac{X}{1 - \cfrac{X^2}{3 - \cfrac{X^2}{5 - \cfrac{X^2}{7}}}}$$

Bemenő adat: X

9116. Menjünk végig a következő utasitásokon és keressük meg az egyes változók végértékeit.

n:=5	$j:=r_b-i$
$r_1:=n+15$	$r_a:=j-i$
$r_1:=n/r_1$	$r_a:=r_a-r_b$
$r_b:=6/r_1$	$i:=n+r_a$
n:=n-2	k:=4/i
i:=n	i:=i+k

9117. Menjünk végig a következő utasitásokon és keressük meg az egyes változók végértékeit.

a:=[illegible]	s:=-b-[illegible]
b:=a	q:=g/s
b:=3xb	d:=0,2xb
p:=a+b	a:=q-d
q:=a+3	p:=a

9118. Irjunk fel $X+jy$ alakban adott komplex számok szorzatát és hányadosát kiszámitó programot.

Bemenő adatok: X_1, y_1, X_2, y_2,

9119. Irjuk fel a következő egyenletrendszert Cramer szabály alapján megoldó programot.

$$a_1X_1+a_2X_2=c_1$$

$$b_1X_1+b_2X_2=c_2$$

Bemenő adatok: a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2

Feltesszük, hogy $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

C^0 Alapvető logikai döntések, cimkék

Logikai döntéseket logikai relációk alapján végzünk. Logikai relációk a következő tipusu kifejezések:

$$a=b, \quad a\neq b \quad a<b, \quad a\leqslant b, \quad a>b, \quad a\geqslant b, \quad ^{*)}$$

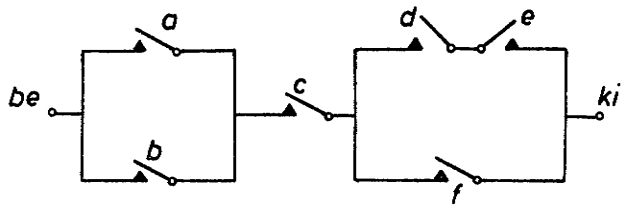
ahol a és b tetszőleges aritmetikai változók vagy állandók lehetnek, a reláció az aktuális értékekre vonatkozik. A relációknak két értéke lehet: igaz (reprezentálható pl. 1-el) és hamis (reprezentálható pl. 0-val). Ezek alapján kétirányu döntéseket végezhetünk. Ha többirányu döntésre van szükség, ezt logikai döntések sorozatával érhetjük el.

9120. Irjuk fel $a \wedge b$ (logikai és, konjunkció) és $a \vee b$ (logikai vagy, diszjunkció) logikai értéke alapján történő vezérlésátadást. a és b logikai változók ill. logikai relációk, igaz értéküket reprezentálja 1, hamis értéküket: 0 Ha a logikai kifejezés igaz, adjuk a vezérlést az 1., különben a 2. cimkére.

---

*) Egycimü gépeknél mivel csak egy cim áll rendelkezésre ezek a relációk $a<0$, $a>0$, $a=0$ alakuak. Itt ha például azt akarjuk eldönteni $a<b$, akkor $a-b$-t képezzük, és a különbség előjelét vizsgáljuk.

9121. Szimuláljuk le programmal a következő kapcsoló áramkört!



9121.

ha az érintkező zárt, értéke legyen igaz (1), ha nyitott hamis (0), valamint ha a hálózat vezet V rekeszbe irjunk 1-t, ha nem V-be irjunk 0-t.

9122. Legyen a, b, c három szám, amelynek egyenlőnek kell lenni, de egy közülük hibás, keressük meg, hogy melyik a hibás (egy erre a célra fenntartott rekeszbe irjunk 1, 2, 3-t attól függően, hogy melyik a hibás), és a hibás számot javitsuk ki.

D^o Ciklikus programok (Iterációs ciklusok.)

9123. Számitsuk ki X_{20} értékét a következő rekurziós formula alapján:

$$X_{n+1}=2X_n-3X_n^2 \qquad X_0=0,25$$

Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, logikai döntés alapján való ugrás.

9124. Irjunk fel programot a következő szumma kiszámitására:

$$S=\sum_{n=1}^{50}\frac{n}{n+3}$$

Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, logikai döntés alapján való ugrás.

9125. Készitsünk programot a következő szumma kiszámitására:

$$S = \sum_{i=1}^{k} \frac{(i^2+1)i!}{3i^3}$$

Bemenő adat: k
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, logikai döntés alapján való ugrás.

9126. Tabellázzuk a következő fv-t X_k és X_v között állandó ΔX lépésközzel.

$$Z = \frac{X^2-2X}{X^3+1}$$

Bemenő adatok: X_k, X_v, ΔX.
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, logikai döntés alapján való ugrás.

9127. Irjunk fel programot gyökvonás kiszámitására a következő algoritmus alapján:

$$X_{k+1}=X_k+\frac{1}{2}\left(\frac{A}{X_k}-X_k\right)$$

ahol A az a szám, amiből gyököt kell vonni, $X_o = A$, és az iterációt addig kell folytatni amig $\Delta X_k=X_k-X_{k-1} < \varepsilon$ nem teljesül, ahol ε az előre megadott hiba.
Bemenő adatok: A, ε.
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, logikai döntés alapján való ugrás.

9128. Készitsünk programot az első n páratlan szám négyzetének tabellálására.
Bemenő adat: n
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, logikai döntés alapján ugrás.

9129. Számitsuk ki a következő kettősszumma értékét.

$$\sum_{j=1}^{30} \sum_{i=j+1}^{j+40} \frac{j+i}{j-i}$$

Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, logikai döntés alapján ugrás.

E^0 Indexregiszteres ciklusok

Indexregiszteres utasitások:

Indexregiszter töltése: jele I_kR. (k:=a L:=b, sz:=c)

jelentése: k:a kezdőérték
L:a lépésköz
sz:a ciklus-lefutások száma

Indexregiszteres vizsgálat és módositás: jele $I_kV.M.$

jelentése: megvizsgálja, hogy hányszor futott le a ciklus, és eszerint adja át a vezérlést a ciklus elejére, vagy ugrat ki a ciklusból, valamint módositja az indexregiszter tartalmát L-el.

Az indexregiszter tartalmát i_k-vel fogjuk jelölni. A k index azt mutatja meg, hogy melyik indexregiszterről van szó.

9130. Számitsuk ki (indexregiszter segitségével) a_{25} értékét, ahol is $a_o = 1$ és

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n - 1}$$

Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, indexregiszteres müvelet.

9131. Irjunk fel programot

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_k \quad \text{és} \quad p = \prod_{i=1}^{n} a_k$$

kiszámitására.
Bemenő adatok: $a_1, \ldots a_k \ldots a_n$; n
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, indexregiszteres müveletek.

9132. Tabellázzuk a következő fv-t $X_1 \ldots X_k, \ldots X_n$ értékekre!

$$y = \frac{X^2 - 2X}{X^3 + 1}$$

Bemenő adatok: $X_1 \ldots X_k \ldots X_n$, n
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, indexregiszteres müveletek.

9133. Irjunk programot 5-ödfoku polinom helyettesitési értékének kiszámitására. Horner elrendezés alapján.

Bemenő adatok: X; $a_1\ a_2 \ldots a_5$-polinomegyütthatók.

Megengedett müveletek: 4 alapmüvelet, indexregiszteres müveletek.

9134. Irjunk fel két n dimenziós vektor skalárszonotát (S) előállitó programot.

Bemenő adatok: $\underline{a}$ vektor rendezői
$\underline{b}$ vektor rendezői
n.

Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, indexregiszteres müveletek.

9135. Irjunk fel programot a következő összeg kiszámitására:

$$S = \sum_{n=1}^{m} \frac{n^2}{n^2+1}$$

Bemenő adatok: m
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, indexregiszteres müveletek.

9136. Irjunk fel programot a következő összeg kiszámitására:

$$z = \sum_{i=0}^{5} (-1)^i \frac{X^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Bemenő adat: X
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, indexregiszteres müveletek.

9137. Számitsuk ki $\underline{a}$ és $\underline{b}$ n dimenziós vektorok skalárszorzatát, ahol $\underline{a}$ vektor rendezői egy negyedfoku polinom ($y=a_o+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+$ $+a_4X^4$) helyettesitési értékei $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ pontokban.

Bemenő adatok: $b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_n$,
$X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n$,
n,
a_o, a_1, a_2, a_3, a_4.

Megengedett müveletek: indexregiszteres müveletek, négy alapmüvelet.

F^o Elágazásos programok, programkapcsolók

9138. Számitsuk ki a Z függvény értékét.

$$Z = \begin{cases} Xy, & \text{ha } X^2+y^2 \leqslant 1, \\ X + \dfrac{X+y}{X-y}, & \text{ha } X^2+y^2 > 1 \text{ és } X \leq 0, \\ 2X + \dfrac{2X+y}{2X-y}, & \text{ha } X^2+y^2 > 1 \text{ és } X > 0. \end{cases}$$

Bemenő adatok: X, y
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet és logikai döntés alapján ugrás.

9139. Készitsünk programot a következő formula kiszámitására.

$$s = \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} \left(\dfrac{X_i^3+a}{2X_i+b} \right)^2, & \text{ha } a^2 < b, \\ ab + \dfrac{X_1+X_4}{2}, & \text{ha } a^2 \geqslant b. \end{cases}$$

Bemenő adatok: X_1, X_2, X_3, X_4, a, b.
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, indexregiszteres müveletek.

9140. Irjunk fel programot a következő függvény értékeinek kiszámitására: (Program kapcsolóval!)

$$y = \begin{cases} 2X^2 + \sqrt{X}, & \text{ha } X > 0, \\ 3X^2 + \sqrt{-X}, & \text{ha } X \leqslant 0. \end{cases}$$

Bemenő adat: X
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, gyökvonás, logikai döntés (ill. kapcsoló) alapján való ugrás.

9141. Irjunk fel másodfoku egyenletet megoldó programot, a megoldóképlet alapján. (Programkapcsolóval.)
Bemenő adatok: a, b, c a másodfoku egyenlet együtthatói.
Megengedett müveletek: négy alapmüvelet, gyökvonás, logikai döntés (ill. kapcsoló) alapján való ugrás.

9142. Programkapcsoló segitségével oldjuk meg a következő feladatot. Egy fontos programot a következő ellenőrzéssel futtatjuk le. A program első lefuttatása után még egyszer lefuttatjuk. Ha a másodszor kapott eredmény megegyezik az elsővel elfogadjuk az eredményt, ha nem harmadszor is lefuttatjuk. Ha ez az eredmény megegyezik valamelyik előzővel, az eredményt elfogadjuk, ha nem leállitjuk a gépet.

G^0 Szubrutinok

9143. Irjuk fel, hogy a következő szubrutinokban, melyek azok a paraméterek, melyeket a főprogramnak kell átadnia a mellékprogram számára (bemenő paraméterek), és melyek azok amelyeket a főprogramnak visszaadunk (kimenő paraméterek).

a) $y = \sin X$ kiszámitása
b) $y = \sqrt{X}$ kiszámitása
c) $y = e^X$ kiszámitása
d) két n dimenziós vektor skalárszorzatának kiszámitása
e) n elem maximumának ill. minimumának megkeresése
f) mátrixszorzás
g) másodfoku egyenlet megoldása
h) egyszeri szummák kiszámitása
i) polinom értékeinek a kiszámitása.

9144. Irjunk programot, mely az előző példákban emlitett szubrutinok behivásával oldja meg a következő feladatot. Számitsuk ki az alábbi függvény értékeit.

$$f(X,y) = \frac{e^{Xy} + \sin(X+y)^2}{\sqrt{\sin^2 X + \cos^2 y} + \sqrt{2y^2 + X^2}}$$

Bemenő adatok: X, y

92. DIREKT PROGRAMOK (URAL 2. GÉPRE.)

"Ural-2" utasitásrendszerének rövid összefoglalása

A következő jelöléseket fogjuk használni:

(a), jelentése: az a rekesz tartalma
$(S)_0$ " a szummátor előző tartalma
(S) " a szummátor aktuális tartalma
(a) $\Longrightarrow$ S az a rekesz tartalma a szummátorba kerül
(S) $\Longrightarrow$ a a szummátor tartalma az a rekeszbe kerül.
SK — a szummátorbeli szám karakterisztikája
SM — a szummátorbeli szám mantisszája
IR — indexregiszter.

Továbbá:

Utasitásoknál a müveleti kódrész után [] -ben megadjuk az utasitás betüszerinti röviditését is. Ha a járulékos bit helyén "j" áll, ez azt jelenti, hogy a kivánalmaknak megfelelően 0 és 4 is állhat ott, attól függően, hogy teljes vagy félrekeszt használunk (ha j=4 a cimszám csak páros lehet).

Ha egy utasitást "-" jellel kezdünk, az azt jelenti, hogy az utasitást az indexregiszter pillanatnyi tartalmával módositani kell. Az ebben a fejezetben előforduló példákkal kapcsolatban a következő megállapodásokat tesszük. A példában szereplő változókat az ábécé kisbetüivel (esetleg indexekkel ellátott betüivel) fogjuk jelölni. A változókhoz rendelt rekeszeket és egyéb rekeszeket (utasitásrekesz, munkarekesz, eredményrekesz) az ábécé nagybetüivel (esetleg index is) jelöljük majd. Ezek a betük nyolcas számrendszerü (legfeljebb négyjegyü) számokat takarnak, a cimeket Ural 2. gépnél ugyanis nyolcas számrendszerben szokás megadni. Az adatokat és a programkonstansokat a memóriában már elhelyezve képzeljük, tehát beviteli utasitásoktól eltekintünk. Kiiró utasitásoktól is eltekintünk, minden program végén közöljük, hogy az eredmény melyik rekeszben van.

Bevezetjük továbbá a következő jelöléseket:

a) (A) jelentése: az A cimü rekesz tartalma

p. $(2044)=5\cdot 10^{-7}$ jelentése: a 2044 rekeszben a $5\cdot 10^{-7}$ szám van.

b) $\langle a \rangle$ jelentése: annak a rekesznek a cime, amiben az a szám van.

pl. $\langle 5\cdot 10^{-7} \rangle = 2044$ az $5\cdot 10^{-7}$ a 2044-es rekeszben van.

Megjegyzés: esetleges aritmetikai formulákhoz [] -t fogunk alkalmazni!)

Müvelet jele			Müvelet hatása	ω =1 ha	φ = 1 ha
I. Belső adatcsere müveletei					
02[ÁSf]	a	j	(a) $\Longrightarrow$ S fixpontosan [átvitel a szummátorba]	(S)<0	- -
16[Ámf]	a	j	(S) $\Longrightarrow$ a fixponton [átvitel a memóriába]	(a)< 0	- -
42[ÁSl]	a	j	(a) $\Longrightarrow$ S lebegőpontosan	(S)<0	-
56[ÁMl]	a	j	(S) $\Longrightarrow$ a lebegőpontosan	(a)<0	|(SK)|> 63
II. Aritmetikai müveletek					
01[+f]	a	j	$(S)_0+(a) \Longrightarrow$ S fixpontosan	(S)<0	|(SM)|≥1
03[-f]	a	j	$(S)_0-(a) \Longrightarrow$ S fixpontosan	(S)<0	|(SM)|≥1
06[xf]	a	j	$(S)_0\cdot(a) \Longrightarrow$ S fixpontosan	(S)<0	- -
07[:f]	a	j	$(S)_0:(a) \Longrightarrow$ S fixpontosan	(S)<0	|(SM)|≥1
41[+l]	a	j	$(S)_0+(a) \Longrightarrow$ S lebegőpontosan	(S)<0	|(SK)|>63
43[-l]	a	j	$(S)_0-(a) \Longrightarrow$ S lebegőpontosan	(S)<0	|(SK)|>63
44[Hl]	a	j	$(S)_0-(a) \Longrightarrow$ S lebegőpontosan	(S)<0	-
46[xl]	a	j	$(S)_0(a) \Longrightarrow$ S lebegőpontosan	(S)<0	|(SK)|>63
47[:l]	a	j	$(S)_0:(A) \Longrightarrow$ S lebegőpontosan	(S)<0	|(SK)|>63
10[sgn]	a	j	$sgn(a)\cdot(S)_0 \Longrightarrow$ S lebegőpontosan	(S)<0	- -
III. Logikai (bitenkénti) müveletek					
				(S)<0	- -
11[L]	K	0	(S)K helyértékkel balra lép (előjel is)	(S)<0	|SM|≥1
11[LA]	K	4	(S) K helyértékkel balra lép (előjel nem)	(S) = 0	- -
12 [∧]	a	j	$(S)_0(a) \Longrightarrow$ S bitenként	S = 0	- -
13[V]	a	j	$(S)_0(a) \Longrightarrow$ S bitenként	S = 0	- -
14[⊻]	a	j	(S) (a) $\Longrightarrow$ S bitenként	S ≠ 0	

Müvelet jele	Müvelet hatása	$\omega = 1$ ha	$\varphi = 1$ ha
IV. Vezérlésátadási müveletek			
21[FU] a 4	Ugrás "a" cimre ha $\omega=0$	változatlan	--
21[FU] a 0	Ugrás "a" cimre ha $\omega=1$	"	--
22[U] a 0	Feltétlen ugrás "a" cimre	"	
22[U] a 4	A vezérlés az a+1" cimre adódik át, az a" cimre pedig 22 K+1 0 iródik be, ahol K a "22 a 4" utasitás cime.		
23[Kulcs]K	Lépéskihagyás kulcs szerint		
V. Ciklus utasitások			
25(IRT)n j	Az IR feltöltődik nj-re	változatlan	--
24[IRV] a 0	A vezérlés átadódik az a" cimre ha az (IR) $\neq$ 0. Az IR tartalma j-től függően 1-el ill. 2-vel csökken.	változatlan	--
27(IRK) a 0	Ha (IR)=n j akkor 25 n j kerül "a" cimre		
VI. Utasitásmódosito utasitás			
30(UM) a 0	(a) $\Rightarrow$ UR (utasitásregiszter) és hozzáadódik a következő utasitás. Az igy módositott utasitás kerül végrehajtásra.	változatlan	--
VII. Eredményközlési utasitások			
32 m 0	Tizes rendszerü eredményközlés m=0001 nyomtatás m=0002 lyukasztás m=0003 mindkettő	változatlan	--
33 m 0	nyolcasrendszerü eredményközlés (m mint fent)		
37[STOP]	MEGÁLLÁS		

A^0 Alapvető programok (négy alapmüvelet, szummátorba vitel, tárolás, léptetés)

9201. Irjuk fel a következő "programrészeket" Ural 2-kódrendszerében. a b és c legyenek fixpontos "rövidszavas" számok, és helyezzük el őket az A, B, C cimü félrekeszekben!
a) A és B rekesz tartalmát cseréljük fel
b) képezzük $\underline{a+b}$-t, és az eredményt irjuk vissza az A rekeszbe
c) képezzük $\underline{a-b}$-t, és az eredményt irjuk vissza a B rekeszbe
d) képezzük $\underline{a\cdot b}$-t és az eredményt irjuk C rekeszbe
e) képezzük $\underline{a/b}$-t és az eredményt irjuk C rekeszbe
f) képezzük $\underline{a+b+c}$-t és az eredményt irjuk a C rekeszbe
g) képezzük $\underline{a+b\cdot c}$-t és az eredményt irjuk a C rekeszbe.

9202. Irjuk fel az előző feladat programjait azzal a módositással, hogy most a b és c legyenek lebegőpontos "hosszuszavas" számok, és helyezzük el őket az A-A+0001; B-B+0001 és a C-C+0001 teljes rekeszekben.

9203. Irjunk a) $|a|-|b|$ és b) $|a|$ képzésére programot a 44-es müvelet segitségével (a és b lebegőpontos hosszuszavas számok) valamint ugyenezekre a müveletekre (c) és d)) a 10-es müvelet segitségével. (a és b itt legyenek fixpontos rövidszavas számok)

9204. Az Ural 2-n egész számokat ugy ábrázolunk, hogy fixpontosan egy félrekesz utolsó bitjeire irjuk a számjegyeket, és ezt egésznek tekintjük, un. "fiktiv" egésznek (ezek egységeként tehát Ural-2 gépnél 2^{-18}-t szokás venni).
Irjunk programot, amely a "fiktiv" egészek szorzatát kiszámolja!

9205. Számitsuk ki az

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

racionális törtfüggvény értékét. a, b, c, d, x lebegőpontos, hosszuszámos számok.

9206. Irjunk fel két x+jy alakban megadott komplex szám szorzatát és hányadosát képező programot!

9207. Irjunk programot

$$A = (B+C-D)E$$

kiszámitására, ahol B, C, D, E komplex számok!

B^0 Feltételes és feltétlen vezérlésátadások.
(Logikai, és elágazó aritmetikai programok.)

9208. Irjunk fel programot, amely $a \wedge b$ ill. $a \vee b$ logikai kifejezések értékeit kiszámolja. a és b logikai változók, értékük igaz ill. nem igaz. Értéküket gépileg ugy reprezentáljuk, hogy a változóhoz rendelt félrekesz 2^{-18} helyértékére 1-t ill. 0-t irunk. A többi helyérték mindig 0.

9209. Irjunk programot, mely N cimü utasitásra adja a vezérlést, ha $L_1 \wedge L_2$ igaz és M cimüre ha nem igaz. L_1 és L_2 a következő logikai relációt jelenti:

L_1:a=b a és b hosszuszavas lebegőpontos számok

L_2:$c \leqq d$ c és d fiktiv pozitiv egész számok.

9210. Irjunk programot, amely a következő függvény értékét számolja ki, ott ahol a függvény értelmezve van. Ha a függvény nincs értelmezve, akkor Q cimü utasitásra adjuk a vezérlést, és a program külön része gondoskodik arról, hogy ekkor mi történjen.

$$f(x, a, b, c) = \frac{bx^3+bx^2-3x+ca}{3(x-a)^2(x-b)(x-c)}$$

Az eredményt F teljes rekeszbe irjuk be.

9211. Irjunk programot, amely a következő mennyiséget számolja ki.

$$y = F(Z)+0.38$$

ahol

$$Z = x^3+5x \qquad F(Z) = \begin{cases} Z, & \text{ha } Z \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } -1 \leqslant Z \leqslant 0, \\ Z^2, & \text{ha } Z < -1. \end{cases}$$

Az eredményt Y teljes rekeszbe irjuk be.
Megállapodás: ha Z=0 akkor azt +0-nak vesszük.

9212. Irjunk fel programot, amely megvizsgálja, hogy egy adott szám, a következő intervallumok közül melyikbe tartozik és ezt az alábbi módon jelezzük.

Intervallum	Z rekeszbe irjuk a következő fiktiv egészt
$(-\infty, -100)$	-1
$(-100, +100)$	0
$(100, +\infty)$	+1

Az adott vizsgálandó számot jelöljük x-szel (lebegőpontos, hosszuszavas).

C^0 Ciklusok, utasitásmódositó utasitások

9213. Utasitásmódositó utasitás felhasználásával oldjuk meg a következő programot

$$W = x+y+z$$

ahol

$$x=(a+b)d-(a-b)\cdot c^2$$

$$y=(|a|-|b|)\cdot d-(a-b)+c^2$$

$$z=\frac{a}{b}\cdot d-(a-b)+c^2$$

a, b, c, d számok adottak (lebegőpontos, hosszuszavas).

a) Szuminátoron keresztüli (30-as nélküli) utasitásmódositással
b) 30-as müvelet segitségével.

9214. Számitsuk ki a következő kifejezés értékét.

$$S = \sum_{i=2}^{100} \frac{i+1}{i-1}$$

9215. Tabellázzuk az $y=x^2+2x$ fv-t x_o és x_v között állandó Δx lépésközzel.

9216. Számitsuk e^{-x} értékét Taylor sorának segitségével. A sorban annyiadik tagig kell elmenni, hogyha az n-edik tag az utolsó, akkor $|a_n| < \varepsilon$ kell, hogy legyen, ahol ε egy előre megadott pozitiv szám.

9217. Irjunk programot $\sqrt{a}$ kiszámitására a következő algoritmus alapján:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{X_k} - X_k\right); \qquad X_o = a$$

Az iterálást addig folytassuk, amig $\Delta X_k < \varepsilon$ nem lesz.

$$\left(\Delta X_k = X_{k+1} - X_k = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{X_k} - X_k\right)\right) .$$

Feltesszük, hogy $a > 0$ teljesül.

D^o Indexregiszteres ciklusok

9218. Számitsuk ki az alábbi rekurziv formulával megadott sorozat 20 tagját (20 tizes számrendszerbeli szám nyolcas számrendszerben ez 24 azaz $20_{10} = 24_8$).

$$a_{i+1} = a_i^2 + b; \qquad a_o = b$$

9219. Számitsuk ki

$$S = \sum_{i=1}^{10} a_i \quad \text{értékét}$$

a) 30-as utasitással
b) indexregiszter segitségével.

9220. Számitsuk ki egy n-edfoku polinom helyettesitési értékét Horner séma alapján.
A Horner elrendezés a következő:

$$P_n(x) = (\ldots(((p_n)x+p_{n-1})x + p_{n-2})x + \ldots p_1)x + p_o$$

9221. Számitsuk ki két n dimenziós vektor skaláris szorzatát:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

9222. Irjunk fel programot, amely 5 számból kikeresi a legkisebbet, vagy a legnagyobbat a vezérpult 1-es kapcsolójától függően. (Kapcsoló nyitva: maximum, csukva minimum).

9223. Állapitsuk meg, hogy adott X (hosszuszavas, lebegőpontos) szám, mely intervallumba esik és jelezzük azt a következő módon:

Intervallum	Z rekeszbe irjuk a következő fiktiv egészt
$(-\infty, -1000)$	1
$(-1000, -100)$	2
$(-100, -50)$	3
$(-50, +50)$	4
$(+50, +100)$	5
$(+100, +1000)$	6
$(+1000, +\infty)$	7

E^o Egymásba skatulyázott ciklusok

9224. Tabellázzuk az $y=a_o+a_1x+\ldots\ldots a_nx^n$ függvény helyettesitési értékeit az $x_1\ldots\ldots\ldots x_k\ldots\ldots\ldots x_m$ pontokban.

9225. Számitsuk ki

$$I = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - 1}{a_j + 1}$$

ketősszumma értékét.

F^0 Szubrutinok

9226. Irjunk fel n-ed-foku polinom értékét kiszámitó szubrutint. A polinom-együtthatók sorfolytonosan vannak tárolva. Az átadandó paraméterek p_n, n, és x. x-t a szummátoron keresztül adjuk át, és az eredményt is a szummátorból vehetjük át.

9227. Irjunk programot két n-dimenziós vektor skaláris szorzatának képzésére. A két összesszorzandó vektor rendezői nem sorfolytonosan, de egymástól állandó távolságban találhatók meg a memóriában.

Átadandó paraméterek: a_1, (a első rendezőjének cime) ϑ_a, a rendezők cimének a távolsága, b_1, ϑ_b n a közös dimenziószám, ezt a szummátoron keresztül kell átadni, és az eredményt is a szummátoron keresztül kell átvenni.
Építsünk be a program elején egy indexregiszter-kimenő utasitast amit aztán a főprogramba történő visszatérés előtt ujra beültetünk.

93. ALGORITMUSOK

Az algoritmusok leirására szolgáló szimbolikus nyelv

Az ebben a fejezetben előforduló példákat megoldó algoritmusok sémáját az alábbiakban ismertetendő nyelven irjuk le: (lásd Frey Tamás: Programok és algoritmusok cimü jegyzete.)

Állandók

Állandók jelölésére tetszőleges tizes számrendszerbeli számot ill. betüt fogunk használni. Pl.: 5; 7,6; $5,1.10^{-5}$; n. stb.

Változók

Változók jelölésére az abc betüit fogjuk használni. Pl.: k, n, A, X stb. (A kis x-t nem használjuk, a szorzás jelére tartjuk fenn.)

Indexes változók

A változókat index-szel is ellátjuk, de csak egy indexet engedélyezünk. Az indexet - eltérően a szokásos matematikai jelöléstől - szögletes záró-

jelben irjuk a változó után. Az index lehet szám, változó, indexes változó, sőt aritmetikai kifejezés (l. később) is.

Pl.: A[1], b[k]; b[L[i]], J[A+B], K[A+B[e]+2].

Aritmetikai kifejezések

Aritmetikai kifejezésen a változóknak és konstansoknak a négy alapmüveleti jellel (+ - x /) és hatványozási jellel (↑) összekötött alakzatát értjük. Aritmetikai kifejezéseknél szükség esetén kerek zárójelet "( )" használhatunk. Használhatjuk még az abszolutértékképzés | | jelét is.

Pl.: a+b, (2xA)/(b-a), A[5]-C[1]/(3xX[i])

Logikai kifejezések és formulák

Logikai kifejezésen két aritmetikai kifejezést értünk, amelyek a $<, \leq, =, >, \geq, \neq$ jelek egyikével vannak összekötve, és amelyek aktuális értéke vagy az igaz vagy nem igaz, attól függően, hogy a felirt reláció az aktuális értékek között fennáll vagy sem. Logikai kifejezés lehet logikai változó is, melyeket ugyanugy betüvel jelölhetünk, és melynek szintén két értéke lehet (igaz, nem igaz), sőt logikai kifejezés lehet maga az igaz vagy nem igaz logikai érték is.

Logikai formulán, a logikai kifejezések es a logikai konjunkció ($\wedge$) ill. diszjunkció ($\vee$) segitségével felépülő alakzatot értünk.

Pl.: $(a \leq b \wedge a \neq b)$ (C $\vee$ igaz).

Értékadó utasitás

Formája: változó:=aritmetikai kifejezés vagy logikai formula;

Jelentése: a bal oldali változo aktuális értéke legyen egyenlő, a jobb oldali kifejezés aktuális értékével

Input-output, start-stop. utasitások

Input (x, y, ... w); jelölés azt jelenti, hogy a beolvasó berendezés beolvas a felsorolt változókkal egyező számu adatot, és azok rendre x, y, ...w aktuális értékeivé válnak.

Az output (x, "...." y) jelölés azt jelenti, hogy a gép kiirja x aktuális értékét, majd az "...." közé irt szöveget stb.

Start cimke a program kezdetét jelzi (ilyen csak egy lehet).

Stop jelölés azt jelenti, hogy az algoritmus végrehajtása befejeződik (ilyen több is lehet).

Ciklikus utasitások

A ciklikus utasitásokat a következőképpen irhatjuk le (4 tipus van).

1. Ciklus d:=k, l, m:

ahol d a ciklusparaméter, amelyik ebben az esetben rendre felveszi k, l, m (mindegyik lehet aritmetikai kifejezés is) aktuális értékeit, rendre végigfutja velük a ciklus magját.

2. Ciklus d:=k lépés b végül m;

ahol d a ciklusparaméter k a kezdőérték, b a ciklusparaméter változásának mértéke, m pedig az az érték, amellyel utoljára lefut a ciklus (k, l, m lehetnek aritmetikai kifejezések is).

3. Ciklus d:=k amig csak R

ahol d ciklusparaméter k a kezdőérték (lehet aritmetikai kifejezés is) és R pedig logikai formula. Igy a ciklus addig lefut, amig R igaz.

4. A fenti 3 eset bármilyen kombinációja.

Pl.: Ciklus j[1]:=3, 5, a lépés b végül c, d amig csak f⩽g:

A fenti szimbólumok után kettőspontot irunk, majd leirjuk a ciklusmagot, melyet Ciklus d Vége szimbólummal zárunk le, ahol d a ciklusparaméter.

Vezérlésátadások, cimkék

Bármilyen utasitást megjelölhetünk cimkével (de többnyire csak olyat szoktunk, amelyre vezérlésátadás adódik). A cimkéket C-vel és egy utánairt számmal jelöljük pl.: C1, C2 stb. Utasitás megjelölésére pedig ugy használjuk, hogy :-t teszünk utána és igy irjuk le az utasitást.

Pl.: C3:w:="formula" vagy C5: Ciklus a:= stb.

Adott cimkéjü utasitásra történő vezérlésátadás kétféle lehet:

1. Feltétlen vezérlésátadás

jele: menj CN; (N természetes szám)
jelentése: a vezérlés a CN cimkéjü utasitásra adódik át, a program itt folytatódik.

2. Feltételes vezérlésátadás

Ez kétféle lehet.

a) jele: ha G akkor menj GN; (N természetes szám)
jelentése: ha G logikai feltétel teljesül, akkor a vezérlés a CN cimkére adódik át, ha nem, a következő utasitásra

Pl.: ha a = 5 akkor menj C5;
g:=g+1
.
.
.
. .
C5:g:=g-1

jelentése: ha az a aktuális értéke: ≠ 5 akkor a g változó aktuális értékét 1-el növeljük ha a = 5 akkor 1-el csökkentjük.

b) jele: ha G akkor menj CN különben V.
jelentése: ha a G logikai feltétel teljesül akkor CN cimkére adódik a vezérlés, ha nem teljesül akkor V utasitás hajtódik végre, ami lehet feltétlen vezérlésátadás vagy a feltételes vezérlés átadás valamelyik fajtája. (Ily módon tetszés szerinti feltételes vezérlésátadás skatulyázódhat egymásba.)

Pl.: ha a≠b, akkor menj C9, különben menj C8;

ha a≠b, akkor menj C9, különben ha c < d, menj C5;

ha a≠b, akkor menj C9, különben ha c < d, menj C5, különben menj C1;

Megjegyzés: az akkor után csak feltétlen vezérlésátadás következhet (vagyis ha szócskát csak különben után lehet irni, akkor után nem).

Kapcsolók

jele: Kapcsoló N (N természetes szám)
A kapcsoló értékei cimkék, az értékadás értékadóutasitással történik, de az értékadás lehet feltételes is. (A szerkezet hasonló, mint feltételes vezérlésátadásnál, de a menj szócska hiányzik.)

Pl.: Kapcsoló 5:=C1
vagy
Kapcsoló 5:=ha d < f akkor C1 különben ha d ≥ f akkor C2 különben C3;

A kapcsoló aktivizálása

jele: menj Kapcsoló N szerint;
jelentése: a vezérlés átadódik arra cimkére, amely a kapcsoló aktuális értéke.

Szubrutinok

Szubrutin leirását a Szubr Név (a, b, c, "___" d, e, f) szimbólummal kezdjük, ahol Név a szubrutin neve, a, b, c a bemenő formális paraméterek,

d, e, f a kimenő formális paraméterek. (Ezeket tehát "____" jellel elválasztjuk egymástól.) Arra vigyázzunk, hogy a formális paraméterek és a szubrutinban használt egyéb változók megjelölése csak olyan betűket használjunk, amelyek sem a főprogramban, sem más szubrutinban nem szerepelnek.

Ezután leirjuk az eljárást, amelyet a szubrutinnak kell elvégezni, a formális paraméterekkel, majd Szubr Név Vége szimbólummal zárjuk a szubrutint.

A szubrutin hivása a főprogramban Szubr Név (k, l, m "___" n, p, q); szimbólummal történik, ahol k, l, m, n, p, q aktuális paraméterek (ezek lehetnek kifejezések, sőt szubrutinok is). A formális paraméterek ezek aktuális értékeit érték szerint veszik át (ha bemenő paraméterek), ill. érték szerint adják tovább (ha kimenő paraméterek).

Megjegyzés: Nem kötelező minden utasitást külön sorba irni, az egyes utasításokat ; -vel választjuk el egymástól (kivéve a ciklus-utasításokat, melyek végére : kerül).

A^0 Elemi függvényekkel kapcsolatos feladatok

9301. Irjunk fel szubrutint $y=\sqrt{X}$ kiszámitására az

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{2}\left(\frac{X}{y_k}-y_k\right)$$

algoritmus alapján. Az iterálást addig kell folytatni, amig $\Delta y=y_{k+1}-y_k<\varepsilon$ nem lesz, ahol ε egy előre megadott hibahatár. y_0 kezdőértéknek X-t választjuk. Ha $x<0$ állitsuk le a gépet és nyomtassuk ki a leállás okát.

9302. Irjunk fel szubrutint $y=e^X$ kiszámitására a $0<X<1$ esetén megfelelő pontossággal közelitő Csebisev racionális törtfüggvény

$$\left(\frac{C_0+C_1X+\ldots+C_nX^n}{d_0+d_1X+\ldots+d_mX^m}\right)$$

segitségével. Feltesszük, hogy m, n értékét és a c[i] ill. d[i] együtthatókat a gép memóriája tartalmazza. (A feladat megoldásánál a fő probléma az, hogy X nem a tekintett tartományba esik, át kell oda transzformálni, és az eredményt ennek megfelelően vissza kell transzformálni.)

9303. Irjunk fel szubrutint $y=\ln x$ kiszámitására az $\frac{1}{e} < x < 1$ esetén megfelelő pontossággal közelitő Csebisev racionális törtfüggvény

$$\left(\frac{p_o+p_1x+\ldots+p_nx^n}{q_o+q_1x+\ldots+q_nx^n}\right)$$

segitségével! Feltesszük, hogy m, n értékét, és a p[i], q[i] együtthatókat a gép memóriája tartalmazza.
Ha $X<0$, akkor a szubrutint egy a főprogram által meghatározott cimkére ugratjuk rá, tehát a formális paraméterek közé beveszünk egy cimkét is.

9304. Irjunk fel szubrutint $y=\sin x$ kiszámitására a $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén megfelelő pontossággal közelitő Csebisev racionális törtfüggvény

$$\left(\frac{a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_o+b_1x+\ldots+b_mx^m}\right)$$

segitségével. Feltesszük, hogy m, n értékét és az a[i] ill. b[i] együtthatókat a gép memóriája tartalmazza.

9305. Készitsünk programot egyváltozós függvény minimumának a meghatározására. A szélsőértéket a következő algoritmussal kereshetjük:

a) Kiindulunk valamely x_o kezdőértékből és h_o lépéshosszal tabellázzuk a fv-t mindaddig, amig a fv-érték csökken. Ha az i-edik lépés után azt találjuk, hogy a függvény növekedni kezd, akkor forduljunk vissza és ismételjük az algoritmust a lépésköznek pl. 1/10-vel, de ellenkező irányban.

b) a lépésközt addig finomitjuk, amig a kielégitő pontosságot el nem érjük. ($h < \varepsilon$ ahol ε az előre megadott pontosság)

c) A függvényérték számolására a memóriában már elhelyezve képzelt Szubr F (Z"_____"Y) -t használjuk.

d) A szélső érték abcisszáját helyezzük az a ordinátáját az or rekeszbe.

Megjegyzés: A fenti algoritmus nem az optimális módszer, Az x_o kezdőérték sem lehet akármi (fel kell ugyanis tennünk, hogy x_o-tól balra valóban van minimumhely, és addig a fv monoton csökken), valamint a

lépésköz 1/10-re való osztása is önkényes, vannak esetek amikor célszerüen más osztó értéket kell felvenni.

9306. Készitsünk programot a tgx függvény tabellázására. Ehhez használjuk fel a 9034. példában kidolgozott Szubr Sin (X, "___"y)-t. Mivel a függvénynek $\frac{\pi}{2}$ helyen szingularitása van a táblázatot nem célszerü ekvidisztáns lépésekben készíteni. Olyan algoritmust készitsünk, amely automatikusan ugy röviditi a lépéshosszat, hogy két függvényérték különbsége a táblázat bármely két szomszédos helyén kisebb legyen, mint 10^{-3}. A táblázat $\frac{\pi}{4}$-től $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$-ig készüljön. Az abcisszákat helyezzük egy Z vektor elemeibe, az ordinátákat egy Y vektor elemeibe.

B^o Feladatok numerikus módszerek alkalmazására

9307. Irjunk programot Aitken módszerrel történő interpolációra.

Aitken módszer:

Az Aitken módszer Lagrange-féle polinommal közelit meg egy n+1 számu pontban adott értékü függvényt egy tetszőleges Z pontban, mégpedig az alábbi módon: Tegyük fel, hogy a függvénynek az $x_o, x_1 \ldots x_n$ pontokban felvett $f(x_o)=f_o$; $f(x_1)=f_1 \ldots f(x_n)=f_n$ értékei ismertek.

Képezzük a következő sémát:

x_o-x; (f_o);

x_1-x; (f_1); (f_o, f_1);

x_2-x; (f_2); (f_o, f_2); (f_o, f_1, f_2);

. . . . . .

x_n-x; (f_n); (f_o, f_n); $(f_o, f_1, f_n) \ldots (f_o, f_1 \ldots f_n)$

ahol $(f_o, f_1, \ldots f_k)$-val az $x_o, x_1, \ldots x_k$ pontokra támaszkodó interpolációs polinomnak az adott Z pontban felvett értékét jelöltük.

Ezeket az értékeket oszloponként rekurzive számithatjuk ki az alábbi összefüggések alapján.

Az első oszlop k+1-edik elemét az

$(f_k)=f(x_k)$ összefüggés alapján (k=0, 1, 2...n)

a második oszlop k+1-edik elemét az

$$(f_o, f_k) = \frac{(x-x_o)f_k-(x-x_k)f_o}{x_k-x_o} \quad (k=1, 2, \ldots n)$$

összefüggés alapján, általában a j-edik oszlop k+1-edik elemét az

$$(f_o, f_1 \ldots f_{j-2}, f_k) = \frac{(x-x_{j-2})(f_o, f_1 \ldots f_{j-3}, f_k)-(x-x_k)(f_o, f_1 \ldots f_{j-2})}{x_k-x_{j-2}}$$

(k=j-1, j....n) összefüggés alapján kapjuk.

9308. Oldjuk meg az F(x)=0 egyenletet az un. hurmódszerrel (regula falsi). A kezdőértékek a memória X[0], X[1] rekeszében vannak. [Közelitő számitásoknál a kezdőértékeket mindig a programtól függetlenül, a felhasználónak külön uton kell meghatározni. Legfeljebb be lehet épiteni a programba egy vizsgáló részt, amely megvizsgálja, hogy a kezdőértékek használhatók-e, és ha nem valamiféle jelzést ad. Ez utóbbitól jelen feladatainknál eltekintünk] Az F fv értékét Szubr F[X, "——"y] szolgáltatja. A közelitést addig kell folytatni amig $|x_i-x_{i-1}|<\varepsilon$ és $|F(x_{vi})|<\delta$ feltételek együttesen nem teljesülnek, ahol $|F(x_{vi})| = \max(|F(x_i)|, |F(x_{i-1})|)$. Az X[0] és X[1] kezdőértéket ugy választjuk, hogy F(X[0]) < 0 és F(X[1]) > 0 legyen.

9309. Oldjuk meg az F(x) = 0 egyenletet az un. "érintőmódszerrel"(Newton módszer). A kezdőérték a memória X[0] rekeszében van. Az F függvény értékét a Szubr F (X, "——"y) szolgáltatja. A közelitést addig kell folytatni, amig $|x_i-x_{i-1}|<\varepsilon$ és $|F(x_i)|<\delta$ feltételek együttesen nem teljesülnek! Itt szükségünk van még F'(x)-re is, ezt Szubr F' (X, "——"y) szolgáltatja.

9310. Oldjuk meg az x=F(x) egyenletet az un. "iterációs" módszerrel. A kezdőértéka memória x[0] rekeszében van. Az F fv értékét Szubr F(X, "——"y) szolgáltatja. A közelitést addig kell folytatni, amig az $|x_i-x_{i-1}|<\varepsilon$ feltétel nem teljesül.

9311. Készitsünk szubrutint az $I = \int_a^b f(x)dx$ integrál kiszámitására a Simpson formula alapján. A közelitést addig folytatjuk, mig $|I_n-I_{n+1}|<\varepsilon$ nem lesz, ahol I_n az n-edik felosztáshoz tartozó közelités értéke. F(x)-t Szubr F(Z, "——"Y) szolgáltatja.

9312. A Simpson szubrutin segitségével irjunk szubrutint, amely kiszámitja arctg Z értékét. A szubrutin bemenőparamétere legyen ε is, amely meghatározza a számitás pontosságát.

9313. Irjunk fel szubrutint a $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ differenciálegyenlet $y=f(x)$ megoldásának tetszőleges x_v helyen való meghatározására. (A megoldásfüggvény x_v helyen felvett értékét jelöljük y_v-vel.)

A kezdeti feltételek adottak:
$x=x_k$, $y=y_k$. A differenciálegyenletet Runge-Kutta közelitő módszerével integráljuk ki. Az x értékek finomitására először a $h = \frac{x_k - x_v}{2}$ értéket vegyük fel (ilyenkor két iterációs lépésben jutunk el x_v-ig), majd a továbbiakban felezzünk. A h finomitását addig kell végezni, amig az utolsó két finomitásnál kapott eredmény különbsége $< \varepsilon$.
Az F(x, y) függvény értékét Szubr F(Z, Y "____"F) szubrutin szolgáltatja (Z formális paraméter x; Y pedig y értékét tárolja, ε bemenő paraméter).
(A Runge-Kutta módszer részletes leirását lásd pl.: Bjezikovics: Közelitő számitások 304. oldal.)

C^o Vegyes feladatok

9314. Irjunk algoritmust valamely n elemü minta empirikus szórásnégyzetének kiszámitására. Mint ismeretes az empirikus szórásnégyzet a következő képlettel van definiálva:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 .$$

ahol

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Itt $x_1, x_2 \ldots x_n$ jelentik a minta elemeit, melyek feltevésünk szerint a memóriában már tárolva vannak.

9315. Irjunk fel olyan algoritmust, amely komplex számok kétféle (valós és képzetes résszel ill. abszolutérték és fázisszöggel kifejezett) alakjából oda-vissza biztositja az átszámitást, mégpedig oly módon, hogy p nevü formális paramétertől függően számit valós-képzetesből, abszolutérték-fázisszögbe és vissza. Ha p=1 számitson oda, ha p=-1 akkor vissza. A komplex számok adatai és p a memóriában tárolva vannak.

A program felirásához használjuk fel a Szubr Sin (X, "___"y) a Szubr Arctg (X_1"___"y) és a Szubr Gyökvonás (X_1"___"y) szubrutinokat.

A komplex számok kétféle alakját jelöljük igy:

$$a+jb \text{ és } re^{jF} .$$

9316. Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ n elemü vektorok. Készitsünk programot a két vektor elemeiből álló alábbi tipusu szorzatösszegek előállitására.

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} a_j b_{i+1-j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(Abszolut kovergens sorok szorzási szabálya.)
A vektorelemek és n a memóriában tárolva vannak.

9317. Irjunk fel programot $\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}$ kiszámitására, ahol $\underline{\underline{A}}$ $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ n-ed-rendü négyzetesmátrixok, λ pedig skalár. A mátrixelemek sorfolytonosan kerülnek beirásra, a számitás végén adódó $\underline{\underline{C}}$ mátrixot pedig irjuk be $\underline{\underline{B}}$ helyére. Ezután egy $\underline{c}$ vektorba irjuk be az eredmény-mátrix fődiagonálisának elemeit.
A mátrixelemek, λ, és n tárolva vannak a memóriában.

9318. Irjunk fel az $\underline{\underline{A}}=a_{ij}$ [i=1, 2, ...m, j:=1, 2,...n) és a $\underline{\underline{B}}=(b_{ij})$ (j=1, 2, ...k) mátrixok szorzatát képző algoritmust. Feltesszük, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrix a_{ij} eleme az a[r], $\underline{\underline{B}}$ mátrix b_{ij} eleme a b[s] rekeszben már tárolva van, mégpedig mindkét mátrix elemeit sorfolytonosan tároltuk, és ugyancsak sorfolytonosan tároljuk a $\underline{\underline{C}}$ mátrix elemeit a c(t) rekeszsorban. Ezek alapján fennállnak a következő összefüggések:

$$r=n(i-1)+j$$
$$s=k(i-1)+j$$
$$t=k(i-1)+j$$

A memóriában vannak már azonkivül: m, n, k értékei is.

9319. Legyen $\underline{\underline{A}}$ egy nxn-es mátrix (n páratlan). Irjunk programot, amely az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeibe elhelyezi az 1, 2, ...n^2 természetes számokat az alábbi algoritmus szerint:

1. Az 1-es szám az első sor középső elemébe kerül
2. Ha k az a_{jk}-ba került, k+1 az $a_{j-1,k+1}$-be kerül, kivéve az alábbi eseteket:

a) ha felülről kilépnénk a mátrixból (0. sor); ilyenkor: az oszlop a szabály szerint következő, de lemegyünk az n-edik sorba;

b) ha jobbra kilépnénk a mátrixból (n+1. oszlop); ilyenkor: a sor a szabály szerint következő, de átmegyünk az első oszlopba;

c) ha a soron következő elem foglalt, akkor az oszlop marad a régi, de egy sorral lejjebb megyünk;

d) ha a jobb felső sarokelemből kell továbbmenni, ilyenkor: maradunk a külső oszlopban de egy sorral lejjebb megyünk.

Ez az algoritmus az un. "bűvös négyzetet" (bármely sor, oszlop vagy átló elemeinek összege állandó) állítja elő.
Az A mátrixba természetesen sorfolytonosan helyezzük el az elemeket.
A bűvös négyzet pl. n=5-re így néz ki:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

9320. Írjunk fel n számot monoton növekedő sorrendben elhelyező algoritmust. (A számok egy n elemű vektor a[i] elemei, és átrendezés után is ugyanezekbe a rekeszekbe irandók vissza, természetesen most már a megfelelő sorrendben.)

9321. Írjunk szubrutint, amely két pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját megkeresi az euklidesi algoritmus alapján!
Ez az algoritmus a következő:

Elosztjuk b_o-t b_1-gyel, és kapunk valamely b_2 maradékot:

$$b_o=h_1b_1+b_2 \qquad \text{ahol} \qquad b_2< b_1$$

Megismételjük most ezt b_1-gyel és b_2-vel:

$$b_1=h_2b_2+b_3$$

$$\vdots$$

$$b_{i-1} = h_ib_i + b_{i+1}$$

Tekintve, hogy b_1, b_2, b_3.... és a b számok pozitiv egészek, a fenti sorozat véges sok lépésben 0-ra csökken. Ha $b_{n+1}=0$ de $b_n \neq 0$, akkor b_n lesz b_o és b_1 legnagyobb közös osztója. Az algoritmus felirásához használjuk fel a Szubr Egész (X, "___"y) szubrutint, melynek X egész részét képzi, tehát: y=[X] (entier X)

94. PROGRAMOK ELLIOT AUTOKÓDBAN

9401. Keressük meg az alábbi programban L(6) értékét.

```
SETS IJKLMN
1. N = 1
   J = 15
   K = 2
   M = 0
   CYCLE I=N:1:I
   M(I)=K+M(I-1)
   L(K)=K+I
   L(K)=L(K)+M(I)
   K=K+1
   REPEAT I
   STOP
   START 1
```

9402. Adott a, b paraméterértékek mellett számitsuk ki és nyomtassuk ki az

$$F(x,y,b) = \frac{\sqrt{x+b} \cdot \ln\left(x^2 - \frac{a}{4}\right)}{\left(\sqrt{x-0,626}\right)^3} \quad \text{függvény}$$

értékeit az $x_o \leq x \leq x_v$ intervallumban adott Δx lépésközzel. x_o, x_v, Δx, a, b adatszalagon vannak.

9403. Tabellázzuk az $y = \frac{\sin x}{x} + x$ függvény értékeit

$\Delta x=0,01$ lépésközzel ha $-1 \leq x \leq 1$ és

$\Delta x=0,1$ lépésközzel ha $1 < x \leq 10$

9404. Készitsünk programot az

$$f(x,y,a,b)=\begin{cases} \dfrac{ax^2+\ln y-0,5\ bxy}{a^2y-\sin x} & \text{ha} \quad x>y \\[2ex] \dfrac{x^2+y^2}{a+bx} & \text{ha} \quad x\leqslant y \end{cases}$$

függvény tabellázására $x_1, x_2, \ldots x_n$ ill. $y_1, y_2 \ldots y_n$ értékekkel. (Ezek adatszalagon vannak.)

9405. Irjunk programot a következő szumma kiszámitására:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2-2}{(i+2)!}$$

n, a_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ adatszalagon vannak.

9406. Irjunk fel programot a következő kettős szumma kiszámitására:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2+1}{a_j^2-1} \, |(i-j)|$$

n, a_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ adatszalagon vannak.

9407. Irjunk fel programot 1600 komplex számnak a+jb alakból Re^{jF} alakra való átszámolására. Az 1600 komplex szám adatszalagon van, egyenként hivjuk be őket.

(Megjegyzés: Az Elliot ARCTAN függvénymüvelete $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között adja a szögek $\frac{1}{\pi}$ - szeresét - tehát értéke $-\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}$ közé esik - tehát gondoskodni kell szükség esetén megfelelő transzformációról.)

9408. Irjunk programot a következő komplex hatványozás kiszámitására.

$$(x+jy)^n = V+jk$$

n, x és y értéke adatszalagon van.

9409. Készitsünk olyan programot, amely egy n-edrendü $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix minden elemét elosztja a legnagyobb elemmel. A mátrix elemeit sorfolytonosan helyezzük el a memóriában.

9410. Irjunk programot $\underline{\underline{A}}$ tetszőleges dimenzióju mátrix minimax elemének a meghatározására. A mátrixelemek sorfolytonosan vannak elhelyezve.
Utmutatás:
Minimax elem: az egyes sorok minimumainak a maximuma.

9411. Irjunk fel programot, amely adott n elemet átrendez nagyság szerinti sorrendbe (növekedően). Az n darab szám és n értéke adatszalagon van.

9412. Irjunk fel $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ $(i = 1, 2 \ldots m,\ j=1, 2, \ldots n)$ és a $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ $(j= 1, 2, \ldots k)$ mátrixok szorzatát képező programot.
m, n, k és a mátrixelemek (sorfolytonosan) adatszalagon vannak.
Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeit az A(R) rekeszsorba, $\underline{\underline{B}}$ mátrix elemeit a B(S) rekeszsorba hivjuk be, és a $\underline{\underline{C}}$ eredménymátrix c_{ij} elemeit pedig a C(T) fekeszsorban tároljuk.
Ily módon fennállnak a következő összefüggések

$$R=n(i-1)+j$$
$$S=k(i-1)+j$$
$$T=k(i-1)+j$$

9413. Legyen

$$F(x)=x+e^{x}$$

Irjunk fel programot az $F(x) = 0$ egyenlet Newton módszer szerinti megoldására.
(Az iterálás kezdő értékét számitással határozzuk meg!)
Az iterálást befejezését két feltételhez kötjük. Ha x_i az utolsó közelités, akkor teljesülni kell, hogy $|F(x_i)|<\varepsilon>0$, illetve $|x_{i-1}-x_i|<\delta>0$ ahol ε és δ előre megadott hibaküszöbök és adatszalagon vannak.

95. ALGOL 60

A. Metanyelvi definiciók

9501. Adjunk szintaktikus definiciót a jelsorozatok olyan osztályára, melybe a következő tipusok tartoznak:
a) tetszés szerinti számu kezdőzárójel ((((....
b) tetszés szerinti kezdőzárójel után akárhány betü
c) tetszés szerinti számu kezdőzárójel, utána tetszés szerinti számu betü és ismét tetszés szerinti számu kezdőzárójel.

(A "tetszés szerinti" számot ugy értjük, hogy lehet 0 is.)

9502. Legyenek a betűk és a számjegyek ismert szintaktikus egységek. Tekintsük a következő szintaktikus definiciósorozatot:

< A > : : = < számjegy > < betű >

< B > : : = < betű > | < B > < A >

< C > : : = < B > | < számjegy > < B > | < B > < számjegy >

Milyen jelsorozatok tartoznak a < C > szintaktikus egységbe?

9503. Adott a következő definiciórendszer (számjegy és betű ismert szintaktikus egységek)

< A > : : = < számjegy > | < A > < számjegy > [< C >]

< B > : : = < betű > | < B > | < betű >

< C > : : = < B > | < A > | < A > < B >

Melyik kategóriába tartoznak a következő jelsorozatok. (Ha egy jelsorozat < A > -ba és < C > -be is tartozik < A > -t adjuk meg válaszként):

a) [4281 ADXGI]
b) 3696 BKL
c) [[398 MIG] 1028 K]
d) [KGST] 130 SK
e) [130] KCBY
f) [[[12 JUL] GY] 19 U]

9504. Adjunk szintaktikus (metanyelvi) definiciót az Algol nyelvbeli azonosító fogalmára.

B^0 Algol kifejezések

9505. Válasszuk ki a következő számok közül azokat, amelyek szintaktikusan hibásak, valamint azokat amelyek szintaktikusan helyesek, de Algol értelemben nem számok.

$1/2$; 2^5; 10^5; $0.1_{10}6$ $.2_{10}12$ $.-2_{10}+12$

$3,48$; $2x10^5$; $2.2_{10}4_{10}2$; -6.2857;

9987^2; $5.36_{10}-5$ $-._{10}2.$ $3.66x10\uparrow 2$

9506. Irjuk át korrekt Algol-kifejezéssé a következő aritmetikai kifejezéseket:

a) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{24} - \frac{x^8}{120}$

b) $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

c) $\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \phi + r^2}}$

d) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$

e) a^{n+m}

f) a^{b^n}

g) a^{b+s^n}

h) $\frac{p^q}{j^{S+t}}$

Megjegyzés: x helyett irjunk X-t, hogy ne tévesszük össze a szorzás jellel.

9507. Irjuk át szokásos matematikai szimbólumokkal a következő Algol kifejezéseket.

a) X↑2+y↑2+1

b) exp(X)/2xixcos(X)

c) ln(1+X)/sqrt(1-k↑2xsin(pszi↑2)

Megjegyzés: Azért irtunk X-t (x helyett), hogy ne tévesszük össze a "szorzás-jellel" (x)

9508. Legyenek a következő feladatokban szereplő változók aktuális értékei az alábbiak:

Valós változók:	Logikai változók	
p=4.0	a=true	c=false
q=2.0	b=true	d=false
r=2.0		
S=1.0		

Számitsuk ki a következő logikai kifejezések aktuális értékeit:

a) $(A \equiv b \vee c \equiv d) \supset p < q$
b) $(a \vee b) \wedge d \vee p \uparrow 2 + q \uparrow 2 = 0$
c) $(p+q)/(r+s) \geqslant 0 \supset a \wedge b \equiv \neg c$

9509. Legyenek a következő feladatokban szereplő változók aktuális értékei a következők:

Valós változók	Logikai változók	
p=4.0	a=true	c=false
q=2.0	b=true	d=false
r=2.0		
s=1.0		

Számitsuk ki az alábbi feltételes kifejezések aktuális értékeit.

a) if p=0 then a > b else $(a \vee b) \wedge (c \vee d)$

b) if if if a then b else c then $a \vee b$ else $a \supset b$
then $a \vee c \wedge d \supset a \wedge c$ else $r \uparrow 2 = q \uparrow 2$

c) if $p=0 \wedge q=0$ then sin (3.141593x r/2)
else cos (3.141593xr/6)

d) if if $d \equiv b$ then d else $a \wedge \neg c$ then $p \uparrow 3 - q \uparrow 3 - 16$
else 1.2-p

9510. Irjunk értékadó utasitást, amely 0-t, 1-et, 2-t illetve 3-t ir az M változóba aszerint, hogy a, b, c változók aktuális értékei között hány negativ szám van. (Feltesszük, hogy a számok közül egyik sem 0.)

C^0 Deklarációk

9511. Irjunk blokkfejet a következő változók deklarálására:

Valós tipusu	Egész tipusu	Logikai tipusu
a; x; b; z;	p; q; r;	η, ρ, ψ;

9512. Tekintsük a következő négy egymásba skatulyázott blokkból álló Algol program blokkfejeit (a hozzájuk tartozó programrész helyét kipontozzuk).

```
B1: begin real A, B, J, K
    integer SC, J6, i, p;
    Boolean gamma;
    . . . . . . . . . . . . (program)

B2: begin Boolean J6, B, alfa;
          integer j, k;
          real A;
    . . . . . . . . . . . . (program)
```

```
B3: begin real alfa, beta;
        integer m, n;
        Boolean gamma;
    . . . . . . . . . . . (program)

B4: begin integer p, q, r;
    . . . . . . . . . . . (program)
            end
        end
    end
end
```

Állapitsuk meg az egyes változók tipusát és határkörét az egyes blokkokban. Megállapitásainkat a következő tipusu táblázatba foglaljuk össze.

	B1	B2	B3	B4
A	valós lokális	valós lokális	valós globális	valós globális
B	valós lokális	logikai lokális	logikai globális	logikai globális
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

9513. Helyes-e szintaktikusan a következő blokkfej:

```
begin real a, b;
integer i, j, k;
array A[1+a:1+b];
```

9514. Tekintsük a következő Algol programrészletet:

```
begin integer i, j, k;
      switch A:=A1, A2, B[i+j-k], B[k];
      switch B:=B1, B2, A3, A4, A[j-i], A[k-i];
      i:=0, k:=2; j:=k+i+1;
V:go to B[5];
      . . . . . . . . . . . . . . . . . .(program)

end
```

Melyik cimkére adja át a vezérlést a V cimkéjü utasitás?

9515. Legyen adva egy logikai vektor, amelynek elemei B[1], B[2], B[3]. E változók mindegyike lehet true vagy false értékü. A három változó összesen nyolcféle logikai kombinációt állit elő. Legyenek S1, S2 és S3 a program különböző cimkéi, és tegyük fel, hogy a vezérlést egy bizonyos helyen vagy S1-re vagy S2-re, vagy S3-ra kell adni, méghozzá pedig a következők szerint:

B[1]	B[2]	B[3]	cimke
true	false	false	S1
true	true	false	S1
false	false	true	S1
false	true	false	S2
false	true	true	S2
true	true	true	S2
false	false	false	S3
true	false	true	S3

Irjunk fel olyan vezérlésátadó utasitást, amely minél egyszerübben elvégezteti a kivánt elágaztatást.

D^o Algol programok

9516. Készitsünk Algol-programot a következő kifejezés kiszámitására!

$$F = \frac{b+\sqrt{1-x^2}+3x}{(1-x^2)(b+3x)\sqrt{1+x}}$$

(A programot önálló blokként készitsük el, a blokkra nézve x legyen globális, F és b pedig lokális.)

9517. Készitsünk Algol programot az

$$y' = x^2+y^2; \quad y(o)=1$$

differenciálegyenlet x=1 helyen való meghatározására.
A következő iterációs módszert alkalmazzuk:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k\ y_k)$$

ahol h a lépésköz, ezt adottnak vesszük, és feltesszük, hogy egy egész szám reciproka, f pedig a jobb oldali függvény.

9518. Legyenek A és B négyzetes kétméretü tömbök. Készitsünk Algol programot e két tömb szorzására a mátrixszorzás ismert algoritmusa alapján.
A programozandó képlet a következő:

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{jk} \quad (i,\ k=1,\ 2.....n)$$

ahol n az A, B, C négyzetes mátrixok rendszáma.

9519. Adott négy golyó, A, B, C, D ebből három egyenlő egy eltérő sulyu. Meghatározandó két mérésből, hogy melyik az eltérő sulyu. Irjunk fel Algol programot a feladat megoldására oly módon, hogy egy M változóba 1, 2, 3, 4-et irunk aszerint, hogy A, B, C, D eltérő sulyu. (A B C D globálisak, M és a segédváltozók lokálisak legyenek.)

Utmutatás:

A, B, C, D-t tekintsük logikai változóknak, melyek értéke true ha a golyó helyes, és false ha eltérő sulyu. Természetesen ezeket az értékeket nem ismerjük, a program feladata éppen az, hogy kianalizálja őket. A két mérés azt jelenti, hogy két logikai döntést végezhetünk.

9520. Minden program, ami a step-until ciklussal leirható, leirható while-ciklussal is. Irjuk le például két vektor skalárszorzatát while ciklussal.

9521. Készitsünk Algol-programot a következő szakaszonként változó függvény kiszámitására.

$$F(u,\ t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } u < -\dfrac{d}{2\omega R} \\ u + \dfrac{u^2}{2s} + G_1 & \text{ha } -\dfrac{d}{2\omega R} \leqslant u < -\dfrac{2Rt}{k} \\ u - \dfrac{ka}{3t}\left(u - \dfrac{bt}{k}\right)^3 + G_2 & \text{ha } -\dfrac{2Rt}{k} \leqslant u < 0 \\ u - \dfrac{ka}{3t}\left(u + \dfrac{bt}{k}\right)^3 + G_3 & \text{ha } 0 \leqslant u \leqslant \dfrac{2Rt}{k} \\ u - \dfrac{u^2}{2s} + G_4 & \text{ha } \dfrac{2Rt}{k} \leqslant u \leqslant \dfrac{d}{2\omega R} \\ G_5 & \text{ha } u \geqslant \dfrac{d}{2\omega R} \end{cases}$$

A szereplő $G_1 \ldots\ldots G_5$ mennyiségek a következők:

$$G_1 = G_3 = \frac{d}{4\omega R}$$

$$G_2 = G_4 = \frac{d}{4\omega R} - \frac{4}{3}\,\frac{R^3\omega}{d}\left(\frac{t}{k}\right)^2$$

$$G_5 = \frac{d}{2\omega R} - \frac{4}{3}\,\frac{R^3\omega}{d}\left(\frac{t}{k}\right)^2$$

A d, ω, R, t, k és u változók legyenek globálisak, az eredményt helyezzük el a globális F változóba.)

9522. Készitsünk programot az

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

integrál kiszámitására Simpson formula alapján! Az integrálás lépésköze adott: Δx globális változó I értéke is globális.

E^o Eljárások

9523. Irjunk eljárásdeklarációt n-ed foku polinom értékét kiszámitó Horner algoritmusra. n értékét érték szerint vegye át az eljárás. Irjuk fel, hogyan aktivizálnánk az eljárást, például $\eta = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^4$ polinom értékének a kiszámitására (η, α, ξ, már előzőleg deklarált változók ill. tömbök).

9524. Készitsünk eljárásdeklarációt másodfoku egyenlet kiszámitására. Az a, b, c együtthatókat érték szerint vegyük át.

9525. Deklaráljunk eljárást n-edrendü négyzetes mátrix transzponálására. n-t érték szerint adjuk át.

9526. Deklaráljunk függvényeljárást egyszeri szummák kiszámitására, és mutassunk példákat aktivizálásukra.

9527. Deklaráljunk függvényeljárst n! kiszámitására.

9528. Irjunk függvényeljárást valamely n-elemü minta empirikus szórás-négyzetének képzésére a következő képletek alapján:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Itt $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ jelentik a minta elemeit.

9529. Irjunk eljárásdeklarációt, amely komplex számok kétféle (algebrai és trigonometrikus) alakjából oda-vissza biztositja az átszámitást, mégpedig olyan módon, hogy egy p nevü formális paraméterből függően algebraiból trigonometrikusba és viszont. p-t adjuk át érték szerint.