

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Pach Zs. Pálné

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN



Műegyetemi Kiadó, 2002.

(Nyolcadik utánnymás)

Azonosító: **050901**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Hajdu István

Terjedelem: 30,8 (A/5) ív

Nyomta és kötötte:

Műegyetemi Nyomda

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 233/02

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	9
Első fejezet	
KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN ELŐKÉSZÍTÉSE	
1. § Komplex számok és számhalmazok	11
1.1. Komplex számok végtelennel való kibővítése.....	11
1.2. Komplex számsík és komplex számgömb	11
1.3. Metrika a komplex síkon és gömbön	15
1.4. Komplex számhalmazok.....	17
1.5. Kidolgozott feladatok	18
2. § Komplex számsorozatok és sorok.....	20
2.1. Komplex elemű számsorozatok	20
2.2. Komplex tagu számsorok	23
2.3. Kidolgozott feladatok	24
3. § Görbék és tartományok a komplex síkon	27
3.1. Síkgörbék és tartományok értelmezése, komplex alakú megadása.....	27
3.2. Egyenesek, félsíkok, szögterek.....	31
3.3. Körök, kör-belső, kör-külső.....	33
3.4. Kidolgozott feladatok	35
Második fejezet	
KOMPLEX VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK	
1. § Komplex függvények és körükben értelmezett műveletek.....	39
1.1. Komplex függvények és relációk.....	39
1.2. Algebrai műveletek komplex függvényekkel. Összetett függ- vény, inverz függvény	42
1.3. Kidolgozott feladatok.....	44
2. § Komplex függvények határértéke	49
2.1. Határérték a végesben és a végtelenben.....	49
2.2. Algebrai műveletek és határértékképzés. Összetett függvény határértéke	50

2.3. Kidolgozott feladatok.....	53
3. § Komplex függvények folytonossága	55
3.1. Folytonosság, egyenletes folytonosság.....	55
3.2. Folytonos komplex függvényekre vonatkozó néhány tétel	58
3.3. Algebrai műveletek folytonos komplex függvényekkel. Összetett függvény és inverz függvény folytonossága.....	59
3.4. Kidolgozott feladatok.....	59

Harmadik fejezet

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁL SZÁMÍTÁSA

1. § Komplex függvények differenciálhatósága	63
1.1. Pontbeli differenciálhatóság. Differenciál.....	63
1.2. Halmazbeli differenciálhatóság. Deriváltfüggvény.....	66
1.3. Differenciálhatóság néhány feltétele	66
1.4. Differenciálási szabályok. Összetett és inverz függvény differenciálása	70
1.5. Magasabbrendű deriváltak. L'Hospital-tétel	72
1.6. Kidolgozott feladatok	74
2. § Komplex függvények regularitása	78
2.1. Pontbeli és halmazbeli regularitás.....	78
2.2. Reguláris komplex függvény és harmonikus valós függvény kapcsolata. Harmonikus társfüggvény	78
2.3. Reguláris komplex függvény és vektorfüggvény kapcsolata. Komplex potenciál.....	82
2.4. Kidolgozott feladatok.....	86

Negyedik fejezet

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK ÁLTAL LÉTESÍTETT LEKÉPEZÉSEK. ELEMİ FÜGGVÉNYEK

1. § Kölcsonösen egyértelmű leképezések.....	96
1.1. Síma görbék és azok komplex függvényvel történő kölcsönösen egyértelmű leképezése	96
1.2. Komplex függvények és relációk által létesített kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezések. Riemann-levelek.....	98
1.3. Kidolgozott feladatok	101
2. § Konform leképezések	106
2.1. Lokális konformitás	106
2.2. Tartományok konform leképezése	109
2.3. Kidolgozott feladatok.....	112
3. § Lineáris leképezések	116
3.1. Lineáris egész függvény leképezése.....	116

3.2.	Reciprok függvény leképezése.....	118
3.3.	Általános lineáris törtfüggvény leképezése.....	123
3.4.	Lineáris törtfüggvény által létesített néhány speciális leképezés	130
3.5.	Kidolgozott feladatok.....	135
4. §	Elemi függvények és leképezésük.....	142
4.1.	Hatványfüggvény.....	142
4.2.	Gyökfüggvény	144
4.3.	Exponenciális függvény.....	147
4.4.	Logaritmus függvény.....	153
4.5.	Trigonometrikus függvények.....	157
4.6.	Arcus-függvények.....	167
4.7.	Hiperbolikus függvények.....	170
4.8.	Area-függvények	171
4.9.	Általános hatványfüggvény.....	173
4.10.	Kidolgozott feladatok.....	177

Ötödik fejezet

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

1. §	Komplex vonalintegrálok.....	184
1.1.	Vonalintegrál (határozott integrál) értelmezése	184
1.2.	Vonalintegrál kiszámítása.....	185
1.3.	Vonalintegrál néhány tulajdonsága.....	188
1.4.	Az integrálszámítás alaptétele: Cauchy-integrál-tétel.....	189
1.5.	Cauchy-integrál-tétel néhány következménye.....	192
1.6.	Integrálfüggvény, primitív függvény, határozatlan integrál... ..	196
1.7.	$(z-a)$ hatványainak integrálása.....	203
1.8.	Kidolgozott feladatok.....	205
2. §	Reguláris komplex függvények integráleiállításai.....	211
2.1.	Cauchy-integrál-formula	211
2.2.	Magasabbrendű deriváltak létezése és integrál-előállítás. Általánosított Cauchy-integrál-formula	214
2.3.	Cauchy-integrál-formula néhány következménye: a) Cauchy-egyenlőtlenségek (Deriváltak abszolútértékének becslése)	218
	b) Liouville-tétel (Mindenütt reguláris függvény egy tulajdonsága).....	219
	c) Gauss-féle középpértéktétel.....	220
	d) Maximum-minimum tétel.....	221
2.4.	Kidolgozott feladatok	223

Hatodik fejezet

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK SORA

	227
1. § Komplex tagu függvénysorok.....	228
1.1. Általános komplex függvénysorok	228
1.2. Komplex tagu hatványsorok.....	233
1.3. Kidolgozott feladatok.....	241
2. § Komplex függvények hatványsoros előállítása	246
2.1. Taylor-sor. Körtartományon reguláris komplex függvény hatványsoros előállítása.....	246
2.2. Laurent-sor. Gyűrűtartományon reguláris komplex függvény hatványsoros előállítása.....	255
2.3. Laurent sor és Fourier-sor kapcsolata	261
2.4. Kidolgozott feladatok.....	263
3. § Analitikus komplex függvények és azok néhány tulajdonsága.....	270
3.1. Analitikusság-regularitás.....	270
3.2. Analitikus függvények azonossága.....	271
3.3. Analitikus folytatás	276
3.4. Analitikus függvények zérushelyei	280
3.5. Analitikus függvények izolált szinguláris helyei a végesben..	284
3.6. Analitikus függvények izolált szinguláris helyei a végtelen- ben.....	294
3.7. Kidolgozott feladatok.....	296

Hetedik fejezet

RESIDUUM-ELMÉLET ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

	303
1. § Analitikus függvények izolált szinguláris pontbeli residuuma.....	304
1.1. A residuum értelmezése.....	304
1.2. A residuum meghatározásának néhány módja	305
1.3. Residuum tétel. Komplex integrálok meghatározása residuummal.....	308
1.4. Kidolgozott feladatok.....	310
2. § Valós integrálok kiszámítása residuum-tétellel	314
2.1. $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$ típusu integrálok kiszámítása.....	314
2.2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ típusu integrálok kiszámítása.....	315
2.3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{+j\alpha x} dx$ típusu integrálok kiszámítása. Jordan-lemma.....	320

2.4.1	$\int_{\gamma} R(x) \cdot f(x) dx$ típusú integrálok kiszámítása, ha az integrálandó függvény analitikus folytatása többértékű reláció	323
2.5.	Kidolgozott feladatok	325
3. §	A residuum-elmélet alkalmazása zérushelyek és pólusok vizsgálatára	334
3.1.	Zérushelyek és pólusok rendjének meghatározása. Logaritmikus residuum	334
3.2.	Zérushelyek és pólusok számának meghatározása	
	$\int \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ típusú integrálokkal	336
3.3.	Zérushelyek és pólusok számának meghatározása a függvény argumentum-változása alapján. Argumentum-elv	339
3.4.	Zérushelyek és pólushelyek vizsgálata. Rouché-tétel	341
3.5.	Kidolgozott feladatok	344

BEVEZETÉS

A komplex függvénytan tárgya olyan függvények vizsgálata, amelyeknek értékészlete és értelmezési tartománya egyaránt a komplex számok egy-egy részhalmaza. Ez az alábbi függvénytípusokat jelenti:

- a) valós változóju komplex értékű függvényt: $z = f(t)$;
- b) komplex változóju valós értékű függvényt: $t = f(z)$;
- c) komplex változóju komplex értékű függvényt: $w = f(z)$;

ahol t valós, z és w komplex értékű változó.

E függvények vizsgálatához, alapvető tulajdonságaik ismertetéséhez szükség van a komplex számok és számhalmazok alapvető tulajdonságainak; a komplex számsorozatok és sorok alapfogalmainak; síkgörbék és tartományok komplex algebrai, ill. függvénytani eszközökkel történő megadásának ismeretére. Ezért először ezeket a témaköröket ismertetjük, röviden összefoglalva azokat a legfontosabb fogalmakat és tételeket, amelyek az elemi komplex függvénytanban felhasználásra kerülnek.

A jegyzetben ismertnek tételezzük fel és felhasználjuk: a valós számok és számhalmazok fontosabb tulajdonságainak; a valós analízis (határérték-, differenciál-, integrál-számítás) alapelemeinek; az analitikus geometria alapfogalmainak; valamint a komplex számok algebrájának ismeretét.

Első fejezet
KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN ELŐKÉSZÍTÉSE

1. § KOMPLEX SZÁMOK ÉS SZÁMHALMAZOK

1.1. KOMPLEX SZÁMOK VÉGTELENNEL VALÓ KIBŐVÍTÉSE

A következőkben feltételezzük a komplex számok műveleteinek, műveleti tulajdonságainak, valamint annak ismeretét, hogy a komplex számok a körükben értelmezett összeadásra és skalár szorzásra nézve algebrai értelemben testet alkotnak. Az alábbiakban ezt a komplex számtestet bővítjük ki a $z = \infty$ szimbólummal jelölt végtelennel és erre is kiterjesztjük a műveleteket és műveleti szabályokat.

A kiterjesztést úgy végezzük, hogy tetszőleges z komplex számra fennálljanak a

- (1) $z + \infty = \infty + z = \infty$
- (2) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ ($z \neq 0$)
- (3) $\frac{z}{\infty} = 0$ ($z \neq \infty$)
- (4) $\frac{\infty}{z} = \infty$ ($z \neq \infty$)
- (5) $\frac{z}{0} = \infty$ ($z \neq 0$)

összefüggések.

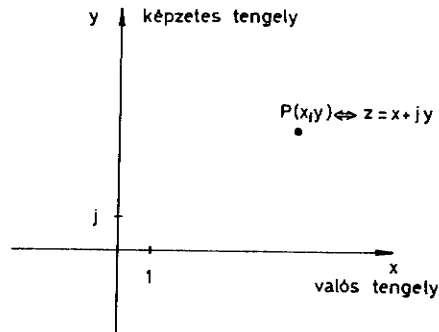
Az (1)-(5) tulajdonságu, un. "ideális végtelen" ismerete szükséges többek között a függvényvizsgálatnál, amikor komplex függvényeket "nagy" z értékek esetén vizsgálunk (olyan z értékek esetén, amelyekre $|z|$ értéke nagy). Ez természetesen maga után vonja a végesben értelmezett fogalmak egész sorának a ∞ -re való kiterjesztését (pl. $z = \infty$ környezete; sűrűsödési érték a ∞ -ben; szingularitás a ∞ -ben stb.). E fogalmak jobb megértését segíti elő a $z = \infty$ szimbólum geometriai interpretációja, szemléltetése, amelyet az 1.2. fejezetben ismertetünk.

1.2. KOMPLEX SZÁMSÍK ÉS KOMPLEX SZÁMGÖMB

A véges komplex számok - a Z komplex számtest elemei - kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egy sík (az un. komplex számsík) pontjainak, míg a $z = \infty$ -nel kibővített komplex számok - a $Z \cup \{\infty\} = Z^\infty$ számtest elemei -, egy gömb (az un. Riemann-féle komplex számgömb) pontjainak. A megfeleltetés módját az alábbiakban ismertetjük.

Komplex számsík

(a továbbiakban röviden "komplex sík")



1. ábra
Komplex sík

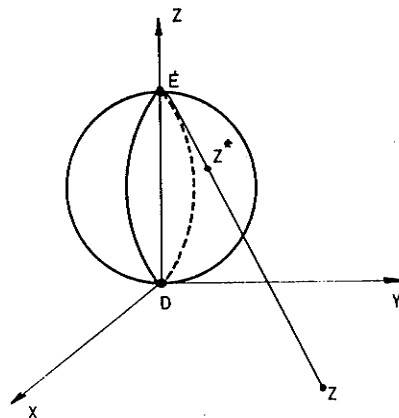
amelynek valós része x , képzetes része y . Tehát minden (x, y) valós számpár esetén

$$P(x, y) \iff z = x + jy$$

(ld. 1. ábra).

Riemann-féle komplex számgömb

(a továbbiakban röviden "Riemann-gömb")



2. ábra
Riemann-gömb

kétdimenziós euklideszi tér, amelynek pontjai és a véges abszolútértékű komplex számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn.

A megfeleltetés úgy jön létre, hogy a síkban Descartes-féle koordináta-rendszert rögzítünk, amelynek egyik tengelye a valós tengely, másik tengelye a képzetes tengely és ebben a rendszerben a sík minden (x, y) koordinátájú P pontjának kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük azt a z komplex számot,

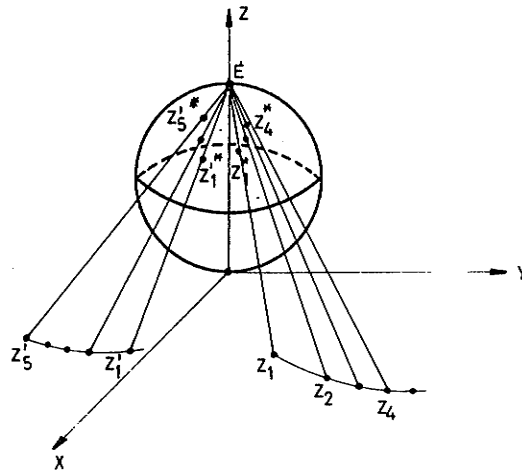
a komplex síkot az origóban érintő gömb, amelynek pontjai és a $z = \infty$ - nel kibővített komplex számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn.

Ez a megfeleltetés - közvetett módon - a komplex síknak, e síkot az origóban érintő gömbre való sztereografikus leképezésével hozható létre. Ez a leképezés abban áll, hogy a gömb D (déli pólus) érintkezési pontjával átellenes E (északi pólus) pontjából félegyeneseket húzunk és kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük egymásnak e félegyenesek által a síkból kimetszett z és a gömbből kimetszett z^* pontokat (ld. 2. ábra). Ezzel

$$z = 0 \iff D,$$

$$z = \infty \iff \dot{E}.$$

Ez utóbbi annak a következménye, hogy a sztereografikus leképezés mindkét irányban folytonos: ha $z_n \rightarrow z_0$ a síkon, akkor a megfelelő $z_n^* \rightarrow z_0^*$ a gömbön és megfordítva. Ez $z_0 \neq \infty$ esetén nyilvánvaló, $z_0 = \infty$ esetén pedig a $z_n \rightarrow \infty$ konvergenciát éppen a gömbi képpontok alapján értelmezzük. Azaz: $z_n \rightarrow \infty$ azt jelenti, hogy $|z_n| \rightarrow \infty$, vagyis ha $|z| \rightarrow \infty$ a síkon, akkor képe a gömbön $\rightarrow \dot{E}$ (ld. 3. ábra).



$$z_n \rightarrow \infty \Rightarrow z_n^* \rightarrow \dot{E}$$

3. ábra

Az ideális végtelen ponttal lezárt komplex sík (az un. függvényteni sík, amelyet a későbbiekben "teljes" vagy "zárt" komplex síknak is nevezünk) és a komplex számgömb fenti módon vázolt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése révén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a $z = \infty$ -nel kibővített komplex számok és a komplex számgömb pontjai közt is.

A gyakorlati problémák megoldásánál szükség van a gömbi pontok koordinátáinak a "megfelelő" komplex szám valós és képzetes részével (ill. magával a komplex számmal) való kifejezésére. Ez az alábbi módon történhet:

A sík-, ill. térbeli Descartes-koordináták bevezetésével a $z = x + jy$ komplex számnak megfelel a síkon egy (x, y) koordinátájú P , a Riemann-

-gömbön egy ξ, η, ζ koordinátájú P^* pont. Ha a gömb középpontja $(0, 0, \frac{1}{2})$ és sugara $\frac{1}{2}$, akkor a ξ, η, ζ koordináták kielégítik a gömb egyenletét, vagyis eleget tesznek a

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ azaz a } \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta)$$

összefüggésnek. Mivel a sztereografikus leképezés értelmében a $(0, 0, 1)$, a (ξ, η, ζ) és az $(x, y, 0)$ pontok egy egyenesen vannak, ezért koordinátáik kielégítik a

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}$$

összefüggést. Ebből

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}; \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}; \quad z = \frac{\xi + j\eta}{1-\zeta}.$$

Ennek, valamint a gömb egyenletének felhasználásával az inverz összefüggések:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}; \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}; \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1},$$

ill. z -vel és $\bar{z} = x - jy$ -nal kifejezve:

$$\xi = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}; \quad \eta = \frac{j}{2} \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1}; \quad \zeta = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}.$$

Igy tetszőleges z komplex számra:

$$z = x + jy \Leftrightarrow P(x, y) \Leftrightarrow P^*(\xi, \eta, \zeta) = P^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

A későbbiekben, amennyiben vizsgálatunkban a $z = \infty$ is szerepel, megfontolásainkat a komplex számgömbön, egyéb esetben pedig a komplex számsíkon végezzük.

1.3. METRIKA A KOMPLEX SÍKON ÉS GÖMBÖN

A komplex függvények analízisbeli alapfogalmainak tárgyalásához szükséges a komplex számsík, ill. számgömb metrikájának komplex algebrai megfogalmazása.

A komplex sík metrikája megadható a $Z \times Z$ halmazon értelmezett azon d valós értékű függvénnyel, amely tetszőleges $z_1, z_2 \in Z$ -re eleget tesz a

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$$

összefüggésnek. Az így értelmezett d valóban metrika, mert teljesíti a metrikát jellemző:

- (1) $d(z_1, z_2) \geq 0$
- (2) $d(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$
- (3) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
- (4) $d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3)$

tulajdonságokat.

A komplex számgömb metrikájának értelmezéséhez definiáljuk a

$$g : Z^\infty \longrightarrow S$$

leképezést (ahol S a $(0, 0, \frac{1}{2})$ középpontu $\frac{1}{2}$ sugaru Riemann-gömb határa) a

$$\begin{cases} g(z) = h(z) \\ g(\infty) = (0, 0, 1) \end{cases} \quad (z \in Z)$$

összefüggéssel, amely kölcsönösen egyértelműen képezi le a Z^∞ halmazt a komplex számgömbre, S -re. Ennek metrikája megadható a $Z^\infty \times Z^\infty$ halmazon értelmezett azon d^* valós értékű függvénnyel, amely minden $z_1, z_2 \in Z$ -re a

$$d^*(z_1, z_2) = d(g(z_1), g(z_2));$$

összefüggésnek tesz eleget. Itt

d : az S tér "közönséges metrikája",

d^* : a Z^∞ "hur-metrikája"

(a hur-távolság bármely két pont között legfeljebb 1).

Egyszerűen igazolható – de az igazolást a jegyzet keretei nem teszik lehetővé –, hogy d^* -ra teljesülnek a

$$d^*(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^\infty)$$

$$d^*(z, \infty) = d^*(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad (z \in \mathbb{Z})$$

$$d^*(\infty, \infty) = 0$$

$$d^*(0, z) = \frac{|z|}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

$$d^*(0, \infty) = 1$$

formulák.

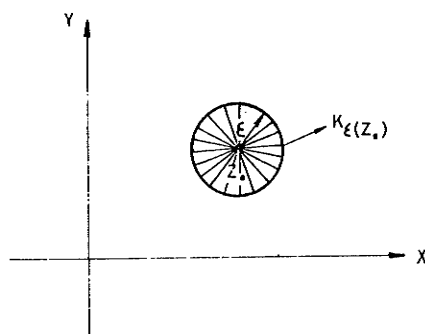
A komplex számsíkon és szögömbön értelmezett metrika lehetővé teszi a komplex analízisben fontos szerepet játszó környezet fogalmának komplex algebrai eszközökkel történő megfogalmazását.

A komplex síkon a végesben levő pont környezete a valós analízisből ismert módon értelmezett. Azaz:

A $z_0 \neq \infty$ pont környezete

a z_0 pont körüli ε sugarú körbe eső pontok halmaza, amelyhez z_0 is hozzátartozik. Jele:

$$K_\varepsilon(z_0) = \{z \mid d(z_0, z) < \varepsilon\}$$



(ld. 4/a. ábra). Ha z_0 nem tartozik a környezethez, akkor arra a $\bar{K}_\varepsilon(z_0)$ jelölést használjuk.

A gömbi metrika bevezetésével a környezetfogalom kiterjeszthető a végtelen távoli pontra is.

4/a. ábra
Környezet a végesben

A $z_0 = \infty$ pont környezete

a komplex számgömb $\hat{E}$ pontja körüli $\mathcal{C}$ sugaru gömbbe eső pontok halmaza, amelyhez az $\hat{E}$ pont is hozzátartozik. Jele:

$$K_{\mathcal{C}(\infty)} = \{z^* \mid d(\hat{E}, z^*) < \mathcal{C}\} = \{z \mid d^*(\infty, z) < \mathcal{C}\}$$

ahol d közösleges metrikát, d^* hurmetrikát jelent. Ez a sztereografikus leképezés folytán megfelel a sík origó közép-pontu $R(\mathcal{C})$ sugaru körön kívüli pontjainak, azaz a

$$\{z \mid d(0, z) > R(\mathcal{C})\}$$

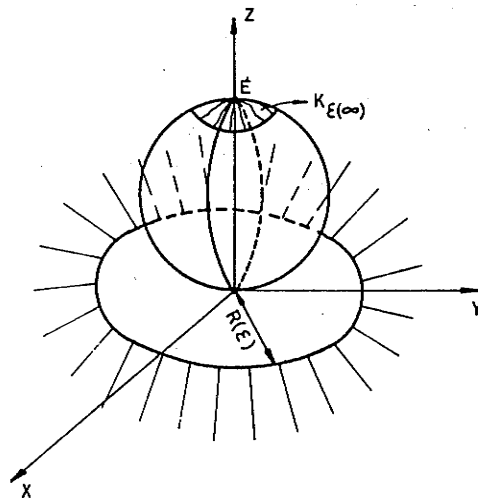
ponthalmaznak, ahol a

$$d^*(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} < \mathcal{C}; \quad |z| > \sqrt{\mathcal{C}^{-2} - 1}$$

összefüggés miatt

$$R(\mathcal{C}) = \sqrt{\mathcal{C}^{-2} - 1}$$

(ld. 4/b. ábra).



4/b. ábra
Környezet a ∞ -ben

1.4. KOMPLEX SZÁMHALMAZOK

A komplex számok összességéből (a $z = \infty$ -t is beleértve) bizonyos szempontok alapján kiválasztott véges vagy végtelen sok szám komplex számhalmazt, az azoknak megfelelő pontok síkbeli (ill. a Riemann-gömbön levő térbeli) ponthalmazt alkotnak.

A továbbiakban a "komplex számhalmaz" és a "síkbeli ponthalmaz" kifejezéseket - a szükségnek megfelelően - azonos értelemben fogjuk használni.

Az értelmezésből következik, hogy a komplex számhalmazokkal kapcsolatos alapvető fogalmak (korlátosság, sűrűsödési érték stb.) és tételek analógok a valós számhalmazoknál és síkbeli ponthalmazoknál megismeretekkel, így azokra itt nem térünk ki. Csupán egy lényeges momentumra hívjuk fel a figyelmet: komplex számhalmazokra a valósbelinél kissé általánosabb forinóban érvényes a sűrűsödési értékre vonatkozó

Bolzano-Weierstrass féle tétel

bármely (és nemcsak korlátos) végtelen komplex számhalmaznak van legalább egy sűrűsödési értéke.

Bizonyítás

a) Korlátos komplex számhalmazra a tétel igazolása megegyezik a kétdimenziós (azaz síkbeli pont) halmazra vonatkozó Bolzano-Weierstrass-féle tételével.

b) Nem korlátos komplex számhalmazra az állítás legegyszerűbben a komplex számok gömbi képei segítségével látható be. Nem korlátos esetben ugyanis a komplex számgömb északi pólusának, azaz a $z = \infty$ -nek, bármely kis környezetébe a komplex számhalmaz végtelen sok eleme esik. Tehát $z = \infty$ sűrűsödési érték, ami éppen a tétel nem korlátos számhalmazra való érvényességét jelenti. $\square$

1.5. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Legyen a komplex sík két pontja

$$z_1 = 1 + j \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$z_2 = \bar{z}_1$$

- a) Határozzuk meg a két pont gömbi képét.
b) Határozzuk meg a képpontok hur-távolságát.

a) A gömbi képpontok:

$$z_1^* = \left(\frac{1}{1+1+\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+1+\frac{1}{2}}, \frac{1+\frac{1}{2}}{1+1+\frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$z_2^* = \left(\frac{1}{1+1+\frac{1}{2}}, \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+1+\frac{1}{2}}, \frac{1+\frac{1}{2}}{1+1+\frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{-\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

b) A képpontok hur-távolsága:

$$d^*(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

2. Döntsük el, hogy a

$$H = \left\{ \frac{j}{n} \right\} ; \quad n \in \mathbb{N}^+$$

komplex számhalmaz

- a) korlátos-e;
 - b) vannak-e sűrűsödési értékei;
 - c) nyílt vagy zárt halmaz-e?
- a) H korlátos halmaz, mert például $|z| < 2$ minden $z \in H$ számra.
- b) Mivel H korlátos végtelen számhalmaz, ezért a Bolzano-Weierstrass tétel értelmében kell lenni legalább egy sűrűsödési értékének. Egyetlen sűrűsödési értéke: $z = 0$
- c) H se nem nyílt, se nem zárt halmaz. H nem nyílt, mert minden pontjának bármely ϵ sugarú környezete tartalmaz H -hoz tartozó és H -hoz nem tartozó pontokat, így minden pontja határpont és nincsenek belső pontjai; H nem zárt, mert nem tartalmazza egyetlen sűrűsödési értékét, a $z = 0$ -át.

2.§ KOMPLEX SZÁMSOROZATOK ÉS SOROK

2.1. KOMPLEX ELEMŰ SZÁMSOROZATOK

A komplex analízis legfontosabb alapfogalmának, a határértékek értelmezéséhez szükséges a komplex számsorozat és fontosabb tulajdonságainak ismerete.

Definíció

Végtelen komplex számsorozat

a komplex számok egy H halmaza, ha ismert olyan reláció, amely az $1, 2, \dots, n, \dots$ természetes számok mindegyikéhez H egy meghatározott elemét n -hez a $z_n \in H$ számot n -re rendeli. Jelölésére a

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots = (z_n)$$

szimbólumot használjuk.

A valós számsorozatokéval analóg definíció következménye, hogy:

1. a valós számsorozatokéval analóg módon értelmezhetők a komplex számsorozatokkal kapcsolatos alapfogalmak:

- (a) korlátosság,
- (b) sűrűsödési érték,
- (c) határérték,
- (d) közönséges- és abszolút-konvergenca,
- (e) divergenca.

2. A valós számsorozatokéval analóg módon fogalmazhatók meg a komplex számsorozatok egyes konvergenca-feltételei:

- (a) szükséges feltétel (korlátosság),
- (b) szükséges és elégséges feltétel (Cauchy-féle konvergenca-kritérium),
- (c) elégséges feltétel (abszolút konvergenca).

E tételek bizonyítása a komplex számsorozat elemeinek valós és képzetes részre bontása után a valós számsorozatok konvergenciájára vonatkozó megfelelő tételek bizonyításával megegyező módon történhet.

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele mellett egyben a komplex számsorozat határértékére is utalnak az alábbi tételek:

3.1.1. Tétel

A $z_n = x_n + jy_n$ elemű komplex számsorozat akkor és csak akkor konvergens és határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = x_0 + jy_0 \neq \infty,$$

ha a sorozat elemeinek valós és képzetes részeiből alkotott (x_n) és (y_n) valós elemű számsorozatok konvergensek és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

Bizonyítás

a) A feltétel szükséges:

Ugyanis a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$$

relációval ekvivalens

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon)$$

relációból következik, hogy

$$|x_n - x_0| < \varepsilon; \quad |y_n - y_0| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon),$$

ami éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

b) A feltétel elégséges:

Ugyanis a feltételekből következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan n_1 és n_2 természetes szám, hogy

$$|x_n - x_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad \text{ha } n > n_1$$

$$|y_n - y_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad \text{ha } n > n_2$$

Igy az állításnak megfelelően:

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon,$$

ha $n > N$ és $N = \max(n_1, n_2)$. $\square$

Hasonló állítás áll fenn abban az esetben is, ha a komplex számsorozat elemei polárkoordinátás alakban adottak:

3.1.2. Tétel

A $z_n = r_n e^{j\varphi_n}$ elemű komplex számsorozat akkor és csak akkor konvergens és határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = r_0 e^{j\varphi_0}; \quad z_0 \neq 0 \text{ és } z_0 \neq \infty,$$

ha a sorozat elemeinek abszolút értékeiből és arcusaiból alkotott (r_n) és (φ_n) valós számsorozatok konvergenssek és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0.$$

(Itt φ_n és φ_0 az arcusok főértékeit jelölik.)

Bizonyítás

A tétel állításának igazolása - a határérték környezetes definíciójának, valamint a komplex számok abszolút értékének valós volta miatt - valós analízisbeli eszközökkel történhet. $\square$

3. A valós számsorozatokéval azonos módon értelmezhetők a komplex számsorozatokkal való algebrai műveletek és érvényesek rájuk a határértékképzés és az algebrai műveletek felcserélésére vonatkozó tételek.

2.2. KOMPLEX TAGÚ SZÁMSOROK

A komplex függvények függvénytáblával való előállításához szükség van a komplex tagú számsorok és alapvető tulajdonságai ismeretére.

Definíció

Végtelen komplex számsor

a komplex elemű számsorozat elemeiből képzett végtelen sok tagú összeg.

Jelölésére a

$$z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

szimbólumot használjuk.

A komplex tagú számsor valós analóg definíciójának következménye:

1. A valós számsorokéval azonos módon értelmezhető komplex számsorokra

- (a) közönséges és abszolút konvergencia,
- (b) oszcillálás (amikor a részletösszegek sorozatának több sűrűsödési értéke van) és végtelenhez való divergálás.

2. A valós számsorokéval analóg módon adhatók meg - és a tagok valós és képzetes részre bontása után valósbeli módszerekkel igazolhatók - a közönséges és abszolút konvergenciára vonatkozó tételek:

- (a) szükséges feltétel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0,$$

- (b) szükséges és elégséges feltételek

(Cauchy-konvergenzkritérium; a tagok valós és képzetes részeiből alkotott numerikus sorok konvergenciája stb.),

- (c) elégséges feltételek

(pl. az abszolút konvergencia, melynek eldöntésére alkalmas a pozitív tagú numerikus sor konvergenciájára vonatkozó bármely elégséges feltétel: majoráns-, gyök-, hányados-kritérium stb.).

3. A valós számsorokéval azonos módon értelmezhetők és igazolhatók a komplex számsorokkal való algebrai műveletek és érvényesek rájuk azok műveleti tulajdonságai.

Közülük a fontosabbak:

$$\text{Ha } \sum_{k=1}^{\infty} z_k = A \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} z_k^* = B, \text{ akkor}$$

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} z_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} z_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} (z_k \pm z_k^*) = A \pm B$$

$$(b) c \sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot z_k) = c \cdot A$$

(c) A két sor ($\dot{\square}$ -tel jelölt) "négyzetes szorzása" révén nyert sor konvergens és

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \dot{\square} \sum_{k=1}^{\infty} z_k^* = A \cdot B$$

(d) A két sor ($\dot{\epsilon}$ -vel jelölt) "Cauchy-szorzása" révén nyert sor konvergens, ha a két sor közül legalább az egyik abszolút konvergens (ill. abszolút konvergens, ha mindkét sor abszolút konvergens) és

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \dot{\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} z_k^* = A \cdot B.$$

2.3. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Vizsgáljuk a

$$z_n = \frac{(3 + 2j)n}{3n + 1}$$

elemű komplex számsorozat konvergencia viselkedését.

Mint hogy a sorozat elemeinek valós és képzetes részeiből alkotott valós számsorozatoknak létezik véges határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n + 1} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n + 1} = \frac{2}{3}.$$

ezért a sorozat konvergens és határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1 + \frac{2}{3}j.$$

2. Állapítsuk meg, hogy konvergens-e a

$$z_n = \frac{n}{2n+1} e^{nj}$$

elemű komplex számsorozat.

A sorozat divergens, mert az elemek arcusaiból alkotott sorozat oly módon tart a végtelenhez, hogy sem a szinuszoknak, sem a koszinuszoknak nincs határértéke. Ugyanis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\arg z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty,$$

bár az abszolútértékekből alkotott sorozat konvergens:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

3. Döntsük el, hogy konvergens-e a

$$z = \begin{cases} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{2n+1}{n}j, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{1}{n} + \frac{2n-1}{n}j, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

utasítással megadott komplex sorozat.

A sorozat oszcillálón divergens, mert elemei valós részeiből alkotott sorozatnak 2 torlódási pontja van (1, ha n páratlan és 0, ha páros), bár a képzetes részeiből alkotott sorozat konvergens (határértéke 2).

4. Vizsgáljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^3j}{n^2}$$

komplex tagu sor konvergenca-viselkedését.

A sor nem konvergens, mert nem teljesül rá a konvergencia szükséges feltétele:

$$\lim |z_n| \neq 0$$

A sor végtelenhez divergál, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) + j \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty .$$

3.§ GÖRBÉK ÉS TARTOMÁNYOK A KOMPLEX SÍKON

3.1. SÍKGÖRBÉK ÉS TARTOMÁNYOK ÉRTELMEZÉSE, KOMPLEX ALAKÚ MEGADÁSA

A komplex síkon értelmezett metrika, valamint a valós változóknak a komplex változókkal való kapcsolata lehetővé teszi a komplex függvények analizisében fontos szerepet játszó néhány geometriai alakzat (görbe és tartomány) komplex algebrai, ill. függvénytani eszközökkel történő megadását.

Definíció

Komplex síkbeli görbe

a komplex sík olyan pontthalmaza, amelynek pontjai megadhatók a t valós paraméter folytonos függvényeivel képezett

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

egyenletrendszerrel.

A görbe nyílt,

ha kezdő- és végpontja nem esik egybe, azaz ha

$$[x(\alpha), y(\beta)] \neq [x(\alpha), y(\beta)].$$

Ellenkező esetben a görbe zárt.

Síkgörbék komplex alakú megadásának különböző lehetőségei vannak:

a) Mértani helyként való megadás

Például a z_1 és z_2 pontokat összekötő egyenesszakasz felező merőlegesének egyenlete:

$$|z - z_1| = |z - z_2|;$$

b) Valós paraméterű komplex függvénnyel való megadás

$$z = z(t); \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

explicit alakban.

Ez a síkgörbe paraméteres egyenletének ismeretében a komplex szám $z = x + jy$ algebrai, ill. $z = r e^{j\varphi}$ exponenciális alakjának felhasználásával

$$z = x(t) + jy(t),$$

ill.

$$z = r(t) e^{j\varphi(t)}$$

alaku.

Például az "a" és "b" féltengelyű origó középpontú ellipszis egy paraméteres komplex egyenlete:

$$z(t) = a \cos t + jb \sin t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

c) Komplex változójú függvénnyel való megadás

$$\varphi\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2j}\right) = 0$$

implicit alakban.

Ez a síkgörbe valós változójú implicit alaku

$$\varphi(x, y) = 0 \quad x \in [a, b]$$

egyenletének ismeretében az

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2j}$$

összefüggések felhasználásával adódik.

Például az

$$ax + by + c = 0$$

egyenlettel adott egyenes ebben az analitikus megadásban:

$$z(a-jb) + \bar{z}(a+jb) + 2c = 0$$

ill. $\beta = a - j b$ jelöléssel

$$\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + 2c = 0$$

alaku.

A továbbiakban a síkgörbék két legegyszerűbb típusa fog szerepelni: a többszörös pont nélküli ún. Jordan-görbe és a sima (vagy szakaszonként sima) görbe. Ez utóbbi szemléletesen azt jelenti, hogy a görbéhez húzott érintő iránya az érintési pont helyzetével folytonosan (vagy szakaszonként folytonosan) változik. Mindkét görbe-típus precíz matematikai megfogalmazására a IV. fejezetben kerül sor.

A vonalintegrálok tárgyalásánál lényeges a görbék irányítása. A szemlélet alapján minden görbének két természetes, egymással ellentétes irányítása lehet. Ezt a szemléletet akarjuk sima (vagy szakaszonként sima) görbeiv, illetve zárt görbék esetén matematikai formába önteni.

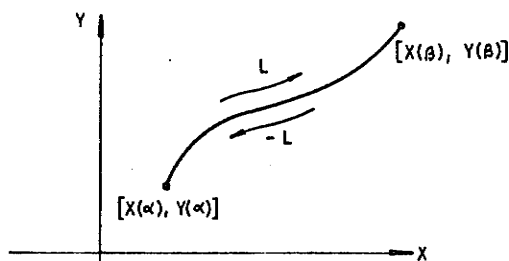
Görbeiv (nyílt görbe) irányítása

Legyen a sima és nyílt L görbe

$$z(t) = x(t) + j y(t); \alpha \leq t \leq \beta$$

alakban adott. A szerint, hogy a görbe két végpontja közül $z_1 = z(\alpha)$ a görbe kezdőpontja és $z_2 = z(\beta)$ a végpontja vagy megfordítva, a görbe irányítása z_1 -ből z_2 -be, vagy z_2 -ből z_1 -be mutat.

A jelzett két irány ellentétes, így ha L egy meghatározott módon irányított görbe, úgy $-L$ az ezzel ellentétes irányításut jelöli (ld. 5/a. ábra).

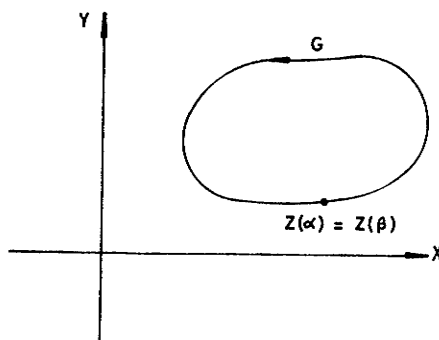


5/a. ábra
Irányított nyílt görbe

Zárt görbe irányítása

pozitív vagy negatív a szerint, hogy azt az óramutató járásával ellentétes vagy azonos irányban járjuk be.

A zárt görbe pozitív bejárásakor az általa határolt tartomány bal-kéz felé, negatív körüljáráskor jobb-kéz felé esik (ld. 5/b. ábra).



5/b. ábra
Irányított zárt görbe

Irányított nyílt, ill. zárt görbék ábrázolásakor az irányt megfelelő nyílakkal szokás feltüntetni.

A komplex függvényvizsgálatok nagyrészt tartományokon végezzük, így szükség van a síkbeli tartományok értelmezésére, a komplex analízisben felhasználásra kerülő néhány speciális típusának ismertetésére.

Definíció

Komplex síkbeli tartomány

a komplex sík bármely összefüggő, nyílt ponthalmaza. Azaz: olyan nem üres ponthalmaz, amely:

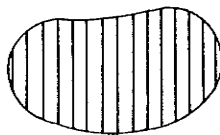
- csak belső pontokat tartalmaz,
- tetszőleges két pontja összeköthető olyan - véges számú szakaszból álló - törtvonallal, amelynek minden pontja a halmazhoz tartozik.

Konvex tartomány

a komplex sík minden olyan tartománya, amely bármely két pontjával együtt az őket összekötő egyenesszakaszt is tartalmazza.

Egyszeresen összefüggő tartomány

a komplex sík minden olyan tartománya, amelyet egyetlen zárt, kettőspont nélküli görbe határol.



Azaz: olyan siktartomány, amely tetszőleges, kettőspont nélküli zárt görbével együtt, annak belsejét is tartalmazza (ld. 6. ábra).

6. ábra

Egyszeresen összefüggő tartomány

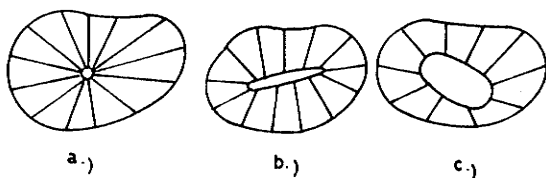
Többszörösen összefüggő tartomány

a komplex sík olyan tartománya, amelynek határa több (véges számú) szakaszonként sima zárt görbéből, bemetszésből és pontból áll.

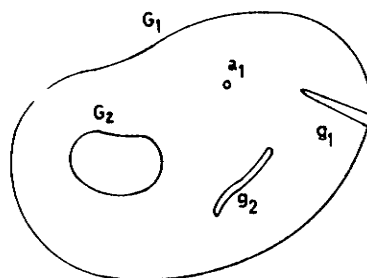
Vagyis: olyan tartomány, amelybe rajzolható olyan zárt görbe, amelynek belseje nem tartozik teljes egészében a tartományhoz.

Egy tartomány annyiszorosan összefüggő, ahány nem összefüggő részből áll a határa. Kétszeresen összefüggő például egy pont- vagy egy egyenes-, vagy egy görbe kirekesztésével nyert tartomány, vagy két zárt görbe közti tartomány stb. (ld. 7/a, b, c ábra). A 8. ábrán látható tartomány például négyszeresen összefüggő, mert határolja két sima zárt görbe: G_1

és G_2 ; két bemetszés: g_1 és g_2 és az a_1 pont, de közülük a G_1 görbe és a g_1 bemetszés összefüggő halmazt alkot.



7. ábra
Kétszeresen összefüggő tartományok



8. ábra
Négyszeresen összefüggő tartomány

3.2. EGYENESEK, FÉLSÍKOK, SZÖGTEREK

A komplex sík bármely egyenese megadható valós vagy komplex változóval kifejezett komplex alakban.

Az egyenes egy t valós paraméterrel kifejezett egyenlete:

$$z = a + b t, \quad (-\infty < t < \infty)$$

ahol "a" és "b" komplex számok, $b \neq 0$ és $\arg b$ az egyenes egyértelműen meghatározott iránya:

Két egyenlet:

$$z = a + b t \quad \text{és} \quad z = a' + b' t$$

ugyanazt az egyenest határozza meg, ha $(a' - a)$ és b' valós többszöröse b -nek és azonos vagy ellentétes irányításu a szerint, hogy b' pozitív vagy negatív többszöröse b -nek.

Amennyiben az egyenest 2 pont: z_1 és z_2 határozza meg, úgy ez a paraméteres egyenlet:

$$z = z_1 + t (z_2 - z_1), \quad (-\infty < t < \infty)$$

alakú és ennek a z_1 és z_2 pontokat összekötő szakasza

$$z = z_1 + t (z_2 - z_1); \quad 0 \leq t \leq 1.$$

A. egyenes komplex változóval kifejezett egyenlete:

$$\alpha z + \bar{\beta} \bar{z} + c = 0$$

ahol ρ valós vagy komplex, c valós állandó. (Ez az összefüggés az egyenes $ax + by + c = 0$ valós egyenletéből az $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $y = \frac{z-\bar{z}}{2j}$ helyettesítéssel adódik.)

A komplex síkot bármely egyenese két félsíkra bontja. A félsíkok pontjai az őket elválasztó egyenes segítségével jellemezhetők.

Mivel t valós paraméter, ezért a $z = a + bt$ egyenes pontjai ki-
elégítik az

$$\operatorname{Im} \frac{z - a}{b} = 0$$

összefüggést és így a $z = a + bt$ egyenes által meghatározott két félsík pontjait az

$$\operatorname{Im} \frac{z - a}{b} > 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{Im} \frac{z - a}{b} < 0$$

egyenlőtlenségek jellemzik.

A valós tengely, (az

$$y = \operatorname{Im} z = 0$$

egyenes) által meghatározott felső- és alsó-félsík pontjai az

$$\operatorname{Im} z > 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{Im} z < 0$$

egyenlőtlenségekkel, míg a képzetes tengely (az

$$x = \operatorname{Re} z = 0$$

egyenes) által meghatározott jobb- és balfélsík pontjai a

$$\operatorname{Re} z > 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{Re} z < 0$$

egyenlőtlenségekkel jellemezhetők.

A félsíkokat elválasztó egyeneseket pozitív irányban bejárva a felsorolt összefüggésekkel jellemzett félsíkok közül az első balra, a második jobbra felé esnek. Kimutatható, hogy ez a megállapítás független a paraméter választástól.

A felsorolt összefüggések nyílt félsíkokat határoznak meg. Ezekből - a határoló egyenes pontjait is tartalmazó - zárt félsíkokat jellemző egyenlőtlenségeket úgy kapjuk meg, hogy a " $>$ " és " $<$ " jeleket a " $\geq$ " és " $\leq$ " jelekkel cseréljük fel.

A komplex sík szögtartománya

egy pontból kiinduló két félegyenes által határolt tartomány.

Ha az a_1 pontból kiinduló két félegyenes

$$z_1 = a_1 + b_1 t \quad \text{és} \quad z_2 = a_1 + b_2 t, \quad 0 \leq t < \infty$$

akkor az ebben a sorrendben megadott félegyenesek által meghatározott szögtartomány szöge:

$$\arccos \frac{b_2}{b_1},$$

Tehát: a két egyenes sorrendje határozza meg, hogy a megadott félegyenesek által meghatározott két kiegészítő szögtartomány közül melyikről van szó.

3.3. KÖRÖK, KÖR-BELSŐK ÉS KÖR-KÜLSŐK

A komplex sík köreinek különböző komplex alaku megadásai lehetnek:

Mértani helyként való megadása

lehet

$$|z - z_0| = R$$

alaku (ahol z_0 a kör középpontja és $R > 0$ a sugara); illetve

$$|z - z_1| = c |z - z_2| \quad (c > 0; c \neq 1)$$

alaku (ahol felhasználtuk, hogy a kör mértani helye mindazon pontoknak, amelyeknek két adott ponttól - z_1 és z_2 -től - való távolságuk aránya azonos).

Valós paraméterrel való megadása

lehet

$$z = z_0 + R (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

illetve

$$z = z_0 + R e^{j\varphi} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

alaku (mindkét előállításban z_0 a kör középpontja és $R > 0$ a sugara).

Komplex változóval való megadása

lehet

$$a z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c = 0$$

alakú, ahol $a \neq 0$ és c valós, β pedig valós vagy komplex állandó.

(Ez az egyenlet a kör valós változóju egyenletéből az $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$;

$y = \frac{z - \bar{z}}{2j}$ összefüggések felhasználásával adódik.)

Ennek az összefüggésnek speciális alakja

$$|z|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_0 \bar{z}) + c = 0 \quad (|z_0|^2 > c)$$

ahol z_0 a kör középpontja és $R = \sqrt{|z_0|^2 - c}$ a kör sugara.

Megjegyzés

A komplex sík bármely köre ill. egyenese felírható

$$a z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c = 0$$

alakban, ahol a és c valós, β lehet komplex értékű konstans is (ha β valós, $\bar{\beta} = \beta$).

Ugyanis a z sík körvonalainak, ill. $a = 0$ esetén egyenesének valós változóju egyenlete:

$$a(x^2 + y^2) + b_1 x + b_2 y + c = 0$$

ahol a, b_1, b_2, c olyan valós állandók, amelyek mellett az egyenletet végtelen sok pont elégíti ki. Ez az egyenlet az

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \quad y = \frac{1}{2j}(z - \bar{z}); \quad x^2 + y^2 = z \bar{z}$$

helyettesítéssel az

$$a z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c = 0$$

komplex alakba írható, ahol $\beta = \frac{b_1 - jb_2}{2}$. Ez $a \neq 0$ esetén kör, $a = 0$ esetén egyenes egyenlete; $c = 0$ esetén a kör, ill. egyenes átmegy a $z = 0$ ponton.

Bármely kör a síkot két összefüggő pontthalmazra: kör-belsőre (körtartományra) és kör-külsőre osztja. Ezek a tartományok a kör különböző egyenletének megfelelően különböző összefüggéssel jellemezhetők. Így többek között megadhatók

$$|z - z_0| < R,$$

ill.

$$|z - z_0| > R;$$

vagy

$$|z - z_1| < c |z - z_2|, \quad 0 < c < 1$$

ill.

$$|z - z_1| > c |z - z_2|, \quad c > 1;$$

vagy

$$a z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c > 0; \quad a \neq 0, \quad c \text{ valós szám}$$

ill.

$$a z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c < 0; \quad a \neq 0, \quad c \text{ valós szám}$$

alakban.

A felsorolt tartományok mind nyitlak, belőlük a kör pontjaival lezárt tartományok úgy adódnak, hogy a "<" és ">" jelek helyett " $\leq$ " és " $\geq$ " jeleket írunk.

3.4. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Irjuk fel a

$$2x + y = 5$$

valós egyenlettel adott egyenes egyenletét komplex változóval.

$$\text{Felhasználva az } x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2j} \text{ összefüggéseket, a}$$

$$(2j + 1)z + (2j - 1)\bar{z} = 10j$$

a fenti egyenes egy komplex változója egyenlete.

2. Határozzuk meg azt a síkgörbét és jellemzőit, amelynek a

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$$

egy komplex változóju egyenlete.

A síkgörbe kör, amelynek valós változókkal kifejezett egyenlete

$$|x + jy - 3| = 2|x + jy + 3|$$

ill. négyzetreemelve és rendezve:

$$(x + 5)^2 + y^2 = 16.$$

Ebből látható, hogy a kör középpontja $P_0(-5, 0)$, sugara 4, úgy hogy a kör fentivel ekvivalens komplex változóju egyenlete:

$$|z + 5| = 4.$$

3. A sík mely tartományát jellemzi a

$$|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$$

egyenlőtlenség?

Az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens a

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x \leq 1$$

valós változókkal kifejezett összefüggés, amely a sík

$$y = \pm \sqrt{1 - 2x}$$

parabolaívén és annak belsejében levő pontjait jellemzi.

4. Melyik az a síkgörbe, amelynek

$$z = \frac{1 + jt}{1 - jt} \quad (-\infty < t < \infty)$$

egy valós változóju komplex egyenlete.

Az adott egyenlettel ekvivalens

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y &= \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned} \right\} \quad (-\infty < t < \infty)$$

paraméteres valós egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölésével az

$$x^2 + y^2 = 1$$

összefüggés adódik, ami az origó középpontu egységsugarú kör egyenlete.

Második fejezet
KOMPLEX VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

**1.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK ÉS KÖRÜKBEN ÉRTELMEZETT
MŰVELETEK**

1.1. KOMPLEX FÜGGVÉNYEK ÉS RELÁCIÓK

A következőkben olyan függvényekkel és többértékű relációkkal foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete egyaránt a ∞ -nel "kibővített" komplex számok halmazának egy-egy részhalmaza. Ezek az ún. komplex változós függvények, ill. többértékű relációk, amelyeket az alábbi módon értelmezünk:

Definíció

Komplex változós függvény
(röviden: komplex függvény)

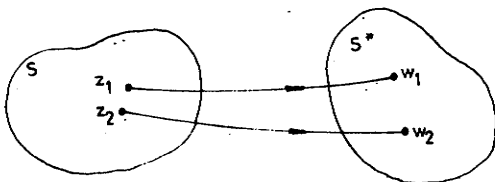
olyan f (vagy más kisbetűvel jelölt) egyértékű reláció, amely a z komplex számok egy S halmazának elemeit a w komplex számok egy S^* = $f(S)$ halmazának elemeire képezi le. Azaz

$$f : S \rightarrow S^*$$

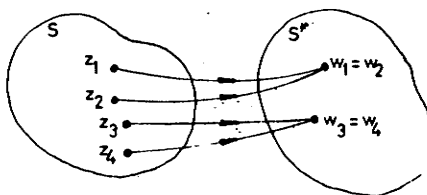
Az S halmazon értelmezett minden más - tehát többértékű - relációt a továbbiakban röviden relációnak nevezünk és a függvénytől való megkülönböztetésül F -fel jelölünk.

A szerint, hogy a komplex függvény (vagy reláció) különböző $z \in S$ értékhez különböző $w \in S^*$ értéket (vagy értékeket) ill. több $z \in S$ -hez ugyanazt (vagy ugyanazokat) a $w \in S^*$ értéket (vagy értékeket) rendeli, megkülönböztetünk:

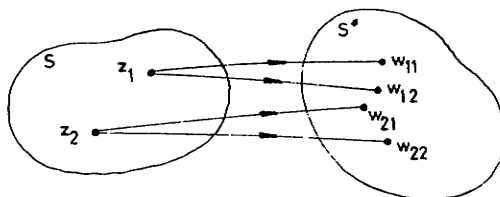
egyrétű ill. többértékű komplex függvényt (ld. 9/a, b ábrák); vagy egyrétű ill. többértékű komplex relációt (ld. 10/a, b ábrák).



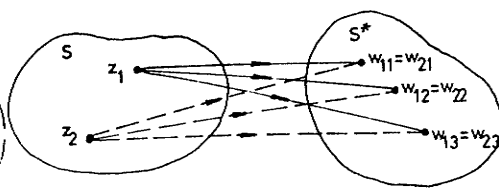
9/a. ábra
Egyrétű komplex függvény



9/b. ábra
Többértékű komplex függvény



10/a. ábra
Egyértéki komplex reláció



10/b. ábra
Többértéki komplex reláció

Közülük kitüntetett szerepü a

korlátos komplex függvény (ill. reláció), amely a komplex számok halmazán értelmezett olyan függvény (ill. reláció), amelynek értékkészlete korlátos halmaz.

A valós analízis alapvető fogalmait és tételeit ki akarjuk terjeszteni mind a komplex függvényekre, mind a többértéki komplex relációkra. Mivel ezek a kiterjesztések többértéki relációk esetében általában csak azok "egyértéki ágaira" végezhetők, ezért szükség van azok értelmezésére.

Definíció

Az F többértéki reláció egyértéki ága

az $S \subset \mathbb{C}$ komplex számhalmazon értelmezett olyan f függvény, melynek értéke az S halmaz minden egyes z pontjában megegyezik az F reláció által ebben a pontban felvetett értékek egyikével.

A komplex függvények ill. relációk leggyakoribb analitikus megadási módjai:

a) az explicit alaku megadás;

$$w = f(z) \quad \text{ill.} \quad w = F(z)$$

b) a valós és képzetes résszel történő meadás, amely az explicit alakból a komplex szám algebrai alakjának felhasználásával adódik és

$$w = u(x, y) + jv(x, y),$$

vagy

$$w = u(r, \varphi) + jv(r, \varphi)$$

alaku aszerint, hogy a z síkban derékszögű vagy polárkoordinátarendszerben rögzítünk (itt $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$; $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$; $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, ahol $-\pi \leq \varphi < \pi$);

c) abszolútértékkel és arcussal történő megadás, amely az explicit alakból a komplex szám exponenciális alakjának felhasználásával adódik és

$$w = \varrho(x, y) e^{j\phi(x, y)},$$

vagy

$$w = \varrho(r, \varphi) e^{j\phi(r, \varphi)}$$

alakú a szerint, hogy a z síkban derékszögű vagy polárkoordináta-rendszerben rögzítünk. (Itt $\varrho = |f|$; $\phi = \arg f$, ahol $-\pi \leq \phi < \pi$ és x, y, r, φ jelentése az előbbi.)

A b) és c) megadási módok mindegyike függvényt, ill. relációt értelmez, attól függően, hogy az u és v vagy a φ és ϕ kétváltozós valós függvények, ill. relációk.

A komplex számok halmazán értelmezett függvények (ill. relációk) lehetnek komplex vagy valós értékűek.

A legegyszerűbb komplex értékű függvények: a racionális egész függvények (polinomok) és a racionális törtfüggvények. Ezek részletes ismertetésére a IV. fejezetben kerül sor.

A legegyszerűbb komplex változós valós értékű függvények:

a) az abszolútérték-függvény

$$f(z) = |z|,$$

amely az x és y változók egyértelmű függvénye:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0;$$

b) az arcus-függvény

$$f(z) = \arg z,$$

amely a végtelen sok-értékű $\arg z$ reláció valamely egyértékű ága.

Az $\arg z$ reláció az x és y valós változók végtelen sok értékű függvénye (relációja):

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + 2k\pi, & \text{ha } z \text{ az I.; vagy a IV. negyedben van,} \\ \arctg \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & \text{ha } z \text{ a II.; vagy a III. negyedben van} \end{cases}$$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Rögzített k egész számokra az $\text{Arc } z$ reláció egyértékű ágai:

$$\varphi_k = \text{arc}_k z; \quad (2k - 1)\pi \leq \varphi_k < (2k + 1)\pi$$

függvények. Közülük a $k = 0$ értékhez tartozó, a

$$\varphi_0 = \text{arc}_0 z; \quad -\pi \leq \varphi_0 < \pi$$

az ún. főág, amelyre a továbbiakban egyszerűen a

$$\varphi = \text{arc } z$$

jelölést használjuk.

A komplex függvények és relációk szemléltetése jóval bonyolultabb feladat, mint a valós változósaké. Egyik leggyakoribb módszer az általuk létesített leképezéssel történő szemléltetés, amely két komplex sík segítségével történik. Az egyik síkon, a z síkon (amelynek pontjai: $z = x + jy$) ábrázoljuk a z változó bizonyos értékeit, a másikon, a w síkon (amelynek pontjai: $w = u + jv$) a megfelelő $w = f(z)$ függvényértékeket. Ezzel az eljárással a komplex függvények a z sík egy részhalmazát a w sík egy részhalmazára, míg a többértékű komplex relációk a többszörösen lefedett w sík (az ún. többlevelű Riemann-felület) egy részhalmazára képezik le. A komplex függvények és relációk szemléltetésének ez a módja a IV. fejezetben kerül részletes tárgyalásra.

1.2. ALGEBRAI MŰVELETEK KOMPLEX FÜGGVÉNYEKKEL. ÖSSZETETT FÜGGVÉNY, INVERZ FÜGGVÉNY

A komplex függvények vizsgálata során gyakran fogunk egyes függvények tulajdonságaiból további, ezek segítségével értelmezett függvények tulajdonságaira következtetni. Ezt a célt segítik elő a komplex függvények körében értelmezett alábbi műveletek:

1. algebrai műveletek

$$(a) \quad (f \pm g)(z) = f(z) \pm g(z)$$

$$(b) \quad (f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$$

$$(c) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z) \neq 0).$$

2. A konjugálás művelete

Az

$$f(z) = \text{Re } f(z) + j \text{ Im } f(z) = u + jv$$

ill.

$$f(z) = |f(z)| e^{j \operatorname{arc} f(z)} = \varrho e^{j\phi}$$

alakban adott komplex függvény konjugáltja:

$$\bar{f}(z) = \operatorname{Re} f(z) - j \operatorname{Im} f(z) = u - jv$$

ill.

$$\bar{f}(z) = |f(z)| e^{-j \operatorname{arc} f(z)} = \varrho e^{-j\phi}$$

E definíció következményei a konjugált komplex függvény alábbi tulajdonságai:

- (a) $\bar{\bar{f}}(z) = f(z)$
- (b) $\overline{f(z) \pm g(z)} = \bar{f}(z) \pm \bar{g}(z)$
- (c) $\overline{f(z) \cdot g(z)} = \bar{f}(z) \cdot \bar{g}(z)$
- (d) $\overline{\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)} = \frac{\bar{f}(z)}{\bar{g}(z)} \quad (\bar{g}(z) \neq 0).$

3. A szuperponálás művelete

amely az összetett komplex függvény értelmezéséhez vezet.

Ha az S komplex számhalmazon értelmezett g komplex függvény $g(S)$ értékkészlete beleesik az f komplex függvény S_1 értelmezési tartományába és f a $g(S)$ halmaz elemeit egy $S^* = f(g(S))$ halmaz elemeire képezi le, akkor

$$f \circ g = f(g) : S \Rightarrow S^*$$

un. összetett komplex függvény
(ld. 11. ábra), amelyre

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)).$$

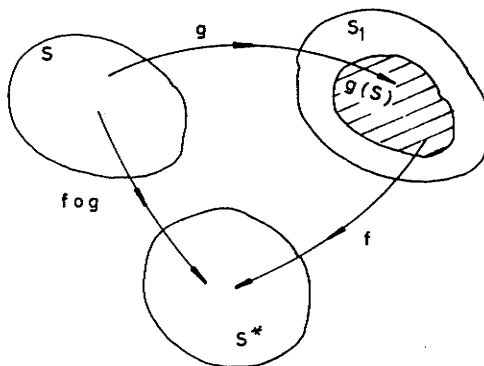
4. Az invertálás művelete

amely az inverz függvény fogalmára vezet. Az

$$f : S \rightarrow f(S)$$

egyrétű komplex függvény (ill.

többértékű - egyrétű komplex reláció egyértékű ágának) inverze az az

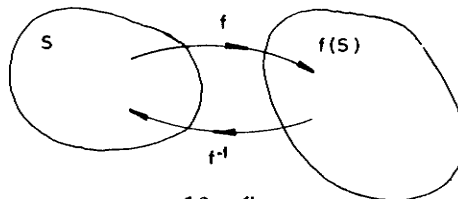


11. ábra

Összetett komplex függvény

$$f^{-1} : f(S) \rightarrow S$$

függvény, amely minden $w \in f(S)$ értékhez azt a $z \in S$ értéket rendeli, amelyre $f(z) = w$.



12. ábra
Inverz komplex függvény

Ezen értelmezés következménye, hogy minden függvénynek és inverzének értelmezési tartománya és értékkészlete felcserélődik (ld. 12. ábra).

Ugyancsak e definíció következményei az inverz függvénynek a valóssal analóg - és azzal megegyezően igazolható - alábbi tulajdonságai:

1.2.1. Tétel

Ha az $f : S \rightarrow f(S)$ egyrétű komplex függvény $f(S)$ -en értelmezett inverze f^{-1} , akkor az $f^{-1} : f(S) \rightarrow S$ függvény S -en értelmezett inverze: f .

1.2.2. Tétel

Ha az f egyrétű komplex függvényre $f(z_0) = w_0$ akkor f^{-1} függvényre $f^{-1}(w_0) = z_0$.

Azaz: f értelmezési tartományának bármely z pontjára

$$(f^{-1} \circ f)(z) = f^{-1}(f(z)) = z.$$

1.3. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg az

$$f(z) = y \int_0^{\infty} e^{-xt} dt + j \sum_{n=0}^{\infty} v^n$$

függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

E függvény értelmezési tartománya a z sík

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ -1 < y < 1 \end{array} \right\}$$

végtesen sávja (ld. 13. ábra), mert csak ebben az esetben konvergens a függvény valószínű részét értelmező improprius integrál, illetve a képzetes részét értelmező végtesen sor. Ebben a tartományban az adott függvény felírható

$$f(z) = \frac{y}{x} + j \frac{1}{1-y}$$

alakban.

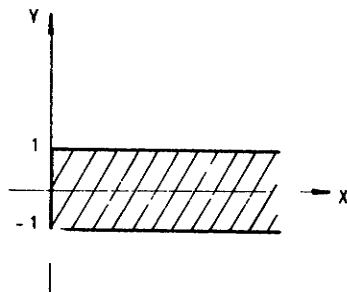
2. Állapítsuk meg, hogy hány réti függvények, ill. relációk az

a) $w = \frac{1}{z+1}$

b) $w = z^2 + 2$

c) $w = \sqrt[3]{z-1}$

d) $w = \sqrt[4]{z^2+15}$



13. ábra

összefüggések.

a) Mivel a

$$w = \frac{1}{z+1}$$

összefüggés minden z értékhez egy w értéket rendel, ezért függvény, és mivel minden w -hez egy z érték tartozik, ezért a függvény egyrétű.

b) A

$$w = z^2 + 2$$

összefüggés kétrétű függvény, mert minden véges z értékhez pontosan egy w értéket rendel, ugyanakkor két-két z értéknél veszi fel ugyanazt a w értéket (kivéve a $w = 2$ értéket, amelyet csak a $z = 0$ helyen vesz fel).

c) A

$$w = \sqrt[3]{z-1}$$

összefüggés háromértékű-egyrétű reláció, mert minden véges z értékhez három különböző w értéket rendel (kivéve a $z = 1$ -et, amelyhez csak a $w = 0$ -át rendeli) és ugyanakkor különböző z értékekhez különböző w értékek tartoznak.

d) A

$$w = \sqrt[4]{z^2+15}$$

összefüggés négyértékű-kétrétű reláció, mert minden véges z értékhez négy w értéket rendel (kivéve a $z = \pm \sqrt{15}$ értékeket, amelyekhez csak a $w = 0$ -át rendel) és ugyanakkor két-két z értékhez ugyanaz a négy w érték tartozik (kivéve a $w = \pm \sqrt{15}$ értékeket, amelyeket csak a $z = 0$ helyen vesz fel).

3. Adjuk meg az

$$f(z) = \frac{jz + \bar{z}}{|z|^2}$$

függvényt polárkoordinátákkal kifejezett valós és képzetes résszel.

Felhasználva, hogy $jz + \bar{z} = (x - y) + j(x - y)$ és bevezetve polárkoordinátákat

$$\frac{jz + \bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r} (\cos \varphi - \sin \varphi) + \frac{j}{r} (\cos \varphi - \sin \varphi).$$

4. Adjuk meg az

$$f(z) = \frac{|z|}{z}; \quad z \neq 0$$

függvényt derékszögű koordinátákkal kifejezett abszolútértékkel és arcussal.

Mivel a kérdéses függvény esetén $|f| = 1$ és $\arg f = \arctg \frac{y}{x}$, ezért

$$\frac{|z|}{z} = e^{j \arctg \frac{y}{x}}$$

(ahol $\arctg \frac{y}{x}$ többértékűségéből az következne, hogy $\frac{|z|}{z}$ többértékű reláció, de $\frac{|z|}{z} = \frac{z}{|z|} = e^{j(\varphi + 2k\pi)} = e^{j\varphi}$ miatt f függvény).

5. Állapítsuk meg, hogy a

$$w = |z| + \frac{1}{2} (\bar{z} - z)$$

függvény mire képezi le a

a) a z sík

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (c \geq 0)$$

köreit;

b) a z sík

$$x^2 + y^2 < R^2$$

tartományát;

c) a teljes z síkot?

A kérdéses leképezések az alábbiak:

a) Mivel

$$|z| + \frac{1}{2}(\bar{z} - z) = \sqrt{x^2 + y^2} - jy$$

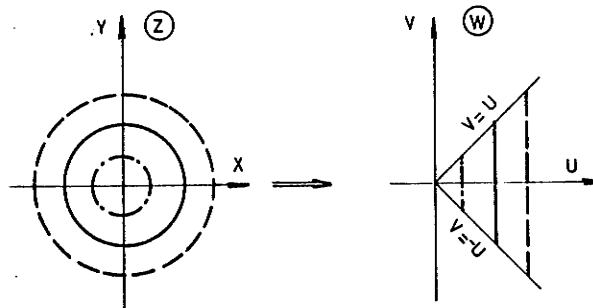
ezért

$$x^2 + y^2 = c^2 \implies \begin{cases} u = c \\ -u \leq v \leq u \end{cases}$$

Azaz: a z sík origó középpontú köreinek a képe a w sík v tengelyével párhuzamos egyenesének a $v = u$ és $v = -u$ egyenesek közé eső szakasza (ld. 14. ábra).

b) A z sík $x^2 + y^2 < R^2$ tartománya ekvivalens az $x^2 + y^2 = c^2 < R^2$ egyenletű körök ($0 \leq c < R$) halmazával. Így - figyelembe véve e köröknek a feladat a) részében meghatározott képgörbéit -

$$x^2 + y^2 < R^2 \implies \begin{cases} 0 \leq u < R \\ -u \leq v \leq u \end{cases}$$



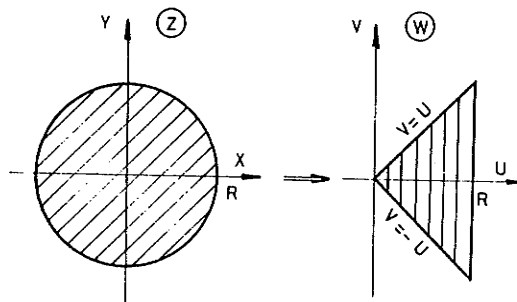
14. ábra

Azaz: a kérdéses körtartomány képe egy w síkbeli, háromszög-tartomány (ld. 15. ábra).

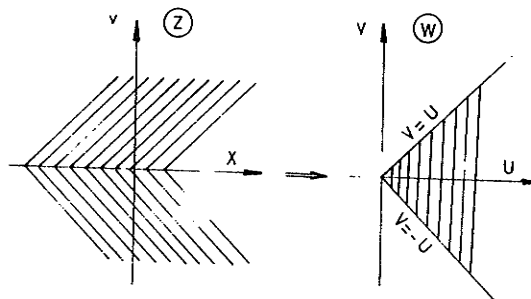
c) A teljes z sík felfogható, mint az $x^2 + y^2 = c^2$ $c \geq 0$ körök pontjainak halmaza, így

$$z \text{ sík} \implies \begin{cases} u \geq 0 \\ -u \leq v \leq u \end{cases}$$

Azaz: a z sík képe egy w síkbeli szögtartomány (ld. 16. ábra).



15. ábra



16. ábra

2.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

2.1. HATÁRÉRTÉK A VÉGESBEN ÉS A VÉGTELENBEN

A valós függvényekével analóg módon komplex függvényekre, ill. többértékű relációk egyértékű ágaira) is értelmezhető - akár véges, akár végtelen távoli pontban - véges és végtelen határérték. E különböző típusú határértékek együttes értelmezésére két ekvivalens definíció adható:

Definíció I.

(Környezetes értelmezés)

A $K_{(z_0)}$ -ban értelmezett f komplex függvényre

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy

$$f(z) \in K_{\delta(w_0)},$$

ha

$$z \in K_{\delta(z_0)}.$$

Definíció II.

(Sorozatos értelmezés)

A $K_{(z_0)}$ -ban értelmezett f komplex függvényre

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

ha f értelmezési tartományának tetszőleges - de z_0 -tól különböző elemekből álló -

$$z_n \rightarrow z_0$$

pontsorozatára a megfelelő függvényértékek sorozata

$$f(z_n) \rightarrow w_0.$$

Mindkét definícióban z_0 és w_0 egy-egy komplex számot jelent, de bármelyikük, vagy mind a kettő, a ∞ szimbólumot is jelentheti.

A határérték létezésének szükséges és elégséges feltételét fejezi ki:

2.1.1. Tétel

Az

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

komplex függvény esetén

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + jv_0$$

akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0$$

és

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Bizonyítás

megegyezik a komplex számsorozatokra vonatkozó - első fejezetbeli - 2.3.4. Tétel bizonyításával. $\square$

2.2. ALGEBRAI MŰVELETEK ÉS HATÁRÉRTÉKKÉPZÉS. ÖSSZETETT FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

A komplex függvény határértékére vonatkozó definíció alapján egyszerűen igazolható a határértékképzés és algebrai műveletek felcserélésére vonatkozó - a valós analizisből ismert -

2.2.1. Tétel

Ha az f és g függvényeknek - értelmezési tartományuk közös z_0 torlódási pontjában - van véges határértékük: A és B (ahol A és B lehet valós vagy komplex szám), akkor

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A + B$$

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A - B$$

$$(3) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A \cdot B$$

$$(4) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

Egy komplex függvénynek és konjugáltjának azonos pontban vett határértéke közti kapcsolatára utal:

2.2.2. Tétel

Ha f értelmezett $K(z_0)$ -ban és

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0,$$

akkor

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0}.$$

Bizonyítás

Mivel

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0,$$

azért a határérték környezetes definíciója értelmében

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon,$$

ha

$$|z - z_0| < \delta(\varepsilon).$$

Felhasználva, hogy a konjugálás és kivonás művelete felcserélhető, továbbá, hogy egy komplex számnak és konjugáltjának abszolútértéke megegyezik:

$$|\overline{f(z)} - \overline{w_0}| = |\overline{f(z) - w_0}| = |f(z) - w_0|$$

és így $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(z) - w_0|$ -kel együtt a

$$|\overline{f(z)} - \overline{w_0}| < \varepsilon,$$

ami a tétel állítását jelenti. $\square$

Az összetett valós függvény határérték-tételével analóg:

2.2.3. Tétel

Ha a $g(z)$ komplex függvény értékkészlete részhalmaza az $f(\xi)$ függvény értelmezési tartományának és

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g_0,$$

ugy, hogy z_0 -nak van olyan $K(z_0)$ környezete, hogy ott $g(z) \neq g_0$, továbbá

$$\lim_{\xi \rightarrow g_0} f(\xi) = w_0,$$

akkor létezik az $f \circ g = f(g)$ összetett függvénynek is határértéke a z_0 pontban és

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f \circ g)(z) = w_0.$$

Bizonyítás

Az f és g komplex függvényeket valós és képzetes részre bontva, a bizonyítás megegyezik a kétváltozós összetett függvényekre vonatkozó megfelelő tétel bizonyításával. $\square$

Megjegyzés

Amennyiben a 2.2.1. tételbeli A és B határértékek a 0 és ∞ szimbólumok valamelyikét jelentik, akkor a

$$\infty - \infty; 0 \cdot \infty; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; 0^0; \infty^0$$

esetekben határozatlan kifejezések adódnak. Az ilyen típusú határértékek - amennyiben a z_0 pont környezetében az f és g függvények differenciál-

hatók - a valós analizisből ismert L'Hospital szabály analógiájára határozhatók meg (ld. harmadik fejezet 1.5.1. Tétel).

2.3. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Igazoljuk a

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = 2$$

határérték létezését.

Az $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z - 1}$ függvény a $z = 1$ helyen nincs értelmezve, de ha $z \neq 1$, akkor $f(z) = z + 1$ és így

$$|f(z) - 2| = |z + 1 - 2| = |z - 1|$$

miatt

$$|f(z) - 2| < \varepsilon,$$

ha

$$0 < |z - 1| < \delta(\varepsilon),$$

ami azt jelenti, hogy a függvényértékek 2-től való eltérése tetszőlegesen kis $\varepsilon > 0$ -nál kisebb a $z = 1$ hely $\delta = \delta(\varepsilon)$ sugarú környezetében. Tehát a függvénynek valóban 2 a határértéke.

2. Létezik-e határértéke az

$$f(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$$

függvénynek a $z = 0$ helyen?

A függvényt meghatározó kifejezés átalakítása után a komplex szám exponenciális alakját, majd az Euler formulát felhasználva:

$$f(z) = \frac{1}{2j} \frac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|^2} = \frac{r^2 (e^{2j\varphi} - e^{-2j\varphi})}{2j r^2} = \sin 2\varphi$$

Ebből látható, hogy a $z_0 = 0$ hely tetszőleges kis környezetében a függvény felvesz minden $[-1, 1]$ intervallumbeli értéket. Így, ha pl. $\varepsilon < \frac{1}{2}$, akkor semmilyen w_0 szám, mint határérték mellett nem teljesülhet minden $z \in K_{(z_0)}$ -ra a határérték létezéséhez szükséges

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség. Tehát az f függvénynek a $z_0 = 0$ helyen nincs határértéke.

3.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

3.1. FOLYTONOSSÁG, EGYENLETES FOLYTONOSSÁG

(a) Pontbeli folytonosság

A komplex függvények (ill. a többértékű komplex relációk egyértékű ágai, amelyek ugyancsak függvények!) egy pontbeli folytonosságára három egymással ekvivalens definíció adható:

Definíció I.

("Környezetes" értelmezés)

A H halmazon értelmezett f függvény folytonos a $z_0 \in H$ pontban, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

ha

$$|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$$

és $z \in H$.

Definíció II.

("Sorozatos" értelmezés)

f folytonos a $z_0 \in H$ pontban, ha tetszőleges $z_n \in H$ és

$$z_n \longrightarrow z_0$$

számsorozatra

$$f(z_n) \longrightarrow f(z_0).$$

Definíció III.

("Határértékes" értelmezés)

f folytonos a $z_0 \in H$ pontban, ha:

- a) $f(z_0)$ létezik,
- b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ létezik és véges,
- c) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

E három definíció ekvivalenciájának igazolása megegyezik a megfelelő valósbelivel.

Mivel a komplex függvények folytonosságát csak értelmezési tartományuk torlódási pontjaiban vizsgáljuk, ezért itt nem adjuk meg a folytonosság "izolált" pontra is vonatkozó (a többváltozós valós analizisből ismert) általánosabb értelmezését.

(b) Halmazbeli folytonosság

Az f komplex függvény értelmezési tartományának H részhalmazán folytonos, ha annak minden pontjában - legalább a H halmazra szorítkozva - folytonos. Ennek "környezetes" megfogalmazása:

Definíció I.

f folytonos a H halmazon, ha bármely $z_0 \in H$ esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$, hogy

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

ha

$$|z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)$$

és $z \in H$.

Megadható ezzel ekvivalens definíció "sorozatos" és "határértékes" megfogalmazásban is.

A pontbeli, ill. halmazbeli folytonosság szükséges és elégséges feltételét adja:

3.1.1. Tétel

Az f komplex függvény értelmezési tartományának egy z_0 pontjában, ill. egy H részhalmazán, akkor és csak akkor folytonos, ha ott mind a valós, mind a képzetes része - mint kétváltozós függvény - folytonos.

Bizonyítás

A tétel állítása a pontbeli ill. halmazbeli folytonosság definíciójának és a határérték szükséges és elégséges feltételét adó, 2.1.1. Tételnek a következménye. $\square$

(c) Egyenletes folytonosság

Definíció

("Környezetes" megfogalmazásban)

Az f komplex függvény egyenletesen folytonos értelmezési tartományának egy H részhalmazán, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy

$$|f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon$$

ha

$$|z_2 - z_1| < \delta(\varepsilon)$$

és

$$(z_1, z_2) \in H.$$

Az egyenletes folytonosság elégséges feltételét fejezi ki a

3.1.2. Tétel

Ha f folytonos értelmezési tartományának egy korlátos, zárt H részhalmazán, úgy ott egyenletesen folytonos.

Bizonyítás

A 3.1.1. Tétel értelmében az $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ függvény akkor és csak akkor folytonos egy halmazon, ha ott az u és v kétváltozós valós függvények folytonosak. Mivel a feltétel értelmében H korlátos és zárt, ott u és v egyenletesen folytonos, amiből az

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq |u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)| + |v(x_2, y_2) - v(x_1, y_1)|$$

egyenlőtlenség alapján f egyenletes folytonossága is következik. $\square$

3.2. FOLYTONOS KOMPLEX FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ NÉHÁNY TÉTEL

Az alábbiakban folytonos komplex függvényekre ismertetünk néhány később felhasználásra kerülő tételt, amelyek mindegyikének bizonyítása - a komplex függvény valós és képzetes részre bontása után - megegyezik az

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$$

kétváltozós valós függvényre vonatkozó megfelelő tétel bizonyításával.

3.2.1. Tétel

Ha az f komplex függvény értelmezési tartományának egy z_0 pontjában, ill. egy H részhalmazán folytonos, akkor ott az $|f|$ valós értékű függvény is folytonos.

3.2.2. Tétel

Ha az f komplex függvény értelmezési tartományának egy z_0 pontjában, ill. egy H részhalmazán folytonos, akkor ott konjugáltja, az $\bar{f}$ függvény is folytonos.

Korlátos, zárt halmazon folytonos komplex függvényekre hasonló tételek érvényesek, mint korlátos zárt halmazon folytonos kétváltozós valós függvényekre. Közülük csak a két legfontosabbat ismertetjük (amelyek bizonyítása ugyancsak a fent jelzett módon végezhető):

3.2.3. Tétel

(I. Weierstrass-tétel)

Ha az f komplex függvény értelmezési tartományának valamely korlátos zárt részhalmazán folytonos, akkor ott korlátos.

3.2.4. Tétel

(II. Weierstrass-tétel)

Ha az f komplex függvény értelmezési tartományának valamely korlátos, zárt $H \neq \emptyset$ részhalmazán folytonos, akkor ott a függvény abszolútértékének - az $|f|$ kétváltozós valós függvénynek - van legnagyobb és legkisebb értéke.

3.3. ALGEBRAI MŰVELETEK FOLYTONOS KOMPLEX FÜGGVÉNYEKKEL. ÖSSZETETT FÜGGVÉNY ÉS INVERZ FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

A valós analizisből ismert tételekkel analógok, és azokkal analóg módon bizonyíthatók az alábbi tételek:

3.3.1. Tétel

Ha az f és g függvények értelmezési tartományuk közös részének z_0 pontjában, ill. H részhalmazán folytonosak, akkor ott

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(z) + g(z) \\ (2) \quad & f(z) - g(z) \\ (3) \quad & f(z) \cdot g(z) \\ (4) \quad & \frac{f(z)}{g(z)} \quad (\text{ahol } g(z) \neq 0) \end{aligned}$$

is folytonos.

3.3.2. Tétel

Összetett függvény folytonossága

Legyen $f \circ g$ az S halmazon értelmezett összetett komplex függvény. Ha g folytonos egy $z_0 \in S$ pontban és f folytonos a megfelelő $g(z_0)$ pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is folytonos a z_0 pontban.

3.3.3. Tétel

Inverz függvény folytonossága

Ha az f egyrétű komplex függvény folytonos a z sík egy H halmazán és azt kölcsönösen egyértelműen képezi le a w sík egy H^* halmazára, akkor H^* -on f inverze, az f^{-1} függvény folytonos.

3.4. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Vizsgáljuk folytonosság szempontjából az

a)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{ha } z \neq 0 \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

$$b) \quad g(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|} & \text{ha } z \neq 0 \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvényeket a $z = 0$ helyen.

a) Az f függvény a $z = 0$ pont kivételével mindenütt folytonos.

Ugyanis: $\forall z \neq 0$ pontban - mint két folytonos függvény hányadosa - folytonos; a $z = 0$ pontban nem folytonos, mert ott nem létezik f határértéke, hiszen

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{re^{j\varphi}}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{j\varphi}$$

ami φ -től függő érték.

b) A g függvény mindenütt folytonos.

Ugyanis: $\forall z \neq 0$ pontban - mint két folytonos függvény hányadosa - folytonos; a $z = 0$ pontban is folytonos, mert ott a

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 e^{2j\varphi}}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{2j\varphi} = 0$$

határérték megegyezik a függvény helyettesítési értékével.

2. Állapítsuk meg, hogy hol folytonos az alábbi függvény

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z = 0 \text{ és } |z| \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q} & \text{ha } |z| = \frac{p}{q} \text{ racionális} \end{cases}$$

(p és q relatív primszámok).

Az f függvény folytonos a $z = 0$ pontban és minden olyan pontban, ahol $|z|$ irracionális. Minden más pontban nem folytonos.

Ugyanis: ha $z_0 = 0$ vagy $|z_0|$ irracionális, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található a z_0 helynek egy olyan kis környezete, hogy minden olyan z , amelyre $|z| = \frac{p}{q}$ racionális szám és $q < \frac{1}{\varepsilon}$ ezen a környezeten kívül fekszik. Így e környezetbe eső bármely z pontra

$$|f(z) - f(z_0)| < \mathcal{C} ,$$

ami éppen az f függvény z_0 -beli folytonosságát jelenti.

Ha ellenben $|z_0|$ racionális és $|z_0| = \frac{p_0}{q_0}$ és $\mathcal{C}$ -t úgy választjuk, hogy

$$0 < \mathcal{C} < \frac{1}{q_0} ,$$

akkor minden z_0 közelében levő z pontra (amelynek abszolút értéke irracionális)

$$|f(z) - f(z_0)| > \mathcal{C}$$

ami azt jelenti, hogy ezekben a pontokban f nem folytonos.

3. Döntsük el, hogy az

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|z|}} & \text{ha } z \neq 0 \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvény a $|z| < 1$ körtartományban egyenletesen folytonos-e?

Az f függvény egyenletesen folytonos az adott körtartományban.

Ugyanis: f értelmezéséből következik, hogy $\forall z \neq 0$ pontban folytonos; a $z = 0$ pontban is folytonos, mert ott a függvény határértéke megegyezik helyettesítési értékével:

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|z|}} = 0$$

Igy f az egész z síkon, tehát a korlátos és zárt $|z| \leq 1$ körtartományon is folytonos, amiből következik a függvény $|z| < 1$ körtartománybeli egyenletes folytonossága.

Harmadik fejezet
KOMPLEX FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

1. § KOMPLEX FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

1.1. PONTBELI DIFFERENCIÁLHATÓSÁG, DIFFERENCIÁL

A valós változóju függvényekével megegyező módon a komplex függvények - ill. többértékű relációk egyértékű ága - pontbeli differenciálhatóságára két egymással ekvivalens definíció adható:

Definíció I.

Az f komplex függvény értelmezési tartományának $z_0 \neq \infty$ torlódási pontjában differenciálható, ha ott létezik a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

véges határérték, amelyet $f'(z_0)$ -al jelölünk és az f függvény z_0 pontbeli differenciálhányadosának nevezzük.

Definíció II.

Az f komplex függvény differenciálható a $z_0 \neq \infty$ pontban, ha ott a függvény-megváltozás fölírható.

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = D(z_0) \cdot \Delta z + \zeta(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$$

alakban, ahol

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \zeta(z_0, \Delta z) = 0$$

és

$$D(z_0) = f'(z_0)$$

a függvény z_0 pontbeli differenciálhányadosa.

A két definíció és az általuk értelmezett differenciálhányadosok ekvivalenciájának igazolása az egyváltozós valós függvényekével analóg módon történhet.

Megjegyzés

(1) Definíció II fölírható

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = D(z_0) \Delta z + \xi(z_0, \Delta z)$$

alakban is, ahol

$$D(z_0) = f'(z_0)$$

és

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\xi}{|\Delta z|} = 0.$$

(2) Definíció II-ből következik a differenciál értelmezése:

Definíció

a z_0 pontban differenciálható f komplex függvény differenciálja a z_0 pontbeli függvénytér megváltozás fő része, azaz a

$$dw = f'(z_0) \Delta z$$

kifejezés.

(3) Definíció I-ből egyszerűen következik a differenciálhányados geometriai jelentése:

a $K(z_0)$ -ban differenciálható f komplex függvény által létesített leképezésnél

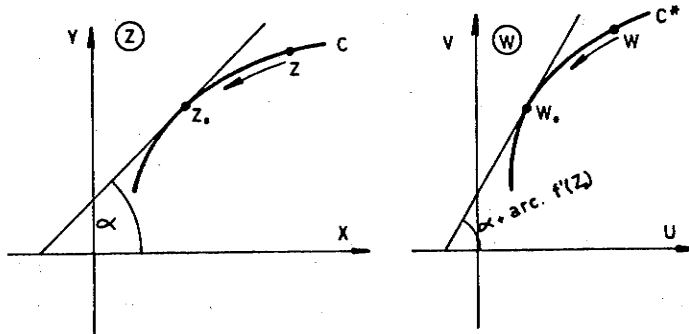
$|f'(z_0)|$: a z_0 pontbeli nyújtási együttható,

$\arg f'(z_0)$: a z_0 pontbeli elfordulási szög, (feltéve, hogy $f'(z_0) \neq 0$).

Hogy ezt illusztrálhassuk, az $f'(z_0)$ meghatározásához szükséges különbségi hányados határértékét úgy képezzük, hogy egy z_0 ponton átmenő, a z_0 pontban α irányszögű érintővel rendelkező C görbe pontjai mentén tartunk z_0 -hoz. Ekkor a $w = f(z)$ leképezésnél a képpontok a C görbe w síkbeli képén, a $w_0 = f(z_0)$ ponton átmenő C^* görbén tartanak $f(z_0)$ -hoz (ld. 17. ábra). Ilyen pontok segítségével előállítva a z_0 pontbeli különbségi hányadost, $f'(z_0)$ -ra az alábbiak adódnak:

a) A z_0 pontbeli differenciálhányados abszolútértéke:

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|},$$



17. ábra

ami azt jelenti, hogy ha z elég közel van z_0 -hoz, akkor

$$|w - w_0| \sim |f'(z_0)| |z - z_0|,$$

vagyis a leképezés a z_0 pont elég kis környezetében $|f'(z_0)|$ -szorosra nagyít. Az $|f'(z_0)|$ arányossági tényező - az ún. nyújtási együttható - nem függ sem C alakjától, sem C irányától, csak a z_0 ponttól és így minden, a z_0 pontot tartalmazó, görbeszakaszra azonos.

Tehát: $|f'(z_0)|$ az a számérték, amellyel a z_0 pontot tartalmazó kis görbeszakasz a $w = f(z)$ függvény által létesített leképezés során megnyúlik (ha $|f'(z_0)| > 1$) ill. összehúzóódik (ha $|f'(z_0)| < 1$).

b) A z_0 pontbeli differenciálhányados arcusa:

a hányados arcusára és a különbség határértékére vonatkozó tétel felhasználásával:

$$\begin{aligned} \text{arc } f'(z_0) &= \text{arc } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \text{arc } \frac{w - w_0}{z - z_0} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \text{arc } (w - w_0) - \lim_{z \rightarrow z_0} \text{arc } (z - z_0), \end{aligned}$$

ami 2π egész számu többszöröseinek hozzáadásától eltekintve egyértelmű. Mivel $\lim_{z \rightarrow z_0} [\text{arc } (z - z_0)] = \alpha$ létezik (ahol α a C görbe z_0 pontbeli érintőjének iránytangense), ezért $\text{arc } (w - w_0)$ -nak is van határértéke a w_0 pontban:

$$\lim_{w \rightarrow w_0} [\text{arc } (w - w_0)] = \alpha + \text{arc } f'(z_0).$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a C^* képgörbének is van érintője a w_0 pontban és ez az érintő a w sík valós tengelyével $\alpha + \arg f'(z_0)$ szöget zár be. Azaz: a C görbének a $w = f(z)$ leképezéssel adódó képe, a C^* görbe, C -ből az $f(z_0)$ pont körüli $\arg f'(z_0)$ szöggel való elforgatással áll elő. Minthogy $\arg f'(z_0)$ nem függ sem C alakjától, sem C irányától, csak a z_0 ponttól, így az elfordulás minden z_0 ponton átmenő, z_0 -ban érintővel rendelkező görbére ugyanaz.

Tehát: $\arg f'(z_0)$ az a szög, amellyel a z_0 pontban érintővel rendelkező tetszőleges C görbe az f függvény által létesített leképezés során elfordul.

A pontbeli differenciálhatóság definíciója kiterjeszthető a végtelenre is:

Definíció:

Legyen H a ∞ környezete Z^∞ -ben és $f: H \rightarrow Z$.

Az $f(z)$ komplex függvény differenciálható a ∞ -ben, ha $f\left(\frac{1}{z}\right)$ differenciálható a $z = 0$ pontban.

1.2. HALMAZBELI DIFFERENCIÁLHATÓSÁG. DERIVÁLT FÜGGVÉNY

Definíció

Az f komplex függvény értelmezési tartományának H részhalmaza differenciálható, ha annak minden pontjában differenciálható.

E definícióból adódik a derivált függvény értelmezése:

Definíció

A H halmazon differenciálható f komplex függvény derivált függvénye az a H halmazon értelmezett függvény, amely $\forall z \in H$ -hoz $f'(z)$ -t rendel.

1.3. A DIFFERENCIÁLHATÓSÁG NÉHÁNY FELTÉTELE

Az alábbiakban ismertetünk néhány - a valós függvényekével megegyező - alapvető feltételt komplex függvény differenciálhatóságára.

(a) Szükséges feltétel

1.3.1. Tétel

Ha f differenciálható egy z_0 pontban - ill. egy H halmazon - úgy ott folytonos.

Bizonyítás

megegyezik az egyváltozós valós függvényre vonatkozó megfelelő tétel bizonyításával. $\square$

(b) Szükséges és elégséges feltétel

1.3.2. Tétel

Az $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ függvény akkor és csak akkor differenciálható a $z = x + jy$ pontban, ha ott az u és v kétváltozós valós függvények differenciálhatók és parciális deriváltjaik kielégítik az

$$u'_x = v'_y$$

$$u'_y = -v'_x$$

Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenleteket. Ekkor a differenciálhányados:

$$f'(z) = u'_x + jv'_x.$$

Bizonyítás

a) A feltétel szükséges:
ugyanis, ha f differenciálható a $z = x + jy$ pontban, akkor ott

$$f(z + \Delta z) - f(z) = D(z) \Delta z + \mathcal{E}(z, \Delta z) \Delta z,$$

ahol $D = f'(z)$ és $\mathcal{E} \rightarrow 0$, ha $\Delta z \rightarrow 0$. Alkalmazva a

$$\Delta z = \Delta x + j \Delta y,$$

$$f'(z) = D_1 + j D_2,$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + j \mathcal{E}_2$$

jelöléseket, az $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ függvény differenciálhatóságát kifejező összefüggés részletesebben felírt alakja:

$$\begin{aligned} & [u(x + \Delta x, y + \Delta y) + jv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + jv(x, y)] = \\ & = (D_1 + j D_2) (\Delta x + j \Delta y) + (\xi_1 + j \xi_2) (\Delta x + j \Delta y), \end{aligned}$$

ahol D_1 és D_2 állandó és $\xi_1, \xi_2 \rightarrow 0$, ha $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Rendezve:

$$\begin{aligned} & [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + j[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \\ & = (D_1 \Delta x - D_2 \Delta y + \xi_1 \Delta x - \xi_2 \Delta y) + j(D_2 \Delta x + D_1 \Delta y + \xi_2 \Delta x + \xi_1 \Delta y). \end{aligned}$$

Ez a komplex egyenlet ekvivalens az u és v kétváltozós valós függvények differenciálhatóságát jelentő:

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = D_1 \Delta x - D_2 \Delta y + \xi_1 \Delta x - \xi_2 \Delta y$$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = D_2 \Delta x + D_1 \Delta y + \xi_2 \Delta x + \xi_1 \Delta y$$

valós egyenletrendszerrel. Ezért az első egyenletben:

$$D_1 = u'_x(x, y) \quad \text{és} \quad D_2 = -u'_y(x, y),$$

a második egyenletben:

$$D_1 = v'_y(x, y) \quad \text{és} \quad D_2 = v'_x(x, y),$$

amiből következik, hogy az (x, y) pontban teljesülnek az

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \end{aligned}$$

un. Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek.

Tehát ha f differenciálható a $z = x + jy$ pontban, akkor ott az u és v függvények is differenciálhatók és parciális deriváltjaik kielégítik a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket.

b) A feltétel elégséges:

ugyanis, ha az u és v függvények differenciálhatók a $z = x + jy$ pontban, akkor ott

$$\Delta u = u'_x(x, y) \Delta x + u'_y(x, y) \Delta y + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y$$

$$\Delta v = v'_x(x, y) \Delta x + v'_y(x, y) \Delta y + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y$$

ahol $\epsilon_1, \epsilon_2, \eta_1, \eta_2 \rightarrow 0$, ha $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. Így

$$\Delta u + j \Delta v = (u'_x + jv'_x) \Delta x + (v'_y - ju'_y) j \Delta y + \varrho,$$

ahol

$$|\varrho| \leq (|\epsilon_1| + |\eta_1|) |\Delta x| + (|\epsilon_2| + |\eta_2|) |\Delta y|$$

Mivel a feltétel értelmében az u és v függvények parciális deriváltjai kielégítik a Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenleteket, ezért a jobb oldali második zárójelben v'_y helyett u'_x -et, u'_y helyett pedig $(-v'_x)$ -et írva, majd az egyenlőséget rendezve, a függvénymegváltozásra a

$$\Delta u + j \Delta v = (u'_x + jv'_x) (\Delta x + j \Delta y) + \varrho$$

összefüggés adódik. Alkalmazva a

$$\Delta u + j \Delta v = f(z + \Delta z) - f(z)$$

és a

$$\Delta x + j \Delta y = \Delta z$$

jelöléseket:

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (u'_x + jv'_x) \Delta z + \frac{\varrho}{\Delta z} \Delta z.$$

Mivel itt $|\Delta z| \rightarrow 0$ esetén

$$\left| \frac{\varrho}{\Delta z} \right| \leq |\epsilon_1| + |\eta_1| + |\epsilon_2| + |\eta_2| \rightarrow 0,$$

ezért ez az összefüggés az f függvény $z = x + jy$ pontbeli differenciálhatóságát jelenti, ahol a differenciálhányados

$$f'(z) = u'_x + jv'_x,$$

az állításnak megfelelően. $\square$

Megjegyzés

Az 1.3.2. Tétel igazolása során adódó

$$f'(z) = u'_x + jv'_x$$

derivált - a differenciálható függvényekre fennálló Cauchy-Riemann össze-függések felhasználásával - még az

$$f'(z) = v'_y - ju'_y,$$

illetve

$$f'(z) = u'_x - ju'_y,$$

illetve

$$f'(z) = v'_y + jv'_x$$

formulák bármelyikével is felírható.

(c) Elégséges feltétel

1.3.3. Tétel

Ha egy z_0 pontban - ill. egy H halmazon - az f komplex függvény valós, 0 és képzetes részének elsőrendű parciális deriváltjai léteznek, folytonosak és kielégítik a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenleteket, akkor ott a függvény differenciálható.

Bizonyítás

Az $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ komplex függvény valós és képzetes része parciális deriváltjainak folytonossága e függvények differenciálhatóságának elégséges feltétele. Ezért e tétel bizonyítása megegyezik az 1.3.2. Tétel elégséges részének bizonyításával. $\square$

1.4. DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY DIFFERENCIÁLÁSA

A valós változós függvények differenciálási szabályai érvényesek komplex változós függvényekre is, hiszen azok a definíciók és tételek, amelyeken e szabályok alapulnak, valós és komplex változó esetén megegyeznek.

Érvényes tehát:

1.4.1. Tétel

Amennyiben az f és g komplex függvények a z_0 pontban - ill. a H halmazon - differenciálhatók, úgy ott összegük, különbségük, konstanssal való szorzatuk, szorzatuk, hányadosuk (feltéve, hogy a nevezőbeli függvény $\neq 0$) differenciálható és

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (g \neq 0)$$

Ugyancsak a valós analízis megfelelő tétéleivel analóg módon igazolható az alábbi két tétel:

Az inverz függvény differenciálására vonatkozó

1.4.2. Tétel

Ha az egyrétű f komplex függvény differenciálható a z_0 pontban és környezetében és $f'(z_0) \neq 0$, akkor inverze az f^{-1} függvény differenciálható $f(z_0)$ -ban és

$$\left[f^{-1}\right]'_{f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Az összetett függvény differenciálására vonatkozó

1.4.3. Tétel

Ha $f \circ g$ az S halmazon értelmezett összetett komplex függvény, ahol g valamely $z_0 \in S$ pontban és f a megfelelő $g(z_0)$ pontban differenciálható, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható a z_0 pontban és

$$(f \circ g)'(z_0) = \left[f(g(z))\right]'_{z_0} = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0).$$

1.5. MAGASABB RENDŰ DERIVÁLTAK. L' HOSPITAL-TÉTEL

A komplex függvények magasabbrendű deriváltjai a valós függvényekével analóg módon értelmezhetők:

Definíció

Ha f' differenciálható egy z_0 pontban és környezetében, úgy

$$f''(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z) - f'(z_0)}{z - z_0}$$

és tetszőleges k pozitív egész számra:

$$f^{(k)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(k-1)}(z) - f^{(k-1)}(z_0)}{z - z_0}.$$

A definiáló különbségi-hányados határértékek a z_0 pontban és környezetében differenciálható komplex függvények esetében mindig léteznek. Fennáll ugyanis a később (V. fejezetben) bizonyításra kerülő:

1.5.1. Tétel

Ha az f komplex függvény differenciálható egy z_0 pontban és környezetében - ill. egy H nyílt halmazon - akkor ott akárhányszor differenciálható.

Megjegyezzük, hogy ezzel a tulajdonsággal a valós változós függvények nem rendelkeznek. Ha egy valós változós függvény differenciálható egy pontban és környezetében, abból még nem következik a függvény ottani második differenciálhányadosának létezése - sőt első differenciálhányadosának folytonossága - sem.

A valós függvényeknél megismertekkel azonos módon, komplex függvények esetében is az elsőrendű deriváltakra vonatkozó differenciálási szabályok ismételt alkalmazásával kapjuk a magasabb rendű deriváltakra vonatkozókat.

A z_0 pontban és környezetében differenciálható komplex függvények hányadosának - $\frac{0}{0}$ ill. $\frac{\infty}{\infty}$ típusu - határérték-meghatározását segíti elő a valós analizisből ismert, ott általánosabb esetre is kimondott

L'Hospital-tétel

Ha az f és g komplex függvények egy z_0 pont környezetében differenciálhatók, továbbá

$$f(z_0) = g(z_0) = 0 \quad (\text{ill. } \infty)$$

és

$$g'(z_0) \neq 0,$$

akkor

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

feltéve, hogy a jobb oldali hányados létezik.

Ha $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$ (ill. ∞) és $g''(z_0) \neq 0$, akkor a tétel ismételten alkalmazható.

Bizonyítás

a) $\frac{0}{0}$ esetre:

A tételbeli feltételek miatt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \Delta z + \xi_1 \Delta z = [f'(z_0) + \xi_1] \Delta z$$

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0) \Delta z + \xi_2 \Delta z = [g'(z_0) + \xi_2] \Delta z$$

ahol $\lim_{z \rightarrow z_0} \xi_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \xi_2 = 0$ és így

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[f'(z_0) + \xi_1] \Delta z}{[g'(z_0) + \xi_2] \Delta z} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

feltéve, hogy a jobb oldali hányados létezik.

b) $\frac{\infty}{\infty}$ esetre a bizonyítás a $\frac{0}{0}$ alakra vonatkozóból közvetlenül átvihető, ha feltételezzük az $\frac{1}{f(z)}$ és $\frac{1}{g(z)}$ függvények $K(z_0)$ -beli differenciálhatóságát. $\square$

1.6. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. A különbségi hányados határértéke segítségével vizsgáljuk az

$$f(z) = z \operatorname{Re} z$$

függvény differenciálhatóságát.

A függvény különbségi hányadosának határértéke:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)(x + \Delta x) - zx}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{x\Delta z + z\Delta x + \Delta z\Delta x}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (x + \Delta x + z \frac{\Delta x}{\Delta z}). \end{aligned}$$

Ez a határérték csak a $z = 0$ helyen létezik, mert máshol $\Delta z \rightarrow 0$ esetén a $\frac{\Delta x}{\Delta z}$ hányadosnak nincs határértéke. Ezért a függvény csak a $z = 0$ helyen differenciálható és ott

$$\left[\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (x + \Delta x + z \frac{\Delta x}{\Delta z}) \right]_{(0,0)} = 0$$

miatt

$$f'(0) = 0.$$

2. Illusztráljuk a

$$w = \bar{z}$$

függvény segítségével, hogy a folytonosság a komplex függvény differenciálhatóságának csak szükséges, de nem elégséges feltétele.

A $w = \bar{z}$ függvény - mint a mindenütt folytonos $w = z$ függvény konjugáltja - mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható, mert különbségi hányadosának, a

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\Delta r (\cos \varphi - j \sin \varphi)}{\Delta r (\cos \varphi + j \sin \varphi)} = \cos 2\varphi - j \sin 2\varphi$$

függvénynek $|\Delta z| = \Delta r \rightarrow 0$ esetén nem létezik határértéke (értéke φ -től függ!)

3. Illusztráljuk az

$$f(z) = \sqrt{|x \cdot y|}$$

komplex függvény segítségével, hogy a parciális deriváltak létezése és a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenletek teljesülése a komplex függvény differenciálhatóságának csak szükséges, de nem elégséges feltétele.

Az $f(z) = \sqrt{|x \cdot y|}$ függvény esetén

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \sqrt{|x \cdot y|}$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 0$$

A v függvény mindenütt, az u pedig az x és y tengelyek mentén parciális deriváltjaival együtt eltűnik. A Cauchy-Riemann egyenletek a $z = 0$ pontban teljesülnek, a függvény itt mégsem differenciálható, mert a

$$\left[\frac{\Delta f}{\Delta z} \right]_{z=0} = \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\Delta x + j \Delta y}$$

különbségi hányadosnak itt nem létezik határértéke. (pl. $\Delta y = \Delta x$ esetén a határérték $\Delta x \rightarrow 0^+$ -ra: $\frac{1}{1+j}$, míg $\Delta x \rightarrow 0^-$ -ra: $-\frac{1}{1+j}$).

4. A differenciálhatóság Cauchy-Riemann egyenletekkel megfogalmazott szükséges és elégséges feltétele alapján döntsük el, hogy hol differenciálható az

a) $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y$

és

b) $f(z) = \bar{z} + 3z^2$

függvény.

a) Az

$$f(z) = \sin x \operatorname{ch} y - j \cos x \operatorname{sh} y$$

függvény valós és képzetes része mindenütt differenciálható, de parciális deriváltjaik:

$$u'_x = \cos x \operatorname{ch} y,$$

$$v'_x = \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$u'_y = \sin x \operatorname{ch} y,$$

$$v'_y = -\cos x \operatorname{ch} y$$

nem mindenütt elégítik ki a Cauchy-Riemann differenciálegyenleteket. Az

$$u'_x = v'_y$$

egyenlőség csak

$$\cos x = 0, \quad \text{azaz} \quad x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

esetén, míg ezekre az x -ekre az

$$u'_y = -v'_x$$

egyenlőség csak

$$\sin y = 0, \quad \text{azaz} \quad y = 0$$

esetén áll fenn. Így a Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletek csak az

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$y = 0$$

pontokban teljesülnek, a függvény csak ezekben a pontokban differenciálható és e pontokban deriváltja zérus.

b) Az $f(z) = \bar{z} + 3z^2$ függvény seholsem differenciálható. Bár valós és képzetes része:

$$u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + x$$

$$v(x, y) = 6xy - y$$

mindenütt differenciálható, de parciális deriváltjaik nem elégítik ki a Cauchy-Riemann egyenleteket. Ugyanis

$$\left. \begin{aligned} u'_y &= -6y \\ -v'_x &= -6y \end{aligned} \right\} \quad \text{mindenütt egyenlő,}$$

de

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= 6x + 1 \\ v'_y &= 6x - 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{sehol nem egyenlő.}$$

5. Illusztráljuk az

$$f(z) = \begin{cases} |z|^2 \sin \frac{1}{|z|^2}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

komplex függvény segítségével, hogy a valós és képzetes rész parciális deriváltjainak folytonossága és a Cauchy-Riemann differenciálegyenletek teljesülése a komplex függvény differenciálhatóságának (elégséges, de) nem szükséges feltétele.

Az

$$f(z) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + j \cdot 0$$

függvény valós és képzetes részének parciális deriváltjai

$$u'_x = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$u'_y = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$v'_x = 0$$

$$v'_y = 0$$

Ezek a $z = 0$ pontban kielégítik a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenleteket, de ott u'_x és u'_y nem folytonos. A $z = 0$ pontban tehát nem teljesül a differenciálhatóság 1.3.3. Tételben megfogalmazott elégséges feltétele. A függvény ott mégis differenciálható, mert létezik a

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta f}{\Delta z} \right]_{z=0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|^2 \sin \frac{1}{|\Delta z|^2}}{\Delta z} = 0$$

határérték.

2.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK REGULARITÁSA

2.1. REGULARITÁS PONTBAN ÉS HALMAZON

A komplex analízisben fontos szerepe van a pontban és környezetében, valamint a nyílt halmazon differenciálható függvényeknek, éppen ezért ezeket külön elnevezéssel látták el:

Definíció

f reguláris a z_0 pontban: ha z_0 -ban és környezetében differenciálható;

f reguláris a H nyílt halmazon: ha annak minden pontjában differenciálható.

Látható:

a pontbeli regularitásnak több feltétele van, mint a pontbeli differenciálhatóságnak. Lehet, hogy egy függvény egy pontban differenciálható, de ott nem reguláris, mert a pontnak nincs olyan környezete, amelyben a függvény differenciálható (ld. 2.4. fejezet 1/b. példa).

Ezzel szemben a nyílt halmazbeli regularitásnak és differenciálhatóságnak azonosak a feltételei: ha f differenciálható egy H nyílt halmazon, akkor ott egyszersmind reguláris is. Ennek következménye, hogy nyílt halmazon reguláris függvényekre ugyanazok a tételek érvényesek, mint nyílt halmazon differenciálható függvényekre. A továbbiakban a "halmazbeli differenciálhatóság" és a "halmazbeli regularitás" kifejezéseket nyílt halmazok esetén azonos értelemben fogjuk használni.

2.2. REGULÁRIS KOMPLEX FÜGGVÉNY ÉS HARMONIKUS VALÓS FÜGGVÉNY KAPCSOLATA. HARMONIKUS TÁRSFÜGGVÉNY

Szoros kapcsolat van egy adott tartományon reguláris komplex függvény és e tartományon értelmezett valós harmonikus függvény között. E kapcsolat következményei eredményesen használhatók a fizikában és az alkalmazott matematika minden olyan területén, ahol harmonikus függvények szerepelnek.

Definíció

Az n változós $f(\underline{r}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvény egy T tartományban harmonikus, ha ott kétszer folytonosan differenciálható és tiszta másodrendű parciális deriváltjai kielégítik a

$$\Delta f = f''_{x_1 x_1} + f''_{x_2 x_2} + \dots + f''_{x_n x_n} = 0$$

un. Laplace-féle parciális differenciálegyenletet.

A kétváltozós harmonikus függvény és a reguláris komplex függvény kapcsolatát fejezi ki a

2.2.1. Tétel

Egy T tartományban reguláris komplex függvény valós és képzetes része T -ben harmonikus függvény.

Azaz: a T -ben reguláris $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ komplex függvény valós és képzetes részére teljesülnek a

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

és

$$\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$$

síkbeli Laplace-féle differenciálegyenletek.

Bizonyítás

Az 1.5.1. Tétel értelmében egy T -ben reguláris komplex függvény valós és képzetes része ott akárhányszor differenciálható. Így az

$$u'_x = v'_y$$

$$u'_y = -v'_x$$

Cauchy-Riemann differenciálegyenletek közül az első x és a másodikat y (ill. az első y és a másodikat x) szerint differenciálva, majd a kapott differenciálegyenleteket összeadva (ill. kivonva); továbbá a vegyes parciális deriváltak egyenlőségét felhasználva a

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$$

Laplace-féle differenciálegyenletek adódnak. $\square$

Egyszeresen összefüggő T tartomány esetében a 2.2.1. Tételben kimondott állítás megfordítható, vagyis érvényes a

2.2.2. Tétel

Ha az u és v kétváltozós valós függvények, az egyszeresen összefüggő T tartományban harmonikus függvények és ott parciális deriváltjaik kielégítik a Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenleteket, akkor a velük képezett

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y),$$

ill.

$$f^*(z) = v(x, y) - ju(x, y)$$

komplex függvény reguláris. $\square$

Bizonyítás

Mivel az u és v függvények az egyszeresen összefüggő T -ben harmonikus függvények, ezért ott differenciálhatók; mivel parciális deriváltjaik T -ben kielégítik a Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenleteket is, ezért ott az

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y),$$

ill. az

$$f^*(z) = v(x, y) - ju(x, y)$$

függvényre teljesülnek a differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételei. Tehát az f és az f^* függvény T -ben differenciálható, illetve reguláris.

A 2.2.1. és 2.2.2. Tételek következménye a

2.2.3. Tétel

Az egyszeresen összefüggő T tartományban harmonikus u kétváltozós valós függvényhez mindig található - additív konstanstól eltekintve egyértelműen - olyan, T -ben harmonikus v kétváltozós valós függvény (un. harmonikus társfüggvény), hogy a velük képezett

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

ill.

$$f^*(z) = v(x, y) - ju(x, y)$$

komplex függvény T -ben reguláris függvény.

Bizonyítás

Az u kétváltozós függvénynek és v harmonikus társának T -ben ki kell elégítenie a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket. Így ismert a keresett v függvény teljes differenciálja:

$$dv = -u'_y dx + u'_x dy$$

amiből - korábbi ismereteink alapján - a v függvény integrálással meghatározható. Éspedig

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u'_y dx + u'_x dy),$$

ahol az integrálás a T -beli rögzített (x_0, y_0) és a változó (x, y) pontokat összekötő, tetszőleges T -ben haladó L rektifikálható görbe mentén végezhető.

Az így előállított v függvény nem egyértelmű, függ a T -ben tetszőlegesen rögzített (x_0, y_0) ponttól. Tehát az adott u függvény végtelen sok - a feltételeknek eleget tevő - v függvényt határoz meg, amelyek azonban csak additív konstansban különböznek egymástól.

Az előállított v függvények harmonikusak, mert bármelyikükkel és az adott u függvénnyel képezett

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y),$$

ill.

$$f^*(z) = v(x, y) - ju(x, y)$$

komplex függvény reguláris (hiszen a v függvényt úgy határoztuk meg, hogy T -ben az u és v parciális deriváltjai folytonosak legyenek és ki-elégítsék a Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenleteket).□

Megjegyzés

A T -ben harmonikus u kétváltozós valós függvényhez a v harmonikus társfüggvény más módon - például az alábbi módon - is meghatározható:

A feltétel szerint szükséges, hogy az u és v függvények T -ben ki-elégítsék a Cauchy-Riemann differenciálegyenleteket. Közülük például a

$$v'_x = -u'_y$$

ami azt jelenti, hogy az adott u harmonikus függvénnyel együtt ismert a keresett v függvény x szerinti parciális deriváltja is. Ezért a v függvény - egy T -ben y szerint differenciálható $\varphi(y)$ függvény hozzáadásától eltekintve egyértelműen - meghatározható a vele ekvivalens $(-u'_y)$ függvény x szerinti integrálásával:

$$v(x, y) = \left[\int_{x_0}^x (-u'_y) dx \right] + \varphi(y).$$

Az így nyert v függvény y szerinti differenciálhányadosának a másik Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenlettel való egybevetéséből - vagyis a

$$\left. \begin{aligned} v'_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_0}^x (-u'_y) dx \right] + \varphi'(y) \\ v'_y &= u'_x \end{aligned} \right\}$$

elsőrendű differenciálegyenletrendszerből $\varphi(y)$ és vele együtt a keresett v függvény - ugyancsak egy additív konstántól eltekintve egyértelműen - meghatározható. Az így előállított v függvényekről - az előző eljárásnál ismertett módon - kimutatható, hogy T -ben harmonikus függvények.

2.3. REGULÁRIS KOMPLEX FÜGGVÉNY ÉS VEKTORFÜGGVÉNY KAPCSOLATA. KOMPLEX POTENCIÁL

Egyszeresen összefüggő T tartományban a reguláris komplex függvények, valamint a divergencia- és rotációmentes síkbeli vektorfüggvények bizonyos vonatkozásban azonos tulajdonságokkal rendelkeznek.

Egyrészt ugyanis:

minden reguláris komplex függvény valós és képzetes része harmonikus (ld. 2.2.1. Tétel);

másrészt:

minden divergencia- és rotáció-mentes vektortér skalár potenciál-függvénye harmonikus (ugyanis: $\text{rot } \underline{v} = 0 \rightarrow \text{van } \phi(\underline{r})$ skalárpotenciál-függvény, amelyre $\text{grad } \phi = \underline{v}$ egy egyszerűen összefüggő T -ben; ezt egybevetve a $\text{div } \underline{v} = 0$ feltétellel, adódik a $\text{div grad } \phi = \Delta \phi = 0$ állítás).

E tulajdonságok következménye az alábbi két tétel:

2.3.1 Tétel

Egyszeresen összefüggő tartományon reguláris komplex függvény akár valós, akár képzetes része (additív konstansól eltekintve egyértelműen) meghatároz divergencia- és rotáció-mentes síkvektorteret (vektormezőt).

Attól függően, hogy a komplex függvény $u(x, y)$ valós, vagy $v(x, y)$ képzetes részét választjuk a síkvektortér skalárpotenciál függvényének a

$$\underline{w}(r) = \text{grad } u + c$$

ill.

$$\underline{w}^*(r) = \text{grad } v + c^*$$

a kívánt tulajdonságú vektorterek.

Bizonyítás

A reguláris komplex függvény $u(x, y)$ valós részével előállított

$$\underline{w}(r) = \text{grad } u + c$$

síkvektortér divergencia- és rotáció-mentes.

Ugyanis

$$\text{div } \underline{w} = \text{div grad } u = \Delta u = 0,$$

mert $u(x, y)$ mint reguláris komplex függvény valós része harmonikus;

$$\text{rot } \underline{w} = \text{rot grad } u = 0$$

a $\text{rot grad } u = 0$ azonosság miatt.

Hasonlóan látható be a tétel állítása a $\underline{w}^*(r)$ vektorfüggvényre is. $\square$

E tétel megfordítása:

2.3.2. Tétel

Egyszeresen összefüggő T tartományban divergencia- és rotáció-mentes sík-vektortér - additív konstansól eltekintve egyértelműen - meghatároz T -ben reguláris komplex függvényt.

Éspedig a

$$f(z) = \phi(x, y) + j\psi(x, y)$$

ill.

$$f^*(z) = \gamma(x, y) - j \phi(x, y)$$

reguláris komplex függvényt, a szerint, hogy a vektortér ϕ skalárpotenciálfüggvényét a komplex függvény valós részének, ill. képzetes része (-1) -szeresének választjuk.

Bizonyítás

A $\text{rot } \underline{v} = 0$ feltételből következik, hogy az egyszeresen összefüggő T -ben a síkvektortérnek van ϕ skalárpotenciálfüggvénye, annak pedig mint harmonikus függvénynek van γ harmonikus társfüggvénye. Ezekkel a függvényekkel a fenti módon képezett $f(z)$ ill. $f^*(z)$ függvények a 2.2.3. Tétel értelmében regulárisak. $\square$

A divergencia- és rotációmentes sík-vektortérhez a fenti módon konstruált f reguláris komplex függvénynek az alkalmazásokban fontos szerepe van, ezért külön elnevezést vezettek be számára.

Definíció

Komplex potenciálfüggvény

a divergencia- és rotációmentes síkvektortér ϕ skalárpotenciálfüggvényével és annak γ harmonikus társfüggvényével képezett

$$f(z) = \phi(x, y) + j \gamma(x, y)$$

reguláris komplex függvény.

A komplex potenciálfüggvény (ill. röviden komplex potenciál) képzetes részét erő- vagy áramfüggvénynek szokás nevezni, mert - mint azt a 2.3.4. Tételben igazolni fogjuk - a $\gamma(x, y)$ kétváltozós valós függvény szintvonalai párhuzamosak a síkvektortér (az erőtér) erővonalaival. Ez indokolja

$$\phi(x, y) = c : \text{ekvipotenciális vonalak}$$

és a

$$\gamma(x, y) = k : \text{erő- (ill. áram-) vonalak}$$

elnevezéseket is.

A komplex potenciál ismeretében meghatározhatók a divergencia- és rotáció-mentes síkvektortér jellemzői: a tér vektorainak iránya és nagysága. Ezt fejezi ki a

2.3.3. Tétel

A komplex potenciál differenciálhányadosának konjugáltja minden pontban "ekvivalens a divergencia- és rotációmentes síkvektortér vektorával"; differenciálhányadosának (ill. konjugáltjának) abszolútértéke minden pontban megegyezik a síkvektortér vektorának abszolútértékével.

[Egy "komplex függvénnyel ekvivalens kétdimenziós vektortér":

$$p(x, y) + jq(x, y) \simeq p(x, y) \underline{i} + q(x, y) \underline{j}]$$

Bizonyítás

Ha a divergencia- és rotáció-mentes $\underline{v} = p(x, y)\underline{i} + q(x, y)\underline{j}$ síkvektortér komplex potenciálfüggvénye $f(z) = \phi(x, y) + j\psi(x, y)$ akkor ezek kapcsolatát, valamint regularitását figyelembe véve:

$$f'(z) = \phi'_x + j\psi'_x = p(x, y) - j q(x, y)$$

ugy, hogy

$$\overline{f'(z)} = p(x, y) + jq(x, y) \simeq \underline{v}$$

és

$$|\overline{f'(z)}| = |f'(z)| = \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y)} = |\underline{v}|$$

az állításnak megfelelően. $\square$

A komplex potenciál ismeretében meghatározható a divergencia- és rotáció-mentes síkvektortér szerkezete is. Ha ugyanis $f(z)$ komplex potenciál, akkor a $\operatorname{Re} f(z) = c$ állandó, ill. $\operatorname{Im} f(z) = k$ állandó vonalak és a vektormező ekvipotenciális vonalainak, valamint erővonalainak kapcsolatát fejezi ki a

2.3.4. Tétel

A divergencia- és rotáció-mentes síkvektortér által meghatározott komplex potenciál valós és képzetes részének szintvonalai merőlegesek egymásra; képzetes részének szintvonalai párhuzamosak a vektortér erővonalával.

Bizonyítás

Legyen a divergencia- és rotáció-mentes vektortér

$$\underline{v}(\underline{r}) = p(x, y) \underline{i} + q(x, y) \underline{j}$$

és ennek komplex potenciálja:

$$f(z) = \phi(x, y) + j \psi(x, y),$$

akkor

$$a) \quad \phi(x, y) = c \perp \psi(x, y) = k,$$

mert

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \psi &= (\phi'_x \underline{i} + \phi'_y \underline{j}) (\psi'_x \underline{i} + \psi'_y \underline{j}) = \\ &= (p\underline{i} + q\underline{j}) (-q\underline{i} + p\underline{j}) = 0 \end{aligned}$$

$$b) \quad \psi(x, y) = k \parallel \underline{v}(r),$$

ugyanis

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y) &= c \perp \psi(x, y) = k \\ \phi(x, y) &= c \perp \underline{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi(x, y) = k \parallel \underline{v}$$

az állításnak megfelelően. $\square$

Megjegyzés

A komplex potenciállal kapcsolatos tételekben feltételeztük, hogy a síkvektortér egy egyszeresen összefüggő tartományban divergencia- és rotációmentes, amiből következik - bár nem hangsúlyoztuk - hogy a potenciálfüggvény és az erőfüggvény, valamint velük együtt a komplex potenciál is egyértékű, tehát függvény.

Többszörösen összefüggő tartományban a komplex potenciál általában (valós része többértékűségének következtében) többértékű reláció. Azonban a többszörösen összefüggő tartomány bármely egyszeresen összefüggő részében kiválasztható a komplex potenciál egyértékű és így reguláris ága.

2.4. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Vizsgáljuk regularitás szempontjából az

$$a) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

$$b) \quad f(z) = z |z|$$

$$c) \quad f(z) = \sqrt{1 + z^2}$$

függvényeket.

a) A Cauchy-Riemann egyenletek alapján igazolható, hogy az

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

függvény a $z = +j$ és $z = -j$ pontok kivételével mindenütt differenciálható és így e pontok kivételével mindenütt reguláris.

b) Az

$$f(z) = z|z| = (x+jy) \sqrt{x^2 + y^2} = x \sqrt{x^2 + y^2} + jy \sqrt{x^2 + y^2}$$

függvény valós és képzetes részének parciális deriváltjai csak a $z = 0$ pontban elégítik ki a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenleteket. Így e függvény csak a $z = 0$ pontban differenciálható, de ott nem reguláris, mert a $z = 0$ pontnak nincs olyan környezete, amelyben a függvény differenciálható volna.

c) Az

$$f(z) = \sqrt{1 + z^2}$$

függvény a

$$g(z) = 1 + z^2$$

és az

$$f(g) = \sqrt{g}$$

függvény szuperponálásával adódó összetett függvény.

A g belső függvény az egész z síkban; az f külső függvény pl. az $\text{Im } g > 0$ félsíkban egyértékű és differenciálható, tehát reguláris. Mivel

$$\text{Im } g = \text{Im } (1 + z^2) = 2xy > 0$$

az

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right\} \quad \text{és} \quad \left. \begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \end{array} \right\}$$

negyedsíkokban, ezért ezekben a tartományokban reguláris az

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \sqrt{1 + z^2}$$

összetett függvény.

2. a) Igazoljuk, hogy van olyan tartomány, amelyben az

$$u = x + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

függvény harmonikus.

b) Határozzuk meg e tartomány valamely egyszeresen összefüggő részében az u függvény harmonikus társát.

c) Állítsuk elő azt a legáltalánosabb reguláris komplex függvényt, amelynek valós része az adott u függvény.

a) Az adott u függvény az origó kivételével az egész síkon harmonikus, mert parciális deriváltjai

$$u'_x = 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$u'_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

az origó kivételével mindenütt folytonosak és kielégítik a

$$\Delta u = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Laplace-féle differenciálegyenletet.

b) Az adott $u(x, y)$ függvény harmonikus társfüggvényei mindazok a $v(x, y)$ függvények, amelyekre

$$v'_x = -u'_y = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$v'_y = u'_x = 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

A feltételeknek eleget tevő függvények megadhatók

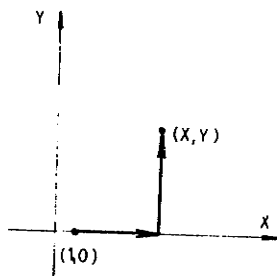
$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy \right]$$

alakban, ahol az integrálás az origót nem tartalmazó bármely egyszeresen összefüggő tartomány tetszőleges két pontja közt, tetszőleges görbe mentén végezhető.

Tartománynak az $x > 0$ félsíkot, rögzített pontnak az $(1, 0)$ pontot választva és az integrálást a 18. ábra szerinti törtvonal mentén végezve, harmonikus társfüggvényül a

$$v(x, y) = \int_{x=1}^x -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \int_{y=0}^y \left(1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy = y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c$$

függvények adódnak.



18. ábra

c) Az $x > 0$ félsíkon az

$$f(z) = (x + \ln \sqrt{x^2 + y^2}) + j(y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c)$$

illetve - amint azt az $\ln z$ függvény tárgyalásánál látni fogjuk - az

$$f(z) = z + \ln z + c$$

a legáltalánosabb olyan reguláris komplex függvény, amelynek valós része az adott $u = x + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ kétváltozós valós függvény.

5. a) Mutassuk meg, hogy van olyan egyszeresen összefüggő T tartomány, amelyben az

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + e^x \cos y + j e^x \sin y - \frac{y}{x^2+y^2}$$

illetve - amint azt később látni fogjuk, az

$$f(z) = \frac{1}{z} + e^z$$

komplex függvény reguláris.

b) Határozzuk meg ebben a T tartományban az adott komplex függvény valós, ill. képzetes részével konstruálható divergencia- és rotációmentes vektortereket.

a) Az adott komplex függvény az origót nem tartalmazó bármely egyszerűen összefüggő tartományban reguláris. Ugyanis valós és képzetes része az origó kivételével a teljes z síkon differenciálható és ott parciális deriváltjai:

$$u'_x = \frac{\frac{y^2 - x^2}{2} + e^x \cos y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$u'_y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - e^x \sin y,$$

$$v'_x = e^x \sin y + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v'_y = e^x \cos y + \frac{\frac{y^2 - x^2}{2}}{(x^2 + y^2)^2}.$$

kielégítik a Cauchy-Riemann differenciálegyenleteket.

b) A kérdéses divergencia- és rotációmentes vektorterek:

$$\text{grad } u = \left[\frac{\frac{y^2 - x^2}{2} + e^x \cos y}{(x^2 + y^2)^2} \right] \underline{i} - \left[\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + e^x \sin y \right] \underline{j}$$

és

$$\text{grad } v = \left[\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + e^x \sin y \right] \underline{i} + \left[\frac{\frac{y^2 - x^2}{2} + e^x \cos y}{(x^2 + y^2)^2} \right] \underline{j}.$$

4. Határozzuk meg az XY síkra merőleges, az origón áthaladó egyenletes töltésű (q töltéssűrűségű) vonalszerű töltés XY síkbeli komplex potenciálját, ekvipotenciális vonalait és erővonalait.

a) Mint ismeretes, a vonalszerű töltés erőtere:

$$E = \frac{2qx}{x^2 + y^2} \underline{i} + \frac{2qy}{x^2 + y^2} \underline{j}.$$

Ez az origó kivételével az egész síkon divergencia- és rotációmentes, ezért egyértékű komplex potenciálját csak az origót nem tartalmazó valamely egyszerűen összefüggő tartományban lehet meghatározni. Válasszuk egyszerűen összefüggő tartományul az $x > 0$ jobb félsíkot. Ebben a síkban a skálarpotenciálfüggvény:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int_{(1, 0)}^{(x, y)} \underline{E} \, d\underline{r} = 2q \int_{x=1}^x \frac{1}{x} \, dx + 2q \int_{y=0}^y \frac{y}{x^2 + y^2} \, dy = \\ &= 2q \left[\ln |x| \right]_{x=1}^x + q \left[\ln (x^2 + y^2) \right]_{y=0}^y = q \ln (x^2 + y^2) = 2q \ln |z|, \end{aligned}$$

harmonikus társfüggvénye pedig:

$$\begin{aligned} \gamma(xy) &= q \int_{(1, 0)}^{(xy)} \left[-\frac{2y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{2x}{x^2 + y^2} \, dy \right] = \\ &= 2q \int_{y=0}^y \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy = 2q \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 2q \operatorname{arc} z \end{aligned}$$

Tehát az origón áthaladó vonalszerű töltés erőterének komplex potenciálfüggvénye a jobb félsíkon:

$$f(z) = 2q \ln |z| + j \, 2q \operatorname{arc} z,$$

ill. egyszerűbben

$$f(z) = 2q \ln z.$$

(Itt felhasználtuk az $\ln |z| + j \operatorname{arc} z = \ln z$ összefüggést, amit a logaritmus-függvény tárgyalása során fogunk belátni.)

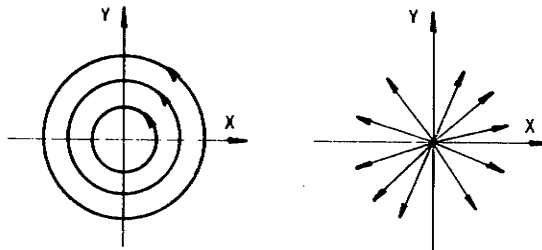
b) A tér ekvipotenciális vonalai a

$$|z| = c$$

koncentrikus körök és erővonalai az

$$\arg z = c$$

origóból kiinduló félegyenesek (lásd 19. ábra).



19. ábra

Vonalszerű töltés erőterének ekvipotenciális - és áramvonalai

Megjegyezzük, hogyha a vonalszerű q töltés nem az origón, hanem egy tőle különböző z_0 ponton halad át, akkor erőterének komplex potenciál-függvénye a felső félsíkban:

$$f(z) = 2q \ln |z - z_0| + 2qj \arg(z - z_0),$$

illetve egyszerűbben:

$$f(z) = 2q \ln(z - z_0).$$

Ennek a térnek az ekvipotenciális vonalai a z_0 középpontú koncentrikus körök, és erővonalai a z_0 -ból kiinduló félegyenesek.

5. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \cos x \operatorname{ch} y - j \sin x \operatorname{sh} y$$

komplex változós függvény fölfogható egy síkvektortér komplex potenciáljának. Határozzuk meg a vektorteret.

Mivel az f komplex függvény valós és képzetes része a teljes síkon harmonikus, ezért f mindenütt reguláris, és így tekinthető egy mindenütt divergencia- és rotáció-mentes síkvektortér komplex potenciáljának.

Mivel a 2.3.3. Tétel értelmében, $\phi = \operatorname{Re} f$ esetén:

$$\underline{v} \simeq \overline{f'(z)},$$

ezért a kérdéses vektortér:

$$\underline{v} = -\sin x \operatorname{ch} y \underline{i} + \cos x \operatorname{sh} y \underline{j}.$$

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK ÁLTAL LÉTESÍTETT LEKÉPZÉSEK ELEMI FÜGGVÉNYEK

Igen sok matematikai és fizikai probléma vezet komplex függvények - és elsősorban reguláris komplex függvények - által létesített leképezésekre. Így többek között ez is szükségessé teszi a leképezések részletesebb ismertetését.

Geometriai tulajdonságaik alapján a leképezéseket kétféle értelemben: "globálisan" és "lokálisan" fogjuk vizsgálni. A lokális vizsgálat annak a vizsgálatát jelenti, hogy az f komplex függvény mire képezi le a z sík bizonyos görbeseregeit, tartományait. A globális vizsgálat annak a vizsgálatát jelenti, hogy az f komplex függvény a z síkban rögzített z_0 értékek Δz -vel való megváltozásának milyen $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ megváltozást feleltet meg a w síkban.

Ezekhez a vizsgálatokhoz a kölcsönösen-egyértelmű és a konform leképezés ismerete szükséges, ezért az alábbiakban ezek értelmezését, fontosabb tulajdonságainak rövid összefoglalását adjuk.

1.§ KÖLCSÖNÖSEN-EGYÉRTELMŰ LEKÉPEZÉSEK

Definíció

Az f komplex függvény, ill. az F komplex reláció értelmezési tartományának egy H részhalmazát kölcsönösen egyértelműen képezi le értékkészletének egy H^* részhalmazára, ha minden $z \in H$ -nak egy és csakis egy $w \in H^*$ értéket feleltet meg és megfordítva.

Gyakorlati szempontból fontosak azok az $f: H \Leftrightarrow H^*$ kölcsönösen egyértelmű leképezések, amelyek egyben folytonosak is. Azaz: minden $L \subset H$ sima görbét $L^* \subset H^*$ sima görbére, $G \subset H$ sima zárt görbét $G^* \subset H^*$ sima zárt görbére képeznek le. Ehhez szükség van a többszörös pont nélküli sima görbe, az ún. "Jordan-féle sima görbe" értelmezésére, fontosabb tulajdonságainak és leképezésének ismeretére. Ennek rövid ismertetését adjuk az alábbiakban.

1.1. SIMA GÖRBÉK ÉS AZOK KOMPLEX FÜGGVÉNNYEL TÖRTÉNŐ KÖLCSÖNÖSEN EGYÉRTELMŰ LEKÉPEZÉSE

Definíció

(Jordan görbe)

A valós paraméterű

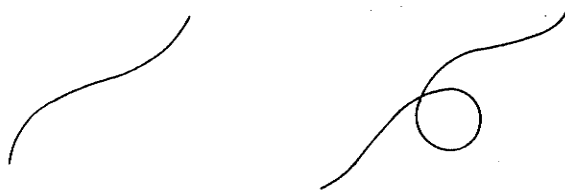
$$\gamma(t) = x(t) + jy(t); \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

komplex függvény által meghatározott síkbeli ponthalmaz Jordan görbe, ha

- $\gamma(t)$ folytonos $t \in [\alpha, \beta]$ -ban,
- $\gamma(t)$ kölcsönösen egyértelműen képezi le $[\alpha, \beta]$ bármely nyílt részintervallumát a komplex sík egy ponthalmazára (azaz $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ csak akkor, ha $t_1 = t_2$)

(ld. 20. ábra).

A Jordan-görbe zárt, ha $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, ellenkező esetben a görbe nyílt.



20. ábra
Jordan görbe - nem Jordan görbe

Definíció

(Sima Jordan-görbe)

A síkbeli Jordan görbe sima, ha megadható olyan

$$\gamma(t) = x(t) + j y(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

valós paraméterű komplex függvényvel, amely az $[\alpha, \beta]$ intervallum minden pontjában differenciálható és differenciálhányadosa folytonos.

A Jordan-görbe szakaszonként sima, ha véges számú, végpontjaiban egymással érintkező, sima görbeszakaszból áll. (Az érintkezési pontokban a görbét előállító függvény nem feltétlenül differenciálható.)

Megjegyezzük, hogy minden szakaszonként sima (és így minden sima) görbe mérhető ivhosszusú és

$$S_{(\alpha, \beta)} = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt.$$

Egy sima (ill. szakaszonként sima) görbe ugyanilyen tulajdonságú görbére való leképezésére vonatkozik:

1.1.1. Tétel

A z sík sima görbét az f komplex függvény a w sík sima görbéjére képezi le, ha

- a) a z síkbeli görbe benne van f értelmezési tartományában;
- b) f valós és képzetes részének parciális deriváltjai folytonosak.

Bizonyítás

Legyen

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

olyan komplex függvény, amelynek valós és képzetes része T -ben folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik és

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

olyan valós paraméterű komplex függvény, amely olyan z síkbeli sima Jordan-görbét határoz meg, amely beleesik T -be. Ekkor a w síkbeli képgörbét a differenciálható

$$\gamma^*(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

ill. - valós és képzetes részre bontva - a

$$\gamma^*(t) = u[x(t), y(t)] + jv[x(t), y(t)]$$

összetett komplex függvény állítja elő. Ennek deriváltfüggvénye:

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt}$$

az f -re és γ -ra vonatkozó feltételek miatt az $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban folytonos, ami - az állításnak megfelelően - a képgörbe simaságát jelent. $\square$

Ezek után rátérhetünk annak ismertetésére, hogy a különböző típusú komplex függvények és relációk értelmezési tartományuk és értékkészletük mely részhalmazai közt létesítenek kölcsönösen-egyértelmű és folytonos leképezést.

1.2. KOMPLEX FÜGGVÉNYEK ÉS RELÁCIÓK ÁLTAL LÉTESÍTETT KÖLCSÖNÖSEN-EGYÉRTELMŰ ÉS FOLYTONOS LEKÉPEZÉSEK. RIEMANN-LEVELEK

(a) Egyrétű függvények leképezése

Az egyrétű komplex függvények értelmezéséből következik, hogy azok a teljes értelmezési tartomány és értékkészlet között létesítenek kölcsönösen egyértelmű leképezést. Az 1.1 1. Tétel értelmében ez a leképezés folytonos is, ha a függvény az értelmezési tartományon reguláris (ld. 1.3. fejezet, 1. pl.).

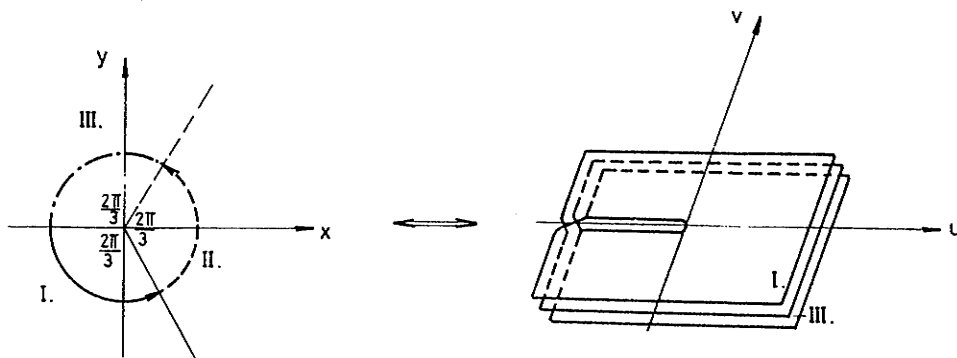
(b) Többrétű függvények leképezése (w síkbeli Riemann felület)

A többrétű komplex függvények értelmezéséből következik, hogy azok értelmezési tartományuknak csak egy részhalmazát képezik le kölcsönösen-

egyértelműen teljes értékkészletükre (ti. azt a részhalmazát, amely nem tartalmaz olyan z értékeket, amelyekhez azonos w értékek tartoznak). Reguláris többrétű függvények esetében van olyan részhalmaz, amelyen ez a leképezés folytonos is.

A teljes értelmezési tartomány és értékkészlet közti leképezést úgy valósítjuk meg, hogy az értékkészletet tartalmazó w sík annyi példányát vesszük, ahány réttű a függvény és ezeket úgy helyezzük egymás fölé, hogy az azonos koordinátájú pontok egymás fölött legyenek (ld. 21. ábra, ahol a függvény 3-rétű). Minden egyes példány az értelmezési tartomány egy olyan részhalmazának képpontjait tartalmazza, amely részhalmaz minden pontjához különböző w értékek tartoznak. A leképezés egyértelműségét úgy biztosítjuk, hogy az egymás fölé helyezett síkokat "összeillesztjük" azokban a w pontokban, amelyeknek "ősképe" a z sík egyetlen pontja. Ezek a w sík ún. "elágazási pontjai", amelyek annyiadrendűek, ahány réttű a függvény. (Ezeket a pontokat annyiszor körüljárva, ahány réttű a függvény, a megfelelő "ősképek" egyszer lesznek körüljárva.)

A leképezés egy-egyértelműsége érdekében az egymás fölé helyezett w síkokat bemetszünk az elágazási pontokat "alkalmasan" összekötő egyenes-szakaszok mentén. Hogy a leképezés folytonossága is biztosítva legyen, a bemetszések alsó és felső partjait úgy illesztjük össze, hogy az egyik lapról a másikra folytonosan lehessen átmenni. Ezt úgy valósítjuk meg, hogy a bemetszések mentén az I. lap alsó partját a II. lap felső partjához; a II. lap alsó partját a III. lap felső partjához..., az I. lap felső partját az utolsó lap alsó partjához illesztjük (ld. 21. ábra, ahol a függvény 3-rétű és az elágazási pontok $w = 0$ és $w = \infty$).



21. ábra
3-rétű függvény Riemann-felülete
(elágazási pontok: $w = 0$ és $w = \infty$)

Hogy az összeillesztett síkokon a bemetszések pontjaiban is megmaradjon a leképezés kölcsönös-egyértelműsége, ezért az összeillesztett partokat különbözőknek tekintjük, annak ellenére, hogy a térben ezek egy-

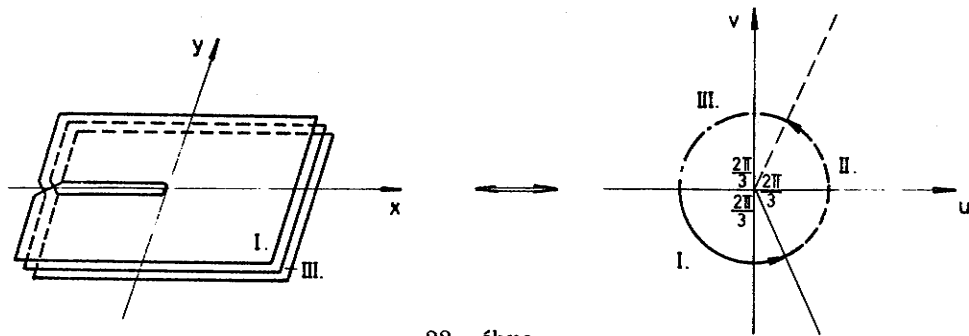
beesnek. Az így bemetszett és összeillesztett többrétű w sík a többrétű komplex függvény ún. többlevelű Riemann-felülete.

A többrétű reguláris komplex függvény tehát teljes értelmezési tartományát kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le a w síkbeli többlevelű Riemann-felületen levő értékkészletére (ld. 1.3.fejezet, 2.pl.).

(c) Egyrétű relációk leképezése

Az egyrétű komplex relációk értelmezéséből következik, hogy azok értelmezési tartományukat értékkészletüknek csak egy részhalmazára képezik le kölcsönösen egyértelműen. Egyértékű reguláris ágakkal rendelkező relációk esetében ez a leképezés folytonos is.

Mivel az egyrétű relációk a többrétű függvények inverzei, ezért értelmezési tartományuknak a teljes értékkészletre való kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezése inverz függvényük z síkon kialakított Riemann-felülete segítségével történik. Ez a Riemann-felület annyi levelű, ahány értékű a reláció és elágazási pontjai azon z értékeknek megfelelő pontok, amelyekhez nem tartoznak különböző w értékek (ld. 22. ábra - mely a 21. ábrabeli függvény inverze - és ld. 1.3.fejezet, 3.pl.).



22. ábra

3 értékű reláció z síkbeli Riemann-felülete
(elágazási pontok: $z = 0$ és $z = \infty$)

A z síkbeli többlevelű Riemann-felület alkalmas az egyrétű reláció egyértékű reguláris ágának kiválasztására. Ilyen ág a z sík minden olyan T tartománya, amely szakadás nélkül - legfeljebb egy egész csavarmentben - fektethető fel a többlevelű Riemann-felületre. Aszerint, hogy a T tartomány Riemann-felületre helyezését melyik levélre kezdjük, a reláció különböző reguláris ágait kapjuk. A többértékű reláció reguláris ágát tehát T helyzetének és a Riemann-felületre való helyezésének megadása jelöli ki egyértelműen.

(d) Többrétű relációk leképezése

A többrétű komplex relációk - definíciójukból következően - csak értelmezési tartományuk egy részhalmazát képezik le kölcsönösen egyértelműen értékkészletük egy részhalmazára. Bármely egyértékű reguláris ágon ez a leképezés folytonos is.

A teljes értelmezési tartomány és a teljes értékkészlet közötti kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezés a reláció többértékűségével egyező számú levéllel rendelkező z síkbeli Riemann-felület és a reláció többrétűségével megegyező számú levéllel rendelkező w síkbeli Riemann-felület segítségével valósítható meg (ld. 27. ábra és 1.3. fejezet, 4. pl.).

1.3. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Állapítsuk meg, hogy a

$$w = 2z + j$$

függvény mely tartományok között létesít kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezést.

Az adott függvény mindenütt értelmezett, egyrétű reguláris függvény, amely minden értéket felvesz. Így az általa létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű és folytonos a teljes z és a teljes w sík között.

2. Vizsgáljuk a

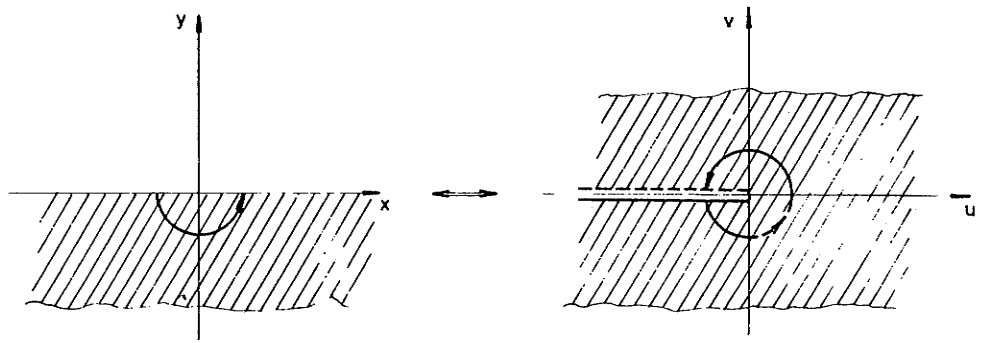
$$w = z^2$$

függvény által létesített leképezést kölcsönös egyértelműség és folytonosság szempontjából.

Az adott függvény a teljes z síkon értelmezett kétrétű függvény, amely minden w értéket felvesz és mindenütt reguláris. E tulajdonságok következménye:

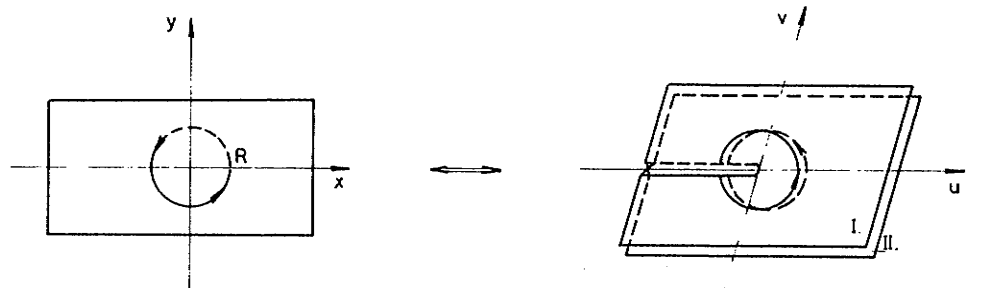
a) kölcsönösen egyértelműen képezi le a z sík minden olyan részhalmazát a w sík egy részhalmazára, amely nem tartalmaz z_1 és $z_2 = -z_1$ pontpárokat. Ilyen részhalmaz például az $\text{Im } z > 0$ vagy az $\text{Im } z < 0$ félsík. Ezek bármelyikét a teljes w síkra képezi le (ld. 23. ábra);

b) A teljes értelmezési tartományt, a z síkot, kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le a w síkbeli két-levelű Riemann-felületre. Ez a $w = 0$ és $w = \infty$ elágazási pontokat összekötő egyenesszakasz (azaz pl. a pozitív, vagy a negatív valós tengely) mentén bemetszett és a bemetszés partjai mentén kereszbe összeillesztett kétszeresen lefedett w sík (ld. 24. ábra).



23. ábra

$w = z^2$ kölcsönösen-egyértelmű leképezése



24. ábra

$w = z^2$ Riemann-felülete

3. Vizsgáljuk a

$$w = \sqrt{z}$$

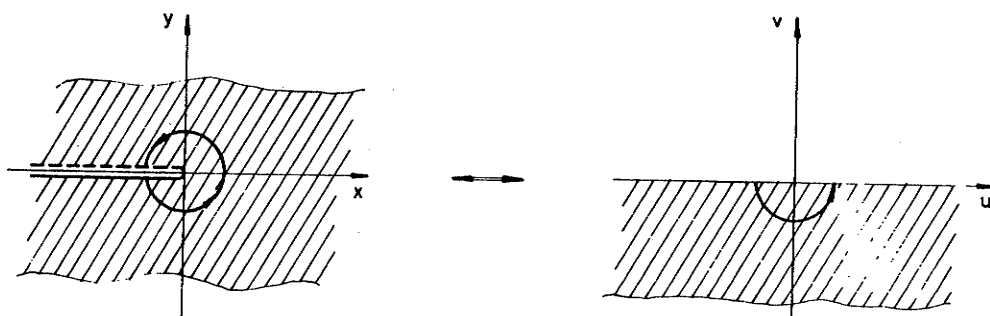
által létesített leképezést kölcsönös-egyértelműség és folytonosság szempontjából.

A $w = \sqrt{z}$ reláció a $z = w^2$ függvény inverze. Ennek következménye, hogy: a teljes z síkon értelmezett, $z = 0$ -ban és $z = \infty$ -ben elágazási pontokkal rendelkező, minden értéket felvevő, egyrétű - kétértékű reláció, amelynek minden egyértékű ága reguláris.

Az általa létesített leképezés tulajdonságai:

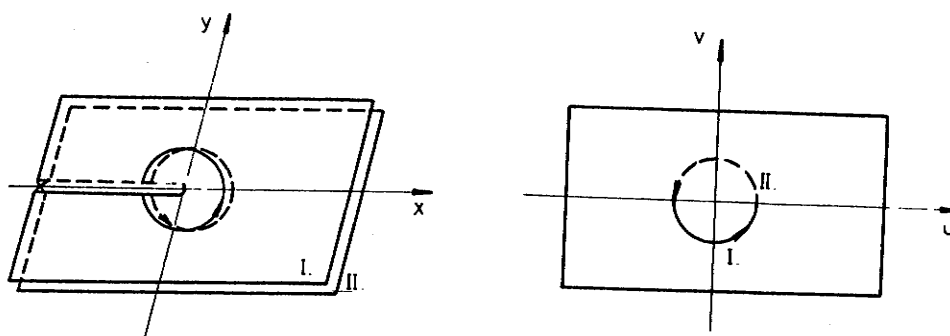
a) kölcsönösen egyértelmű a teljes z sík és a w sík bármely Π nyílásszögű szögtere - pl. a z sík és az $\text{Im } w < 0$ félsík pontjai - közt (ld. 25. ábra);

b) kölcsönösen egyértelmű és folytonos a leképezés a z síkbeli két-levelű Riemann felület (a $z = 0$ és a $z = \infty$ elágazási pontokat összekötő



25. ábra
 $w = \sqrt{z}$ kölcsönösen egyértelmű leképezése

egyenes-szakasz mentén bemetszett és a bemetszések partjai mentén keresztbe összeillesztett kétszeresen lefedett z sík) és a teljes w sík között. A Riemann-felület I-es síkje (melynek pontjai $\Rightarrow -\pi \leq \arg w < 0$) és II-es síkje (melynek pontjai $\Rightarrow 0 \leq \arg w < \pi$) a z kétértékű reláció reguláris ágai (ld. 26. ábra).



26. ábra
 $w = \sqrt{z}$ függvény z síkbeli Riemann-felülete

4. Vizsgáljuk a

$$w = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(z+1)(z-1)}$$

leképezést kölcsönös-egyértelműség és folytonosság szempontjából.

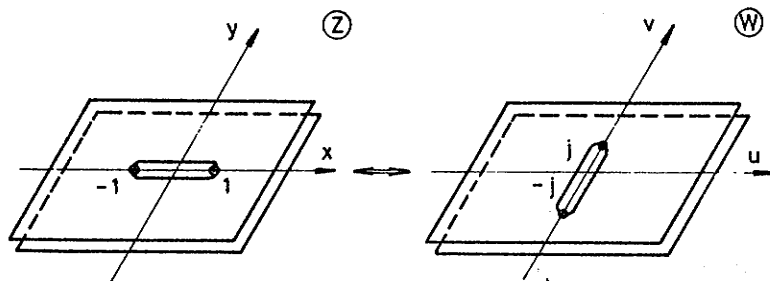
A $w = \sqrt{z^2 - 1}$ a teljes z síkon értelmezett kétértékű-kétértékű reláció, amely minden értéket felvesz. (Ugyanis: minden z -hez két w érték tartozik - kivételt képez $z = 1$ és $z = -1$ amelyekhez csak egyetlen érték, $w = 0$ tartozik -; inverze a $z = \sqrt{w^2 + 1} = \sqrt{(w+j)(w-j)}$ is minden

w -re értelmezett és kétértékű - kivéve a $w = j$ és $w = -j$ értékeket, amelyek mindegyikének csak egyetlen érték, $z = 0$ felel meg).

E tulajdonságok következménye, hogy a $w = \sqrt{z^2 - 1}$ kölcsönösen egyértelműen képezi le a z síkbeli kétlevelű Riemann-felületet a w síkbeli kétlevelű Riemann-felületre.

A z síkbeli Riemann-felület: a $z = 1$ és $z = -1$ másodrendű elágazási pontokban összeillesztett, a $[-1, 1]$ egyenesszakasz mentén bemetszett és a bemetszések partjai mentén keresztbe összeillesztett kétszeresen lefedett z sík.

A w síkbeli Riemann-felület: a $w = j$ és $w = -j$ másodrendű elágazási pontokban összeillesztett, a $[-j, j]$ egyenesszakasz mentén bemetszett és a bemetszés partjai mentén keresztbe összeillesztett kétszeresen lefedett w sík (ld. 27. ábra).



27. ábra
 $w = \sqrt{z^2 - 1}$ Riemann-felületei

Mivel a $w = \sqrt{z^2 - 1}$ reláció egyértékű ágai az egész z síkon regulárisak, ezért a z és w síkbeli kétlevelű Riemann-felületek közti kölcsönösen egyértelmű leképezés egyben folytonos is.

A folytonosságot illusztrálja, hogy a z síkbeli Riemann-felület bármely zárt görbéjének képe a w síkbeli Riemann-felület egy zárt görbéje és megfordítva.

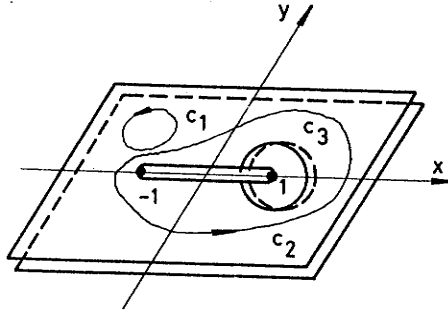
Ugyanis a

$$z + 1 = r_1 e^{j\varphi_1} \quad \text{és} \quad z - 1 = r_2 e^{j\varphi_2}$$

jelölések alkalmazásával a reláció

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{j \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}$$

alakú, amiből látható (28. ábra), hogy



28. ábra

a) a $z = -1$ és $z = 1$ pontok egyikét sem tartalmazó bármely zárt görbe (pl. C_1 görbe) körüljárásánál a φ_1 és φ_2 argumentumok nem változnak, és így $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ sem változik, tehát w visszatér eredeti értékéhez, ami azt jelenti, hogy a C_1^* képgörbe zárt;

b) a $z = -1$ és $z = 1$ pontok mindegyikét tartalmazó bármely zárt görbe (pl. C_2 görbe) körüljárásánál mindkét argumentum 2π -vel változik, úgy hogy $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ is 2π -vel változik. Tehát w visszatér eredeti értékéhez, ami azt jelenti, hogy a C_2^* képgörbe zárt;

c) a $z = -1$ és $z = 1$ pontok egyikét tartalmazó bármely zárt görbe (pl. a $z = 1$ -et tartalmazó C_3 görbe) körüljárásánál az egyik argumentum (pl. itt a φ_1) 4π -vel változik (mert a $z = 1$ elágazási pontot 2-szer kell körüljárni, hogy a görbe zárt legyen), a másik argumentum változatlan marad, úgy hogy $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ is 2π -vel változik. Tehát w visszatér eredeti értékéhez, ami azt jelenti, hogy a C_3^* képgörbe zárt.

Hasonló módon látható be, hogy a w sík bármely zárt görbéjének z síkbeli "ősképe" ugyancsak zárt görbe.

2. § KONFORM LEKÉPEZÉSEK

2.1. LOKÁLIS KONFORMITÁS

Definíció

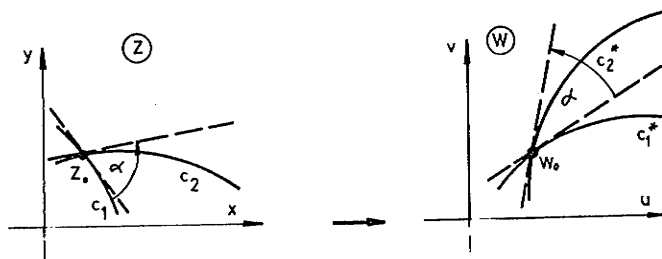
Az f komplex függvény által létesített leképezés a z_0 pontban lokálisan konform, ha ott

- (a) iránytartóan szögtartó
- és
- (b) kismértékben aránytartó.

E definíció - $z_0 \neq \infty$ és $z_0 = \infty$ pontra vonatkozó - részletesebb értelmezését adjuk az alábbiakban.

(a) A $z_0 \neq \infty$ pontbeli szögtartás

azt jelenti, hogy a z_0 pontból kiinduló, z_0 -ban érintővel rendelkező bármely görbe képe az $f(z_0) = w_0$ ponton átmenő olyan - érintővel rendelkező - görbe, amely az eredeti görbéhez képest azonos irányban, azonos szöggel van elforgatva. Így a z_0 ponton áthaladó görbék z_0 -beli hajlásszöge a képgörbék w_0 pontbeli hajlásszögével megegyezik (ld. 29. ábra).

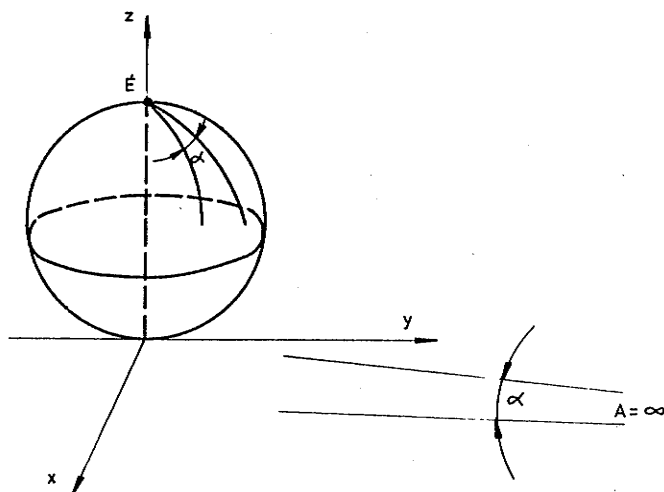


29. ábra
Szögtartás a végesben

A $z_0 = \infty$ pontbeli szögtartást:

a $z_0 = \infty$ pontban egymást metsző görbék érintőegyeneseinek, il-

letve azok gömbi képeinek - a Riemann-gömb $\hat{E}$ északi pólusán átmenő főköröknek - az $\hat{E}$ pontbeli szögtartásával értelmezzük (ld. 30. ábra).



30. ábra
Egymást a $z = \infty$ -ben metsző görbék szöge

(b) $A_{z_0} \neq \infty$ pontbeli aránytartás

azt jelenti, hogy a z_0 ponton áthaladó különböző görbék z_0 ponttól számított - $K(z_0)$ -ba eső - ívhosszuságai a leképezés során azonos arányban "torzulnak" (megnyulnak vagy zsugorodnak).

$A_{z_0} = \infty$ pontbeli aránytartást

a $z_0 = \infty$ ponton áthaladó különböző görbék gömbi képeinek - a Riemann-gömb $\hat{E}$ északi pólusán áthaladó görbéknek - az $\hat{E}$ pontbeli aránytartásával értelmezzük.

Reguláris komplex függvény esetén a lokális konformitás szükséges és elégséges feltételét fejezi ki a

2.1.1. Tétel

Az f reguláris komplex függvény akkor és csak akkor képezi le a z sík valamely z_0 pontjának egy környezetét a w sík $w_0 = f(z_0)$ pontjának egy környezetére kölcsönösen egyértelműen és konformisan, ha $f'(z_0) \neq 0$.

Bizonyítás

1. A feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy a leképezés a z_0 pont környezetében kölcsönösen egyértelmű legyen.

Ugyanis az $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ komplex függvénnyel ekvivalens

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

kétváltozós valós függvényrendszer - ahogy ez a valós analizisből ismert - akkor és csak akkor képezi le kölcsönösen egyértelműen az (x, y) sík valamely (x_0, y_0) pontjának egy környezetét az (u, v) sík megfelelő

(u_0, v_0) pontjának egy környezetére, ha:

(a) u és v folytonosan differenciálható az (x_0, y_0) pont környezetében;

(b) u és v parciális deriváltjaiból képezett Jacobi determináns értéke az (x_0, y_0) pontban zérustól különböző.

Az (a) feltétel f regularitása miatt; a (b) feltétel pedig f regularitása és $f'(z_0) \neq 0$ miatt teljesül.

Ez utóbbi a Jacobi determináns kifejtése alapján az alábbi módon látható be:

$$\left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]_{z_0} = \begin{vmatrix} u'_x(z_0) & u'_y(z_0) \\ v'_x(z_0) & v'_y(z_0) \end{vmatrix} = \left[u'_x \cdot v'_y - u'_y \cdot v'_x \right]_{z_0}$$

Itt felhasználva a regularitás miatt fennálló Cauchy-Riemann féle összefüggéseket:

$$\left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]_{z_0} = \left[u'_x(z_0) \right]^2 + \left[v'_x(z_0) \right]^2 = \left| f'(z_0) \right|^2$$

adódik, ami $f'(z_0) \neq 0$ miatt zérustól különböző érték.

2. A feltétel szükséges és elégséges ahhoz is, hogy a leképezés $K(z_0)$ -ban konform legyen.

Ugyanis a komplex függvény differenciálhányadosának (Harmadik rész 1. § 1.1. fejezetében található) geometriai értelmezéséből nyilvánvaló, hogy a tételbeli feltételek - és csak azok - teljesülése esetén a leképezés szögtartó és aránytartó, azaz konform. $\square$

A lokális konformitás fogalma kiterjeszthető siktartományra is. A kiterjesztés és fontosabb tulajdonságainak rövid ismertetését adjuk a következő fejezetben.

2.2. TARTOMÁNYOK KONFORM LEKÉPEZÉSE

Definíció

Az f komplex függvény által létesített leképezés a T tartományon konform, ha annak minden pontjában lokálisan konform.

A tartományok közti konform leképezés feltételének megadása előtt a "tartományt-tartományra" leképező komplex függvényre vonatkozó feltételt ismertetjük az alábbi - bizonyítás nélkül közölt - tétellel:

2.2.1. Tétel

(Tartomány megmaradásának elve)

Ha az $f \neq \text{konstans}$ komplex függvény reguláris egy T tartományon, akkor az a pontthalmaz, amelyre f a T -t leképezi, ugyancsak tartomány.

"Tartománynak-tartományra" vonatkozó konform leképezését az alábbi tétel feltételei biztosítják:

2.2.2. Tétel

Ha az f komplex függvény egy T tartományon egyrétű, reguláris és $f'(z) \neq 0$, akkor f a T tartományt kölcsönösen egyértelműen és konform módon képezi le egy T^* tartományra.

Bizonyítás

A tétel állítása a tartománybeli konformitás definíciójának és a lokális konformitás szükséges és elégséges feltételét adó 2.1.1. Tételnek a következménye. Ennek részletezését az olvasóra bizzuk. $\square$

Gyakorlati szempontból fontos a tétel bizonyos értelemben vett megfordításaként felvetődő kérdés: konstruálható-e olyan komplex függvény, amely "adott tartományt - adott tartományra" képez le kölcsönösen-egyértelműen és konformisan. Tetszőleges tartományok közt ilyen leképezés nem mindig valósítható meg (például nincs olyan komplex függvény, amely többszörösen összefüggő tartományt egyszeresen összefüggőre képezne le kölcsönösen-egyértelműen és konform módon), de egyszeresen összefüggő tartományok közt igen. Az ilyen leképezést létrehozó függvény egzisztenciájának és unicitásának feltételét fejezi ki:

2.2.3. Tétel
(Riemann-tétel)

Ha adott

$$T \text{ és } T^*$$

z és w sík egy-egy tetszőleges, egyszeresen összefüggő tartománya:

$$z_0 \text{ és } w_0$$

e tartományok egy-egy tetszőleges belső pontja és

$$\alpha_0$$

egy tetszőleges valós szám, akkor létezik egy és csakis egy olyan

$$w = f(z)$$

reguláris komplex függvény, amely kielégíti az

$$\begin{aligned} f(z_0) &= w_0 \\ \text{és} \quad \text{arcf}'(z_0) &= \alpha_0 \end{aligned}$$

feltételeket.

E tétel bizonyításával - annak terjedelmes volta miatt - itt nem foglalkozunk.

Megjegyzés

A 2.2.3 tételben kimondott feltételekből nyilvánvaló, hogy egy adott egyszeresen összefüggő T tartománynak egy adott egyszeresen összefüggő T^* tartományra való kölcsönösen egyértelmű és konform leképezése 3 valós paramétertől függ:

$$\begin{aligned} u_0 &= \text{Re } f(z_0) \\ v_0 &= \text{Im } f(z_0) \\ \alpha_0 &= \text{arc } f'(z_0) \end{aligned}$$

Ezek helyett más - de ugyancsak 3 valós paramétert tartalmazó - feltételek is adhatók. Így például a vizsgált konform leképezést "normálja":

a) a T tartomány egy belső - és egy kerületi pontjának a képe:

$$\begin{aligned} w_0 &= f(z_0) \\ w_1 &= f(\xi_1); \end{aligned}$$

(ahol z_0 ill. w_0 belső pontja ζ_1 ill. w_1 kerületi pontja T -nak, ill. T^* -nak), vagy

b) a T tartomány három kerületi pontjának a képe:

$$w_k = f(\zeta_k); \quad k = 1, 2, 3$$

(ahol a ζ_k ill. a w_k pontok kerületi pontjai T -nek, ill. T^* -nak; mindegyik pontnak a tartomány kerületén elfoglalt helyzetét egy valós paraméter, például a pontnak egy bizonyos rögzített kerületi ponttól való távolsága határozza meg).

A 2.2.1.; 2.2.2. és 2.2.3. tételek tartományok belsejének leképezésére vonatkoztak. Kérdés, milyen a tartományok kerületének kapcsolata az ilyen leképezéseknél. Erre adnak választ az alábbi - bizonyítás nélkül ismertetett - tételek:

2.2.5. Tétel

(Kerületek kölcsönös megfeleltetése)

A T tartománynak a T^* tartományra való kölcsönösen egyértelmű és konform leképezésénél e tartományok C és C^* kerületeinek leképezése kölcsönösen egyértelmű és folytonos, ha

a) T korlátos és kerületi pontjait annyiszor vesszük figyelembe, ahányszor azokon a kerület teljes körüljárásánál át kell haladni;

b) T és T^* teljesen a végesben fekszenek és kerületük sima - vagy szakaszonként sima - Jordan görbe. Ilyenkor a leképezést megvalósító függvény T kerületén folytonosan vagy szakaszonként folytonosan differenciálható (amennyiben a kerületnek vannak csucsai, úgy ott a derivált vagy nem létezik, vagy 0 , vagy ∞).

2.2.6. Tétel

(Kerületek iránytartása)

A T és T^* tartományok kölcsönösen egyértelmű és konform leképezésénél kerületeik körüljárási iránya változatlan marad.

Ennek következménye: hogy ha a T tartomány kerületének körüljárásánál a tartomány például balkéz felé esik, akkor a T^* képtartomány kerületének azonos irányú körüljárásánál T^* is balkéz felé esik.

A konform leképezések gyakorlati alkalmazásainál nagy jelentőségű a 2.2.5. Tétel megfordítása:

2.2.7. Tétel

(Kerületek kölcsönös megfeleltetése)

Legyenek T és T^* egyszeresen összefüggő tartományok, amelyeket a C és C^* görbék határolnak; legyen f reguláris T -ben, folytonos $\bar{T}$ -ban ($\bar{T}$: a C -vel lezárt T) és képezze le kölcsönösen-egyértelműen és iránytartóan C -t a C^* -ra. Ekkor f kölcsönösen-egyértelműen és konform képezi le T -t a T^* -ra.

E tétel bizonyítása is meghaladja a jegyzet kereteit.

2.3. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg a z sík azon tartományát, amelyben a

$$w = z^2$$

függvény konform leképezést létesít. Állapítsuk meg ott a lokális nyújtási együtthatót és az elfordulási szöget.

A $w = z^2$ függvény mindenütt differenciálható és differenciálhányadosa

$$f'(z) = 2z,$$

ami az origó kivételével sehol sem 0. Ebből következik, hogy az általa létesített leképezés a $z = 0$ pont kivételével a teljes z síkon kölcsönösen egyértelmű és konform.

A z sík bármely pontjában - kivéve a $z = 0$ pontot - a lokális nyújtási együttható:

$$|f'(z)| = 2|z|$$

és ez az érték annál nagyobb, minél távolabb van a leképezendő pont az origótól; a lokális szögelfordulás:

$$\arg f'(z) = \arg 2z,$$

amely annál nagyobb, minél nagyobb a kérdéses pont arcusa.

2. Illusztráljuk a

$$w = z^2$$

leképezés $z = 1 + j$ pontbeli iránytartó szögtartását az e pontban egymást $\frac{\pi}{2}$ szögben metsző

$$|z| = \sqrt{2}$$

egyenletű kör és

$$\arg z = \frac{\pi}{4}$$

egyenletű félegyenes leképezésével és a $z = 1 + j$ pontbeli aránytartását az e ponton átmenő

$$z = (1 + j)t \quad 1 \leq t \leq 1 + \epsilon$$

egyenesszakasz leképezésével.

A leképezés $z = 1 + j$ pontbeli szögtartását illusztrálja, hogy:
az adott kör és egyenes w síkbeli képe a $w = 2j$ pontban egymást
ugyancsak $\frac{\pi}{2}$ szögben metsző

$$|w| = |z|^2 = |z|^2 = 2$$

egyenletű kör és az

$$\arg w = \arg z^2 = \frac{\pi}{2}$$

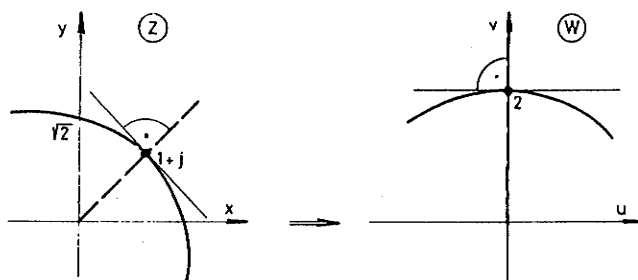
egyenletű félegyenes (ld. 31. ábra)

A leképezés $z = 1 + j$ pontbeli aránytartását illusztrálja, hogy:
az adott $\sqrt{2}\epsilon$ hosszúságú egyenesszakasz a leképezésnél átmegy a
 $w = 2j$ ponton átmenő

$$w = [(1 + j)t]^2 = 2jt^2 \quad 1 \leq t \leq 1 + \epsilon$$

egyenesszakaszba, amelynek hossza:

$$S^* = |2j(1+\epsilon)^2 - 2j(1)^2| = 2|(1+\epsilon)^2 - 1| = 4\epsilon + 2\epsilon^2$$



31. ábra

Elég kis $\varepsilon > 0$ esetén jó közelítéssel:

$$S^* \approx 4\varepsilon = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\varepsilon = 2\sqrt{2} S,$$

ami azt jelenti, hogy a $z = 1 + j$ pont kis környezetében az egyenesszakasz kb. $2\sqrt{2}$ -szeresére nyúlik.

Eredményeink összhangban vannak az elmélettel. Ugyanis - az előző feladatban láttuk - hogy a $w = z^2$ függvény a $z = 0$ pont kivételével mindenütt, így a $z = 1 + j$ pontban is, konform leképezést létesít. E pont környezetében a szögelfordulás:

$$\left[\operatorname{arc} f'(z) \right]_{z=1+j} = \left[\operatorname{arc} 2z \right]_{z=1+j} = \operatorname{arc} (2+2j) = \frac{\pi}{4}$$

és a r együttható:

$$\left| f'(z) \right|_{z=1+j} = \left| 2z \right|_{z=1+j} = 2\sqrt{2},$$

teljes megegyezésben számításainkkal.

3. Az origó átmenő

$$\operatorname{arc} z = \alpha_1 \quad \text{és} \quad \operatorname{arc} z = \alpha_2. \quad (\alpha_2 > \alpha_1)$$

félegyenesek leképezésével illusztráljuk, hogy a $w = z^2$ függvény által létesített leképezés a $z = 0$ pontban nem konform.

Az adott félegyenesek hajlásszöge:

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1;$$

képgörbéknek az

$$\operatorname{arc} w = 2\alpha_1 \quad \text{és} \quad \operatorname{arc} w = 2\alpha_2$$

félegyeneseknek a hajlásszöge:

$$\Phi = 2\alpha_2 - 2\alpha_1,$$

ami kétszerese az eredeti félegyenesek hajlásszögének. Tehát a $z = 0$ pontban a $w = z^2$ függvény által létesített leképezés nem szögtartó és így nem konform.

4. Határozzuk meg azt a w síkbeli tartományt, amelyre a $w = z^2$ függvény az $x = 1$,
 $y = 1$,
 $x + y = 1$
egyenletű egyenesek által határolt háromszögtartományt képezi.

Az adott

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2jxy$$

függvénnyel ekvivalens

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy \end{aligned} \right\}$$

valós egyenletrendszer segítségével belátható, hogy

$$\text{az } x = 1 \quad \text{egyenes képe az} \quad u = 1 - \frac{v^2}{4}$$

parabola,

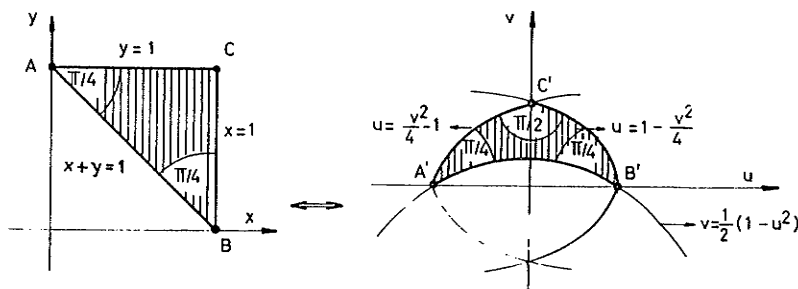
$$\text{az } y = 1 \quad \text{egyenes képe az} \quad u = \frac{v^2}{4} - 1$$

parabola,

$$\text{az } x + y = 1 \quad \text{egyenes képe a} \quad v = \frac{1}{2}(1 - u^2)$$

parabola.

Tehát a z síkbeli háromszögtartomány képe a w síkban ezen parabolaívek által határolt "görbevonalu háromszögtartomány" (ld. 32. ábra). Igazolható az is, hogy az ABC háromszög szögei megegyeznek az $A'B'C'$ görbevonalu háromszög megfelelő szögeivel, ami a $w = z^2$ függvény konform leképezésének következménye.



32. ábra

3.§ LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

A leképezések közül legegyszerűbbek a lineáris egész- és lineáris törtfüggvények által létesített ún. lineáris leképezések. Ezek fontos szerepet játszanak számos matematikai és fizikai probléma megoldásánál, így többek között: a számelméletben, a nem-euklideszi geometriában, a relativitáselméletben, a kvantumelméletben stb. Gyakorlati fontosságukra való tekintettel külön foglalkozunk e leképezések fontosabb tulajdonságaival.

Definíció

Lineáris leképezés: a

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

függvény által létesített leképezés, ahol a, b, c, d tetszőleges komplex konstansok, amelyekre $ad - bc \neq 0$ (ellenkező esetben ugyanis a tört értéke állandó).

E leképezést meghatározó konstansok megfelelő választásával adódik a fenti függvény - az ún. lineáris törtfüggvény - két speciális típusa: a $w = az + b$ lineáris egész függvény, és a $w = \frac{1}{z}$ reciprok függvény. Az általános eset tárgyalása előtt először ezeket ismertetjük.

3.1. LINEÁRIS EGÉSZ FÜGGVÉNY LEKÉPEZÉSE

Definíció

Lineáris egész függvény a

$$w = az + b$$

függvény, ahol $a \neq 0$ és b tetszőleges valós vagy komplex állandó.

Az általa létesített leképezés fontosabb tulajdonságai:

(1) Kölcsönösen-egértelmű a teljes z és a teljes w sík között

mert az egész z síkon értelmezett, minden értéket felvevő egyértelmű függvény.

(2) Hasonlósági transzformációt létesít a teljes z síkon

Ugyanis a z sík bármely vektorát azonos mértékben nyújtja (ill. zsugorítja), elforgatja és párhuzamosan eltolja. Éspedig minden síkvektort

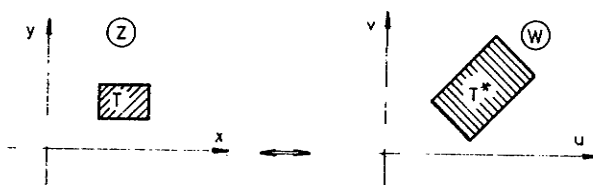
$|a|$ -szeresére nyújt (ill. zsugorítja) az 0 középpontból;

(arc a) szöggel elforgat az 0 pont körül;

b komplex számnak megfelelő síkvektorral párhuzamosan eltol,

mint ahogy ez a komplex számokkal végzett műveletek geometriai interpretációjából következik.

Ebből adódik, hogy a lineáris egész függvény a z sík bármely T tartományát a w sík egy hozzá hasonló T^* tartományára képezi le, amely a T -ből nagyítással (vagy kicsinyítéssel) elforgatással és párhuzamos eltolással jön létre (ld. 33. ábra).



33. ábra
Hasonlósági transzformáció

(3) A leképezés körtartó a teljes z síkon

Ugyanis: - mint a teljes z síkon hasonlósági transzformációt létesítő leképezés - a z sík köreit a w sík köreire, a z sík egyeneseit a w sík egyenesekre képezi le.

(4) A leképezés konform a ∞ -nel lezárt teljes z síkon

$z \neq \infty$ esetén a konformitás nyilvánvaló. Ugyanis tetszőleges $z \neq \infty$ -re teljesül a lokális konformitás szükséges és elégséges feltétele: f reguláris és $f'(z) = a \neq 0$.

A $z = \infty$ -ben egymást metsző görbék szögén, érintő egyenesaik gömbi képeinek - a Riemann-gömb északi pólusán átmenő főköröknek - a szögét értve, valamint a sztereografikus leképezés szög- és aránytartását figyelembe véve, a lineáris leképezés konform volta a $z = \infty$ -re is kiterjeszthető.

(5) A lineáris egész függvény által létesített leképezés fix pontjai:

a z sík azon pontjai, amelyeket a leképezés önmagukba visz át. Ilyen pontok:

$$\begin{array}{lll} w = z + b & \text{esetén} & z = \infty \\ w = az + b & \text{esetén} & z = \infty \text{ és } z = \frac{b}{1-a} \end{array}$$

feltéve, hogy $a \neq 1$

A lineáris egész függvényt egyértelműen meghatározó adatok

A $w = az + b$ lineáris egész függvény két komplex paramétertől függ, így két különböző z síkbeli pont és azok w síkbeli képei által egyértelműen meghatározható. Ezt fejezi ki:

3.1.1. Tétel

Létezik egy és csakis egy olyan lineáris egész függvény, amely a z_1 pontot a w_1 -be; a $z_2 \neq z_1$ -et a $w_2 \neq w_1$ pontba viszi át.

Bizonyítás

A $w_k = az_k + b$; $k = 1, 2$ összefüggésekből az "a" és "b" ismeretlen konstansok egyértelműen meghatározhatók. $\square$

E tétel bizonyos értelemben vett megfordítása:

előállítható olyan lineáris egész függvény, amely a z sík adott egyenesét a w sík adott egyenesébe, ill. a z sík adott körét, a w sík adott körébe viszi át. Ehhez elegendő megkeresni azt a lineáris egész függvényt, amely

- a) a z síkban adott egyenes két tetszőleges pontját a w síkban adott egyenes két tetszőleges pontjába viszi át (ld. 3.5. fejezet 3. pl.);
- b) a z síkban adott kör középpontját, ill. egy tetszőleges kerületi pontját a w síkban adott kör középpontjába, ill. egy tetszőleges kerületi pontjába viszi át (ld. 3.5. fejezet, 4. pl.).

3.2. RECIPROK FÜGGVÉNY LEKÉPEZÉSE

Definíció

Reciprok függvény a

$$w = \frac{1}{z}$$

legegyszerűbb lineáris törtfüggvény.

Az általa létesített leképezés fontosabb tulajdonságai:

- (1) Kölcsönösen egyértelmű a teljes z és a teljes w sík között

Ugyanis: mindenütt értelmezett, minden értéket felvevő egyrétű függvény, ha értelmezését kiterjesztjük úgy, hogy $w(0) = \infty$ és $w(\infty) = 0$ legyen.

- (2) A $w = \frac{1}{z}$ leképezés a $|z| = 1$ egységkörre és a valós tengelyre vonatkozó inverzió (tükrözés) egymásutánja

Definíció

A z_0 középpontú, R sugarú K körre inverz pontok azok a z és ξ pontok, amelyek a K kör valamely sugarán és annak meghosszabbításán úgy helyezkednek el, hogy

$$|z - z_0| \cdot |\xi - z_0| = R^2$$

legyen. A $z = z_0$ középpont inverze a $\xi = \infty$.

Az egyenesre eszve inverz pontok az egyenesre tükrös pontok.

A körre vonatkozó inverzió speciális esete: a $|z| = 1$ körre vonatkozó, amikor is $R = 1$ és a z_0 középpont egybeesik a koordinátarendszer kezdőpontjával. Ekkor a definíció értelmében az inverz pontokra az

$$\arg z = \arg \xi$$

egyenlőség mellett az

$$|z| \cdot |\xi| = 1$$

összefüggés érvényes, amiből

$$|\xi| = \frac{1}{|z|}.$$

Mivel

$$w = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

ezért a reciprok leképezés összetehető a

$$w_1 = \frac{1}{z} \quad \text{és a} \quad w = \overline{w_1}$$

leképezésekből. Közülük az első tet-
szőleges $|z| \neq 0$ pontnak a $|z| = 1$
körre vonatkozó inverziója, mert

$$|w_1| = \frac{1}{|z|}$$

és

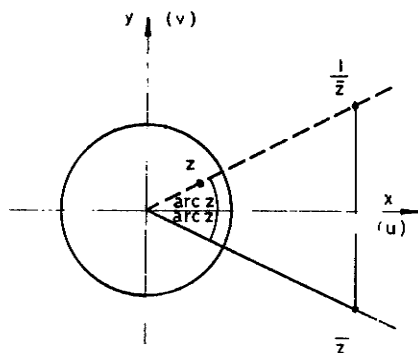
$$\arg w_1 = \arg z.$$

A második - ami egyszerű kon-
jugálás - a körre inverz pontnak a
valós tengelyre tükrözése. Erre a
pontra

$$|w| = \frac{1}{|z|}$$

$$\arg w = -\arg z$$

(ld. 34. ábra).



34. ábra

$$w = \frac{1}{z} \text{ leképezése}$$

(z és w sík egybeesik)

(3) A $w = \frac{1}{z}$ leképezés körtartó a teljes z síkon

Ugyanis az inverzió következtében a z sík bármely körét a w sík
egy körére vagy egyenesére, a z sík bármely egyenesét a w sík egy
egyenesére vagy körére képezi le.

Állításunk az alábbi módon is belátható:

Az I. fejezetben láttuk, hogy a z sík körvonalainak és egyenesei-
nek komplex változón l kifejezett egyenlete:

$$a z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c = 0,$$

ahol "a" és "c" valós, β komplex konstans.

A $w = \frac{1}{z}$ leképezésnél ez az egyenlet átmeny a

$$c + \bar{a} \bar{w} + \bar{\beta} \bar{w} + \beta w + a = 0$$

alakba, amely körök - l. c = 0 esetén egyenesek - egyenlete a w
síkon; a = 0 eseté a körök, ill. egyenesek átmennek a w = 0 pon-
ton.

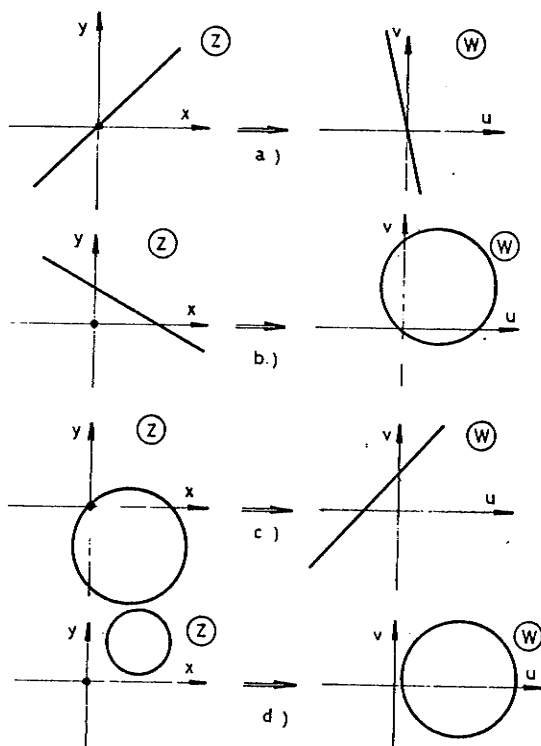
Az egyenlet diszkutálásával belátható:

3.2.1. Tétel

A $w = \frac{1}{z}$ függvény által létesített leképezés

- a z sík origón átmenő egyeneseit a w sík origón átmenő egyeneseseibe (lásd 35/a. ábra),
- a z sík origón át nem menő egyeneseit a w sík origón átmenő köreibe (lásd 35/b. ábra),
- a z sík origón átmenő köreit a w sík origón át nem menő egyeneseseibe (lásd 35/c. ábra),
- a z sík origón át nem menő köreit a w sík origón át nem menő köreibe (lásd 35/d. ábra)

viszi át.



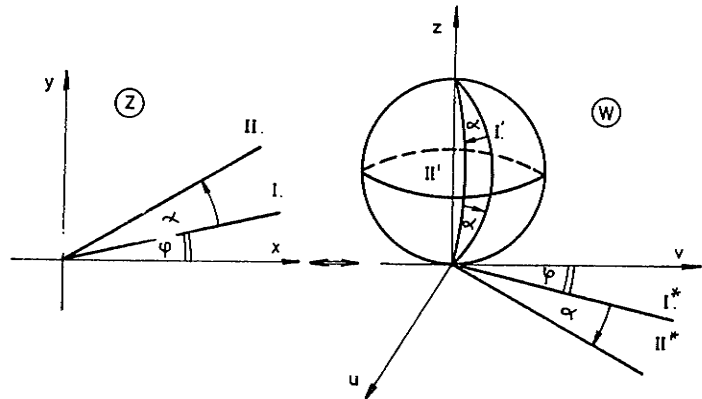
35. ábra

$w = \frac{1}{z}$ körtartása

(4) A leképezés konform a teljes z síkon

A $z \neq 0$ és $z \neq \infty$ esetben az állítás a $w = \frac{1}{z}$ függvény differenciálhatóságának és $f'(z) = -\frac{1}{z^2} \neq 0$ voltának következménye.

A $z = 0$ és $z = \infty$ pontbeli konformitás e pontokon átmenő görbék gömbi képeinek iránytartó szögtartásával és kis környezetbeli aránytartásával - a lineáris egész függvénynél vázolt módon - látható be (ld. 36. ábra).



36. ábra

$w = \frac{1}{z}$ szögtartása a $z = 0$ -ban

(Megjegyezzük, hogy a szögek forgási irányát az egységgörre vonatkozó inverzió és a valós tengelyre tükrözés külön-külön megfordítják, együtt azonban megtartják.)

(5) A $w = \frac{1}{z}$ leképezés fix pontjai:

a $z = \frac{1}{z}$ összefüggésből adódó

$$z = 1 \quad \text{és} \quad z = -1$$

pontok.

3.3. ÁLTALÁNOS LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNY LEKÉPEZÉSE

Definíció

Az általános (valódi) lineáris törtfüggvény a

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

alakú függvény, ahol a, b, c, d tetszőleges konstansok, de $c \neq 0$ (mert akkor a $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ lineáris egész függvény adódna) és $ad - bc \neq 0$ (mert akkor a $w = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \text{konstans}$ adódna).

Mivel $c \neq 0$ és $ad - bc \neq 0$ esetén osztással belátható, hogy

$$w = \frac{az + b}{az + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

ezért a lineáris törtfüggvény előállítható az

$$(I) \quad w_1 = z + \frac{d}{c}$$

$$(II) \quad w_2 = \frac{1}{w_1}$$

$$(III) \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} w_2$$

egyszerűbb függvények (két lineáris egész függvény és egy reciprokok függvény) láncolataként. Ebből következik, hogy az általános lineáris törtfüggvény leképezése rendelkezik mindazon tulajdonságokkal, amelyekkel ezen egyszerűbb függvények leképezései rendelkeznek. Tehát:

1. Kölcsönösen-egyértelműen képezi le a teljes z síkot a teljes w síkra

ha a függvény értelmezését kibővítjük a $w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ és $w(\infty) = \frac{a}{c}$ értékekkel.

2. Konform a teljes z síkon

A $z \neq -\frac{d}{c}$ és $z \neq \infty$ esetben az állítás a törtfüggvény differenciálhatóságának és $f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$ voltának a következménye. A $z = -\frac{d}{c}$

és $z = \infty$ pontokra a konformitás a lineáris egész függvénynél megismert módon terjeszthető ki.

3. Körtartó a teljes z síkon

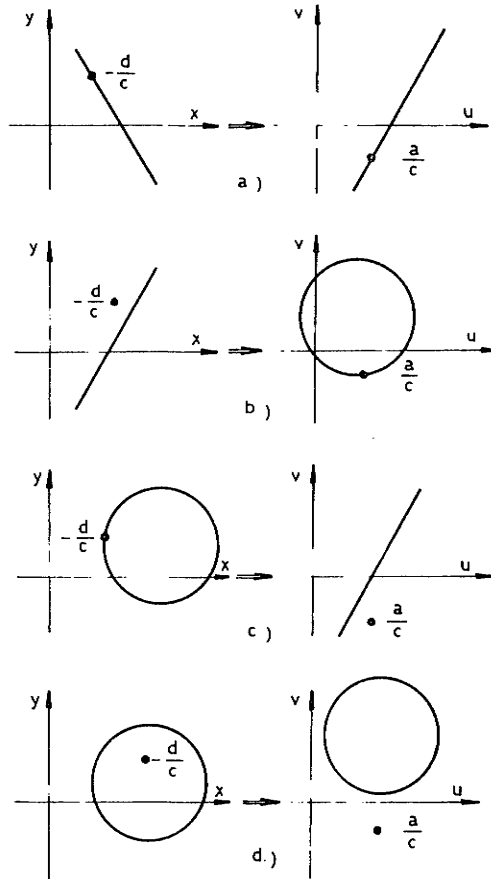
És pedig:

a) a z sík $z = -\frac{d}{c}$ pontján átmenő egyeneseit a w sík $w = \frac{a}{c}$ pontján átmenő egyeneséibe (lásd 37/a. ábra);

b) a z sík $z = -\frac{d}{c}$ pontján át nem menő egyeneseit a w sík $w = \frac{a}{c}$ pontján átmenő köréibe (lásd 37/b. ábra);

c) a z sík $z = -\frac{d}{c}$ pontján átmenő köréit a w sík $w = \frac{a}{c}$ pontját nem tartalmazó egyeneséibe (lásd 37/c. ábra);

d) a z sík $z = -\frac{d}{c}$ pontján át nem menő köréit a w sík $w = \frac{a}{c}$ pontján át nem menő köréibe (lásd 37/d. ábra) viszi át.



37. ábra

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \text{ körtartása}$$

4. Körre inverz pontpárt körre inverz pontpárra képez le

Azaz: a z sík bármely K körére vagy egyenesére inverz pontpárt a w sík olyan pontpárra képezi le, amely inverz a K kör, vagy egyenes w síkbeli kép-görbéjére.

5. Az általános lineáris törtleképezésnek fix pontjai a

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

összefüggésből adódó

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

másodfokú egyenlet gyökeinek megfelelő pontok, vagyis a

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$$

pontok. Így attól függően, hogy a diszkrimináns 0-tól különbözik-e vagy sem, a leképezésnek 2 fix pontja van, vagy csak 1.

6. Az általános lineáris törtleképezést egyértelműen meghatározó adatok

A lineáris törtfüggvény általános formulájában szereplő 4 együttható közül bármelyik 0-tól különbözővel - pl. $c \neq 0$ -val - a számlálót és nevezőt elosztva, az az együttható 1 lesz, úgy, hogy a függvény tulajdonképpen csak 3 konstansot tartalmaz. Így egyértelmű meghatározásához 3 különböző, egymástól független komplex (ill. 6 különböző, egymástól független valós) egyenlet megadása szükséges.

Az egyértelmű meghatározás legegyszerűbb esete: amikor a z számsíkon meg van adva 3 különböző $\{z_1, z_2, z_3\}$ és a w számsíkon 3 különböző $\{w_1, w_2, w_3\}$ pont és keresünk olyan lineáris törtfüggvényt, amely a z_k pontokat a megadott sorrendben a w_k pontokba ($k=1, 2, 3$) viszi át.

E feladat megoldásának létezését és annak egyértelműségét fejezi ki:

3.3.1. Tétel

Létezik egy és csakis egy olyan ℓ lineáris törtfüggvény, amely a z sík három tetszőleges, egymástól különböző $\{z_1, z_2, z_3\}$ pontját a w sík három tetszőleges egymástól különböző $\{w_1, w_2, w_3\}$ pontjába viszi át, vagyis

$$\ell(z_1) = w_1; \quad \ell(z_2) = w_2; \quad \ell(z_3) = w_3.$$

Bizonyítás

a) Létezik a feltételeknek eleget tevő törtfüggvény.

Könnyen előállítható olyan $\ell_1(z)$ lineáris törtfüggvény, amely a különböző $\{z_1, z_2, z_3\}$ pontokat a $\{0, \infty, 1\}$ pontokba viszi át. Éspedig, ha a z_k ; $k = 1, 2, 3$ pontok egyike sem ∞ , akkor - mint az behelyettesítéssel ellenőrizhető - e feltételeknek eleget tevő függvény az

$$\ell_1(z) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

lineáris törtfüggvény. Ha pedig a z_k pontok ($k=1, 2, 3$) egyike ∞ , akkor aszerint, hogy melyik ∞ , az ℓ_1 függvény a

$$\frac{z_3 - z_2}{z - z_2}; \quad \frac{z - z_1}{z_3 - z_1}; \quad \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

lineáris törtek egyikére redukálódik. Ezek a törtek úgy adódnak, hogy 1-et írunk azon különbségek helyére, ahol $z_k = \infty$ ($k=1, 2, 3$) szerepel. Így például, ha

$$z_1 = \infty$$

akkor a feltételeknek eleget tevő lineáris törtfüggvény

$$\ell_1(z) = \frac{z_3 - z_2}{z_2 - \infty} \cdot \frac{z - \infty}{z - z_2} = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}$$

alakú. (Ui. ez a függvény a $z = \infty$ -t a $w = 0$ -ban, a $z = z_2$ -t a $w = \infty$ -be és a $z = z_3$ -at a $w = 1$ -be viszi át.)

Az

$$\ell_1 : \{z_1, z_2, z_3\} \mapsto \{0, \infty, 1\}$$

leképezést megvalósító lineáris törtfüggvényhez hasonlóan konstruálható - w függvényében - olyan ℓ_2 lineáris törtfüggvény, hogy

$$\ell_2 : \{w_1, w_2, w_3\} \mapsto \{0, \infty, 1\};$$

E függvény inverze (ami ugyancsak lineáris törtfüggvény):

$$\ell_2^{-1} : \{0, \infty, 1\} \mapsto \{w_1, w_2, w_3\}.$$

Ugy, hogy az

$$\ell = \ell_2^{-1} \circ \ell_1$$

összetett függvény, olyan lineáris törtfüggvény, amely a $\{z_1, z_2, z_3\}$ pontokat a $\{w_1, w_2, w_3\}$ pontokba viszi át.

Valóban:

$$\ell(z_1) = \ell_1^{-1} \circ \ell_1(z_1) = \ell_2^{-1}(0) = w_1$$

$$\ell(z_2) = \ell_2^{-1} \circ \ell_1(z_2) = \ell_2^{-1}(\infty) = w_2$$

$$\ell(z_3) = \ell_2^{-1} \circ \ell_1(z_3) = \ell_2^{-1}(1) = w_3$$

b) A feltételeknek eleget tevő lineáris törtfüggvény egyértelmű.

Tegyük fel ugyanis, hogy ℓ -en kívül ℓ^* is olyan lineáris törtfüggvény, amely eleget tesz az

$$\ell^*(z_k) = w_k \quad k = 1, 2, 3$$

feltételeknek. Képezzük ezzel, valamint az ℓ függvény inverzával, az ℓ^{-1} lineáris törtfüggvénnyel az $\ell^{-1} \circ \ell^*$ összetett függvényt. Ez a függvény a három különböző z_k pontot önmagába viszi át, ugyanis

$$\ell^{-1} \circ \ell^*(z_k) = \ell^{-1}(\ell^*(z_k)) = \ell^{-1}(w_k) = z_k.$$

Mivel - amint láttuk - a lineáris törtfüggvény által létesített leképezésnek legfeljebb két fix pontja lehet, ezért ha a leképezésnek 3 vagy ennél több fix pontja van, akkor az csak az

$$E(z) = z$$

identikus leképezés lehet. Azaz

$$\ell^{-1} \circ \ell^* = E$$

és így

$$\ell = \ell \circ E = \ell \circ (\ell^{-1} \circ \ell^*) = (\ell \circ \ell^{-1}) \circ \ell^* = E \circ \ell^* = \ell^*,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\ell = \ell^*.$$

Tehát az

$$\ell = \ell_2^{-1} \circ \ell_1$$

az egyetlen olyan lineáris törtfüggvény, amely az egymástól különböző $\{z_1, z_2, z_3\}$ pontokat az egymástól különböző $\{w_1, w_2, w_3\}$ pontokba viszi át. $\square$

A 3.3.1. Tételbeli leképezést biztosító egyértelmű lineáris törtfüggvény meghatározása történhet az ún. "kettősvizony" segítségével is.

Definíció

A komplex sík négy tetszőleges pontjának a kettősvizonya (a valós esettel megegyezően):

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1},$$

ha a pontok között nincs a ∞ , és

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}, \text{ vagy } \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}, \text{ vagy } \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}, \text{ vagy } \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2},$$

ha a négy pont egyike ∞ .

Mint látható: komplex számok kettősvizonya általában maga is komplex szám.

Bebizonyítható, hogy bármely lineáris törtleképezés a kettősvizonyt változtatlanul hagyja. Azaz: ha z_1, z_2, z_3, z_4 a z sík négy különböző pontja, és w_1, w_2, w_3, w_4 a lineáris tört leképezésnél ezeknek megfelelő pontok a w síkban, akkor

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Ez az állítás könnyen igazolható a

$$w = z + b; \quad w = az; \quad w = \frac{1}{z}$$

speciális lineáris leképezésekre. Az általános eset pedig ezekre visszavezethető.

Ennek - vagy a 3.1.1. Tételnek - felhasználásával igazolható:

3.3.2. Tétel

A $\{z_1, z_2, z_3\}$ pontokat a $\{w_1, w_2, w_3\}$ pontokba átvivő egyetlen lineáris törtfüggvény a kettőviszonyok közötti

$$(z_1, z_2, z, z_3) = (w_1, w_2, w, w_3)$$

egyenlőséggel megadott és

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ad - bc} \neq 0$$

alakra hozható függvény.

Bizonyítás

A 3.3.1. Tétel értelmében a $\{z_1, z_2, z_3\}$ pontokat a $\{w_1, w_2, w_3\}$ pontokba átvivő egyetlen lineáris törtfüggvény:

$$\ell = \ell_2^{-1} \circ \ell_1$$

alakú, ahol

$$\begin{aligned} \ell_1 : \{z_1, z_2, z_3\} &\implies \{0, \infty, 1\} \\ \ell_2^{-1} : \{0, \infty, 1\} &\implies \{w_1, w_2, w_3\} \end{aligned}$$

Azonos átalakítással az

$$\ell_2 \circ \ell = \ell_2 \circ (\ell_2^{-1} \circ \ell_1) = (\ell_2 \circ \ell_2^{-1}) \circ \ell_1 = \ell_1$$

egyenlőség adódik, ahol - amennyiben a ∞ nem fordul elő egyik ponthármasban sem -:

$$(\ell_2 \circ \ell)(w) = \frac{w - w_1}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

és

$$\varrho_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Igy a feltételeknek eleget tevő egyetlen függvény a

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

ami nem más, mint a

$$(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$$

kettősviszonyokkal kifejezett lineáris törtfüggvény, amiből átrendezéssel w kifejezhető z -vel.

A leképező függvényre kapott formula akkor is használható, ha a ponthármasban szerepel a ∞ . Ilyenkor a megfelelő tényezőket 1-gyel helyettesítjük. $\square$

3.4. LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNY ÁLTAL LÉTESÍTETT NÉHÁNY SPECIÁLIS LEKÉPEZÉS

Gyakorlati szempontból fontosak azok a lineáris törtleképezések, amelyek félsíkok és körtartományok egymásra, ill. önmagukra való leképezéseit valósítják meg. Az alábbiakban ezek közül ismertetjük a legegyszerűbbeket.

(a) Felső félsík egységkörlemezre való lineáris leképezése

3.4.1. Tétel

A legáltalánosabb lineáris törtfüggvény, amely kölcsönösen egyértelműen képezi le az $\text{Im } z \geq 0$ félsíkot a $|w| \leq 1$ körtartományra, úgy hogy az $\text{Im } z > 0$ félsík egy rögzített z_0 pontját a körtartomány $w = 0$ pontjába viszi át:

$$w = e^{j\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

alakú (ahol $\text{Im } z_0 > 0$ és α tetszőleges valós érték).

Bizonyítás

Mivel a kívánt leképezést létrehozó lineáris törtfüggvény - a feltétel értelmében - az $\operatorname{Im} z > 0$ félsík rögzített z_0 pontját a $w = 0$ pontba képezi le, ezért a valós tengelyre vonatkozó inverzét: $\bar{z}_0$ -át a $w = 0$ pontnak a $|w| = 1$ körre vonatkozó inverzére; $w = \infty$ -re kell leképeznie. Ezt biztosítja minden

$$w = k \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

alaku függvény, ahogy az a $z = z_0$ ill. a $z = \bar{z}_0$ helyettesítéssel könnyen ellenőrizhető. E függvényben k értékét úgy kell meghatározni, hogy a leképezésnél az $y = 0$ valós tengely pontjai a $|w| = 1$ körvonal pontjaiba menjenek át. Tehát kell, hogy

$$|w| = |k| \left| \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = 1$$

legyen. Mivel a tört abszolútértéke 1 (mert a számláló a nevező konjugáltja), ezért szükségképpen $|k| = 1$, azaz $k = e^{j\alpha}$, ahol α tetszőleges valós szám (α változtatása a leképezést nem befolyásolja, az csak az egységkörnek a $w = 0$ pont körüli elforgatását jelenti).

A kapott függvény egyben megvalósítja a felső félsíknak az egységkör belsejére és az alsó félsíknak az egységkör külsejére való leképezését is. Ugyanis a $z = x + jy$, $z_0 = x_0 + jy_0$ (ahol $y_0 > 0$) jelölések alkalmazásával

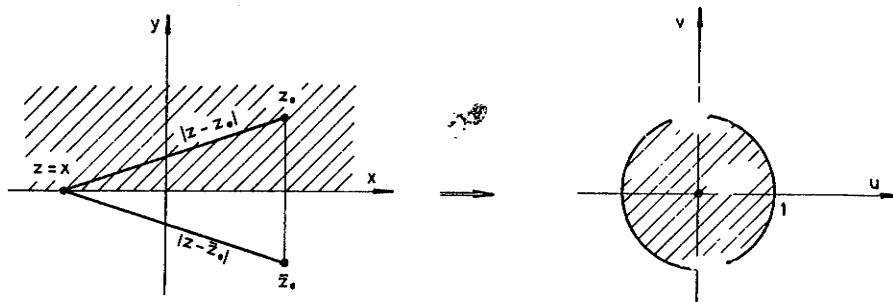
$$|w|^2 = \frac{|z - z_0|^2}{|z - \bar{z}_0|^2} = \frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 - 4yy_0}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$$

amiből nyilvánvaló, hogy az $y > 0$ esetben $|w| < 1$; $y = 0$ esetben $|w| = 1$; $y < 0$ esetben pedig $|w| > 1$ (ld. 38. ábra).

Tehát a

$$w = e^{j\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}; \quad \alpha \text{ valós, } \operatorname{Im} z_0 > 0$$

alaku függvények, a kívánt leképezést hozzák létre. $\square$



38. ábra

(b) Egységkörlemez önmagára való lineáris tört leképezése

3.4.2. Tétel

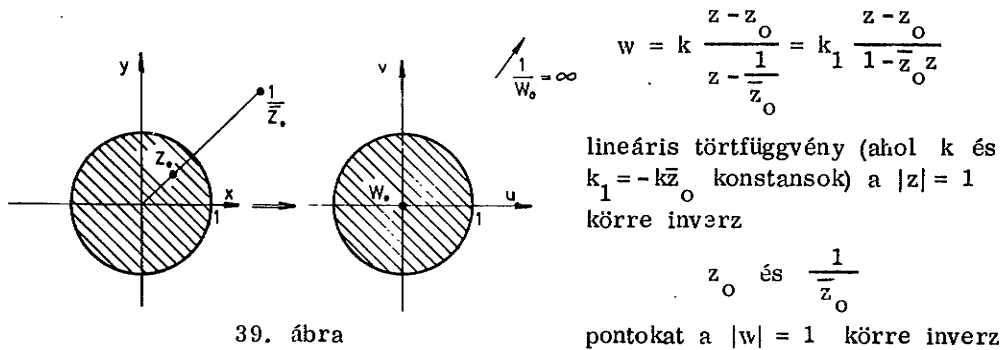
A legáltalánosabb lineáris törtfüggvény, amely kölcsönösen-egyértelműen képezi le a $|z| < 1$ körtartományt a $|w| < 1$ körtartományra, úgy hogy a $|z| < 1$ körtartomány egy rögzített z_0 belső pontját a $|w| < 1$ körtartomány $w = 0$ középpontjába viszi át:

$$w = e^{j\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

alaku (α tetszőleges valós, $|z_0| < 1$).

Bizonyítás

Egyszerűen belátható, hogy a



39. ábra

$$w = 0 \quad \text{és} \quad w = \infty$$

pontokba viszi át (ld. 39. ábra).

Hogy a kívánt leképezést létrehozzuk, k_1 értékét úgy kell meghatározni, hogy a $|z| = 1$ körvonal $z = e^{j\varphi}$ pontjai (ahol φ valós érték), a $|w| = 1$ körvonal pontjaiba menjenek át. Tehát kell, hogy

$$|w| = |k_1| \left| \frac{e^{j\varphi} - z_0}{1 - \bar{z}_0 e^{j\varphi}} \right| = |k_1| e^{j\varphi} \left| \frac{1 - z_0 e^{-j\varphi}}{1 - \bar{z}_0 e^{j\varphi}} \right| = 1$$

legyen. Mivel itt $|e^{j\varphi}| = 1$ és a tört abszolútértéke is 1 (mert a tört számlálója a nevező konjugáltja) ezért kell, hogy $|k_1| = 1$, azaz, hogy $k_1 = e^{j\alpha}$ (ahol α valós érték) legyen. A kapott függvény egyben a $|z| < 1$ körbelsőre a $|w| < 1$ körbelsőbe; a $|z| > 1$ körkülsőre a $|w| > 1$ körkülsőbe képezi le.

Ugyanis a

$$|w|^2 = \frac{|z - z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}$$

összefüggésben minden z -re

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 - |1 - \bar{z}_0 z|^2 &= (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) - (1 - \bar{z}_0 z)(1 - z \bar{z}) = \\ &= (1 - |z_0|^2)(|z|^2 - 1). \end{aligned}$$

Igy

$$|z - z_0| \leq |1 - \bar{z}_0 z| \quad \text{aszerint, hogy} \quad |z| \leq 1,$$

vagyis

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|1 - \bar{z}_0 z|} \leq 1 \quad \text{aszerint, hogy} \quad |z| \leq 1.$$

Tehát a

$$w = e^{j\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \text{ahol} \quad |z_0| < 1$$

alakú függvények valóban a kívánt leképezést hozzák létre.

Megjegyezzük, hogy a

$$w = e^{j\alpha} \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \quad |z_0| < R$$

függvények a $|z| < R$ körtartományt képezik le a $|w| < 1$ körtartományra úgy, hogy a $|z| < R$ körtartomány rögzített z_0 belső pontját a $w = 0$ pontba képezik le. (Ez az összefüggés az előzőből úgy adódik, hogy z helyébe $\frac{z}{R}$ -et, z_0 helyébe $\frac{z_0}{R}$ -et írunk).

(c) Felső félsík önmagára való lineáris leképezése

3.4.3. Tétel

A legáltalánosabb lineáris törtfüggvény, amely a felső félsíket önmagára képezi le: a valós együtthatóju

$$w = \frac{az + b}{cz + d}; \quad ad - bc \neq 0$$

függvény.

Bizonyítás

Az $\text{Im } z > 0$ félsíket az $\text{Im } w > 0$ félsíkre a

$$(w_1, w_2, w_3) = (z_1, z_2, z_3)$$

kettős viszonyok által meghatározott lineáris törtfüggvény képezi le, ha a z_k ill. a w_k pontok ($k = 1, 2, 3$) a valós x tengely ill. a valós u tengely pontjai azonos befutási sorrendben. Mivel a z_k és a w_k értékek valósak, ezért a

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

lineáris törtfüggvény a, b, c, d együtthatói is valósak.

Megfordítva:

Minden valós együtthatóju

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

lineáris törtfüggvény az $\text{Im } z = 0$ valós tengelyt az $\text{Im } w = 0$ valós tengelyre, az $\text{Im } z > 0$ félsíkot az $\text{Im } w > 0$, vagy $\text{Im } w < 0$ félsíkra képezi le. Az $\text{Im } z > 0$ félsíkot akkor képezi le az $\text{Im } w > 0$ félsíkra, ha az x tengely bármely pontjában - a $z = \frac{-d}{c}$ pont kivételével - a

$$\left[\frac{dw}{dz} \right]_{z=x} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0,$$

ami akkor áll fenn, ha az együttható-determináns:

$$ad - bc > 0.$$

Ha ugyanis $ad - bc < 0$ volna, akkor a tekintett lineáris törtfüggvény a valós tengelyt 180° -kal elforgatná és vele együtt - a konformitás miatt - az $\text{Im } z > 0$ felső félsíkot az $\text{Im } w < 0$ alsó félsíkra képezné le. $\square$

Megjegyzés

Körlemez vagy félsík önmagára való leképezése megvalósítható - a lineáris törtfüggvényénél egyszerűbb - lineáris egész függvénnyel is.

3.5. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg, hogy a

$$w = (1 + j)z + 2 - j$$

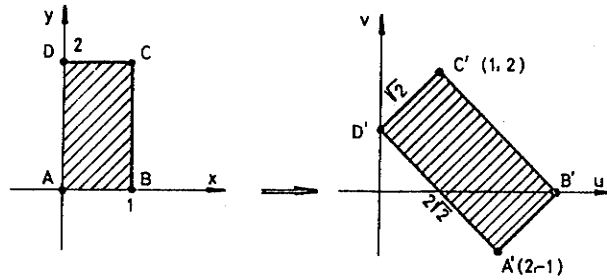
lineáris egész függvény mire képezi le az $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 2)$, $D = (0, 2)$ csúcspontu négyszög tartományt.

Mivel ez a függvény $\arg(1+j) = \frac{\pi}{4}$ szöggel elforgat $|1+j| = 2$ -szere-sére nagyít, $b = 2 - j$ síkvektorral párhuzamosan eltol, ezért az adott négyszögtartományt olyan négyszögtartományra képezi le, amelynek csúcspontjai az $A' = (2, -1)$; $B' = (3, 0)$; $C' = (1, 2)$; $D' = (0, 1)$ pontok (ld. 40. ábra).

2. Adjunk meg egy olyan lineáris egész függvényt, amely a z síkbeli $y = 2x$ egyenest a w síkbeli $v = 1 - u$ egyenesre képezi le.

Feleltessük meg egymásnak az $y = 2x$ és a $v = 1 - u$ egyenesek két-két tetszőleges pontját. Például:

$$\begin{aligned} a \quad z_1 = 0 & \quad \text{pontnak feleltessük meg a} \quad w_1 = 1, \\ a \quad z_2 = 1 + 2j & \quad \text{pontnak feleltessük meg a} \quad w_2 = j \end{aligned}$$



40. ábra

pontot. Ezeket a keresett $w = az + b$ összefüggésbe helyettesítve:

$$1 = b$$

$$j = a(1 + 2j) + b,$$

amiből

$$a = \frac{3}{5}j + \frac{1}{5},$$

$$b = 1$$

Igy, egy a feltételeknek eleget tevő lineáris egész függvény:

$$w = \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}j\right)z + 1.$$

3. Irjuk fel mindazon lineáris egész függvényeket, amelyek az egysugarú origó középpontú kör belsejét a $(2,1)$ középpontú $R = 3$ sugarú kör belsejébe képezik le.

A keresett lineáris egész függvényeknek olyanoknak kell lenni, hogy tetszőleges α szöggel elforgassanak (ami elérhető a $w_1 = e^{j\alpha} \cdot z$ leképezéssel), 3-szorosára nyujtsanak (ami elérhető a $w_2 = 3w_1 = 3e^{j\alpha} \cdot z$ leképezéssel) és a $[2,1]$ síkvektorral párhuzamosan eltoljanak (ami elérhető a $w_3 = w_2 + (2+j)$ leképezéssel). Így a feltételeknek eleget tevő lineáris egész függvények:

$$w = 3e^{j\alpha} \cdot z + (2 + j)$$

alakúak.

4. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{2z}{z - j}$$

lineáris törtfüggvény mire képezi le az

$$y = x$$

egyenest?

A képgörbe meghatározásához célszerű z -t kifejezni w függvényében és az így adódó $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$ transzformációs formulák alapján meghatározni az $y = x$ egyenes (u, v) síkbeli képgörbéjének egyenletét. A

$$w = \frac{2z}{z - j}$$

összefüggésből

$$z = \frac{jw}{w - 2}$$

Mindkét oldalt valós és képzetes részre bontva:

$$x + jy = \frac{ju + jv}{u + jv - 2},$$

amiből rendezéssel az

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{2v}{(u-2)^2 + v^2} \\ y &= \frac{u^2 - 2u + v^2}{(u-2)^2 + v^2} \end{aligned} \right\}$$

transzformációs egyenletrendszer adódik. Ennek felhasználásával a z síkbeli $y = x$ egyenes w síkbeli képgörbéjének egyenlete:

$$\frac{u^2 - 2u + v^2}{(u-2)^2 + v^2} = \frac{-2v}{(u-2)^2 + v^2},$$

illetve

$$(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 2,$$

ami $(1, 1)$ középpontu, $\sqrt{2}$ sugaru kör egyenlete.

Másik (egyszerűbb) módszer:

A lineáris törtfüggvény által létesített leképezés körtartósága miatt az $y = x$ egyenes képe vagy egyenes, vagy kör. Mivel az $y = x$ egyenes nem megy át a $w = \frac{2z}{z - j}$ függvény $z = j$ szinguláris pontján, aminek a képe a $w = \infty$ pont volna, ezért a képgörbe nem lehet egyenes, csak kör, amelyet egyértelműen meghatároz az $y = x$ egyenes 3 tetszőleges, de egymástól különböző pontjának a w síkbeli képe.

Igy például

$$\begin{array}{lll} z_1 = 0 & \text{pont képe} & w_1 = 0 \\ z_2 = 1 + j & \text{pont képe} & w_2 = 2 + 2j \\ z_3 = \infty & \text{pont képe} & w_3 = 2 \end{array}$$

E három ponton átmenő kör középpontja a w_1 és w_3 , valamint a w_2 és w_3 pontokat összekötő hurok felező merőlegeseinek - az $u = 1$ és $v = 1$ egyeneseknek - a metszéspontja: $P_0(1, 1)$; sugara pedig ennek a körpontoktól való távolsága: $\sqrt{2}$.

Igy a képgörbe az

$$(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 2,$$

ill. a

$$|w - 1 - j| = \sqrt{2}$$

egyenletű kör, ami megegyezik előző számításunkkal.

5. Adjunk meg egy olyan lineáris törtfüggvényt, amely adott egyenest adott körbe visz át.

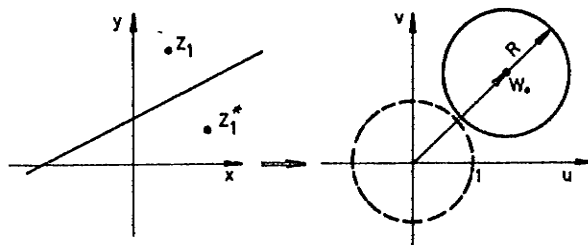
Felvezünk az egyenesre inverz z_1 és z_1^* pontokat. A

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_1^*}$$

lineáris törtfüggvény az adott egyenest az egységkörbe viszi át és ebből a kívánt tulajdonságu lineáris törtfüggvényt az adott kör sugarával egyező R -szeres nyújtással és középpontjához vezető z_0 síkvektorral párhuzamos eltolással nyerjük. Tehát a keresett lineáris törtfüggvény

$$w = R \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1} + z_0$$

(ld. 41. ábra).



41. ábra

6. Vizsgáljuk a lineáris egész és a reciprok függvény speciális összetételéből adódó

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

un. Zsukovszkij-féle függvény által létesített leképezést kölcsönös-egyértelműség és konformitás szempontjából.

Az adott függvény leképezése kölcsönösen egyértelmű a $|z| < 1$ egységkörbelső (vagy a $|z| > 1$ egységkörkülső) és a w sík valós tengelyének $[-1, 1]$ szakasza mentén be nem szett teljes w sík között.

Ugyanis a függvény a z sík olyan tartományát képezi le kölcsönösen egyértelműen a w síkra, amelynek $z_1 \neq z_2$ pontjaira:

$$z_1 + \frac{1}{z_1} \neq z_2 + \frac{1}{z_2},$$

illetve

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) \neq 0.$$

Ennek pedig $z_1 \neq z_2$ esetén szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$z_1 z_2 \neq 1,$$

vagyis, hogy

$$z_1 \neq \frac{1}{z_2}.$$

Ezt a feltételt az egységkör belsejének (vagy külsejének) pontjai (de magának az egységkörnek a pontjai nem!) teljesítik. Az egységkörvonal képe a w sík valós tengelyének kétszeresen lefedett $[-1, 1]$ szakasza (ld. 42/a. és b. ábrák).

A komplex szám trigonometrikus alakjának felhasználásával belátható, hogy ez a függvény a

$$|z| = r_0$$

körsebreget a $z = 1$ és $z = -1$ fókusz

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

ellipszisseregre; az

$$\arg z = \varphi_0$$

félegyenessereget a $z = 1$ és $z = -1$ fókusz

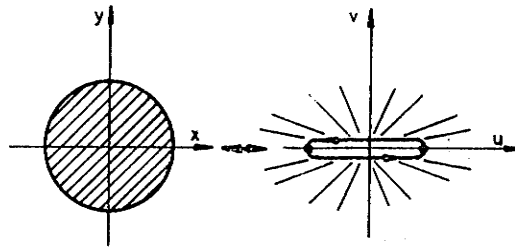
$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$$

hiperbolaseregre képezi le.

A teljes z síkot a függvény kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le a $-1 \leq u \leq 1$; $v = 0$ egyenesszakasz mentén bemetszett, a bemetszés partjai mentén keresztbe összeillesztett, kétszeresen lefedett w síkra, a függvény kétfelű Riemann-felületére. A $w = 1$ és $w = -1$ pontok a függvény másodrendű elágazási pontjai (ld. 42/c. ábra).

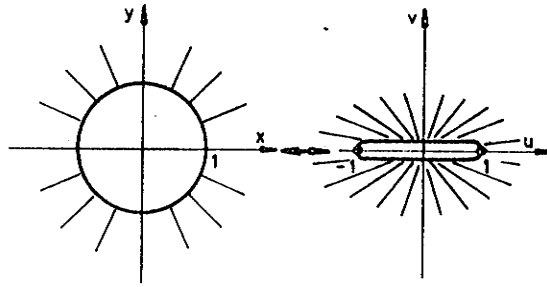
A $w = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$ függvény által létesített leképezés a $z = 0$ és $z = \pm 1$ pontok kivételével a nyílt z síkon konform.

Ugyanis a függvény a $z = 0$ hely kivételével mindenütt differenciálható (ill. reguláris) és differenciálhányadosa $f'(z) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{z^2})$ a $z = \pm 1$ pontok kivételével sehol sem zérus.



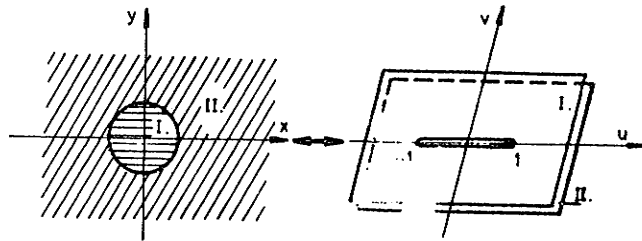
42/a ábra

$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése



42/b ábra

$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése



42/c ábra

$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ Riemann felülete

4.§ ELEMI FÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉSÜK

Az elemi komplex függvények és inverzeik egyrészt a megfelelő valós változós függvények általánosításai, másrészt azok továbbfejlesztései, amennyiben az ott megismert tulajdonságaik mellett újabb tulajdonságokkal is rendelkeznek. Így például: a komplex számok halmazán értelmezett e^z exponenciális függvény periodikus; a $\sin z$ és $\cos z$ függvény nem korlátos; a logaritmus függvény negatív számokra (és minden $z \neq 0$ komplex számra) is értelmezett stb.

Gyakorlati szempontból elsősorban a reguláris komplex függvényeknek van jelentőségük, ezért vizsgálatainkat kiterjesztjük a többértékű relációk egyértékű - és egyben reguláris - ágaira is. Ezzel lehetővé tesszük az összes elemi függvény - mint mindenütt reguláris függvény - tárgyalását.

4.1. HATVÁNYFÜGGVÉNY

Definíció

A $w = z^n$ komplex hatványfüggvény tetszőleges n természetes számra a z komplex érték önmagával vett n -szeres szorzata, amely a $z = \infty$ esetén a $w = \infty$ értéket veszi fel.

Az így definiált függvény fontosabb tulajdonságai:

(1) A teljes z síkon értelmezett n réti függvény

Függvény, mert minden z értékhez egy w érték tartozik; n réti, ami az alábbi módon látható be:

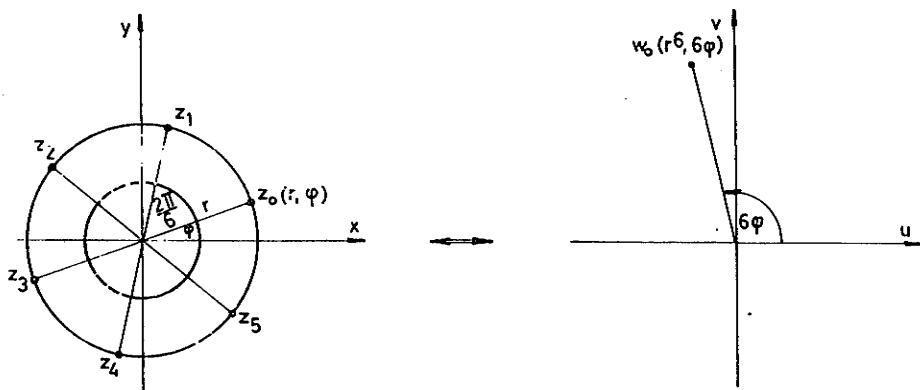
a z és w síkon polárkoordinátákat bevezetve a függvény

$$\varphi(\cos \phi + j \sin \phi) = [r(\cos \varphi + j \sin \varphi)]^n$$

alakjából, ill. $z \neq 0$ esetén a vele ekvivalens

$$\begin{cases} \varphi = r^n \\ \phi = n\varphi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{azaz} \quad \begin{cases} w = z^n \\ \text{arc } w = n \cdot \text{arc } z + 2k\pi \end{cases}$$

egyenletrendszerből (ahol $k \in \mathbb{N}$ értékét úgy választjuk, hogy arc $w \in [-\pi, +\pi]$ legyen) nyilvánvaló, hogy ugyanaz a w érték tartozik minden olyan z -hez, amelynek abszolútértéke azonos, arcusa pedig $\frac{2\pi}{n}$ egészszámu többszörösében különbözik egymástól. Ezek a pontok a z sík r sugaru körébe irt n oldalú sokszögének a csúcspontjai ($n = 6$ esetén ld. 43. ábra). Kivételt képeznek a $w = 0$ és $w = \infty$ értékek, amelyek csak a $z = 0$ és $z = \infty$ értékekhez tartoznak. Ezekben a pontokban a hatványfüggvény egyrétü.



43. ábra
 $w = z^6$ függvény 6-rétűsége

(2) A teljes z síkon differenciálható (reguláris) függvény

Differenciálhányadosa:

$$(z^n)' = n z^{n-1},$$

ami a valós esettel analóg módon igazolható.

(3) Leképezésének fontosabb tulajdonságai - amelyek analógok a $w = z^2$ -nél megismertekkel -:

a) A z sík minden origóból kiinduló vektorát

$$|z|^{n-1} = r^{n-1} \text{-szerezésre}$$

nyújtja, ha $|z| > 1$, ill. zsugorítja, ha $|z| < 1$ és

$$(n-1) \text{ arc } z = (n-1)\varphi$$

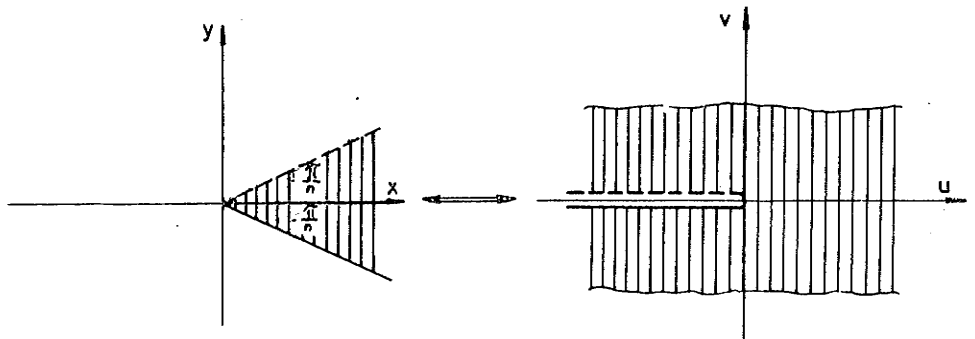
szöggel elforgatja.

b) Kölcsönösen egyértelműen képezi le
a z sík bármely

$$\frac{(2k-1)\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

szögterét a pozitív valós tengely mentén bemetszett teljes w síkra.

Ez speciálisan $k = 0$ esetén azt jelenti, hogy a $w = z^n$ leképezés kölcsönösen egyértelmű a z sík $-\frac{\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}$ szögtere és a negatív valós tengely mentén bemetszett w sík között (ld. 44. ábra).



44. ábra
 $w = z^n$ kölcsönösen egyértelmű leképezése

c) Kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le

a teljes z síkot a függvény w síkbeli n -levelű Riemann felületére (amely a $w = 0$ és $w = \infty$ elágazási pontokat összekötő egyenes-szakasz - pl. a negatív valós tengely - mentén bemetszett, n -szeresen lefedett w sík).

d) Konform módon képezi le

a $z = 0$ és $z = \infty$ pont kivételével a teljes z síkot. Ugyanis z^n a teljes nyílt z síkon reguláris és differenciálhányadosa a $z = 0$ pont kivételével sehol sem zérus. A $z = 0$ és $z = \infty$ pontokban egymást metsző ívelemek hajlásszöge a leképezésnél n -szeresére nő, így ezekben a pontokban a leképezés nem konform.

4.2. GYÖKFÜGGVÉNY

Definíció

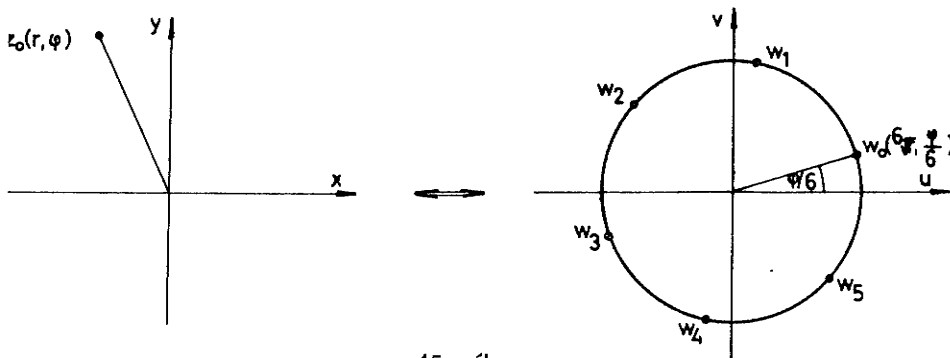
A $w = \sqrt[n]{z}$ függvény tetszőleges n természetes számra a komplex számok halmazán értelmezett n -rétű $w = z^{1/n}$ hatványfüggvény egyrétű részének inverze (azaz: az $\sqrt[n]{z}$ reláció egyértékű árt.).

Az $\sqrt[n]{z}$ reláció minden z értékhez olyan n különböző w értéket rendel, amelyekre

$$|w_n| = \sqrt[n]{|z|}$$

$$\arg w_n = \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \quad k=0, 1, \dots, n-1$$

($n=6$ esetén ld. 45. ábra). Kivételt képeznek a $z = 0$ és $z = \infty$ értékek, ahol a reláció egyértékű. Ezek a reláció n -ed rendű elágazási pontjai.



45. ábra
 $w = \sqrt[6]{z}$ reláció 6-értékűsége

A reláció egyértékű ágának - a gyökfüggvénynek - kiválasztása úgy történik, hogy $-\pi \leq \arg z < \pi$ rögzítése mellett minden egyes z értékhez ugyanazon k -hoz ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) tartozó w_k értéket rendeljük. A kiválasztott ág fontosabb tulajdonságai:

- (1) A teljes z síkon értelmezett egyrétű függvény
- (2) A teljes z síkon differenciálható (reguláris) függvény

kivéve a $z = 0$ és $z = \infty$ pontokat. Differenciálhányadosa:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{n} z^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}.$$

Ugyanis - az inverz függvény differenciálási szabálya értelmében - $z \neq 0$ és $z \neq \infty$ esetén:

$$(\sqrt[n]{z})' = \left[\frac{1}{n w^{n-1}} \right]_{w^n=z} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{z}}{z} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$$

az állításnak megfelelően.

(3) Leképezésének fontosabb tulajdonságai

a) A z sík minden origóból kiinduló vektorát

$$|z|^{\frac{1}{n}-1} = r^{\frac{1-n}{n}} \text{ -szerezésére}$$

nyújtja, ha $|z| < 1$, ill. zsugorítja, ha $|z| > 1$ (ui. $|z| |z|^k = |z|^{\frac{1}{n}}$ -ből $k = \frac{1}{n} - 1$), és

$$\frac{1-n}{n} \arccos z = \frac{1-n}{n} \varphi$$

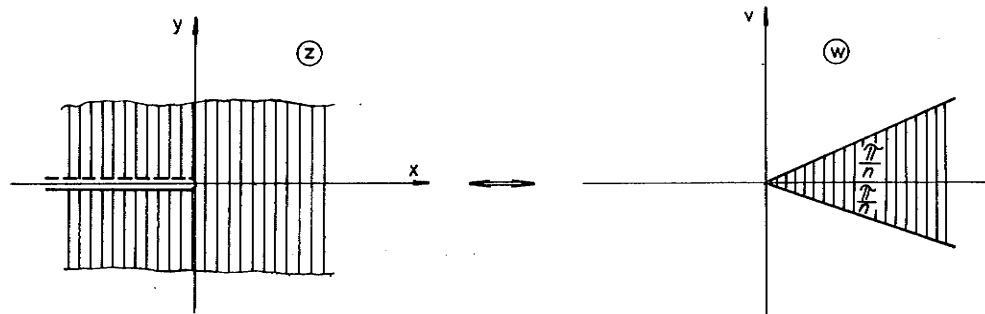
szöggel elforgatja (ui. $\varphi + k\varphi = \frac{\varphi}{n}$ -ből $k = \frac{1}{n} - 1$; $n = 6$ -ra ld. 45. ábra).

b) Kölcsönösen egyértelmű

bármely egyértékű ágának leképezése a negatív valós tengely mentén bemetszett teljes z sík és a w sík valamely

$$\frac{(2k-1)\pi}{n} \leq \arccos w < \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

szögteret közt (ld. 46. ábra).



46. ábra
 $w = \sqrt[n]{z}$ leképezése

c) Kölcsönösen egyértelmű és folytonos

a leképezése a $z = w^n$ függvény z síkbeli n levelű Riemann-felülete (a negatív valós tengely mentén bemetszett és a bemetszés partjai, mentén keresztbe összeillesztett n -szeresen lefedett z sík) és a teljes w sík között ($n=2$ -re ld. 26. ábra).

A $z = 0$ és $z = \infty$ pontok az $\sqrt[n]{z}$ reláció n -ed rendű elágazási pontjai. Ezeket a pontokat a Riemann-felületen n -szer megkerülve, kép-pontjaik - $w = 0$ és $w = \infty$ - egyszer lesznek körüljárva.

d) Konform

az általa létesített leképezés a $z = 0$ és $z = \infty$ pontok kivételével a teljes z sík és a w sík

$$\frac{(2k-1)\pi}{n} \leq \arg w \leq \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad (k=0, \pm 1, \dots)$$

szögtere közt.

Ugyanis - bármely egyértékű ágon - az $\sqrt[n]{z}$ függvény a $z = 0$ és $z = \infty$ pontok kivételével mindenütt reguláris és 0-tól különböző differenciálhányadosú. A $z = 0$ és $z = \infty$ pontokban egymást metsző ívelemek hajlásszöge a leképezésnél n -ed részére csökken, így ezekben a pontokban a leképezés nem konform.

4.3. EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY

Definíció

A $w = e^z$ (természetes alapu) exponenciális függvény tetszőleges $z = x + jy$ komplex kitevőre a

$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x (\cos y + j \sin y)$$

összefüggéssel értelmezett függvény.

Ez a definíció nem önkényes, amit alátámaszt egyrészt az a tény, hogy $z = x$ valós szám esetén a függvény megegyezik a valós változóju exponenciális függvénnyel (amely a definiáló összefüggésből $y = 0$ helyettesítéssel adódik); másrészt az a tény, hogy az így definiált exponenciális függvény rendelkezik a valós változóju exponenciális függvény tulajdonságainak egész sorával. Így pl. - mint később látni fogjuk

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

(amit szokás az exponenciális függvény fentivel ekvivalens definíciójának tekinteni); továbbá tetszőleges komplex kitevőre fennállnak az

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$

alapvető összefüggések (amelyek a $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$ helyettesítés után a komplex számok körében értelmezett műveletek és trigonometrikus összefüggések felhasználásával közvetlenül beláthatók). Megjegyezzük még, hogy a definiáló összefüggésből $x = 0$, $y = \varphi$ helyettesítéssel adódik az

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

Euler formula, amelyet "e" imaginárius hatványa definíciójának tekintünk és amelynek speciális esetei az

$$e^{\frac{\pi}{2}j} = j; \quad e^{-\frac{\pi}{2}j} = -j; \quad e^{\pi j} = -1; \quad e^{2\pi j} = 1$$

összefüggések.

A komplex változós exponenciális függvény definíciójából következnek a függvény alábbi tulajdonságai:

- (1) A $w = e^z$ függvény a teljes nyílt z síkon értelmezett végtelen sokrétű függvény

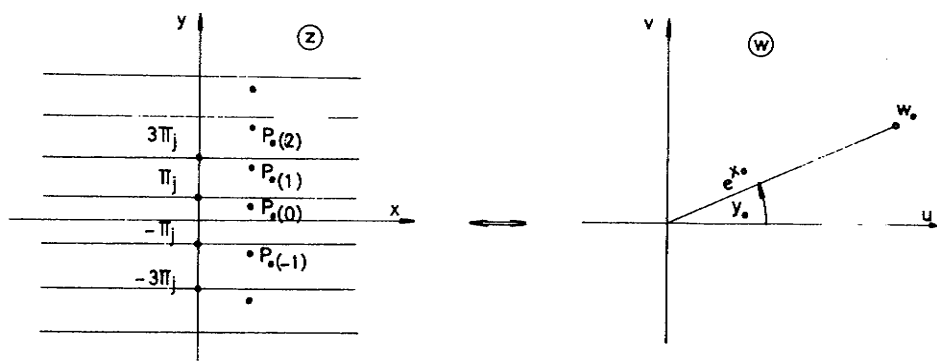
Függvény, mert minden z értékhez egyetlen w érték tartozik; végtelen sokrétű, mert az

$$e^z = e^x \cdot e^{j(y+2k\pi)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

alakból, illetve a vele ekvivalens

$$\left. \begin{aligned} |e^z| &= e^x \\ \arg e^z &= y + 2k\pi \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerből látható, hogy ugyanaz a w érték tartozik minden olyan z-hez, amelynek valós része azonos, képzetes része pedig 2π egészszámu többszörösében különbözik egymástól. Azaz: azonos a képe a $z = x + j(y + 2k\pi)$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontoknak (ld. 47. ábra).



47. ábra
 $w = e^z$ végtelen sokrétűsége

(2) A $w = e^z$ függvény a 0 és ∞ értéket sehol sem veszi fel, de minden más értéket felvesz

a) a $w = 0$ értéket sehol sem veheti fel, mert minden véges z értékre

$$|e^z| = e^x > 0,$$

amiből egyben az is következik, hogy minden más

$$e^z = \varrho (\cos \phi + j \sin \phi)$$

véges értéket felvesz (ti. a $z = \ln \varrho + j(\phi + 2k\pi)$ helyeken);

b) a $w = \infty$ értéket sem veszi fel, mert azt csak a $z = \infty$ helyen vehetné fel, márpedig

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = e^{jy} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

és

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = e^{jy} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$$

különböző határértékek miatt a $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ határérték nem létezik.

(3) A $w = e^z$ periodikus függvény, periódusa $2\pi j$

Ugyanis

$$e^{z+2k\pi j} = e^z \cdot e^{2k\pi j} = e^z$$

és kimutatható, hogy $2\pi j$ -n kívül más periódusa nincs a függvénynek.

Periodicitási tartomány a z sik bármely

$$\begin{cases} -\infty < x < \infty \\ (2k-1)\pi \leq y < (2k+1)\pi; \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sávja, amelyek közül a $k = 0$ -hoz tartozó az un. főperiódussáv.

(4) A $w = e^z$ függvény a teljes z sikon differenciálható (illetve reguláris) és differenciálhányadosa:

$$(e^z)' = e^z$$

Ugyanis a függvény valós és képzetes részei mindenütt differenciálható kétváltozós valós függvények, amelyeknek parciális deriváltjaira mindenütt teljesülnek az

$$u'_x = e^x \cos y = v'_y,$$

$$u'_y = -e^x \sin y = -v'_x$$

Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletek. Így

$$\frac{d(e^z)}{dz} = u'_x + jv'_x = e^x \cos y + je^x \sin y = e^z,$$

ami azt jelenti, hogy a komplex változós exponenciális függvény differenciálhányadosa - a valós változós exponenciális függvénnyel analóg módon - önmaga.

(5) Leképezésének fontosabb tulajdonságai

a) Kölcsönösen egyértelmű:

a z sik bármely 2π szélességű vízszintes sávja és az origóból kiinduló "megfelelő" félegyenes mentén bemetszett - az origótól megfeszített - w sik között (ld. 48/a. ábra).

Ugyanis:

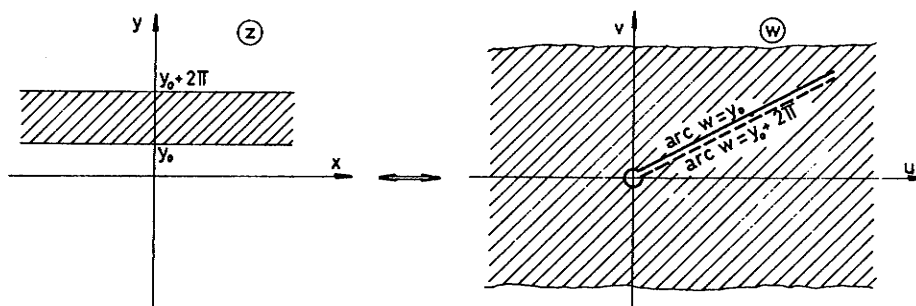
a végtelen sokrétű e^z függvény csak olyan z síkbeli T tartományt képez le kölcsönösen egyértelműen egy w síkbeli tartományra, amely nem tartalmaz olyan z_1 és z_2 pontokat, amelyeknek képzetes részei a $2\pi j$ periódus egészszámu többszöröseiben térnek el egymástól. Tehát csak olyanokat tartalmaz, amelyekre

$$(z_1 - z_2) \neq 2k\pi j \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ilyen tartomány például a z sík bármely

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ (2k-1)\pi \leq y < (2k+1)\pi \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

vízszintes sávja, amely a $w = e^z$ leképezéssel a negatív valós tengely mentén bemetszett - az origótól megfosztott - teljes w síkba megy át. (A bemetszés a z síkbeli sáv határainak felel meg: a felső part a felső határnak, az alsó part pedig az alsó határnak.)



48/a. ábra

$w = e^z$ kölcsönösen egyértelmű leképezése

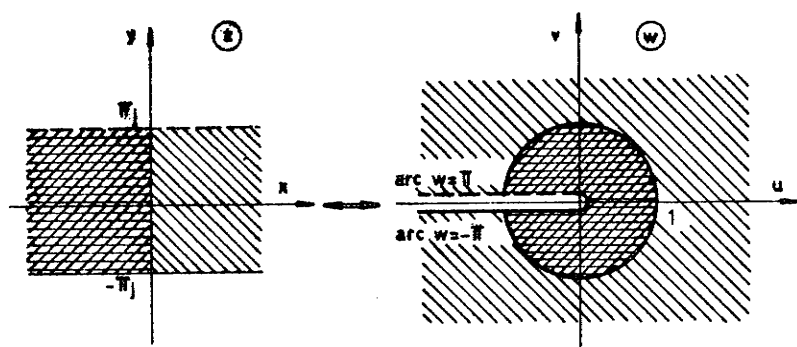
A $k = 0$ -hoz tartozó

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\pi \leq y < +\pi \end{cases}$$

főperiódus-sávot kölcsönösen-egyértelműen képezi le a

$$\begin{cases} 0 < |w| < \infty \\ -\pi \leq \arg w < +\pi \end{cases}$$

tartományra: a negatív valós tengely mentén bemetszett - az origótól megfosztott - teljes w síkra (ld. 48/b. ábra).



48/b. ábra

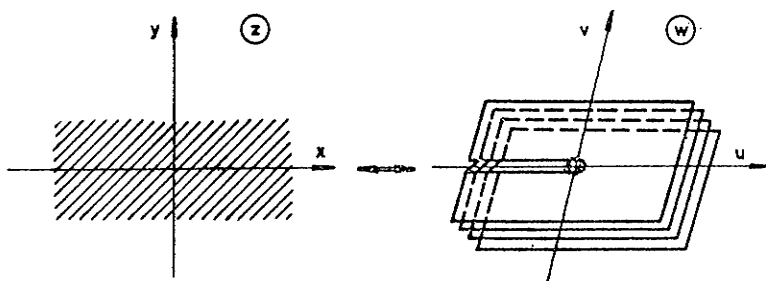
$w = e^z$ főperiódus-sávjának kölcsönösen egyértelmű leképezése

Megjegyezzük, hogy ennél a kölcsönösen egyértelmű leképezésnél a 2π szélességű bal oldali félsáv képe az egységsugarú kör belseje, a jobb oldali félsáv pedig az egységsugarú kör külseje (l. 4.10. fejezet 4. példája).

b) Kölcsönösen egyértelmű és folytonos

leképezést létesít a teljes z sík és a függvény w síkbeli végtelen-soklevelű Riemann-felülete között.

e^z Riemann-felülete: a függvény $w = 0$ és $w = \infty$ elágazási pontjait összekötő egyenesszakasz - pl. a negatív valós tengely + mentén bemetszett, a bemetszés partjai mentén keresztbe összeillesztett, az origótól megosztott, végtelen sokszor lefedett w sík (ld. 49. ábra).



49. ábra

$w = e^z$ Riemann-felülete

A $w = 0$ és $w = \infty$ pontok nem tartoznak a Riemann-felülethez, mert ezeket az értékeket e^z nem veszi fel. Ezek a függvény végtelen-

rendű (vagy logaritmikus) elágazási pontjai. Tulajdonságuk: bármelyikük végtelen sokszor körüljárva a megfelelő z síkbeli "ősképek" csak egyszer lesz megkerülve. Minden egyes Riemann-levél egy z síkbeli 2π szélességű vízszintes sáv képpontjait tartalmazza, tehát a végtelen sokrétű e^z függvény egy egyrétű és reguláris ága.

c) Konform:

az általa létesített leképezés a teljes nyílt z síkon.

Ugyanis e^z az egész síkon differenciálható (ill. reguláris) és differenciálhányadosa sehol sem zérus.

Megjegyzés

Az "e" alapúhoz hasonlóan értelmezhető tetszőleges $a > 0$; $a \neq 1$ valós számra az ún. "a" alapú exponenciális függvény:

$$a^z = e^{z \ln a}$$

amely az "e" alapúval azonos tulajdonságú.

4.4. LOGARITMUS FÜGGVÉNY

Definíció

A komplex változós logaritmus függvény: a komplex kitevőjű exponenciális függvény egy periódus-sávjába eső részének inverze. Azaz

$$w = \ln z \quad \text{ha} \quad z = e^w$$

feltéve, hogy

$$(2k - 1)\pi \leq \arg z < (2k + 1)\pi$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

E definíció következményei a logaritmus-függvény alábbi alapvető tulajdonságai:

- a) $e^{\ln z} = z$,
- b) $\ln e^z = z$,
- c) $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2\pi j$,
- d) $\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 + 2\pi j$.

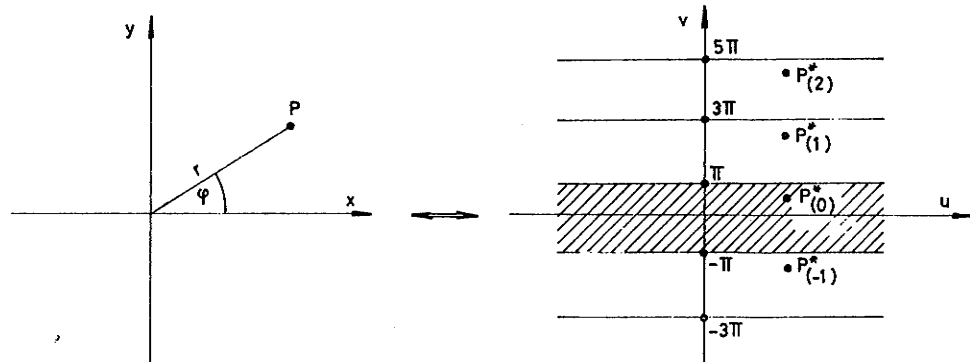
Az $\text{arc } z$ -re tett kikötés nélkül $\ln z$ egy végtelen-sok értékű relációt értelmez. Ugyanis a komplex szám $z = |z| e^{j \text{Arc } z}$ exponenciális alakjának (ahol $\text{Arc } z = \text{arc } z + 2k\pi$), valamint a logaritmus b) és c) tulajdonságainak felhasználásával

$$\ln z = \ln(|z| e^{j \text{Arc } z}) = \ln|z| + \ln e^{j \text{Arc } z} = \ln|z| + j \text{Arc } z$$

ami - $\text{Arc } z$ végtelen-sok értékűsége miatt - minden $z \neq 0$ komplex számra végtelen-sok értéket jelent (ld. 50. ábra). Ezt a relációt - a függvénytől való megkülönböztetésül - $\text{Ln } z$ -vel jelölve:

$$\text{Ln } z = \ln |z| + j \text{Arc } z$$

ahol $\ln |z|$ a $|z|$ valós szám "közönséges" logaritmususa.



50. ábra

$w = \text{Ln } z$ reláció végtelen-sok értékűsége

Az $\text{Arc } z$ főértékét - a $-\pi \leq \text{Arc } z < \pi$ értéket - $\text{arc } z$ -vel jelölve, a reláció egyértékű ágai a

$$w_k = \ln_k z = \ln |z| + j(\text{arc } z + 2k\pi); \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

függvények, amelyek az $\text{Ln } z$ relációból k rögzítésével választhatók ki. Közülük a "főág" a $k = 0$ -hoz tartozó

$$w_0 = \ln_0 z = \ln |z| + j \text{arc } z.$$

ill. a továbbiakban egyszerűen

$$w = \ln z = \ln |z| + j \text{arc } z$$

függvény, amely az exponenciális függvény

$$-\pi \leq \arg e^z < \pi$$

főperiódus-sávbeli részének inverze.

A $z = 0$ pontban a reláció ágai azonos értékűek és így nem választhatók szét egymástól; $z = 0$ az $\ln z$ reláció logaritmikus elágazási pontja.

Megjegyzés

A komplex számok körében a fenti módon értelmezett logaritmus a valósbeli logaritmus-fogalom kibővítése.

Ugyanis az $\ln z = \ln|z| + j \arg z$ összefüggésből nyilvánvaló, hogy a komplex számok logaritmusai speciális esetként tartalmazza a pozitív - sőt a negatív - valós számok logaritmusát. Éspedig:

a) ha z pozitív valós szám: akkor $\arg z = 0$, úgy hogy

$$\ln z = \ln|z|$$

ahol $\ln|z|$ a $|z|$ pozitív szám "közönséges" logaritmus.

b) ha z negatív valós szám: akkor $\arg z = \pi$, úgy, hogy

$$\ln z = \ln|z| + j\pi$$

ahol $\ln|z|$ a z negatív szám abszolútértékének "közönséges" logaritmus.

Látható, hogy bármely negatív szám logaritmusai a képzetes $j\pi$ additív konstansban különbözik az abszolútértékével megegyező pozitív szám logaritmusától.

A logaritmuságak - a $w_k = \ln z$ függvények - fontosabb tulajdonságai:

(1) A $z = 0$ kivételével minden véges z értékre értelmezett egyértű függvények.

Ugyanis egy periódussávban az exponenciális függvény - $z = 0$ kivételével - minden értéket felvesz.

(2) Minden véges z értéket felvesznek; a zérus értéket csak a $z=1$ helyen vesznek fel.

Ugyanis $z = e^w$ minden w -re értelmezett;

$$\ln z = 0 \iff z = e^0 = 1.$$

(3) A logaritmus-ágak mindegyike a $z = 0$ pont kivételével a teljes z síkon differenciálható (ill. reguláris) és differenciálhányadosa:

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

Ugyanis - mint a mindenütt differenciálható exponenciális függvény inverze - minden $z \neq 0$ értékre

$$(\ln z) = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z},$$

teljes megegyezésben a valós logaritmus függvény differenciálhányadosával.

Leképezésének fontosabb tulajdonságai:

(a) Kölcsönösen egyértelmű

tetszőleges $w_k = \ln_k z$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ logaritmuság leképezése az origótól megosztott és a negatív valós tengely mentén bemetszett teljes z sík és a w sík "megfelelő" 2π szélességű

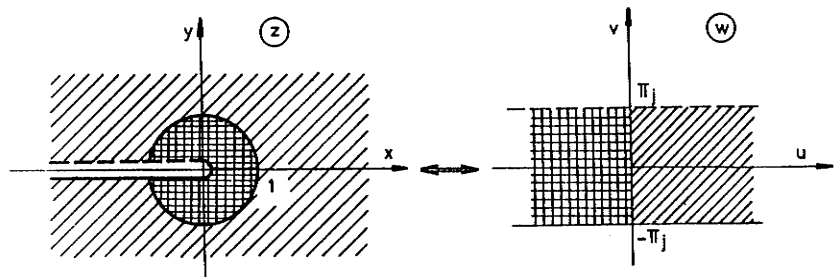
$$\left. \begin{array}{l} -\infty < u < +\infty \\ (2k-1)\pi \leq v < (2k+1)\pi \end{array} \right\}$$

vízszintes sávja közt.

A $w = \ln z$ főág leképezése:

$$\left. \begin{array}{l} \text{az origótól megosztott, a} \\ \text{negatív valós tengely men-} \\ \text{tén bemetszett teljes } z \\ \text{síkot} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{a } w \text{ sík} \\ -\infty < u < +\infty \\ -\pi \leq v < \pi \\ \text{vízszintes sávjára} \end{array} \right.$$

(ld. 51. ábra).



51. ábra

$w = \ln z$ kölcsönösen egyértelmű leképezése

(b) Kölcsönösen egyértelmű és folytonos

a végtelen sok értékű $w = \ln z$ reláció leképezése: a $z = e^w$ függvény végtelen-soklevelű Riemann-felülete és a teljes w sík között.

A $z = 0$ és $z = \infty$ pontokat (amelyek nem pontjai a Riemann-felületnek) Riemann-felület végtelen sokszor kerüli meg, ezek az $\ln z$ reláció elegendőenrendű (vagy logaritmikus) elágazási pontjai.

A z síkbeli Riemann-felület minden egyes levelén olyan z komplex számok vannak, amelyeknek arcusai ugyanazon rögzített k egész-számhoz tartozó $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ intervallumba esnek. Egy-egy ilyen levél az értelmezési tartománya az $\ln z$ reláció egy $w_k = \ln_k z$ egyértékű, reguláris ágának.

(c) Konform

tetszőleges $w_k = \ln_k z$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ logaritmuság leképezése a $z = 0$ pont kivételével a negatív valós tengely mentén bemetszett teljes z síkon.

Ugyanis bármely rögzített k esetén a $w_k = \ln_k z$ minden $z \neq 0$ és $z \neq \infty$ esetén reguláris és differenciálhányadosa 0-tól különböző érték.

Megjegyzés

Az $\ln z$ -hez hasonlóan értelmezhető tetszőleges $a > 0$; $a \neq 1$ valós számra az ún. " a " alapú logaritmus függvény:

$$w = {}^a \log z \quad \text{ha} \quad z = a^w$$

Ez a függvény $\ln z$ -vel azonos tulajdonságú és a vele való kapcsolatát az

$${}^a \log z = \frac{1}{\ln a} \ln z$$

összefüggés fejezi ki.

4.5. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Az Euler formulából, az

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad \text{és} \quad e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$$

összefüggésekből következik, hogy tetszőleges φ valós számra

$$\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \cos \varphi \quad \text{és} \quad \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = \sin \varphi$$

Ennek alapján kézenfekvő a komplex változós trigonometrikus függvények alábbi értelmezése:

Definíció

Tetszőleges z komplex értékre:

$$(a) \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j},$$

$$(b) \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2},$$

$$(c) \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -j \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{e^{jz} + e^{-jz}},$$

$$(d) \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = j \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{e^{jz} - e^{-jz}}.$$

Függvényértékeik meghatározása a definíciós formulák valós és képzetes részre bontott alakjában történik:

$$(a) \quad \sin z = \sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y$$

$$(b) \quad \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - j \sin x \operatorname{sh} y$$

$$(c) \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} x (1 - \operatorname{th}^2 y)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y} + j \frac{\operatorname{th} y (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{th}^2 y}$$

$$(d) \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\operatorname{ctg} x (1 - \operatorname{th}^2 y)}{1 + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{th}^2 y} - j \frac{\operatorname{th} y (1 + \operatorname{ctg}^2 x)}{1 + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{th}^2 y}$$

Ugyanis:

$$\begin{aligned} (a) \quad \sin z &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \frac{e^{j(x+jy)} - e^{-j(x+jy)}}{2j} \\ &= \frac{e^{-y} e^{jx} - e^y \cdot e^{-jx}}{2j} = \\ &= \frac{e^{-y} (\cos x + j \sin x) - e^y (\cos x - j \sin x)}{2j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin x \frac{e^{-y} + e^y}{2} + \cos x \frac{e^{-y} - e^y}{2j} = \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y\end{aligned}$$

és hasonlóan látható be a többi összefüggés is.

A definíciós formulák alapján egyszerűen belátható, hogy a komplex változós trigonometrikus függvényekre is érvényesek a valós változójuakra vonatkozó trigonometrikus összefüggések. Közülük a leggyakrabban alkalmazottak:

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \sin 2z &= 2 \sin z \cos z, \\ \cos 2z &= \cos^2 z - \sin^2 z, \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin^2 z &= \frac{1 - \cos 2z}{2}, \\ \cos^2 z &= \frac{1 + \cos 2z}{2}.\end{aligned}$$

Ugyancsak a definíciós formulák következménye, hogy a komplex trigonometrikus függvények valós z értékekre azonosak a valós argumentumuakkal és azok számos tulajdonságát megtartják. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk fontosabb tulajdonságaikat.

(1) A $\sin z$ és $\cos z$ függvény a teljes nyílt komplex síkon, a $\operatorname{tg} z$ függvény a $z = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, a $\operatorname{ctg} z$ függvény pedig a $z = k\pi$ helyek kivételével a nyílt z síkon értelmezett végtelen sokrétű függvény.

Ugyanis $\sin z$ és $\cos z$, - mint a teljes z síkon értelmezett exponenciális függvények összege, ill. különbsége - mindenütt értelmezett, de a hányadosukkal definiált $\operatorname{tg} z$ és $\operatorname{ctg} z$ ott nincs értelmezve, ahol nevezője zérus. Tehát

$$\operatorname{tg} z \text{ az } e^{jz} + e^{-jz} = 0\text{-nak megfelelő } z = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ helyeken}$$

$$\operatorname{ctg} z \text{ az } e^{jz} - e^{-jz} = 0\text{-nak megfelelő } z = k\pi \text{ helyeken}$$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) nincs értelmezve.

Az összes trigonometrikus függvény - mint a végtelen sokrétű exponenciális függvénnyel definiált függvény - ugyancsak végtelen sokrétű.

(2) A komplex változós trigonometrikus függvények minden értéket felvesznek.

Tehát: a valós változójuakkal ellentétben nem korlátosak: az abszolútértékük nem mindig ≤ 1 .

Ugyanis például a

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = w$$

definíciós formulából

$$e^{jz} = jw + \sqrt{1 - w^2} = j(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

ahonnan - a szorzat logaritmusára vonatkozó összefüggés, valamint

$\ln j = \frac{\pi}{2} j$ - felhasználásával a

$$z = \frac{\pi}{2} - j \ln(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

kifejezés adódik, ami $w + \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$ miatt minden w -re értelmezett.

Hasonlóan látható be a többi trigonometrikus függvény nem korlátos volta is.

(3) A komplex változós trigonometrikus függvények zérushelyei megegyeznek a megfelelő valós változós függvényekével és kívülük más zérushelyük nincs.

Ugyanis a definiáló összefüggésekkel igazolhatók, hogy

$\sin z$ zérushelyei a $z = k\pi$ helyek,

$\cos z$ zérushelyei a $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ helyek,

$\operatorname{tg} z$ zérushelyei a $z = k\pi$ helyek,

$\operatorname{ctg} z$ zérushelyei a $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ helyek,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(4) A komplex változós trigonometrikus függvények periodikusak.

A megfelelő valós változóju függvényekkel megegyezően:

$\sin z$ és $\cos z$ periódusa: 2π

$\operatorname{tg} z$ és $\operatorname{ctg} z$ periódusa: π

Ugyanis például:

$$\sin(z + 2k\pi) = \frac{e^{j(z+2k\pi)} - e^{-j(z+2k\pi)}}{2j} = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \sin z.$$

(5) A komplex változós trigonometrikus függvények értelmezési tartományukon mindenütt differenciálhatók (ill. regulárisak) és differenciálhányadosuk:

$$(\sin z)' = \cos z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z},$$

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

teljes megegyezésben a megfelelő valós változósakéval.

Ugyanis a definiáló összefüggés és a komplex kitevőjű exponenciális függvény differenciálási szabályának felhasználásával:

$$\frac{d(\sin z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \right] = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos z$$

és hasonlóan látható be a többi trigonometrikus függvény differenciálási szabálya is.

(6) A trigonometrikus függvények leképezésének fontosabb tulajdonságai az alábbiak:

a) Kölcsönösen egyértelmű

- mint minden többértékű függvényé - a z sík egy résztartománya és a teljes w sík között.

Éspedig:

A $w = \sin z$ kölcsönösen egyértelműen képezi le a z sík bármely

$$\left. \begin{aligned} (k-1)\pi \leq x < (k+1)\pi \\ y \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

félsávját ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), a

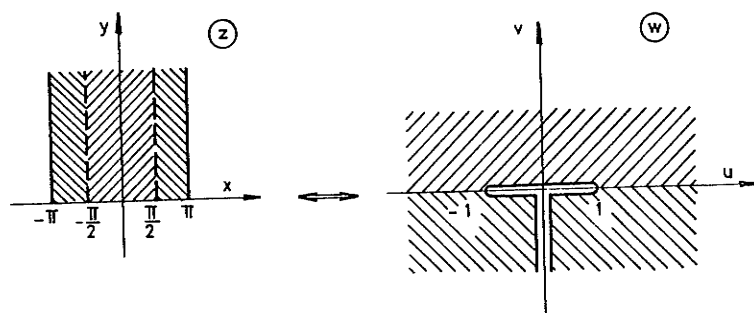
$$v = 0; \quad -1 \leq u \leq 1$$

egyenesszakasz és az

$$u = 0; \quad -\infty < v \leq 0$$

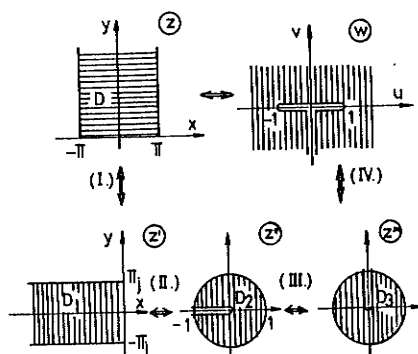
félegyenes mentén bemetszett teljes w síkra.

A $k = 0$ -hoz tartozó főperiódussáv leképezése az 52/a. ábrán látható.



52/a. ábra

$w = \sin z$ kölcsönösen egyértelmű leképezése



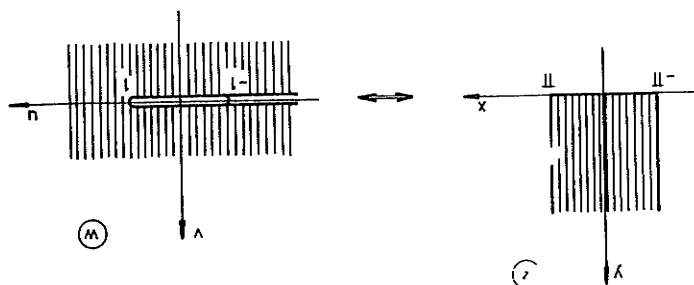
52/b. ábra

$w = \sin z$ leképezése

A $w = \cos z$ leképezése

$$\left. \begin{aligned} (k-1)\pi \leq x < (k+1)\pi \\ y \geq 0 \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} -\infty < u \leq -1; v = 0 \text{ félegyenes és a} \\ -1 < u \leq 1; v = 0 \text{ egyenesszakasz} \\ \text{mentén bemetszett teljes } w \text{ sík} \end{cases}$$

A $k = 0$ -hoz tartozó főperiódussáv leképezése az 53. ábrán látható.



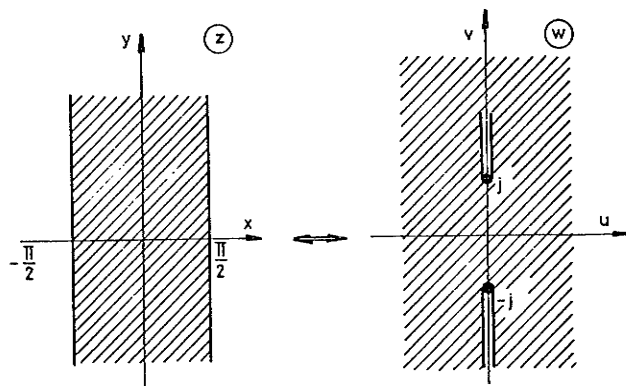
53. ábra

$w = \cos z$ kölcsönösen egyértelmű leképezése

A $w = \operatorname{tg} z$ leképezése

$$\left. \begin{aligned} (k-1) \frac{\pi}{2} < x < (k+1) \frac{\pi}{2} \\ y \geq 0 \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} u = 0 ; & v > 1 \\ u = 0 ; & v < -1 \\ \text{félegyenesek mentén bemetszett} \\ \text{teljes } w \text{ sík.} \end{cases}$$

A $k = 0$ -hoz tartozó főperiódussáv leképezése az 54. ábrán látható.



54. ábra

$w = \operatorname{tg} z$ kölcsönösen egyértelmű leképezése

Közülük csak a $\sin z$ leképezését részletezzük.

$$A \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

leképezés előállítható a már ismertetett

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad z' &= jz \\ \text{(II)} \quad z'' &= e^{z'} \\ \text{(III)} \quad z''' &= -jz'' \\ \text{(IV)} \quad w &= \frac{1}{2} \left[z''' + \frac{1}{z'''} \right] \end{aligned}$$

leképezések szuperpozíciójaként.

Keressük ezen leképezések kölcsönös egyértelműségének feltételeit.

Az (I) leképezés mindenütt kölcsönösen egyértelmű és bármely D tartományt az origó körül $\frac{\pi}{2}$ szöggel pozitív irányban elforgatott D_1 tartományba visz át (ld. $w = az$ leképezés).

A (II) leképezés kölcsönös egyértelműségének szükséges és elégséges feltétele, hogy D_1 ne tartalmazzon olyan z'_1 és z'_2 pontokat, amelyekre

$$z'_1 - z'_2 = 2k\pi j \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Igy D_1 -nek megfelel bármely 2π szélességű vízszintes sáv, ill. annak egy résztartománya (lásd $w = e^z$ leképezés), amelyet $e^{z'}$ egy D_2 tartományra képez le kölcsönösen egyértelműen. Mivel $z' = jz$, ezért D nem tartalmazhat olyan z_1 és z_2 pontokat, amelyekre

$$z_1 - z_2 = 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ami azt jelenti, hogy D csak egy 2π szélességű függőleges sáv, ill. annak egy résztartománya lehet.

A (III) leképezés mindenütt - így a D_2 tartományban is - kölcsönösen egyértelmű, azt csak $(-\frac{\pi}{2})$ szöggel elforgatja az origó körül. Így áll elő D_2 -ből a D_3 tartomány.

A (IV) leképezés kölcsönös-egyértelműségének szükséges és elégséges feltétele, hogy D_3 ne tartalmazzon olyan z'''_1 és z'''_2 pontokat, amelyekre

$$z'''_1 + \frac{1}{z'''_1} = z'''_2 + \frac{1}{z'''_2},$$

ill. amelyekre

$$z'''_1 \cdot z'''_2 = 1.$$

Mivel ennek a feltételnek a z''' síkon az egységsík belseje vagy külseje tesz eleget (lásd $w = \frac{1}{z} (z + \frac{1}{z})$ leképezés), ezért D_3 vagy egységsík-belső vagy egységsík-külső lehet, amelyet a (IV) leképezés a megfelelően bemetszett teljes w síkra képez le kölcsönösen egyértelműen.

Mivel

$$z''' = -jz'' = -je^{z'} = -je^{jz},$$

ezért a

$$z_1''' \cdot z_2''' = 1$$

feltétel ekvivalens az

$$e^{jz_1} e^{jz_2} = e^{j(z_1 + z_2)} = -1$$

feltétellel. Ez azt jelenti, hogy D nem tartalmazhat olyan z_1 és z_2 pontokat, amelyekre

$$z_1 + z_2 = (2k + 1)\pi. \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Ennek a feltételnek a z sík bármely 2π szélességű függőleges sávja eleget tesz.

Mindezt egybevetve:

a $w = \sin z$ függvény által létesített leképezés egy D tartományon akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű, ha D nem tartalmaz olyan pontokat, amelyekre akár a

$$z_1 - z_2 = 2k\pi,$$

akár a

$$z_1 + z_2 = (2k + 1)\pi$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) feltétel teljesül. Ezt kielégíti például a z sík

$$\left. \begin{array}{l} -\pi \leq x < +\pi \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

függőleges félsávja, az un. főperiódussáv, amelyet az (I) leképezés a z' sík

$$\left. \begin{array}{l} -\pi j \leq v j < +\pi j \\ x \leq 0 \end{array} \right\}$$

félsávjára; a félsávot a (II) leképezés a z'' sík negatív valós tengelye mentén bemetszett egységkörének belsejére; a körbelső a (III) leképezés

a z''' sík pozitív képzetes tengelye mentén bemetszett egységkörének bel-
sejére; ezt pedig a (IV) leképezés a

$$-1 \leq u \leq 1; \quad v = 0$$

egyenesszakasz és a negatív képzetes tengely mentén bemetszett teljes w
síkra képezi le (ld. 52/b. ábra).

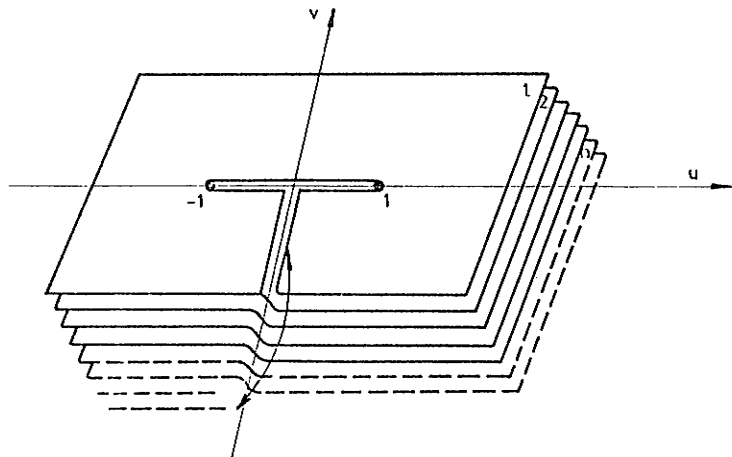
Hasonló módon végezhető el a többi trigonometrikus függvény kölcsö-
nösen egyértelmű leképezésének vizsgálata is.

(b) Kölcsönösen egyértelmű és folytonos

a trigonometrikus függvények leképezése a teljes z sík és a meg-
felelő trigonometrikus függvény w síkbeli Riemann-felülete között.

A $w = \sin z$ Riemann-felülete:

a $-1 \leq u \leq 1; v = 0$ egyenesszakasz és a $-\infty < v \leq 0; u = 0$ fél-
egyenes mentén bemetszett; a bemetszések partjai mentén keresztbe össze-
illesztett végtelen sokszor lefedett w sík. A $w = +1$ pontok a Riemann-
felület másodrendű -, míg a $w = \infty$ pont logaritmikus elágazási pontja
(ld. 55. ábra).



55. ábra

$w = \sin z$ Riemann-felülete

Hasonlóan értelmezhető a többi trigonometrikus függvény Riemann-
felülete is.

(c) Konform

a trigonometrikus függvények leképezése értelmezési tartományuk min-
den olyan pontjában, ahol differenciálhányadosuk $\neq 0$. Így

$$\begin{array}{llll} \sin z & \text{és} & \operatorname{tg} z & \text{a} & z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \cos z & \text{és} & \operatorname{ctg} z & \text{a} & z = k\pi \end{array}$$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) pontok kivételével a teljes értelmezési tartományukon konform leképezést létesítenek.

4.6. ARCUS FÜGGVÉNYEK

Definíció

A komplex változós arcus-függvények a komplex változós trigonometrikus függvények egyrétű részeinek inverzei.

Mivel a trigonometrikus függvények végtelen-sok-rétűek, ezért inverzeik a

$$\begin{array}{lll} w = \operatorname{Arcsin} z & \text{ha} & z = \sin w \\ w = \operatorname{Arccos} z & \text{ha} & z = \cos w \\ w = \operatorname{Arctg} z & \text{ha} & z = \operatorname{tg} w \\ w = \operatorname{Arcctg} z & \text{ha} & z = \operatorname{ctg} w \end{array}$$

relációk végtelen sok értékűek.

Mivel minden trigonometrikus függvény kifejezhető az exponenciális függvénnyel, ezért inverzüik kifejezhető a végtelen sok értékű logaritmussal:

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{\pi}{2} - j \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arccos} z = j \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2j} \operatorname{Ln} \frac{1 + jz}{1 - jz},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2j} \operatorname{Ln} \frac{1 + jz}{1 - jz}.$$

(Például az $\operatorname{Arcsin} z$ definíciója értelmében:

$$z = \sin w = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j},$$

amiből az

$$e^{jw} = j(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

végtelen-sok értékű reláció adódik.)

Az Arcus relációk Ln-nel való kifejezése egyrészt végtelen sok értékük meghatározására, másrészt egyértékű ágaiuknak, az arcus-függvényeknek a kiválasztására szolgálnak. A kiválasztás az Ln reláció egyértékű ágaival történik. Így például tetszőleges $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ esetén

$$w_k = \arcsin_k z = \frac{\pi}{2} + j \ln_k (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

feltéve, hogy

$$\left. \begin{aligned} (k-1)\pi &\leq \operatorname{Re} (\operatorname{Arcsin} z) < (k+1)\pi \\ \operatorname{Im} (\operatorname{Arcsin} z) &> 0. \end{aligned} \right\}$$

és

Hasonló módon történik a többi arcus-függvény kiválasztása is. Közülük a $k = 0$ -hoz tartozók a relációk "főágai", amelyeket a továbbiakban index nélkül jelölünk.

Tehát:

$$\begin{aligned} w = \arcsin z & \quad \text{ha} \quad \begin{cases} -\pi \leq \operatorname{Re} (\operatorname{Arcsin} z) < \pi \\ \operatorname{Im} (\operatorname{Arcsin} z) > 0 \end{cases} \\ w = \arccos z & \quad \text{ha} \quad \begin{cases} -\pi \leq \operatorname{Re} (\operatorname{Arccos} z) < \pi \\ \operatorname{Im} (\operatorname{Arccos} z) > 0 \end{cases} \\ w = \operatorname{arctg} z & \quad \text{ha} \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} (\operatorname{Arctg} z) < \frac{\pi}{2} \\ -\infty < \operatorname{Im} (\operatorname{Arctg} z) < +\infty \end{cases} \\ w = \operatorname{arcctg} z & \quad \text{ha} \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} (\operatorname{Arcctg} z) < \frac{\pi}{2} \\ -\infty < \operatorname{Im} (\operatorname{Arcctg} z) < +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

értékeik meghatározása az

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - j \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\arccos z = j \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2j} \ln \frac{1+jz}{1-jz},$$

$$\operatorname{arcctg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2j} \ln \frac{1+jz}{1-jz},$$

összefüggések alapján történik. A nem főágbeli arcusfüggvények értékei a főág megfelelő értékeiből, 2π ill. π egész számú többszöröseiben térnek el.

Az arcus függvények értelmezéséből következnek azok alábbi tulajdonságai:

(1) Az $\arcsin z$ és $\arccos z$ függvény mindenütt, az $\arctg z$ és $\text{arcctg } z$ függvény pedig a $\pm j$ hely kivételével a teljes komplex síkon értelmezett.

(2) Az arcus-függvények - bármelyik ágon - értelmezési tartományukon mindenütt differenciálhatók (ill. regulárisak) és differenciálhányadosuk:

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\pm \sqrt{1-z^2}}$$

$$(\arccos z)' = \frac{-1}{\pm \sqrt{1-z^2}}$$

$$(\arctg z)' = \frac{1}{1+z^2}$$

$$(\text{arcctg } z)' = \frac{-1}{1+z^2}$$

(Az $\arcsin z$ és $\arccos z$ differenciálhányadosában a gyök értékét pozitív vagy negatív előjellel kell venni aszerint, hogy a differenciálás melyik ágon történik.)

(3) Az arcus-függvények leképezésének fontosabb tulajdonságai:

a) Kölcsönösen egyértelműek:

a "megfelelően" bemetszett z sík és a w sík egy résztartománya közt (ami inverzüknek a "megfelelő" trigonometrikus függvénynek kölcsönösen egyértelmű leképezéséből a z és w sík felcserélésével adódik).

b) Kölcsönösen egyértelmű és folytonos a leképezésük: inverzük (a "megfelelő" trigonometrikus függvény) z síkbeli Riemann-felülete és a teljes w sík között.

c) Konform

a leképezésük értelmezési tartományukon mindenütt.

4.7. HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

Definíció

A komplex változós hiperbolikus függvények - a valós változójuakkal analóg módon - az exponenciális függvénnyel kifejezett alábbi függvények:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}},$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Ezek a függvények igen egyszerűen fejezhetők ki a komplex változós trigonometrikus függvényekkel, amelyekről nem lényegesen különböznek. Éspedig:

$$\operatorname{sh} z = -j \sin jz,$$

$$\operatorname{ch} z = \cos jz,$$

$$\operatorname{th} z = -j \operatorname{tg} jz,$$

$$\operatorname{cth} z = j \operatorname{ctg} jz.$$

E kapcsolatokból adódnak a hiperbolikus függvények alábbi tulajdonságai:

(1) Az $\operatorname{sh} z$ és $\operatorname{ch} z$ függvény mindenütt, a $\operatorname{th} z$, a $z = j(2k+1)\frac{\pi}{2}$ hely, a $\operatorname{cth} z$ a $z = jk\pi$ hely ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) kivételével mindenütt értelmezett, végtelen-sok rétű függvény.

(2) Periodikus függvények: $\operatorname{sh} z$ és $\operatorname{ch} z$ periódusa $2\pi j$, $\operatorname{th} z$ és $\operatorname{cth} z$ periódusa πj .

(3) Értékeik az

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y,$$

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + j \operatorname{sh} x \sin y,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{tg} x + j \operatorname{tg} y}{1 + j \operatorname{th} x \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} x + j \operatorname{tg} y}{1 + j \operatorname{cth} x \operatorname{tg} y}$$

összefüggések alapján számíthatók.

(4) Értelmezési tartományukon mindenütt differenciálhatók (ill. regulárisak) és differenciálhányadosuk:

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z,$$

$$(\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z},$$

$$(\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}.$$

(5) Leképezésük a hiperbolikus és trigonometrikus függvények kapcsolata alapján vizsgálható:

a) Kölcsönösen egyértelmű

a z sík egy részhalmaza (amelyen az illető hiperbolikus függvény egyrétű) és a "megfelelően" bemetszett w sík között.

b) Kölcsönösen egyértelmű és folytonos

a leképezésük a teljes z sík és a megfelelő hiperbolikus függvény w síkbeli végtelen soklevelű Riemann-felülete között (amely "megfelelően" bemetszett, végtelen sokszor lefedett w sík).

c) Konform

a leképezésük értelmezési tartományuknak mindazon pontjaiban, ahol differenciálhányadosuk $\neq 0$.

4.8. AREA-FÜGGVÉNYEK

Definíció

A komplex változós area-függvények a komplex változós hiperbolikus függvények egyrétű részeinek inverzei. Így

$$w_k = \operatorname{arsh}_k z \quad \text{ha} \quad z = \operatorname{sh} w$$

$$w_k = \operatorname{arch}_k z \quad \text{ha} \quad z = \operatorname{ch} w$$

$$w_k = \operatorname{arth}_k z \quad \text{ha} \quad z = \operatorname{th} w$$

$$w_k = \operatorname{arch}_k z \quad \text{ha} \quad z = \operatorname{cth} w$$

ahol $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ és $(k-1)\pi \leq \arg z < (k+1)\pi$

Ezek a függvények - a hiperbolikus és trigonometrikus függvények közti kapcsolatnak megfelelően - egyszerűen kifejezhetők az arcus-függvényekkel. Éspedig:

$$\operatorname{arsh} z = j \operatorname{arcsin} jz,$$

$$\operatorname{arch} z = j \operatorname{arccos} jz,$$

$$\operatorname{arth} z = j \operatorname{arctg} jz,$$

$$\operatorname{arch} z = -j \operatorname{arctg} jz.$$

E kapcsolatokból és az area-függvények definíciójából adódnak az area-függvények fontosabb tulajdonságai (melyek az Area-relációk bármelyik ágára érvényesek):

(1) Az $\operatorname{arsh} z$ és $\operatorname{arch} z$ függvények mindenütt; az $\operatorname{arth} z$ és $\operatorname{arch} z$ függvények a $z = \pm 1$ helyek kivételével mindenütt értelmezett függvények.

(2) Értékeik - mint az exponenciális függvénnyel kifejezett hiperbolikus függvények inverzei - a logaritmussal kifejezett összefüggések alapján számíthatók.

Ezek az összefüggések az area-függvények főértékeire (azaz $-\pi \leq \arg z < \pi$ értékekre):

$$\operatorname{arsh} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{arch} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{arch} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$$

alakúak.

(3) Az area-függvények - bármelyik ágon - értelmezési tartományukon mindenütt differenciálhatók (ill. regulárisak) és differenciálhányadosuk:

$$(\operatorname{arsh} z)' = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$(\operatorname{arch} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}},$$

$$(\operatorname{arth} z)' = \frac{1}{1+z^2},$$

$$(\operatorname{arch} z)' = \frac{1}{1-z^2}.$$

(4) Leképezésük fontosabb tulajdonságainak vizsgálata az inverz hiperbolikus függvények leképezése segítségével a z és w sík fölcserélése útján végezhető.

4.9. ÁLTALÁNOS HATVÁNYFÜGGVÉNY

Definíció

Tetszőleges λ (valós vagy komplex) számra a komplex számok halmazaán értelmezett hatványfüggvény a

$$w = z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln} z} \quad (z \neq 0)$$

többértékű reláció bármelyik egyértékű ága.

A $z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln} z}$ reláció véges sok, vagy végtelen sokértékű attól függően, hogy λ racionális valós szám, vagy sem. Ezt az

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi) = \ln r + j(\varphi + 2k\pi)$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ összefüggés felhasználásával az alábbi módon látjuk be:

a) Ha $\lambda = \alpha + j\beta$

tetszőleges komplex szám (tehát $\beta \neq 0$), akkor z^λ végtelen sok értékű.

Ekkor ugyanis

$$z^\lambda = e^{(\alpha + j\beta) \ln r + j(\varphi + 2k\pi)} \\ = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{j[\beta \ln r + \alpha(\varphi + 2k\pi)]}$$

ami $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ esetén végtelen sok különböző érték.

Rögzített z és $\lambda = \alpha + j\beta$ mellett ezek olyan w_k ; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ komplex számok, amelyekre

$$|w_k| = |z^\lambda| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}$$

és

$$\arg w_k = \arg(z^\lambda) = \beta \ln r + \alpha(\varphi + 2k\pi).$$

E számoknak megfelelő pontok az

$$R_k = |z^\lambda| = r^\alpha \cdot e^{-\beta(\varphi + 2k\pi)}$$

sugarú körök rendszerén helyezkednek el és arcusuk

$$\varphi_k = \beta \ln r + \alpha(\varphi + 2k\pi).$$

b) Ha $\lambda = \alpha = \frac{p}{q}$

racionalis valós szám, (ahol tehát p és q relatív prímszámok és $q > 0$), akkor z^λ véges sok értékű - mégpedig q értékű - függvény, amely azonos a

$$z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}$$

gyökfüggvénnyel.

Ekkor ugyanis - mint a)-nak $\alpha = \frac{p}{q}$ és $\beta = 0$ -ra vonatkozó speciális esete -:

$$z^\lambda = e^{p/q \cdot \ln r} \cdot e^{j p/q \cdot (\varphi + 2k\pi)}, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ami olyan komplex számokat jelent, amelyekre

$$|w_k| = e^{p/q \cdot \ln r} = r^{p/q}$$

és

$$\arg w_k = \frac{p}{q} (\varphi + 2k\pi)$$

Ezek $\sqrt[q]{z^p}$ -nek megfelelő értékek, amelyek között csak q darab különböző van (a $k = 0, 1, 2, \dots, q-1$ -hez tartozók arcusai különbözőek, a többi k értékhez tartozóak ezektől csak 2π egészszámu többszöröseiben különböznek). E véges sok érték - mint ismeretes - az

$$R = r^{p/q}$$

sugaru körvonalon egy szabályos q -szög csucspontjait alkotja.

c) Ha $\lambda = \alpha \neq \frac{p}{q}$

irracionális valós szám, akkor z^λ végtelen sok értékű.

Ekkor ugyanis - mint a)-nak $\beta = 0$ -ra vonatkozó speciális esete -:

$$z^\lambda = e^{\alpha \ln r} \cdot e^{j\alpha(\varphi + 2k\pi)},$$

ami a $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ értékekre mind különböző. Tetszőleges l, m és n egész számokra ugyanis

$$\arg_l z^\lambda - \arg_m z^\lambda = 2\pi\alpha \quad (l-m) \neq 2\pi n.$$

Tetszőleges rögzített z és $\lambda = \alpha$ mellett z^λ összes értékei az

$$R = r^\alpha$$

sugaru körvonalon helyezkednek el és arcusa

$$\varphi_k = \alpha(\varphi + 2k\pi)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A többértékű $z^\lambda = e^{\lambda \ln z}$ reláció egyértékű ágai az általános hatványfüggvények. Ezek a z^λ relációból az $\ln z$ (ill. $\text{Arc } z$) reláció egyértékű ágaival választhatók ki. Így az általános hatványfüggvények:

$$w_k = z^\lambda = e^{\lambda \ln_k z}$$

függvények, ha

$$(k-1)\pi \leq \arg z < (k+1)\pi$$

és $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Közülük a $k = 0$ -hoz tartozó a hatványfüggvény főága.

Az így értelmezett hatványfüggvény fontosabb tulajdonságai:

(1) $z = 0$ és $z = \infty$ kivételével (ha λ pozitív valós szám, akkor $z = 0$ -ban is!) minden z -re értelmezett

(2) Bármelyik ága az értelmezési tartományon mindenütt differenciálható (ill. reguláris) és differenciálhányadosa:

$$(z^\lambda)' = (e^{\lambda \ln z})' = \frac{\lambda}{z} e^{\lambda \ln z} = \lambda z^{\lambda-1}$$

akárcsak a valós változóju általános hatványfüggvényé.

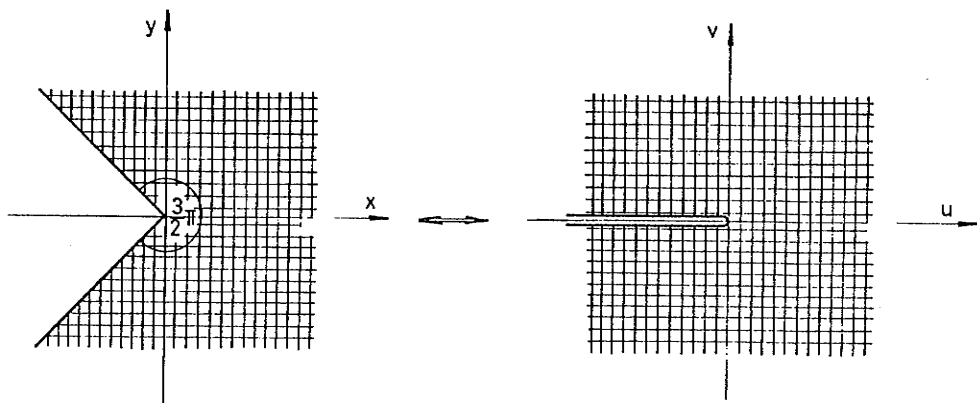
(3) Leképezésének tulajdonságai:

Ha $\lambda > 1$ valós szám,

akkor z^λ főértéke kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le a

$$-\frac{\pi}{\lambda} \leq \arg z < \frac{\pi}{\lambda}$$

szögteret a negatív valós tengely mentén bemetszett w síkra ($\lambda = 4/3$ esetén, ld. 56. ábra).



56. ábra
 $z^{4/3}$ leképezése

Ha $\lambda < 1$,

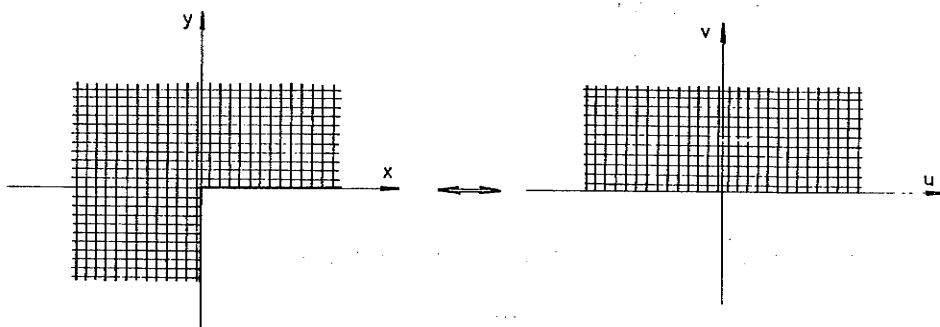
akkor a bemetszett w síkra való kölcsönösen egyértelmű leképezés nem valósítható meg.

$$\text{Ha } \frac{1}{2} < \lambda < 1,$$

akkor z^λ kölcsönösen egyértelműen és konformisan képezi le a

$$0 \leq \arg z < \frac{\pi}{\lambda}$$

szögteret az $\operatorname{Im} w > 0$ félsíkra ($\lambda = \frac{2}{3}$ esetén ld. 57. ábra).



57. ábra
 $z^{2/3}$ leképezése

4.10. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Számítsuk ki az

$$e^{\frac{3\pi}{4}j}; \quad e^{2-j}; \quad \ln(3-4j); \quad \sin(1-5j)$$

függvényértékeket és az

$$\operatorname{Ln}(-2); \quad j^{2j}; \quad \operatorname{Arc} \cos(\sqrt{3}j)$$

relációértékeket.

$$\text{a) } e^{\frac{3\pi}{4}j} = \cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$\text{b) } e^{2-j} = e^2 (\cos 1 + j \sin 1)$$

$$c) \ln (3-4j) = \ln 5 - 0,93 j$$

$$d) \sin (1-5 j) = \sin 1 \operatorname{ch} 5 - j \cos 1 \operatorname{sh} 5$$

$$e) \operatorname{Ln} (-2) = \ln 2 + j(2k+1)\pi$$

$$\begin{aligned} f) j^{2j} &= e^{2j \operatorname{Ln} j} \\ &= e^{2j \left[\ln 1 + j \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right]} \\ &= e^{-(4k+1)\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) \operatorname{Arccos} (\sqrt{3}j) &= j \operatorname{Ln}(j + \sqrt{-3-1}) = \\ &= j \operatorname{Ln}(1+2j) = \\ &= j \left[\ln 3 + j \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] = \\ &= j \ln 3 - (4k+1) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. A $w = z^2$ leképezésnél a z sík mely görbéinek a képei az

$$u = a \quad \text{ill.} \quad v = b$$

koordinátavonalak (ahol a és b tetszőleges konstansok)?

$$\text{Mivel } z^2 = x^2 - y^2 + 2jxy \quad \text{ezért}$$

$$\begin{array}{lll} \left. \begin{array}{l} u = a \\ \text{egyenessereg} \end{array} \right\} & \text{ősképe} & \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ \text{hiperbolasereg} \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} v = b \\ \text{egyenessereg} \end{array} \right\} & \text{ősképe} & \left\{ \begin{array}{l} xy = b \\ \text{hiperbolasereg} \end{array} \right. \end{array}$$

3. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyekre a

$$w = e^z$$

függvény az

$$x = a \quad \text{és} \quad y = b$$

koordinátavonalakat leképezi.

Az e^z definíciója értelmében

$$|e^z| = e^x$$

$$\operatorname{arc} e^z = y$$

amiből következik, hogy

$$x = a \implies$$

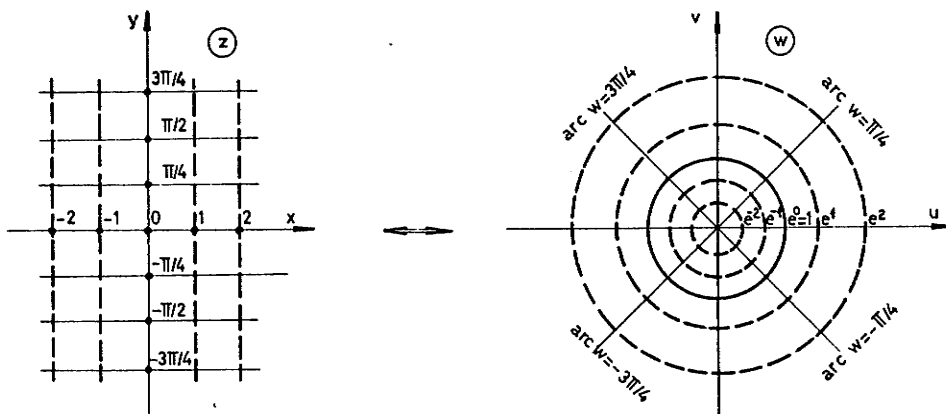
$$\begin{cases} w = e^a \\ \text{koncentrikus körök} \end{cases}$$

$$y = b \implies$$

$$\begin{cases} \operatorname{arc} w = b \\ \text{origóból kiinduló félegyenesek} \end{cases}$$

speciálisan az $x = 0$ képzetes tengelynek a $|w| = 1$ kör; az $y = 0$ valós tengelynek a w sík pozitív valós tengelye felel meg.

Tehát a $w = e^z$ leképezésnél az $x = a$ és $y = b$ egymásra merőleges egyenesseregek képe az egymásra merőleges origó középpontú körse-reg és origóból kiinduló félegyenessereg (ld. 58. ábra).



58. ábra

A koordináta-vonalak leképezése $w = e^z$ által

4. Mire képezi le a $w = e^z$ függvény a

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} z \leq 0 \\ -\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi \end{array} \right\}$$

sávot és a

$$\operatorname{Re} z \leq 0$$

ill.

$$\operatorname{Re} z \geq 0$$

félsíkokat.

A 3. feladat eredményeit felhasználva:

$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ -\pi \leq y \leq \pi \end{array} \right\}$	egyenesszakasz	$\implies w = e^0 = 1$	kör
$\left. \begin{array}{l} x = c < 0 \\ -\pi \leq y \leq \pi \end{array} \right\}$	egyenesszakaszok	$\implies w = e^{-c} < 1$	körök
$\left. \begin{array}{l} y = -\pi \\ x \leq 0 \end{array} \right\}$	félegyenes	$\implies \left. \begin{array}{l} \arcsin w = -\pi \\ 0 < w \leq 1 \end{array} \right\}$	egyenesszakasz
$\left. \begin{array}{l} y = \pi \\ x \leq 0 \end{array} \right\}$	félegyenes	$\implies \left. \begin{array}{l} \arcsin w = \pi \\ 0 < w < 1 \end{array} \right\}$	egyenesszakasz

Tehát: a $w = e^z$ függvény a $\operatorname{Re} z \leq 0$; $-\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi$ félsávot a negatív valós tengely mentén bemetszett - az origótól megfosztott - origó középpontú egységsugarú kör belsejére képezi le (ld. 48/c. ábra). Mivel $w = e^z$ függvény $2\pi j$ -re periodikus, ezért a $\operatorname{Re} z \leq 0$ félsíkot a végtelen sokszor lefedett, a negatív valós tengely mentén bemetszett és az origótól megfosztott, origó középpontú egységsugarú kör belsejére; a $\operatorname{Re} z \geq 0$ félsíkot pedig a $|w| > 1$ kör külsejére képezi le.

5. Mire képezi le a

$$w = \sin 3z$$

függvény az

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad y = 0$$

egyeneseket.

Felhasználjuk, hogy

$$\sin 3z = \sin 3x \operatorname{ch} 3y + j \cos 3x \operatorname{sh} 3y$$

Ezzel:

$$\text{a) } x = \frac{\pi}{2}; \quad y > 0 \quad \text{esetén}$$

$$u = \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{ch} 3y = -\operatorname{ch} 3y$$

$$v = \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{sh} 3y = 0$$

ugy, hogy a félegyenes képe a

$$\left. \begin{array}{l} v = 0 \\ -\infty < u < -1 \end{array} \right\}$$

félegyenes és ugyanaz a képe - ch 3 y páros volta miatt - az $x = \frac{\pi}{2}$; $y < 0$ félegyenesnek is.

$$b) y = 0; \quad -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \quad \text{esetén}$$

$$u = \sin 3x \operatorname{ch} 0 = \sin 3x$$

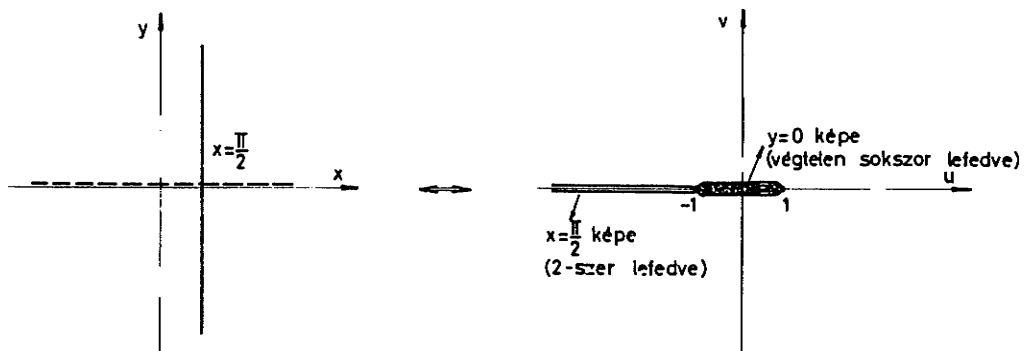
$$v = \cos 3x \operatorname{sh} y = 0$$

ugy, hogy ezen egyenesszakasz képe az

$$\left. \begin{array}{l} v = 0 \\ -1 < u < 1 \end{array} \right\}$$

egyenesszakasz és ugyanez a képe - $\sin 3x$ periodicitása miatt - az x tengely bármely $\frac{2\pi}{3}$ hosszúságu szakaszának.

Tehát: a $w = \sin 3z$ függvény az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenest a kétszer lefedett $v = 0$; $-\infty < u < -1$ egyenesszakaszra és az $y = 0$ egyenest a végtelen sokszor lefedett $v = 0$; $-1 < u < 1$ egyenesszakaszra képezi le (ld. 59. ábra).



59. ábra

$x = \frac{\pi}{2}$ és $y = 0$ egyenesek képe a $w = \sin 3z$ leképezésnél

Ötödik fejezet
KOMPLEX FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

A komplex vonalintegrál - azaz egy komplex függvénynek valamely irányított iven vagy zárt görbén vett integrálja - fontos szerepet játszik a komplex analízis elméletében. Önmagában való fontosságán túlmenően sok alapvető tétel igazolásának alapjául szolgál. Így többek között segítségével igazolható a komplex analízis azon alapvető tétele is, hogy minden reguláris függvény differenciálhányadosa folytonos, sőt hogy akárhányszor differenciálható. Az utóbbi időben ugyan bizonyították e tételeket a komplex integrál felhasználása nélkül is, ezek azonban jóval komplikáltabbak, mint az integrálon alapuló klasszikus bizonyítások.

Ebben a fejezetben a komplex vonalintegrál elméleti és gyakorlati megalapozásának rövid ismertetését adjuk. Az egyszerűség kedvéért Riemann-féle - és nem Riemann-Stieltjes-féle - integrált értelmezzünk (bár ez utóbbi szükséges volna annak igazolásához, hogy a vonalintegrál értéke független a görbét reprezentáló függvény megválasztásától).

1.§ KOMPLEX VONALINTEGRÁL

1.1. VONALINTEGRÁL (HATÁROZOTT INTEGRÁL, ÉRTELMEZÉSE)

A komplex függvény Riemann-féle vonalintegrálját - vagy más szóval görbementi integrálját - az egyváltozós valós függvények határozott integráljának egyik általánosításaként az alábbi módon értelmezzük;

Legyen L a komplex sík egy irányított, rektifikálható görbeszakasza és f az L pontjaiban korlátos abszolútértékű komplex függvény. Osszuk fel az L görbét a befutás sorrendjében a $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ osztópontokkal és minden egyes $\overline{z_{k-1}}, z_k$ íven vegyünk fel egy tetszőleges ξ_k pontot.

Definíció

Ha az L görbe felosztását minden határon túl finomítva (azaz: az osztópontok számát minden határon túl növelve oly módon, hogy a szomszédos osztópontok közötti ívek hosszúságai zérushoz tartanak) a

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

integrálközelítő összegeknek létezik véges határértéke, akkor ez a határérték az f komplex függvény L görbe menti integrálja.

Aszerint, hogy L nyílt vagy zárt görbe, a komplex vonalintegrál jelölésére az

$$\int_L f(z) dz \quad \text{ill.} \quad \oint_L f(z) dz$$

írásmódot használjuk.

A valóssal analóg értelmezés következménye, hogy a komplex vonalintegrál létezésének elégséges feltételei:

- f az L pontjaiban folytonos,
- f az L pontjaiban véges, vagy megszámlálhatóan sok hely kivételével folytonos és abszolútértékben korlátos függvény legyen.

1.2. VONALINTEGRÁL KISZÁMITÁSÁNAK Néhány módja

Folytonos komplex függvény esetén a vonalmenti integrál létezésére és egyben egy kiszámítási módjára utal:

1.2.1. Tétel

Ha az $f = u(x, y) + jv(x, y)$ komplex függvény folytonos egy L rektifikálható Jordan görbén (annak végpontjaiban is), akkor f integrálható L -en és értéke meghatározható koordináták szerint: valós vonalintegrálokkal az

$$\int_L f(z) dz = \int_L (u dx - v dy) + j \int_L (v dx + u dy)$$

alakban.

Bizonyítás

Alkalmazva a

$$z = x + jy; \quad z_k = x_k + jy_k; \quad \zeta_k = \xi_k + j\eta_k$$

jelöléseket:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \left[u(\xi_k, \eta_k) + jv(\xi_k, \eta_k) \right] \cdot (x_k - x_{k-1}) + j(y_k - y_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[u(\xi_k, \eta_k) (x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k, \eta_k) (y_k - y_{k-1}) \right] + \\ &+ j \sum_{k=1}^n \left[v(\xi_k, \eta_k) (x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k, \eta_k) (y_k - y_{k-1}) \right]. \end{aligned}$$

A vektoranalízis görbementi integráljának elméletéből ismeretes, hogy a tett feltevések mellett a jobb oldali valós összegek a felosztás minden határon túl való finomítása esetén (az osztópontok és a reprezentáns pontok választásától függetlenül) a koordináták szerint: valós vonalintegrálokhoz tartanak. Azaz

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) \Rightarrow \int_L (u \, dx - v \, dy) + j \int_L (v \, dx + u \, dy)$$

az állításnak megfelelően. $\square$

Integrálható komplex függvény esetén a vonalintegrál közönséges integrállal való kiszámítására utal:

1.2.2. Tétel

Ha az L görbe $z(t) = x(t) + j y(t)$; $\alpha \leq t \leq \beta$ paraméteres előállításban adott és $z'(t)$ folytonos az $(\alpha \leq t \leq \beta)$ intervallumban, akkor az L -en integrálható f komplex függvény vonalmenti integrálja közönséges integrállal számítható:

$$\int_L f(z) \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) \, dt$$

alakban.

Bizonyítás

A $z(t)$ -re tett feltevések mellett a vonalmenti integrált meghatározó

$$\int_L f(z) \, dz = \int_L (u \, dx - v \, dy) + j \int_L (v \, dx + u \, dy)$$

összefüggésben a jobb oldali görbementi integrálokat közönséges integrálokká alakítva:

$$\begin{aligned} \int_L f(z) \, dz &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) \cdot x'(t) - v(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] \, dt + \\ &+ j \int_{\alpha}^{\beta} [v(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + u(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] \, dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))] [x'(t) + jy'(t)] \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Tehát - az állításnak megfelelően - a komplex vonalintegrál kiszámítására a helyettesítéssel integrálás képletére emlékeztető kifejezés adódik. $\square$

A komplex vonalintegrál integrációs uttól való függetlenségének fel-
tételét és ilyen esetben az integrál kiszámítását fejezi ki:

1.2.3. Tétel

(Newton-Leibniz formula)

Ha van olyan F reguláris komplex függvény, hogy a sík egy T
tartományában $F'(z) = f(z)$ és L a T tartomány $z = a$ pontját a
 $z = b$ pontjával összekötő, T -ben haladó tetszőleges rektifikálható gör-
be, akkor

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a).$$

(L)

Bizonyítás

Az $f = u + jv$ és $F = U + jV$ jelöléssel az

$$F'(z) = f(z)$$

összefüggés

$$U'_x + j V'_x = u + jv$$

alakú, amiből következik, hogy

$$U'_x = u \quad \text{és} \quad V'_x = v,$$

ill. a Cauchy-Riemann egyenletek felhasználásával:

$$U'_y = -v \quad \text{és} \quad V'_y = u.$$

Tehát

$$\text{grad } U = [u, -v] \quad \text{és} \quad \text{grad } V = [v, u].$$

Ezt, valamint (grad U -nak f regularitásából következő folytonossága
miatt) az $\int_a^b \text{grad } U \, d\underline{r} = U(b) - U(a)$ összefüggést felhasználva:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(z) dz &= \int_a^b (u dx - v dy) + j \int_a^b (v dx + u dy) = \\
(L) &= \int_a^b \text{grad } U \, d\underline{r} + j \int_a^b \text{grad } V \, d\underline{r} = \\
&= [U(b) - U(a)] + j[V(b) - V(a)] = \\
&= [U(b) + jV(b)] - [U(a) + jV(a)] = F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

az állításnak megfelelően. $\square$

Később igazolni fogjuk, hogy ha f reguláris, akkor mindig van a tételben kimondott feltételeknek eleget tevő F függvény, amit - valós analógiára - az f komplex függvény primitív függvényének fogunk nevezni. A primitív függvénnyel és tulajdonságaival részletesebben az 1.5. fejezetben fogunk foglalkozni.

1.3. KOMPLEX VONALINTEGRÁL NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

A komplex vonalintegrál értelmezésének, valamint valós vonalintegrálakkal való kifejezésének következménye, hogy rájuk is érvényesek a valós integrálok alapvető tulajdonságai. Közülük a fontosabbak:

(1) Ha az $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvények integrálhatók az L rektifikálható görbén, akkor

$$\int_L \left[\sum_{k=1}^n f_k(z) \right] dz = \sum_{k=1}^n \left[\int_L f_k(z) dz \right].$$

(2) Ha $L_1, L_2, \dots, L_n$ - ebben a sorrendben - egymás végpontjából kiinduló rektifikálható görbeszakaszok, amelyeken f integrálható, akkor:

$$\int_{L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \left[\int_{L_k} f(z) dz \right].$$

(3) Ha f integrálható az L rektifikálható görbén és c tetszőleges állandó, akkor

$$\int_L c \cdot f(z) dz = c \int_L f(z) dz.$$

(4) Ha f integrálható az L rektifikálható görbén, akkor

$$\int_L f(z) dz = - \int_{-L} f(z) dz,$$

ahol L ill. $-L$ ugyanazon görbét jelenti ellentétes irányú befutással.

(5) Ha f korlátos abszolútértékű és integrálható az L rektifikálható görbén, akkor $|f|$ is integrálható, és

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \int_L |f(z)| ds,$$

ahol a jobb oldali integrál: ívhossz szerinti integrál.

(6) Ha f integrálható az L rektifikálható görbén és ott $|f| \leq M$, akkor

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq M \cdot S,$$

ahol S az L görbe ívhossza.

E tételek igazolása a megfelelő valós vonalintegrálokkal történhet.

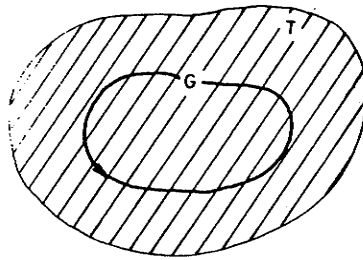
1.4. AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ALAPTÉTELE: CAUCHY-INTEGRÁL-TÉTEL

A komplex vonalintegrál alaptétele - a vonalintegrál integrációs uttól való függetlenségére feltételt adó - ún. Cauchy-integrál-tétel. Ennek egyszeresen összefüggő tartományra vonatkozó alakja:

1.4.1. Tétel

(Cauchy-integrál tétel)

Ha f reguláris a komplex sík egy egyszeresen összefüggő T tartományában, akkor bármely T -ben fekvő rektifikálható G zárt Jordan görbére:



60. ábra
G az egyszeresen
összefüggő T-ben

$$\oint_G f(z) dz = 0$$

(ld. 60. ábra).

Bizonyítás

A tételt - hosszadalmas volta miatt - nem a Goursat-tól származó klasszikus módon bizonyítjuk, hanem egyszerűbb formában, azon kiegészítő feltevés mellett, hogy f differenciálhányadosa folytonos T-ben. Ekkor:

$$\begin{aligned} \oint_G f(z) dz &= \oint_G (u dx - v dy) + j \oint_G (v dx + u dy) = \\ &= \oint_G [u, -v] [dx, dy] + j \oint_G [v, u] [dx, dy] = \\ &= \oint_G [u, -v] d\underline{r} + j \oint_G [v, u] d\underline{r} = 0 \end{aligned}$$

Ugyanis a tételbeli feltételek figyelembevételével T minden pontjában fennállnak a Cauchy-Riemann differenciálegyenletek:

$$u'_y = -v'_x \quad \text{és} \quad v'_y = u'_x,$$

ami maga után vonja, hogy a jobb oldali valós integrálok, mint a rotációmentes $[u, -v]$ és $[v, u]$ sík-vektorterek zárt görbe-menti integráljai 0-val egyenlők. $\square$

Ezen alapvető tétel többszörösen összefüggő tartományra való kiterjesztése:

1.4.2. Tétel

(Általánosított Cauchy-integrál tétel)

Ha f reguláris egy $(n+1)$ -szeresen összefüggő T tartományban és annak G_0 "külső" és $G_1, G_2, \dots, G_n$ "belső" határgörbéin, akkor

$$\oint_{G_0^+} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \left[\oint_{G_k^-} f(z) dz \right] = 0,$$

ahol "+" és "-" a határgörbék ellentétes körüljárási irányát jelzi illetve:

$$\oint_{G_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \left[\oint_{G_k} f(z) dz \right],$$

ha a határgörbék körüljárási iránya megegyező.

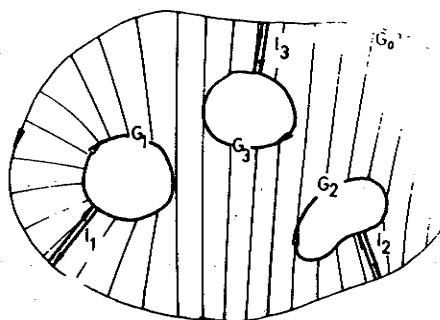
Bizonyítás

Az $(n+1)$ -szeresen összefüggő tartomány határgörbáját összefüggővé tesszük olyan $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$

egyenesszakaszok beiktatásával, amelyek a G_0 külső határgörbét

a $G_1, G_2, \dots, G_n$ belső határgörbékkel kötik össze ($n = 3$ esetben ld. 61. ábra). A G_0 görbe pozitív,

a $G_1, G_2, \dots, G_n$ görbék negatív és az egyenesszakaszok mindkét irányu bejárásával a tartomány egyszeresen összefüggővé válik. Ebben a tartományban az f függvényre érvényes a Cauchy-alaptétel: az f függvénynek a tartomány



61. ábra

Négyszeresen összefüggő T

nek a tartomány

$$G = G_0^+ + \bigcup_{i=1}^n \ell_i^+ + \bigcup_{i=1}^n \ell_i^- + \bigcup_{k=1}^n G_k^-$$

határán vett vonalmenti integrálja zérus. Mivel a beiktatott egyenesszakaszok-menti integrálok kétszer szerepelnek ellentétes irányítással, ezért ezek az összegezésnél 0-át adnak, úgy hogy a határgörbére vett vonalintegrálra az

$$\oint_{G_0^+} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \left[\oint_{G_k^-} f(z) dz \right] = 0$$

III. a vonalintegrál (4) tulajdonságának felhasználásával

$$\oint_{G_0^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \left[\oint_{G_k^+} f(z) dz \right]$$

összefüggés adódik az állításnak megfelelően. $\square$

Megjegyezzük, hogy a Cauchy-integrál-tétel akár egyszeresen-, akár többszörösen-összefüggő tartományon akkor is érvényes, ha f csak a tartomány belsejében reguláris és a határgörbéken csak folytonos. Ennek igazolását nem részletezzük, csak utalunk arra, hogy f folytonossága miatt

$$\oint_G f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\oint_{G_n} f(z) dz \right],$$

ha G_n a G által határolt tartomány belsejében fekvő olyan zárt görbe, amely $n \rightarrow \infty$ esetén "bizonyos értelemben" G -hez tart (pl. ha G egy kör, akkor G_n -nek választhatók olyan G -vel koncentrikus körök, amelyeknek a sugara G sugarához tart). Mivel a G_n -görbék menti integrálok értéke 0, ezért határértékük a G -görbe menti integrál értéke is 0.

1.5. A CAUCHY-INTEGRÁL-TÉTEL NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYE

Reguláris komplex függvény görbementi integráljának kiszámítását egyszerűbbé teszik a Cauchy-integrál-tétel alábbi következményei:

1.5.1. Tétel

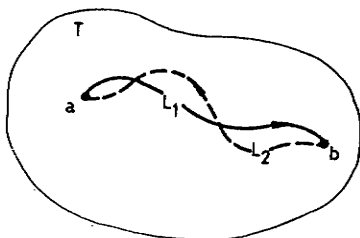
Ha f reguláris az egyszeresen - ill. a többszörösen - összefüggő T tartományban, akkor tetszőleges $a, b \in T$ esetén

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(z) dz,$$

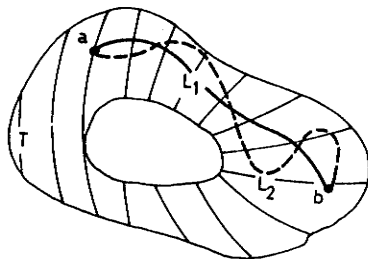
(L₁) (L₂)

feltéve, hogy az " a " és a " b " pontokat összekötő L_1 és L_2 görbék rektifikálhatók és teljes egészükben az egyszeresen összefüggő T tartományban - ill. a többszörösen összefüggő T tartomány valamely egy-

szerelesen összefüggő T^* részében - haladnak és azonos irányításuak (ld. 62/a. és 62/b. ábrák).



62/a. ábra



62/b. ábra

Bizonyítás

Az "a" és "b" pontokat összekötő, $a \rightarrow b$ -be irányított L_1 és $b \rightarrow a$ -ba irányított L_2 görbék egyesítésével adódó G zárt görbére alkalmazva a Cauchy-alaptételt:

$$\oint_G f(z) dz = \int_a^b f(z) dz + \int_b^a f(z) dz = 0$$

(L_1)
 (L_2)

Ebből

$$\int_a^b f(z) dz = - \int_a^b f(z) dz$$

(L_1)
 (L_2)

ill.

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(z) dz$$

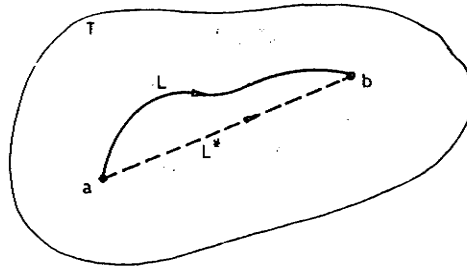
(L_1)
 (L_2)

az állításnak megfelelően. $\square$

Ez a tétel egy T tartományban reguláris komplex függvény $L \in T$ rektifikálható görbe mentén vett integráljának a görbétől való függetlenségét fejezi ki. Alkalmazásával megkönnyíthető az integrál értékének megha-

tározása, mert az integrálás a T -beli

"a" és "b" pontokat összekötő adott $L \in T$ rektifikálható görbe helyett, e pontokat összekötő, az adottnál egyszerűbb $L^* \in T$ rektifikálható görbe (pl. egyenes) mentén végezhető (ld. 63. ábra).



63. ábra

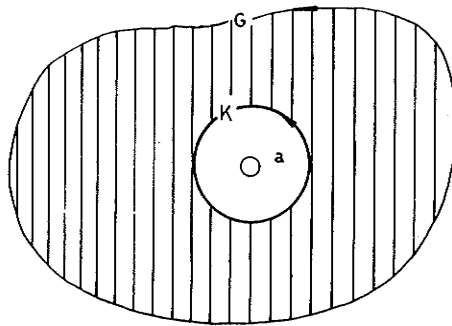
A Cauchy-integrál-tétel egy következménye, sőt bizonyos értelemben vett kiterjesztése:

1.5.2. Tétel

Ha f az egyszeresen összefüggő T tartományban az "a" hely kivételével mindenütt reguláris, az "a" hely környezetében pedig korlátos, akkor

$$\oint_G f(z) dz = 0$$

bármely $G \subset T$ rektifikálható zárt görbére, amely nem megy át az "a" ponton.



64. ábra

Bizonyítás

Vegyük körül az "a" pontot a G belsejében haladó K : $|z - a| = r$ egyenletű körrel (ld. 64. ábra). Mivel f reguláris a G és K közti - kétszeresen összefüggő - gyűrűszerű tartományon, ezért a Cauchy-integrál-tétel értelmében

$$\oint_G f(z) dz = \oint_K f(z) dz.$$

feltéve, hogy a G és a K görbéket azonos irányban járjuk be. Mivel f korlátos "a" környezetében, ezért megadható olyan $M > 0$ és $r > 0$ pozitív szám, hogy $|f(z)| < M$, ha $|z - a| \leq r$. Így a vonalintegrál 1.2.5. Tételben kifejezett tulajdonsága értelmében:

$$\left| \oint_K f(z) dz \right| \leq M 2\pi r.$$

Ez azt jelenti, hogy a jobb oldali integrál értéke tetszőleges kis számnál is kisebb, ha a K kör sugara, $r \rightarrow 0$, amiből már a tétel állítása következik. $\square$

E tétel alkalmazására ld. az 1.8. fejezet 6. példáját.

A Cauchy-integrál-tétel egy további fontos és gyakran alkalmazott következménye:

1.5.3. Tétel

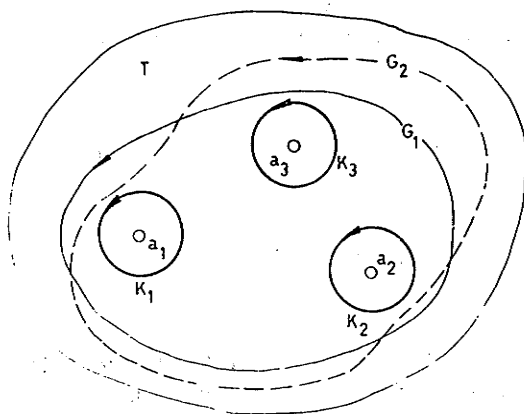
Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományban a véges számú $a_1, a_2, \dots, a_n$ pont kivételével mindenütt, akkor e pontokat (az ún. izolált szinguláris pontokat) körülvevő bármely rektifikálható G_1 és G_2 zárt Jordan görbére

$$\oint_{G_1} f(z) dz = \oint_{G_2} f(z) dz,$$

feltéve, hogy G_1 és $G_2 \subset T$ és mindkét görbét azonos irányban járjuk be.

Bizonyítás

Vegyünk fel az a_i ; $i = 1, 2, \dots, k$ pontok, mint középpontok körül olyan kis ϵ_i sugarú K_i köröket, amelyek benne vannak mind a G_1 , mind a G_2 által határolt tartományban és $K_i \cap K_j = \emptyset$ ha $i \neq j$ ($k=3$ esetre ld 65. ábra). A G_1 görbe és a K_i körök (ill. a G_2 görbe és a K_i körök)



65. ábra

által határolt $(k+1)$ -szeresen összefüggő tartományokban alkalmazva a Cauchy-integrál-tételt:

$$\oint_{G_1} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \left[\oint_{K_i} f(z) dz \right],$$

$$\oint_{G_2} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \left[\oint_{K_i} f(z) dz \right],$$

amiből következik, hogy

$$\oint_{G_1} f(z) dz = \oint_{G_2} f(z) dz,$$

feltéve, hogy G_1 -e és G_2 -t azonos irányban járjuk be. $\square$

1.6. INTEGRÁL FÜGGVÉNY, PRIMITÍV FÜGGVÉNY, HATÁROZATLAN INTEGRÁL

A Cauchy-integrál-tétel következménye, hogy reguláris komplex függvény görbementi integráljának értéke csak a görbe végpontjaitól függ. Ezért az egyik végpontot rögzítve és a másikat változtatva, az integrál értéke a változó végpont függvénye lesz. Ez az integrállal kifejezett függvény a reguláris komplex függvény integrálfüggvénye. Azaz:

Definíció

Egy T tartományban reguláris f komplex függvény T -beli integrál-függvénye:

$$J(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

ahol az integrációs változót a felső határtól való megkülönböztetésül jelöltük ξ -vel és az integrálást a z_0 és z pontokat összekötő, T -ben haladó, tetszőleges rektifikálható görbe mentén végezhetjük.

Az integrálfüggvény egy fontos tulajdonságát fejezi ki:

1.6.1. Tétel

Ha f reguláris egy egyszeresen összefüggő T tartományban, akkor ott integrálfüggvénye is reguláris és

$$J'(z) = f(z)$$

$z \in T$ -re.

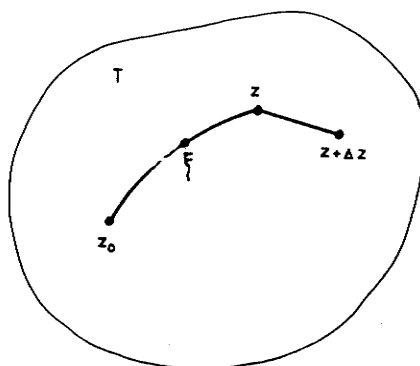
Bizonyítás

A tétel állításának igazolása érdekében becsüljük az J függvény differenciáhozadósának és f -nek a különbségét:

$$\begin{aligned} \left| \frac{J(z+\Delta z) - J(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right\} - f(z) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \mathcal{E} \int_z^{z+\Delta z} |d\zeta| = \frac{1}{|\Delta z|} \mathcal{E} |\Delta z| = \mathcal{E}. \end{aligned}$$

(A becslésnél felhasználtuk, hogy a reguláris f függvény egyben folytonos is, úgy hogy tetszőleges $\mathcal{E} > 0$ szám megadása esetén Δz megválasztható abszolútértékre nézve olyan kicsinek, hogy a z és $z + \Delta z$ pontokat összekötő egyenesszakasz szintén T -ben legyen (ld. 66. ábra) és így minden olyan ζ -ra, amelyre $|\zeta - z| < |\Delta z|$, fennáll, hogy $|f(\zeta) - f(z)| < \mathcal{E}$. A nyert

$$\left| \frac{J(z + \Delta z) - J(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \mathcal{E}$$



66. ábra

egyenlőtlenség azt jelenti, hogy létezik

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(z + \Delta z) - \mathcal{I}(z)}{\Delta z} = \mathcal{I}'(z)$$

határérték és

$$\mathcal{I}'(z) = f(z)$$

az állításnak megfelelően. $\square$

Az integrálfüggvény mellett - valós analógiára - értelmezzük a komplex függvény primitív függvényét:

Definíció

Egy egyszeresen - vagy többszörösen - összefüggő T tartományon értelmezett f komplex függvény e tartománybeli primitív függvénye: az a T -n reguláris F komplex függvény, amelyre

$$F'(z) = f(z)$$

$\forall z \in T$ -re.

E definíció következménye a primitív függvény tulajdonságát kifejező

1.6.2. Tétel

Ha a T tartományon F primitív függvénye az f komplex függvénynek, akkor - tetszőleges c konstans esetén - $F + c$ is primitív függvénye és ez egyben f összes primitív függvénye T -n.

Bizonyítás

a) $F + c$ primitív függvény, mert

$$(F + c)' = F' = f.$$

b) f bármely két primitív függvénye (pl. F_1 és F_2) csak additív konstansban térhet el egymástól. Ugyanis

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0,$$

ami $(F_2 - F_1)$ regularitása miatt csak úgy lehet, hogy $(F_2 - F_1)'$ valós és képzetes részének parciális deriváltjai mind 0-ák, amiből - a valós analízisből ismert módon - következik, hogy

$$F_2 - F_1 = c,$$

ill.

$$F_2 = F_1 + c,$$

mint ahogy azt állítottuk.]

Az egymástól additív konstansban különböző primitív függvények összességére külön elnevezést és jelölést vezettek be:

Definíció

Egy f komplex függvény valamely T tartománybeli primitív függvényeinek összessége: az f függvény e tartománybeli határozatlan integrálja. Jele:

$$\int f(z) dz = F + c$$

Az integrálfüggvény és a primitív függvény kapcsolatát fejezi ki az

1.6.3. Tétel

Egy egyszerűen összefüggő T tartományon reguláris f komplex függvénynek mindig van primitív függvénye T -ben, mert az

$$\mathcal{J}(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

integrálfüggvény mindig primitív függvény, bárhogyan is rögzítjük a $z_0 \in T$ alsó határt.

Bizonyítás

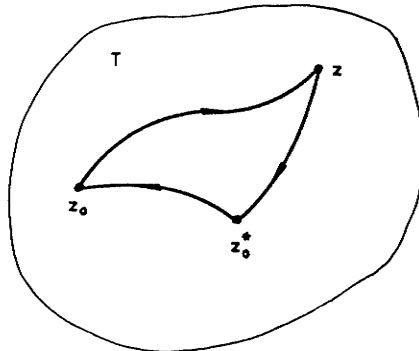
a) Az integrálfüggvény primitív függvény, mert az 1.6.1. Tétel értelmében

$$\mathcal{J}'(z) = f(z) \implies \mathcal{J}(z) = F(z)$$

b) Az integrálfüggvény alsó határát másképp rögzítve az $\mathcal{J}(z) = F(z)$ -től egy additív konstansban különböző másik primitív függvényt kapunk.

Ugyanis a Cauchy-alaptétel értelmében:

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + \int_z^{z_0^*} f(\zeta) d\zeta + \int_{z_0^*}^{z_0} f(\zeta) d\zeta = 0$$



67. ábra

(ld. 67. ábra). Itt alkalmazva az

$$\int_{z_0^*}^{z_0} f(\zeta) d\zeta = \mathfrak{J}^*(z)$$

jelölést és felhasználva a harmadik integrál konstans voltát:

$$\mathfrak{J}(z) - \mathfrak{J}^*(z) + c = 0,$$

amiből az

$$\mathfrak{J}^*(z) = \mathfrak{J}(z) + c$$

összefüggés, azaz a tétel állítása következik. $\square$

Az 1.6.3. Tétel alapján bebizonyítható a határozott integrál és a primitív függvény kapcsolatát kifejező Newton-Leibniz formula (melyet már az 1.2.3. Tételben ismertettünk és más úton bizonyítottunk):

1.6.4. Tétel

Ha F a reguláris f függvény egy T tartománybeli primitív függvénye, akkor tetszőleges $a \in T$ és $b \in T$ pontokra

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a),$$

(L)

ahol az integrálás az "a" és "b" pontokat összekötő, T -ben haladó bármely L rektifikálható görbe mentén történhet.

Bizonyítás

a) A tételt először arra a speciális esetre igazoljuk, amikor az L integrációs út a T tartomány egy egyszerűen összefüggő T' résztartományában halad.

Ekkor L tetszőleges volta miatt $\forall z_0 \in T'$ -re az integrálfüggvény nyel kifejezett határozott integrál:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z) dz &= \int_a^{z_0} f(z) dz + \int_{z_0}^b f(z) dz = \\ &= \int_{z_0}^b f(z) dz - \int_{z_0}^a f(z) dz = J(b) - J(a)\end{aligned}$$

Mivel f bármely két primitív függvénye csak additív konstansban különbözik egymástól, ezért J helyett bármely más - pl. a tételbeli F - primitív függvény vehető. Ezzel:

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a)$$

az állításnak megfelelően.

b) Az általános esetben az " a "-ból " b "-be vezető integrációs út T -ben haladó tetszőleges rektifikálható görbe.

Ha a görbe pontjainak T külsejéti való minimális távolsága ϱ (ilyen $\varrho > 0$ szám van, mert a görbe T -nek zárt, korlátos részhalmaza), akkor a görbét az $a = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = b$ osztópontokkal olyan ivekre osztjuk, amelyeknek ivhossza ϱ -nál kisebb. Ekkor mindegyik iv benne van a kezdőpontja körüli ϱ sugarú körben, vagyis T -nek egy egyszerűen összefüggő részében. Így mindegyik ivre külön-külön alkalmazhatjuk az ilyen esetre már bizonyított állítást és összegezésükkel megkapjuk a kívánt eredményt az egész görbére.

Tehát tetszőleges L rektifikálható görbe mentén integrálva:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(z) dz &= \int_a^{a_1} f(z) dz + \int_{a_1}^{a_2} f(z) dz + \dots + \int_{a_{n-1}}^b f(z) dz = \\
&= [F(a_1) - F(a)] + [F(a_2) - F(a_1)] + \dots + [F(b) - F(a_{n-1})] = \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

az állításnak megfelelően. $\square$

Megjegyzés

1. Ha f regularitási tartománya nem egyszeresen összefüggő, akkor eöben a tartományban primitív függvénye, F nem feltétlenül egyértékű reláció (vagyis nem feltétlenül függvény). Ha F többértékű, akkor az f függvényt az $a \in T$ és $b \in T$ pontokat összekötő különböző rektifikálható L görbéken integrálva, ezen integrálok értékét adó $[f(b) - F(a)]$ tényleges értéke függ az L görbétől. Ilyenkor a *) alatti összeg ad felvilágosítást arra nézve, hogy a különböző L görbék esetén a többértékű F primitív függvénynek (relációnak) melyik ágát kell venni.

2. Mivel a primitív függvény értelmezése és a Newton-Leibniz formula valós változós függvények és reguláris komplex függvények esetében megegyezik, ezért a komplex változó elemi függvényeiből konstruált függvények vonalintegráljai ugyanazon módszerekkel határozhatók meg, mint a megfelelő valós függvények integráljai. Így például - bizonyos feltételek mellett - komplex változós racionális törtfüggvények integrálására alkalmazható a rész-törtekre bontás, szorzat függvény integrálására a parciális integrálás stb.

A parciális integrálás komplex analízisbeli alkalmazásának feltételeit fejezi ki:

1.6.5. Tétel

Ha f és g egy T tartományban reguláris komplex függvények, akkor

$$\int_a^b f(z) \cdot g'(z) dz = [f(z) \cdot g(z)]_a^b - \int_a^b f'(z) g(z) dz$$

bármilyen $L \in T$ rektifikálható görbe mentén integrálva.

Bizonyítás

A szorzat differenciálhányadosára vonatkozó

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

egyenlőséget integrálva és az $(f \cdot g)'$ reguláris függvényre a Newton-Leibniz formulát alkalmazva, átrendezés után az

$$\int_a^b f(z) \cdot g'(z) dz = \left[f(z) \cdot g(z) \right]_a^b - \int_a^b f'(z) \cdot g(z) dz$$

összefüggés adódik az állításnak megfelelően. $\square$

1.7. $(z-a)$ HATVÁNYAINAK INTEGRÁLÁSA

$(z-a)$ egész kitevős hatványai a kitevőtől függően vagy mindenütt, vagy a $z = a$ pont kivételével mindenütt regulárisak. Ennek megfelelően zárt görbe menti integráljuk értéke lehet 0, vagy attól különböző.

a) Ha $n = 0, 1, 2, \dots$, akkor az $f(z) = (z-a)^n$ függvény mindenütt reguláris. Így a Cauchy-alaptétel értelmében tetszőleges zárt görbére - speciálisan a $z = a$ pontot körülvevő zárt görbére is -:

$$\oint_G (z-a)^n dz = 0 ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

b) Ha $n = -1, -2, \dots$, akkor - az $m = -n$ jelöléssel - az $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$ függvény regularitási tartománya a $z = a$ pontban "átlyukasztott" sík, ami nem egyszeresen összefüggő tartomány. Ha azonban $m \neq 1$, akkor a függvénynek van primitív függvénye ezen a tartományon, és pedig az

$$\frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{(z-a)^{m-1}} \quad m = 2, 3, \dots$$

függvény. Így bármely olyan G zárt görbére, amely nem halad át a $z = a$ ponton, de azt megkerülheti:

$$\oint_G \frac{1}{(z-a)^m} dz = 0 ; \quad m = 2, 3, \dots$$

c) Más a helyzet az $n = -1$ esetben. Ha az $\frac{1}{z-a}$ függvényt a $z=a$ pontot egyszer megkerülő G zárt görbén integráljuk, akkor - mint

látni fogjuk - az integrál értéke $2\pi j$. Ugyanis a $z = a$ pontot körülvevő egy tetszőleges kis sugarú K körrel a G és K közti gyűrűszerű tartományon $\frac{1}{z-a}$ már reguláris, így hogy a Cauchy-integrál-tétel értelmében

$$\oint_G \frac{1}{z-a} dz = \oint_K \frac{1}{z-a} dz,$$

feltéve, hogy a két görbének azonos a járési iránya. A $(z-a) = re^{j\varphi}$; $0 \leq \varphi < 2\pi$ kör menti integrálást elvégezve:

$$\oint_G \frac{1}{z-a} dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r j e^{j\varphi}}{r e^{j\varphi}} d\varphi = 2\pi j.$$

Tehát tetszőleges n egész számra

$$\oint (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq -1, \\ 2\pi j, & \text{ha } n = -1 \end{cases}$$

feltéve, hogy a pozitív irányban bejárt G görbe egyszer kerüli meg a $z = a$ pontot.

Megjegyzés

A fentiekből következik:

1. Egy $f \neq 0$ komplex függvény z -a görbe menti integráljának értéke nemcsak akkor lehet 0, ha f az integrációs görbén és belsejében reguláris. Például az $f = \frac{1}{(z-a)^n}$; $n=2,3,\dots$, nem reguláris a $z = a$ pontban, mégis a pontot körülvevő kör menti integráljának értéke 0.

2. Ha a pozitív irányban bejárt G görbe k -szor kerüli meg a $z = a$ pontot, akkor

$$\oint \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq 1, \\ 2\pi j & \text{ha } n = 1. \end{cases}$$

tetszőleges $k=1,2,\dots$ esetén.

1.8. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg az

$$\int_L \bar{z} \operatorname{Re} z \, dz$$

integrál értékét, ha az L görbe a $z_1 = 3$ és $z_2 = 3j$ pontokat összekötő

- a) egyenesszakasz,
 - b) origó középpontu negyedkörív,
- mindkettő z_1 -ből a z_2 -be irányítva.

A kérdéses integrálok az alábbi módon számíthatók:

a) Az adott egyenesszakasz egy paraméteres komplex egyenlete

$$z(t) = (3-t) + jt; \quad 0 \leq t \leq 3,$$

ezzel

$$\bar{z} = (3-t) - jt,$$

$$\operatorname{Re} z = 3-t,$$

$$z' = -1 + j$$

és így

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z} \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^3 \bar{z}(t) \cdot \operatorname{Re} z(t) \cdot z'(t) \, dt = \int_0^3 (3-t-jt)(3-t)(j-1) \, dt = \\ &= \int_0^3 (-2t^2 + 9t - 9) \, dt + 3j \int_0^3 (3-t) \, dt = \frac{-9}{2} + \frac{27}{2}j \end{aligned}$$

b) A z_1 és z_2 pontokat összekötő origó középpontu kör egy paraméteres komplex egyenlete:

$$z(t) = 3e^{jt}; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Ezzel

$$\bar{z} = 3e^{-jt}; \quad \operatorname{Re} z = 3 \cos t; \quad z' = 3je^{jt}$$

és így

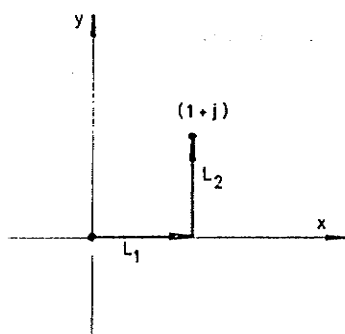
$$\int_L \bar{z} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^{\pi/2} 3e^{-jt} \cdot 3\cos t \cdot 3je^{jt} dt = 27j \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 27j.$$

Tehát: a nem reguláris $\bar{z} \operatorname{Re} z$ függvényt két pont között az adott két különböző úton integrálva az integrál értéke különböző.

2. Határozzuk meg az

$$\int_L (e^{\bar{z}} + \cos^2 z) \, dz$$

integrál értékét, ha L a $z = 0$ pontot a $z = 1 + j$ ponttal összekötő, a 68. ábrán látható, pozitív irányban bejárt $(L_1 + L_2)$ törtvonal.



68. ábra

Az integrál additív tulajdonságát felhasználva

$$\int_L (e^{\bar{z}} + \cos^2 z) \, dz = \int_L e^{\bar{z}} \, dz + \int_L \cos^2 z \, dz.$$

Az első integrált - mint nem reguláris függvény integrálját - az adott törtvonal mentén számítva (felhasználva az integrációs út additív tulajdonságát és figyelembe véve, hogy az L_1 egyenesszakasz mentén $y = 0$, L_2 mentén pedig $x = 1$):

$$\begin{aligned} \int_{L_1+L_2} e^{\bar{z}} \, dz &= \int_{L_1+L_2} e^{x-jy} \, dz = \int_{L_1+L_2} e^x \cdot e^{-jy} \, dz = \int_{L_1} e^x \, dx + j \int_{L_2} e^{-jy} \, dy = \\ &= \int_{x=0}^1 e^x \, dx + j \int_{y=0}^1 e^{-jy} \, dy = [e^x]_0^1 + j \left[\frac{e^{-jy}}{-j} \right]_0^1 = \\ &= (e - 1) - e[e^{-j} - 1] = 2e - e^{1-j} - 1. \end{aligned}$$

A második integrált - mint reguláris függvény integrálját - a Newton-
biniz tétel alapján számítva:

$$\int_{1+L_2}^{z=1+j} \cos^2 z \, dz = \int_{z=0}^{z=1+j} \frac{1 + \cos 2z}{2} \, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \left[z + \frac{\sin 2z}{2} \right]_0^{1+j} = \frac{1}{2} (1+j) + \frac{1}{4} \sin (2+2j).$$

Tehát

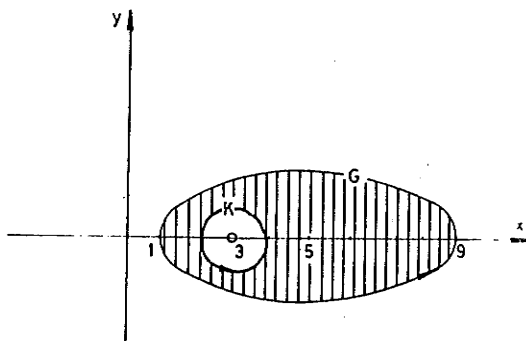
$$\int_L (e^{\bar{z}} + \cos^2 z) \, dz = (2e - 1)e^{1-j} + \frac{1}{2} (1+j) + \frac{1}{4} \sin (2+2j)$$

3. Határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{2z - 1}{z(z-3)} \, dz$$

integrál értékét ha G a po-
zitiv irányban be árt

$(x-5)^2 + 4y^2 = 16$ egyenletű
ellipszis.



69. ábra

Az integrálandó függvény a $z = 3$ pont kivételével az adott ellipszisen és az általa határolt tartományon mindenütt reguláris. Így a kétszeresen ösz-
szefüggő tartományra vonatkozó Cauchy-integráltétel értelmében a kérdéses
integrál értéke megegyezik a $z = 3$ pontot körülvevő kör menti integrállal
(ld. 69. ábra), ami az integrálandó függvény résztortekre bontása után egysze-
rűen számítható ki. Éspedig:

$$\oint_G \frac{2z-1}{z(z-3)^2} dz = \oint_K \frac{2z-1}{z(z-3)^2} dz =$$

$$= \oint_K \left[-\frac{1}{9} \frac{1}{z} + \frac{5}{(z-3)^2} + \frac{1}{z-3} \right] dz = \frac{1}{9} \cdot 2\pi j.$$

(Itt felhasználtuk, hogy a $|z-3|=\epsilon$ egyenletű körön $\frac{1}{z}$ reguláris, így ott integrálja 0; továbbá, hogy a $(z-3)^n$ függvény integrálja 0, ha $n \neq -1$ és $2\pi j$, ha $n = -1$).

4. Adjunk meg olyan T tartományt, amelyen létezik integrálfüggvénye az

a) $f(z) = \sin 2z \cdot \cos 2z$,

illetve a

b) $g(z) = \operatorname{tg}(2z-3)$

függvénynek és azon a tartományon határozzuk meg integrálfüggvényüket.

a) Az f függvény a teljes komplex síkon reguláris. Így a z sík bármely egyszeresen összefüggő tartományán létezik f integrálfüggvénye.

Az integrálfüggvény meghatározása - valós analógiára - az alábbi módon történhet:

$$\int_a^z \sin 2\xi \cdot \cos 2\xi d\xi = \frac{1}{2} \int_a^z \sin 2\xi (2 \cos 2\xi) d\xi = \frac{1}{4} (\sin^2 2z - \sin^2 2a)$$

b) A g függvény pl. a $-\frac{\pi}{2} < 2x-3 < \frac{\pi}{2}$ főperiódussávban reguláris, kivéve az $x = \frac{3}{2}$ pontot. Így e sávnak - az $x = \frac{3}{2}$ pontot nem tartalmazó - bármely egyszeresen összefüggő résztartományán létezik g -nek integrálfüggvénye.

Az integrálfüggvény meghatározása - ismét valós analógiára - :

$$\int_a^z \operatorname{tg}(2\xi-3) d\xi = \int_a^z \frac{\sin(2\xi-3)}{\cos(2\xi-3)} d\xi = -\ln \frac{\cos(2a-3)}{\cos(2z-3)}.$$

5. Határozzuk meg az

$$f(z) = \frac{\ln(1+z)}{(z-j)^2}$$

függvény $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkbeli összes primitív függvényét.

A $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon az $\frac{1}{(z-j)^2} \cdot \ln(1+z)$ függvény és mindkét tényezője reguláris. Így primitív függvényének meghatározására alkalmazható a parciális integrálás módszere. Ezzel:

$$\int \frac{1}{(z-j)^2} \ln(1+z) dz = \left[-\frac{1}{z-j} \ln(1+z) \right] + \int \frac{dz}{(z-j)(z+1)},$$

ahol a jobb oldali racionális törtfüggvény primitív függvényét résztörtekre bontással határozva meg:

$$\int \frac{dz}{(z-j)(z+1)} = \frac{1}{1+j} \int \left(\frac{1}{z-j} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \frac{1}{1+j} \ln \frac{z-j}{z+1}.$$

Igy a kérdéses f függvény $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkbeli összes primitív függvénye:

$$F(z) = \frac{1}{j-z} \ln(1+z) + \frac{1}{1+j} \ln \frac{z-j}{z+1} + c.$$

6. Határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{\sin z + \ln z}{z} dz$$

zárt görbe menti integrál értékét, ha a G görbe

a) a $|z-2| = 1$ egyenletű kör

b) a $|z| = 1$ egyenletű kör

mindkettő pozitív irányban bejárva.

a) A $|z-2| = 1$ egyenletű körön és belsejében az integrálandó függvény reguláris. Így

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{\sin z + \ln z}{z} dz = 0.$$

b) A $|z| = 1$ egyenletű kör a belsejében tartalmazza a $z=0$ pontot, ahol az integrálandó függvény nem reguláris.

Az integrál értékének meghatározásához felhasználjuk az integrál additív tulajdonságát:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z + \ln z}{z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz + \oint_{|z|=1} \frac{\ln z}{z} dz,$$

A jobb oldali első integrálban az integrálandó függvény a $z = 0$ pontban nem reguláris ugyan, de a $z=0$ pont környezetében korlátos. Így az 1.4.2. Tétel értelmében:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 0.$$

A jobb oldali második integrálban az integrálandó függvény a $z = 0$ pont környezetében nem korlátos, így az integrál értékét a $|z| = 1$ egyenletű körön való integrálással határozhatjuk meg:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\ln z}{z} dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\ln e^{j\varphi}}{e^{j\varphi}} \cdot j e^{j\varphi} d\varphi = - \frac{\pi^2}{2}.$$

Tehát:

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z + \ln z}{z} dz = - \frac{\pi^2}{2}$$

2.§ REGULÁRIS KOMPLEX FÜGGVÉNY INTEGRÁLELŐÁLLÍTÁSA

2.1 CAUCHY - INTEGRÁL - FORMULA

Ha egy valós változós függvény differenciálható egy I zárt intervallumban, akkor az intervallum belső pontjabeli függvényértékek csak kivételes esetben állíthatók elő az intervallum végpontjaiban felvett függvényértékekkel. Ezzel szemben, ha egy komplex változós függvény differenciálható (reguláris) egy T zárt tartományban, akkor a tartomány határán felvett értékei - az ún. peremértékek - egyértelműen meghatározzák a függvény értékeit T belsejében bárhol. Ezt a tényt fejezi ki a Cauchy-integrál-formula, amelynek egyszeresen és többszörösen összefüggő tartományra vonatkozó alakját ismertetjük az alábbiakban.

2.1.1. Tétel

(Cauchy-integrálformula egyszeresen összefüggő tartományon)

Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon és határán, a G rektifikálható, zárt Jordan görbén, akkor tetszőleges $z \in T$ -re

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi ,$$

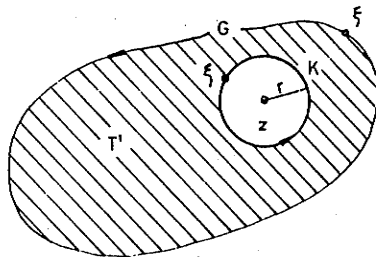
ahol a G görbét pozitív irányban járjuk be, és ξ a G pontjait jelöli.

Bizonyítás

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot és vegyünk körül a z pontot a T -ben fekvő olyan $K: |\xi - z| = r$ egyenletű körvonallal, amelynek minden ξ pontjára fennáll az

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség. (Ez f regularitásából következő folytonossága miatt megtehető!) A G határgörbe és a K kör közti kétszeresen összefüggő tartományon (ld. 70. ábra) az



70. ábra

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

függvény reguláris, ezért az általánosított Cauchy-integrál-tétel alapján

$$\begin{aligned} \oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{K^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \oint_{K^+} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{K^+} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 + f(z) \cdot 2\pi j \end{aligned}$$

Ugyanis: az első integrál abszolútértéke 0-hoz tart, mert

$$\begin{aligned} \left| \oint_{K^+} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \oint_K \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \\ &= \frac{\mathcal{E}}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \mathcal{E}, \end{aligned}$$

és $\mathcal{E}$ tetszőlegesen kicsinek választható.

A második integrál értéke:

$$\oint_K \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \oint_K \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot 2\pi j,$$

mint ahogy azt az 1.7. fejezetben láttuk.

Tehát

$$\oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi j \cdot f(z),$$

amiből a tétel állítása nyilvánvaló. $\square$

E tétel többszörösen összefüggő tartományra való kiterjesztése:

2.1.2. Tétel

(Cauchy-integrálformula többszörösen összefüggő tartományon)

Ha f reguláris a G_0 és a belsejében levő $G_1, G_2, \dots, G_n$ rektifikálható zárt Jordan görbéken, valamint az általuk határolt $(n+1)$ -szereken összefüggő T tartományon, akkor tetszőleges $z \in T$ -re

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \left[\oint_{G_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \sum_{k=1}^n \left(\oint_{G_k} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \right]$$

ahol a G_k ; $k=0, 1, 2, \dots, n$ görbékét pozitív irányban járjuk be és ξ a határgörbék pontjait jelöli.

Bizonyítás

Az $(n+1)$ -szeresen összefüggő tartományból elhagyva a z pontot körülvevő $K: |\xi - z| \leq r$ körtartományt és a kapott $(n+2)$ -szeresen összefüggő tartományra alkalmazva az általánosított Cauchy-integrál-tételt, valamint felhasználva az előző tétel eredményeit, adódik a tétel állítása. $\square$

Megjegyzés

1. Ha a Cauchy integrálformulában szereplő z pont a G görbén kívül fekszik, akkor az $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ függvény T -ben mindenütt reguláris és így a Cauchy-integrál-tétel értelmében

$$\oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0.$$

Tehát:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} f(z), & \text{ha } z \in T, \\ 0, & \text{ha } z \notin T. \end{cases}$$

2. A Cauchy-integrál-formula akkor is érvényes, ha az f függvény csak a T tartomány belsejében reguláris és a G -vel lezárt $\bar{T}$ tartományon csak folytonos.

3. A Cauchy-integrál-formulának abban az esetben is van értelme, amikor az f függvény egy L rektifikálható nyílt görbén folytonos. Ilyenkor a

$$\varphi(z) = \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

függvény reguláris minden olyan pontban, amely nincs rajta L -en. Ebből következik, hogy az

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

is felfogható egy reguláris függvény integráleroállításának, függetlenül attól, hogy C nyílt vagy zárt görbe. (Ha C nyílt görbe, akkor a fenti integrált Cauchy típusu integrálnak nevezzük.)

4. A Cauchy-integrál-formula segítségével egyszerűen határozhatók meg az

$$\oint_G \frac{f(z)}{z-a} dz$$

típusú integrálok, feltéve, hogy f reguláris G -n és az általa határolt T tartományon. Ekkor

$$\oint_G \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} 2\pi j \cdot f(a), & \text{ha } a \in T, \\ 0, & \text{ha } a \notin T. \end{cases}$$

2.2. MAGASABB RENDŰ DERIVÁLTAK LÉTEZÉSE ÉS INTEGRÁL-ELŐÁLLÍTÁSA

Ha egy valós változós f függvény differenciálható egy I intervallumon, abból még nem következik f' -nek I -beli differenciálhatósága, sőt még folytonossága sem. Ezzel szemben ha egy komplex változós függvény reguláris egy T zárt tartományon, akkor annak bármely belső pontjában akárhányszor differenciálható és akárhányadik deriváltja egyértelműen előállítható a függvény kerületi értékei segítségével, egy - a Cauchy-integrál-formulához hasonló - integrál-formulával. Ezt fejezi ki:

2.2.1. Tétel (Általánosított Cauchy-integrál-formula)

Ha f reguláris a T tartományon és határán, a G rektifikálható zárt Jordan-görbén, akkor tetszőleges $z \in T$ pontban akárhányszor deriválható és akárhányad rendű deriváltja az

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi; \quad n = 1, 2, \dots$$

integrálformulával állítható elő (ahol G^+ a G görbe pozitív irányu befutását jelöli).

Bizonyítás

Először belátjuk, hogy az állítás $n=1$ esetén fennáll, azaz tetszőleges $z \in T$ pontban létezik az f függvény első deriváltja, és ez a G görbén felvett kerületi értékek segítségével az

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

integrállal állítható elő.

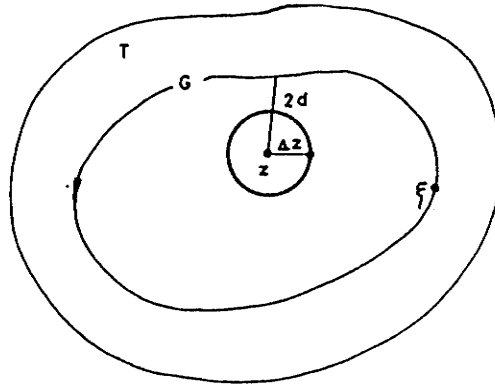
Ennek igazolásául a Cauchy-integrálformula felhasználásával kimutatjuk, hogy a z pontbeli differencia-hányadosnak a feltételezett differenciálhányadostól való eltérése a 0-hoz tart. Ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - (z+\Delta z)} d\xi - \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} d\xi \end{aligned}$$

ugy, hogy

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi) [\xi - z] - f(\xi) [\xi - z - \Delta z]}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)^2} d\xi \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi) \cdot \Delta z}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} |\Delta z| \oint_G \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)^2} \right| |d\xi| \leq \\ &\leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \frac{M}{4d^3} \int_G |d\xi| = \frac{M \cdot S}{8\pi d^3} |\Delta z|, \end{aligned}$$

ami 0-hoz tart, ha $\Delta z \rightarrow 0$. Ebben a becslésben szereplő betűk értelme:



71. ábra

M: f -nek a G görbén felvett maximuma (ami létezik, mert f folytonos T -ben és így korlátos G -n);
 $2d$: a z pontnak a G görbétől való legkisebb távolsága (ld. 71. ábra).

Ha feltételezzük, hogy $|\Delta z| < d$, akkor a G görbén levő valamennyi ξ -ra $|\xi - z|^2 \geq (2d)^2$ és $|\xi - z - \Delta z| > d$, úgy hogy szorzatuk reciproka $< \frac{1}{d(2d)^2}$

$$S = \oint_G |d\xi| : \text{a } G \text{ görbe ívhossza.}$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{1!}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Teljes indukcióval belátható, hogy f akárhányad rendű deriváltja létezik és azt tetszőleges $z \in T$ -re az

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

integrál formula állítja elő. $\square$

Megjegyzés

1. Az n -edik deriváltat előállító integrál a Cauchy-integrál-formulának a z paraméter szerinti n -szeres differenciálásával adódik. Azaz:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi = \frac{n!}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \end{aligned}$$

2. A 2.2.1. Tétel akkor is érvényes, ha a differenciálható függvény egy Cauchy-típusú integrállal (azaz nyílt görbe menti integrállal) előállított függvény. Tehát ha f folytonos egy L rektifikálható, nyílt görbén, akkor a

$$\varphi(z) = \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

függvény reguláris és akárhányad rendű deriváltja létezik minden olyan véges z pontban, amely nincs az L görbén és ott

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

egy reguláris függvény n -ed rendű deriváltjának integrál-előállítás, függetlenül attól, hogy C nyílt vagy zárt görbe.

3. A 3.3.2. Tétel következménye: ha f reguláris egy T tartományon, akkor ott akárhányadik deriváltja is reguláris.

4. A 3.3.2. Tétel alapján egyszerűen határozhatók meg

$$\oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

típusú integrálok, éspedig:

$$\oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

feltéve, hogy f reguláris G -n és az általa határolt T tartományon, és $a \in T$.

5. A 2.2.1. Tétel segítségével igazolható a Cauchy-integrál tétel (az 1.3.1. Tétel) megfordítása:

Morera-tétel

Ha f folytonos egy egyszeresen összefüggő T tartományon és bármely $G \in T$ rektifikálható zárt görbére

$$\oint_G f(z) dz = 0,$$

akkor f reguláris T -ben.

E tétel igazolására itt nem térünk ki.

2.3. A CAUCHY-INTEGRÁL-FORMULA NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYE

Az alábbiakban ismertetjük a reguláris komplex függvény néhány - a Cauchy-integrál-formulával egyszerűen igazolható - alapvető tulajdonságát.

a) Cauchy-egyenlőtlenségek

(Deriváltak abszolútértékének becslése)

A Cauchy-integrál-formula triviális következménye a reguláris komplex függvény és deriváltjainak abszolútértékére vonatkozó alábbi becslés:

2.3.1. Tétel

Ha a z_0 középpontu R sugaru K_R kör belsejével együtt belemegy az f komplex függvény regularitási tartományába, akkor

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{M(R) \cdot n!}{R^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol $M(R)$ az $|f|$ függvény K_R körön felvett értékeinek a maximuma.

Bizonyítás

A reguláris f függvény n -edik deriváltjának z_0 pontbeli értékét a Cauchy-integrál-formulával kifejezve, majd abszolútértékét véve:

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z_0) \right| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{K_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{K_R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|^{n+1}} |d\xi| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M(R)}{R^{n+1}} \oint_{K_R} |d\zeta| = \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M(R)}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R.$$

Azaz

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! \cdot M(R)}{R^n}$$

az állításnak megfelelően. $\square$

b) Liouville-tétel

(Mindenütt reguláris függvény egy tulajdonsága)

A komplex analízisben fontos szerepet játszanak a mindenütt differenciálható (azaz: mindenütt reguláris) függvények, mint pl. e^z , $\sin z$, $\cos z$ stb. Ezek a függvények - a mindenütt differenciálható valós változós függvényekkel ellentétben - $z \rightarrow \infty$ esetén nem lehetnek korlátosak. A komplex függvények ezen alapvető tulajdonságát fejezi ki a

2.3.2. Tétel

Ha az f komplex függvény reguláris és korlátos az egész komplex síkon, akkor állandó.

Bizonyítás

Mivel f korlátossága miatt van olyan M konstans, hogy az egész síkon

$$|f(z)| < M,$$

ezért a sík bármely z_0 pontja és bármely $R > 0$ esetén

$$\max_{|z-z_0|=R} |f(z)| = M(R) \leq M.$$

Ennek, valamint az első derivált abszolútértékére vonatkozó Cauchy-féle becslésnek a felhasználásával:

$$\left| f'(z_0) \right| \leq \frac{M(R)}{R} \leq \frac{M}{R} \quad (0 < R < \infty)$$

és így

$$f'(z_0) = 0.$$

Mivel z_0 tetszőleges volt, ezért

$$f'(z) = 0$$

az egész síkon, ami csak úgy lehet, ha

$$f(z) \equiv \text{constans}$$

az egész síkon. $\square$

c) Gauss-féle középérték-tétel

A Cauchy-integrál-formula azt állítja, hogy egy zárt tartományon reguláris komplex függvény értéke a tartomány bármely belső pontjában előállítható a határgörbén felvett értékek alkalmas átlagolásával. Ennek speciális eseteként adódik a reguláris komplex függvény egy nevezetes középérték-tulajdonsága:

2.3.3. Tétel

Ha f reguláris egy K körön és annak belsejében, akkor a kör középpontjában felvett függvényérték a kör kerületén felvett függvényértékek integrál közepe. Azaz

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_K f(\zeta) ds,$$

ahol z_0 a K kör középpontja, R a sugara és ds az ívhossz szerinti integrálást jelöli.

Bizonyítás

A Cauchy-integrál-formula értelmében a K kör z_0 középpontjában a függvényérték:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Mivel a K körön

$$\zeta = z_0 + R e^{j\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

ezért

$$\begin{aligned}
 f(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{j\varphi})}{Re^{j\varphi}} \cdot Re^{j\varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + Re^{j\varphi}) d\varphi,
 \end{aligned}$$

illetve $\zeta = z_0 + Re^{j\varphi}$, $s = R\varphi$ jelöléssel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_K f(\zeta) ds$$

az állításnak megfelelően. $\square$

d) Maximum-minimum tétel

A Cauchy-egyenlőtlenség az $n = 0$ esetben azt állítja, hogy

$$|f(z_0)| \leq M(R).$$

Azaz: ha egy kör a belsejével együtt az f függvény regularitási tartományában fekszik, akkor $|f|$ a kör középpontjában nem lehet nagyobb, mint a kör kerületén felvett maximuma. Bebizonyítható egy ennél pontosabb állítás:

2.3.4. Tétel (Maximum-elv)

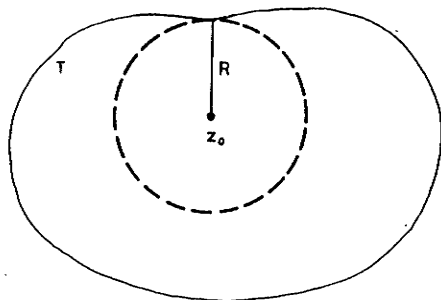
Ha az f komplex függvény egy korlátos, zárt $\bar{T}$ tartományon reguláris és nem állandó, akkor a $\bar{T}$ -ben folytonos, valós értékű $|f|$ függvény maximumát nem veheti fel $\bar{T}$ belsejében, csak a határán.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $|f|$ egy z_0 belső pontban maximális. Kimutatjuk, hogy ez csak akkor lehet igaz, ha f konstans az egész T tartományon.

Ezt az állítást - az általánosság megszorítása nélkül - elég egy olyan z_0 körüli maximális R sugaru körtartományra igazolni, amely

teljes egészében $\bar{T}$ belsejében fekszik (ld. 72. ábra). Tegyük fel, hogy $f(z_0) \neq 0$ (mert akkor az állítás triviális), használjuk fel a 2.3.3. Tétel bizonyítása során adódó



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{j\varphi}) d\varphi ;$$

$$(0 < r < R)$$

összefüggést és értelmezzük a

72. ábra

$$g(\varphi) = \operatorname{Re} \left[\frac{f(z_0 + re^{j\varphi})}{f(z_0)} \right], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

függvényt, amely a $[0, 2\pi]$ intervallumban folytonos és értéke ≤ 1 (hiszen $|f|$ a z_0 pontban maximális). L. zel

$$\int_0^{2\pi} [1 - g(\varphi)] d\varphi = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{f(z_0 + re^{j\varphi})}{f(z_0)} \right] d\varphi =$$

$$= \operatorname{Re} \left[2\pi - \frac{1}{f(z_0)} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{j\varphi}) d\varphi \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[2\pi - \frac{1}{f(z_0)} \cdot 2\pi f(z_0) \right] = 0$$

amiből következik, hogy $\varphi \in [0, 2\pi]$ -ben $g(\varphi) \equiv 1$, (hiszen a nem-negatív és folytonos $1 - g(\varphi)$ függvény integrálja csak úgy lehet zérus, ha $1 - g(\varphi) = 0$, azaz, ha $g(\varphi) \equiv 1$).

Mivel a $(0, R)$ intervallumban r választása tetszőleges, ezért $\operatorname{Re} f$ állandó a $|z - z_0| < R$ körlepton, amiből következik, hogy ott f is állandó, ami ellentmond a tételbeli feltételnek. (Itt felhasználtuk azt a

Cauchy-Riemann egyenletekkel egyszerűen belátható tény: hogy ha f reguláris egy T tartományon és ott $\operatorname{Re} f$, vagy $\operatorname{Im} f$ állandó, akkor f is állandó).

A korlátos, zárt $\bar{T}$ tartományon az $|f|$ kétváltozós, folytonos valós függvény a maximumát valahol felveszi. Ha a függvény nem állandó, akkor a maximum-hely belső pont nem lehet, ezért az szükségképpen határpont. $\square$

Hasonló állítás érvényes a reguláris f függvény abszolút értékének minimumára is:

2.3.5. Tétel

Ha f egy korlátos zárt tartományon reguláris és ott $f \neq 0$, akkor $|f|$ a minimumát csak T határán veheti fel.

Bizonyítás

Mivel a $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ függvény teljesíti a maximum tétel feltételeit, ezért $\frac{1}{|f|}$ a maximumát és így vele együtt $|f|$ a minimumát csak T határán veheti fel. $\square$

2.4. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{e^{2z}}{z^2 + 3z - 4} dz$$

integrál értékét, ha G az $x = \pm 3$ és $y = \pm 2$ egyenesek által határolt, pozitív irányítású téglalap.

Az integrálandó függvény nem reguláris a nevező gyökhelyein: a $z = 1$ és $z = -4$ pontokban, de közülük csak a $z = 1$ esik G belsejébe. Az integrálandó függvényt átalakítva:

$$\oint_G \frac{e^{2z}}{z^2 + 3z - 4} dz = \oint_G \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+4)} dz = \oint_G \frac{\frac{e^{2z}}{z+4}}{z-1} dz$$

adódik. Mivel az utolsó integrál számlálójában szereplő függvény G belsejében reguláris, ezért az integrál értékének meghatározására alkalmazható a Cauchy integrálformula. Tehát:

$$\oint_G \frac{e^{2z}}{z^2 + 3z - 4} dz = 2\pi j \left[\frac{e^{2z}}{z+4} \right]_{z=1} = \frac{2\pi j}{5} e^2.$$

2. Határozzuk meg a

$$\oint_G \frac{\sin z}{(z-j)^2 (z-2)} dz$$

integrál értékét, ha G a pozitív irányítású $|z-1| + |z+1| = 6$ egyenletű görbe.

A G görbe a $z = 1$ és $z = -1$ fókuszú, $a = 3$ és $b = \sqrt{8}$ féltengelyű ellipszis. Az integrálandó függvény nem reguláris a G belsejében levő $z = j$ és $z = 2$ pontokban, így a Cauchy-integrál-tétel értelmében a G menti integrál értéke megegyezik a $z = 2$ ill. $z = j$ középpontú K_1 és K_2 körök menti integrálok összegével (ld. 73. ábra). Azaz:

$$\begin{aligned} \oint_{G^+} \frac{\sin z}{(z-j)^2 (z-2)} dz &= \oint_{K_1^+} \frac{\sin z}{(z-j)^2 (z-2)} dz + \oint_{K_2^+} \frac{\sin z}{(z-j)^2 (z-2)} dz = \\ &= \oint_{K_1^+} \frac{\frac{\sin z}{(z-j)^2}}{z-2} dz + \oint_{K_2^+} \frac{\frac{\sin z}{z-2}}{(z-j)^2} dz = \\ &= 2\pi j \left[\frac{\sin z}{(z-j)^2} \right]_{z=2} + \frac{2\pi j}{1!} \left[\frac{d \left(\frac{\sin z}{z-2} \right)}{dz} \right]_{z=j} = \\ &= \frac{2\pi j}{(2-j)^2} \sin 2 + 2\pi j \frac{(j-2) \cos j - \sin j}{(j-2)^2}. \end{aligned}$$

Ugyanis az integrálandó függvényt a fenti módon átalakítva $\frac{\sin z}{(z-j)^2}$ reguláris a K_1 körön, $\frac{\sin z}{z-2}$ pedig a K_2 körön, úgy hogy a K_1 kör menti integrál értéke a Cauchy-integrál-formulával, a K_2 kör menti pedig az első deriváltra vonatkozó általánosított Cauchy-integrál-formulával határozható meg.

3. Állapítsuk meg, hogy hol differenciálható, ill. hol reguláris az

$$f(z) = \int_L \frac{\overline{\sin \xi}}{\xi - z} d\xi$$

Cauchy-típusú integrállal előállított függvény, és ahol differenciálható, ott határozzuk meg $f''(z)$ -t.

Az adott f minden olyan pontban differenciálható, amelyre

$$z \notin L; \quad \xi \notin L; \quad \xi - z \neq 0; \quad \overline{\sin \xi} \quad \text{differenciálható}$$

Mivel a $\overline{\sin \xi}$ függvény valós és képzetes részének parciális váltjaira csak a $z = \frac{\pi}{2}$ pontban teljesülnek a Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletek, ezért f csak a $z = \frac{\pi}{2}$ pontban differenciálható (de ott nem reguláris, mert $z = \frac{\pi}{2}$ -nek nincs olyan környezete, amelyben f differenciálható volna).

A $z = \frac{\pi}{2}$ pontban a második derivált - az általánosított Cauchy-integrálformula értelmében - az integrál alatti függvény z szerinti kétszeri deriválásával adódik. Tehát

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2!}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\sin \xi}}{\left(\xi - \frac{\pi}{2}\right)^3} d\xi.$$

4. Határozzuk meg integrálás nélkül az

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} + 2e^{j\varphi} \right) d\varphi$$

értékét.

Az integrálandó függvény felfogható a $\sin^2 z$ függvény $z_0 = \frac{\pi}{6}$ középpontu, $R = 2$ sugarú körön felvett függvényértékének és így a Gauss-féle középérték-tétel értelmében:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} + 2e^{j\varphi} \right) d\varphi = 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

5. Határozzuk meg az

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

függvény abszolútértékének maximumát a $|z| \leq 1$ körtartományon.

Az adott függvény reguláris a $|z| \leq 1$ körtartományon és így a maximum-tétel értelmében abszolútértéke a $|z| = 1$ egyenletű körön veszi fel a legnagyobb értékét.

A komplex szám exponenciális alakjának felhasználásával a függvény abszolútértéke az egységgörön:

$$|f(z)| = 14 - 9(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) + 2(e^{2j\varphi} + e^{-2j\varphi})$$

ahol $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ill. az Euler-formulával kifejezve:

$$|f(z)| = 14 - 18 \cos \varphi + 4 \cos 2\varphi.$$

Könnyen belátható, hogy ennek maximuma a

$$\varphi = \pi$$

helyen, azaz a z sík $(-1, 0)$ pontjában van.

Hatodik fejezet
KOMPLEX FÜGGVÉNYEK SORA

Ebben a fejezetben a függvénysor-elméletet terjesztjük ki komplex változóra. Mivel a komplex függvénytanban fontos szerepük van a reguláris függvénysoroknak, és közülük is elsősorban a hatványsoroknak, ezért részletesebben ezekkel foglalkozunk.

A hatványsor-elmélet szükséges egyrészt a komplex függvények alapvető tulajdonságainak megismeréséhez, másrészt gyakorlati problémák megoldásához. Így többek között a hatványsorelmélet komplex változóra való kiterjesztése révén válik lehetővé a hatványsorok speciális konvergencia-tulajdonságainak mélyebb megértése, ami valós változó esetén nem volt olyan világos. E kiterjesztés révén tárulnak fel az elemi függvények között fennálló olyan kapcsolatok, amelyeknek létezése valós változó esetén nem volt felismerhető (pl. a trigonometrikus függvények és az exponenciális függvény között fennálló - az Euler-formulából is következő -

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} ; \quad e^{jz} = \cos z + j \sin z \quad \text{stb. kapcsolatok). E kiterjesztés révén ismerhető meg a hatványsorok és a hatványsorba fejthető}$$

un. analitikus függvények sok olyan tulajdonsága, amely valós változó esetén nem áll fenn (pl. hogy a hatványsorba fejthetőségből következik a komplex függvény regularitási tartományának kiterjesztése, a függvény un. analitikus folytatása). E kiterjesztés révén - a differenciálegyenletek megoldásának hatványsoros előállításánál - tárulnak fel meglepő összefüggések a differenciálegyenletek különböző megoldás-csoportjai között stb.

Az alábbiakban - a hatványsorelmélet komplex változóra való kiterjesztése előtt - rövid áttekintést adunk a komplex tagu általános függvénysorok elméletéről.

1.§ KOMPLEX TAGÚ FÜGGVÉNYSOROK

1.1. ÁLTALÁNOS KOMPLEX FÜGGVÉNYSOROK

Komplex függvénysornak nevezünk olyan végtelen sort, amelynek tagjai komplex függvények.

Jelölésére az

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

szimbólumot használjuk, függetlenül attól, hogy létezik-e a végtelen sok tagu összeg vagy sem.

A valós tagu függvénysorokra vonatkozó alapfogalmak és tételek legtöbbje kiterjeszthető komplex taguakra is. Közülük a legalapvetőbbeket az alábbiakban soroljuk fel:

(1) A valóssal analóg módon értelmezhető:

- (a) értelmezési-tartományuk (amely az $f_k(z)$; $k=1, 2, \dots$ függvények értelmezési tartományainak közös része);
- (b) konvergencia-tartományuk;
- (c) összeg-függvényük:

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(z)$$

(d) Közöséges-, abszolút- és egyenletes-konvergenciájuk:

$$\sum_{k=1}^n f_k(z) \Rightarrow S(z), \quad \text{azaz} \quad \left| \sum_{k=1}^n f_k(z) - S(z) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon, z);$$

$$\sum_{k=1}^n |f_k(z)| \Rightarrow S^{\Re}(x, y), \quad \text{azaz} \quad \left| \sum_{k=1}^n |f_k(z)| - S^{\Re}(x, y) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon, z);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \Rightarrow S(z), \quad \text{azaz:} \quad \left| \sum_{k=1}^n f_k(z) - S(z) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

(2) A valóssal analóg módon fogalmazhatók meg (és az $f_k(z)$ függvények valós és képzetes részre bontása után a valóssal analóg módon igazolhatók) a különböző konvergencia-feltételek:

(a) a közönséges konvergencia szükséges feltétele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0;$$

(b) a közönséges konvergencia Cauchy-féle szükséges és elégséges feltétele:

$$|s_n(z) - s_m(z)| < \varepsilon; \quad \text{ha } m, n > N(\varepsilon, z),$$

ahol $s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ a komplex függvénysor n -edik részletösszege;

- (c) a közönséges konvergencia elégséges feltétele (a sor abszolút konvergenciája);
- (d) az abszolút konvergencia elégséges feltételei (összehasonlító-, hányados-, gyökkritérium stb.);
- (e) az egyenletes konvergencia Cauchy-féle szükséges és elégséges feltétele:

$$|s_n(z) - s_m(z)| < \varepsilon, \quad \text{ha } m, n > N(\varepsilon);$$

(f) az egyenletes konvergencia Weierstrass-féle elégséges feltétele

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)| \text{ függvénysort majoráló } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

numerikus sor konvergenciája).

(3) A valóssal analóg módon végezhetők konvergens komplex függvénysorokkal algebrai műveletek és érvényesek rájuk az ott megismert tételek (a sorok tagjaival végzett algebrai műveletek megegyeznek az összegfüggvényekkel végzett megfelelő műveletekkel).

(4) A valóssal analóg módon végezhető egyenletesen konvergens függvénysorokkal függvénytan műveletek és érvényesek rájuk az ott megismert tételek

(a tagok folytonosságát, integrálhatóságát, differenciálhatóságát "örökli" az összegfüggvény).

Ez utóbbi tételeket - fontosságukra és gyakori alkalmazásukra való tekintettel - megfogalmazzuk komplex függvénysorokra, de közülük csak a differenciálhatóságra vonatkozót igazoljuk, mert egyedül annak a feltételei térnek el a valós függvénysor megfelelő tételének feltételeitől.

1.1.1. Tétel

A folytonos $f_k(z)$; $k = 1, 2, \dots$ függvények T tartományon egyenletesen konvergens sorának $S(z)$ összegfüggvénye is folytonos T -n.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} S(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} f_k(z) = S(z_0)$$

minden $z_0 \in T$ -re.

Azaz: az egyenletes-konvergencia-tartományban az összegezés és a határértékképzés sorrendje felcserélhető.

1.1.2. Tétel

Az L rektifikálható görbe pontjaiban folytonos $f_k(z)$ függvények egyenletesen konvergens sorának $S(z)$ összegfüggvénye integrálható L -en és értéke megegyezik a tagonkénti integrálok összegével:

$$\int_L S(z) dz = \int_L \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \right] dz = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_L f_k(z) dz \right].$$

Azaz: az egyenletes konvergenciatartományban az összegezés és az integrálás sorrendje felcserélhető.

1.1.3. Tétel

A T tartományon reguláris $f_k(z)$ függvények $\bar{T}^* \subset T$ zárt tartományon egyenletesen konvergens sorának $S(z)$ összegfüggvénye a $\bar{T}^*$ -on:

- reguláris,
- akárhányszor differenciálható, és az $S^{(n)}(z)$; $n = 1, 2, \dots$ differenciálhányadosok megkaphatók a sor tagonkénti differenciálásával:

$$S^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

c) a kapott sorok egyenletesen konvergensek.

Tehát: az egyenletes konvergencia-tartományban az összegezés és a differenciálás sorrendje felcserélhető.

Bizonyítás

(a) Az összegfüggvény T^* -beli regularitásának igazolása:

Legyen z a G^* határu $\bar{T}^* \subset T$ tartomány tetszőleges belső pontja és ξ a G^* görbe tetszőleges pontja (ld. 73. ábra).

A függvénytör $\bar{T}^*$ -beli egyenletes konvergenciájából következik, hogy a G^* határgörbén az

$$\frac{S(\xi)}{\xi - z} = \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} + \frac{f_2(\xi)}{\xi - z} + \dots$$

sor is egyenletesen konvergens, ezért ott tagonként integrálható és

$$\oint_{G^*} \frac{S(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_{G^*} \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi + \oint_{G^*} \frac{f_2(\xi)}{\xi - z} d\xi + \dots$$

Mivel az $f_k(z)$ függvények $\bar{T}^*$ -ban regulárisak, ezért a jobb oldali integrálok a Cauchy-integrálformula segítségével számíthatók:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{G^*} \frac{S(\xi)}{\xi - z} d\xi = f_1(z) + f_2(z) + \dots = S(z).$$

Az $S(z)$ függvény - mint a reguláris (tehát egyuttal folytonos) $f(z)$ függvények egyenletesen konvergens sorának összege - a G^* görbén folytonos és így az $S(z)$ függvényt előállító

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{G^*} \frac{S(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

integrál Cauchy-típusú integrál. Ebből következik, hogy $S(z)$ a $\bar{T}^*$ zárt tartomány z pontjában reguláris. Mivel megfontolásaink $\bar{T}^*$ bármely

pontjára fennállnak, ezért $S(z)$ a T^* tartományon mindenütt reguláris.

b) Az összegfüggvény akárhányszori tagonkénti differenciálhatóságának igazolása:

A T^* zárt tartományon

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \Rightarrow S(z),$$

ezért a G^* görbén az

$$\frac{S(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} = \frac{f_1(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} + \frac{f_2(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} + \dots + \frac{f_k(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} + \dots$$

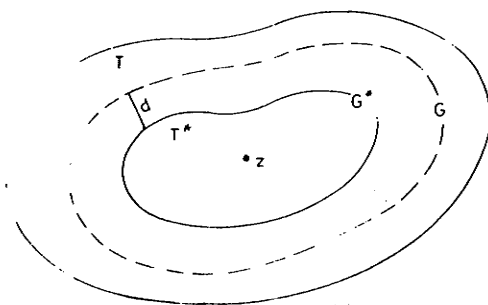
sor is egyenletesen konvergens, így ott tagonként integrálható és

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_{G^*} \frac{S(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \oint_{G^*} \frac{f_k(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi.$$

Mivel $S(z)$ és az $f_k(z)$ T -ben regulárisak, ezért a reguláris függvények magasabb rendű deriváltjaira vonatkozó formulák értelmében:

$$S^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

mint ahogy azt állítottuk.



73. ábra

c) A $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ sor $T^* \subset T$ -

beli egyenletes konvergenciájának igazolása:

Legyen

G : a T és T^* tartományok határai között haladó zárt görbe,

d : a T^* és G pontjai közötti legkisebb távolság,

z : a T^* zárt tartomány tetszőleges pontja,

ξ : a G görbe tetszőleges pontja (ld. 73. ábra).

A $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ sor T bármely zárt résztartományában - tehát a

G görbén is - egyenletesen konvergens és így bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan - G pontjaitól független - $N = N(\varepsilon)$ egész szám, hogy $m > N$ esetén minden ζ -ra

$$|S(\zeta) - s_m(\zeta)| < \varepsilon.$$

Felhasználva, hogy

$$|\zeta - z| \geq d$$

és alkalmazva az integrálbecslő tételt:

$$\left| S^{(n)}(z) - s_m^{(n)}(z) \right| = \frac{n!}{n!} \left| \oint_G \frac{S(\zeta) - s_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{\varepsilon \cdot \ell}{d^{n+1}},$$

ahol ℓ a G görbe ívhossza. Mivel ez az egyenlőtlenség minden $m > N$ esetében a $\bar{T}^*$ zárt tartomány minden pontjában teljesül és

$$\frac{n!}{2\pi} \frac{\varepsilon \cdot \ell}{d^{n+1}} = \varepsilon^*$$

tetszőleges kis érték, ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ sor $\bar{T}^*$ -ban egyenletesen konvergens. $\square$

1.2. KOMPLEX TAGU HATVÁNYSOROK

A komplex függvénysorok egyik - az alkalmazásokban is fontos szerepet játszó - speciális esete a komplex hatványsor. Ez olyan függvénysor, amelynek tagjai az

$$f_k(z) = c_k(z - z_0)^k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

függvények, ahol c_k : konstans; a függvénysor együtthatója, és z_0 : a komplex sík egy rögzített pontja, a hatványsor bázispontja

A hatványsor - mint a függvénytanilag legegyszerűbben kezelhető függvénysor - igen egyszerű konvergencia-tulajdonsága. Míg az általános komplex függvénysor konvergencia-pontjainak halmaza (amelynek meghatáro-

zása általában bonyolult feladat) a legkülönbözőbb típusu lehet (pl. egy vagy több összefüggő pontthalmaz; egy vagy több olyan pontthalmaz, amely megszámlálható vagy meg nem számlálható pontból áll stb.), addig a hatványsor konvergencia-tartománya:

vagy egy kör belseje,
vagy egy kör külsője,
vagy egy körgyűrű,

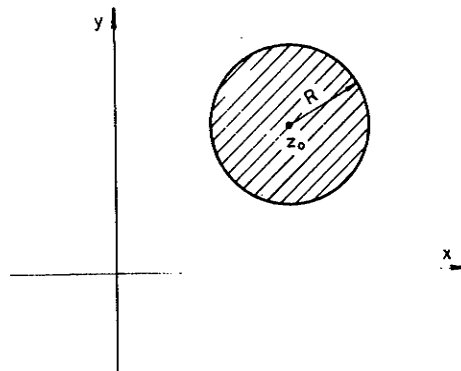
aszerint, hogy a hatványsor vagy csak pozitív, vagy csak negatív, vagy pozitív és negatív kitevőjű tagokat is tartalmaz. Az ezekre vonatkozó tételeket ismertetjük az alábbiakban.

I. A pozitív kitevőjű hatványsor konvergenciájára vonatkozik

1.2.1. Tétel

Tetszőleges pozitív kitevőjű z_0 bázispontu hatványsor

- (1) vagy csak a z_0 pontban,
- (2) vagy egy $|z - z_0| < R$ körlapon (amelyhez esetleg a határkör vagy annak egy részhalmaza is járul),
- (3) vagy az egész komplex síkon konvergens (ld. 74. ábra).



74. ábra
Pozitív kitevőjű hatványsor
konvergencia-tartománya

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ hatványsor valamely $z_1 \neq z_0$

pontban konvergens. Ekkor - az abszolút konvergenciát eldöntő - gyök-kritérium értelmében:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (z_1 - z_0)^n|} \leq 1,$$

amiből egyben az is következik, hogy az $\left(|a_n|^{1/n} \right)$ számsorozat felülről korlátos, azaz

$$K = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} < \infty.$$

Igy a komplex sík bármely z pontjára

$$\overline{\lim} |a_n (z - z_0)^n|^{1/n} = K |z - z_0|,$$

amely K értékétől függően különböző konvergencia-tartományt jelent:

a) Ha $K = 0$, akkor a hatványsor minden z -re konvergens, amivel a tétel (3) állítása teljesül;

b) ha $0 < K < \infty$, akkor a hatványsor $|z - z_0| < \frac{1}{K}$ -ra konvergens, (sőt abszolút konvergens) és $|z - z_0| > \frac{1}{K}$ -ra divergens. Így az $R = \frac{1}{K}$ választással a tétel (2) állítása teljesül;

c) ha $K = \infty$, akkor a hatványsor csak a z_0 pontban konvergens, amivel a tétel (1) állítása teljesül. $\square$

A tételben szereplő R szám a pozitív kitevőjű hatványsor konvergencia-sugara. Az (1) esetre az $R = 0$; a (3) esetre az $R = \infty$ definíciót használva, a pozitív kitevőjű komplex hatványsor konvergencia-sugarára az

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\text{ha } \exists \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}),$$

ill. a gyök-kritériumnál gyengébb hányados kritérium felhasználásával az

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

formula adódik.

A hatványsor a $|z - z_0| = R$ körön a legkülönbözőbb módon viselkedhet: lehet pl., hogy a kör egyetlen pontjában sem konvergens; lehet, hogy egyes pontjaiban (esetleg csak egy pontjában) konvergens; lehet, hogy minden pontjában konvergens (ld. 1.3. fejezet, 2. pl.).

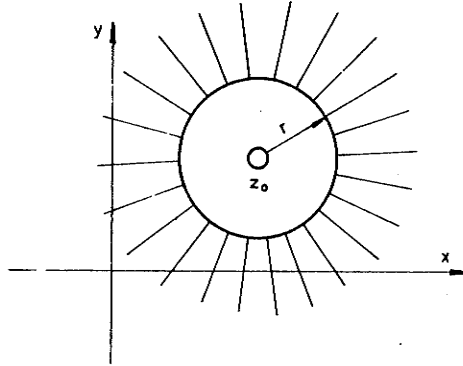
II. A negatív kitevőjű ("reciprok") hatványsor konvergenciájára vonatkozik

1.2.2. Tétel

Tetszőleges negatív kitevőjű, z_0 bázispontu hatványsor

- (1) vagy egyetlen z pontban sem,
- (2) vagy egy $|z - z_0| > r$ kör-külső pontjaiban (esetleg a körvonal bizonyos pontjaiban is),
- (3) vagy minden $z \neq z_0$ pontban konvergens.

(ld. 75. ábra).



75. ábra

Negatív kitevőjű hatványsor konvergencia-tartománya

Bizonyítás

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \text{ reciprok hatványsor a}$$

$$\xi = \frac{1}{z - z_0}$$

helyettesítéssel a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n$$

pozitív kitevőjű hatványsorba megy át, amely

$$(1) \text{ vagy csak a } \xi = \frac{1}{z - z_0} = 0 \text{ pontban}$$

(azaz egyetlen végesben levő z pontban sem);

$$(2) \text{ vagy a } |\xi| = \frac{1}{|z - z_0|} < R \text{ körben}$$

$$(\text{azaz } |z - z_0| > \frac{1}{R} = r \text{ kör-külsőben});$$

$$(3) \text{ vagy minden } \xi = \frac{1}{z - z_0} \text{ pontban}$$

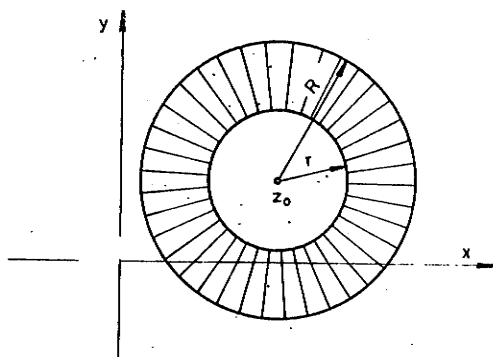
(azaz: minden $z \neq z_0$ pontban) konvergens. $\square$

III. A pozitív és negatív kitevőjű tagokat is tartalmazó ("kombinált") hatványsor konvergenciájára vonatkozik

1.2.3. Tétel

Tetszőleges - pozitív és negatív kitevőjű tagokat is tartalmazó - hatványsor

- (1) vagy egyetlen z pontban sem;
- (2) vagy egy $r < |z - z_0| < R$ körgyűrű pontjaiban (esetleg határának egyes pontjaiban is);
- (3) vagy minden $z \neq z_0$ pontban konvergens (ld. 76. ábra).



76. ábra

"Kombinált" hatványsor konvergencia-tartománya

Bizonyítás

A

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

kombinált hatványsor pozitív kitevőjű része egy $|z - z_0| < R$ kör-belsőben; negatív kitevőjű része egy $|z - z_0| > r$ körkülsőben konvergens. E tartományok közös része (amennyiben az létezik) a kombinált hatványsor konvergencia-tartománya. Éspedig:

(a) ha $r > R$,

akkor a kombinált hatványsor egyetlen z -re sem konvergens (azaz: a tétel (1) állítása teljesül);

(b) ha $0 < r < R$,

akkor a kombinált hatványsor az $r < |z - z_0| < R$ körgyűrűben konvergens (azaz: a tétel (2) állítása teljesül);

(c) ha $r = 0$ és $R = \infty$,

akkor a hatványsor a z_0 ponttól megfosztott teljes komplex síkon konvergens (azaz a tétel (3) állítása teljesül). $\square$

A hatványsor konvergenciájának természetéről ad felvilágosítást:

1.2.4. Tétel
Abel-tétel

Ha egy pozitív kitevőjű z_0 bázispontu hatványsor konvergens valamely $z_1 \neq z_0$ pontban, akkor

a) abszolút konvergens minden olyan z pontban, amelyre

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|,$$

b) egyenletesen konvergens bármely

$$|z - z_0| \leq \varrho < |z_1 - z_0|$$

zárt tartományban.

Bizonyítás

a) A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ hatványsor z_1 pontbeli konvergenciájából következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z_1 - z_0)^n = 0.$$

Mivel minden konvergens sor általános tagja korlátos, ezért kell lenni olyan $M > 0$ számnak, hogy minden n -re

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| \leq M$$

és így a $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ nyílt körtartományon

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_1 - z_0|^n \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n.$$

Mivel

$$\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1,$$

ezért a hatványsor tagjainak abszolútértékeiből alkotott sort majoráló geometriai sor konvergencia, amiből az eredeti hatványsor $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ nyílt körtartománybeli abszolút konvergenciája következik.

b) Tekintve e nyílt körtartomány bármely $|z - z_0| \leq \varrho < |z_1 - z_0|$ zárt résztartományát, ebben

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\varrho}{z_1 - z_0} \right|^n.$$

Mivel

$$\left| \frac{\varrho}{z_1 - z_0} \right| < 1,$$

ezért a hatványsort majoráló numerikus geometriai sor konvergencia, ami - a Weierstrass-tétel értelmében - a hatványsor $|z - z_0| \leq \varrho$ zárt körtartománybeli egyenletes konvergenciájának elégséges feltétele. $\square$

E tétel következménye

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ hatványsor egy z_1 pontban divergens, akkor divergens minden olyan z pontban, amelyre $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Bizonyítás

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ hatványsor - az állítással ellentétben - konvergens volna egy olyan z pontban, amelyre $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$, akkor az Abel-tétel értelmében konvergens volna a z_1 pontban is, ami ellentmond a tétel feltételének. $\square$

Az Abel-tétel bizonyos értelemben vett általánosítása, a tetszőleges hatványsor konvergencia-természetéről felvilágosítást adó:

1.2.5. Tétel

Tetszőleges (tehát akár pozitív kitevőjű, akár reciproknak, akár kombi-
nált-) hatványsor, konvergencia-tartományának

- a) minden belső pontjában abszolút konvergens;
- b) bármely zárt rész tartományában egyenletesen konvergens.

Bizonyítás

Pozitív kitevőjű hatványsorra a tétel bizonyított. Negatív kitevőjű, valamint kombinált hatványsor esetén a $\sum = \frac{1}{z-z_0}$ helyettesítés után a bizonyítás megegyezik az Abel-tétellel. $\square$

E tétel, valamint a hatványsor azon tulajdonságának figyelembevételével, hogy pozitív kitevőjű tagjai mindenütt; a negatív kitevőjűek pedig a bázispont kivételével mindenütt regulárisak, egyszerűen belátható a hatványsor összegfüggvényének függvénytani tulajdonságait (ill. a hatványsor tagonkénti differenciálhatóságát és integrálhatóságát) kifejező:

1.2.6. Tétel

Tetszőleges (tehát bármelyik típusu) komplex hatványsor f összegfüggvénye a konvergencia-tartományban reguláris függvény, amely

a) a konvergencia-tartomány belsejében akárhányszor differenciálható és

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} \left[a_n (z-z_0)^n \right] \quad (k=1, 2, \dots),$$

ahol a tagonkénti akárhányszor differenciálással nyert sor konvergencia-tartománya megegyezik az eredeti soréval;

b) a konvergencia-tartomány belsejében haladó bármely rektifikálható L görbe mentén integrálható:

$$\int_L f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_L a_n (z-z_0)^n dz \right]$$

és a tagonkénti integrálással nyert sor konvergencia-tartománya megegyezik az eredeti soréval.

Bizonyítás

A tagonkénti differenciálhatóság és a tagonkénti integrálhatóság a függvénysorokra vonatkozó megfelelő tételek - az 1.1.3. és 1.1.2. Tétel - következménye.

Hogy a tagonkénti differenciálással és a tagonkénti integrálással nyert sor konvergencia-tartománya azonos az eredeti soréval az - pozitív kitevőjű hatványsor esetén - az alábbi módon látható be:

Az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ hatványsor k -adik deriváltja:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_n (z-z_0)^{n-k}$$

Ennek - mint egy $c_n = n(n-1)\dots(n-k+1)a_n$ együtthatóju hatványsornak a konvergencia sugara

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n(n-1)\dots(n-k+1)| \cdot |a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

ami nem más, mint az eredeti hatványsor konvergencia-sugara (itt felhasználtuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n-1)\dots(n-k+1)} = 1$).

Hasonló módon látható be, hogy a tagonkénti integrálással nyert hatványsornak is ugyanez a konvergencia-sugara.

Negatív kitevőjű (ill. kombinált) hatványsorra az igazolásokat nem kell külön elvégezni, hiszen a negatív kitevőjű hatványsor (ill. a kombináltnak negatív kitevőjű része) a $\xi = \frac{1}{z - z_0}$ helyettesítéssel vezethető pozitív kitevőjűre. $\square$

1.3. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg az $\frac{1}{z}$ értékek halmazát, amelyen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{z^n}{z^n}$$

komplex függvény sor konvergens, illetve egyenletesen konvergens.

Alkalmazva a $z = x+jy$ jelölést:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{jn z} + e^{-jn z}}{2n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{jnx-ny} + e^{-jnx+ny}}{2n^3} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}(\cos nx + j \sin nx)}{2n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ny}(\cos nx - j \sin nx)}{2n^3}\end{aligned}$$

E két sor közül az első $y < 0$ esetén, a második pedig $y > 0$ esetén nem lehet konvergens, mert akkor n -edik tagjuk nem tart 0-hoz, és így a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül. Tehát a konvergencia-tartomány nem tartalmazhat olyan z értékeket, amelyeknek képzetes része vagy < 0 vagy > 0 .

Ha $y = 0$, azaz ha $z = x$ valós érték, akkor az eredeti sor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

alakot ölti. Mivel minden x -re

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

és a majoráló numerikus sor konvergens, ezért - a Weierstrass-tétel értelmében - az adott sor a valós tengely pontjaiban nemcsak konvergens, hanem egyenletesen konvergens.

2. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

hatványsorok konvergencia-sugarát és vizsgáljuk konvergencia-viselkedésüket a határkörön.

a) Az első sor konvergencia-sugara:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Mivel a $|z| = 1$ egyenletű kör pontjaira

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n| = 1 \neq 0,$$

ezért ez a sor a határkör egyetlen pontjában sem konvergens.

b) A második sor konvergencia-sugara:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = 1.$$

A $z = +1$ pontban a sor - mint ismeretes - divergens, a konvergencia-kör minden más pontjában konvergens.

Ugyanis:

(1) Ha $|z| = 1$, de $z \neq +1$, akkor

$$|1 + z + z^2 + \dots + z^n| = \left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|},$$

azaz a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sor részletösszegei korlátosak;

(2) Az $\left(\frac{1}{n}\right)$ számsorozat monoton csökkenve a 0-hoz tart.

(1) és (2)-ből pedig következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

sor konvergens.

Felhasználtuk a numerikus sorok elméletéből ismert alábbi tételt:

Ha

$$\left. \begin{array}{l} s_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ korlátos} \\ b_{n-1} > b_n; \quad b_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \text{ konvergens,}$$

és

c) A harmadik sor konvergencia-sugara:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = 1$$

Ez a sor a konvergencia-kör minden pontjában (ami a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor) konvergens; a $|z|=1$, $z \neq +1$ pontokban pedig a b) sor konvergencia-eldöntésénél felhasznált tétel értelmében konvergens.

3. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-z_0)^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} (z-z_0)^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-z_0)^n$$

pozitív kitevőjű hatványsorok konvergencia-tartományait.

a) Az első hatványsor a $|z-z_0| < 2$ körtartományon konvergens.

Ugyanis a konvergencia-kör sugara:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n}} = 2.$$

A $|z - z_0| = 2$ körön a sor divergens, mert minden pontjában

$$\left| \frac{1}{2^n} (z - z_0)^n \right| = 1.$$

Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ és így a kör egyetlen pontjában sem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

b) A második hatványsor csak a z_0 pontban konvergens.

Ugyanis konvergencia-körének sugara:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{n^2}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

c) A harmadik hatványsor minden z -re konvergens.
Ugyanis konvergencia-körének sugara:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}} = \infty.$$

4. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-j)^n}{2^{|n|-1} (n+1)}$$

kombinált hatványsor konvergencia-tartományát.

Az adott hatványsor pozitív kitevőjű tagokat tartalmazó része egy $|z-j| < R$ kör-belsőben konvergens, ahol

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{|n|-1} (n+1)}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{|n|-1}{n}} \sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}} = 2. \end{aligned}$$

A sor negatív kitevőjű tagokat tartalmazó része egy $|z-j| > r$ kör-külsőben konvergens, ahol

$$r = \frac{1}{R} = \frac{1}{2}$$

Igy az adott "kombinált" hatványsor a két sor konvergenciatartományának közös részében, az

$$\frac{1}{2} < |z-j| < 2$$

gyűrűtartományban konvergens.

2.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK HATVÁNYSOROS ELŐÁLLÍTÁSA

Ebben a fejezetben olyan komplex függvények hatványsoros előállításával foglalkozunk, amelyek egy nyílt körlapon vagy egy, a középpontjától megosztott nyílt körlapon regulárisak. Megmutatjuk, hogy egy körlapon reguláris komplex függvény mindig egy pozitív kitevőjű hatványsor összegfüggvénye, míg egy, a középpontjától megosztott körlapon reguláris komplex függvény felfogható két irányból végtelen hatványsor összegfüggvényeként.

Ennek következménye, hogy a pozitív kitevőjű hatványsor (az ún. Taylor-sor) alkalmas reguláris komplex függvény olyan tartománybeli vizsgálatára, amely abban a tartományban nem tartalmaz szinguláris pontot; míg a "kombinált" hatványsor (az ún. Laurent-sor) a reguláris komplex függvény "izolált" szinguláris pont környezetében való vizsgálatát teszi lehetővé.

(f izolált szinguláris pontja z_0 : ha f reguláris z_0 egy átszurt környezetében.)

2.1. TAYLOR SOR. KÖRTARTOMÁNYON REGULÁRIS KOMPLEX FÜGGVÉNY HATVÁNYSOROS ELŐÁLLÍTÁSA

A pozitív kitevőjű komplex hatványsor differenciálhatóságára vonatkozó 1.2.6. Tétel következménye:

2.1.1. Tétel

A $|z - z_0| < R$ körtartományban konvergens pozitív kitevőjű komplex hatványsor összegfüggvénye egyértelműen meghatározza a hatványsor együtthatóit. Éspedig, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z),$$

akkor

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

minden n pozitív egész számra.

Bizonyítás

A hatványsor összegfüggvénye a sor konvergencia-tartományában reguláris függvény. Így, ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z),$$

akkor a hatványsor tagonkénti deriválhatóságának felhasználásával

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n$$

tetszőleges $n=0, 1, 2, \dots$ esetén, amiből az együtthatókra az

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

érték adódik, az állításnak megfelelően.

b) A nyert együtthatók egyértelműek. Ugyanis feltételezve, hogy f két különböző együtthatóju z_0 bázispontu hatványsor összegfüggvénye:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z) \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = f(z),$$

e sorok együtthatóira - a bizonyítás a) része értelmében -:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{és} \quad b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy

$$a_n = b_n$$

minden $n=0, 1, 2, \dots$ esetén. $\square$

Valósbeli analógiára komplex hatványsorok esetén is bevezethető az alábbi értelmezés:

Definíció

A $|z - z_0| < R$ körtartományban konvergens

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f(z)$$

hatványsor, ahol

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

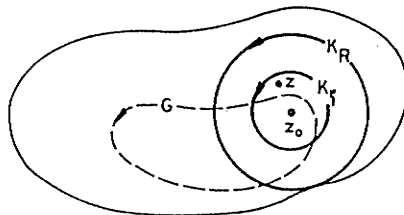
az f komplex függvény z_0 bázispontu Taylor-sora.

Minden pozitív kitevőjű hatványsor a konvergencia-körben reguláris függvényt állít elő. Felmerül a kérdés: az állítás megfordítható-e? Azaz: körtartományon reguláris függvény előállítható-e pozitív kitevőjű hatványsorral, Taylor-sorral? Erre ad választ:

2.1.2. Tétel

Egy $|z - z_0| < R$ körtartományban reguláris f komplex függvény ebben a tartományban egyértelműen állítható elő z_0 bázispontu, pozitív kitevőjű hatványsorral (Taylor-sorral).

Bizonyítás



77. ábra

-integrálformula értelmében:

A $|z - z_0| < R$ körben vegyünk fel egy tetszőleges z pontot és egy olyan z_0 középpontu $\rho < R$ sugaru K_ρ kört, amely z -t a belsejében tartalmazza (ld. 77. ábra). Ilyen K_ρ kör az adott körtartomány bármely z pontjához létezik. Mivel z belső pontja az f regularitási tartományában levő $|z - z_0| < \rho$ körlemeznek, ezért a Cauchy-

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

ahol ξ a pozitív irányítású K_ϱ kör pontjait jelöli. A K_ϱ kör ξ pontjaira és a belsejében levő z pontra

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$$

ugy, hogy az integrálandó függvényre alkalmazható az

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

átalakítás. Mivel a kapott sor a K körön egyenletesen konvergens (mert

$|z - z_0| < \varrho$ miatt majorálható a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\varrho^{n+1}}$ konvergens numerikus sor-

ral), - ami akkor is fennáll, ha a korlátos $f(\xi)$ -vel beszorzunk - ezért az integrálás tagonként végezhető. Ugyhogy:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_\varrho} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_\varrho} \left[f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right] d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \oint_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_\varrho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

jelölést:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

ami azt jelenti, hogy a kiválasztott z pontban f konvergens hatványsorral állítható elő. A c_n együtthatókat meghatározó integrál-formulában - a Cauchy-integrál-tétel értelmében - a K_ϱ kör helyettesíthető a $|z - z_0| < R$ tartományban haladó, a z_0 pontot pozitív irányban egyszer megkerülő tetszőleges rektifikálható zárt görbével. Ezt, valamint a reguláris komplex függvény magasabb rendű deriváltjaira vonatkozó Cauchy-integrál-formulát felhasználva, a z pontban f -hez konvergáló hatványsor együtthatóira a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

formula adódik.

Mivel z az adott tartomány tetszőleges pontja, ezért a fenti hatványsor a $|z - z_0| < R$ körtartomány minden pontjában f -hez konvergál és - az 1.2.5. Tétel b) része értelmében - minden $|z - z_0| \leq \varrho < R$ zárt tartományban egyenletesen konvergál f -hez.

A $|z - z_0| < R$ -ben f -et előállító hatványsor egyértelműsége a 2.1.1 Tétel következménye. $\square$

Az f -et előállító

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

sor az f komplex függvény z_0 körüli Taylor-sorfejtése, maga a hatványsor az f függvény z_0 körüli Taylor-sora.

Megjegyzés

(1) Minden komplex függvény értelmezési tartományának bármely reguláris pontja körül Taylor-sorba fejthető.

(2) A Taylor-sorfejtés egyértelműségének következménye: egy f függvényt, annak z_0 reguláris pontja körül bármilyen módon előállítva pozitív kitevőjű hatványsorral, az a sor az f függvény z_0 bázispontu Taylor-sora (ld. 2.4. fejezet 2. és 3. pl.).

(3) Egy T tartományban reguláris f komplex függvény bármely $z_0 \in T$ pont körüli Taylor-sorának konvergencia-sugara, a z_0 pontnak T határától való legkisebb távolsága:

$$R = \min |\xi - z_0|$$

(ld. 78/a. ábra).

(4) Ha f véges számú $a_1, a_2, \dots, a_k$ pont kivételével reguláris T -ben, akkor bármely reguláris $z_0 \in T$ pont körüli ($z_0 \neq a_i; i = 1, 2, \dots, k$) Taylor-sorának konvergencia-sugara:

$$R = \min (d_1, d_0),$$

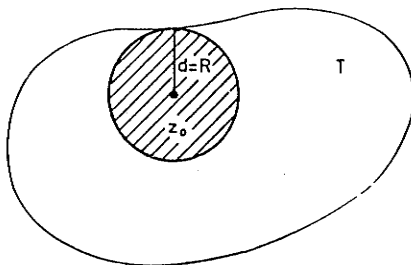
ahol $d_1: z_0$ -nak a hozzá legközelebb eső "szinguláris" ponttól való távolsága és $d_0: z_0$ -nak T határától vett legkisebb távolsága (ld. 78/b. ábra).

(5) A 2.1.2. Tétel kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít egy z_0 pont környezetében reguláris f komplex függvény és a z_0 bázispontu pozitív kitevőjű komplex hatványsor között. Ez azt jelenti, hogy minden reguláris komplex függvény (mint akárhányszor differenciálható függvény), olyan függvénnyel ekvivalens, amely pozitív kitevőjű hatványsor összegeként állítható elő. Többek között ez az oka annak, hogy a komplex elemi függvényeket - mint értelmezési tartományukban mindenütt reguláris függvényeket - szokás hatványsorral is definiálni.

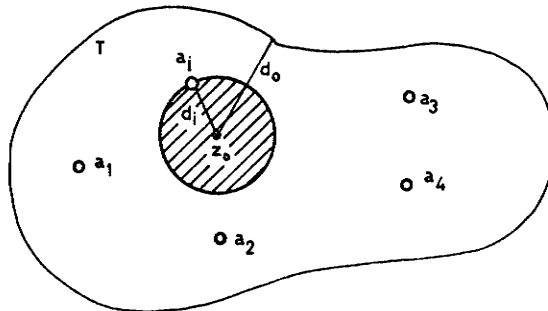
Igy pl. szokásosak a

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}; \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \text{stb.}$$

definíciók (ld. 3.7.f. 3. pl.).



78/a. ábra



78/b. ábra

A komplex függvényeknek ehhez a (gyakorlati problémák megoldásánál is fontos szerepet játszó) tulajdonságához hasonló tulajdonsággal a valós változós függvények nem rendelkeznek. Ha egy valós változós függvény egy $[a, b]$ intervallumban akárhányszor differenciálható, abból még nem következik, hogy az egész intervallumban előállítható konvergens hatványsorral. Például az

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

függvény minden valós x esetén akárhányszor differenciálható, de az $x_0=0$ bázispontu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

hatványsor csak a $-1 < x < 1$ intervallumban - és nem az egész x tengely mentén - konvergál az adott függvényhez.

(6) Az (1) megjegyzés értelmében a $|z - z_0| < R$ körtartományban reguláris f függvény e körtartomány bármely belső pontja körül Taylor-sorba fejthető. E sorfejtésre és az új sor konvergenciakörére utal:

2.1.3. Tétel

(Bázispont-csere tétel)

A $|z - z_0| < R$ körben konvergens (tehát z_0 bázispontu) hatványsor f összegfüggvénye a konvergencia-kör bármely z^* belső pontja - mint új bázispont - körül hatványsorba (Taylor-sorba) fejthető.

Az új sor a $|z - z^*| < |R - z^*|$ körtartomány minden pontjában előállítja f -et és konvergencia-sugara R^* , amelyre

$$R - |z^* - z_0| \leq R^* \leq R + |z^* - z_0|$$

(ld. 79. ábra).

Bizonyítás

A z_0 bázispontu hatványsor f összegfüggvénye $|z - z_0| < R$ minden pontjában reguláris, így bármely $z^* \in |z - z_0| < R$ pont körül Taylor-sorba fejthető.

A hatványsor konvergencia-körének értelmezése alapján a z^* bázispontu hatványsor R^* konvergencia-sugarára

$$R - |z^* - z_0| \leq R^* \leq R + |z^* - z_0|$$

egyenlőtlenség adódik. Ugyanis

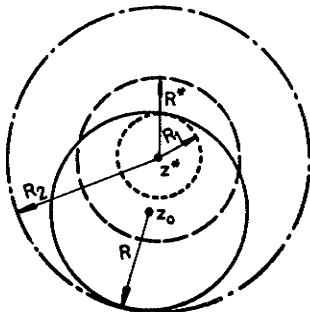
$$R - |z^* - z_0| = R_1$$

a z^* pont körüli azon legnagyobb kör sugara, amely még benne van az eredeti $|z - z_0| < R$ körtartományban;

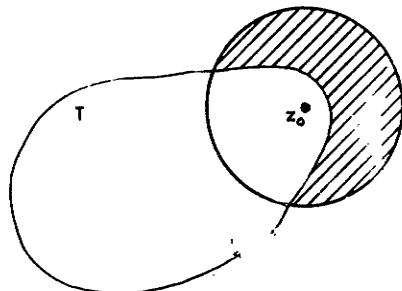
$$R + |z^* - z_0| = R_2$$

pedig azon legkisebb kör sugara, amely teljes egészében tartalmazza az eredeti $|z - z_0| < R$ körtartományt (ld. 79. ábra). $\square$

Vannak olyan pozitív kitevőjű hatványsorok, amelyekre $R^* = R_1$ és vannak olyanok, amelyekre $R^* = R_2$. Ha $R^* > R_1$ akkor az azt jelenti, hogy az új bázispont körüli Taylor-sor konvergencia-tartománya kiterjed az eredeti z_0 pont körüli hatványsor konvergencia-tartományán túlra. Valahányszor egy f függvény új bázispont körüli Taylor-sora olyan pontokban is konvergens, amelyek kívül fekszenek f regularitási tartományán, T -n akkor az új Taylor-sor összege lehetővé teszi f -nek a T tartományon túl értelmezését, regularitásának erre a megnövelt tartományra való kiterjesztését és ezzel e megnövelt tartomány pontjai körüli sorfejtését. Ez a kiterjesztés a reguláris f függvény ún. "analitikus folytatása" (ld. 80. ábra). Ezzel kicsit részletesebben a 3.3. fejezetben foglalkozunk.



79. ábra



80. ábra

Néhány elemi függvény Taylor-sora

A komplex változós elemi függvények értelmezési tartományukban mindenütt regulárisak, ezért értelmezési tartományuk bármely pontja, mint bázispont körül Taylor-sorba fejthetők. Mivel az elemi függvények differenciálhányadosai valós és komplex változó esetén megegyeznek, ezért azonosak Taylor-soraik és azok konvergencia-tartományai is. Az alábbiakban felsoroljuk néhány komplex változós elemi függvény $z_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát (un. MacLaurin-sorát):

$$\text{a) } e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\text{b) } \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\text{c) } \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\text{d) } \operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\text{e) } \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\text{f) } \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \pm \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$$

$$\text{g) } (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

(itt α tetszőleges komplex szám).

Ezek közül az a), b), c), d), e) sor minden véges z értékre, az f) és g) sor pedig a $|z| < 1$ körben konvergens.

A felsorolt Maclaurin-sorokból a $z_0 \neq 0$ bázispontu Taylor-sorok $z \rightarrow (z - z_0)$ helyettesítéssel adódnak.

Komplex függvények Taylor sorfejtése gyakran alkalmazható a megfelelő valós függvények tulajdonságainak igazolásánál. Így pl. a valós analízisből ismert tény, hogy a $\operatorname{tg} x$ függvény a $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ intervallumban akárhányszor differenciálható és így bármelyik pontja körül formális Taylor-sorba fejthető. Pusztán az $x_0 = 0$ körüli sorfejtésre támaszkodva elég nehéz annak az igazolása, hogy egyáltalán van olyan 0 körüli intervallum, amelyben a Taylor-sor előállítja a $\operatorname{tg} x$ függvényt. Hatványsorokat használó olyan egyszerű valós analízisbeli módszer, amellyel ez az előállítás az egész $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ intervallumon igazolható lenne, egyáltalán nincs. Mivel azonban a komplex analízisbeli ismeretek értelmében a komplex $\operatorname{tg} z$ függvényt a $z_0 = 0$ körüli Taylor-sora a $|z| < \frac{\pi}{2}$ körlepton előállítja, ez egyben azt is igazolja, hogy a valós $\operatorname{tg} x$ függvényt az $x_0 = 0$ körüli Taylor-sora az egész $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ intervallumban előállítja. Ugyanis akár a valós, akár a komplex tg függvény 0 pont körüli Taylor-sorában az együtthatók ugyanazok a számértékek.

2.2. LAURENT-SOR. GYÚRÚTARTOMÁNYON REGULÁRIS KOMPLEX FÜGGVÉNY HATVÁNSOROS ELŐÁLLÍTÁSA

A hatványsor tagonkénti integrálhatóságára vonatkozó 1.2.6. tétel következménye:

2.2.1. Tétel

A pozitív és negatív kitevőjű tagokat is tartalmazó hatványsor összegfüggvénye egyértelműen meghatározza a hatványsor együtthatóit. Éspedig, ha

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f(z),$$

akkor tetszőleges n egész számra

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

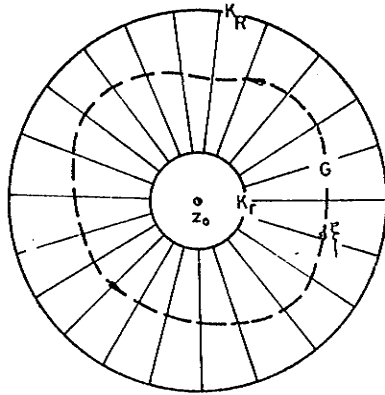
ahol G a hatványsor konvergencia-gyűrűjében haladó tetszőleges rektifikálható, pozitív irányítású zárt görbe (ld. 81. ábra).

Bizonyítás

Legyen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = f(z),$$

ha $r < |z-z_0| < R$.



81. ábra

a) Ha $n \geq 0$ egész szám, akkor a c_n együtthatókra (amelyek a sor pozitív kitevőjű tagjainak együtthatói, tehát Taylor-egyetthatók), érvényes a

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n \geq 0)$$

formula, ha $|\zeta-z_0| < R$.

b) Ha $n < 0$ egész szám, akkor a c_{-n} együtthatókra (amelyek a sor negatív kitevőjű tagjainak együtthatói) - a tagonkénti integrálhatóság, valamint a

$$\oint_{G^+} (\zeta-z_0)^n d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq -1 \text{ egész,} \\ 2\pi j, & \text{ha } n = -1 \end{cases}$$

összefüggés felhasználásával - ugyancsak a

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n > 0)$$

formula adódik, ha $|\zeta-z_0| > r$.

Igy a tétel állításának megfelelően, tetszőleges n egész számra

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

feltéve, hogy $r < |\xi - z_0| < R$. $\square$

Definíció

Az $r < |z - z_0| < R$ körgyűrűben konvergens

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f(z); \quad c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

hatványsor egy z_0 bázispontu Laurent-sor; a c_n számok a Laurent-sor együtthatói.

A negatív kitevőjű tagokat tartalmazó rész a sor főrésze, a pozitív kitevőjűeket tartalmazó a sor reguláris része.

A Taylor-sor - mint csak pozitív kitevőjű tagokat tartalmazó hatványsor - a Laurent-sor speciális esete, annak reguláris része.

A Laurent-sor - mint pozitív és negatív kitevőjű tagokat is tartalmazó hatványsor - az 1.2.6. Tétel értelmében a konvergenciagyűrűben reguláris függvényt állít elő. Felmerül a kérdés: az állítás megfordítható-e? Azaz: gyűrűtartományban reguláris függvény előállítható-e Laurent-sorral? Erre ad választ:

2.2.2. Tétel

Egy $r < |z - z_0| < R$ körgyűrűben reguláris f függvény ebben a tartományban egyértelműen állítható elő z_0 bázispontu Laurent-sorral.

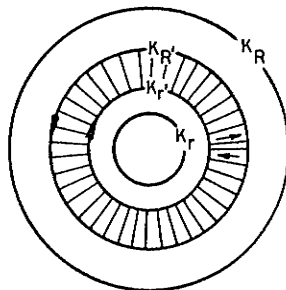
Bizonyítás

Az $r < |z - z_0| < R$ körgyűrűben vegyük fel a z_0 körüli $K_{r'}$ és $K_{R'}$ köröket, amelyekre teljesülnek az

$$r < r' < R' < R,$$

$$r' < |z - z_0| < R'$$

feltételek (ld. 82. ábra). E körgyűrű tetszőle-



82. ábra

ges z pontjára alkalmazva a többszörösen összefüggő tartományra vonatkozó Cauchy-integrál-formulát:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_R^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_R^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Mivel a K_R körön

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| \leq q < 1,$$

ezért

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n.$$

Ez a K_R körön egyenletesen konvergens sor tagonként integrálható úgy, hogy

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{K_R^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_R^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n \geq 0).$$

Mivel a K_r körön

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1,$$

ezért

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n.$$

Tagonkénti integrálással:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{K_r^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

adódik, ahol

$$c_{-n} = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{K_r^-} f(\xi) \cdot (\xi - z_0)^{n-1} d\xi,$$

ill. a K_r , körön ellenkező irányban integrálva:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_r^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi \quad (n > 0).$$

Mivel a c_n és c_{-n} együtthatókat meghatározó integrálokban az integrálandó függvények az $r < |z - z_0| < R$ körgyűrűben regulárisak, ezért - a Cauchy-integrál-tétel értelmében - az integrálok értéke nem változik, ha az integrációs görbét megváltoztatjuk és a K_R , és K_r , körök helyett a körgyűrűben haladó, a z_0 pontot egyszer körülvevő, pozitív irányítású tetszőleges G zárt Jordan görbe mentén integrálunk. A c_n és c_{-n} együtthatók egyetlen formulával, a

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{\xi^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

integrállal fejezhetők ki.

Ezzel a kiindulási

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_R^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi j} \oint_{K_r^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

összefüggésre

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

adódik, ahol az együtthatók a

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{G^+} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$$

integrállal kifejezett értékek.

Mivel z az $r < |z-z_0| < R$ körgyűrű tetszőleges belső pontja, ezért a kapott hatványsor a körgyűrű minden belső pontjában f -hez konvergál és - az 1.2.5. Tétel b) része értelmében - a körgyűrű minden $r < r' \leq |z-z_0| \leq R' < R$ zárt tartományában egyenletesen konvergál f -hez.

Az f függvényt az $r < |z-z_0| < R$ gyűrűben előállító z_0 bázispon-
tu hatványsor egyértelműségének bizonyítását az olvasóra bizzuk. $\square$

A z_0 körüli $r < |z-z_0| < R$ körgyűrűben f -et előállító

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n; \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$$

hatványsor az f függvény e gyűrűhöz tartozó Laurent-sorfejtése, vagy Laurent-sora; a c_n számok pedig az f függvény e gyűrűbeli Laurent-együtthatói.

E tétel következménye

Ha az $r < |z-z_0| < R$ gyűrűben f előállítható Laurent-sorral, akkor létezik olyan: $|z-z_0| < R$ -ben reguláris f_1 és $|z-z_0| > r$ -ben reguláris f_2 , hogy

$$f = f_1 + f_2$$

az $r < |z-z_0| < R$ körgyűrűben.

Megjegyzés

(1) Az f komplex függvény Laurent-sorba fejthető akár izolált szin-
guláris pontja, akár reguláris pontja körüli olyan gyűrűtartományban, amely-
ben f reguláris, de határán van szinguláris pont (ld. 2.4. fejezet 4. és
5. példája).

(2) Elfajult esetben a Laurent-sor tartalmazhat csak pozitív vagy csak negatív kitevőjű tagokat (ld. 2.4. fejezet 3. pl. a) és b) gyűrűtartománybeli Laurent sorfejtése).

(3) Az f komplex függvény adott gyűrűtartománybeli Laurent sorának egyértelműségéből következik; az f függvényt egy z_0 pont körüli gyűrűtartományban bármilyen módon előállítva pozitív és negatív kitevőjű tagokat tartalmazó hatványsorral, az nem más, mint az f függvény egy z_0 bázispontu Laurent-sora (ld. 2.4. fejezet 4., 5., 6. példa).

(4) Egy f függvény z_0 pontbeli Laurent sorának együtthatóira - az V. fejezet 2.3.1. tétele alapján - az alábbi becslés érvényes:

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi j} \left| \oint_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{M \cdot 2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{M}{R^n}$$

ahol $n \in \mathbb{N}$; M az f függvény maximuma a z_0 pontot körülvevő, a sor konvergencia-gyűrűjében haladó K körvonalon és R a körvonal sugara. Ezek az egyenlőtlenségek a Laurent-sor együtthatóira vonatkozó Cauchy-egyenlőtlenségek.

2.3. LAURENT-SOR ÉS FOURIER-SOR KAPCSOLATA

A Laurent-sor és a valós analízisből ismert Fourier-sor kapcsolatát fejezi ki:

2.3.1. Tétel

Az $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$; $\varepsilon > 0$ körgyűrűben reguláris f komplex függvény Laurent-sora az egységkörvonalon megegyezik az $f(e^{jt}) = g(t)$ valós változójú komplex függvény Fourier-sorával.

Bizonyítás

Az $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$; $\varepsilon > 0$ körgyűrűben reguláris komplex függvény ebben a gyűrűben a

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{j\varphi}) \cdot e^{-jn\varphi} d\varphi$$

együtthatóju

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

Laurent-sorral állítható elő. Ez a sor az egységkörvonal $z = e^{jt}$ pontjában (t valós változó, $0 \leq t < 2\pi$):

$$f(e^{jt}) = g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnt}$$

alakú, ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) e^{-j n \varphi} d\varphi.$$

A kapott sor - a tétel állításának megfelelően - a $g(t)$ valós paraméterű komplex függvény komplex alakban felírt Fourier-sora. Ugyanis a $g(t)$ függvény előállítható

$$g(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jnt} + c_{-n} e^{-jnt}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

alakban, ahol az együtthatók

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi,$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

amelyek a $g(t)$ valós változóju függvény Fourier-együtthatói. $\square$

2.4. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Fejtsük Taylor-sorba az

$$f(z) = \ln z$$

függvényt a $z_0 = 1$ pont körül és határozzuk meg a sor konvergencia-tartományát.

Az $\ln z$ függvény a $z = 0$ elágazási pont kivételével mindenütt - így a $z_0 = 1$ pontban is - reguláris, tehát a $z_0 = 1$ pont körül pozitív kitevőjű hatványsorba, Taylor-sorba fejthető. A sor együtthatói:

$$c_0 = \left[\ln z \right]_{z=1} = \ln 1 = 0,$$

$$c_1 = \left[\frac{d}{dz} (\ln z) \right]_{z=1} = \left[\frac{1}{z} \right]_{z=1} = 1,$$

$$c_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dz^n} (\ln z) \right]_{z=1} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n},$$

ha $n = 2, 3, \dots$ Így

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

A sor konvergenciatartománya a

$$|z - 1| < 1$$

körbelső (ugyanis a $z_0 = 1$ bázispontnak a függvény egyetlen szinguláris pontjától, a $z = 0$ ponttól való távolsága 1).

2. Fejtsük hatványsorba az

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

függvényt a $z_0 = 1$ pont körül és határozzuk meg a sor konvergencia-tartományát.

A függvény a $z_0 = 1$ pontban reguláris és így e pont körül Taylor-sorba fejthető. A Taylor-sorfejtés egyértelmősége miatt a sor együtthatóit nem szükséges az együttható-formula alapján meghatározni. A keresett sor egyszerűbben határozható meg a függvény egy primitív függvényének, az $F = -\frac{1}{z}$ függvénynek a $z_0 = 1$ pont körüli Taylor-sorával, annak tagonkénti differenciálásával. Mivel

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{1+(z-1)} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^n$$

és ez a sor a

$$|z - 1| < 1$$

körben konvergens, ezért a tagonkénti differenciálással adódó keresett hatványsor:

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(z-1)^{n-1},$$

ami ugyancsak a $|z - 1| < 1$ körben konvergens.

3. Fejtsük Laurent sorba az

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$$

függvényt a $z_0 = 1$ "izolált" szinguláris pont körüli összes lehetséges gyűrűtartományban.

Az adott függvény szinguláris pontjai: $z = 0$ és $z = 1$. Így a $z = 1$ pont körüli Laurent-sorának lehetséges konvergencia-gyűrűi:

a) $0 < |z - 1| < 1$

és

b) $|z - 1| > 1$,

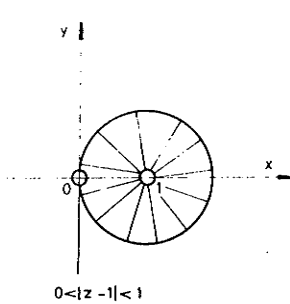
mert ezekben a gyűrűkben a függvény reguláris, de határukon van szinguláris pont (ld. 83/a. és b. ábrák).

a) A $0 < |z-1| < 1$ gyűrűbeli Laurent-sor:

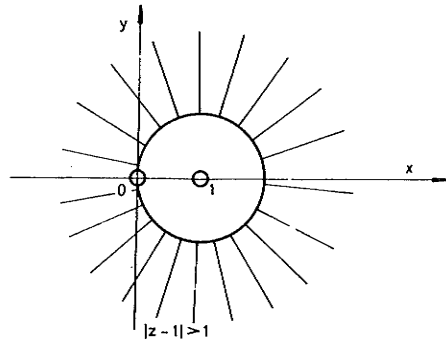
$$\frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1) + 1} = \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k.$$

b) A $|z-1| > 1$ gyűrűbeli Laurent-sor:

$$\frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k}.$$



83/a. ábra



83/b. ábra

4. Állítsuk elő hatványsorral

az

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z}$$

függvényt a $0 < |z| < \infty$ körgyűrűben.

Az adott f függvény szinguláris pontjai a

$$z = 0 \pm k\pi; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

pontok. A $0 < |z| < \infty$ gyűrűben f reguláris, de mindkét határkórén van szinguláris pont ($z = 0$ és $z = \pm \infty$). Ezért ebben a gyűrűben f előállítható

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

alakú hatványsorral (Laurent-sorral). Felhasználva az $\operatorname{sh} z$ függvény $z_0 = 0$ helyhez tartozó hatványsorát:

$$\frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots}$$

A második tényező nevezője $\frac{\operatorname{sh} z}{z}$ -hez konvergál, ha $z \neq 0$; 1-hez, ha $z = 0$ és sehol sem válik zérussá a $|z| < \pi$ tartományon, csak határának $z = \pm \pi$ pontjaiban. Ezért ennek a tényezőnek a hatványsoros előállítását osztással:

$$\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right) z^4 + \dots,$$

ami fennáll, ha $|z| < \pi$. Tehát

$$\frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \dots$$

ha $0 < |z| < \pi$.

5. Állítsuk elő hatványsorral az

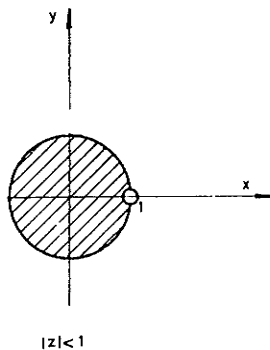
$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$$

függvényt a $z_0 = 0$ pont körüli összes lehetséges gyűrűtartományban.

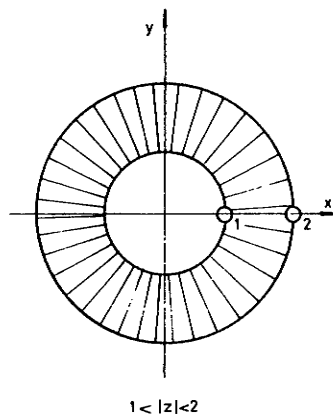
Az adott függvény szinguláris pontjai: $z = 1$ és $z = 2$. Így a függvény a

- a) $|z| < 1$,
- b) $1 < |z| < 2$,
- c) $|z| > 2$

gyűrűtartományok belsejében reguláris, tehát ezekben előállítható hatványsorral (ld. 84/a, b, c. ábrák).



84/a. ábra



84/b. ábra

A sorfejtéshez felhasználjuk a

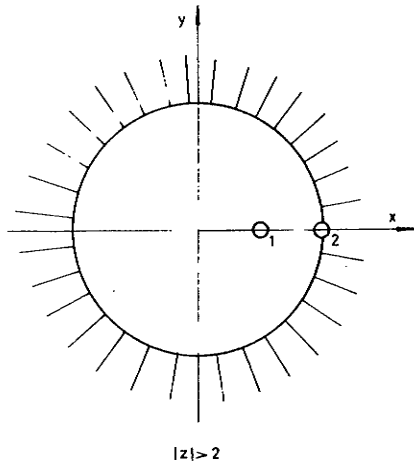
$$\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

felbontást.

a) A $|z| < 1$ tartományban:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$



84/c. ábra

ahol az első sor $|z| > 2$ -re, a második $|z| > 1$ -re konvergens. Így a $|z| > 1$ tartományban az

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}-1}{2^k} z^k$$

sorfejtés érvényes. Ez a hatványsor csak pozitív kitevőjű tagokat tartalmaz (tehát Taylor-sor), ami várható is volt, mert a $z_0 = 0$ pont f reguláris pontja és $|z| < 1$ -ben a függvénynek nincs szinguláris pontja.

b) Az $1 < |z| < 2$ gyűrűben:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}},$$

ahol az első sor $|z| < 2$ -re, a második $|z| > 1$ -re konvergens. Így az $1 < |z| < 2$ gyűrűben az

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$$

Laurent-sorfejtés érvényes.

Ez a reguláris pont körüli hatványsor tartalmaz negatív kitevőjű tagokat is, mert a konvergencia-gyűrű határkörén vannak a függvénynek szinguláris pontjai ($z = 1$ és $z = 2$).

c) A $|z| > 2$ gyűrűben

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}$$

ahol az első sor $|z| > 2$ -re, a második $|z| > 1$ -re konvergens. Így a $|z| > 2$ gyűrűben az

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} - 1}{z^k}$$

Laurent-sorfejtés érvényes.

6. Határozzuk meg Laurent-sor segítségével a

$$g(t) = \frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2} \quad (|a| < 1)$$

függvény Fourier-sorát.

Felhasználva, hogy

$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}; \quad \cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$

és alkalmazva az

$$e^{jt} = z$$

helyettesítést a $g(t)$ függvényből az

$$f(z) = \frac{1 - z^2}{2j \left[z^2 - \left(a + \frac{1}{a} \right) z + 1 \right]}$$

függvény adódik. Ezt résztörtekre bontva

$$f(z) = \frac{1}{2j} \left\{ -1 + \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} + \frac{1}{1 - az} \right\} = \frac{1}{2j} \left\{ -1 - \frac{1}{\frac{z}{a} \left(1 - \frac{a}{z} \right)} + \frac{1}{1 - az} \right\},$$

ahol a két tört a $|z| = 1$ és $|a| < 1$ kikötés miatt konvergens geometriai sor összegeként fogható fel. Így

$$f(z) = \frac{1}{2j} \left\{ -1 - \left[\frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z} \right)^2 + \dots \right] + \left[1 + az + (az)^2 + \dots \right] \right\},$$

illetve

$$f(z) = \frac{1}{2j} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right).$$

Tehát $z = e^{jt}$ miatt a keresett Fourier-sor

$$\frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nt,$$

feltéve, hogy $|a| < 1$.

3.§ ANALITIKUS KOMPLEX FÜGGVÉNYEK ÉS AZOK NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

3.1. ANALITIKUSSÁG-REGULARITÁS

A Cauchy-integrálformulából és elsősorban a reguláris függvények ezen alapuló hatványsorba-fejthetőségéből néhány olyan következtetés vonható le, amelynek segítségével megvilágítható a reguláris komplex függvények lényege, komplex analízisbeli alapvető szerepe.

Elméleti és gyakorlati szempontból való fontosságuk miatt a hatványsoralakban előállítható komplex függvényekre - valós analógiára - külön elnevezést vezettek be:

Definíció

A H nem üres nyílt halmaz bármely pontja körül hatványsorba fejthető komplex függvények: a H halmazon analitikus komplex függvények.

E definíció alapján egyszerűen belátható a komplex függvény analitikusságának szükséges és elégséges feltétele:

3.1.1. Tétel

Az f komplex függvény akkor és csak akkor analitikus egy H halmazon, ha ott reguláris.

Bizonyítás

a) Ha f reguláris H -n, akkor - a Cauchy-integrálformula értelmében - annak minden pontja körül hatványsorba-fejthető, tehát analitikus H -n.

b) Ha f analitikus H -n, akkor a definíció értelmében - bármely $z_0 \in H$ pont környezetében egy egyenletesen konvergens hatványsor összeg-függvénye és mint ilyen, reguláris minden $z_0 \in H$ körüli konvergenciakörben, tehát az egész H halmazon. $\square$

E tétel alapján a komplex függvények regularitása és analitikussága azonos jelentésű fogalmak. Ebből következik, hogy analitikus függvényekre ugyanazok a tételek érvényesek, mint reguláris függvényekre.

Megjegyzés

A komplex függvények azon alapvető tulajdonsága, hogy minden reguláris függvény egyben analitikus is, a valós függvényektől eltérő tulajdonság. Valós függvények esetében az analitikusságnak jóval erősebbek a követelményei. Ez elsősorban annak a következménye, hogy a komplex függvényekkel ellentétben a valós függvények pontbeli vagy intervallumbeli differenciálhatóságából még nem következik - az analitikusság szükséges feltétele - a függvény többszöri differenciálhatósága. (Például az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény az $x = 0$ pontban csak egyszer differenciálható.) Továbbá következik ez abból is, hogy a komplex függvényekkel ellentétben egy valós függvény lehet egy pontban akárhányszor differenciálható - tehát létezhet a formális Taylor-sora - de a függvény mégsem analitikus, mert Taylor sora vagy nem konvergens, vagy ha konvergens is, nem a függvényt állítja elő. (Például az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$$

függvény akárhányszor differenciálható, de Taylor sora nem konvergens. Az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\infty < x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } 0 < x < \infty \end{cases}$$

függvény akárhányszor differenciálható, Taylor-sora konvergens, de nem az f függvényt, hanem a $\varphi \equiv 0$ függvényt állítja elő.

A komplex függvényeknek a valós függvényekétől eltérő ezen alapvető tulajdonsága veti fel az analitikus komplex függvények behatóbb vizsgálatának szükségességét, hogy annak során fény derüljön a komplex függvények néhány további, a valós függvényekétől eltérő tulajdonságára.

3.2. ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK AZONOSSÁGA

A komplex változós függvény olyan tulajdonságu, hogy értelmezési tartományának valamely részhalmazán való viselkedéséből általában még nem lehet következtetni egy másik részén (esetleg az egész értelmezési

tartományán) való viselkedésére. Folytonos komplex változós függvény esetében azonban már levonható erre nézve némi következtetés. Ugyanis a folytonos függvény azzal a "belső tulajdonsággal" rendelkezik, hogy egymáshoz közeli helyekhez tartozó függvényértékei egymástól csak kevésbé térhetnek el. Általában egy függvény valamely tartománybeli viselkedése annál több információt nyújt a környezetbeli, illetve az értelmezési tartomány más részén való viselkedésére, minél speciálisabb belső tulajdonságu - azaz minél speciálisabb függvényosztály tagja - az illető függvény.

Az analitikus függvények a komplex függvények olyan speciális osztályát alkotják, amelyeknek belső tulajdonságai olyan erősek, hogy egy kis tartománybeli viselkedésükből már messzemenő következtetések vonhatók le az egész értelmezési tartományukon való viselkedésükre. Éspedig: egy tartományon analitikus függvény ezen a tartományon egyértelműen meghatározott, ha ismertek a függvény értékei a tartomány valamely pontjának környezetében, vagy akár csak a tartomány egy olyan konvergens pontsorozata mentén, amelynek limesze is a tartományhoz tartozik. Az analitikus függvények ezen alapvető tulajdonságát fejezi ki:

3.2.1. Tétel (egyértelműségi tétel)

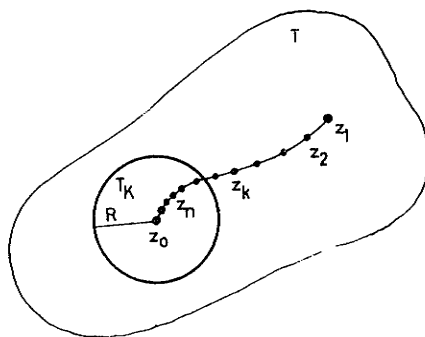
Ha a φ függvény analitikus egy T tartományon és értéke egy $-T$ különböző pontjaiból álló $z_n \rightarrow z_0 \in T$ pontsorozaton zérus, akkor

$$\varphi \equiv 0$$

az egész T tartományon.

Bizonyítás

Mivel z_0 a T tartomány belső pontja és φ analitikus z_0 -ban, ezért kell lenni olyan $T_k: |z - z_0| < R$ körtartománynak (ld. 85. ábra), amely teljes egészében T -ben van és amelyben φ saját Taylor sorának összegfüggvénye.



85. ábra

Azaz:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

minden $z \in T_k$ értékre. Felhasználva, hogy φ , mint hatványsor összegfüggvénye folytonos z_0 -ban, továbbá, hogy a $z_n \rightarrow z_0$ pontokban $\varphi(z_n) = 0$,

$$\varphi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = 0.$$

Ebből következik, hogy a φ -t előállító Taylor sor első együtthatója

$$c_0 = \varphi(z_0) = 0,$$

és így a hatványsor minden tagjából kiemelhető a $(z-z_0)$ faktor. A kiemelés után nyert sor konvergenciaviselkedése változatlan és összege a T_k körlapon egy ϕ_1 függvény. Tehát:

$$\varphi(z) = (z-z_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-1} = (z-z_0) \phi_1(z).$$

Mivel $\varphi(z_n) = 0$ és $z_n \neq z_0$, ezért

$$\phi_1(z_n) = \frac{\varphi(z_n)}{z_n - z_0} = 0,$$

és így felhasználva ϕ_1 (mint hatványsor összegfüggvénye) folytonosságát

$$\phi_1(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_1(z_n) = 0.$$

Ebből a ϕ_1 -et előállító hatványsor első együtthatójára (ami megegyezik a φ -t előállító hatványsor második együtthatójával)

$$c_1 = \varphi'(z_0) = 0$$

adódik. Tehát a φ -t előállító hatványsor első két együtthatója zérus és így a sor többi tagjából a $(z-z_0)^2$ faktor kiemelhető. A kiemelés után fennmaradó sor a T_k körlapon egy ϕ_2 függvényhez konvergál, amelyről a ϕ_1 függvéynél követett gondolatmenettel belátható, hogy

$$\phi_2(z_0) = 0.$$

Ebből következik, hogy a ϕ_2 -t előállító hatványsor első együtthatójára
 - ami azonos a φ -t előállító hatványsor harmadik együtthatójával, - a

$$c_2 = \frac{\varphi''(z_0)}{2!} = 0$$

érték adódik. Ezt az eljárást vég nélkül folytatva, az adódik, hogy a φ -t előállító hatványsor minden együtthatója zérus, úgy, hogy a $T_k: |z - z_0| < R$ körtartományban

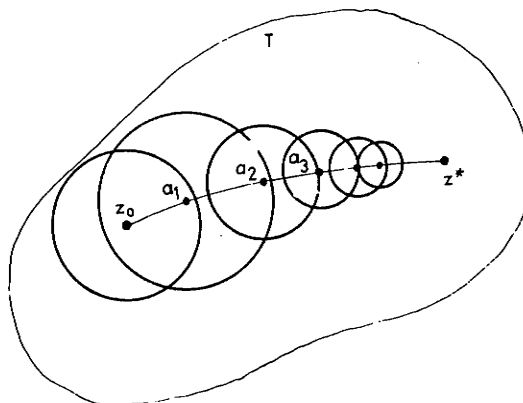
$$\varphi \equiv 0.$$

Még csak azt kell kimutatni, hogy $\varphi \equiv 0$ az egész T tartományon. Ehhez elég azt belátni, hogy a T_k körtartományon kívül fekvő tetszőleges $z^* \in T$ pontban

$$\varphi(z^*) = 0.$$

Evégből kössük össze z^* -ot a z_0 ponttal egy T belsejében haladó rektifikálható L görbével és e görbe $|z - z_0| < R$ -be eső szakaszán válasszunk egy a_1 pontot (ld. 86. ábra). E pont, mint új bázispont körül a φ -függvény hatványsorba fejthető és mivel az a_1 pont környezetében $\varphi = 0$, ezért

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a_1)}{n!} (z - a_1)^n$$



86. ábra

Taylor-sor valamennyi együtthatója zérus. Ez a sor legalább a T -ben fekvő legnagyobb $|z - a_1| < r_1$ körben konvergens, ott előállítja φ -t és értéke zérus. Mivel az a_1 pont választható úgy, hogy a $|z - a_1| < r_1$ tartomány kivezessen T_k -ből (ld. 2.1.3. báziscsere-tétel), ezért $\varphi \equiv 0$ a T_k körön kívül eső pontokban is. Az eljárást folytatva véges sok lépés után a $|z - a_i| < r_i$ körrel elérjük a z^* pontot (l. 86. ábra), úgy hogy $f(z^*) = 0$. Mivel z^* a T tartomány tetszőleges pontja, ezért

$$\varphi \equiv 0$$

az egész T tartományon. $\square$

E tétel kissé általánosabb megfogalmazása:

3.2.2. Tétel

Ha az f és g függvények analitikusak a T tartományon és T különböző pontjaiból álló

$$z_n \longrightarrow z_0 \in T$$

pontsorozaton

$$f(z_n) = g(z_n),$$

akkor

$$f \equiv g$$

az egész T tartományon.

Bizonyítás

$\varphi = f - g$ bevezetésével a tétel - és így bizonyítása is - azonos az előző tételével. $\square$

Az egyértelműségi tétel elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt hasznos. Állítása több fontos tétel igazolásának alapjául szolgál (például, ha f és g az egész komplex síkon analitikusak - azaz egész függvények - akkor $f \equiv g$ igazolására elegendő azt belátni, hogy a valós tengely valamely intervallumán egybeesnek). Ez a tétel kiindulópontja az analitikus folytatás elméletének, hasznos eszköze a komplex paraméterű paraméteres integrálok kiszámításának stb.

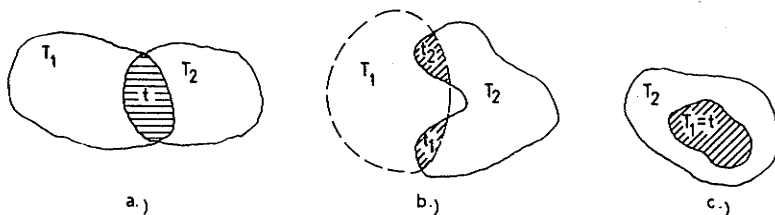
3.3. ANALITIKUS FOLYTATÁS

Az analitikus folytatás értelmezésére - többek között - az analitikus függvény 3.2.2. Tételben kifejezett egyértelműségének alábbi kiterjesztése nyújt lehetőséget:

3.3.1. Tétel

Ha f_1 egy T_1 és f_2 egy T_2 tartományon analitikus függvény és $t = T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, akkor f_1 és f_2 egymást egyértelműen meghatározzák.

(Megjegyezzük, hogy a $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ tartomány lehet összefüggő vagy nem összefüggő és speciális esetben lehet maga az egyik tartomány is - pl. T_1 , ha $T_1 \subset T_2$ -; ld. 87/a, b, c. ábra).



87. ábra

Bizonyítás

Az analitikus függvény egyértelműségére vonatkozó tétel értelmében f_2 -n kívül nincs más függvény, amely T_2 -n analitikus és t -n f_1 -gyel azonos volna. Tehát f_2 az f_1 függvény értékei által teljesen meghatározott. Hasonlóan f_1 is teljesen meghatározott f_2 értékei által. $\square$

E tételben kimondott feltételeknek eleget tevő függvényeket egymás analitikus folytatásának nevezzük. Azaz

1. Definíció

(Analitikus folytatás egy tartományon keresztül)

Ha a T_1 tartományon analitikus f_1 és a T_2 tartományon analitikus f_2 függvények a $T_1 \cap T_2 = t \neq \emptyset$ tartományon megegyeznek, akkor f_2 az f_1 függvénynek a t tartományon keresztül a T_2 tartományba történő (ill. f_1 az f_2 függvénynek a t tartományon keresztül a T_1 tartományba történő) analitikus folytatása.

Megjegyezzük, hogy

1. Ha a T_1 és T_2 tartományok közös része nem összefüggő (ld. 87/b. ábra), akkor az f_1 és f_2 függvények analitikus folytatásait külön kell tekinteni a közös rész egyes komponensein keresztül.

2. Ha f_1 a T_1 tartományon analitikus függvény és T_2 olyan tartomány, amelynek van közös része T_1 -gyel, akkor két eset lehetséges:

a) vagy nincs olyan f_2 függvény, amely T_2 -n analitikus és $T_1 \cap T_2 = t$ -n megegyezik f_1 -gyel (azaz f_1 nem folytatható analitikusan T_2 -n),

b) vagy egyetlen ilyen függvény van és az f_1 -nek a t -beli értékei által meghatározott.

Ezt fejezi ki:

3.3.2. Tétel

Rögzített T_1, T_2 és $T_1 \cap T_2 = t \neq \emptyset$ tartományok esetén a T_1 tartományon analitikus f_1 függvény T_2 tartománybeli analitikus folytatása - amennyiben az egyáltalán létezik - egyértelmű.

Bizonyítás

Mivel a $t \subset T_2$ tartományon $f_2 = f_1$ ezért a 3.2.2. Tétel értelmében $f_2 = f_1$ az egész $T = T_1 \cup T_2$ tartományon. $\square$

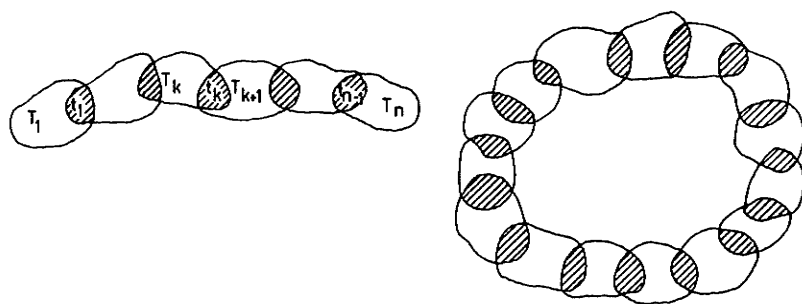
Az analitikus folytatás megadott definíciója kiterjeszthető több tartományon - ún. tartományláncon - keresztül történő analitikus folytatásra:

2. Definíció

(Analitikus folytatás egy tartományláncon keresztül)

Legyen $T_1, T_2, \dots, T_n$ olyan tartománylánc, amelynél minden T_k, T_{k+1} tartománypárnak van közös t_k része és legyen minden T_k tartományon egy f_k analitikus függvény értelmezve. Ha minden $k=1, 2, \dots, n-1$ -re f_k és f_{k+1} értékei a t_k tartományon megegyeznek, akkor f_n az f_1 függvénynek a t_k tartományláncon keresztül a T_n tartományba történő analitikus folytatása (ld. 88. ábra).

Ebben az általánosabb esetben is egyértelmű az analitikus folytatás az alábbi értelemben:



88. ábra

3.3.3. Tétel

Rögzített $T_1, T_2, \dots, T_n$ és $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ közös résztartományok esetén a T_1 tartományon analitikus f_1 függvénynek a T_n tartományba történő analitikus folytatása - amennyiben az létezik - egyértelműen meghatározott (feltéve, hogy azokat az analitikus folytatásokat tekintjük, amelyek a lánc egyes elemein, a lánc megelőző tartományával vett közös részén a már definiált analitikus folytatással megegyezők).

Bizonyítás

A tétel állítása 3.3.2. Tétel következménye, annak $(n-1)$ -szer egymás utáni alkalmazása. $\square$

A 3.3.2. és 3.3.3. Tétel következményei:

1. Ha a T_2 tartományon analitikus f_2 függvény a T_1 -en analitikus f_1 függvény közvetlen analitikus folytatása a $T_1 \cap T_2 = t \neq \emptyset$ tartományon keresztül, akkor a T_1 és T_2 pontjait egyetlen T tartománnyá egyesítve f_1 és f_2 úgy tekinthetők, mint egyetlen f függvény különböző értékei:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{ha } z \in T_1, \\ f_2(z), & \text{ha } z \in T_2. \end{cases}$$

Ha a $T_1 \cap T_2$ tartomány összefüggő, akkor f - az előzőek értelmében - egyértékű és így analitikus az egész $T_1 \cup T_2 = T$ tartományon.

Ha a $T_1 \cap T_2$ tartomány nem összefüggő, akkor az f_1 függvény különböző közös részekén keresztül történő analitikus folytatásainak - az

f_2 függvényeknek - a T_2 tartomány ugyanazon z pontjában különböző értékei lehetnek. Tehát a $T_1 \cup T_2$ tartományon értelmezett f többértékű is lehet.

2. Az általánosabb esetben, amikor az f_1 függvény analitikus folytatása a T_1 tartományból a T_n tartományba a $T_1, T_2, \dots, T_n$ tartományláncon keresztül történik, akkor a T_k tartományokat egyetlen T tartománnyá egyesítve, azon az f_k függvények ($k = 1, 2, \dots, n$) úgy tekinthetők, mint egyetlen f függvény különböző értékei:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{ha } z \in T_1, \\ f_2(z), & \text{ha } z \in T_2, \\ \vdots \\ f_n(z), & \text{ha } z \in T_n, \end{cases}$$

ill. röviden:

$$f(z) = f_k(z); \quad z \in T_k; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Mindezek figyelembevételével megadható az analitikus folytatás még szélesebb körű kiterjesztése:

3. Definíció

(Teljes analitikus függvény)

Valósítsuk meg a T tartományon analitikus (és egyértékű) függvény valamennyi lehetséges analitikus folytatását a z sík valamennyi lehetséges tartományláncon keresztül. Az ilyen analitikus folytatások eredményeként adódó valamennyi értéket egyetlen - általában többértékű (esetleg végtelen sokértékű) - F relációvá egyesítve, ezt a relációt "teljes analitikus függvény"-nek nevezzük.

Az analitikus folytatások eredményeként a komplex sík különböző tartományaiban adódó analitikus (azaz reguláris) függvények az F többértékű reláció reguláris ágai.

Valós változós függvény kiterjesztése komplex változóra, analitikus folytatás alapján

Az analitikus folytatás - mint láttuk - azon az alapvető tényen alapszik, hogy egy T tartományon analitikus függvény egyértelműen meghatározott, ha ismertek az értékei T egy részhalmazán. Ha például egy T tartományban haladó L görbeszakasz pontjaiban értelmezett egy φ függ-

vény, akkor amennyiben létezik φ -nek analitikus folytatása a T tartományban (azaz: amennyiben létezik olyan f függvény, amely T -n analitikus és L -en a φ értékeit veszi fel), úgy az a függvény φ által egyértelműen meghatározott.

Ha speciálisan L a valós tengely egy véges vagy végtelen szakasza és $\varphi(x)$ ezen az egyenesszakaszon értelmezett függvény (amelynek értékei lehetnek akár valósak, akár komplexek), akkor a fenti értelemben beszélhetünk a $\varphi(x)$ valós változós függvény analitikus folytatásáról. Amennyiben van ilyen folytatás, úgy azt a $\varphi(x)$ valós változós függvény komplexbeli analitikus folytatásának nevezzük. (Pl. a valós változóju $\sin x$ függvény analitikus folytatása: $\sin z$). Az eddigiekből következik az is, hogy amennyiben a valós változós függvény a komplex síkon analitikusan folytatható, úgy az csak egyértelműen történhet.

Megjegyzés

Egyértékű f függvény esetében egy rögzített z_0 pont környezetéből kiindulva, a függvényt egy z_1 pontba analitikusan folytatva ugyanazt az $f(z_1)$ értéket kapjuk, függetlenül attól, hogy milyen tartományláncon keresztül vettük az analitikus folytatást.

Többértékű reláció esetében egy rögzített z_0 pont környezetéből kiindulva a függvényt egy z_1 pontba analitikusan folytatva különböző $f(z_1)$ értékeket kaphatunk, attól függően, hogy milyen tartományláncon keresztül vettük az analitikus folytatást.

3.4. ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK ZÉRUSHELYEI

A zérushelyek és azok tulajdonságainak ismerete fontos szerepet játszik a komplex analízis különböző alkalmazási területein, elsősorban stabilitásvizsgálatokkal kapcsolatos problémák megoldásánál. Többek közt ez is oka annak, hogy ismertetjük az analitikus függvények zérushelyeinek lényegesebb tulajdonságait.

Definíció

Egy T tartományon analitikus f függvénynek $z_0 \in T$ a zérushelye, ha:

$$f(z_0) = 0;$$

b) n -edrendű zérushelye ($n \geq 1$ egész szám), ha:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

E definíció és a 2.1.1. Tétel következménye, hogy analitikus függvény n -ed rendű zérushelye körüli sorfejtésében az első $(n-1)$ együttható zérus. Ezen alapszik az analitikus függvény zérushely környezetében való előállítására vonatkozó:

3.4.1. Tétel

A z_0 pontban n -szeres zérushellyel rendelkező - nem azonosan zérus - f analitikus függvény, a z_0 pont környezetében felírható:

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z) \quad n = 1, 2, \dots$$

alakban, ahol φ reguláris függvény és $\varphi(z_0) \neq 0$.

Bizonyítás

Az n -ed rendű zérushely definíciójának következménye, hogy az analitikus f függvény z_0 , n -ed rendű zérushely körüli Taylor-sora:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

ahol $c_k \neq 0$ és $n \geq 1$. A sor tagjaiból a $(z - z_0)^n$ faktort kiemelve:

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^k.$$

A nyert sor - amelynek konvergencia-tartománya megegyezik az eredeti soréval - a konvergencia-tartományban egy olyan

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^k$$

reguláris függvényt állít elő, amelyre

$$\varphi(z_0) \neq 0$$

Igy a z_0 pont környezetében

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)$$

a tétel állításának megfelelően. $\square$

E tétel alapján belátható

3.4.2. Tétel

Egy T tartományon reguláris és nem azonosan zérus értékű f függvény minden zérushelye "izolált" (minden zérushelynek van olyan környezete, amelyben f -nek nincs több zérushelye).

Bizonyítás

Ha $z_0 \in T$ az f reguláris függvény n -ed rendű zérushelye, akkor z_0 -nak van olyan környezete, amelyben

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$$

alakban írható fel. Ez itt szereplő φ függvény - mint hatványsor összeg-függvénye - reguláris és a z_0 egy környezetében 0-tól különböző értékű. Ebben a környezetben - magát a z_0 pontot leszámítva - f -nek nincs több zérushelye, hiszen a $(z - z_0)^n$ tényező is csak a z_0 pontban lesz 0 értékű. Így az állításnak megfelelően z_0 izolált zérushely. $\square$

Reguláris függvény zérushelyeinek további tulajdonságait fejezi ki:

3.4.3. Tétel

Ha f reguláris T -n és ott $f \not\equiv 0$, akkor

- a) f minden zérushelye véges multiplicitású;
- b) f zérushelyeinek nincs torlódási pontja T belsejében;
- c) f zérushelyeinek halmaza legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.

Bizonyítás

a) Kimutatjuk, hogy f egyik gyöke sem lehet végtelen multiplicitású.

Jelöljük Z_f -fel f zérushelyeinek halmazát:

$$Z_f = \{ z \mid z \in T; \quad f(z) = 0 \}$$

és H -val a végtelen multiplicitású zérushelyekét:

$$H = \left\{ \alpha \mid \alpha \in Z_f; f^{(n)}(\alpha) = 0; \quad n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Mivel f folytonos T -ben, ezért a Z_f halmaz is, és az

$$A = \left\{ \alpha \mid \alpha \in T; f^{(n)}(\alpha) = 0; \quad n = 1, 2, \dots \right\}$$

halmaz is zárt T -ben. Ebből következik, hogy H mint két zárt halmaz metszete, ugyancsak zárt.

Kimutatható az is, hogy H nyílt halmaz. Ugyanis: kiválasztva egy $\alpha \in H$ zérushelyet, az $\alpha \in T$ miatt van olyan $R > 0$ szám, hogy az f függvény egy α körüli R sugarú körlapon konvergens hatványsorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n = 0.$$

mivel α végtelen multiplicitású zérushely, ezért minden $z \in |z - \alpha| < R$ -ben

$$f^{(n)}(z) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ugy hogy

$$\{ z \mid |z - \alpha| < R \} \in H$$

azaz H nyílt halmaz.

Előbb láttuk, hogy H zárt is T -ben. Mivel T összefüggő halmaz (tartomány), ezért H egyszerre nyílt is, zárt is csak úgy lehet, ha:

$$\text{vagy} \quad H = T,$$

$$\text{vagy} \quad H = \emptyset.$$

Feltettük, hogy $f \neq 0$, ezért $H \neq T$, tehát csak $H = \emptyset$ lehetséges, ami azt jelenti, hogy f -nek nincs végtelen multiplicitású zérushelye.

b) A zérushelyek nem torlódhatnak T egyetlen belső pontjához sem.

Ugyanis a függvény folytonossága miatt a zérushelyek torlódási pontjának is zérushelynek kell lennie, de akkor ez nem lenne izolált zérushely, ami ellentmond a 3.4.2. Tételnek.

c) Analitikus függvénynek csak a "nyílt" komplex síkon lehet végtelen sok zérushelye.

A nyílt komplex síkon analitikus függvénynek (un. egész függvénynek) a komplex sík bármely $\bar{T}$ zárt részhalmazán csak véges sok zérushelye lehet. Ellenkező esetben ugyanis létezne a zérushelynek olyan végtelen sorozata, amely a végesbeli $z_0 \in \bar{T}$ -hez konvergálna. Ekkor pedig - a

3.2.1. Tétel értelmében - $f \equiv 0$ volna, ami ellentmondana a feltételnek.

A $z = \infty$ -nel lezárt komplex síkon analitikus függvénynek csak megszámlálhatóan végtelen sok zérushelye lehet, amelyek a $z = \infty$ -hez konvergálnak. $\square$

Megjegyzés

(1) A 3.4.3. Tétel csak azt állítja, hogy egy T tartományon reguláris f függvény zérushelyeinek nem lehet torlódási pontja T belső pontjaiban. Nem áll ez T határpontjaira.

Például, ha T korlátos és f zérushelyeinek száma végtelen, akkor a zérushelyeknek szükségképpen van legalább egy torlódási pontja T határán (ld. 3.7. fejezet 1. pl.).

(2) A 3.4.3. Tétel állítása is éles határt von a valós és komplex analízis közé; valós változójú függvényekre ugyanis nem érvényesek e tétel állításai.

Tekintsük például az

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{e^{x^2}}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

formulával megadott valós változójú függvényt. Mint ismeretes, ez bármely x helyen akárhányszor differenciálható, $f^{(n)}(0) = 0$ minden n pozitív egész számra, de f nem teljesíti a reguláris komplex függvény 3.4.3. Tételbeli tulajdonságait. Ugyanis:

- a) $x = 0$ végtelen multiplicitású gyök,
- b) f gyökeinek száma nem megszámlálható,
- c) f gyökeinek van a végesben torlódási pontja.

3.5. ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK IZOLÁLT SZINGULÁRIS HELYEI A VÉGESBEN

Definíció

Az $f : T \rightarrow T^*$ komplex függvénynek $z_0 \in T$

- a) szinguláris pontja ha f nem reguláris z_0 -ban;
- b) izolált szinguláris pontja ha f a z pont egy "átszurt" környezetében reguláris.

Számos olyan függvény létezik, amelynek vannak nem izolált szinguláris pontjai. Ilyen pontok környezetében a függvény viselkedése nem írható le az eddig megismert függvénytani eszközökkel, míg izolált szinguláris pontok körüli függvényvizsgálatra több jól alkalmazható módszer is van. E vizsgálatokhoz szükséges az izolált szinguláris pontok osztályozása és fontosabb tulajdonságainak ismerete. Ezeket ismertetjük az alábbiakban.

(1) Megszüntethető szinguláris hely

Definíció

Az f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja megszüntethető szinguláris hely, ha létezik

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq \infty$$

véges határérték, akár nem létezik $f(z_0)$, akár létezik, de $f(z_0) \neq \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Megszüntethető szingularitás egy jellemző tulajdonságát fejezi ki:

3.5.1. Tétel

Ha $z_0 \neq \infty$ az f függvény megszüntethető szinguláris helye, akkor f a z_0 pont egy átszurt környezetében korlátos.

Bizonyítás

A tétel állítása a megszüntethető szinguláris hely, valamint a korlátosság definíciójának következménye. $\square$

A megszüntethető szingularitás Laurent-sorfejtésen alapuló szükséges és elégséges feltételét fejezi ki:

3.5.2. Tétel

Az f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja akkor és csak akkor megszüntethető szinguláris hely, ha a függvény z_0 körüli Laurent-sora nem tartalmaz negatív kitevőjű tagokat.

Bizonyítás

a) Ha a $z_0 \neq \infty$ megszüntethető szinguláris hely, akkor - a 3.5.1. Tétel következtében - annak környezetében f korlátos, tehát van olyan $M > 0$ szám, hogy a $0 < |z - z_0| < R$ gyűrűben

$$|f(z)| < M.$$

A Laurent-sor együtthatóira vonatkozó

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad n = 1, 2, \dots$$

Cauchy-egyenlőtlenségekben R (a z_0 pont körüli gyűrűtartomány külső körének sugara) tetszőlegesen kicsinynek választható és így valamennyi negatív n -re a Laurent együtthatók zérussal egyenlők. Ugyanis ha $R \rightarrow 0$, akkor

$$|c_{-n}| \leq \frac{M}{R^{-n}} = M \cdot R^n \rightarrow 0.$$

Tehát a függvény z_0 körüli Laurent-sora nem tartalmaz negatív kitevőjű tagokat, úgy hogy a $0 < |z - z_0| < R$ gyűrűben:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

ahol $c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$.

b) Megfordítva:

Ha az f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pont körüli Laurent-sora nem tartalmaz negatív kitevőjű tagokat, akkor létezik

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0 \neq \infty$$

határérték, tehát z_0 megszüntethető szinguláris hely. $\square$

Megjegyzés

Ha egy z_0 izolált szinguláris pont körüli hatványsor f -et z_0 -ban is előállítja - vagyis ha $f(z_0) = c_0$ -, akkor a függvény a z_0 pont teljes környezetében, azaz a $|z - z_0| < R$ körben reguláris. Mivel izolált szinguláris pontban a függvény vagy nincs értelmezve, vagy értelmezve van, de $f(z_0) \neq c_0$, ezért az $f(z_0) = c_0$ megállapodással a z_0 szinguláris hely megszüntethető, f a z_0 helyen is regulárisra tehető. Ez indokolja a megszüntethető szinguláris hely elnevezést.

(2) Pólus-hely

Definíció

Az f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja.

a) pólushely, ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

függetlenül attól, hogy $f(z_0)$ értelmezett-e vagy sem;

b) n -ed rendű pólus-hely, ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

de van olyan $n > 0$ egész szám, hogy

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n \cdot f(z) = A \neq 0$$

véges határérték létezik.

Az n -ed rendű pólus létezésének - Laurent-sorfejtésen alapuló - szükséges és elégséges feltételét fejezi ki:

3.5.3. Tétel

Az f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja, akkor és csak akkor pólus-hely, ha a függvény $0 < |z - z_0| < R$ gyűrűbeli Laurent-sora véges számú negatív kitevőjű tagot tartalmaz.

Amennyiben z_0 n -ed rendű pólushely, akkor f Laurent-sora:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k ; \quad (c_{-n} \neq 0)$$

alaku.

Bizonyítás

a) Ha a $z_0 \neq \infty$ pont az f függvény n -ed rendű pólusa, akkor a definíció értelmében létezik a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n \cdot f(z) = A \neq 0$$

véges határérték. Ez azt jelenti, hogy a z_0 pont "átszurt" környezetében a reguláris

$$\varphi(z) = (z - z_0)^n \cdot f(z)$$

függvény ebben a környezetben korlátos, és így a 3.5.2. Tétel értelmében z_0 a φ függvény megszüntethető szinguláris pontja. Ezért z_0 körüli Laurent sora:

$$(z - z_0)^n \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (c_0 \neq 0)$$

alaku, úgy hogy z_0 átszurt környezetében

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

illetve

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (c_{-n} \neq 0).$$

Tehát - az állításnak megfelelően a z_0 pont "átszurt" környezetében f olyan hatványsorral állítható elő, amelyben n a legmagasabb negatív kitevő.

b) Megfordítva:

Ha az f függvény a $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja körüli Laurent sorában n a legmagasabb negatív kitevő, akkor a z_0 pont átszurt környezetében f felírható

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^n} \left[c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^n} \varphi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \end{aligned}$$

alakban, ahol φ a z_0 pont környezetében reguláris és korlátos. Az f függvény ezen előállításából nyilvánvaló:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

és

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^n f(z) = \varphi(z_0) = c_{-n} \neq 0,$$

ami azt jelenti, hogy f -nek a z_0 pontban n -ed rendű pólusa van. $\square$

E tétel következménye: a komplex függvény pólushely-környezetében való előállítására vonatkozó:

3.5.4. Tétel

Ha az f függvény z_0 izolált szinguláris pontja n -ed rendű pólushely, akkor z_0 átszurt környezetében f fölírható

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

alakban, ahol $\varphi(z)$ reguláris függvény és $\varphi(z_0) \neq 0$.

Bizonyítás

Ha z_0 az f függvény n -ed rendű pólushelye, akkor a 3.5.3. Tétel értelmében a z_0 pont átszurt környezetében f Laurent-sora:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \quad (c_{-n} \neq 0).$$

Ebből

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+n}$$

illetve

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$$

adódik, ahol $\varphi(z)$ reguláris a z_0 pont teljes környezetében (hiszen pozitív kitevőjű hatványsor összegfüggvénye) és $\varphi(z_0) \neq 0$ (mert $c_{-n} \neq 0$). □

Analitikus komplex függvény n -ed rendű pólushelyének és azonos-rendű zérushelyének kapcsolatát fejezi ki:

3.5.5. Tétel

a) Ha f analitikus a z_0 pont egy "átszurt" környezetében és a z_0 pont f -nek n -ed rendű pólushelye, akkor $\frac{1}{f}$ -nek n -szeres zérushelye;

b) Ha f reguláris z_0 -ban és a z_0 pont f -nek n -szeres zérushelye, akkor $\frac{1}{f}$ -nek n -ed rendű pólushelye.

Bizonyítás

Ha f -nek a z_0 pont n -ed rendű pólushelye, akkor - a 3.5.4. Tétel értelmében - a z_0 pont egy átszurt környezetében f felírható

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

alakban, ahol φ reguláris a z_0 pont teljes környezetében és $\varphi(z_0) \neq 0$.
Ebből következik, hogy z_0 -nak van olyan környezete, amelyben

$$\frac{1}{f} = \frac{(z - z_0)^n}{\varphi(z)}.$$

φ tulajdonságainak figyelembevételével a

$$\Phi = \frac{1}{\varphi}$$

függvény reguláris és korlátos úgy, hogy a z_0 pont környezetében

$$\frac{1}{f} = (z - z_0)^n \cdot \Phi,$$

ami - az állításnak megfelelően - azt jelenti, hogy a z_0 pont $\frac{1}{f}$ -nek n -szeres zérushelye.

b) Ha f -nek a z_0 pont n -szeres zérushelye, akkor - a 3.4.1. Tétel értelmében - a z_0 környezetében

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)$$

alakú, ahol φ reguláris és $\varphi(z_0) \neq 0$. Mivel φ folytonos is z_0 -ban, ezért z_0 -nak van olyan környezete, amelyben $\varphi \neq 0$. Ebben a környezetben tehát $\frac{1}{\varphi}$ reguláris és így ott Taylor-sorba fejthető:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

ahol $a_0 \neq 0$. Ebből következik, hogy a z_0 pont egy átszurt környezetében $\frac{1}{f}$ Laurent-sorba fejthető:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=-n}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k$$

Mivel a Laurent-sorfejtés egyértelmű, ezért $\frac{1}{f}$ -nek a z_0 pontban n -edrendű pólusa van. $\square$

(3) Lényeges szinguláris hely

Definíció

Az f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja lényeges szinguláris hely, ha ott f -nek sem véges, sem végtelen határértéke nem létezik.

Az ilyen típusú szingularitás szükséges és elégséges feltételét fejezi ki:

3.5.6. Tétel

Az f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja akkor és csak akkor lényeges szinguláris hely, ha a függvény $0 < |z - z_0| < R$ gyűrűbeli Laurent-sora végtelen sok negatív kitevőjű tagot tartalmaz.

Bizonyítás

A 3.5.2. és 3.5.3. Tételek értelmében az analitikus f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja akkor és csak akkor megszüntethető szinguláris hely vagy pólus, ha a függvény z_0 pont körüli Laurent-sora véges sok negatív kitevőjű tagot tartalmaz és ebből a tétel állítása már nyilvánvalóan következik. $\square$

Ha $z_0 \neq \infty$ az f függvény lényeges szinguláris helye, akkor - a definíció értelmében - kell lenni legalább két különböző z_0 -hoz konvergáló pontsorozatnak, amelyekhez tartozó függvényértékek sorozata nem tart azonos határértékhez. Ennél sokkal több is állítható; lényeges szinguláris hely környezetében a függvény bármely komplex értéket tetszőleges pontossággal megközelít. Ezt fejezik ki:

3.5.7. Tétel

(Casorati-Weierstrass tétel)

Ha az f függvény $z_0 \neq \infty$ izolált szinguláris pontja lényeges szinguláris hely, akkor tetszőleges -véges vagy végtelen- α komplex és $\varepsilon > 0$ valós számot megadva, létezik a z_0 pontnak olyan δ sugarú "át-szurt" környezete, amelyben bármely z -re

$$|f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben van olyan α szám, amelyhez a függvényértékek nem jutnak tetszőlegesen közel a z_0 pont σ sugarú környezetében. Azaz: ebben a környezetben z megválasztható úgy, hogy

$$|f(z) - \alpha| \geq \varepsilon$$

legyen. Ekkor a

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

formulával adott függvény reguláris és korlátos a z_0 pont σ sugarú átszurt környezetében (hiszen abszolút-értéke legfeljebb $\frac{1}{\varepsilon}$). Ezért g értelmezése kiterjeszthető a z_0 pontra úgy, hogy g reguláris lesz a z_0 pont teljes környezetében. A kiterjesztés kétféle lehet:

1. Ha $g(z_0) \neq 0$, akkor az $(f - \alpha)$ függvénynek és vele együtt f -nek is megszüntethető szingularitása van z_0 -ban.
2. Ha $g(z_0) = 0$, akkor - a 3.4.6. Tétel b) része értelmében - az $(f - \alpha)$ függvénynek és vele együtt f -nek is pólushelye van z_0 -ban.

Mivel mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, a tételben kimondott állítás igaz. $\square$

A most bizonyított tétel állításánál általánosabb és mélyebb eredményt tartalmaz:

3.5.8. Tétel (Picard-tétel)

Lényeges szinguláris hely bármely környezetében a függvény legfeljebb egy érték kivételével minden komplex értéket felvesz.

E rendkívül meglepő és mély tétel igazolását terjedelmes volta miatt a jegyzet keretei nem teszik lehetővé. Csupán egy példát mutatunk be illusztrálásul: az

$$f(z) = e^{1/z}$$

függvény a $z = 0$ lényeges szinguláris pont bármely környezetében minden véges α számértéket felvesz az egyetlen 0 érték kivételével. Ti. tetszőleges $\alpha \neq 0$ értéket a

$$z_k = \left[\ln \alpha + 2k\pi j \right]^{-1}$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontokban vesz fel, ahol $z_k \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \pm \infty$.

Megjegyzés

A komplex függvények (azaz: egyértékű komplex relációk) izolált szinguláris pontjainak értelmezése átvihető a többértékű relációkra is.

A többértékű relációk izolált szinguláris pontjai:

a relációk egyértékű ágainak izolált szinguláris pontjai és a relációk elágazási pontjai:

Az elágazási pont (I. fejezetbeli) definíciójának következménye, hogy környezetében a reláció nem fejthető Laurent-sorba, míg más izolált szinguláris pont körül a megfelelő ágon sorba-fejthető. A sorfejtés alapján az izolált szinguláris pontok jellege ugyanugy határozható meg, mint (egyértékű relációk) függvények esetében.

3.6. ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK IZOLÁLT SZINGULÁRIS HELYEI A VÉGTELENBEN

Komplex függvények végtelen távoli pont környezetéből (vagyis: az $R < |z| < \infty$ körgyűrűből) vizsgálatához szükséges az izolált szinguláris pontok $z = \infty$ -beli értelmezése.

Definíció

Az analitikus f függvénynek a $z = \infty$ izolált szinguláris pontja, ha van olyan $R > 0$ szám, hogy f a $z = \infty$ pont $|z| > R$ környezetében minden véges pontjában reguláris.

A $z = \infty$ pontbeli izolált szingularitás különböző típusait - a végesbeliével azonos módon - a függvény $z = \infty$ pontbeli határértéke segítségével értelmezzük. A

$$z = \frac{1}{\xi}$$

transzformáció alkalmazásával a $z = \infty$ pont a $\xi = 0$ pontba, a $|z| > R$ -ben reguláris f függvény, a $|\xi| < \frac{1}{R}$ -ben reguláris $f(\frac{1}{\xi})$ függvénybe megy át. Mivel

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

ezért az $f(z)$ függvény $z = \infty$ pontbeli és az $f(\frac{1}{\zeta})$ függvény $\zeta =$ pontbeli szingularitásai azonos jellegűek.

Tehát aszerint, hogy a $\zeta = 0$ pont az $f(\frac{1}{\zeta})$ függvény megszüntethető szinguláris helye, n -ed rendű pólusa vagy lényeges szinguláris helye, a $z = \infty$ pont az $f(z)$ függvény megszüntethető szinguláris helye, n -ed rendű pólusa vagy lényeges szinguláris helye.

Ebből következik:

3.6.1. Tétel

A $z = \infty$ pont az $R < |z| < \infty$ gyűrűben analitikus f függvénynek akkor és csak akkor

a) megszüntethető szinguláris helye:

ha a $z = \infty$ körüli Laurent-sora nem tartalmaz pozitív kitevőjű tagokat:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^0 c_k z^k \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$$

(ez az eset akkor áll fenn, ha f a $z = \infty$ környezetében korlátos és akkor $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c_0$);

b) n -ed rendű pólushelye:

ha a $z = \infty$ körüli Laurent-sora véges számú pozitív kitevőjű tagot tartalmaz:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^n c_k z^k; \quad (c_n \neq 0)$$

c) lényeges szinguláris helye:

ha a $z = \infty$ körüli Laurent-sora végtelen sok pozitív kitevőjű tagot tartalmaz:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k.$$

Bizonyítás

A tétel állítása a $z = \frac{1}{\zeta}$; $z_0 = 0$ helyettesítéssel a 3.5.2.,

3.5.3. és 3.5.6. tételek bizonyításával azonos. $\square$

A végtelen távoli pontbeli szingularitás fenti értelmezése után beszélhetünk arról is, hogy az f függvény egy olyan T tartományon analiti-

kus, amely a végtelen távoli pontot is tartalmazza. Ezen azt értjük, hogy f az eredeti értelemben analitikus abban a tartományban, amelyet T -ből a végtelen távoli pont elhagyásával nyerünk és a $z = \infty$ megszüntethető szingularitása f -nek.

3.7. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Teljesülnek-e a 3.2.1. egyértelműségi tétel feltételei a komplex számok H halmazán értelmezett

$$f(z) = e^z - 1$$

függvényre? Indokoljuk állításunkat.

A $(z_n = 2\pi nj); n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontsorozaton

$$f(z_n) = 0,$$

de

$$f(z_n) \neq 0$$

az egész komplex síkon.

Ugyanis a $(z_n = 2\pi nj); n \in \mathbb{N}^+$ pontsorozat az imaginárius tengely mentén a ∞ -hez tart és így annak ∞ -ben és nem H belsejében van torlódási pontja. Tehát az adott H halmazra és f függvényre nem teljesülnek az egyértelműségi tétel feltételei.

2. Legyen T_1 a $|z| < 1$ és T_2 a $|z - j| < \sqrt{2}$ egyenletű körtartomány (ld. 89. ábra), továbbá

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

a T_1 -en értelmezett függvény. Határozzuk meg f_1 -nek a $T_1 \cap T_2$ tartományon keresztül a T_2 tartományba történő analitikus folytatását.

Ha egyáltalán létezik f_1 -nek T_2 -beli analitikus folytatása, akkor az a 3.3.2. Tétel értelmében egyértelmű. Meghatározását - ami általában bonyolult feladat - egyszerűbbé teszi az a tény, hogy a T_1 tartományon az f_1 függvény egy ismert sor összegfüggvénye:

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Ebből az

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-j)-(z-j)} = \frac{1}{1-j} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-j}{1-j}}$$

azonos átalakítás révén nyilvánvaló, hogy a kívánt analitikus folytatás az

$$f_2(z) = \frac{1}{1-j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-j}{1-j} \right)^n$$

hatványsorral előállított függvény. Ez a sor ugyanis a

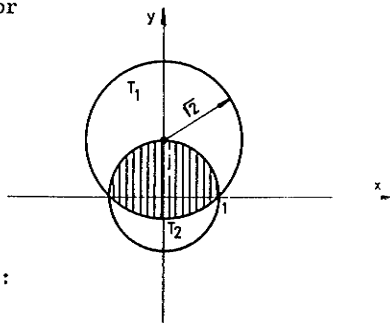
$$\left| \frac{z-j}{1-j} \right| < 1,$$

azaz a

$$T_2 : |z-j| < \sqrt{2}$$

körtartományon konvergens és ott összege:

$$\frac{1}{1-z} = f_1(z).$$



89. ábra

Igy a $T_1 \cap T_2$ tartományon $f_1 = f_2$, úgy hogy azok egymás analitikus folytatásai, mindkettő ugyanannak a függvénynek a $T_1 \cap T_2$ tartományon analitikus

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

függvénynek a "leszükitése".

3. Létezik-e komplexbeli analitikus folytatása a $(-\infty, +\infty)$ -ben értelmezett

$$f(x) = \sin x$$

valós változós függvénynek?

A $\sin x$ függvény bármely x hely, így az $x = 0$ hely környezetében is hatványsorba fejthető:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Az x valós változó helyére formálisan a z komplex változót téve a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

hatványsor adódik. Ez - mint láttuk - az egész komplex síkon konvergens és így ott reguláris (analitikus) komplex függvényt állít elő. Az előállított függvény $z = x$ értékre a valós $\sin x$ függvénnyel egyezik, és így annak komplexbeli analitikus folytatása. Ebből adódik, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

hatványsor a $\sin z$ függvény definíciójaként is tekinthető.

4. Határozzuk meg a $0 < |z| < 1$ tartományban az

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} \cdot \sin \frac{1}{1-z}$$

formulával adott függvény zérushelyeinek halmazát és azok torlódási pontjait.

Az adott függvény $0 < |z| < 1$ tartománybeli zérushelyei: a $\sin \frac{1}{z}$ és $\sin \frac{1}{1-z}$ függvények e tartományba eső zérushelyei.

A $\sin \frac{1}{z}$ függvény zérushelyei: a

$$z = \frac{1}{k\pi} ; \quad (k = 1, 2, \dots)$$

helyek. Ezek mindegyike az adott tartományba esik és torlódási pontjuk $z=0$.

A $\sin \frac{1}{1-z}$ függvény zérushelyei a

$$z = 1 - \frac{1}{n\pi}; \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

helyek, közülük csak az $n = 1, 2, 3, \dots$ értékekhez tartozók esnek az adott intervallumba és ezek torlódási pontja: 1.

4. Határozzuk meg - határértékképzéssel - az:

$$a) \quad f(z) = e^{1/z^2},$$

$$b) \quad g(z) = \frac{z+j}{z^3(z^2+1)},$$

$$c) \quad h(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$$

függvények izolált szinguláris pontjait és azok jellegét.

$$\frac{1}{z^2}$$

a) Az $f(z) = e^{1/z^2}$ függvény a $z = 0$ és $z = \infty$ pont kivételével mindenütt reguláris, így ezek a pontok a függvény izolált szinguláris pontjai. Éspedig:

$z = 0$: lényeges szinguláris hely

(ugyanis: $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z^2}$ nem létezik);

$z = \infty$: megszüntethető szinguláris hely

(ugyanis: $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{1/z^2} = 1$).

b) A g függvény a $z = 0$ és $z = \pm j$ pontok kivételével a teljes z síkon reguláris, így ezek izolált szinguláris pontok. Éspedig:

$z = 0$: harmadrendű pólushely

(ugyanis: $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \infty$, de $\lim_{z \rightarrow 0} z^3 \cdot g(z) = j$);

$z = -j$: megszüntethető szinguláris hely

(ugyanis: $\lim_{z \rightarrow j} g(z) = \lim_{z \rightarrow j} \frac{z + j}{z^3 (z+j)(z-j)} = -\frac{1}{2}$);

$z = j$: elsőrendű pólus

(ugyanis: $z = j$ a függvény reciprokának elsőrendű zérushelye).

c) A h függvénynek a valós tengely $[-1, 1]$ intervallumán végtelen sok izolált szinguláris pontja van:

$$z = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots$$

Ezek mindegyike elsőrendű pólus, mert ezek a függvény reciprokának, $\sin \frac{\pi}{z}$ -nek elsőrendű zérushelyei.

Szinguláris hely még a $z = 0$ pont is, de ez nem izolált szinguláris hely, mert torlódási pontja a szinguláris helyeknek.

5. Állapítsuk meg - Laurent sorfejtés segítségével - az

$$a) f(z) = \frac{1}{1-z};$$

$$b) g(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

függvény $z = \infty$ -beli szingularitásának jellegét.

a) Az f függvénynek a végtelenben megszüntethető szinguláris helye van. Ugyanis a $z = \infty$ pont $|z| > 1$ környezetében f Laurent-sora:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Ez a sor nem tartalmaz pozitív kitevőjű tagokat, ezért a függvény értelmezését az

$$f(\infty) = 0$$

értékkel kiegészítve a végtelenbeli szingularitás megszüntethető.

b) A g függvénynek a végtelenben lényeges szinguláris helye van. Ugyanis a $z = \infty$ körüli Laurent-sora végtelen sok pozitív kitevőjű tagot tartalmaz:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} = 1 - \frac{1}{2!} z + \frac{1}{3!} z^2 - \frac{1}{4!} z^3 + \dots$$

6. Határozzuk meg az

$$a) \quad f(z) = \frac{z}{e^{1/z} - 1}$$

és a

$$b) \quad g(z) = \cos\left(z^2 + \frac{1}{z}\right)$$

függvény, valamint a

$$c) \quad H(z) = \frac{1}{\operatorname{tg}(z^2 + 2z + 2)}$$

reláció izolált szinguláris helyeit és azok jellegét.

a) Az f függvény izolált szinguláris pontjai a

$$z_k = \frac{j}{2k\pi} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$z = 0,$$

$$z = \infty,$$

pontok. Akár határértékkel, akár Laurent sorfejtéssel eldönthető, hogy a

$$z_k = \frac{j}{2k\pi} \text{ pontok elsőrendű pólushelyek;}$$

$$z = 0 \quad \text{lényeges szinguláris hely;}$$

$$z = \infty \quad \text{másodrendű pólus.}$$

b) A g függvény izolált szinguláris pontjai a

$$z = 0 \quad \text{és} \quad z = \infty$$

pontok. Mindkettő a g függvény lényeges szinguláris helye.

c) A H reláció izolált szinguláris pontjai: a nevező zérushelyei, vagyis a

$$z = -1 + j$$

és

$$z = -1 - j$$

pontok. Mindkettő a reláció elágazási pontja, így egyik sem izolált szinguláris pont.

RESIDUUM-ELMÉLET ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

A residuum a komplex analízis egyik alapvető fogalma. Felhasználásával egyszerűen igazolhatók az analízis és az algebra egyes tételei; meghatározhatók - majdnem teljesen algebrai módszerekkel - zárt görbe menti komplex integrálok; kiszámíthatók olyan - elsősorban improprius - valós integrálok, amelyek a valós analízis módszereivel csak nagyon bonyolultan voltak lehetségesek. A residuum-elmélet megkönnyíti analitikus függvények izolált szinguláris pont környezetében való vizsgálatát; lehetővé teszi szinguláris pontokkal rendelkező függvények integrál előállítását; nagymértékben elősegíti lineáris rendszerek stabilitásvizsgálatát stb.

Az alábbiakban a residuum értelmezése után röviden ismertetünk néhányat az említett alkalmazások közül.

1.§ ANALITIKUS FÜGGVÉNY ISZOLÁLT SZINGULÁRIS PONTBELI RESIDUUMA

1.1. A RESIDUUM ÉRTELMEZÉSE

Az f komplex függvény $z = a$ izolált szinguláris pont körüli Laurent-sorának c_{-1} együtthatója különleges jelentőségű, ezért erre külön elnevezést vezettek be: "az f függvény $z = a$ ponthoz tartozó residuuma". Jele:

$$c_{-1} = \operatorname{res}_{z=a} f(z).$$

Felhasználva a c_{-1} együttható - Laurent-sornál megismert - integrálaló-állítását:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} f(z) dz,$$

ahol $z = a \neq \infty$ és G^+ tetszőleges, pozitív körüljárású rektifikálható zárt Jordan görbe, amely benne van a $z = a$ pont átszurt környezetében, ahol f analitikus.

Ebből az alakból nyilvánvaló a residuum (maradék) elnevezés, ugyanis az f függvény $z = a$ pont körüli Laurent-sorának integrálásakor csak ez az egy tag marad meg, az összes többi tag integrálja: 0.

A residuum értelmezése kiterjeszthető a $z = \infty$ pontra is:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^-} f(z) dz,$$

ahol G a $z = \infty$ pont környezetében levő tetszőleges, rektifikálható zárt Jordan-görbe (pl. elég nagy sugarú kör), amelynek külsejében f analitikus és amelynek negatív irányú bejárása felel meg a $z = \infty$ pont pozitív körüljárásának (ld. Riemann-gömb és sztereografikus leképezés).

Tehát összefoglalva:

Definíció

a) Az f függvény $z = a \neq \infty$ izolált szinguláris ponthoz tartozó residuuma; az "a" átszurt környezetében f -et előállító Laurent-sor (-1) kitevős tagjának együtthatója:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} f(z) dz.$$

b) Az f függvény $z = \infty$ izolált szinguláris ponthoz tartozó residuuma; a ∞ környezetében f -et előállító Laurent-sor (-1) kitevős tagjának negatív előjellel vett együtthatója:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} f(z) dz.$$

Megjegyzés

A residuum definíciójából következik:

1. Az f függvény $z = a \neq \infty$ pontbeli residuuma csak akkor lehet zérustól különböző érték, ha $z = a$ pólus, vagy lényeges szinguláris hely. Megszüntethető szinguláris hely esetén a residuum szükségképpen zérus.
2. Az f függvény $z = \infty$ pontbeli residuuma bármely típusú szingularitás esetén is lehet zérustól különböző érték. (Megszüntethető szingularitás esetén sem feltétlenül zérus pl. az $f = \frac{1}{z}$ függvénynek a $z = \infty$ pont megszüntethető szinguláris helye és mégis $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1$).

1.2. A RESIDUUM MEGHATÁROZÁSÁNAK NÉHÁNY MÓDJA

Az elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt nagy jelentőségű residuum-fogalom használhatósága azon mulik, hogy értéke egyszerűen számítható-e. Értékének a definíció alapján történő meghatározása általában sok számolást igénylő feladat, hiszen ahhoz vagy valamilyen módon elő kell állítani az f függvény megfelelő izolált szinguláris pont körüli Laurent-sorát és abból leolvasni annak c_{-1} együtthatóját, vagy ki kell számítani a megfelelő izolált szinguláris pont körüli $\oint_{G^+} f(z) dz$ integrált.

Bizonyos esetekben ezeknél jóval egyszerűbb, közvetlen módszer adható a residuum meghatározására. Közülük néhányat az alábbiakban ismertetünk;

I. Residuum-meghatározás elsőrendű pólus esetén

Az elsőrendű pólushely Laurent-sorral kifejezett szükséges és elégséges feltételén alapszik a residuum kiszámítására vonatkozó:

1.2.1. Tétel

Ha az f függvénynek a $z = a \neq \infty$ pont elsőrendű pólusa, akkor

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a) \cdot f(z)].$$

Bizonyítás

Az f függvénynek a $z = a$ elsőrendű pólushely körüli Laurent-sora:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-a)^n = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1 (z-a) + \dots$$

A $z=a$ pontbeli szingularitást az egyenlőség $(z-a)$ -val való beszorzásával megszüntetve, majd határértéket véve:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [c_{-1} + c_0 (z-a) + \dots] = c_{-1}$$

adódik, ami éppen az f függvény $z = a$ ponthoz tartozó residuum. $\square$

Ugyancsak elsőrendű pólusbeli residuum kiszámítására vonatkozik;

1.2.2. Tétel

Ha a $z = a \neq \infty$ pontban elsőrendű pólussal rendelkező függvény

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

alakú, úgy hogy

- a) $g(z)$ és $h(z)$ a $z = a$ pont környezetében reguláris,
- b) $g(a) \neq 0$,
- c) $h(a) = 0$, de $h'(a) \neq 0$,

akkor

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \operatorname{res}_{z=a} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Bizonyítás

Mivel a $z = a$ pont elsőrendű pólus, ezért a $(z-a)$ -val beszorzott

$$(z-a) \cdot f(z) = (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}}$$

függvény a $z = a$ pontban már megszüntethető szingularitása, és így az előző módszer alkalmazásával:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a) f(z)] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)},$$

az állításnak megfelelően. $\square$

II. Residuum meghatározása $m \geq 2$ rendű pólus esetén

Az m -ed rendű pólushely Laurent-sorral kifejezett szükséges és elégséges feltételén alapszik a residuum meghatározására vonatkozó:

1.2.3. Tétel

Ha a $z = a \neq \infty$ pont az f függvény m -ed rendű pólusa, akkor

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m \cdot f(z) \right].$$

Bizonyítás

Az f függvény $z = a$, m -ed rendű pólushely körüli Laurent-sora:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1 (z-a) + \dots$$

Ezt $(z-a)^m$ -mel beszorozva, a $z = a$ pontbeli szingularitás megszűnik:

$$(z-a)^m \cdot f(z) = c_{-m} + c_{-m+1} (z-a) + \dots + c_{-1} (z-a)^{m-1} + \dots$$

A kapott reguláris függvényt $(m-1)$ -szer differenciálva, majd a $z = a$ pontban határértékét képezve:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m \cdot f(z) \right] = (m-1)! c_{-1}$$

Ebből a $z=a$ pontbeli residuumra a tételbeli formula adódik. $\square$

1.3. RESIDUUM TÉTEL KOMPLEX INTEGRÁLOK MEGHATÁROZÁSA RESIDUUMMAL

A residuum-fogalom bevezetése lehetővé teszi izolált szinguláris pontokat körülvevő zárt görbementi komplex integrálok értékének algebrai uton való meghatározását. Ezt fejezi ki:

1.3.1. Tétel (Residuum-tétel)

Ha az f függvény reguláris a pozitív irányítású G^+ rektifikálható zárt Jordan-görbén és belsejében - a belsejében levő - véges számú $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ szinguláris pont kivételével, akkor

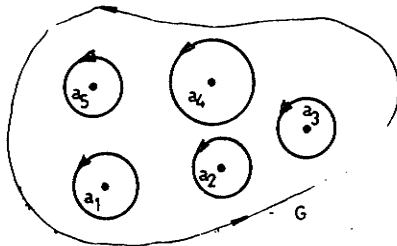
$$\oint_{G^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

Bizonyítás

Vegyük körül az a_k ; $k=1, 2, \dots, n$ szinguláris pontokat a G görbe belsejében haladó, a_k középpontú, egymásba nem nyúló kis C_k körökkel ($n=5$ esetén, ld. 1.90. ábra). Az általánosított Cauchy-integrál-tétel értelmében a G görbementi integrál értéke megegyezik az azonos irányítású C_k körökön vett integrálok összegével. Mivel minden egyes pozitív irányítású C_k ;

$k=1, 2, \dots, n$ körön vett integrál értéke:
 $2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$ (mert minden egyes körön

belül a_k az egyetlen szinguláris pont), ezért



90. ábra

$$\oint_{G^+} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \left[\oint_{C_k^+} f(z) dz \right] = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$$

az állításnak megfelelően. $\square$

A residuum-fogalom ∞ -re való kiterjesztése, valamint a residuum-tétel alapján egyszerűen belátható:

1.3.2. Tétel

Ha az f komplex függvény véges számú izolált szinguláris pont kivételével reguláris a zárt komplex síkon (ill. a Riemann-gömbön), akkor residuumainak összege (a $z = \infty$ -beli residuumot is beleértve) zérussal egyenlő.

Bizonyítás

Vegyünk fel egy origó középpontu elég nagy sugaru K kört, amely a belsejében tartalmazza f végesben levő összes szinguláris pontját, a $z = a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ pontokat. E pontokbeli residuumok összege - a residuum-tétel értelmében -:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{K^+} f(z) dz ;$$

a $z = \infty$ pontbeli residuum - a definíció értelmében -:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = - \frac{1}{2\pi j} \oint_{K^+} f(z) dz .$$

Igy

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

a tétel állításának megfelelően. $\square$

1.4. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg az

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1}$$

függvény $z = 2\pi j$ pontbeli és a

$$g(z) = \frac{e^{2z}}{(1+z)^2}$$

függvény $z = \infty$ pontbeli residuumát.

a) Az adott f függvénynek $z = 2\pi j$ elsőrendű pólushelye. Ugyanis

$$\frac{z^2}{e^z - 1} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

ahol $g(2\pi j) \neq 0$, $h(2\pi j) = 0$ és $h'(2\pi j) \neq 0$. Így az 1.2.2. Tétel értelmében:

$$\operatorname{res}_{z=2\pi j} f(z) = \frac{g(2\pi j)}{h'(2\pi j)} = \frac{(2\pi j)^2}{e^{2\pi j}} = -4\pi^2.$$

b) A g függvénynek a $z = \infty$ -en kívül csak $z = -1$ az izolált singuláris pontja, ezért az 1.3.2. Tétel felhasználásával:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} g(z) = -\operatorname{res}_{z=-1} g(z).$$

Mivel g -nek a $z = -1$ másodrendű pólusa, ezért az 1.2.3. Tétel értelmében:

$$\operatorname{res}_{z=-1} g(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[(1+z)^2 \frac{e^{2z}}{(1+z)^2} \right] = 2e^{-2}$$

és így

$$\operatorname{res}_{z=\infty} g(z) = -2e^{-2}.$$

2. Határozzuk meg az

$$f(z) = \sqrt{(z-1)(z-2)} \quad (-\pi \leq \arg z < \pi)$$

függvény $z = \infty$ pontbeli residuumát.

Az adott függvény $z = \infty$ pont környezetére érvényes Laurent-sora:

$$\begin{aligned} \sqrt{(z-1)(z-2)} &= z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= z \left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{8z^2} \pm \dots\right) \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} \pm \dots\right) = \\ &= z \left(1 - \frac{3}{2z} + \frac{9}{8z^2} \pm \dots\right) \end{aligned}$$

Igy a $z = \infty$ pontbeli residuum definíciójának értelmében:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{9}{8}.$$

3. Határozzuk meg az

$$f(z) = \frac{z^{2n}}{1+z^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

függvény összes izolált szinguláris pontbeli residuumát és igazoljuk, hogy azok összege (a $z = \infty$ pontbeli residuumot is beleértve) zérus.

Az adott függvénynek az

$$a_k = \sqrt[n]{-1} = e^{j \frac{(2k+1)\pi}{n}}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

pontok elsőrendű pólusai, a

$$z = \infty$$

n -ed rendű pólusa. Így

$$\operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = \frac{g(a_k)}{h'(a_k)} = \frac{a_k^{2n}}{na_k^{n-1}} = \frac{a_k^{n+1}}{n} = -\frac{a_k}{n} = -\frac{1}{n} e^{j \frac{(2k+1)\pi}{n}}$$

és

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq 1, \\ -1, & \text{ha } n = 1 \end{cases}$$

(mert:

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n} = z^{2n} : (1+z^n) = z^n - 1 + \frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{2n}} + \dots)$$

Tehát a residuumok összege $n \neq 1$ esetén:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = 0 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{j \frac{(2k+1)\pi}{n}} = 0;$$

$n = 1$ esetén pedig:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -1 + 1 = 0.$$

4. Határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{e^z - 1}{z(z^2 + 3z - 4)} dz$$

integrál értékét, ha G a pozitív irányítású $|z| = 3$ egyenletű kör.

Az integrálandó függvénynek $z = 0$ megszüntethető szinguláris pontja, $z = 1$ és $z = -4$ elsőrendű pólusa. Közülük csak a $z = 0$ és $z = 1$ esik a $|z| = 3$ egyenletű kör belsejébe. Mivel megszüntethető szinguláris pontban a residuum zérus, ezért a residuum tétel értelmében:

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z - 1}{z(z-1)(z+4)} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{2\pi j (e-1)}{5}.$$

5. Határozzuk meg

$$\oint_G \frac{\operatorname{sh} z}{z^3(z^2 + 1)} dz$$

integrál összes lehetséges értékét a különböző pozitív irányítású G zárt Jordan-görbék mentén (feltéve, hogy azok nem mennek át az integrálandó függvény egyetlen szinguláris pontján sem).

Az integrálandó függvény szinguláris pontjai: $z_1 = 0$ másodrendű pólus, $z_2 = j$ és $z_3 = -j$ elsőrendű pólusok. E pontokbeli residuumok:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{\operatorname{sh} z}{z(z^2 + 1)} \right] = 0,$$

$$\operatorname{res}_{z=j} f(z) = \lim_{z \rightarrow j} \frac{\operatorname{sh} z}{z^3(z+j)} = \frac{j \sin 1}{2},$$

$$\operatorname{res}_{z=-j} f(z) = \lim_{z \rightarrow -j} \frac{\operatorname{sh} z}{z^3(z-j)} = -\frac{j \sin 1}{2}.$$

Igy a residuum tétel felhasználásával:

$$\oint_G \frac{\operatorname{sh} z}{z^3(z^2 + 1)} dz = \begin{cases} 0, & \text{ha } \begin{cases} \text{vagy nincs szinguláris pont } G \text{ belsejében,} \\ \text{vagy csak } z = 0 \text{ van } G \text{ belsejében,} \end{cases} \\ \mathcal{I}(\sin 1), & \text{ha } \begin{cases} \text{vagy csak } z = j \text{ van } G \text{ belsejében,} \\ \text{vagy } z = 0 \text{ és } z = j \text{ van } G \text{ belsejében,} \end{cases} \\ -\mathcal{I}(\sin 1), & \text{ha } \begin{cases} \text{vagy csak } z = -j \text{ van } G \text{ belsejében,} \\ \text{vagy } z = 0 \text{ és } z = -j \text{ van } G \text{ belsejében,} \end{cases} \\ 0, & \text{ha } \begin{cases} \text{vagy } z = j \text{ és } z = -j \text{ van } G \text{ belsejében,} \\ \text{vagy } z = 0, z = j \text{ és } z = -j \text{ van } G \text{ belsejében.} \end{cases} \end{cases}$$

2.§ HATÁROZOTT INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA RESIDUUM-TÉTELLEL

A residuum-tétel felhasználható valós integrálok kiszámítására is. Alkalmazása olyankor célszerű, amikor a primitív függvény nem határozható meg, vagy amikor meghatározható ugyan, de nagyon bonyolult analízisbeli eszközökkel.

A residuummal történő számítási módnak is megvannak a maga korlátai. Alkalmazása azon múlik, hogy a valós változós függvény valós intervallumra vonatkozó integrálját át tudjuk-e alakítani komplex változós függvény zárt görbementi integráljává. Az integrálandó valós függvény komplex értékekre való kiterjesztése (analitikus folytatása) általában nem okoz problémát. A gyakorlatban ugyanis többnyire elemi függvények integráljai fordulnak elő, amelyek automatikusan kiterjeszthetők komplex változóra; vagy elemi függvényekből összetett olyan függvények integráljai, amelyek felfoghatók egy komplex változós függvény valós vagy képzetes részeként. Jóval nagyobb nehézséget okoz az integrációs intervallum "alkalmas" zárt görbére való kiegészítése. Erre általános, minden esetben alkalmazható módszer nincs, a kiegészítéshez rendszerint a feladattól függő speciális ötletre van szükség.

Az alábbiakban ismertetünk egy-két módszert, amelyek alkalmasak az alkalmazásokban előforduló néhány egyszerű típusu valós integrál residuummal történő kiszámítására.

$$2.1. \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx \quad \text{TÍPUSU INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA}$$

Az olyan típusu határozott integrálok, ahol az integrandus $\sin x$ -nek és $\cos x$ -nek racionális függvénye, könnyen kiszámíthatók a residuum tétel segítségével.

Ilyenkor kézenfekvő a z komplex változó bevezetése, és pedig a

$$z = e^{jx}$$

alakban. Ezzel

$$dx = \frac{1}{j} \frac{dz}{z},$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

és

$$[0, 2\pi] \longleftrightarrow |z| = 1$$

ugy, hogy

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = -j \oint_{|z|=1} R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{z}.$$

Mivel a jobb oldali integrandus a z komplex változó racionális törtfüggvénye, amely a $|z|=1$ kör belsejében a pólushelyek kivételével reguláris, ezért az integrál kiszámítására alkalmazható a residuum-tétel. Így

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \begin{cases} 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} R^*(z) \\ 0 \end{cases}$$

attól függően, hogy az integrálandó $R^*(z)$ racionális törtfüggvénynek vannak pólusai a $|z|=1$ kör belsejében, vagy sem.

$$2.2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{TÍPUSU INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA}$$

Az ilyen típusú valós improprius integrálok residuum-tétellel történő kiszámításához szükséges, hogy a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett $f(x)$ valós függvény értelmezését kiterjesszük (analitikusan folytassuk) az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsíkra és a kiterjesztéssel nyert $f(z)$ komplex függvény bizonyos feltételeknek tegyen eleget. E feltételek megfogalmazásához az alábbi lemma szükséges.

1. Lemma

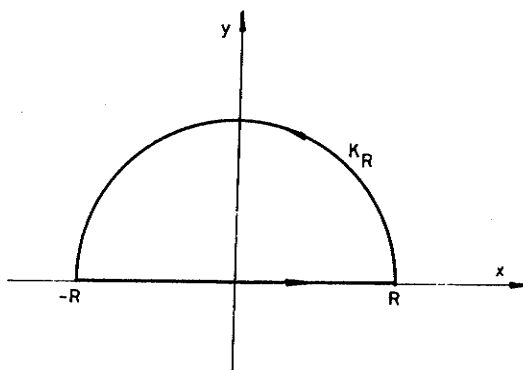
Ha az f komplex függvény reguláris az $\text{Im } z > 0$ félsíkon, kivéve véges- (vagy megszámlálhatóan végtelen-) sok izolált szinguláris pontot és léteznek olyan R_0 , M és σ pozitív számok, hogy az $\text{Im } z > 0$ félsík minden $|z| > R_0$ pontjára

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\sigma}},$$

akkor

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) dz = 0,$$

ahol $K_R: |z| = R; \text{Im } z > 0$ félkörív (ld. 91. ábra).



91. ábra

Bizonyítás

A komplex vonalintegrál tulajdonságának és az f -re vonatkozó lemma-beli feltételek figyelembevételével tetszőleges $R > R_0$ -ra

$$\left| \int_{K_R} f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| ds < \frac{M \pi R}{R^{1+\sigma}} = \frac{\pi M}{R^{\sigma}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Tehát

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) dz = 0$$

a lemma állításának megfelelően. $\square$

Megjegyzés

(1) A lemmabeli állítás akkor is teljesül, ha f az $\operatorname{Im} z \leq 0$, vagy a $\operatorname{Re} z \geq 0$ félsíkok valamelyikén reguláris. Ezekben az esetekben a K_R félkörív is a megfelelő félsíkban van.

(2) A lemmabeli becslés akkor is teljesül, ha f reguláris a végtelen távoli pont környezetében és $z = \infty$ legalább másodrendű zérushelye f -nek. Ilyenkor ugyanis a $z = \infty$ pont környezetében f Laurent-sora:

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots = \frac{\varphi(z)}{z^2}$$

és $|\varphi(z)| < M$, úgy hogy

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^2}; \quad |z| > R_0$$

ami $\sigma = 1$ -re megegyezik a lemma-beli

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\sigma}}$$

becsléssel.

Ezek előrebocsátása után már megfogalmazható a kérdéses valós improprius integrál residuum-tétellel történő kiszámítására vonatkozó tétel:

2.2.1. Tétel

Ha a $-\infty < x < \infty$ intervallumon értelmezett $f(x)$ valós függvénynek létezik az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsíkbeli analitikus folytatása: $f(z)$ és az ott kielégíti az 1. lemma feltételeit, akkor létezik az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ valós im-

proprius integrál (vagy legalább annak Cauchy-féle főértéke) és

a) amennyiben $f(z)$ -nek nincsenek szinguláris pontjai a valós tengelyen, akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z),$$

ahol a_k ; $k=1, 2, \dots, n$ az f függvény $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkon levő szinguláris pontja;

b) amennyiben $f(z)$ -nek vannak szinguláris pontjai a valós tengelyen: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) + \sum_{i=1}^{\ell} \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \int_{K_i^+} f(z) dz,$$

ahol K_{ϵ_i} , $i=1, 2, \dots, \ell$ az α_i pontokat kirekesztő ϵ_i sugarú félkörívek

Bizonyítás

A tételt azon feltétel mellett bizonyítjuk, hogy az improprius integrál Cauchy-főértéke:

$$\text{c.f.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

érvényes. Ha maga az improprius integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{P, R \rightarrow \infty} \int_{-P}^R f(x) dx$$

is létezik, az ugyis megegyezik a Cauchy-főértékkel.

a) Tegyük fel, hogy $f(z)$ -nek nincsenek szinguláris pontjai a valós tengelyen.

Ilyen esetben az improprius integrál határértékként való kiszámításához szükséges $[-R, R]$ intervallumot a föléje, mint átmérő fölé emelt K_R félkörívvel egészítjük ki zárt görbévé (ld. 91. ábra). Ha R -et olyan nagynak választjuk, hogy f -nek az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkon levő valamennyi

szinguláris pontja a zárt görbe belsejébe essen, akkor a residuum-tétel értelmében:

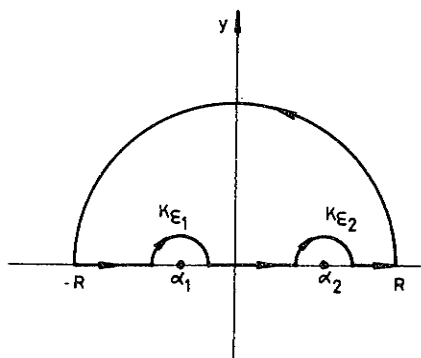
$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{K_R^+} f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

Mivel a lemma értelmében $R \rightarrow \infty$ esetén az f függvény K_R körív-menti integrálja zérushoz tart, ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

b) Tegyük fel, hogy $f(z)$ -nek vannak szinguláris pontjai a valós tengelyen; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Ilyen esetben a $[-R, R]$ intervallum minden egyes szinguláris pontját egy kis ϵ_i sugarú K_{ϵ_i} félkörívvel kirekesztjük és az így nyert görbét a $[-R, R]$ intervallum, mint átmérő fölé emelt félkörívvel zárt görbévé egészítjük ki (ld. 92. ábra).



92. ábra

Ha R -et olyan nagynak választjuk, hogy f -nek a valós tengelyre és az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkra eső valamennyi szinguláris pontja a nyert görbe belsejébe essen, akkor a residuum-tétel értelmében:

$$\sum_{i=0}^n \int_{\ell_i} f(z)dx + \sum_{i=1}^n \int_{K_{\epsilon_i}^-} f(z)dz + \int_{K_R} f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$$

(ahol ℓ_i : az $\alpha_i + \epsilon_i$ és $\alpha_{i+1} - \epsilon_{i+1}$ pontokat összekötő egyenesszakasz).

Mivel $\mathcal{C}_i \rightarrow 0$ esetén az egyenesszakaszok menti integrálok összege a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ improprius integrálhoz; $R \rightarrow \infty$ esetén a K_R félkörív menti integrál - a lemma értelmében - zérushoz tart, ezért:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) + \sum_{i=1}^l \lim_{\mathcal{C}_i \rightarrow 0} \int_{K_{\mathcal{C}_i}^+} f(z)dz$$

a tétel állításának megfelelően. $\square$

$$2.3. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{+j\alpha x} dx \quad \text{ALAKU INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA.} \\ \text{JORDAN-LEMMA}$$

A valós improprius integrálok e fontos osztályának residuummal való kiszámítására vonatkozó tétel megfogalmazásához szükséges a Jordan-lemma ismerete.

Jordan-lemma

Ha az f komplex függvény reguláris az $\operatorname{Im} z \geq 0$ felső félsíkon, kivéve véges számú izolált szinguláris pontot és $|z| \rightarrow \infty$ esetén $\operatorname{arc} z$ -re nézve ($0 \leq \operatorname{arc} z < \pi$) egyenletesen konvergál zérushoz, akkor tetszőleges $\alpha > 0$ -ra

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) e^{j\alpha z} dz = 0,$$

ahol $K_R: |z| = R; \operatorname{Im} z > 0$ félkörív.

Bizonyítás

Az a feltétel, hogy $R \rightarrow \infty$ esetén az f függvény az R sugarú félkörívek mentén egyenletesen konvergál 0-hoz, azt jelenti, hogy

$$|f(z)| < \sigma_R, \quad \text{ha } |z| = R$$

és

$$\sigma_R \rightarrow 0, \quad \text{ha } R \rightarrow \infty.$$

A

$$z = Re^{j\varphi}$$

összefüggéssel bevezetve a φ új integrációs változót és felhasználva a

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi, \quad \text{ha} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

relációt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_R} f(z) e^{j\alpha z} dz \right| &\leq \sigma_R \int_0^\pi \left| e^{j\alpha z} \right| \left| jRe^{j\varphi} \right| d\varphi = \\ &= \sigma_R R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi = 2\sigma_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq 2\sigma_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{\frac{-2\alpha R \varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{\pi}{\alpha} \sigma_R (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ha $R \rightarrow \infty$, a lemma állításának megfelelően. $\square$

Megjegyezzük, hogy a Jordan-lemma $\alpha < 0$ és $\alpha = j\beta$; $\beta > 0$ ill. $\beta < 0$ esetekben is érvényes, attól függően, hogy az f függvényre tett kikötések melyik félsíkon teljesülnek. Éspedig:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) e^{-j\alpha z} dz = 0, \quad \text{ha az} \quad \operatorname{Im} z \leq 0;$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) e^{\beta z} dz = 0, \quad \text{ha a} \quad \operatorname{Re} z \geq 0;$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) e^{-\beta z} dz = 0, \quad \text{ha a} \quad \operatorname{Re} z \leq 0$$

félsíkon teljesülnek az f -re vonatkozó kikötések, és a K_R félkörívek is a megfelelő félsíkon vannak.

A Jordan-lemma ismeretében már kimondható a kérdéses improprius integrál residuummal történő kiszámítására vonatkozó tétel:

2.3.1. Tétel

Ha a $-\infty < x < \infty$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvénynek létezik analitikus folytatása az $\text{Im } z \geq 0$ félsíkon; $f(z)$ és az ott kielégíti a Jordan-lemma feltételeit, akkor létezik $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\alpha x} dx$ improprius integrál és

a) amennyiben $f(z)$ -nek nincsenek szinguláris pontjai a valós tengelyen, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{j\alpha x} dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=a_k} f(z),$$

ahol $z = a_k$, $k=1, 2, \dots, n$ az f függvény $\text{Im } z > 0$ félsíkon levő izolált szinguláris pontjai;

b) ha $f(z)$ -nek a valós tengelyen is vannak szinguláris pontjai: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\alpha x} dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=a_k} f(z) - \sum_{i=1}^l \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \int_{K_{\epsilon_i}} f(z)e^{j\alpha z} dz$$

ahol K_{ϵ_i} az α_i szinguláris pontot "kirekesztő" negatív irányítású félkörív (ld. 92. ábra).

Bizonyítás

Analóg a 2.2.1. Tétel bizonyításával. $\square$

Megjegyezzük, hogy hasonló tételek érvényesek az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\alpha x} dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\alpha x} dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\alpha x} dx$$

tipusu integrálok residuummal történő meghatározására is.

2.4. $\int_0^{\infty} R(x) \cdot f(x) dx$ TÍPUSU INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA,
HA AZ INTEGRÁLANDÓ FÜGGVÉNY ANALITIKUS
FOLYTATÁSA TÖBBÉRTÉKŰ RELÁCIÓ

Mivel a Cauchy-integrál-tételen alapuló residuum-tétel egyértékű reguláris függvények integrálására vonatkozik, ezért a valós integrálok residuum-tétellel történő kiszámítása csak abban az esetben alkalmazható, amikor az integrálandó $f(x)$ valós változójú függvény komplex síkbeli analitikus folytatása egyértékű reguláris függvény. Ha az analitikus folytatás többértékű reláció (mint pl. $\sqrt{z}$ vagy $\ln z$), akkor a valós integrál integrációs intervallumát úgy kell kiegészíteni komplex síkbeli zárt görbével, hogy az ne tartalmazza a reláció egyetlen elágazási pontját sem, és integrálandó függvényként a relációnak azt az egyértékű reguláris ágát kell választani, amely a konstruált görbe által határolt tartományon $f(x)$ -nek közvetlen analitikus folytatása. Ez az eljárás lehetővé teszi, hogy a valós integrálok residuummal történő kiszámítására alkalmazott eddig megismert módszereket kiterjesszük olyan esetekre is, amikor az integrálandó függvény analitikus folytatása többértékű reláció.

Az alábbiakban részletesebben ismertetjük ezt az eljárást az alkalmazásokban fontos szerepet játszó

$$\int_0^{\infty} R(x) \cdot f(x) dx$$

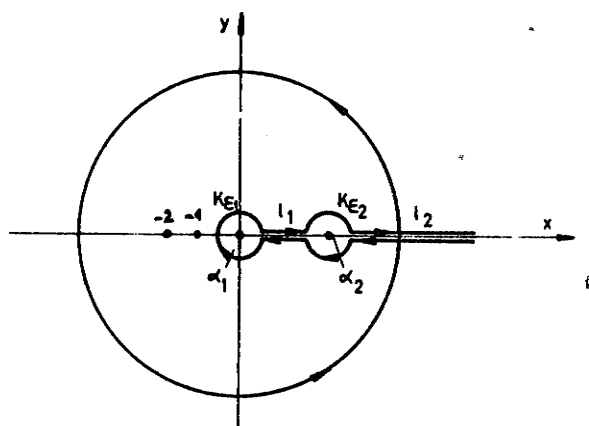
tipusu valós integrálok kiszámítása kapcsán (ahol $R(x)$ a valós tengelyen szinguláris ponttal rendelkező függvény, $f(x)$ -nek pedig a komplex síkbeli analitikus folytatása többértékű reláció).

Kiválasztjuk az integrálandó valós függvény analitikus folytatásaként nyert többértékű reláció egyik reguláris ágát, $R(z) \cdot f(z)$ -t. Ez - mint tudjuk - a többértékű reláció elágazási pontjait összekötő egyenesszakaszok mentén bemetszett, többszörösen lefedett komplex-sík (többlevelű Riemann-felület) egyik levele. Ezen a levélen a valós integrációs intervallumot (jelen esetben a pozitív valós tengelyt) olyan pozitív irányítású zárt görbével egészítjük ki, amely az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ elágazási pontokat körülvevő

$K_{\mathcal{C}_i}$; $i=1, 2, \dots, k$ kis körökből, a bemetszések ellentétes partjain levő

ℓ_i ; $i=1, 2, \dots, (k-1)$ egyenesszakaszokból és a $|z| = R$ körívből áll (ld.

93. ábra, ahol az elágazási pontok: $z = 0$, $z = 3$ és $z = \infty$; a szinguláris pontok: $z = -2$ és $z = -1$). Amennyiben az integrálandó komplex függvénynek véges- (vagy megszámlálhatóan végtelen-) sok szinguláris pontja



93. ábra

van: $a_1, a_2, \dots, a_n$, amelyeket ez a zárt görbe a belsejében tartalmaz, akkor a residuum-tétel alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=R} R(z) f(z) dz + \sum_{i=1}^k \left[\int_{K_{\epsilon_i}} R(z) f(z) dz \right] + \sum_{i=1}^k \left[\int_{\ell_i^+} R(x) \cdot f(x) dx \right] = \\ = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} [R(z) \cdot f(z)] . \end{aligned}$$

Az integrálandó függvény többnyire olyan tulajdonságu, hogy $R \rightarrow \infty$ esetén a K_R menti, $\epsilon_i \rightarrow 0$ esetén a K_{ϵ_i} menti integrálok zérushoz tartanak, az ℓ_i egyenesszakaszok menti integrálok összege pedig kapcsolatban van a kérdéses valós integrállal, általában annak konstans-szorosa. Ilyen esetben tehát

$$\sum_{i=1}^k \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \int_{\ell_i^+} R(x) \cdot f(x) dx = c \int_0^\infty R(x) f(x) dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} R(z) \cdot f(z)$$

amiből:

$$\int_0^{\infty} R(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{c} 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} R(z) \cdot f(z).$$

2.4. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. A residuum-tétel alkalmazásával határozzuk meg az

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$$

valós integrál értékét, ahol $a > 1$ rögzített konstans.

A kérdéses valós integrál (amely $\sin t$ racionális függvénye) az

$$e^{jt} = z$$

$$\sin t = \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

$$dt = \frac{1}{jz} dz$$

helyettesítéssel egy komplex függvény $|z|=1$ kör menti integráljává transzformálódik:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin t} dt = \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2j az - 1} dz.$$

Az integrálandó függvénynek két pólusa van:

$$z_1 = j(-a + \sqrt{a^2 - 1})$$

és

$$z_2 = j(-a - \sqrt{a^2 - 1}).$$

Közülük z_2 az egységgörön kívül van, mert

$$|z_2| > a > 1;$$

z_1 pedig az egységgör belsejében van, mert

$$|z_1| = \left| -a + \sqrt{a^2 - 1} \right| \cdot \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right| = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} < \frac{1}{a} < 1.$$

Tehát a residuum tétel alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2ajz - 1} dz &= 2\pi j \operatorname{res}_{z=z_1} \left[\frac{2}{z^2 + 2ajz - 1} \right] = \\ &= 2\pi j \left[\frac{2}{2z + 2aj} \right]_{z=z_1} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}, \end{aligned}$$

azaz:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

2. A residuum tétel segítségével határozzuk meg az

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$$

valós improprius integrál értékét.

A valós analizisből ismert, hogy ez az improprius integrál létezik. Értékének komplex vonalintegrállal történő meghatározásához a valós tengely mentén értelmezett integrálandó függvényt a felső félsíkon analitikusan folytatjuk az

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3}$$

komplex függvénnyel és az integrálást a valós tengely $[-R, +R]$ szakaszából, valamint a $|z| = R$; $\operatorname{Im} z > 0$ felső félkörívől álló pozitív irányítású G zárt görbe mentén végezzük (ld. 91. ábra). E görbe belsejében $-R > a$ esetén - az $f(z)$ függvénynek egyetlen szinguláris pontja van: a $z_0 = aj$ harmadrendű pólus, ahol

$$\operatorname{res}_{z=aj} \frac{1}{(z^2+a^2)^3} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow aj} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{(z-aj)^3}{(z^2+a^2)^3} \right] = -\frac{3}{16a^5}.$$

Igy a residuum-tétel alkalmazásával:

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} + \int_{K_R} \frac{dz}{(z^2+a^2)^3} = 2\pi j \operatorname{res}_{z=aj} \frac{1}{(z^2+a^2)^3} = -\frac{3\pi}{8a^5}.$$

Mivel $R \rightarrow \infty$ esetén a K_R félkörív-menti integrál értéke $\rightarrow 0$ (mert az integrálandó függvény kielégíti az 1. lemma feltételeit), ezért

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = -\frac{3\pi}{8a^5}.$$

Ez a keresett valós improprius integrál Cauchy-féle főértéke. De mivel nemcsak a Cauchy-főérték, hanem maga az improprius integrál is létezik, ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = (c.f.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = -\frac{3\pi}{8a^5}.$$

3. A residuum-tétel alkalmazásával határozzuk meg az

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} dz$$

valós improprius integrál értékét.

Valós analízisbeli módszerekkel eldönthető, hogy ez az improprius integrál létezik. Mivel az integrálandó függvény páros, és imaginárius része az

$$\frac{x e^{jx}}{x^2+4}$$

függvénynek, ezért

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{jx}}{x^2 + 4} dx.$$

Tehát a kérdéses valós integrált visszavezettük

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{jx} dx$$

típusra, ahol az

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

függvénynek nincs szinguláris pontja a valós tengelyen. Mivel $f(x)$ -nek az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkra való kiterjesztése, az

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$$

komplex függvény kielégíti a Jordan-lemma feltételeit, ezért

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \frac{z}{z^2 + 4} e^{jz} dz = 0,$$

és így a 2.3.1. Tétel értelmében

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4} e^{jx} dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} \frac{z e^{jz}}{z^2 + 4}.$$

Mivel $\frac{z}{z^2 + 4}$ -nek az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkon $z = 2j$ az egyetlen szinguláris pontja és az elsőrendű pólus, ezért

$$\operatorname{res}_{z=2j} \frac{z e^{jz}}{z^2 + 4} = \left[\frac{z e^{jz}}{2z} \right]_{z=2j} = \frac{1}{2} e^{-2},$$

ugy hogy:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{jx}}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi j \frac{1}{2} e^{-2} \right],$$

azaz:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{2e^2}.$$

4. A residuum-tétel alkalmazásával határozzuk meg az

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{és} \quad \mathcal{J}_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

valós integrálok értékét.

a) Az $\mathcal{J}_1$ integrál értékének meghatározásánál figyelembe véve az integrálandó függvény páros voltát és felhasználva az Euler-formulát:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x} dx.$$

Ezzel az $\mathcal{J}_1$ integrált átalakítottuk $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jx} dx$ típusúra, ahol $f(x)$ -nek van szinguláris pontja a valós tengelyen: $x = 0$. Ennek az integrálnak csak a Cauchy-főértéke létezik:

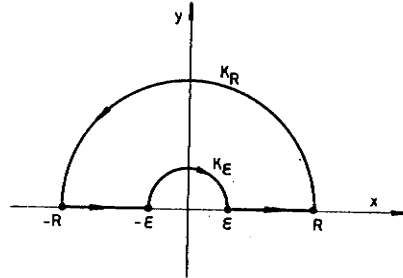
$$(c.f.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x} dx = \lim_{\substack{\mathcal{C} \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[\int_{-R}^{-\mathcal{C}} \frac{e^{jx}}{x} dx + \int_{\mathcal{C}}^R \frac{e^{jx}}{x} dx \right].$$

Értékének komplex analízisbeli eszközökkel történő meghatározásához képezzük a valós tengely mentén értelmezett integrálandó függvény $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsíkbeli analitikus folytatását:

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{z}$$

és ennek integrálását az $\text{Im } z > 0$ félsíkbeli

$$G = [-R, -\epsilon] \cup K_\epsilon \cup [\epsilon, R] \cup K_R$$



94. ábra

pozitív irányítású zárt görbe mentén végezzük, ahol $K : |z| = \epsilon, \text{Im } z > 0$ és $K_R : |z| = R, \text{Im } z > 0$ félkörív (ld. 94. ábra).

Mivel az $f(z) = \frac{e^{jz}}{z}$ függvény

nek a zárt görbe belsejében nincs szinguláris pontja, ezért a Cauchy-integrál-tétel értelmében:

$$\int_{-R}^{\epsilon} \frac{e^{jx}}{x} dx + \int_{K_\epsilon} \frac{e^{jz}}{z} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{jx}}{x} dx + \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{z} dz = 0.$$

Itt a Jordan-lemma értelmében

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{z} dz = 0$$

és

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{K_\epsilon} \frac{e^{jz}}{z} dz = -j\pi$$

(mert a $z = \epsilon e^{j\varphi}$ transzformációval

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{K_\epsilon} \frac{e^{jz}}{z} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} j \int_{\pi}^0 e^{j\epsilon(\cos \varphi + j \sin \varphi)} d\varphi = -j\pi).$$

Ugyan

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_{-R}^{\epsilon} \frac{e^{jx}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{jx}}{x} dx \right\} = (\text{c.f.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x} dx = j\pi$$

Tehát

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

b) Az I_2 integrál az I_1 integrál értékének felhasználásával parciális integrálással számítható ki. Mivel

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= - \left[\frac{\sin^2 x}{x} \right]_0^R + \int_0^R \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = \\ &= - \frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^R \frac{\sin 2x}{x} dx = - \frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^{2R} \frac{\sin u}{u} du \end{aligned}$$

és

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[- \frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^{2R} \frac{\sin u}{u} du \right] = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2},$$

ezért

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. A residuum-tétel alkalmazásával határozzuk meg az

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

valós improprius integrál értékét.

Az adott improprius integrál létezik, mert az integrálandó valós függvény az $x = 0$ pont környezetében úgy viselkedik, mint az $x^{-1/2}$ függvény, amelynek létezik a $(0, a)$ intervallumbeli integrálja; $x \rightarrow \infty$ esetben pedig úgy viselkedik, mint az $x^{-3/2}$ függvény, amelynek létezik az (a, ∞) intervallumbeli integrálja.

Az integrál komplex analízisbeli módszerekkel történő kiszámításához előállítjuk az integrálandó függvény komplex síkbeli analitikus folytatását, a $z = 0$ -ban elágazási ponttal és $z = \infty$ -ban zérushellyel rendelkező

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}$$

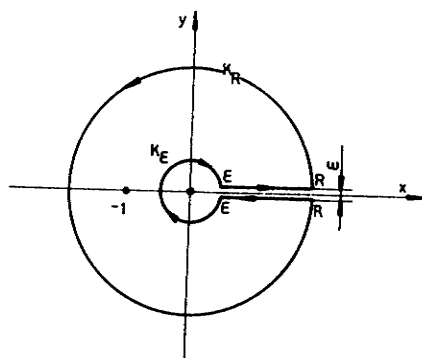
kétértékű relációt. Ez a reláció a pozitív valós tengely mentén bemetszett kétszeresen lefedett komplex síkon két reguláris ágra esik szét; az egyiken $0 < \arg z < 2\pi$, a másikon $2\pi < \arg z < 4\pi$.

A bemetszés két partján a függvényértékek különbözőek; a felső félsíkról közeledve az x tengelyhez

$$\frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} \rightarrow \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

az alsó félsíkről közeledve

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{z}} \rightarrow \frac{1}{(1+x)(-\sqrt{x})}$$



95. ábra

Kiválasztjuk valamelyik reguláris ágot (például azt, amelyiken $0 < \arg z < 2\pi$) és integrációs útnak a 95. ábrán látható

$$[\epsilon, R] \cup K_R^+ \cup [R, \epsilon] \cup K_E^-$$

pozitív irányítású zárt görbét választjuk (ahol $K_R: |z| = R$;

$K_E: |z| = \epsilon$). E görbe belsejében az $f(z)$ függvény a $z = -1$ pólushely kivételével reguláris, úgyhogy a residuum-tétel értelmében:

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \oint_{K_R^+} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} + \int_R^{\epsilon} \frac{dx}{(1+x)(-\sqrt{x})} + \oint_{K_E^-} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = \\ = 2\pi j \operatorname{res}_{z=-1} \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} \end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{K_R} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{z}} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{\mathcal{C} \rightarrow 0} \oint_{K_{\mathcal{C}}} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{z}} = 0,$$

[mert:

$$\left| \oint_{K_R} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{z}} \right| < c_1 R^{-3/2} \cdot 2\pi R \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad R \rightarrow \infty,$$

és

$$\left| \oint_{K_{\mathcal{C}}} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{z}} \right| < c_2 \mathcal{C}^{-1/2} \cdot 2\pi \mathcal{C} \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad \mathcal{C} \rightarrow 0;]$$

továbbá, hogy

$$\int_{\mathcal{C}}^R \frac{dx}{(1+x) \sqrt{x}} + \int_R^{\mathcal{C}} \frac{dx}{(1+x) (-\sqrt{x})} = 2 \int_{\mathcal{C}}^R \frac{dx}{(1+x) \sqrt{x}}.$$

Ezzel:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \mathcal{C} \rightarrow 0}} 2 \int_{\mathcal{C}}^R \frac{dx}{(1+x) \sqrt{x}} = 2\mathfrak{I} \cdot \frac{1}{j}$$

és így a keresett valós integrál:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x) \sqrt{x}} = \mathfrak{I}.$$

3.§ A RESIDUUM-ELMÉLET ALKALMAZÁSA ZÉRUSHELYEK ÉS PÓLUSOK VIZSGÁLATÁRA

Az alkalmazásokban - így többek között lineáris rendszerek stabilitásának eldöntésénél - szükség van komplex függvények zérushelyei és pólusai rendjének, valamint a zérushelyek és pólusok egy adott tartományba eső számának meghatározására. E meghatározások különböző módjai közül az alábbiakban a residuum-elméleten alapulókból ismertetünk néhányat.

3.1. ZÉRUSHELYEK ÉS PÓLUSOK RENDJÉNEK MEGHATÁROZÁSA. LOGARITMIKUS RESIDUUM

A zérushelyekkel és pólushelyekkel kapcsolatos vizsgálatok egyik módja a residuum-fogalom egy bizonyos értelemben vett kiterjesztésén, a logaritmikus residuumon alapszik, amelyet az alábbi módon értelmezünk:

Definíció

Az f függvény $z = a$ reguláris vagy izolált szinguláris pontbeli logaritmikus-residuuma a

$$\frac{d}{dz} [\log f(z)] = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

logaritmikus differenciálhányados $z = a$ pontbeli residuuma.

Jelölése:

$$\operatorname{logres}_{z=a} f(z) = \operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

A residuum a komplex függvény izolált szinguláris pontjában értelmezett fogalma, ezért az $\frac{f'}{f}$ függvény residuuma - a logaritmikus residuum - csak olyan pontban értelmezhető, amely vagy zérushelye, vagy pólushelye f -nek (azaz, ahol $f(z) = 0$, vagy $f(z) = \infty$). Ennek következménye a logaritmikus residuum értékére (és egyben f zérushelyei és pólusai rendjére) utaló:

3.1.1. Tétel

Legyen f olyan függvény, amelynek a T tartományban csak pólus-szingularitásai vannak.

a) Ha $a \in T$ az f függvény n -szeres zérushelye, akkor

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = n,$$

a zérushely rendszáma.

b) Ha $b \in T$ az f függvény p -ed rendű pólushelye, akkor

$$\operatorname{res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p$$

a pólushely rendszámának (-1) -szerese.

Bizonyítás

a) Ha $z = a$ az f függvény n -szeres zérushelye, azaz

$$f(z) = (z-a)^n \cdot g(z),$$

ahol g reguláris az " a " helyen és $g(a) \neq 0$ véges érték, akkor

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1} g(z) + (z-a)^n \cdot g'(z)$$

és így

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

ahol $\frac{g'}{g}$ is reguláris az " a " pont egy környezetében. Tehát az $\frac{f'}{f}$ függvény $z = a$ ponthoz tartozó Laurent-sorának főrésze

$$\frac{n}{z-a},$$

ami azt jelenti, hogy a $z = a$ helyen az $\frac{f'}{f}$ függvénynek elsőrendű pólusa van és ott residuuma: n , a $z = a$ pontbeli zérushely rendszáma.

b) Ha $z = b$ az f függvény p -ed rendű pólusa, azaz

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-b)^p},$$

ahol h reguláris a " b " helyen és $h(b) \neq 0$ véges érték, akkor:

$$f'(z) = \frac{h'(z)}{(z-b)^p} - p \frac{h(z)}{(z-b)^{p+1}}$$

és így

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{p}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

ahol $\frac{h'(z)}{h(z)}$ reguláris a " b " pont egy környezetében. Tehát az $\frac{f'}{f}$ függvény $z = b$ helyhez tartozó Laurent-sorának főrésze

$$\frac{-p}{z-b},$$

ami azt jelenti, hogy a $z = b$ helyen az $\frac{f'}{f}$ függvénynek elsőrendű pó-lusa van és ott residuuma: $-p$, a $z = b$ pontbeli pólushely negatív elő-jellel vett rendszáma. $\square$

3.2. ZÉRUSHELYEK ÉS PÓLUSOK SZÁMÁNAK MEGHATÁROZÁSA

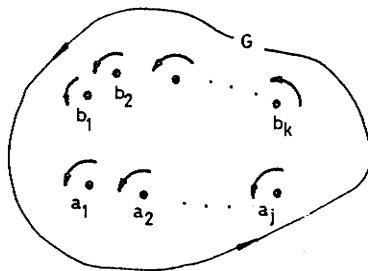
$$\oint_G \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{TÍPUSU INTEGRÁLLAL}$$

A residuum-tétel és a 3.1.1. Tétel egybekapcsolásával egyrészt utalást nyerhetünk egy függvény zérushelyeinek és pólusainak elhelyezked-sére, másrészt meghatározhatjuk azok számát.

Egy f függvény T tartománybeli multiplicitással vett zérushelyei és pólus-helyei számának különbségére utal.

3.2.1. Tétel

Ha φ reguláris és f -nek csak pólus szingularitásai vannak a pozitív irány-tású G^+ rektifikálható zárt Jordan-görbé és az általa határolt T tartományon (ld. 96. ábra), akkor



96. ábra

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^j n_i \varphi(a_i) - \sum_{\ell=1}^k p_\ell \varphi(b_\ell),$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_j$ ill. $b_1, b_2, \dots, b_k$ az f függvény G görbe belsőjébe eső zérushelyei, ill. pólushelyei, amelyek ebben a sorrendben $n_1, n_2, \dots, n_j$ ill. $p_1, p_2, \dots, p_k$ rendűek, és f -nek sem zérushelyei, sem pólusai nincsenek G -n.

Bizonyítás

Mivel φ reguláris T -ben, ezért a

$$\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$$

függvénynek csak $\frac{f'(z)}{f(z)}$ pólusaiban lehetnek szingularitásai, mégpedig - a 3.1.1. Tétel értelmében - elsőrendű pólusai. Ezért ha a $z = a$ hely az $\frac{f'(z)}{f(z)}$ függvénynek pólushelye, akkor

$$\operatorname{res}_{z=a} \left[\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right] = \varphi(a) \operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Igy a $\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ függvény G görbementi integráljára a residuum-tételt és a residuumok meghatározására a 3.1.1. Tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{i=1}^j \operatorname{res}_{z=a_i} \left[\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right] + \sum_{\ell=1}^k \operatorname{res}_{z=b_\ell} \left[\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^j n_i \varphi(a_i) - \sum_{\ell=1}^k p_\ell \varphi(b_\ell) \end{aligned}$$

az állításnak megfelelően. $\square$

E tétel speciális esetei:

a) Ha $\varphi(z) \equiv z$,

akkor a multiplicitással vett zérushelyek és pólushelyek számának különbségére az

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^j n_i a_i - \sum_{i=1}^k p_i b_i$$

összefüggés adódik.

b) Ha $\varphi(z) = 1$,
akkor a multiplicitással vett zérushelyek és a rendjükkel vett pólushelyek számának különbségére az

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

összefüggés adódik, ahol $Z = \sum_i h_i$ és $P = \sum_i p_i$.

c) Ha $\varphi(z) = 1$ és f reguláris a G görbén és az általa határolt T tartományon (tehát T -ben még pólushelyei sincsenek), akkor $P = 0$ és így

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z.$$

d) Ha $\varphi(z) = 1$ és f -nek nincsenek zérushelyei G -n és belsejében, akkor

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -P.$$

Megjegyzés

A 3.1.1. Tétel megfordításaként adódik, hogy a tétel feltételei mellett kiszámíthatók

$$\oint_G \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

tipusú integrálok, az integrálás elvégzése nélkül.

3.3. ZÉRUSHELYEK ÉS PÓLUSOK SZÁMÁNAK MEGHATÁROZÁSA A FÜGGVÉNY ARGUMENTUM VÁLTOZÁSA ALAPJÁN. ARGUMENTUM-ELV

Láttuk, hogy a végesben csak pólus szingularitással rendelkező f függvény G zárt görbe belsejébe eső (multiplicitással vett) zérushelyei és rendjükkel vett pólushelyei számának különbsége:

$$Z - P = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

A jobb oldali integrál kiszámítása általában nem könnyű feladat, de szemléletes uton belátható, hogy értéke - és így vele együtt $Z - P$ is - kapcsolatba hozható az f függvény G -görbe menti argumentum-változásával. Ezt fejezi ki:

3.3.1. Tétel (Argumentum-elv)

Ha f véges számú pólushely kivételével reguláris a G rektifikálható zárt Jordan-görbén és az általa határolt T tartományon, továbbá a G görbén sem zérushelye, sem pólushelye nincs, akkor az f függvény G görbe belsejébe eső multiplicitással vett zérushelyei és rendjükkel vett pólushelyei számának különbsége megegyezik az f függvény - G görbe pozitív irányu teljes körüljárásánál bekövetkezett - argumentum-változásának 2π -ed részével. Azaz:

$$Z - P = \frac{1}{2\pi j} \Delta_G \arg f(z).$$

Bizonyítás

Felhasználva, hogy az $\ln f$ reláció bármely egyértékű ágán

$$\ln f = \ln |f| + j(\arg f + 2k\pi),$$

ahol k rögzített pozitív egész szám:

$$\oint_{G^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{G^+} d \ln f(z) = \oint_{G^+} d \ln |f(z)| + j \oint_{G^+} d \arg f(z).$$

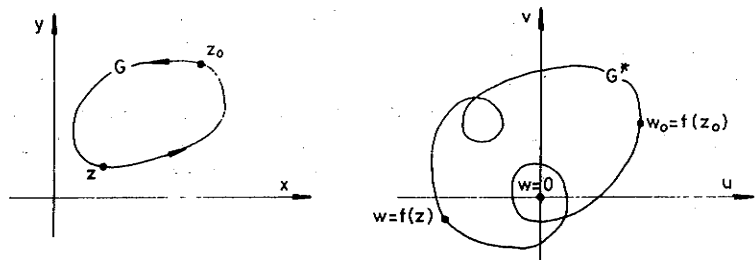
Itt

$$\oint_{G^+} d \ln |f(z)| = 0,$$

mert a G görbe egy teljes körüljárásánál az $\ln f(z)$ valós függvény visszajut kiindulási értékéhez és

$$\oint_{G^+} d \arg f(z) = \Delta_G \arg f(z),$$

ugyanis az f függvény a rektifikálható zárt G Jordan görbét olyan G^* görbére képezi le, ami zárt ugyan, de nem feltétlenül Jordan-görbe (azaz nem feltétlenül többszörös pont nélküli görbe), és így többször is megkerülheti az origót (át nem mehet rajta, mert f -nek a G görbén - a fel-tétel értelmében - nincs zérushelye). Amennyiben G^* megkerüli az ori-gót, akkor G teljes körüljárásánál ($\arg f$) nem tér vissza kiindulási értékéhez, attól $k \cdot 2\pi$ értékkel tér el, ahol k : az a szám, ahányszor G^* megkerüli az origót (ld. 97. ábra).



97. ábra

Tehát

$$\oint_{G^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = j \Delta_G \arg f(z),$$

amit egybevetve a 3.2.1. tételből adódó

$$\oint_{G^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j [Z - P]$$

összefüggéssel, az f függvény G görbe belsejébe eső, rendjükkel vett zérushelyei és pólushelyei számának különbségére - a tétel állításának megfelelően -:

$$Z - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_G \arg f(z)$$

érték adódik. Ez $\Delta_G \arg f(z) = k \cdot 2\pi$ miatt - megegyezik azzal a számértékkel, ahányszor a $w = f(z)$ függvény a $w = 0$ pontot megkerüli, miközben z a G görbét pozitív irányban egyszer bejárja. $\square$

E tétel következménye

a) Ha f reguláris a G görbén és az általa határolt T tartományon, akkor G belsejébe eső, multiplicitással vett zérushelyek száma:

$$Z = \frac{1}{2\pi} \Delta_G \arg f(z),$$

feltéve, hogy a G görbén f -nek nincsenek zérushelyei.

b) Ha f -nek nincsenek zérushelyei a G görbén, és annak belsejében, akkor a G belsejébe eső pólushelyek száma - rendjük figyelembevételével -:

$$P = - \frac{1}{2\pi} \Delta_G \arg f(z),$$

feltéve, hogy a G görbén f -nek nincsenek pólusai.

3.4. ZÉRUSHELYEK ÉS PÓLUSHELYEK VIZSGÁLATA. ROUCHÉ-TÉTEL

Az $\oint_G \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ integrállal, vagy az argumentum-elvvel általában

nem lehet Z és P értékét külön-külön meghatározni, hacsak valamelyik értéket nem ismerjük előre. Sőt: mindkét módszer nyilvánvalóan abban az esetben adja a legtöbb információt, ha a gyökök mind egyszeresek és a pólusok mind elsőrendűek. A $Z - P$ érték meghatározására gyakorlati szempontból sokkal hasznosabb az alábbi tétel:

3.4.1. Tétel (Rouché-tétel)

Legyen f és g csak pólus szingularitásokkal rendelkező függvény a pozitív irányítású G rektifikálható zárt Jordan-görbe által határolt T tartományon és egyiküknek se legyen sem zérushelye, sem pólusa G -n. Ha a G görbén

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

akkor $(Z-P)$ értéke az f függvényre és az $(f+g)$ függvényre megegyezik. Azaz:

$$(Z-P)_f = (Z-P)_{f+g}.$$

Bizonyítás

Az f -re és g -re tett feltételek miatt a G görbén

$$\infty > |f+g| > |f| - |g| > 0$$

ugy, hogy $(f+g)$ -nek sincsenek sem zérushelyei, sem pólushelyei G -n. Mivel f és $f+g$ teljesíti az argumentum-elv feltételeit, ezért

$$(Z-P)_f = \frac{1}{2\pi i} \Delta_G \arg f,$$

és

$$(Z-P)_{f+g} = \frac{1}{2\pi i} \Delta_G \arg (f+g).$$

Azt kell tehát csak belátni, hogy

$$\Delta_G [\arg (f+g) - \arg f] = \Delta_G \arg \frac{f+g}{f} = \Delta_G \arg \left(1 + \frac{g}{f}\right) = 0.$$

Bevezetve a

$$w = 1 + \frac{g}{f}$$

jelölést, egyszerűen belátható, hogy a G zárt görbe egy teljes körüljárásakor - a $|g| < |f|$ feltétel miatt - a megfelelő w pontok olyan G^* zárt görbét írnak le, amely a

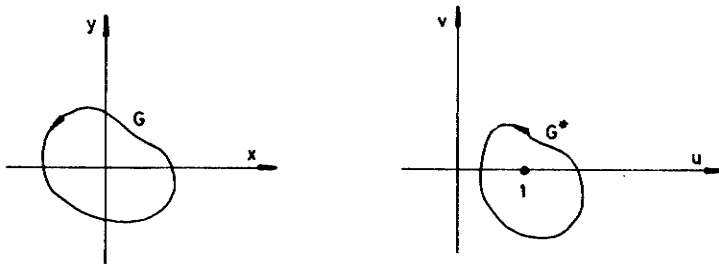
$$|w-1| \leq R < 1$$

kör belsejében van (ld. 98. ábra). Ugyanis:

$$w = 1 + \frac{g}{f} \implies w-1 = \frac{g}{f}$$

ahol a $|g| < |f|$ feltétel miatt $|w-1| < 1$, az állításnak megfelelően.

Tehát G^* nem kerüli meg a $w=0$ pontot, így



98. ábra

$$\Delta_G \arg \left(1 + \frac{g}{f} \right) = 0,$$

ugy, hogy valóban

$$(Z - P)_{f+g} = (Z - P)_f$$

a tétel állításának megfelelően. $\square$

A Rouché-tétel speciális esete:

3.4.2. Tétel

Ha f és g reguláris a G rektifikálható zárt Jordan-görbén és belsejében, továbbá a G görbén f -nek nincs zérushelye és G pontjaiban

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

akkor a G görbe belsejében f -nek ugyanannyi multiplicitással vett zérushelye van, mint $(f + g)$ -nek. Azaz

$$Z_{f+g} = Z_f.$$

Bizonyítás

f és g regularitása miatt f -nek és $f + g$ -nek nincsenek pólusai G belsejében. Így e tétel a Rouché-tétel azon speciális esete, amikor $P = 0$. $\square$

A Rouché-tétel segítségével egyszerűen bizonyítható az analízis néhány tétele. Így többek között

3.4.2. Tétel

(Algebra alaptétele)

Minden racionális egész függvénynek (polinomnak) a fokszámával megegyező számú multiplicitással vett zérushelye van.

Bizonyítás

Fogjuk fel a

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

n -edfoku polinomot az

$$f(z) = a_0 z^n \text{ és a } g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

függvények összegeként. Ha $z \rightarrow \infty$, akkor

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{1}{a_0} \left[\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right] \rightarrow 0,$$

és így az origó körüli elég nagy R sugaru körön biztosan

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1,$$

azaz

$$|g(z)| < |f(z)|.$$

Igy a Rouché-tétel értelmében az origó körüli elég nagy R sugaru kör belsejében az n -ed foku polinomnak ugyanannyi multiplicitással számított zérushelye van, mint az $f(z) = a_0 z^n$ függvénynek, azaz: n . E körön kívül a polinomnak nincs más gyöke, mert $z \rightarrow \infty$ esetén a polinom a végtelenhez tart. $\square$

3.5. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

integrál értékét, ha

$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{(z^2 + 2z + 2)^3}$$

és G a pozitív irányítású $|z| = 4$ egyenletű kör.

Az $f(z)$ függvény G görbe belsejébe eső zérushelyei:

$$z_1 = j \quad \text{és} \quad z_2 = -j$$

mindkettő másodrendű zérushely; pólusai

$$p_1 = -1 + j \quad \text{és} \quad p_2 = -1 - j$$

mindkettő harmadrendű pólus. Így a 3.2.1. Tétel b) speciális esete értelmében:

$$\oint_G \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j [(2+2) - (3+3)] = -4\pi j.$$

2. Határozzuk meg az

$$\oint_G z^2 \operatorname{ctg} z \, dz$$

integrál értékét, ha G a pozitív irányítású $|z| = 5$ egyenletű kör.

Mivel

$$\oint_G z^2 \operatorname{ctg} z \, dz = \oint_G z^2 \frac{(\sin z)'}{\sin z} dz$$

és az $f = \sin z$ függvénynek a G görbe belsejében csak zérushelyei vannak, éspedig a

$$\begin{aligned} z_1 &= 0; \\ z_2 &= \pi; \\ z_3 &= -\pi \end{aligned}$$

elsőrendű zérushelyek, ezért a 3.2.1. Tétel értelmében

$$\oint_G z^2 \frac{(\sin z)'}{\sin z} dz = 2\pi j [0^2 + \pi^2 + (-\pi)^2] = 4\pi^3 j.$$

3. Az argumentum-elv alapján határozzuk meg, hogy a

$$z^4 + z^3 + 1 = 0$$

egyenletnek hány - multiplicitással számított - gyöke van a jobb felső negyed síkon.

Keressük az adott polinom azon gyökeinek számát, amelyek az x tengely

$$0 \leq x \leq R$$

szakaszából, a

$$z = R e^{j\varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

negyedkörívből és az y tengely

$$R > y > 0$$

szakaszából álló G zárt görbe belsejébe esnek, miközben $R \rightarrow \infty$ (ld. 99. ábra).



99. ábra

a) A $0 \leq x \leq R$ szakasz befutásakor

$$x^4 + x^3 + 1 = |w| \geq 1$$

és $\arg w = 0$, tehát

$$\Delta_1 \arg w = 0.$$

b) A negyedkörív befutásakor

$$\begin{aligned} \arg w &= \arg (z^4 + z^3 + 1) = \arg \left[z^4 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} \right) \right] = \\ &= 4 \arg z + \arg \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} \right) \longrightarrow 4 \arg z, \end{aligned}$$

ha $R \rightarrow \infty$. Mivel $\Delta \arg z = \frac{\pi}{2}$, ezért

$$\Delta_2 \arg w = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

c) A $R > y > 0$ szakasz befutásakor a w pont a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w = u &= y^4 + 1, \\ \operatorname{Im} w = v &= -y^3 \end{aligned}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott

$$v = -(u - 1)^{\frac{3}{4}}$$

görbe u tengely alatti szakaszát futja be a $(R^4 + 1, -R^3)$; $R \rightarrow \infty$ pontból kiindulva az $(1, 0)$ pontig, és eközben

$$\Delta_3 \arg w = \arg 1 - \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{-y^3}{y^4 + 1} = 0.$$

Tehát az egész zárt görbe befutásakor az argumentum-változás:

$$\Delta_G \arg w = \Delta_1 \arg w + \Delta_2 \arg w + \Delta_3 \arg w = 2\pi,$$

ami az argumentum elv értelmében azt jelenti, hogy az első síknegyedben a $z^4 + z^3 + 1 = 0$ egyenletnek egy gyöke van.

4. Igazoljuk, hogy a

$$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

egyenlet összes gyöke a $|z| = 1$ és $|z| = 2$ egyenletű körök által határolt gyűrűtartományban van.

Legyen

$$f_1(z) = 12 \quad \text{és} \quad g_1(z) = z^7 - 5z^3.$$

A $|z| = 1$ körön

$$|g_1(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z^7| + |5z^3| \leq 6 < 12 = |f_1(z)|$$

és így a Rouché-tétel értelmében a $|z| = 1$ kör belsejében az

$$f_1(z) + g_1(z) = z^7 - 5z^3 + 12$$

függvénynek ugyanannyi zérushelye van, mint az $f_1(z) = 12$ függvénynek; tehát nincs zérushelye.

Legyen most

$$f_2(z) = z^7$$

és

$$g_2(z) = 12 - 5z^3$$

A $|z| = 2$ körön

$$|g_2(z)| = |12 - 5z^3| \leq 12 + |5z^3| = 52 < 2^7 = |f_2(z)|$$

és így a Rouché-tétel értelmében a $|z| = 2$ egyenletű kör belsejében az

$$f_2(z) + g_2(z) = z^7 - 5z^3 + 12$$

függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint az $f_2 = z^7$ függvénynek, amelynek minden gyöke a $|z| = 2$ egyenletű kör belsejében van.

Tehát a

$$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

egyenlet minden gyöke a $|z| = 2$ kör belsejében, és ugyanakkor a $|z| = 1$ kör külsejében, azaz a jelzett gyűrűtartományban van.

5. Határozzuk meg az

$$f(z) = \frac{z+3-e^z}{\sin^2 2z}$$

függvény argumentumváltozását, miközben a

$$|z + 3| = 2$$

egyenletű kört pozitív irányban járjuk be.

Az argumentum-változás meghatározásához szükséges az f függvény $|z + 3| = 2$ egyenletű kör belsejébe eső, multiplicitással vett zérushelyei és pólusai számának ismerete.

Az f függvény zérushelyei megegyeznek a számlálójában levő függvény zérushelyeivel. Ezek száma az alábbi módon határozható meg:

A gyökhelyeket szolgáltató

$$z + 3 - e^z = 0$$

egyenletben legyen

$$f_1(z) = z + 3; \quad g_1(z) = -e^z.$$

Mivel a $|z + 3| = 2$ egyenletű körön $-5 \leq x \leq -1$ (ld. 100. ábra), ezért

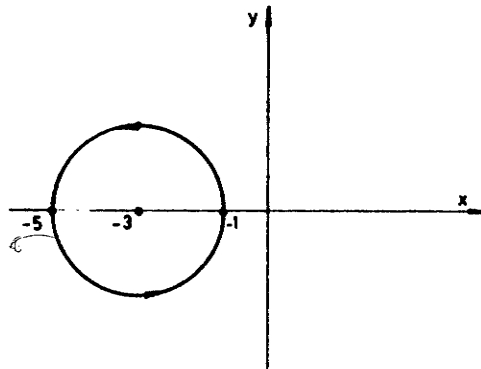
$$|g_1(z)| = |-e^z| = e^x < \frac{1}{e} < 2 = |f_1(z)|.$$

Igy a Rouché-tétel értelmében a $|z + 3| = 2$ egyenletű kör belsejében az

$$f_1(z) + g_1(z) = z + 3 - e^z$$

függvénynek ugyanannyi zérushelye van, mint az $f_1(z) = z + 3$ függvénynek. Mivel ennek csak a $z = -3$ a zérushelye, ezért az f függvény zérushelyeinek száma:

$$Z = 1.$$



100. ábra

Az f függvény pólushelyei a nevezőjében levő függvény zérushelyei (feltéve, hogy ezeken a helyeken a számlálója zérustól különböző). Mivel

$$\sin^2 2z = 0,$$

ha

$$z = \frac{k\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots)$$

és ezeken a helyeken a számláló nem zérus, ezért ezek pólushelyei az $f(z)$ függvénynek, még hozzá másodrendű pólushelyei (mert $\sin^2 2z$ -nek másodrendű zérushelyei). Közülük azonban csak a

$$\frac{-3}{2}\pi, \quad -\pi, \quad \frac{-\pi}{2}$$

esik a $|z + 3| = 2$ egyenletű körbe és így e kör belsejébe eső multiplícitással vett pólushelyek száma:

$$P = 6.$$

Tehát az argumentum-elv alapján az f függvény argumentum-változása a kérdéses kör pozitív irányu bejárásakor:

$$\Delta_G \arg f(z) = 2\pi (Z - P) = 2\pi (1 - 7) = -10\pi.$$

Kedves Jegyzethasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V_2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN**

A jegyzet szerzője: **Pach Zs. Pálné**

A jegyzet azonosítója: **050901**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75 %):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(a túloldalon folytatható)
