BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Ádám Katalin

MATEMATIKA PÉLDATÁR
IV. kötet
Sorok, függvénysorok

Műegyetemi Kiadó, 2000.

(Ötödik utánnyomás)

Azonosító: **051201**

A **Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kar**
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 19,8 (A/5) ív
Nyomtatta és kötötte: **Műegyetemi Nyomda**
Felelős vezető: Frigy Ottó
Munkaszám: 002/2000

A konvergencia definíciójával és közvetlen következményeivel kapcsolatos feladatok

1. 1. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ teljesül.

Következik-e a sor konvergenciája az alábbi feltételek valamelyikéből?

a) $a_n \searrow 0$.

b) $a_n > 0$ és (S_n) korlátos.

c) (S_n)-monoton csökkenő.

d) $a_n > 0$ és (S_n)-nek van konvergens részsorozata.

e) $(|S_n|)$ konvergens sorozat.

2. Konvergensek-e az alábbi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok, ha

a) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n = k^2 \ (k=1,2,\dots) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n = 5k \ (k=1,2,\dots) \\ \frac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ha } n = k^2 \ (k=1,2,\dots) \\ \frac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$

1\. 2. d) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\log_2 n} & \text{ha } n = 2^k \quad (k=1,2,\dots) \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{egyébként} \end{cases}$

e) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln n} & \text{ha } n = k^2 \quad (k=1,2,\dots) \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$

2\. $\boxed{1.}$ **Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$ sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele az (a_k) sorozat konvergenciája! Mennyi a sor összege?**

2\. **Hozzuk a következő sorokat**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$$ **alakra, és határozzuk meg a sorösszegeket,**

ha létezik!

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^2 - k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k-1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k+1} \right)$

2\. 2. d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)}$

e) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$

3\. **Állapitsuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, számitsuk ki az összegüket!**

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$

c) $\sum_{k=3}^{\infty} \ln\left(1 - \left(\frac{2}{k}\right)^2\right)$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

3. e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k}$

f) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{\frac{k}{2}}}$

$\boxed{h)}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k}$

4. 1. Tegyük fel, hogy

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergens sorok, valamint

$$a_k \le c_k \le b_k \quad (k > N \text{ esetén})$$

$\boxed{a)}$ Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sor is konvergens!

4. 1. b) Mit mondhatunk a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sorról, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok divergensek?

2. Az alábbi feltételek közül melyikből következik a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergenciája?

a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}) = 0$ minden p-re.

b) Minden ε-hoz és $p > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n > N$, akkor

$$|a_n + a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}| < \varepsilon.$$

c) Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n > N$, akkor tetszőleges p-re

$$|a_n + a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Váltakozó előjelü sorok

5. Állapitsuk meg, hogy az alábbi váltakozó előjelü sorok közül melyik konvergens és speciálisan Leibniz tipusu, és melyik divergens!

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ahol $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$

5. 3. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots +$

$+ \ldots \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1 + \frac{1}{n})^n$

Müveletek sorokkal

6. 1. Következik-e a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor konvergenciája vagy divergenciája az alábbi feltételekből?

a) $\sum a_n$ konvergens és $\sum b_n$ divergens

b) $\sum a_n$ és $\sum b_n$ divergens

c) $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_k + b_k + \ldots$ konvergens

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{n^2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

6. 2. d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$

3. Az a, b, c paraméterek mely értékeire konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{c^n}$$ sor és mennyi az összege?

4. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor ha $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n=k^2 \\ & (k=1,2,\dots) \\ \frac{1}{n^2} & \text{különben} \end{cases}$

5. Lehet-e a $\sum a_n$ sor konvergens, ha a

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor divergens

$\boxed{\text{b)}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ sor divergens?

6. a) Felhasználva a Riemann tétel bizonyításának módszerét, adjuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$ feltételesen konvergens sor 1,5-höz konvergáló átrendezésének első tiz elemét!

b) Adjuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$ feltételesen konvergens sor divergenssé átrendezésének első tiz elemét.

c) Következik-e a $\sum a_n$ sor konvergenciája abból, hogy $a_n \to 0$ és van a részletösszegsorozatának konvergens részsorozata?

6. 7. a) A $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor konvergens és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

α) Bizonyitsuk be, hogy a zárójelek elhagyásával keletkező sor is konvergens!

β) Igaz-e az állitás, ha az $a_n \to 0$ feltételt elhagyjuk?

b) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra teljesül, az $a_n \to 0$ feltétel, és a sort k-asával zárójelezzük ugy, hogy a keletkező sor konvergens akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens és ugyanaz az összege.

c) Határozzuk meg a következő összegeket!

a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$

!b) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

8. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $a_n \searrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{(2^n)}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok azonos jellegüek, azaz

α) ha $\sum 2^n a_{(2^n)}$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergens;

β) ha $\sum 2^n a_{(2^n)}$ divergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ divergens.

b) Határozzuk meg, hogy az α paraméter mely értékeire konvergens, illetve divergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \cdot \log_2 n$$ sort!

7. (1.) Készitsük el a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ sor önmagával vett szorzatát (négyzetes szorzatát) és Cauchy-szorzatát, és adjuk meg mindkettő összegét!

(2.) Számitsuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$ sorok Cauchy szorzatát!

(3.) Igazoljuk, hogy az

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{és az} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

sorok divergensek, Cauchy szorzatuk mégis konvergens!

(4.) Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergens sor önmagával való Cauchy szorzata divergens!

Abszolut-konvergencia vizsgálata

8. (1.) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ és a $\sum b_n$ $(b_n > 0)$ sorra

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ és $\sum b_n$ divergens, akkor a $\sum a_n$ sor is divergens.

8. (2.) Igaz-e, hogy minden $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ konvergens sorhoz van konvergens majoráns sor?

3. Keressünk megfelelő majoráns vagy minoráns sort a következő sorokhoz és állapitsuk meg, hogy konvergens-e!

$\boxed{a)}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$$

(b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}.\operatorname{th} n}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin n}}{e^{n}}$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$$

(f) $$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, \quad (0 < a < 1)$$

9. (1.) A $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ sorra ekvivalens-e az alábbi két feltétel:

a) van olyan $q < 1$, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ (ha $n > N$)

9\. 1. b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; (ha $n > N$)

(2.) $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ konvergens. Teljesülhet-e végtelen sok n-re, hogy

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

b) $\sqrt[n]{a_n} > 1$

$\boxed{3.}$ Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ sorra

a) $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens

b) $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens

c) $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens

d) $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor ebből nem következik a $\sum a_n$ sor divergenciája.

(4.) Bizonyitsuk be, hogy ha egy sor konvergenciája hányados-kritériummal eldönthető, akkor gyök-kritériummal is az.
Igaz-e ez forditva?

10\. A hányados-kritérium alkalmazásával döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

$\boxed{1.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

10. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n . n!}{n^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

11. A gyökkritérium alkalmazásával döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok:

$\boxed{1.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$

11. (5.) $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg} n)^n$

(6.) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{n\pi}{3})^n$

(7.) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+(-1)^n}{n})^n$

12. Az integrálkritérium alkalmazásával döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$

(2.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

(3.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{1+\operatorname{ch}^2 n}$

13. $\boxed{1.}$ Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorra

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$ és $a_n > 0$, $b_n > 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok egyszerre konvergensek, illetve divergensek!

(jelben: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$)

2. Konvergensek-e az alábbi sorok.

$\boxed{a)}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$$

b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n - 1}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 3\sqrt{n} + 1}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 1}$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n^{\alpha}}$$ α tetszőleges

13. 2. f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

g) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 - 1} \right)^{n^2}$$

h) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$$

Az alapvető kritériumokra vonatkozó vegyes feladatok

14. 1. Igaz-e, hogy ha $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a|$$ sor konvergens?

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \qquad (1 < a)$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{a}) \qquad (0 < a < 1)$$

14. (2.) d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin \frac{1}{n})$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2})$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^{n})$

15. (1.) (a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\sum a_n$ abszolut konvergens, akkor $\sum a_n^2$ is konvergens.

b) Igaz-e az a)-beli állitás megforditása?

c) Igaz-e az a)-beli állitás, ha $\sum a_n$ feltételesen konvergens?

(2.) Bizonyitsuk be, hogy ha

(a) $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens, akkor $\sum a_n b_n$ abszolut konvergens.

(b) $\sum a_n^2$ konvergens, akkor $\sum \frac{|a_n|}{n}$ is konvergens.

(c) $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ konvergens, akkor $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ is konvergens.

(d) $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens, akkor $\sum (a_n + b_n)^2$ is konvergens.

16. 1. Legyen $\sum a_n$ konvergens.

a) létezik-e mindig a $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n$ határérték?

$\boxed{\text{b)}}$ ha létezik, mennyi lehet?

$\boxed{2.}$ a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\sum a_n$ konvergens és $a_n \searrow 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0.$$

b) Elhagyható-e az $a_n \searrow 0$ feltétel, (ha $a_n > 0$)?

3. a) Lehet-e a $\sum a_n$ sor konvergens, ha végtelen sok n-re

$$a_n > \frac{1}{n} \quad ?$$

b) Lehet-e a $\sum a_n$ sor divergens, ha végtelen sok n-re

$$a_n < \frac{1}{n^2} \quad ?$$

4. Igaz-e, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens és $a_n \searrow 0$, akkor

$$a_n < \frac{1}{n} \quad (\text{ha} \quad n > N)?$$

Elhagyható-e az $a_n \searrow 0$ feltétel?

Abszolut konvergencia eldöntésére vonatkozó további kritériumok

17. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ (ha $n>N$), akkor ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az, ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is az. ($a_n > o$)

!b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ sor?

!!$\boxed{17.\ 2.}$ a) Igazoljuk a következő állitást (Raabe-féle kritérium):

ha $a_n > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \beta$, akkor

$\beta > 1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens;

$\beta < 1$ esetén pedig divergens.

b) Milyen a-ra konvergens a $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ $(a > o)$ sor!

!18. $\boxed{1.}$ Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{k=o}^{\infty} a_k b_k$ sorra teljesül, hogy

$b_n \searrow 0$ és $\left|\sum_{k=o}^{n} a_k\right| \leq K$, akkor a $\sum_{k=o}^{\infty} a_k b_k$ sor konvergens!

!18. (2.) Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{sor?}$$

19. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, akkor a

$$\sum | \ln a_n - \ln a | \quad \text{és a} \quad \sum | a_n - a |$$

$(a_n > 0)$ sorok egyszerre konvergensek illetve divergensek!

(b) Az $\ln x$ függvényen kivül milyen függvényre igaz még az a)-beli állitás?

2. a) Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ és a

$\sum \ln (1 + a_n)$ sorok egyszerre konvergensek illetve divergensek!

b) Az $\ln (1 + x)$ függvényen kivül milyen függvényre igaz még az állitás?

(3.) Bizonyitsuk be, hogy a $b_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$ $(a_k > 0)$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, amikor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens!

!19. (4.) Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \ln (1 + \frac{1}{n}))$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$

!19. 4. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt{\cos \frac{1}{n}}\right)$

Maradéktag becslések.

20. $\boxed{1.}$ Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra vagy

a) $a_n > 0$, $a_n \leq b_n$ és ismerjük a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ összeget;

vagy

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Leibniz sor; vagy

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$-re alkalmazható az integrál kritérium, - akkor

meg tudjuk becsülni az $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ összegnek a sorösszegtől való eltérését.

2. Adjuk meg, hogy a következő sorokból hány tagot kell venni, hogy a sorösszegtől való eltérés legfeljebb 10^{-4} legyen!

a) $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{n.2^n}{(n+1)!}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n.\ln n}$

20. 2. c) $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$

(3) a) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1 \qquad (\text{ha} \quad n > N),$$

akkor $|R_n| < |a_n| \dfrac{q}{1-q}$

b) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c_n \qquad \text{és} \qquad c_n \leq q < 1$$

$$(\text{ha} \quad n > N),$$

akkor $|R_n| < |a_n| \dfrac{c_n}{1-c_n}$

c) Becsüljük meg azt a hibát, melyet elkövetünk, ha a

α) $\sum_{n=o}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$

β) $\sum_{n=o}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n}{2^n}$

sorok összege helyett az első n tagjának összegét vesszük!

(4.) Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ sorra $\dfrac{1}{n+1} < R_n < \dfrac{1}{n}$.

!21. 1. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha} n^{\beta}} \qquad (\alpha, \beta \in R)$$

sor az α és β paraméterek mely értékére konvergens és divergens!

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

21. 2. g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^2}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^5 \sqrt{n}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^3}$

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

22. A paraméterek mely értékeire konvergensek az alábbi sorok? ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^{\alpha}}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^{\beta}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{}_{\alpha}\ln n}$

22. 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^{\alpha}}{n^{\beta}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1 + \frac{1}{n})}{n^{\beta}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{\alpha}(1 + \frac{1}{n})\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^{\beta}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{\alpha}\frac{1}{n}\,\ln^{\beta}(1 + \frac{1}{n})$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos\frac{1}{n})^{\alpha}}{n^{\beta}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1 + \frac{1}{n^2})}{(\sqrt[n]{n!})^{\beta}}$ $(\alpha > 0)$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{n^{\alpha}}$

Vegyes feladatok

23. Döntsük el, hogy konvergensek-e illetve abszolut konvergensek-e az alábbi sorok!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{1}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi + \frac{1}{n}\right)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \sqrt{\frac{1}{n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1\right)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$

23. 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^{-n}}{\sqrt{n}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$, $(a > 1)$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln (n+1)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin n}}{e^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$

23. 18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln (n^n)}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{\ln n}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln (1 - \frac{1}{n})$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln (1 + \frac{1}{n})}{n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{b^n} (1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n})$ $(a > 0, \quad a, b \in R)$

23. 27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$

28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln (n!)}$

29. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ $(a > o, \ a \in R)$

30. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n} \cdot (\ln n)^a}$ $(a > o, \ a \in R)$

31. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$

32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

33. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

34. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

35. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\ln n}$

23\. 36. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

37\. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$ $(a \in R)$

38\. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in R)$

39\. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}$

40\. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$

41\. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

42\. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

43\. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n})^{n}$

44\. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$

23. 45. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{2^n}$$

46. $$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{2^n}$$

47. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} \right)^n$$

Függvénysorok

Vezessük be a következő jelöléseket, rövidítéseket, elnevezéseket!
I : = zárt, nyilt korlátos vagy nem korlátos intervallum

$(f_n(x))$: $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$, ... függvénysorozat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$ függvénysor

$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ limeszfüggvény röviden $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$ összegfüggvény

$r_n(x) = f(x) - f_n(x)$ maradékfüggvény

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$ maradékfüggvény

KT: = konvergencia tartomány, vagyis az a tartomány, melyben a függvénysorozat ill. függvénysor pontonként konvergens.

AT: = abszolut konvergenciatartomány, vagyis az a tartomány, melyben a sorozat ill. a sor abszolut konvergens.

{ET}: = egyenletes konvergenciatartomány halmaz, vagyis azon tartományok összessége, melyben a sorozat illetve a sor egyenletesen konvergens.

ET: = ha létezik, az a legbővebb intervallum melyben a sor ill. sorozat egyenletesen konvergens.

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ röviden jelöli, hogy $(f_n(x))$ függvénysorozat egyenletesen tart $f(x)$ függvényhez.

Pontonkénti konvergencia

24. Határozzuk meg a következő függvénysorok KT konvergenciatartományát!

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx}$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

24. 6. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n+x}$

8. A következő feladatoknál használjuk fel a 21. és 22.-es feladatok eredményét.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^x}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^x}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{n})^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{n})^{n^2}$

Konvergenciatartomány meghatározása

25. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1 \quad \text{minden } x \in (a,b)\text{-re és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} > 1 \quad \text{minden } x \notin [a,b]\text{-re}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor konvergenciatartománya a és b végpontu intervallum.

b) Mit mondhatunk $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(a)|}$ ill. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(b)|}$ értékéről?

2. a) Igaz-e az 1. a)-beli állitás $\overline{\lim}$-ra is, ha a limesz nem létezik?

b) igaz-e az 1. a)-beli állitás, ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$

helyett $\overline{\lim} \dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$ szerepel?

26. Határozzuk meg a

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{2^4} + \frac{x^5}{3^5} + \dots + \frac{x^{2k}}{2^{2k}} + \frac{x^{2k+1}}{3^{2k+1}} + \dots$$

sor konvergenciatartományát!

Függvénysorozat egyenletes konvergenciája

27. Irjuk fel a következő függvénysorok részletösszeg-függvény sorozatát, annak limeszfüggvényét és KT konvergenciatartományát, valamint az $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ maradék függvényét.

1. $$\sum_{n=o}^{\infty} x^n (1-x)$$

2. $$\sum_{n=o}^{\infty} (\cos x)^n$$

28. Határozzuk meg a következő függvénysorozatok KT konvergenciatartományát, és f(x) limeszfüggvényét!

1. $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$

2. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$

3. $f_n(x) = \sin n x$

4. $f_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$

5. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad (x \geq 0)$

6. $f_n(x) = \frac{n^2 x + n \ln x + x^5}{n^2 + n x^3 + \sin x}$

Függvénysorozatok egyenletes-konvergencia kritériumai

29. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha van olyan (c_n) numerikus sorozat, hogy $|r_n(x)| \leq c_n$ az I-ben (ha $n > N$) és

$\lim_{n \to \infty} c_n = 0$, akkor $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben!

b) Állapitsuk meg; igaz-e, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ KT-n, ha

α) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$

β) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x^n}{n}$

γ) $f_n(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{x}{n}$

2. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben, akkor minden I-beli (x_n) pontsorozatra

$$\lim_{n \to \infty} |r_n(x_n)| = 0 .$$

b) Bizonyitsuk be, hogy ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, melyre $\lim_{n \to \infty} |r_n(x_n)| \neq 0$ akkor $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ I-ben.

c) Állapitsuk meg, hogy $f_n(x)$ egyenletesen konvergál-e a limesz függvényhez a konvergenciatartományán.

α) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$

β) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

γ) $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$

29\. 3. (a) Bizonyitsuk be, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben akkor, és csak akkor, ha $\sup_{x \in I} |r_n(x)| = a_n$ numerikus sorozatra $\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$

(b) Állapitsuk meg, igaz-e, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ KT-n, ha

α) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $(x \geq 0)$

β) $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{nx}$

γ) $f_n(x) = x\, e^{-nx}$

4\. $\boxed{a)}$ Bizonyitsuk be, hogy ha $f_n(x)$ folytonos (minden n-re) az $[a,b]$-ben és itt f(x)-hez tart, valamint $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ az (a,b)-ben, akkor f(x) folytonos $[a, b]$ -ben!

b) Állapitsuk meg, igaz-e, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ KT-n és a megadott I-intervallumon!

α) $f_n(x) = e^{-nx}$, $I = (0, \infty)$

β) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $I = (0, \infty)$

γ) $f_n(x) = nx^n$, $I = (-1,1)$

5\. Döntsük el, hogy a következő állitások közül melyek igazak!

a) Ha nincs olyan $c_n \to 0$ numerikus sorozat, melyre $|r_n(x)| \leq c_n$ (ha $n > N$), akkor $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$.

Vagyis minden egyenletesen konvergens fv. sorozathoz van numerikus majoráns sorozat.

$\boxed{b)}$ Ha minden $(x_n) \subset I$ pontsorozatra $|r_n(x_n)| \to 0$, akkor $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ az I-ben.

29. 5. c) Ha $f_n(x)$ folytonos minden n-re [a,b]-ben, de f(x) nem folytonos az a-ban, akkor $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ (a,b)-ben

d) Ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, melyre $r_n(x_n)$ divergens, akkor $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ I-ben.

6. Bizonyitsuk be, hogy ha $(f_n(x))$ függvénysorozat konvergenciatartománya

a) (a,b)

b) [a,b]

és $\dfrac{d\,|r_n(x)|}{dx}$ jeltartó, akkor

a) $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$

b) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

30 Állapitsuk meg, hogy az $(f_n(x))$ függvénysorozat egyenletesen konvergens-e a KT konvergenciatartományán, valamint a megadott I intervallumokon, és határozzuk meg {ET} egyenletes konvergenciatartomány halmazt vagy ha van, azt az ET legbővebb intervallumot, melyben a sorozat egyenletesen konvergens!

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$; $I = [a,b]$, $a,b \in R$

2 $f_n(x) = \dfrac{x+n}{n}$ $I = [a,b]$, $a,b \in R$

3. $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$; $I = [a, \infty)$, $a \in R$, $a > 0$

4 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$; $I = (-\infty, a]$

5. $f_n(x) = x^n$ $I_1 = (-1,1)$, $I_2 = [a,b]$ $(-1 < a < b < 1$ $a,b \in R)$

20. 6. $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^n$; $I_1 = (-1,1)$,

$I_2 = [a,b]$ $(-1 < a < b < 1, \quad a,b \in R)$

7. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$; $I = [a,b]$, $a,b \in R$

8. $f_n(x) = (1 + \frac{1}{xn})^n$; $I_1 = (0, \infty)$,

$I_2 = [a, \infty)$, $(a > 0, \quad a \in R)$

9. $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ $I_1 = [-\infty, -1)$,

$I_2 = (-1,1)$, $I_3 = (1, \infty)$

10. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$; $I = (-1,1)$

11. $f_n(x) = \frac{n^x}{x^n}$; $I_1 = (1, \infty)$; $I_2 = [a, \infty)$, $(a > 1)$;

$I_3 = (-\infty, -1]$

12. $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$; $I = [a,b]$ $(a,b \in R$ tetszőleges)

13. $f_n(x) = nx^n(1-x)$ $I_1 = (-1,1)$ $I_2 = (-1,a]$ $(a < 1)$;

14. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ $I = (-\infty, +\infty)$

15. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n}$ $I = (e, \pi)$

16. $f_n(x) = n\,(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x})$ $I = [a, \infty)$ $(a > 0)$

30. 16. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ $\quad I = [a, \infty) \quad (a > 0)$

17. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ $\quad I = [a,b]$

18. $f_n(x) = \frac{n}{x} \sin \frac{x}{n}$ $\quad I = (0,a] \quad (a \in R)$

19. $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ $\quad I = [a,b] \quad (a,b \in R)$

20. $f_n(x) = \frac{x}{n} \sin \frac{x}{n}$ $\quad I = [a,b] \quad (a,b \in R)$

21. $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ $\quad I = (0, \infty)$

22. $f_n(x) = nx\, e^{-nx}$ $\quad I = [a, \infty) \quad (a > 0)$

23. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ $\quad I = (-\infty, 1)$

24. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ $\quad I = [-a, a] \quad (a \in R)$

25. $f_n(x) = \dfrac{\ln n^x}{n^x}$ $\quad I = (0, \infty)$

26. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$ $\quad I = (0, a] \quad (a \in R)$

27. $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \quad (x > 0)$; $\quad I_1 = (0,1]$,

$I_2 = [1, \infty)$; $I_3 = [1,d] \quad (d \in R)$

28. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x \geq 0)$; $\quad I_1 = [0,1]$; $I_2 = [1, \infty)$

Operációk felcserélhetősége függvénysorozat esetén

31. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre, válaszunkat indokoljuk és töltsük ki a mellékelt szelvényt (igen = 1, nem = 0).

1. Lehetnek-e egy $f(x) = 0$-hoz

   a) konvergens
   b) egyenletesen konvergens

   függvénysorozat elemei nem korlátos függvények?

2. Lehetséges-e, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup f_n(x) \neq \sup f(x)$

   a) ha $f_n(x) \to f(x)$, $(-\infty, \infty)$-ben

   !b) ha $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ minden korlátos I-ben

3. Tarthatnak-e nem folytonos függvények egyenletesen folytonos függvényhez?

4. Tarthatnak-e differenciálható függvények egyenletesen nem differenciálható függvényhez? Vizsgáljuk meg ebből a szempontból

   az $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ függvénysorozatot!

5. Tegyük fel, hogy $f_n(x)$-nek van primitív függvénye minden n-re és $F(x)$-hez konvergálnak I-n, valamint $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Következik-e ebből, hogy $f(x)$-nek is van primitív függvénye I-n?

6. Lehet-e egy függvénysorozat egyenletesen konvergens (a, b)-ben, ha az $[a, b]$-ben nem konvergens?

7. a) Lehet-e egy folytonos függvényekből álló függvénysorozat konvergens $[a, b]$-n, egyenletesen konvergens (a, b)-n, de nem egyenletesen konvergens $[a, b]$-n.

   b) Lehet-e egy $[a, b]$-ben konvergens függvénysorozat egyenletesen konvergens (a, b)-ben, de nem egyenletesen konvergens $[a, b]$-ben.

31\. 8. Lehet-e, hogy $(f_n(x))$ konvergens $(-\infty, \infty)$-en, egyenletesen konvergens tetszőleges $[a,b]$-n, de nem egyenletesen konvergens $(-\infty, \infty)$-en?

9. Igaz-e, hogy egyenletesen konvergens függvénysorozatok

a) összege,
b) szorzata

egyenletesen konvergens?

32\. 1. a) Lássuk be, hogy ha az $(f_n(x))$ függvénysorozat $f(x)$ limeszfüggvénye nem differenciálható x_0-ban, akkor az $(f_n'(x))$ derivált függvénysorozat nem lehet egyenletesen konvergens az x_0-at tartalmazó I intervallumban.

b) Egyenletesen konvergens-e az $(f_n'(x))$ függvénysorozat az I-ben, ha

α) $f_n(x) = \sqrt[n]{(1 + x^n)}$; $I = [0,2]$

β) $f_n(x) = \dfrac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}$; $I = [-1,1]$

γ) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$; $I = (-1,1)$

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi $(f_n(x))$ függvénysorozatok egyenletes konvergencia-tartományában az $f(x)$ limeszfüggvényre

$$(f(x))' = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) .$$

nem teljesül mindenhol.

a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

b) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x^n}{n}$

32. 2. c) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

3. Mutassuk meg, hogy az $(f_n(x)) = \left(\frac{x}{1 + e^{-nx}}\right)$ függvénysorozat $f(x)$ limeszfüggvényére és az $(f_n'(x))$ függvénysorozat $g(x)$ limeszfüggvényére nem igaz, hogy $f'(x) = g(x)$ a $[-1, 1]$-ben!

33. 1. Adjuk meg a és b értékét ugy, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

teljesüljön és hogy ne teljesüljön.

a) ha $f_n(x) = n\,x\,e^{-nx}$

b) ha $f_n(x) = n^2 x\,e^{-nx}$

c) ha $f_n(x) = n^3 x\,e^{-nx}$

d) ha $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^4}$

2. Az $f_n(x) = n^{\alpha} x\,e^{-nx}$ függvénysorozat a $[0, 1]$ intervallumban milyen α -ra lesz:

a) konvergens

b) egyenletesen konvergens

c) $$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \;?$$

34\. 1. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{x^2+n^2}\,dx = ?$$

2\. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{x^n}{1+x}\,dx = ?$$

3\. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{x^n}{e^{nx}}\,dx = ?$$

4\. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin \frac{x}{n}}\,dx = ?$$

5\. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx}\,dx = ?$$

35\. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges folytonosan differenciálható $g(x)$ függvényre, az

$$f_n(x) = n\left(g(x+\frac{1}{n}) - g(x)\right) = \frac{g(x+\frac{1}{n}) - g(x)}{\frac{1}{n} - 0}$$

függvénysorozat egyenletesen tart $g'(x)$ függvényhez minden $[a,b]$-n!

b) Bizonyitsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{x} n\left[\ln(x+\frac{1}{n}) - \ln x\right]dx = \ln x$$

!35. !2. Bizonyitsuk be, hogy

$$f_n(x) = \int_{x}^{x+\sum_{k=1}^{n} a_k} g(t)\,dt$$

függvénysorozat egyenletesen konvergens mindenhol, ha

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens numerikus sor és $g(x)$ folytonos függvény!

Függvénysorok egyenletes konvergenciája

36. Határozzuk meg a következő sorok KT konvergenciatartományát!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{n})^{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{xn^2} (1 - \frac{x}{n})^{n^3}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln (1 - \frac{x}{n}) + \frac{x}{n})$

37. 1. Igaz-e, hogy ha

a) $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \leq q < 1$ ha $n > N$ $x \in I$-re,

37. 1. illetve

b) $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq q < 1$ ha $n > N$ $x \in I$-re,

akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolut és egyenletesen konvergens az I-n?

2. Igaz-e, hogy ha

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} < 1$ $x \in I$-re,

illetve

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$ $x \in I$-re

akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolut és egyenletesen konvergens I-ben?

3. Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ $(c_n > 0)$ sor konvergens, és

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \qquad x \in I\text{ -re,}$$

ha $n > N$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolut és egyenletesen konvergens az I-n!

38 1. a) Bizonyitsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ egyenletesen konvergens az I-ben, ha $\sup_{x \in I} |f_n(x)| = a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor konvergens.

b) Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon!

α) $$\sum_{1}^{\infty} x^n e^{-nx}$$

β) $$\sum_{1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$

γ) $$\sum_{1}^{\infty} \sin \frac{x}{x^2 + n^3}$$

2. a) Bizonyitsuk be, hogy ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

egyenletesen konvergens I-n, akkor $f_n(x) \rightrightarrows 0$ I-n.

b) Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományukon!

α) $$\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$$

38. 2. b) β) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$

3. a) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens az $(a,b]$-ben és $f_n(x)$ folytonos $[a,b]$-ben minden n-re, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f(a)$ konvergens sor!

b) Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergencia tartományban!

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n n!$

4. a) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor az I-intervallumban Leibnitz sor, $|f_n(x)| \leq c_n$ (ha $n > N$) és $c_n \to 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor egyenletesen konvergens I-ben!

38. 4. b) Határozzuk meg a következő sorok $\{ET\}$ egyenletes konvergenciatartomány halmazát!

$$\alpha)\quad \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

$$\beta)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \pi \left(\frac{1}{n} + n\right) + \sin \pi \left(\frac{1}{n} - n\right)\right)$$

5. Döntsük el, hogy a következő állitások közül melyek igazak! (Töltsük ki a mellékelt szelvényt. Igaz = 1, Hamis = 0)

a) Ha nincs olyan $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens numerikus sor, hogy

$$|f_n(x)| \leq c_n \qquad \text{az I-n,}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor nem egyenletesen konvergens I-n.

(Weierstrass kritérium megforditása.)

b) Ha egy $[a,b]$-ben folytonos függvényekből álló függvénysor a -ban divergens, akkor nem lehet egyenletesen konvergens (a, b)-ben.

c) Ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, amelyre

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n)$ divergens sor, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor nem lehet egyenletesen konvergens I -n.

d) Egy folytonos függvényekből álló függvénysor nem lehet egyenletesen konvergens (a, b)-ben, ha $[a,b]$-ben nem egyenletesen konvergens.

38. 5. e) Ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, amelyre $f_n(x_n) \not\to 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor nem egyenletesen konvergens I-n.

f) Ha $f_n(x) \geq 0$ I-n és a $\sup_{x \in I} f_n(x) = a_n$ numerikus sorozatra a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor nem egyenletesen konvergens I -n.
(Vagyis az 1.a)-ban megadott feltétel szükséges-e?)

a)	b)	c)	d)	e)	f)	

39. Határozzuk meg a következő függvénysorok

AT abszolut-konvergenciatartományát,

KT konvergenciatartományát és

{ET} egyenletes konvergencia-halmazát!

(Ha létezik, egyenletes konvergenciatartományát!)

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{e^{nx}}$$

39. 4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^x}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\ln n}}$$

6. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+x}{n}}}$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{nx^2}$$

9. $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(x^2 - n^2 x)}$$

10. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{(x+n)^2}$$

11. $$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$$

12. $$\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{ch} x)^n$$

39. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{arctg } x^{n}}{n^{2}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(x+n^{2})^{2}}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{1 + x^{2n}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n}}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right)$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{n^{x}}}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{x}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{x}}{\ln n}$

39. 22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^x}$

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^x}{n}$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n^{\alpha}}\right)$ α valós paraméter függvényében.

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(|x| + n)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$

40. 1. a) Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens numerikus sor. Milyen $g(x)$ függvényekre igaz, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)a_n$ sor egyenletesen konvergens I-ben?

40. 1. b) Egyenletesen konvergens-e a

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^2}}{2^n}$$ függvénysor a $[-1,1]$ -ben?

2. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $(f_n(x))$ egyenletesen korlátos függvénysorozat I-ben és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolut konvergens sor, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$$

függvénysor egyenletesen konvergens I-ben.

b) Egyenletesen konvergens-e a

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{x^n}{1+x^n} \qquad (x \geq 0)$$

függvénysor $[0, \infty)$ -ben?

c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx, \quad (0 < q < 1) \quad \int_0^{2\pi} f(x)dx = ?$

!3. a) Felhasználva az alábbi kritériumot bizonyitsuk be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

függvénysor egyenletesen konvergens $[q, 2\pi - q]$ $(q > 0)$ tetszőleges intervallumon.

40. !3. a) Dirichlet-féle kritérium:

Egy $\sum_{n=o}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens I-ben, ha $b_n(x)$ monoton fogyólag egyenletesen tart 0-hoz minden $x \in I$-re és $\sum_{k=o}^{n} a_k(x) = A_n(x)$ részletösszeg függvények egyenletesen korlátosak I-ben.

!b) Bizonyitsuk be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

függvénysor nem egyenletesen konvergens $(0, 2\pi)$ intervallumon.

41. 1. Mutassuk meg, hogy ha $f(x)$ és $g(x)$ tetszőleges folytonos függvények, akkor a

$$\sum_{n=o}^{\infty} g(x)\,(f(x))^n$$

függvénysor konvergens abban az intervallumban, ahol $|f(x)| < 1$ és összege $S(x) = \frac{g(x)}{1 - f(x)}$

2. Határozzuk meg a következő függvénysorok KT konvergenciatartományát és $S(x)$ összegfüggvényét!

a) $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}$

b) $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x}{e^{nx}}$

41. 2. c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^{2n} \cos x$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}$

3. Igaz-e, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)\, f_n(x)$ és a $g(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor ugyanabban az intervallumban egyenletesen konvergens?

4. Megadható-e a $g(x)$ függvény ugy, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(x) \cdot x^n$$

függvénysor egyenletesen konvergens legyen $[-1,1]$ -ben?

5. Állapitsuk meg a következő függvénysorok KT konvergencia-tartományát $S(x)$ összegfüggvényét és $\{ET\}$ egyenletes konvergencia-tartomány halmazát!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)\, x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)\, x^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}$

41. 5. e) $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$

f) $\sum_{n=o}^{\infty} x(1+x)^{-n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$

Függvénysor határértéke, ditterenciálása, integrálása

42\. 1. Bizonyitsuk be, hogy ha

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergál $S(x)$ -hez $[a,b]$-n, akkor

ha $x_o \in [a,b]$

a) $\int_{x_o}^{x} S(t)\,dt = \int_{x_o}^{x} f_1(t)dt + \int_{x_o}^{x} f_2(t)dt + \ldots + \int_{x_o}^{x} f_n(t)dt + \ldots$

minden $e \in [a,b]$ -re

b) A jobb oldali sor egyenletesen konvergens.

2\. Lehetséges-e, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens az I-ben és létezik minden n-re $f_n(x)$ primitiv függvénye $F_n(x)$, és létezik $s(x)$ primitiv függvénye $S(x)$,

42. 2. de

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \neq S(x)$$

43. 1. Adjuk meg a és b értékét ugy, hogy

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right)$$

teljesüljön, és ugy is, hogy ne teljesüljön, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ a következő}$$

a) $$\sum_{n=o}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$$

b) $$g_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} (g_n(x) - g_{n-1}(x)) \qquad \text{ahol}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{ha} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ -2n^2x + 2n & \text{ha} \quad \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{ha} \quad \frac{1}{n} \leq x < 1 \end{cases}$$

2. Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges [a,b] -intervallumon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{x^n}{e^{nx}}\,dx = \int_a^b \frac{x}{e^x - x}\,dx$$

43. (3.) Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor nem integrálható tagonként a $[0,1]$-on

ha $$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x = \frac{p}{n} \quad (p,n) = 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(44.) Bizonyitsuk be, hogy az $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ függvény folytonos és akárhányszor differenciálható az $(1, \infty)$-intervallumban.

(45.) Igazoljuk a következő azonosságokat!

(1.) $$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 e^{-xn} + \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

2. $$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3. $$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^x - 2}{2^{n+x}} = 2$$

4. $$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^2 x^n = 0$$

5. $$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = 1$$

46. Bizonyitsuk be, hogy

a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor abszolut konvergencia-tartománya nem lehet szükebb, mint a konvergenciatartománya. (Végpontokat leszámitva!)

47. Mely állitások igazak a $(-R,R)$-ben konvergens

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergenciasugaráról?

1. $\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

2. $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ha létezik

3. $\frac{1}{R} = \overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Töltsük ki a mellékelt szelvényt! Igaz = 1. Nem igaz = 0.

1.	2.	3.

48. Mely állitások igazak a $(-R,R)$-ben konvergens

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor együtthatóiról?

1. $\lim_{n \to \infty} a_n$ létezik

2. $\lim_{n \to \infty} |a_n| < 1$ ha létezik

48. 3. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

4. (a_n) korlátos sorozat

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = 0$

6. Lehet $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{n} = 0$

8. $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \frac{1}{n} = 0$

Töltsük ki a mellékelt szelvényt! Igaz = 1. Nem igaz = 0

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

49. Határozzuk meg a következő hatványsorok AT abszolut konvergencia és KT konvergencia-tartományát!

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

49. 4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot n^{\alpha}$ (α tetszőleges)

$\boxed{10}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\left[3 + (-1)^n\right]^n}$

49. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{n})^n$

50. Határozzuk meg a következő hatványsorok KT konvergenciatartományát, AT abszolut konvergenciatartományát, és állapitsuk meg, hogy egyenletes-e a konvergencia KT-n valamint a megadott I' intervallumon?

1. $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $I = [a,b]$ $a,b \in R$

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $I = [-1,0]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x^n|}{n}$; $I = (-1,1)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in R)$; $I = (-1,1)$

Hatványsorok differenciálása, integrálása, összegzése, sorfejtések

51. 1. a) Mutassuk meg, hogy ha $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ $(-R,R)$,

$(R \neq 0)$-ban, akkor az n-szeri tagonkénti deriválással adódó

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \ldots (n-k+1) a_n x^{n-k}$$

51. 1. a) sor konvergens $(-R,R)$ -ben és összegfüggvénye

$f^{(k)}(x)$ $\left[f(x) \text{ függvény } k\text{-adik deriváltja} \right]$!

b) Határozzuk meg a következő sorok összegfüggvényét a $(-1,1)$ -ben!

α) $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

β) $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2}$$

c) Fejtsük x hatványai szerint haladó hatványsorba az

α) $$\frac{1}{(1+x)^2}$$

β) $$\frac{1}{(1+x)^3}$$

függvényeket a $(-1,1)$ intervallumon!

2. a) Mutassuk meg, hogy ha $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ $(-R,R)$, $(R \neq 0)$-ban, akkor az n-szeri tagonkénti integrálással (0-tól x-ig) adódó $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n \cdot n!}{(n+k)!} x^{n+k}$ hatványsor konvergens $(-R,R)$-ben és $g(x)$ összegfüggvényére $g^{(k)}(x) = f(x)$.

51. 2. b) Határozzuk meg a következő sorok összegfüggvényét a $(-1,1)$-ben!

$$\alpha)\quad \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\beta)\quad \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

c) Fejtsük x hatványai szerint haladó hatványsorba az

α) $\ln(1+x)$

β) $\operatorname{arctg} x$

függvényeket a $(-1,1)$-ben!

52. Bizonyitsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

(Határozzuk meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} x^n$ hatványsor konvergenciasugarát hányados majd gyökkritériummal!)

53. Határozzuk meg a következő hatványsorok $S(x)$ összegfüggvényét és KT konvergencia tartományát!

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, x^n$

53. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^{2n}$

5. $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n!} x^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^{n-1}$

Müveletek hatványsorokkal

54. 1. Igazoljuk, hogy ha $g(x) = \sum_{k=o}^{\infty} b_k x^k$, $(-R_1, R_1)$-ben és

$f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k$ $(-R_2, R_2)$ -ben, akkor

54. 1. $f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)\, x^k$, és

$$f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \dots + b_k)\, x^k,$$

ha $x \leftarrow [-R, R] \subset (-R_1, R_1) \cap (-R_2, R_2)$.

2.) Fejtsük 0-körüli hatványsorba a következő függvényeket és adjuk meg, hogy hol érvényes a sorfejtés!

a) $\ln \frac{1+x}{1-x}$

b) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

c) $\frac{\ln(1+x)}{1-x}$.

55. Határozzuk meg a következő függvénysor S(x) összegfüggvényét és KT konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} (x+1)^n$$

56. Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor négyzete (önmagával képzett Cauchy-szorzata) és deriváltsora ugyanaz!

57. 1. a) Igazoljuk, hogy ha

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \quad (-R, R)\text{ -ben,}$$

57. 1. a) akkor

$$f(g(x)) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \left[g(x)\right]^n \quad \text{I-ben, ha} \quad g(I) \subseteq (-R,R).$$

b) Speciálisan, ha g(x) polinom:

$$g(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_o ,$$

akkor $\sum_{n=o}^{\infty} a_n(g(x))^n$ az f(g(x)) függvény 0 körüli hatványsorfejtése.

2. Felhasználva az

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=o}^{\infty} x^n \quad \text{ha} \quad x \in (-1,1)$$

azonosságot fejtsük 0 körüli hatványsorba a következő függvényeket, és adjuk meg, hogy hol érvényes a sorfejtés!

a) $\frac{1}{1-x^2}$

b) $\frac{1}{1+x}$

c) $\frac{1}{x}$

d) $\frac{1}{a+x}$ (a tetszőleges)

e) $\frac{1}{1+x^2}$

58 1. Legyen $\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n = f(x)$. Végezzük el a $\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ és $\sum_{n=o}^{\infty} x^n$ Cauchy szorzását és mutassuk meg, hogy

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=o}^{\infty} S_n x^n \quad (S_n = a_1 + \ldots + a_n)$$

2. Mutassuk meg, hogy ha $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ a $(-R, R)$-ben

$(R > 0)$, akkor $f(Rx) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n R^n x^n$ $(-1, 1)$-ben, és

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n R^n x^n = (1-x) \sum_{n=o}^{\infty} (a_o + a_1 R + \ldots + a_n R^n) x^n$$

59 !1. Bizonyitsuk be, hogy ha $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ konvergenciasugara R, és a sor az $x = R$ $(x = -R)$-ben is konvergens, akkor

a) egyenletesen konvergens $[0, R]$ (ill. $[-R, 0]$)-ban

b) $S(x)$ összegfüggvénye $x = R$ $(x = -R)$-ben folytonos függvény.

$$S(R) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n R^n \quad \left(S(-R) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (-R)^n \right)$$

(Abel tétele)

59. 2. Határozzuk meg az

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{2n+1}$

numerikus sorok összegét az $\ln(1+x)$ és az arctg x függvények 0 körüli hatványsora alapján!

60. Válaszoljunk a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hatványsorral kapcsolatos alábbi kérdésekre. A válaszokat indokoljuk is meg!

1. Létezik-e olyan hatványsor, mely mindenütt konvergens, de sehol sem abszolut konvergens?
2. Létezik-e olyan hatványsor, melynek összegfüggvénye nem folytonos ott, ahol a sor konvergens?
3. Lehet-e hatványsor csak egy pontban konvergens?
4. Lehet-e hatványsor csak két pontban konvergens?
5. Lehet-e egy hatványsor egyenletes konvergencia tartománya bővebb, mint abszolut konvergencia tartománya?
6. Lehet-e egy hatványsor összegfüggvénye nem korlátos valahol a konvergencia tartományban?
7. Következik-e abból, hogy egy hatványsor egy $x_o > a$ helyen feltételesen konvergens, hogy minden $a < x < x_o$ helyen abszolut konvergens?

Töltsük ki a mellékelt szelvényt!
Igaz = 1 Nem igaz = 0

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Taylor-sorok

61. 1. Adjuk meg a következő függvények x_o-körüli Taylor-sorát a definició alapján!

a) $f(x) = \sin x$ $\quad x_o = \frac{\pi}{4}$

b) $f(x) = e^x$ $\quad x_o = 2$

c) $f(x) = x^2$ $\quad x_o = 0, \quad x_o = 1$

d) $f(x) = (x-1)^3$ $\quad x_o = 0, \quad x_o = 1, \quad x_o = -1$

2. Irjuk fel az $y = \ln x$ $\quad x_o = 3$ körüli Taylor-sora 10. indexü maradéktagjának Lagrange-alakját, próbáljuk az elkövetett hibát becsülni a $[2,4]$ intervallumban, és mutassuk meg, hogy a Taylor-sor előállitja a függvényt!

62. 1. Melyik feltételből következik, hogy

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{konvergens} \quad |x-a| < R\text{-ben és}$$

$f(x)$-el egyenlő?
Abból, hogy

a) $f^n(x)$ korlátos függvény $|x-a| < R$-ben minden n-re;

b) $|f^n(x)| < K$ minden n-re $|x-a| < R$-ben

2. Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ $(-R, R)$-ben, akkor

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \text{ha} \quad |x| < R.$$

62. 2. b) $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$, ha $|x-a| < R - |a|$.

3. Bizonyitsuk be, hogy ha

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad (-\infty, \infty)\text{-ben és}$$

$$|a_n| < \frac{c}{n!} \qquad (\text{ha} \quad n > N),$$

akkor

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad \text{tetszőleges a-ra!}$$

4. Bizonyitsuk be, hogy ha $|f^{(n)}(x)| \leq c^n$ (c tetszőleges konstans) $|x - a| < R$ -ben minden n-re, akkor

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad ; \quad |x-a| < R \text{ -ben!}$$

5. Felhasználva, hogy a hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora, határozzuk meg az

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln (1+x)}{x} & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvények n-ik deriváltját az $x = 0$ pontban!

63. 1. Igazoljuk, hogy ha $g(x)$ polinom, és $f(y)$ Taylor-sorba fejthető az $y_0 = g(x_0)$ pontban, akkor az $f(g(x))$ függvény is Taylor-sorba fejthető az x_0-pontban.

2. Felhasználva az összetett függvény Taylor-sorára vonatkozó tételt[1], igazoljuk, hogy ha $y = f(x)$ Taylor sorba fejthető az $x = x_0$ pontban és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az $x = f^{-1}(y)$ függvény is sorba fejthető az $y_0 = f(x_0)$ pontban.

64. Fejtsük 0 körüli Taylor-sorba a következő függvényeket, és adjuk meg, hogy hol érvényes a sorfejtés!

1. $\frac{1}{e^x}$

2. $\frac{1}{e^{x^2}}$

3. $\sin^2 x$

4. $\operatorname{ch}^2 x$

5. $\sin x^2$

65. Hatványsorba fejthető-e az $f(x)$ függvény x_0 körül, ha igen, adjuk meg.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad x_0 = 0$, $\quad x_0 = 1$

2. $f(x) = x^{3/2}$, $\quad x_0 = 0$, $\quad x_0 = 1$

[1] Ha az $y = g(x)$ függvény Taylor-sorba fejthető az $x = x_0$ pontban és a $z = f(y)$ függvény Taylor-sorba fejthető az $y_0 = g(x_0)$ pontban, akkor a $z = f(g)(x))$ függvény is Taylor-sorba fejthető az $x = x_0$-pontban.

3. $f(x) = x^{\alpha}$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

66. 1. Állapitsuk meg, hogy az $(1+x)^{\alpha}$ függvény binomiális sorfejtésében mely α-ra és x_0-akra lesz a sor jeltartó, és melyekre váltakozó előjelü egy bizonyos indextől kezdve!

2. Fejtsük binomiális sor segitségével 0 körüli hatványsorba a következő függvényeket!

a) $\sqrt{1+x}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

67. Felhasználva a hatványsorok tulajdonságait, fejtsük 0 körüli Taylor-sorba a következő függvényeket, és állapitsuk meg, hogy hol érvényes a sorfejtés!

1. $f(x) = \operatorname{arctg} x$
2. $f(x) = \operatorname{arth} x$
3. $f(x) = \operatorname{arcth} x$
4. $f(x) = \arcsin x$
5. $f(x) = \arccos x$
6. $f(x) = \operatorname{arsh} x$
7. $f(x) = \operatorname{arch} x$
8. $f(x) = \ln (1+x^2)$
9. $f(x) = \ln (1-x^2)$
10. $f(x) = \ln \sqrt{(1+x^2)}$
11. $f(x) = \ln \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

68. A megfelelő Cauchy-szorzatok elvégzésével fejtsük 0 körüli Taylor-sorba a következő függvényeket, és állapitsuk meg, hogy hol érvényes a sorfejtés!

1. $f(x) = (1 + x) \cos x$

2. $f(x) = e^{-x} \sin x$

3. a) $f(x) = \operatorname{tg} x$

   b) Mutassuk meg a sorfejtés segitségével, hogy egy abszolut konvergens és egy divergens sor Cauchy szorzata lehet abszolut konvergens.

69. Fejtsük a következő $f(x)$ függvényeket 0 körüli Taylor-sorba, és adjuk meg, hogy hol érvényes a sorfejtés!

1. $f(x) = (a + x)^{\alpha}$; $a, \alpha \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

3. $f(x) = \log_b (1 + x)$; $b > 0$ $b \in \mathbb{R}$

4. $f(x) = \log_b (a + x)$; $a, b > 0$ $a, b \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = 10^x$

6. $f(x) = \ln \cos x$

7. $f(x) = \ln (3 + 4x - 5x^2)$

8. $f(x) = \operatorname{ch}(x + 2x^2)$

9. $f(x) = (\arcsin x)^2$

10. a) $f(x) = \sin^2 x$

    b) $f(x) = \cos^2 x$

69. 11. $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$; $a \in \mathbb{R}$

12. $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$

13. a) $f(x) = \frac{1}{a - bx}$

b) $f(x) = \frac{1}{a + bx}$; $a, b \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = (a - x)^{-\alpha}$; $a, \alpha \in \mathbb{R}$

15. $f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)}$

16. $f(x) = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$

17. $f(x)$ arctg $\frac{1}{x}$

18. $f(x) = (\cos x) \cdot e^{x^2}$

19. $f(x) = \frac{\cos x}{1 + x}$

20. $f(x) = \frac{\ln (1+x)}{\cos x}$

21. $f(x) = \cos (e^x)$

22. $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

23. $f(x) = \frac{\ln (1 + x)}{1 + x}$

70. Irjuk fel a következő $f(x)$ függvények x_0 körüli Taylor-sorának ismeretében x_1 körüli Taylor-sorukat!

1. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_1 = a$

70\. 2. $f(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$ $\qquad x_o = 0, \qquad x_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad x_1 = a$

3. $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad x_o = \frac{\pi}{4}, \qquad x_1 = 0$

4. $f(x) = \operatorname{sh} x$

$f(x) = \operatorname{ch} x$ $\qquad x_o = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_1 = a$

5. $f(x) = \operatorname{sh}(x-a)$

$f(x) = \operatorname{ch}(x-a)$ $\qquad x_o = a, \qquad x_1 = 0$

6. $f(x) = \ln x \qquad x_o = 1, \qquad x_1 = e, \qquad x_1 = a$

7. $f(x) = \ln(a + x) \qquad x_o = 1, \qquad x_1 = 0, \qquad x_1 = b$

71\. Határozzuk meg a következő sorok összegét.

1. $$\sum_{k=o}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

3. $$\sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$$

71. 4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!}$

Függvények közelitése Taylor-sorral, hibabecslés

72. Bizonyitsuk be a következő egyenlőtlenségeket!

1. $x - \frac{x^2}{2} < \ln (1+x) < x$ ha $0 < x \leq 1$

2. $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x$ ha $0 < x \leq 1$

3. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ ha $0 < x$

4. $\operatorname{sh} x > x + \frac{x^3}{6}$ ha $0 < x$

5. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}$

6. $\arcsin x > x + \frac{x^3}{6}$ ha $0 < x < 1$

7. $\frac{1}{8} x^2 + \frac{3}{4} x + \frac{3}{8} < \sqrt{x} < \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}$ ha $0 < x \leq 2$

8. $\left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \frac{1}{n}$; $n \in N$

73. 1. Legyen (a_n) váltakozó előjelü sorozat és legyen

$f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k$ $(-R,R)$-ben. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora abszolutértékü hibát követünk el, ha az $f(x)$ függvényérték közelitő kiszámitásához a $T_n(x) = \sum_{k=o}^{n} a_k x^k$ polinomot használjuk $0 < x < R$ -ben, azaz adjunk felső becslést a $|H(x)| = |f(x) - T_n(x)|$ hibára a $(o,a]$ $(a < R)$ intervallumban.

2\. a) Legyen $f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k$ $(-R,R)$-ben. Mutassuk meg, hogy e sornak mindig van konvergens abszolut majoráns geometriai sora, azaz létezik $\sum_{k=o}^{\infty} q^k$ $(0 < q < 1)$, melyre $|a_k x^k| < q^k$ $(k \in N)$

b) Legyen $f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k$ $(-R,R)$-ben. Adjunk felső becslést a $|H(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=o}^{n} a_k x^k \right|$ hibára a $[-a,a]$, $(a<R)$ intervallumban.

74. 1. Becsüljük meg, hogy az $f(x)$ függvény 0 körüli n-edfoku Taylor polinomja legfeljebb mekkora hibával közeliti a függvényt a $[0,a]$ intervallumban, valamint adjuk meg az $f(a)$ közelitő értéket és hibáját.

a) $f(x) = \ln(1+x)$ $n=4$, $a=0,5$, $H=?$

b) $f(x) = \text{sh } x$, $n=3$, $a=0,2$, $H=?$

74. 1.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$; n=4, a=0,1, H=?

d) $f(x) = e^{x^2}$ n=4, a=0.9, H=?

e) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, n=6, a=0.5, H=?

2. Adjunk meg egy intervallumot, ahol a $T_n(x)$ polinom az f(x) függvényt H-nál kisebb hibával közelíti!

a) $f(x) = \ln(1+x)$, n = 4, a = ?, $H = 7.10^{-3}$

b) $f(x) = \text{sh } x$, n = 3, a = ?, $H = 3.10^{-4}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$ n=4, a=?, $H=2.10^{-9}$

d) $f(x) = e^{x^2}$ n=4, a=?, $H=3.10^{-2}$

e) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, n=6, a=?, $H=3.10^{-3}$

3. Határozzuk meg, hogy az f(x) függvényt hányadfoku Taylor polinomja közelíti H-nál kisebb hibával a $[0,a]$ intervallumban, valamint adjuk meg az f(a) közelítő értékét.

a) $f(x) = \ln(1+x)$, n=?, a=0,5, $H=7.10^{-3}$

b) $f(x) = \text{sh } x$, n=?, a=0.2, $H=3.10^{-4}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ n = ?, a=0.1, $H=2.10^{-9}$

d) $f(x) = e^{x^2}$, n=?, a=0.9, $H=3.10^{-2}$

74. 4. e) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $n=?$, $a = 0.5$, $H=3.10^{-3}$

f(x)	n	a	H	f(a)
$\ln(1+x)$	4	0,5	7.10^{-3}	0.401
sh x	3	0,2	3.10^{-4}	0.2001
$\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$	4	0,1	2.10^{-9}	0.9983
e^{x^2}	4	0,9	3.10^{-2}	1.84
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	6	0,5	3.10^{-3}	1.098

Azaz töltsük ki a fenti táblázat

1. harmadik és negyedik oszlopát
2. második oszlopát
3. első és negyedik oszlopát

ugy, hogy a többit adottnak tekintjük.

75. Határozzuk meg a következő kifejezések közelitő értékét 3 tizedes pontossággal (kalkulátor segitsége nélkül) ($H < 5.10^{-4}$)

1. ln 3
2. sh 0.2
3. $\sqrt[3]{30}$
4. $\sqrt[3]{24}$

76. Fejtsük hatványsorba a következő F(x) függvényeket, és állapitsuk meg, hogy hol érvényes a sorfejtés!

1. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

2. $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

3. $F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt$

77. Határozzuk meg a következő integrálok értékét 0,001 pontossággal, felhasználva a Leibniz-tipusu sorok hibájára vonatkozó becslést!

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

2. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\, dx$

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$

4. $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$

5. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3}$

77. 6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

78. Határozzuk meg a hiba megfelelő becslésével a következő integrálok értékét 0,001 pontossággal!

1. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

3. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

4. $\int_0^{0.1} \ln(9+x^2)\,dx$

Fourier-sorok

79. Fejtsük Fourier-sorba a következő f(x) függvényeket

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \cos 2x$
3. $f(x) = \sin^2 x$
4. $f(x) = \cos^2 x$

80. Fejtsük Fourier-sorba az

$f(x) = \arcsin(\sin x)$ függvényt.

81. Irjuk fel az alábbi függvények Fourier-sorát, vizsgáljuk meg konvergenciájukat!

$\boxed{1.}$ $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{ha } x = (2k+1)\pi \end{cases}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ és

$f(x)$ 2π szerint periódikus, azaz

$f(x + 2\pi) = f(x)$ minden x-re.

Egyenletesen konvergens-e a Fourier-sor?

$\boxed{2.}$ a) $f(x) = x^2$, ha $-\pi \leq x \leq \pi$ és $f(x+2\pi) = f(x)$ minden x-re.

b) Hogyan kapható meg ez a Fourier-sor az 1)-ben megadott függvény Fourier-sora segitségével?

c) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \text{ és a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ numerikus sorok}$$

összegét a sorfejtés segitségével!

$\boxed{3.}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \text{ vagy } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \frac{2}{\pi} x + 1 & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ -\frac{2}{\pi} x + 1 & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$ minden x-re

4.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 0 & \text{ha } x = (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$ minden x-re.

5. a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$ minden x-re

b) Határozzuk meg a sorfejtés segitségével a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \quad \text{numerikus sor összegét!}$$

$\boxed{6.}$ $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{ha} \quad -2\pi < x < 0 \\ 1 & \text{ha} \quad 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{ha} \quad x = 2k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$

$f(x + 4\pi) = f(x)$ minden x-re.

7. $f(x)=\begin{cases} |x| & \text{ha } |x| < 1 \\ 0 & \text{ha } -2 \leq x \leq -1 \text{ vagy } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$f(x + 4) = f(x)$ minden x-re.

8. $f(x) = \sin \alpha x$; $f(x + 2\pi) = f(x)$ minden x-re

a) $\alpha \in \mathbb{N}$

b) $\alpha \notin \mathbb{N}$

82. 1. Fejtsük az $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ függvényt Fourier-sorba a $[0,\pi)$ intervallumon

a) csupa koszinuszos tag segitségével
b) szinuszos és koszinuszos tagok segitségével
c) állapitsuk meg a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ sor összegét!

2. Fejtsük az $f(x) = x^2$ függvényt Fourier-sorba a $[0,\pi)$ intervallumon

a) csupa szinuszos tag segitségével
b) szinuszos és koszinuszos tagok segitségével

3. Fejtsük az $f(x) = x^2$ függvényt Fourier-sorba a $[0,1)$ intervallumon

a) csupa koszinuszos tag segitségével
b) csupa szinuszos tag segitségével.

MEGOLDÁSOK

1. 1. a) Nem, pl.: a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

b) Igen, mert (S_n) monoton növő sorozat.

c) Nem, pl.: $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n})$

d) Igen, ilyenkor (S_n) korlátos is.

e) Igen, mert ha 1. $|S_n| \to 0 \Longrightarrow S_n \to 0$

2. $(|S_n| \to S \neq 0$ és $a_n \to 0) \Longrightarrow (S_n)$ jeltartó ha

$n > N$, így $S_n \to S$

2. a) Konvergens, mert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

1. 2. b) Divergens, mert

$$|S_{10n} - S_{5n}| = \frac{1}{(5n+1)^2} + \frac{1}{(5n+2)^2} + \frac{1}{(5n+3)^2} +$$

$$+ \frac{1}{(5n+4)^2} + \frac{1}{(5n+5)} + \frac{1}{(5n+6)^2} + \dots + \frac{1}{5n + 5n} >$$

$$> 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{5(n+1)} + 0 + \dots + \frac{1}{5.2n} >$$

$$> \frac{1}{5} n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{10} .$$

c) divergens, mert $|S_{(2n)^2} - S_{n^2}| > \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$

$$\left(a_{k^2} = \frac{1}{k} \right)$$

d) divergens $\left(a_{2^k} = \frac{1}{k} \right)$

e) divergens $\left(a_{k^2} = \frac{1}{2 \ln k} \right)$

2. $\boxed{1.}$ $S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$

$$S = \lim_{n \to \infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \to \infty} a_{n+1}$$

Tehát (a_k) akkor és csak akkor konvergens, ha a

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$ sor konvergens.

2. a) $\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$a_k = \frac{1}{k}, \quad a_1 = 1, \quad s = 1$$

2. 2. b) $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}).(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

$a_k = -\sqrt{k}$, divergens, S_n végtelenhez divergál.

c) $(\sqrt{k-1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) = (\sqrt{k-1} - \sqrt{k}) - (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$

$a_k = \sqrt{k-1} - \sqrt{k}$, $\lim\limits_{k\to\infty} (\sqrt{k-1} - \sqrt{k}) =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 0$

$a_1 = -1$, $S = -1$

d) $S = \frac{1}{4}$

e) $\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln(k-1) - 2\ln k +$

$+ \ln(k+1) = (\ln(k-1) - \ln k) - (\ln k - \ln(k+1))$

$a_k = \ln(k-1) - \ln k = \ln \frac{k-1}{k} \to 0$

$a_1 = \ln \frac{1}{2}$; $S = \ln \frac{1}{2}$

f) $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$; $a_1 = 1$; $a_k = \frac{1}{k!}$; $S=1$

g) $S = \frac{1}{8}$

3. a) $S_n = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$

$= \ln (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) =$

$= \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\ldots\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$,

3. a) $\lim \ln (n+1) = \infty$, így a sor divergens.

b) a sor $-\infty$ -hez divergál.

c) $S = \ln \frac{1}{6}$

$\boxed{\text{d)}}$ $S_1 = 1,\ S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \dots,\ S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} =$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right);\ S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$$

e) Végtelen geometriai sor: $q = \frac{2}{3}$; $a_1 = 1$,

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

f) $S = -\frac{1}{3}$ $\left(q = -\frac{1}{2};\ a_1 = -\frac{1}{2}\right)$

g) $S = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$\boxed{\text{h)}}$ $S_n = 1 + 2\,\frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

de $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$

3\. $\boxed{h)}$

$$+\quad \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}^{n}}{\frac{1}{2}}$$

$$+\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}}$$

$$+\quad \vdots$$

$$+\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_n = 1+2\,\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\dots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}}\longrightarrow 4$$

i) divergens.

4\. 1. $\boxed{a)}$ Jelölje $A_n = a_1+\dots+a_n$, $B_n = b_1+\dots+b_n$,

$C_n = c_1+\dots+c_n$

Tetszőleges m, $n > N$-re:

$A_m - A_n \leq C_m - C_n \leq B_m - B_n$, mert

4. 1. $\boxed{a)}$ $a_n + \ldots + a_m \le c_n + \ldots + c_m \le b_n + \ldots + b_m$, igy

$$\left|\sum_{k=n}^{m} c_k\right| \le \max\left(\left|\sum_{n}^{m} a_k\right|, \left|\sum_{n}^{m} b_k\right|\right).$$

Megjegyzés: ha $\sum c_k$ pozitiv tagu sor, akkor persze elég a $c_n \le b_n$ feltétel a konvergenciához.

(b) Lehet konvergens, pl.

$$\sum a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\right); \quad \sum b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k};$$

$$\sum c_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k},$$

és lehet divergens; pl, ha $a_k > 0$ és a_k divergens, akkor $\sum c_k$ mindenképpen divergens

(2.) a) Nem következik a sor konvergenciája, pl. a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor esetén minden $p \in N$-re

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} < p\frac{1}{n+1} \to 0, \text{ és és } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergens.}$$

b) Nem, a) és b) ekvivalens feltétel.

c) Igen, ez a Cauchy-kritérium.

5. 1. Nem Leibniz-tipusu, mert $|a_{n+1}| \not\le |a_n|$ (ha $n > N$), de abszolut konvergens, igy konvergens.

5\. (2.) Leibniz-tipusu, mert tagjai abszolut értéke monoton csökken, valamint 0-hoz tart. Ugyanis $\ln n < n$ miatt $a_n > 0$ és $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$ monoton fogyó (mert $f'(x) < 0$, ha $x > 1$), igy $|a_{n+1}| < |a_n|$; és $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, mert $\frac{\ln n}{n} \to 0$ miatt

$0 < \frac{\ln n}{n} < \frac{1}{2}$ (ha $n > N$), $\ln n < \frac{n}{2}$; $-\ln n > -\frac{n}{2}$

$n - \ln n > \frac{n}{2}$; $\frac{1}{n - \ln n} < \frac{2}{n} \to 0$. Tehát a sor konvergens.

(3.) Nem Leibniz-tipusu, mert $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ és divergens,

mert kettesével zárójelezve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n-1}$ sor divergens, igy az eredeti sor is az.

(Bár váltakozó előjelü és $a_n \to 0$).

4\. Divergens.

6\. 1. (a) Következik a divergencia ui. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = A_n$

$\sum\limits_{k=1}^{n} b_n = B_n$ jelöléssel $(S_n) = (A_n + B_n)$ divergens

sorozat.

b) Nem.

(c) Következik a konvergencia ui. a $\sum(a_n + b_n)$ részletösszegeinek sorozata részsorozata az $a_1 + b_1 + \ldots + a_n + b_n + \ldots$ sor részletösszegsorozatának.

2\. a) Divergens.

b) Konvergens.

6. 2. c) Konvergens, mert $S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots +$

$$+ (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$$

d) Divergens, mert $\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$ és

$\sum \frac{2}{n-1}$ divergens.

3. $S = \frac{c}{c-a} + \frac{c}{c-b}$ ha $\left\{ \begin{array}{l} -c < a < c \\ -c < b < c \end{array} \right\}$

4. Igen, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

5. a) Lehet, pl. $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$\boxed{\text{b)}}$ Lehet, pl.

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2^5} + \ldots$$

$+ \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2^n} + \ldots$ konvergens, mert két

konvergens sor összege,

míg $\sum (-1)^n a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^4} + \ldots$

$+ \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} + \ldots$ divergens, mert egy konvergens és egy divergens sor összege.

6. 6. a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{4}+\frac{1}{17}\dots$

b) Egy lehetséges átrendezés: addig vegyünk pozitiv tagokat, mig az összeg nem lesz nagyobb mint 1, utána vegyünk addig negativ tagokat, mig az összeg nem lesz kisebb mint 0, majd ujra pozitiv tagokat, mig az összeg nem lesz 1-nél nagyobb, stb. Ezt az eljárást folytatva a sor részlegösszegei sorozatának két torlódási pontja lesz a 0 és az 1.

c) Nem, lásd 6. 6. b)-ben megkonstruált sor.

7. a) α) $\sum(a_n + b_n)$ sor részletösszegei $S_1 = a_1+b_1$,

$S_2 = a_1+b_1+a_2+b_2,\dots,\quad S_n=a_1+b_1+\dots+a_n+b_n,$

$a_1+b_1+a_2+b_2+\dots+a_n+b_n+\dots$ sor részletösszegeire

$S'_1 = a_1 \quad S'_2=a_1+b_1=S_1; \quad S'_3=a_1+a_2=S_1+a_2,\dots$

$S'_{2k} = S_k; \quad S_{2k+1}=S_k+a_{k+1} \qquad (k=1,2,\dots)$

$\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ mert $\lim\limits_{k\to\infty} S'_{2k+1} =$

$= \lim\limits_{k\to\infty}(S_k+a_{k+1}) = S$ (mert $a_{k+1}\to 0$)

β) Nem, pl. $a_n = 1, \quad b_n = -1$

b) Hasonlóan az a) feladathoz.

c) A 6. 7. b) alapján a sort zárójelezve ($a_n\to 0$ teljesül)

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\frac{1}{16}+\dots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\dots=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln 2$$

6. 7. c) $A_n = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$

$B_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}$

jelöléssel a keresett sor S összegére $S = \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n} - B_n$

az előző feladat alapján, $(A_n - B_{2n}) \to \frac{1}{2} \ln 2$

$(A_n - B_n) \longrightarrow \ln 2$ (az eredeti sor)

$+ (A_{2n} - B_{2n}) \to \ln 2$ (mert részsorozata)

$+ (B_{2n} - A_n) \to -\frac{1}{2} \ln 2$ összeadva:

$(A_{2n} - B_n) \longrightarrow \frac{3}{2} \ln 2$

$\boxed{8.}$ a) Mivel $\sum a_k$ pozitiv tagu, elég megállapitani valamelyik csoportositott sorának jellegét.

α) $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + (a_8 + \ldots + a_{15}) + \ldots \leq$

$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{(2^n)} + \ldots$

Tehát ha a $\sum 2^k . a_{(2^k)}$ sor konvergens $\Longrightarrow \sum a_k$ is az.

β) $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + (a_9 + \ldots + a_{16}) + \ldots \geq$

$\geq 2a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{n-1} a_{(2^n)}$, de ez a sor a $\sum 2^k a_{2^k}$ -sorral együtt divergens, igy a $\sum a_n$ sor is divergens.

b) Alkalmazva a, -beli kritériumot, a

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \log_2 n$ sor azonos jellegü a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n . (2^{\alpha})^n n$ sorral,

mely $2^{\alpha+1} < 1$, azaz $\alpha < -1$-re konvergens.

7. (1)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots + (-1)^{n}\frac{1}{2n} + \dots$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{3n} + \dots$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{20} + \dots + (-1)^{n}\frac{1}{4n} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Négyzetes szorzat:

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{2n} + \frac{2}{3n} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) + \dots = (\ln 2)^2$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{n}\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} \qquad + \dots$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} \qquad + \dots$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16} - \frac{1}{20} \qquad + \dots$$

$$\vdots \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \vdots$$

Cauchy sorozat:

$$1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)2} + \frac{1}{(n-2)3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = (\ln 2)^2$$

7. (2.) A Caucny-szorzat:

$$1+\left(\frac{2}{1!}+\frac{1}{1!}\right)+\left(\frac{2^2}{2!}+\frac{2}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+$$

$$+\left(\frac{2^3}{3!}+\frac{2^2}{1!2!}+\frac{2}{2!1!}+\frac{1}{3!}\right)+\dots+\left(\frac{2^n}{n!}+\frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{2^{n-2}}{2!(n-2)!}+\dots+\frac{2^{n-k}}{k!(n-k)!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)+\dots=$$

$$=\sum_{n=o}^{\alpha}\frac{1}{n!}\left(2^n+\frac{n!}{(n-1)!}2^{n-1}+\frac{n!}{2!(n-2)!}2^{n-2}+\dots+\right.$$

$$\left.+\dots+\frac{n!}{k!(n-k)!}\;{}^{n-k}+\dots+1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$$

(3.) Divergensek, mert $\ _n \not\to 0$

$$\text{a czorzat: } 1+\left(2+\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}-2-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2}\right)+\dots$$

$$+\dots=1+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{8}+\dots$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cdot\left[2^n-(2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2+1)+\frac{}{2^{n+}}\cdot\left(\frac{1}{2^n}+\dots+\frac{1}{2}\right)\right]+\dots=$$

$$=1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\dots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right)+\dots=\sum_{n=}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=4$$

(4.) Szorzatsor:

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\quad\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dots+$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\dots$$

7. 4. divergens sor, ugyanis a tagok nem tartanak 0-hoz, mert

$\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{n-k}\leq\frac{n+1}{2}$ (számtani mértani közép)

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}\,\sqrt{n-k}}\geq\frac{2}{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{n-1})}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}\,\sqrt{n-k}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq n\,\frac{2}{n+1}\geq 1$$

8. 1. a) Ha $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, akkor $\frac{a_n}{b_n}<1$ (ha $n>N$), azaz $a_n<b_n$ (ha $n>N$), így véges sok tagtól eltekintve a

$\sum b_n$ konvergens majoráns sora a $\sum a_n$ sornak, így konvergens.

b) Ekkor $b_n<a_n$ (ha $n>N$) miatt $\sum b_n$ divergens minoráns sora $\sum a_n$ sornak, így divergens.

2. Igen, pl. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2a_n$.

3. a) Mivel $\sin^2 n<1$, így $\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2<\frac{1}{n^2}$ miatt

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, és $\sum\frac{1}{n^2}$ konvergenciája

miatt a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ sor is konvergens.

b) ($\ln n<n$) divergens

c) ($\operatorname{th} n<1$) divergens

8. 3. (d) $\left(\frac{e^{\sin n}}{e^n} < \frac{1}{e^{n-1}}\right)$ konvergens

(e) $\left(0 < \sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n}\right)$ konvergens

(f) $\left(a^{\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}\text{, ha } (n > N)\right)$ konvergens

9. (1.) a) a) $\Rightarrow$ b) de b) $\not\Rightarrow$ a), mert ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \qquad \text{és} \qquad a_{n+1} < a_n,$$

akkor b) teljesül, de a) nem (pl. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

(2.) a) Igen pl.:

$$1+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots$$

... konvergens, de

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n3}} = \frac{n^3}{n^2} > 1 \qquad (\text{ha} \quad n > 1)$$

b) Nem, mert azokra az n-ekre $a_n > 1$, így a tagok nem tarthatnak 0-hoz.

$\boxed{3.}$ Legyen $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < p$, $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$

a) Ha $p < 1 \Rightarrow \sum p^n$ konvergens majoráns sora a $\sum a_n$-nek.

b) Ha $p > 1$ végtelen sok tagra $a_n > 1$, így $a_n \not\to 0 \Rightarrow$ a sor divergens.

9. 3. c) Ha $q < 1 \Rightarrow n > N$-re $a_N \cdot \sum_N^{\infty} q^n$ konvergens majoránsa a $\sum_N^{\infty} a_n$-nek.

d) pl.: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots$

esetén $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, a sor mégis konvergens (persze divergens is lehet).

4. Következik abból, hogy ha létezik $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, akkor létezik $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ és $p=q$, valamint ha $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$, de forditva egyik sem igaz, lásd 3.d.,

10. $\boxed{1.}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$,

igy a sor konvergens.

2. Konvergens.

3. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n\ n!} = \frac{2\ n^n}{(n+1)^n} =$

$= \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1$, igy a sor konvergens.

10. (4.) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{3}{e} > 1$, ezért a sor divergens.

5. Konvergens.

11. $\boxed{1.}$ $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}$, $\lim \sqrt[n]{a_n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Tehát konvergens.

(2.) $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1$, konvergens

(3.) $\sqrt[n]{a_n} = (1 - \frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e} < 1$ konvergens

(4.) $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left[(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}} \to 0 < 1$, konvergens

(5.) $\sqrt[n]{a_n} = \operatorname{arctg} n \to \frac{\pi}{2} > 1$, divergens

(6.) $\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\sin \frac{n\pi}{3}\right|$, $\overline{\lim} \left|\sin \frac{n\pi}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, konvergens

(7.) $\sqrt[n]{a_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \to 1$, de ha n páros, akkor > 1

12. 1. Integrál-kritérium alkalmazható, mert $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \searrow 0$:

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx = \lim_{n\to\infty} (F(n) - F(0)), \quad \sqrt{x} = u, \quad x = u^2$$

12\. 1. $\int e^{-\sqrt{x}}dx = \int e^{-u} \cdot 2u\,du = -e^{-u}\,2u + \int e^{-u} \cdot 2\,du =$

$$= -e^{-u} \cdot 2u - 2e^{-u} \quad - 2e^{-u}(u+1)$$

$$F(x) = -\frac{2(u+1)}{e^{u}} = -\frac{2(\sqrt{x}+1)}{e^{\sqrt{x}}}$$

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2(\sqrt{n}+1)}{e^{\sqrt{n}}} + 2\right) = 2$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{e^{\sqrt{n}}} = 0\right).$$

2\. $\left(f(x) = \frac{1}{x\ln x}\right)$ divergens

3\. $\left(f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^{-2}\right)$ konvergens

4\. $\left(f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}\right)$ $\alpha > 1$ esetén konvergens

$\alpha \leq 1$ esetén divergens

5\. $\left(f(x) = \frac{\text{sh } x}{1+\text{ch}^2 x}\right)$ konvergens $(f'(x) < o$ ha $n > 10)$

13\. 1. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$ miatt minden $\mathcal{E} > 0$-hoz van olyan N;

hogy ha $n > N$, akkor $A-\mathcal{E} \frac{a_n}{b_n} < A+\mathcal{E}$. (Legyen $\mathcal{E} > A$ azaz $A-\mathcal{E} > 0$).

Ekkor $b_n > 0$ miatt $(A-\mathcal{E})\,b_n < a_n < (A+\mathcal{E})b_n$,

$(A-\mathcal{E})b_n < a_n$ miatt, ha $\sum a_n$ konvergens $\sum b_n$ is az.

$a_n < (A+\mathcal{E})b_n$ miatt, ha $\sum a_n$ divergens $\sum b_n$ is az, azaz

$\sum a_n \sim \sum b_n$

13. 2. $\boxed{a)}$ Legyen $a_n = \dfrac{1}{2^n - n}$ és $b_n = \dfrac{1}{2^n}$

Alkalmazzuk az 1.-ben bizonyitott tételt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{n}{2^n}} = 1 \quad \text{miatt}$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} \sim \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

azaz konvergens.

b) $(\sim \sum \frac{1}{n^2})$ konvergens.

c) $(\sim \sum \frac{1}{n})$ divergens.

d) $(\sim \sum \frac{1}{n^3})$ konvergens.

e) $(\sim \sum \frac{1}{2^n})$ konvergens.

f) $(\sim \sum \frac{1}{n})$ divergens.

g) $(\sim \sum \frac{1}{n^{n^2}}$ mert $\dfrac{\left(\frac{n}{n^2-1}\right)^{n^2}}{\frac{1}{n^{n^2}}} = \left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2} \longrightarrow$ e) konvergens.

h) $(\sim \sum \frac{1}{n})$ divergens.

13. 2. i) $\left(\sim \sum \frac{1}{n^2}\right.$ mert $\dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \left.\frac{1}{2}\right)$ konvergens.

14. 1. Nem. Attól függ, hogy a_n "milyen gyorsan" tart a-hoz, lásd pl. b) 1., 2., 3., divergens, de 4., 5. konvergens.

2. a) $\sqrt[n]{n}-1 > \frac{1}{n}$, ha $n > (1+\frac{1}{n})^n$ de $(1+\frac{1}{n})^n \longrightarrow e$

miatt igaz, ha $n > 3$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \ln a \quad \text{miatt}$$

$\left(\sim \sum \frac{1}{n}\right)$ divergens.

c) $$\frac{1-a^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = -\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \longrightarrow -\ln a \qquad (a < 1)$$

$\sim \sum \frac{1}{n}$ divergens.

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{miatt}$$

$\sim \sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.

14. 2. e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \dfrac{1}{6}$ miatt $\sim \sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.

f) $e - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+1} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} =$

$= \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \left[1+\frac{1}{n^2}-1\right] < \frac{e}{n^2}$, konvergens

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}{\frac{1}{n}} = \dfrac{e}{2}$, mert

$\lim_{y\to 0} \dfrac{e-(1+y)^{\frac{1}{y}}}{y} = \dfrac{e}{2}$ (L'Hospital szabály segitségével.)

15. 1. a) $\sum |a_n|$ konv. igy $a_n \to 0$ miatt $|a_n| < 1$ (ha $n > N$) igy $a_n^2 < |a_n|$ miatt $\sum a_n^2 < \sum |a_n|$ igy $\sum a_n^2$ konvergens.

b) Nem. Pl. $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konv., mig $\sum \frac{1}{n}$ div.

c) Nem. Pl. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergens, de $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

15. 2. a) $\frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \geq \sqrt{a_n^2 \cdot b_n^2} = |a_n| \cdot |b_n|$,

így $\sum a_n b_n$ abszolut konvergens.

b) Legyen $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ és alkalmazzuk a)-t.

c) Legyen $\sum (\sqrt{a_n})^2$ konvergens és $\sum \frac{1}{n^2}$

konvergens, akkor 2. a) alapján $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ is konvergens.

d) $(a_n + b_n)^2 = \sum a_n^2 + 2 \sum a_n b_n + \sum b_n^2$

konvergens sorok összege.

16. 1. a) Nem, pl.: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ esetén $\lim_{n \to \infty} n . a_n$ nem létezik.

$\boxed{b)}$ Ha létezik, akkor csak 0 lehet, mert

$\lim_{n \to \infty} n . a_n = A > 0$ esetén $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = A \neq 0$

miatt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sorral együtt divergens lenne.

$\lim n . a_n = + \infty$ esetén $\forall$ K-hoz $\exists$ N, hogy

$n . a_n > K$ (ha $n > N$). Igy $a_n > \frac{k}{n}$ miatt $\sum a_n > K . \sum \frac{1}{n}$

emiatt divergens lenne a sor.

$A < 0$ nem lehet, mert akkor $\sum (-a_n) > p \sum \frac{1}{n}$ lenne.

16. 2. $\boxed{a)}$ Legyen $\varepsilon > 0$. A tagok monotonitása miatt

$\frac{\varepsilon}{2} > |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}| > n . a_{2n}$ (ha $n > N_1$),

16. 2. a) vagyis $\varepsilon > 2n \cdot a_{2n}$ ha $(n > N_1)$

a páros indexü elemekre.

$$\varepsilon > | a_n + \dots + a_{2n+1} | > n.a_{2n-1} \qquad (\text{ha} \quad n > N_2)$$

$$2\varepsilon > 2n \quad a_{2n-1} \qquad (\text{ha} \quad n > N_2)$$

$$\varepsilon > a_{2n-1} \qquad (\text{ha} \quad n > N_3)$$

vagyis páratlan indexü elemekre

$$\varepsilon > (2n - 1)a_{2n-1} \qquad \text{ha} \qquad n > \max (N_2, N_3)$$

vagyis $\varepsilon > n.a_n$ (ha $n > \max (N_1, N_2, N_3)$

b) Nem. Pl.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha} \quad n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & \text{ha} \quad n \neq k^2 \end{cases}$$

$\sum a_n$ konvergens, de $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n$ nem létezik.

3. a) Lehet, pl. $\sum a_n$ konvergens, ha

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{ha} \quad n = 2^k \\ \frac{1}{n^2} & \text{ha} \quad n \neq 2^k \\ & k \in N \end{cases}$$

b) Lehet, pl. $\sum a_n$ divergens, ha

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2+1} & \text{ha} \quad n = 2k+1 \\ \frac{1}{n} & \text{ha} \quad n = 2k \\ & k \in N \end{cases}$$

16. (4.) Igaz, mert $\lim\limits_{n\to\infty} n.a_n = 0$ miatt

$\varepsilon = 1$-hez $\exists N$, hogy

$$n \cdot a_n < 1 \quad (\text{ha} \quad n > N), \quad \text{igy}$$

$$a_n < \frac{1}{n} \quad (\text{ha} \quad n > N)$$

Az $a_n \searrow 0$ nem hagyható el, erre ellenpélda a 16. 3. a)-ban megadott sor.

17. 1. (a) $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \dfrac{a_n}{b_n}$ ha $n > N$, miatt $\dfrac{a_N}{b_N} = K$ jelöléssel $\dfrac{a_n}{b_n} < K$ (ha $n > N$) és $a_n < K.b_n$-ből következik az állitás.

(b) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \, \frac{n^n}{e^n \, n!} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n}{n+1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergens.}$$

2. a) I. Az első esetben az $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sor tagjainak hányadosaival hasonlitjuk össze a $\sum a_n$ sor tagjainak hányadosait.

Megmutatjuk, hogy van olyan $\alpha > 1$, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} \quad (\text{ha} \quad n > N_1)$$

17. 2. a) $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to \beta > 1$ miatt van olyan $\alpha > 1$, hogy

$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \alpha + \varepsilon$ igy $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\varepsilon}{n}$,

(ugyanakkor $1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\varepsilon}{n} > (1 + \frac{1}{n})^{\alpha}$

ha $n > N_2$, mert $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha$ miatt

$\frac{(1 + \frac{1}{n})^{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} < \alpha + \varepsilon$ ha $n > N_2$, vagyis

$(1 + \frac{1}{n})^{n} < 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\varepsilon}{n})$.

Igy $\frac{a_n}{a_{n+1}} > (1 + \frac{1}{n})^{\alpha} = (\frac{n+1}{n})^{\alpha}$

ha $n > \max\ (N_1, N_2)$, vagyis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = \frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}},$$ igy a

$\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$ konvergenciája miatt a $\sum a_n$ sor is konvergens.

117. 2. a) II. Ha $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ ha $n > N$, akkor

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}, \quad \text{és igy}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \quad \text{és igy a} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n}$$

sor divergenciája miatt az $\sum a_n$ sor is divergens.

b) A Raabe kritérium alapján

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(1 - \frac{n+1}{a+n+1} \right) \right] = a \quad \text{miatt} \quad a > 1 \quad \text{esetén}$$

konvergens, $a < 1$ esetén divergens, $a=1$ esetén

$n\left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) < 1$ miatt divergens.

118. $\boxed{1.}$ Jelölve $\sum_{k=o}^{n} a_k = A_n$

$$S_n = \sum_{k=o}^{n} a_n b_n = A_o b_o + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k =$$

$$= \sum_{k=o}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n .$$

De a $\sum_{k=o}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ sornak abszolut majoráns sora a

118. $\boxed{1.}$ $\sum\limits_{k=o}^{\infty} K(b_k - b_{k+1})$ mivel $K(b_n - b_{k+1}) \geq A_K(b_k - b_{k+1})$

és $\sum\limits_{k=o}^{\infty} K(b_k - b_{k+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} K(b_o - b_n) = Kb_o$ konvergens,

igy $\lim\limits_{n\to\infty} A_n b_n = 0$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ létezik és véges.

18. 2. 1. alapján $\frac{1}{n} \searrow 0$ és

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sin k \cdot \sin\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \left[\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

korlátos.

19. 1. a) $a_n = y$ jelöléssel, ha $n \to \infty$, akkor $y \to a$ és

$$\lim_{y\to a} \frac{\ln y - \ln a}{y - a} = \frac{1}{a}, \text{ igy } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n - \ln a}{a_n - a} = \frac{1}{a}$$

miatt egyszerre konvergensek ill. divergensek.

b) Minden olyan differenciálható f(x)-re, melyre $f'(a) \neq 0$.

19. 2. a) 1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ekkor $a_n = y$ jelöléssel:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \quad \text{miatt} \quad \sum a_n \sim \sum \ln(1+a_n)$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+a_n) \neq 0$

mindkettő divergens.

b) Minden olyan $f(x) > 0$ függvényre, melyre

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \neq 0$$

3. $\ln b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$, de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

$a_n > 0$, és $f(x)$ folytonos, igy egyszerre konvergensek ill. divergensek a sorok.

4. 1. a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\left(n - n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{miatt}$$

$\sim \sum \frac{1}{n}$ divergens.

b) $\sum\left(\ln e - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \sum\left[1 - n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ miatt

divergens.

19. 4. 2. $\sum \left(\sqrt{1} - \sqrt{\cos \frac{1}{n}} \right) \sim \sum \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ (mert

$(\sqrt{x})'_{x=1} = \frac{1}{2}$ és $\sum \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \sim \sum \frac{1}{n^2}$)

vagy

$$\frac{1 - \sqrt{\cos \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\left(1 + \sqrt{\cos \frac{1}{n}}\right) \frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{4} \quad \text{miatt}$$

$$\sim \sum \frac{1}{n^2}$$

20. $\boxed{1.}$ a) $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < B - S_n \qquad (R_n = S - S_n)$

b) $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_{k+1}$ **Leibniz soroknál**

c) $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \qquad$ (ha $f(n) = a_n$)

2. a) $\frac{n\, 2^n}{(n+1)!} < \frac{2^n}{n!}$ miatt

$$\frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots + \ldots =$$

$$= \frac{2^n}{n!} \left(1 + \frac{2}{n+1} + \frac{2^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right) \leq$$

$$\leq \frac{2^n}{n!} \left(1 + \frac{2}{n+1} + \frac{2^2}{(n+1)^2} + \ldots + \right) <$$

20. 2. a) $< \frac{2^n}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots\right)=$

$$= \frac{2^n}{n!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1}}{n!} < 10^{-4} \quad \text{ha} \quad n > 12$$

$$\left(\frac{2}{n+1} < \frac{1}{2} \quad \text{ha} \quad n > 3\right)$$

b) $|R_n| < \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < 10^{-4} \quad \text{ha} \quad n > 3^7$

mert Leibniz sor.

c) $\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} < \int_n^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx =$

$$= -\left[\frac{2(\sqrt{x}+1)}{e^{\sqrt{x}}}\right]_{n+1}^{\infty} = \frac{2\sqrt{n+1}+1}{e^{\sqrt{n+1}}} < 10^{-4} \quad \text{ha} \quad n > 120$$

3. a) $|a_{n+1}| < q\,|a_n|, \qquad |a_{n+2}| < q^2\,|a_n|, \dots$

$$|R_n| = |a_{n+1}+a_{n+2}+\dots| < |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\dots <$$

$$< |a_n|\,q + |a_n|\,q^2 + \dots = |a_n|\,\frac{q}{1-q}$$

b) Az a)-beli gondolatmenetben nem használtuk ki, hogy q konstans.

c) α) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{16}$ igy alkalmazható a b)-beli kritérium $c_n = \frac{n+1}{16n} < 1$ esetre.

$$R_n < \frac{n(n+1)}{(15n-1)4^{2n-2}}$$

20\. 3. c) β) Ha ugyanazt alkalmazzuk $\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{2n}$

$c_n = \frac{n+1}{2n}$ igy $\exists\, q < 1$, hogy $c_n < q$

ha $n > N$ $|R_n| < \frac{n}{2^n}\ \frac{n+1}{n-1}$

De ha Leibnitz sornak tekintjük $|R_n| < \frac{n+1}{2^{n+1}}$ jobb becslést kapunk.

4\. $R_n < \int\limits_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}$ és

$$R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots > \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} +$$

$$+ \ldots = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots = \frac{1}{n+1}$$

21 1.) Ha $\beta > 1$, akkor α minden értékére konvergens. Ugyanis

1 Ha $\alpha \geq 0$;

Mivel $(\ln n)^{\alpha} > 1$, $\frac{1}{(\ln n)^{\alpha} n^{\beta}} < \frac{1}{n^{\beta}}$ és $\sum \frac{1}{n^{\beta}}$ konvergens.

2\. Ha $\alpha < 0$; és $\beta = 1 + \varepsilon$ jelöléssel ha $\delta < \varepsilon$, akkor mivel $(\ln n)^{\gamma} < n^{\delta}$ (ha $\delta > 0$ és $\gamma > 0$) teljesül, ha n nagyobb mint egy α és β-tól függő küszöbszám.

$$\frac{(\ln n)^{\gamma}}{n^{\beta}} < \frac{n^{\delta}}{n^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon-\delta}}\ ; \quad 1 + \varepsilon - \delta = \sigma > 1$$

miatt

21. 1. a) 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha} n^{\beta}} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$ konvergens.

Megjegyzés:

Felhasználtuk, hogy

$(\ln n)^{\alpha} < n^{\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$, ha n "elég nagy".

Mivel ha $p > 0$ $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n^p} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{p\, n^{p-1}} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{pn^p} = 0,$

igy $\lim_{n \to \infty} \frac{(\ln n)^{\alpha}}{n^{\beta}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^{\alpha} = 0$ miatt

minden (α, β) párhoz van olyan N, hogy ha $n > N$

akkor $\frac{(\ln n)^{\alpha}}{n^{\beta}} < 1$ vagyis $(\ln n)^{\alpha} > n^{\beta}$

b) Ha $\beta = 1$, akkor $\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leqq 1$ esetén divergens.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}\, dx = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{(\ln x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \alpha > 1 \\ \infty & \text{ha} \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{x \to \infty} \ln \ln x = \infty$$

21\. 1. c) Ha $\beta < 1$, akkor α minden értékére divergens.

1\. $\alpha \leq 0$

Mivel $(\ln n)^{\alpha} \leq 1$; $\frac{1}{(\ln n)^{\alpha} n^{\beta}} \geq \frac{1}{n^{\beta}}$ és

$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$ divergens.

2\. $\alpha > 0$ $\beta = 1 - \varepsilon$ jelöléssel, ha $\delta < \varepsilon$ akkor mivel $\ln n^{\alpha} < n^{\beta}$ (ha $\alpha > 0$ és $\delta > 0$) teljesül, ha n "elég nagy"

$$\frac{1}{(\ln n)^{\alpha} n^{1-\varepsilon}} > \frac{1}{n^{\delta} n^{1-\varepsilon}} = \frac{1}{n^{1-\varepsilon+\delta}}$$

$1 - \varepsilon + \delta = \delta < 1$ miatt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha} n^{\beta}} > \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta}} \text{ divergens.}$$

2\. Használjuk fel az 1..a)-beli megjegyzést

a) divergens, mert $\ln n < n$.

b) integrálkritériummal divergens.

c) integrálkritériummal konvergens.

d) divergens, mert $n > N$ esetén $(\ln n)^{n} < n$.

e) konvergens, mert $\ln n > 1$.

f) integrálkritériummal divergens.

g) konvergens, mert $(\ln n)^{3} < n^{1/2}$, $(n > N$ esetén)

h) divergens, mert $(\ln n)^{5} < n^{1/4}$, $(n > N$ esetén)

i) divergens, mert $\frac{n}{(\ln n)^{3}} \longrightarrow \infty$

j) divergens, mert $\ln n > 1$

(22) 1. Ha $\alpha < 0$, akkor $\alpha = -\beta$ jelöléssel a $\sum a_n$ sor tagjaira

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{e^{n^\beta}}} \longrightarrow 1, \text{ így } a_n \not\rightarrow 0,$$

ha $\alpha = 0$, akkor $a_n = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0$,

ha $\alpha > 0$, akkor $\frac{1}{e^{n^\alpha}} < \frac{1}{n^2}$ (mert $e^{n^\alpha} > n^2$, azaz $n^\alpha > 2 \ln n$) miatt a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor majorálja a $\sum a_n$ sort.

Tehát konvergens, ha $\alpha > 0$ különben divergens.

2. $\sum \left[(1 - \frac{1}{n})^n\right]^{n^{\alpha-1}} \sim \sum \frac{1}{e^{n^{\alpha-1}}}$ azaz $\alpha > 1$ konvergens, $\alpha \leq 1$ divergens

3. $\sim \sum \frac{1}{(e^\alpha)^{n^{\beta-1}}} = \sum \frac{1}{e^{\alpha n^{\beta-1}}}$ $\alpha \leq 0$ divergens; $\alpha > 0$: $\beta > 1$ konvergens, $\beta \leq 1$ divergens

4. $\frac{1}{\alpha^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\alpha}}$, így ha $\ln\alpha > 1$ konvergens, különben divergens $(\alpha > e)$

5. $\frac{\alpha^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \longrightarrow \ln\alpha$ miatt $\sim \sum \frac{1}{n^2}$, így tetszőleges α -ra konvergens.

6. $\left(\sim \sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\alpha \frac{1}{n^\beta} = \sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}+\beta}}\right)$ $\frac{\alpha}{2} + \beta > 1$ re konvergens.

22. 7. $\left(\sim\sum\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\beta}}\right)$; $\alpha+\beta > 1$-re konvergens.

8. $\left(\sim\sum\frac{1}{n^{\alpha}}\ \frac{1}{(\sqrt{n})^{\beta}}\right)$ $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$-re konvergens.

9. $\left(\sim\sum\frac{1}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{\beta}}\right)$ $\alpha+\beta > 1$-re konvergens.

10. $\left(\sim\sum\frac{1}{n^{2\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{\beta}}\right)$ $2\alpha+\beta > 1$-re konvergens.

11. $\left(\sim\sum\frac{1}{n^{2\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{\beta}}\right)$ $2\alpha+\beta > 1$-re konvergens.

12. $\left(\sim\sum\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\sim\sum\left(\frac{1}{e}\right)^{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right.$ $\alpha-\frac{1}{2} > 0$ konv.

$\alpha \le \frac{1}{2}$ div.

(A határérték L'Hospital-szabály segitségével számolható.)

23. 1. $\left(\sim\sum\frac{1}{n}\right)$ divergens.

2. $\sin\left(\pi+\frac{1}{n}\right) = \cos\pi\,\sin\frac{1}{n} = (-1)\ \sin\frac{1}{n}$) $\left(\sim\sum\frac{1}{n}\right)$

3. Abszolut konvergens.

4. $\left(\sim\sum\frac{1}{n}\right)$ divergens $\left(\frac{\ln\cos\sqrt{\frac{1}{n}}}{1-\cos\sqrt{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\longrightarrow\frac{1}{2}\right)$

5. $\left(\sim\sum\frac{1}{n^{2}}\right)$ konvergens.

23. 6. $1 - \cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n}$ és $\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n^2}} \longrightarrow 1$ miatt

$\sim\sum\frac{1}{4n^2}$ konvergens.

7. $(-1+\frac{1}{n})^n (1-\frac{1}{n})^n = (-1)^n (1-\frac{1}{n})^{2n}$

(divergens mert $a_n \not\to 0$)

8. Abszolut konvergens.

9. Divergens.

10. Divergens ($a_n \not\to 0$)

11. $\sum\frac{(-1)^n}{e^n\sqrt{n}}$ abszolut konvergens $\left(\sum\frac{1}{e^n\sqrt{n}} < \sum\frac{1}{e^n}\right)$

12. - konvergens, lásd: 22. 1. $\left(\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{n^2}\right.$ ha $\left. n > N\right)$

13. Konvergens.

14. $(\sim\sum\frac{1}{n})$ divergens.

15. $\int$ kritériummal divergens.

16. Konvergens.

17. $(\sim\sum\frac{1}{n})$ divergens.

18. Leibnitz-sor, konvergens, de nem abszolut konvergens.

23. 19. $\left(a_n < \frac{2}{(n-1)^{3/2}}\right.$ miatt) konvergens.

20. $\left(\sim \sum \frac{1}{n^{3/2}}\right)$ konvergens.

21. Leibnitz-sor, konvergens, de nem abszolut konvergens, mert

$\sum \frac{1}{n \ln n}$ divergens $\int$ kritériummal.

22. Abszolut konvergens, mert $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0 < 1$

23. Konvergens Leibnitz-sor, de abszolut nem konvergens, mert

$$\frac{\left|\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

24. $\left(\sim \sum \frac{1}{(2n)^2}\right)$ konvergens. $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} = \left(\frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}}\right)^2,\right.$

$$\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}}} \longrightarrow e\,,$$ lásd 52.)

25. $\left(\sim \sum \frac{1}{n^2}\right)$ konvergens.

26. $$|a_n| = \frac{\left|\ln\left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)\right|}{|n \ln b|} \leq \left|\frac{\frac{\sqrt[n]{a}}{n}}{n \ln b}\right| = \frac{\sqrt[n]{a}}{|\ln b|}\, \frac{1}{n^2}$$

miatt abszolut konvergens.

23\. 27. $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$

a harmonikus sor hányadosainál nagyobb, igy divergens.)

28\. $(n! < n^n)$ divergens.

29\. $(a^{\ln n} = n^{\ln a})$, $a > e$ konvergens, $a \leq e$ divergens.

30\. Ha $a > e$ konvergens, lásd: 21. $\left(a^{\ln n} = n^{\ln a}\right)$

ha $a = e$ konvergens,

ha $a < e$ divergens.

31\. $(\ln n > 2$ ha $n > e^2)$ konvergens.

32\. (Gyök-kritériummal) konvergens.

33\. $((\ln n)^{\ln n} > n^2$ ha $n > e^{e^2})$ konvergens.

34\. (Gyök-kritériummal) konvergens.

35\. $\left(\dfrac{\ln n}{n} < \dfrac{1}{\ln n}\right)$ konvergens (ld. 33.)

36\. $(\sqrt[n]{\ln n} \longrightarrow 1)$ divergens.

37\. $0 < a < \frac{1}{e}$ konvergens, $a \geq \frac{1}{e}$ divergens.

38\. $\alpha > 2$-re konvergens, $\alpha \leq 2$-re divergens. (lásd: 21.)

$$\frac{\ln(n!)}{n^\alpha} < \frac{n \ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} \; ; \quad \frac{\ln n!}{n^\alpha} > \frac{n \ln \frac{n}{2e}}{n^\alpha} =$$

$$= \frac{\ln \frac{n}{2e}}{n^{\alpha-1}} > \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

23. 39) konvergens $\left(\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{n^{\frac{1}{n}\ln n}}{\ln n} = \dfrac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n} \longrightarrow 0\text{, mert } \dfrac{\ln^2 n}{n} \to 0\right)$

vagy

$\ln a_n = (\ln n)(\ln n) - n \ln(\ln n)$

$\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \ln a_n = \frac{\ln^2 n}{n} - \ln \ln n \longrightarrow -\infty \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 0$

40. $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}\right.$ Leibnitz sor) konvergens.

41. $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n}\right.$ Leibnitz sor) konvergens.

42. ($a_n \not\to 0$) divergens.

43. $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^n} = 0\right)$ konvergens.

44. $\left(\left|\frac{\sin \frac{1}{n}}{n}\right| < \frac{1}{n^2}\right)$ konvergens.

45. $\left|\frac{\sin 2^n}{2^n}\right| < \frac{1}{2^n}$) absz. konvergens.

46. $\left(n \sin \frac{1}{2^n} < \frac{n}{2^n}\right.$ és $\left.\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}\right.$ miatt$\Big)$ konvergens.

47. $\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sin \frac{1}{n^2}\right) n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \quad \sim \sum \frac{1}{n}\right)$ divergens.

24. 1. Keresendők azok az x_o valós számok, melyre a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx_o}$$ numerikus sor konvergens. Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx_o} = \frac{1}{x_o} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ a függvénysor minden x_o-ra

divergens, KT = $\emptyset$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx_o} = \frac{1}{x_o} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ miatt KT = $(-\infty, \infty)$

3. $$\sum_{n=o}^{\infty} x_o^{\,n}$$ geometriai sor mely abszolut konvergens,

ha $|x_o| < 1$ különben divergens KT = $(-1, 1)$

4. A $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_o}}$$ hiperharmonikus sor konvergens, ha

$x_o > 1$ KT = $(1, \infty)$

5. KT = $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ($\frac{1}{x}$ hányadosu geometriai sor)

6. KT = $(0, \infty)$

7. KT = $\{0\}$ mert $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{nx_o}{n + x_o} = x_o$, igy $x_o \neq 0$-ra a

tagok nem tarnak 0-hoz.

24. 8. a), b), c) a 21. feladat speciális esetei

a) KT = $\emptyset$ $\alpha = x$, $\beta = 0$

b) KT = $(1, \infty)$ $\alpha = x$, $\beta = 1$

c) KT = $(1, \infty)$ $\alpha = 1$, $\beta = x$

d) 22.3 feladat $\alpha = x$, $\beta = 1$ esete KT = $\emptyset$

e) 22.3 feladat $\alpha = x$, $\beta = 2$ esete KT = $(0, \infty)$

25. 1. a) Az állítás a gyökkritérium következménye.

(Ahol $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} > 1$ ott a sor tagjai nem tartanak 0-hoz.)

b) Ha $f_n(x)$ folytonos minden n-re, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = 1 \quad \text{(ha a limesz létezik)}$$

2. a) Igaz, a gyökkritériumból következik.

b) Nem. Pl.:

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{2^4} + \frac{x^5}{3^5} + \ldots \quad \text{KT a } (-2, 2) \text{ de ott}$$

$$\overline{\lim} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

26. KI = $(-2,2)$ mert

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{2^n} & \text{ha } n = \text{páros} \\[2ex] \dfrac{x^n}{3^n} & \text{ha } n = \text{páratlan} \end{cases} \quad \text{miatt}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{2^n}} = \frac{|x|}{2}$$

26. miatt a sor konvergencia tartománya $|x| < 2$
(x = $\pm$ 2-ben divergens)

27. 1. $S_n(x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots + x^{n-1}(1-x) =$

$$= 1 - x + x - x^2 + x^2 - \dots + x^{n-1} - x^{n-1} - x^n = 1 - x^n$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1 - x^n) = 1 \quad \text{ha} \quad |x| < 1,$$

és $S(1) = 0$; KT = $(-1, 1]$; $S(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 1 \end{cases}$

$$R_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{ha} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 1 \end{cases}$$

2. $S_n(x) = \dfrac{\cos^n x - 1}{\cos x - 1}$; $\quad S(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x}$

KT = $(-\infty, \infty) \setminus \{x : x = 2\pi, \ k \in \mathbb{N}\}$

$$R_n(x) = \frac{\cos^n x}{1 - \cos x}$$

28. 1. KT = $(-\infty, \infty)$, $f(x) = 1$ mert minden x_0-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n} = 0$$

2. KT = $(-\infty, \infty)$, $f(x) = e^x$

3. KT = $\{0\}$

4. KT = $(-2, 2]$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad -2 < x < 2 \\ 1 & \text{ha} \quad x = 2 \end{cases}$

28. 5. $KT = [0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ x & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$ mert

ha $0 \le x_0 \le 1$, $y_0 = \frac{1}{x_0}$ jelöléssel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{y_0^n}} = 1 \quad \text{és} \quad x_0 > 1 \text{-re}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1+x_0^n}}{x_0}\, x_0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x_0^n} + 1} \cdot x_0 = x_0$$

6. $KT = (0, \infty)$, $f(x) = x$ mert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + \frac{\ln x}{n} + \frac{x^5}{n^2}}{1 + \frac{x^3}{n} + \frac{\sin x}{n^2}} = x$$

minden x-re, melyre az $f_n(x)$-ben szereplő függvények mindegyike értelmezve van.

29. 1. a) Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $c_n \to 0$ akkor $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy $|c_n| < \varepsilon$, ha $n > N$. Igy $|r_n(x)| \le |c_n| < \varepsilon$, ha $n > N$ minden $x \in I$-re, ezért $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben.

b) α) igen, mert $f(x) = 0$, $KT = (-\infty, \infty)$ és itt

$$|r_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n} \to 0.$$

β) igen, mert $f(x) = 0$, $KT = (-\infty, \infty)$ és itt

$$|r_n(x)| = \left|\frac{\operatorname{arctg} x^n}{n}\right| \le \frac{\pi}{2n} \to 0.$$

29. 1. b) (γ) igen, mert $f(x) = 0$, $KT = (-\infty, \infty)$ és

$$|r_n(x)| = \left|\frac{1}{x} \sin \frac{x}{n}\right| = \left|\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

(ha $n > N$).

2. a) A definició közvetlen következménye.

b) Az a)-beli állitás átfogalmazása.

c) α) Nem, mert $f(x) = 0$, $KT = (-1, 1]$, de az $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ pontsorozat mentén

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}\right| = \left|\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right| \neq 0.$$

β) Nem, mert $f(x) = 0$, $KT: (-\infty, \infty)\setminus\{0\}$ de az $x_n = n$ pontsorozat mentén

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x_n)| = 1 \neq 0$$

γ) Nem, mert $f(x) = 0$, $KT = (-\infty, \infty)$, de az $x_n = n$ pontsorozat mentén:

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{n}{n}\right| = \sin 1 \neq 0.$$

3. a) Ha $a_n \to 0$, akkor $|r_n(x)| \leq a_n \to 0$ miatt $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.
Ha $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz $\exists N$, hogy $\forall x \in I$-re, $|r_n(x)| < \varepsilon$ ha $n > N$, igy

$$\sup_{x\in I} |r_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{ha} \quad n > N .$$

b) α) Igen, mert $f(x) = 0$, $KT: [0, 1]$ és a

$$\max |x^n - x^{n+1}| = a_n \quad \text{jelöléssel}$$

29\. 3. (b) α) $\left((x^n - x^{n+1})' = (nx^{n-1} - (n+1)x^n) = 0,\right.$

ha $x = \frac{n}{n+1}$, $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ pontsorozatra veszi fel

$|r_n(x)|$ a maximumát ,)

$$a_n = |r_n(x_n)| = \left|(1 - \frac{1}{n+1})^n - (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}\right| =$$

$$= (1 - \frac{1}{n+1})^n \left[1 - (1 - \frac{1}{n+1})\right] =$$

$$= (1 - \frac{1}{n+1})^n \cdot \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

β) Nem, mert $f(x) = 0$, KT: $(0, \infty)$.

$$\left(|r_n(x)|' = (\frac{\ln nx}{nx})' = \frac{1 - \ln nx}{nx^2} = 0,\right.$$

ha $x = \frac{e}{n}$, $\left. x_n = \frac{e}{n}\right)$, és itt $|r_n(x_n)| = \frac{1}{e} \not\to 0$.

γ) Igen, mert $f(x) = 0$, KT: $[0, \infty)$.

$|r_n(x)|$ a maximumát $x_n = \frac{1}{n}$ -ben veszi fel és itt

$|r_n(x_n)| = \frac{1}{ne} \longrightarrow 0.$

4\. $\boxed{a)}$ Be kell látni, hogy $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ha $|x - a| < \delta$.

$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \le$

$\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$, ahol

$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha $x \in (a,b)$, mert $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

(a,b)-ben, $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha $|x - a| < \delta$,

29. 4. a) mert $f_n(x)$ folytonos a-ban, $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$

mert $f_n(x)$ konvergens a-ban és $\to f(a)$, igy

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ha $|x - a| < \delta$.

b) α) Nem, mert $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x > 0 \\ 1 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$ KT = $[0, \infty)$

nem folytonos $[0, \infty)$-ben, igy $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$
$(0, \infty)$-en sem.

β) Nem, mert $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{ha} \quad x < 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$ KT = $(-\infty, \infty)$

nem folytonos, igy $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ $(0, \infty)$-en sem.

γ) Nem, mert

$f(x) = 0$, KT = $(-1, 1)$

és a függvénysorozat nem konvergens az $x = 1$-ben.

5. a) Igaz, mert a $\sup\limits_{x \in I} |r_n(x)| = a_n$ numerikus sorozatra

$|r_n(x)| \leq a_n$, mely 0-hoz tart, ha $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben

(ez az 1. a) megforditása).

$\boxed{\text{b)}}$ Igaz, mert ha $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, akkor van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, hogy $|r_n(x_n)| \not\to 0$. Ugyanis, ha $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, akkor van olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy minden N-hez van $n > N$ és $x \in I$, hogy $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon_0$.
Legyen N_1-hez $n_{N_1} > N_1$ $x_{n_{N_1}}$ hogy
$\left|f_{n_{N_1}}(x_{n_{N_1}}) - f(x_{n_{N_1}})\right| > \varepsilon_0$ és $N_2 > n_{N_2}$, hogy

29. 5. $\boxed{b)}$ $\left|f_{n_{N_2}}(x_{n_{N_2}}) - f(x_{N_2})\right| > \varepsilon_0$ stb. N_k-hoz n_{N_k}, hogy

$\left|f_{n_{N_k}}(x_{n_{N_k}}) - f(x_{N_k})\right| > \varepsilon_0$, igy $(x_{N_k})_{k=1}^{\infty}$ pontsorozata $\left|r_{n_{N_k}}(x_{n_{N_k}})\right| \not\to 0$.

(ez a 2. a) megforditása).

c) Igaz, lásd a 4. a)

d) Igaz.

6. a), b) Ha pl. $|r_n(x)|' > 0$ (a,b)-ben, akkor $|r_n(x)|$ monoton nő, sup $|r_n(x)|$ létezik, és 0-hoz tart, ha b-ben $f_n(x)$ konvergens és nem tart 0-hoz, ha b-ben nem konvergens.

30. 1. $f(x) = 0$ KT $= (-\infty, \infty)$, de itt $f_n \not\rightrightarrows f(x)$, mert $x_n = n$ pontsorozatra $|r_n(x_n)| = 1 \not\to 0$,

$\{ET\} = \{[a,b]\,;\ a,b \in \mathbb{R}\}$, mert

$|r_n(x)| \frac{\max(|a|, |b|)}{n} \to 0$, igy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-n.

2. $f(x) = 1$, KT $= (-\infty, \infty)$, $\{ET\} = \{[a,b]\ :\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-n

3. $f(x) = 0$, KT $= (-\infty, \infty) \setminus \mathbb{N}^-$, és itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert $x_n = \frac{1}{2} - n$ pontsorozatra $|r_n(x_n)| = 2 \not\to 0$,

$\{ET\} = \{[a, \infty) \setminus \mathbb{N}^-;\ a \in \mathbb{R}\}$, mert itt ha $a > 0$, akkor $|r_n(x)| \le \frac{1}{a+n} \to 0$, ha $a < 0$ akkor $|r_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0$,

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-n.

30. 4. $f(x) = x$, $KT = (-\infty, \infty)$, $\{ET\} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$
$f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ I-n.

5. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$ $KT = (-1,1]$, de itt

$f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert $f_n(x)$ folytonos minden n-re $f(x)$ pedig nem. $I_1 = (-1,1)$-en sem egyenletes, mert $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ pontsorozatra $r_n(x_n) = (1 - \frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e} \neq 0$
$\{ET\} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, -1 < a < b < 1\}$, mert
$|r_n(x)| \leq c^n \to 0$, ahol $c = \max(|a|, |b|)$, igy
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I_2-n.

6. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| < 1 \\ e & \text{ha } x = 1, \end{cases}$ ($f_n(-1) = (-1)^n(1-\frac{1}{n})^n$ divergens.)
$KT = (-1,1]$, de itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert $f(x)$ nem folytonos.
$I_1 = (-1, 1)$-ben sem, mert $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ pontsorozatra
$r_n(x_n) = 1 \not\to 0$, $\{ET\} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}$,
$-1 < a < b < 1\}$, mert $|r_n(x)| = \left|(x + \frac{1}{n})^n\right| \leq (c + \frac{1}{n})^n$
ahol $c = \max(|a|, |b|)$ és van olyan $c < d < 1$ szám, hogy
$c + \frac{1}{n} < d$ (ha $n > \frac{1}{d-c} = N$) miatt $(x + \frac{1}{n})^n \leq d^n \to 0$
(ha $n > N$), igy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I_2-n.

7. $f(x) = e^x$; $KT = (-\infty, \infty)$, de itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert $x_n = n$ pontsorozatra $|r_n(x_n)| = |2^n - e^n| \not\to 0$; $\{ET\} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$,
mert $(1 + \frac{x}{n})^n \nearrow e^x$ és $(1 + \frac{x}{n})^{n+1} \searrow e^x$ $x \in \mathbb{R}$-re;

30. (7.) $|r_n(x)| = \left|e^x - (1+\frac{x}{n})^n\right| < \left|(1+\frac{x}{n})^{n+1} - (1+\frac{x}{n})^n\right| =$

$$= (1+\frac{x}{n})^n \frac{|x|}{n} < e^c \cdot \frac{c}{n} \to 0$$

ahol $c = \max(|a|, |b|)$, igy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-n.

8. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ KT = $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$\{ET\} = \{(-\infty, -a] \cup [a, \infty): a \in \mathbb{R}, a > 0\}$ hasonlóan a

7. feladathoz, $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ I_1-en, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I_2-n.

9. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha} \quad x = 1 \\ 1 & \text{ha} \quad |x| > 1 \end{cases}$ KT = $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$\{ET\} = \{(-\infty, a] \cup [b,c] \cup [d, \infty)$: $a,b,c,d \in \mathbb{R}$,

$a < -1 < b < c < 1 < d\}$

$f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ I_1, I_2 és I_3-on.

10. $f(x) = 0$; KT = $[-1,1]$, ET = KT, mert $|r_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$

$I \subset ET$, igy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-n.

(11.) $f(x) = 0$; KT = $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$, mert ha $|x_o| > 1$,

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{x_o}}{x_o^n} = 0$ (az exponenciális függvény "gyorsabb"

mint a hatványfüggvény).

Ha $x_o = -1$, akkor $f_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$;

ha $x_o = 1$, akkor $f_n(1) = n$; ha $|x_o| < 1$

30\. (11) ($y_o = \frac{1}{x_o}$ jelöléssel) az $n^{\frac{1}{y_o}} \cdot y_o^{\,n}$ függvény nem korlátos.

Itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$

$\{ET\} = \{(-\infty, -1] \cup [b,c] : \; b,c \in \mathbb{R}, \; 1 < b < c\}$

$I_1 = (1, \infty)$-en $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ ui. $x = 1$-ben nem konvergens.

$I_2 = (a, \infty)$-en $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ ui. $x_n = n$ pontsorozatra

$$|r_n(x_n)| = 1 \not\to 0$$

$I_3 = (-\infty, -1]$-en $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ui. $x = -y$ jelöléssel

$$|r_n(x)| = \frac{1}{n^y \cdot y^n} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

$[b,c]$, $(b > 1)$ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ui.

$$|r_n(x)| = \left| \frac{n^x}{x^n} \right| \leq \frac{n^c}{b^n} \to 0$$

(12) $f(x) = 0$, $KT = (-\infty, \infty)$; de itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert $x_n = n$

pontsorozatra $|r_n(x_n)| = \frac{n^n}{n!} \to \infty \not\to 0$

$ET = \{[a,b]: \; a,b \in \mathbb{R}\}$ mert $|r_n(x)| \leq \frac{c^n}{n!} \to 0$

ahol $c = \max(|a|, |b|)$ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-n.

(13) $f(x) = 0$; $KT = (-1, 1]$, $(f_n(-1) = (-1)^{n+1} 2n)$, de itt

$f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert $I = (-1, 1) \subset KT$-n sem egyenletes, ui.

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$ pontsorozatra $|r_n(x_n)| = n\,(1 - \frac{1}{n})^n \frac{1}{n} \to \frac{1}{e} \not\to 0$

30. (13.) $I_2 = (-1, a]$ -ban $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ $\quad x_n = -1 + \frac{1}{n}$ pontsorozatra

$|r_n(x_n)| \not\to 0$ $\{ET\} = \{[a,b]: \ -1 < a < b < 1, \quad a,b \in \mathbb{R}\}$

$|r_n(x)| \leq nc^n(1+c) \to 0$ $\quad$ ahol $\quad c = \max(|a|, |b|)$

(14.) $f(x) = |x|$; $\quad KT = (-\infty, \infty)$ $\quad ET = KT$, mert

$$|r_n(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n}}{x^2 + \frac{1}{n} + x^2} \right| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

15. $KT = \emptyset$; $\quad \{ET\} = \emptyset$

(16.) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad KT = (0, \infty)$, $\quad$ mert ha $\quad x_o \neq 0$

$$f_n(x_o) = \frac{\sqrt{x_o + \frac{1}{n}} - \sqrt{x_o}}{\frac{1}{n}} \to (\sqrt{x})'_{x=x_o} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

$f_n(0) = \sqrt{n}$ divergens, de itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert az $x_o = 0$-ban nem konvergens. $\{ET\} = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R},$ $a > 0\}$ mert

$$|r_n(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \frac{1}{n}}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} \right| =$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2} < \frac{\frac{1}{n}}{8a^{3/2}} \to 0$$

17. $f(x) = 0$; $\quad KT = (-\infty, \infty)$; $\{ET\} = \{[a,b]: \quad a,b \in \mathbb{R}\}$

30. (18) $f(x) = 1$; $KT = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, mert

$$f_n(x_o) = \frac{\sin\frac{x_o}{n}}{\frac{x_o}{n}} \longrightarrow 1, \quad \text{de itt} \quad f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$$

($x_n = n$ pontsorozatra $|r_n(x_n)| \not\to 0$)

$\{ET\} = \{[a,0) \cup (0,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}$, mert

$$r_n(x) = 1 - \frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$$ monoton nő a $(0,b]$ -ben és monoton

csökken $[a,0)$-ban, ($r'(x)$ előjeléből következik), tehát

$$\max |r_n(x)| = \left(1 - \frac{\sin\frac{c}{n}}{\frac{c}{n}}\right) \longrightarrow 0, \text{ ahol } c = \max(|a|, |b|)$$

19. $f(x) = x$; $KT = (-\infty, \infty)$, $\{ET\} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$

20. $f(x) = 0$; $KT = (-\infty, \infty)$, $\{ET\} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$

(21) $f(x) = 0$; $KT = (c, \infty)$ (ahol c az $e^x = -x$ egyenlet megoldása, mert

$$f_n(x_o) = \left(\frac{x_o}{e^{x_o}}\right)^n \text{ és } \left|\frac{x_o}{e^{x_o}}\right| < 1 \quad \text{ha } x_o > c;$$

itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert $x = c$ -ben nem konvergens.

$\{ET\} = \{[a, \infty) : a > c, a \in \mathbb{R}\}$, mert itt

$$\sup |r_n(x)| = \max \left|\frac{x^n}{e^{nx}}\right| = \frac{1}{e^n} \to 0$$

(maximumát az $x = 1$-ben veszi fel).

30. 22. $f(x) = 0$; KT $= [0, \infty)$ ($nx_o = y$ jelöléssel

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_o) = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0$), de itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$,

mert $\max |r_n(x)| = \frac{1}{e} \not\to 0$

(maximumát az $x = \frac{1}{n}$ -ben veszi fel).

$\{ET\} = \{[a, \infty) : a > 0, a \in \mathbb{R}\}$ mert itt $r_n'(x) < 0$, így

$$\max |r_n(x)| = \frac{na}{e^{na}} \to 0$$

23. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 1 \\ 1 & \text{ha} \quad x = 1 \end{cases}$; KT $= (-\infty, 1]$; de itt

$f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ $I = (-\infty, 1)$-en sem egyenletes a konvergencia

$\{ET\} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}, a < 1\}$ ($r_n'(x) > 0$ miatt).

24. $f(x) = 0$; KT $= (-\infty, \infty)$; itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$

$\{ET\} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$ mert

$|r_n(x)| \leq e^{n(2c-n)} \to 0$, ahol $c = \max(|a|, |b|)$

25. $f(x) = 0$; KT $= [0, \infty)$ ui. $y = n^{x_o}$ jelöléssel

$f_n(x_o) = \frac{\ln y}{y}$ ha $x_o > 0$ akkor $y \to \infty$

és $f_n(x_o) \to 0$, ha $x_o = 0$, $f_n(0) = 0$;

ha $x_o < 0$, akkor $y \to 0$ és $f_n(x_o)$ nem korlátos, itt

azonban $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert

$$\max |r_n(x)| = n^{-\frac{1}{\ln n}} = e^{\ln n(-\frac{1}{\ln n})} = \frac{1}{e} \not\to 0$$

30. 25. ($x = \frac{1}{\ln n}$ -ben veszi fel a maximumát)

$\{ET\} = \{[a, \infty) : a > 0, a \in \mathbb{R}\}$

26. $f(x) = 0$; KT = $(0, \infty)$, de itt $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert

$\max |r_n(x)| = \left|\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e} \not\to 0$ ($x = \frac{n}{e}$ -ben veszi fel a maximumát) $\{ET\} = \{(0,a] : a \in \mathbb{R}\}$, mert $|r_n(x)|' > 0$,

igy $|r_n(x)| \leq -\frac{a}{n} \ln \frac{a}{n} \to 0$

27. $f(x) = \ln x$; KT = $(0, \infty)$, mert

$$f_n(x_o) = \frac{x_o^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$ és $x_o = a$, $\frac{1}{n} = y$ jelöléssel

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_o) = \lim_{y\to o} \frac{a^y - a^o}{y - 0} = (a^y)'_{y=o} = \left[a^y \ln a\right]_{y=o} = \ln a.$$

$I_1 = (0,1]$-en $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, mert x_o-ban nem konvergens.

$I_2 = [1,\infty)$-en sem, mert $x_n = n^n$ pontsorozatra

$$|r_n(x_n)| \to \infty \neq 0$$

$I_3 = [1,d]$ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, mert itt $r_n(x)$ monoton nő ($r_n'(x) > 0$),

igy $|r_n(x)| \leq \left|n(d^{\frac{1}{n}} - 1) - \ln d\right| \to 0$, és $[c,1]$ -ben $r_n(x)$ monoton csökken, maximumát tehát c-ben veszi fel, igy $\{ET\} = \{[c,d]: 0 < c < d,\ c, d \in \mathbb{R}\}$

28. $$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$ KT = $[0, \infty)$ lásd 28. 5.

KT-n $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, mert $\sqrt[n]{1 + x^n} = y$ jelöléssel $I_1 = [0,1]$-en

30. 28. $\left|r_n(x)\right| = \left|\sqrt[n]{1+x^n} - 1\right| = \dfrac{x^n}{y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + 1} < \dfrac{x^n}{n} \leq \dfrac{1}{n} \to 0$

$I_2 = [1, \infty)$-en pedig $\left|r_n(x)\right| = \left|\sqrt[n]{1+x^n} - \sqrt[n]{x^n}\right| =$

$$= \frac{1}{y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}} < \frac{1}{n} \to 0$$

igy ET = KT = $[0, \infty)$

31.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0

1. a) Lehet, pl. $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$.

   b) Nem lehet, mert egyenletesen korlátos az $(f_n(x))_1^\infty$ sorozat.

2. a) és b) is lehetséges:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq n \\ 1 & x = n \end{cases} \qquad \text{vagy} \qquad f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$$

3. Igen, pl.

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{ha} \quad x < 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightrightarrows 0.$$

31. 4. Igen pl.

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \text{differenciálható} \quad x = 0\text{-ban}$$

($\forall$ n-re), de $f(x) = |x|$ nem.

5. Igen, mert ez a deriváltsorozatra vonatkozó tétel.

6. Lehet, pl.:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \leq x < 1 \\ n & \text{ha} \quad x = 1 \end{cases}$$

$(a = 0,\ b = 1)$

7. a) Lásd 7.b)

b) Nem lehet, mert
$f_n(x)$ egyenletesen konvergens $(a,b) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N_1$, hogy $n > N_1$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $x \in (a,b)$; és $f_n(x)$ konvergens $[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N_a$ és $\exists N_b$, hogy $n > N_a$ esetén $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$ és $n > N_b$ esetén $|f_n(b) - f(b)| < \varepsilon$. Ebből, ha N = max N_1, N_a, N_b), akkor $n > N$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $x \in [a,b]$ - azaz $f_n(x)$ egyenletesen konvergens az $[a,b]$-n.

8. Lehet, pl. $f_n(x) = \frac{x}{n}$.

9. Az összegre igaz, és a bizonyitás ugyanugy megy, mint a konvergenciánál, szorzatra nem, pl. $f_n(x) = x$ ($\forall$ n-re)

$$g_n(x) = 1 + \frac{1}{n}, \quad f_n(x) \cdot g_n(x) \not\rightrightarrows x .$$

(Ha $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ és $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) = g(x)$ korlátosak, akkor igaz.)

32. 1. a) Ha $f'_n(x) \rightrightarrows g(x)$ - lenne, akkor az ide vonatkozó tétel szerint $g(x) = f'(x)$ lenne, de ez lehetetlen.

b) Egyik sem, mert

α) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

Nem differenciálható $x_0 = 1$-ben.

β) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \ge 0 \\ x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

Nem differenciálható $x_0 = 0$-ban.

γ) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & \text{ha } x \ge 0 \\ -\frac{\pi}{2}x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

Nem differenciálható $x_0 = 0$-ban.

2. a) $\frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ $[-1, 1]$-ben, de $f'_n(x) = x^{n-1}$ és

$\lim_{n\to\infty} x^{n-1} \not\rightrightarrows 0$, mert $x = 1$-ben 1.

b) $f(x) = 0$; $ET = (-\infty, \infty)$, mert

$$|r_n(x)| = \left| \frac{\text{arctg } x^n}{n} \right| \le \frac{\pi}{2n} \to 0 ,$$

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} , \quad \text{és} \quad \text{pl. } x_0 = 1 \text{ -ben}$$

$$f'_n(1) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} , \quad \text{de} \quad f'(1) = 0.$$

32. 2. c) $f(x) = 0$; $ET = (-\infty, \infty)$, mert

$$|r_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 .$$

Az $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos nx$ függvénysorozatra pl.:

$x_o = 0$-ban $f'_n(0) = \sqrt{n} \to \infty$, de $f'(0) = 0$

3. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

$$f_n'(x) = \frac{1 + e^{-nx}(nx + 1)}{(1+e^{-nx})^2}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

igy $f'(0) \neq g(0)$ ($f'(0)$ nem létezik).

33. 1. a) $f(x) = 0$; $KT = [0, \infty)$; $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ KT-on, mert

$x_n = \frac{1}{n}$ pontsorozatra $r_n(x_n) = \frac{1}{e} \not\to 0$

$\{ET\} = \{[q, \infty):\ q > 0,\ q \in \mathbb{R}\}$, igy ha $a > 0$, akkor teljesül az egyenlőség, ha $a < 0$ akkor a jobb oldal nincs értelmezve.

33. 1. a) Ha $a = 0$, akkor pl.:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b nx\, e^{-nx} dx = \lim_{n\to\infty} \left[n\left(-\frac{xe^{-nx}}{n} - \frac{e^{-nx}}{n^2}\right)\right]_0^b =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-be^{-nb} - \frac{e^{-nb}}{n} + \frac{1}{n}\right) = 0$$

Tehát nem adható meg.

b) Ha $a > 0$ akkor teljesül az egyenlőség. De ha pl. $a = 0$, $b = 1$, akkor

$$\left(\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 xe^{-nx} dx = 1, \text{ míg} \right.$$

$$\left. \int_0^1 \lim_{n\to\infty} n^2 xe^{-nx} dx = 0 \neq 1\right)$$ nem teljesül az egyenlőség.

c) Ha $a > 0$ akkor teljesül, ha $a = 0$, $b = 1$ akkor nem teljesül az egyenlőtlenség.

d) Mivel $\{ET\} = \{(-\infty, q] \cup [p, \infty) : q < 0,\ p > 0,\ q,p \in \mathbb{R}\}$ ha $a > 0$, vagy $b < 0$ akkor teljesül az egyenlőség. Ha $a = 0$, akkor pl.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{4} \neq 0$$

miatt nem teljesül az egyenlőség.

2. a) Minden α-ra konvergens.

b) $\alpha < 1$-re egyenletesen konvergens.

33. 2. c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\int_0^1 xe^{-nx}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^{\alpha-1}\left[e^{-n}+\frac{1}{n}e^{-n}-\frac{1}{n}\right]\right)=$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-n^{\alpha-1}e^{-n}-n^{\alpha-2}e^{-n}+n^{\alpha-2}\right) = 0$$

akkor és csak akkor, ha $n^{\alpha-2}\to 0$, vagyis $\alpha < 2$.

34. 1. 0

($\frac{\cos nx}{x^2+n^2} \rightrightarrows 0$ miatt a határértékképzés és az $\int$ operáció felcserélhető.)

2. 0, $\frac{x^n}{1+x} \longrightarrow f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha} \quad x = 1 \end{cases} \qquad [0,1]\text{-en}$$

$\frac{x^n}{1+x} \not\rightrightarrows f(x)$ igy az operációk nem cserélhetők fel.

Ha n = páros $\int_0^1 \frac{x^n+1-1}{1+x}dx = \int_0^1 x^{n-1}-x^{n-2}+\dots$

$\dots + 1 - \frac{1}{x+1}\,)\,dx = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\dots+1\right) - \ln 2$.

ha n = páratlan $\int_0^1 \frac{x^n-1+1}{1+x}dx = \int_0^1 \left(x^{n-1}-x^{n-2}+\dots-1+\frac{1}{x+1}\right) =$

$= +\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\dots-1+\ln 2.$

34. 2. ha n = páros $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right) - \ln 2 = 0$

ha n = páratlan $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln 2 - \left(- \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \dots\dots + 1\right)\right) = 0$

3. 0, mert $\frac{x^n}{e^{nx}} \rightrightarrows 0$ mivel

$$\left|\frac{x^n}{e^{nx}}\right| \le \frac{1}{e^n} \to 0$$

4. 0.

5. 0.

35. 1. a) Lagrange középérték tétel szerint.

$$\frac{g(x + \frac{1}{n}) - g(x)}{\frac{1}{n}} = g'(x + h) \qquad 0 < h < \frac{1}{n}$$

igy $|r_n(x)| = |g'(x + h) - g'(x)|$, de $g'(x)$ folytonos $[a, b]$-n, igy egyenletesen folytonos ott, ezért $|g'(x+h) - g'(x)| < \varepsilon$, ha $h < \delta$, vagyis ha $n > N$.

b) a) miatt az $\int$ és a lim felcserélhető, tehát az integrál

$$\int_1^x \frac{1}{x}\, dx = \ln x$$

2. Legyen $G(x)$ a $g(x)$ primitiv függvénye.

$f_n(x) = G(x + \sum\limits_{k=1}^{n} a_n) - G(x)$, $G(x)$ folytonos függvény, igy

35. 2. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = G(x+a) - G(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$

és $|r_n(x)| = \left|G(x + \sum_{k=1}^{n} a_k) - G(x+a)\right| < \varepsilon$, ha

$\left|x + \sum_{k=1}^{n} a_k - x - a\right| < \delta$, vagyis ha

$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - a\right| < \delta$, ami teljesül, ha $n > N$.

36. 1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x} < 1$, ha $x > 0$,

$x = 0$ -ban divergens, igy KT $= (0, \infty)$

2. (L'Hospital segitségével)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} e^{xn} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} < 1, \text{ ha}$$

$x \neq 0$, KI $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |x| = e|x| < 1$, ha $|x| < \frac{1}{e}$

$x = \frac{1}{e}$ -ben $\sum \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$ divergens, mert

36. (3.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$

(Ez az 1.-beli határérték $x = -1$ -re)

$x = -\frac{1}{e}$ -ben $\sum \dfrac{(-1)^n (1+\frac{1}{n})^n}{e^n}$ divergens,

mert $a_n \not\to 0$.

$KI = (-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

(4.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\ln(1-\frac{x}{n}) + \frac{x}{n}\right|}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\ln(1-\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{x^2}{2}$

miatt minden x-re $\sim \sum \frac{1}{n^2}$.

Minden x-re abszolut konvergens.

37. 1. a) b) igaz, mert ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ sor konvergens majoráns sora a $\sum |f_n(x)|$ -nek.

2. a) és b) -ből az abszolut konvergencia következik, de az egyenletes nem, mert a feltételből nem adódik, hogy $\exists N$, hogy $\forall n > N$ -re $\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| \leq q < 1$ lenne, csak

37. 2. akkor, ha

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| \rightrightarrows q < 1 .$$

3. Ilyenkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ numerikus majoráns sora

$\sum f_n(x)$-nek.

38. 1. a) Mivel $|f_n(x)| \leq \sup |f_n(x)| = a_n$ és $\sum a_n$ konvergens numerikus sor, így $\sum f_n(x)$ Weierstrass kritérium szerint egyenletesen konvergens I-n.

b) α) $KI = [0, \infty)$, mert $f_n(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^n$ és

$\left|\frac{x}{e^x}\right| < 1$ ha $x \geq 0$, ha pedig $x < 0$, akkor

$f_n(x) \longrightarrow 0$. $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ KT-n, mert

$$\max_{x\in[0,\infty)} \frac{x^n}{e^{nx}} = \frac{1}{e^n}$$ (x = 1-ben veszi fel a maximumát minden n-re) és $\sum \frac{1}{e^n}$ sor konvergens.

β) $KI = [0, \infty)$; $f_n(x)$ a maximumát az $x_n = \frac{2}{n}$ helyen veszi fel, itt $f_n(x_n) = \frac{4}{e^2}\frac{1}{n^2}$ és a $\frac{4}{e^2}\sum\frac{1}{n^2}$ konvergens.

γ) $KI = (-\infty, \infty)$; $f_n(x)$ a maximumát az $x_n = n^{3/2}$ helyen veszi fel, itt $\sum f_n(x_n) = \sum \sin\frac{1}{2n^{3/2}}$.

Mivel $\left|\sin\frac{1}{2n^{3/2}}\right| < \frac{1}{2n^{3/2}}$ és a

38\. 1. b) γ) $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ sor konvergens, így

$S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ KI-n.

2\. a) Ha $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \rightrightarrows S(x)$, akkor

$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, ha $n > N$ minden p-re.

$p = 1$-re $|f_{n+1}(x)| < \varepsilon$ (ha $n > N$) adódik, vagyis

vagyis $f_n(x) \rightrightarrows 0$.

b) α) A sor KI = $[0, \infty)$ -en nem konvergál egyenletesen, mert $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ ($x_n = \frac{1}{n}$ sorozatra $f_n(x_n) \to \frac{1}{e}$).

β) A sor KI = $(-\infty, \infty)$-en nem konvergál egyenletesen, mert az $x_n = n$ sorozatra $f_n(x_n) = 1 \not\to 0$.

3\. a) $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ függvénysorozatra igaz, hogy ha $S_n(x)$

folytonos minden n-re (ami következik $f_n(x)$-ek folytonosságából) $[a,b]$-ben és $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ $(a,b]$-ben, akkor $S(x)$ folytonos a-ban is. (Lásd 29. 4.a.)

b) α) Nem, mert KI = $(1, \infty)$, de $x = 1$-ben divergens.

β) Nem, mert KI = $(0, \infty)$, de $x = 0$-ban divergens.

γ) Nem, mert KI = $(-e, e)$, de $\sum \frac{e^n}{n^n} n!$

nem konvergens, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$

38. 3. b) γ) miatt (a hányados kritériummal nem adódik a divergencia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow 1$ miatt).

4. a) Mivel Leibniz sorok esetén

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| ,$$

így $|R_n(x)| \leq c_{n+1} < \mathcal{E}$, ha = $(n > N)$

ezért $f_n(x)$ egyenletesen konvergens.

b) α) Leibniz sor minden x-re, és $\left| \frac{1}{n+x^2} \right| \leq \frac{1}{n}$ miatt egyenletesen konvergens.

β) $\sin\left(\frac{\pi}{n} + \pi n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n} - \pi n\right) = 2 \sin\frac{\pi}{n} \cos \pi n =$

$= 2(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$, és

$$\left| 2\,(-1)^n \sin\frac{\pi}{n} \right| \leq \frac{2\pi}{n} \longrightarrow 0 \qquad (\text{ha} \quad n > 2)$$

miatt egyenletesen konvergens.

5. a) Nem igaz, pl. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n}$ függvénysor a $[-2,2]$-ben egyenletesen konvergens, mert

$|R_n(x)| < \left| \frac{x}{n+1} \right| \leq \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0,$ de nincs abszolut numerikus majoráns sora, mert

$\left| \frac{(-1)^n x}{n} \right| = \frac{|x|}{n}$ és $\sum \frac{2}{n}$ divergens.

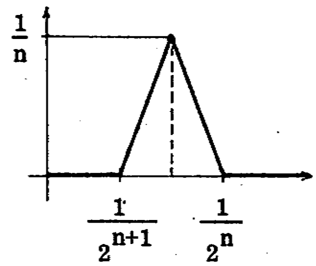
38. 5. b) Igaz. Ugyanaz, mint 3. a)

c) Nem igaz, mert pl. a 4. a) megoldásában megadott függvénysor esetén az $x_n = (-1)^n$ pontsorozatra $\sum f_n(x_n) = \sum \frac{1}{n}$ divergens, a függvénysor pedig egyenletesen konvergens.

d) Igaz, mert az $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ függvénysorozatra igaz az állitás (lásd 29. 5.d).

e) Igaz, mert ekkor $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$.

f) Nem igaz, mert pl. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens, ha

$f_n(x) =$ 

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{2^{n+2}}{n}x - \frac{2}{n} & \text{ha} \quad \frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{3}{2^{n+2}} \\ -\frac{2^{n+2}}{n}x + \frac{4}{n} & \quad \frac{3}{2^{n+2}} < x \le \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{ha} \quad \frac{1}{2^n} < x \le 1 \end{cases}$$

38. 5. f) $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ és $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

39. (1.) $AI = KI = (1, \infty)$, $\{EI\} = \{[a, \infty) ; a > 1, a \in \mathbb{R}\}$.
$(1, \infty)$ -n nem egyenletes, mert $x = 1$ -ben divergens és a tagok folytonosak KI -n, de $\left|\frac{1}{n^x}\right| \le \frac{1}{n^a}$ és $\sum \frac{1}{n^a}$ konvergens.

(2.) $AI = (-1, 1)$, mert gyökkritériummal

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^x}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^x} = |x| < 1 \text{ -re abszolut konvergens,}$$

$|x| > 1$-re divergens.

$x = 1$-ben $\sum \frac{1}{n}$ divergens, $x = -1$ -ben $\sum (-1)^n n$ divergens,

igy $KI = AI = (-1, 1)$. Itt nem egyenletes a konvergencia, mert a végpontokban divergens és a tagok folytonosak KT-n.

$\{EI\} = \{[a,b]: \; -1 < a < b < 1, \quad a,b \in \mathbb{R}\}$;

$\left|\frac{x^n}{n^x}\right| < \frac{a^n}{n^{-a}}$ és $\sum n^a \cdot a^n$ konvergens, mert

$(\sqrt[n]{n^a . a^n} = (\sqrt[n]{n})^a \cdot a \longrightarrow a < 1)$

(3.) $AI = (0, \infty)$ gyökkritériummal, $AI = KI$

$\{EI\} = \{[a, \infty): \; a > 0, \; a \in \mathbb{R}\}$ ui. $\left(\frac{n^x}{e^{nx}}\right)' < 0$,

tehát maximumát $x = a$ -ban veszi fel, igy

$$\sum \frac{n^x}{e^{nx}} \le \sum \frac{n^a}{e^{na}} \text{ konvergens.}$$

4. Minden x-re divergens.

39. 5. $x^{\ln n} = n^{\ln x}$ miatt $\ln x > 1$ -re konvergens.

KI = AI = (e, ∞). $\{ET\} = \{[a, \infty),\ a > e\}$, mert

$f_n'(x) < 0$, így a maximumát a -ban veszi fel.

6. AI = $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, KI = $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$

$\{ET\} = \{(-\infty, a] \cup [b, \infty):\ a < -2,\ b > 0,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

7. $\sum_n \frac{1}{\frac{n+x}{n}} = \sum_n \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}$ minden x-re divergens, mert

minden x-re $\sim \sum \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = 1$ miatt.

8. $\cos \pi n = (-1)^n$ miatt $\sum \frac{(-1)^n}{nx^2}$ minden x-re feltételesen konvergens, KI = $(-\infty, \infty)$,

AI = 0. $\{EI\} = \{(-\infty, a] \cup [a, \infty);\ a > 0,\ a \in \mathbb{R}\}$,

mert $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)x^2} < \frac{1}{(n+1)a^2} \to 0.$

9. KI = AI = EI = $(-\infty, \infty)$, mert $f_n(x)$ a maximumot

$x = \frac{n^2}{2}$ -ben veszi fel, így

$\left| e^{x^2 - n^2 x} \right| < e^{-\frac{n^2}{4}}$ és $\sum \frac{1}{e^{\frac{n^2}{4}}}$ konvergens.

10. KI = AI = EI = $(-\infty, \infty)$, mert

$$\left| \frac{\cos nx}{(x+n)^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

39\. 11. $KI = AI = EI = (-\infty, \infty)$, mert

$$\left| \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| < \left| \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| < \frac{1}{n^{3/2}}$$

és $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens.

($x = n^{3/2}$-ben veszi fel maximumát).

12\. $KI = 0$

13\. $KI = AI = EI = (-\infty, \infty)$

14\. $KI = AI = EI = (-\infty, \infty)$ $\left(\left| \operatorname{arctg} x^n \right| < \frac{\pi}{2} \right)$

15\. $KI = AI = (-\infty, \infty)$, $\{EI\} = \{[a, \infty);\quad a \in \mathbb{R}\}$

16\. Ha $|x_o| < 1$, akkor $\sum \left| \frac{x_o}{1 + x_o^{2n}} \right| < \sum |x_o^n|$ miatt konvergens.

Ha $|x_o| > 1$, akkor $y_o = \frac{1}{x_o}$ helyettesitéssel

$$\sum \frac{y_o^n}{1 + y_o^{2n}}$$ konvergens. $|x| = 1$ -ben divergens.

$KI = AI = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

$\{EI\}$= tetszőleges zárt intervallum a konvergenciatartomány belsejében.

17\. $KI = [-1, 1]$, mert $S_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \to x$, ha $|x| \leq 1$.

$AI = [-1, 1]$, mert $|f_n(x)| = \frac{|x|^n[n(1-x)+1]}{n(n+1)}$

($x = -1$ -ben Leibniz sor.)

39. 17. $\{EI\} = \{[-1, a] \; ; \quad a < 1, \quad a \in \mathbb{R}\}$

18. $KI = (-\infty, \infty)$, mert $S_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} \to \frac{1}{x}$

minden x-re

$AI = (-\infty, \infty)$, mert $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right|$

$\{EI\} = \{[a, \infty) \; ; \quad a \in \mathbb{R}\}$, $(-\infty, \infty)$-en nem egyenletes a konvergencia, mert $x_n = -n$ mentén $f_n(x_n))$: nem korlátos.

19. $AI = KI$ $(-\infty, \infty)$ gyökkritériummal. $\{EI\} = \{[a, \infty) \; ; \quad a \in \mathbb{R}\}$

20. $AI = KI = (1, \infty)$, $\{EI\} = \{[a, \infty) \; ; \quad a > 1, \quad a \in \mathbb{R}\}$, lásd 21. 1.

21. $AI = KI = (-\infty, -1)$, $\{EI\} = \{(-\infty, a) ; \quad a < -1, \; a \in \mathbb{R}\}$

22. $AI = KI = (1, \infty)$; $\{EI\} = \{[a, \infty) ; \quad a > 1, \quad a \in \mathbb{R}\}$

23. $AI = KI = (-\infty, -1)$ $\{EI\} = \{(-\infty, a] \; ; \quad a < -1, \quad a \in \mathbb{R}\}$

24. $$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} \begin{cases} \longrightarrow 0 & \text{ha} \quad |x| \leq 1 \\ \longrightarrow \infty & \text{ha} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

$AI = KI = [-1, 1]$ és itt

$$\left|\frac{x^{n^2}}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!} \quad \text{miatt} \quad EI = [-1, 1]$$

25. $KI = AI = EI = (-\infty, \infty)$

26. $x = 0$-ban minden α-ra konvergens a sor. Ha $x \neq 0$, akkor

$$1 - \cos\frac{x}{n^\alpha} = 2\sin^2\frac{x}{2n^\alpha} \quad \text{miatt}$$

39. 26. a) $\alpha > \frac{1}{2}$ esetén

mivel $2\left|\sin^2 \frac{x}{2n^\alpha}\right| \leq \left(\frac{x}{n^\alpha}\right)^2 = x^2 \frac{1}{n^{2\alpha}}$

$\{ET\} = \{[-a,a]: \ a \in \mathbb{R}\}$, mert itt

$\left|x^2 \frac{1}{n^{2\alpha}}\right| < a^2 \frac{1}{n^{2\alpha}}$ és $\sum a^2 \frac{1}{a^{2\alpha}}$

konvergens numerikus sor.

$(-\infty, \infty)$-en nem egyenletes a konvergencia, mert $x_n = n^\alpha$ pontsorozatra $f_n(x_n) = \sin^2 \frac{1}{2} \not\to 0$

b) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ esetén

$|\sin y| \geq \frac{2}{\pi}|y|$, ha $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ miatt $\sin^2 y \geq \frac{4}{\pi^2} y^2$

ha $\alpha > 0$, akkor $n^\alpha \longrightarrow \infty$, így minden x-re van N, úgy, ha $n > N$,

$\left|\frac{x}{n^\alpha}\right| \leq \frac{\pi}{2}$, így az előző becslést alkalmazva

$$\sin^2 \frac{x}{2n^\alpha} \geq \frac{4}{\pi^2} \frac{x^2}{4n^{2\alpha}} = \frac{x^2}{\pi^2} \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

ha $x \neq 0$, akkor divergens a sor, mert $\frac{x^2}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ divergens, ha $\alpha < \frac{1}{2}$.

c) $\alpha \leq 0$ esetén, ha $x \neq 0$ $\frac{x}{n^\alpha} \longrightarrow \infty$, tehát a sor nyilván divergens.

Tehát:

Ha $x = 0$ akkor $\forall\alpha$-ra konvergens.

39\. 26. c) $\alpha > \frac{1}{2}$ -re $\quad KI = AI = (-\infty, \infty)$

$$\{EI\} = \{[a,b]\,;\ a < b,\quad a,b \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha \leq \frac{1}{2}$ -re $\quad KI = AI = \{0\}$

27. $\forall x$-re Leibniz sor igy $\quad KI = (-\infty, \infty)$

$\forall x$-re egyenletesen konvergens, mert

$$|R_n(x)| < \frac{1}{\ln(|x| + n+1)} < \frac{1}{\ln(n+1)} \to 0$$

$ET = (-\infty, \infty)$

$AI = \{\emptyset\}$, mert minden x-re

$$\sum \frac{1}{\ln(x + n)} \sim \sum \frac{1}{\ln n} \text{ és } \sum \frac{1}{\ln n} \quad \text{divergens.}$$

28. $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$ miatt $\quad \left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}\right| \leq \left|\frac{2x}{x^2 + n^3}\right| \leq$

$\leq \frac{|2x|}{n^3}$, igy ha $|x| < K$, akkor abszolut, egyenletesen

konvergens.

$(-\infty, \infty)$-en $\quad g_n(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)' = \frac{2(x^2+n^3)-2x(2x)}{(x^2 + n^3)} = 0$

ha $\quad x = \pm n^{3/2} \qquad x = n^{3/2}$ -ben maximuma

$x = -\sqrt{n^3}$-ban minimuma van

$g_n(x)$-nek, $\max g_n(x) = \max\{|\max g_n(x)|\ ,\ |\min g_n(x)|\}$

miatt.

$|\max g_n(x)| = |\min g_n(x)| = \frac{1}{n^{3/2}}$ igy $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$,

azaz

39\. 28. $\left|\operatorname{arctg}\frac{2x}{n^2+n^3}\right| \le \frac{1}{n^{3/2}}$ $(-\infty, \infty)$-ben és $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$

konvergens.

KT = AT = ET = $(-\infty, \infty)$

40\. 1. a) Ha g(x) korlátos I-n $\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} g(x)a_n\right| =$

$$= |g(x)| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon \text{ ha } |g(x)| < K \text{ és}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

b) igen, mert $\left|\sqrt{1-x^2}\right| \le 1$ $[-1,1]$-ben, és $\sum \frac{1}{2^n}$ konvergens.

2\. a) $\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k f_k(x)\right| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |f_k(x)|$

ha $|f_k(x)| < K$ minden k-ra és $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{K}$

b) egyenletesen konvergens 2. a) alapján

c) 2. a) szerint egyenletesen konvergens, igy

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (q^n \cos nx)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} q^n = 0$$

3\. a) $b_n(x) = \frac{1}{n} \searrow 0$ és $|A_n(x)| = |\sin x + \sin 2x + \dots$

40. 3. a) $\ldots + \sin nx \,| = \left| \dfrac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| < \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \dfrac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$

ha $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$

b) ha $\dfrac{\pi}{3(n+1)} < x < \dfrac{\pi}{3n}$ akkor

$$\sin (n+1)x > \frac{1}{2}$$

$$\sin (n+2)x > \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\sin 2nx > \frac{1}{2} \quad \text{stb.}$$

$$|S_{2n}(x) - S_n(x)| = \left| \frac{\sin (n+1)x}{n+1} + \frac{\sin (n+2)x}{n+2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2n\, x}{2n} \right| > \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \right| > 1$$

miatt nem egyenletes a konvergencia.

41. 1. $|f(x)| < 1$ esetén egy $f(x)$ hányadosu geometriai sor:

$$g(x) \sum_{n=0}^{\infty} (f(x))^n = g(x) \frac{1}{1-f(x)}.$$

2. a) $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = |f(x)| < 1$, ha $x \neq 0$

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases} \qquad KI = (-\infty, \infty)$$

41. 2. b) $KI = [0, \infty)$,

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x = 0 \\ \dfrac{xe^x}{e^x - 1} & \text{ha} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

c) $KI = (-\infty, \infty)$,

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{\cos x} & \text{ha} \quad x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$k = \pm 1, \pm 2 \ldots$$

d) $KI = (0, \frac{1}{e}) \cup (e, \infty)$, $\quad S(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$

3. Nem, pl. a $\sum_{n=o}^{\infty} x^2 (e^{-x})^n$ függvénysor egyenletesen konvergens a $[0, \infty)$ -n, mig az $x^2 \sum_{n=o}^{\infty} (e^{-x})^n$ nem. Lásd. 38. 1.b β

4. Igen. Pl. $g(x) = (1-x)^2$ jó, ui. $S_n(x) = g(x)\dfrac{x^n - 1}{x-1}$ és

$R_n(x) = g(x)\dfrac{x^n}{1-x}$, igy ha $g(x) = (1-x)^2$ akkor

$R_n(x) = x^n(1-x) \rightrightarrows 0$ (-1, 1)-ben lásd. 29. 3. b. α

5. a) $KI = (-1, 1]$

$S_n(x) = 1 - x^n \qquad S(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x = 1 \\ 1 & \text{ha} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$

(-1, 1]-en; nem egyenletes a konvergencia $\{ET\} = \{[a,b]\ ;\ -1 < a < b < 1,\ \ a,b \in \mathbb{R}\}$

41. 5. b) KI = $(-1,1]$ EI = $(-1, 1]$ lásd 4.-es megoldása.

c) KI = $(0, \infty)$, $\{EI\} = \{[a, \infty)$; $a > 0$, $a \in \mathbb{R}\}$,

$$S(x) = \frac{2^x}{2^x - 1}$$

d) KI = $(-\infty, \infty)$ $\{EI\} = \{(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$: $a > 0$, $a \in \mathbb{R}\}$

mert $(0, \infty)$ -en nem egyenletes a konvergencia ui.

$$S(x) = \frac{(1+x^2)^2}{x^2+2} \qquad R_n(x) = \frac{1}{2+x^2}\left[\frac{1}{(1+x^2)^2}\right]^{n-1} \not\rightrightarrows 0$$

mert pl. az $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pontsorozatra $R_n(x_n) \to \frac{1}{2e^2} \neq 0$

e) KI = $(-\infty, \infty)$, Leibniz sor.

EI = $(-\infty, \infty)$ mert

$$|R_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{1+(1+n)x^2+\ldots+x^{2n+2}} \leq$$

$$\leq \frac{x^2}{(n+1)x^2} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$S(x) = \frac{1+x^2}{2+x^2} \qquad \left(q = -\frac{1}{1+x^2}\right)$$

f) KI = $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$, $\{ET\} = \{(-\infty, a] \cup (b, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$
$a < -2$, $b > 0\}$ $S(x) = 1 + x$

g) KI = $[0, \infty)$, ET = $[0, \infty)$, $S(x) = \frac{x}{e^x - x}$

42. 1. a) $[x_0, x] \subset [a, b]$ miatt ott a sor egyenletesen konvergens, tehát tagonként integrálható!

42. 1. b) $\left|R_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, ha $(n > N)$ az eredeti sor egyenletes konvergenciája miatt, igy a $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_o}^{x} f_n(x)dx$ sor maradéktagjára $n > N$ esetén minden $x \in [a,b]$-re

$$\left| \int_{x_o}^{x} f_{n+1}(x)dx + \int_{x_o}^{x} f_{n+2}(x)dx + \dots \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_o}^{x} \left| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots \right| dx \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \left| x - x_o \right| < \varepsilon$$

2. Igen, ha $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ nem is konvergens.

Pl. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum x^n;$ $\quad I = (0,1),$ $\quad F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 1$

43. 1. a) $KT = (-1,1]$ miatt $-1 < a < 1$ és $a < b \leq 1$,
ha $b < 1$, akkor $[a,b]$-ben az egyenletes konvergencia miatt teljesül az egyenlőség, ha $b = 1$, akkor

$$\int_a^1 \sum_{n=o}^{\infty} (x^n - x^{n+1})\, dx = \int_a^1 S(x)\, dx = 1-a$$

43. 1. a) $$\sum_{n=o}^{\infty}\int_a^1 (x^n-x^{n+1})dx=\sum_{n=o}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{a^{n+2}}{n+2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-a-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{a^{n+2}}{n+2}\right)\right]=1-a$$

Tehát tetszőleges a és b esetén felcserélhető.

b) $0 < a < b \leq 1$ esetén teljesül az egyenletes konvergencia miatt; ha pedig $a = 0$ és $b = 1$, akkor

$$g_1(x)+\sum_{n=2}^{\infty}(g_n(x)-g_{n-1}(x))=\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0 \quad \text{és}$$

$$\int_o^1 g_1(x)dx+\sum_{n=2}^{\infty}\int_o^1 g_n(x)-g_{n-1}(x))dx=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{e^{nx}}=\frac{x}{e^x-x} \quad \text{valamint} \quad \left|\frac{x}{e^{nx}}\right|\leq\frac{1}{e^n},$$

minden x-re és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$ konvergenciája miatt egyenletes a konvergencia, tehát az operáció felcserélhető.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ = Dirichlet függvény, (ami nem integrálható a $[0,1]$-n).

44. $KI = (1, \infty)$, $\{EI\}=\{[a, \infty), \quad a>1, \quad a\in\mathbb{R}\}$, a derivált sor

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\ln n}{n^x}\right) \quad \text{konvergens} \quad x>1 \text{ -re, mert ha}$$

44. $x_o > 1$; $\frac{\ln n}{n^{x_o}} \leq \frac{n^{\varepsilon}}{n^{x_o}} = \frac{1}{n^{x_o - \varepsilon}}$ (ha $n > N$), és

$\sum \frac{1}{n^{x_o - \varepsilon}}$ konvergens, ha $\varepsilon < x_o - 1$, igy KT = $(1, \infty)$; de

itt ugyan nem egyenletes a konvergencia (x = 1-ben divergens), de tetszőleges $[a, \infty)$ $(a > 1)$ -ben egyenletes, itt tehát a

$\sum \frac{1}{n^x}$ tagonként deriválható, tehát minden $x_o > 1$-ben $f(x)$ differenciálható, mert a derivált sor egyenletesen konvergens az $1 < a < x_o$ -re az $[a, \infty)$ intervallumban.

45. 1. $\left| x^2 e^{-xn} + \frac{1}{2^n} \right| < \frac{36}{n^2} + \frac{1}{2^n}$ (szélsőértékkel), miatt egyenletesen konvergens $(-\infty, \infty)$-en, igy

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 e^{-xn} + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to \infty} \left(x^2 e^{-xn} + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

2. $\left| \frac{x^2}{1+n^2x^2} \right| < \frac{1}{n^2}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ lásd. 81. 2. c.

3. $\left| \frac{2^x - 2}{2^{n+x}} \right| < \frac{1}{2^n}$, és $\lim_{x \to \infty} \frac{2^x - 2}{2^n . 2^x} = \frac{1}{2^n}$ és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

45. 4. Egyenletesen konvergens $(-1,1]$-n, összfüggvénye folytonos, lásd 41. 4., így a szummázás és a limeszképzés felcserélhető.

5. Nem egyenletesen konvergens $(-1,1]$-n,

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{így} \quad \lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = 1$$

46. A hatványsor ha $x = x_0$-ben konvergens, akkor minden $|x_1| < |x_0|$ helyen abszolut konvergens.

47. 1. Igaz,

2. Igaz,

3. Nem igaz, pl. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$ $|x| < 2$ -ben

konvergens és $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$

48. 1. Nem, pl. $\sum_{k=o}^{\infty} x^{2k}$ $|x| < 1$-ben

2. Nem, pl. $\sum_{k=o}^{\infty} 2x^k$ $|x| < 1$-ben

3. Nem, pl. $\sum_{n=o}^{\infty} 4^n \; x^{2n}$ $|x| < \frac{1}{2}$ -ben

4. Nem, pl 3.

5. Nem, pl. 3.

48. 6. Igen, pl. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ $|x|<\frac{1}{2}$ -ben.

7. Igaz, mert $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ és

$$0 \le \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{n} \le \frac{\frac{1}{R}+\varepsilon}{n} \quad \text{miatt} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{n} = 0$$

8. Nem, pl. $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$

49. 1. AI -t gyökkritériummal keressük:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2} |x|^n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n |x| = |x|\, e ,$$

tehát $|x|<\frac{1}{e}$ esetén abszolut konvergens, $|x|>\frac{1}{e}$ esetén pedig divergens. $x = \frac{1}{e}$ -ben a $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$ sor divergens, mert tagjai nem taranak 0-hoz.

(ui. $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}}$). Ugyanigy

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+\frac{1}{n})^{n^2} \frac{1}{e^n}$ is divergens. Ezért KI = AI = (-1, 1)

2. AI -t hányados kritériummal keressük:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty. \quad \text{ha} \quad x \neq 0;$$

49. 2. konvergens, ha $x = 0$. Igy $AI = KI = \{0\}$.

3. $AI = (-1,1)$ gyökkritériummal. Az $x = 1$ -ben $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ Leibnitz sor, ami konvergens; $x = -1$ -ben; $\sum \frac{1}{n}$ divergens, igy $KI = (-1,1]$.

4. $AI = KI = (-1,1)$

5. $AI = KI = (-\infty, \infty)$, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

6. $AI = (-1,1)$; $KI = [-1,1)$

7. $AI = KI = [-1,1]$

8. $AI = (-1,1)$; $KI = [-1,1)$

9. Gyökkritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} |x|(\sqrt[n]{n})^{\alpha} = |x|,$$ igy abszolut konvergens ha $|x|<1$, divergens, ha $|x|>1$. Ha $x = 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konvergens, ha $\alpha<-1$, és divergens, ha $\alpha \geq -1$. Ha $x = -1$, akkor $\sum (-1)^n n^{\alpha}$ konvergens, ha $\alpha<0$, és divergens, ha $\alpha \geq 0$.

$$\text{Igy} \begin{cases} \alpha < -1 & \text{esetén} \quad KI = [-1,1] \\ -1 \leq \alpha < 0 & \text{esetén} \quad KI = [-1,1) \\ \alpha \geq 0 & \text{esetén} \quad KI = (-1,1) \end{cases}$$

10. Hányados kritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^n} |x| = \lim_{n\to\infty} |x| (1+\frac{1}{n})^n = |x|.\ e$$

49\. 10. így $|x|<\frac{1}{e}$ esetén abszolut konvergens, $|x|>\frac{1}{e}$ esetén divergens.

$x=\frac{1}{e}$ -ben $\sum \frac{n^n}{n!e^n}$ divergens, mert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}}\frac{n!e^n}{n^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{e}>\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

a harmonikus sor hányadosai.

$x=-\frac{1}{e}$ -ben $\sum \frac{n^n}{n!e^n}(-1)^n$ konvergens, mert

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{e}<1, \quad \text{így} \quad a_{n+1}<a_n \quad (\text{ha} \quad n>N)$$

és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!e^n}=0$ miatt Leibniz-sor tehát konvergens.

Így $KI=\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$; $AI=\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

11\. Hányados kritériummal: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\frac{n}{n+1}|x|=|x|$,

így $|x|<1$ -re konvergens, $|x|>1$ -re divergens.

$x=1$-ben $\sum\frac{\ln n}{n}>\sum\frac{1}{n}$ (ha $n>2$) divergens,

$x=-1$ -ben $\sum(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ Leibniz-sor, így konvergens.

Tehát $KI=[-1,1)$; $AI=(-1,1)$

12\. Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\begin{cases}\frac{1}{2}|x| & (\text{ha} \quad n \text{ páratlan})\\ \frac{1}{4}|x| & (\text{ha} \quad n \text{ páros}),\end{cases}$$

49. 12. igy $\overline{\lim} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \frac{1}{2}|x|$.

Tehát $|x|<2$-re abszolut konvergens, $|x|>2$-re divergens. $x = \pm 2$-ben divergens, igy $KI = AI = (-2, 2)$.

(Megjegyzés: A hányados kritérium $\overline{\lim} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \infty$ miatt nem alkalmazható.)

13. $KI = AI = (-\infty, \infty)$.

50. 1. $AT = KT = (-\infty, \infty)$; $\{ET\} = \{[a,b]:\ a,b \in \mathbb{R}\}$ KT -n nem egyenletes a konvergencia, mert $x_n = n$ pontsorozatra

$$f_n(x_n) = \frac{n^n}{n!} \to \infty \not\to 0$$ (Tehát a tagok nem tartanak egyenletesen a 0-hoz.)

2. a) $KT = [-1, 1)$; $AT = (-1, 1)$, $I = [-1, 0]$-n a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$ Leibnitz sor, igy

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0$$ miatt egyenletesen konvergens. $[-1, 1)$-en nem, mert a jobb végpontban divergens

$$\{ET\} = \{[-1, a]:\ a \in \mathbb{R},\ a < 1\},$$ mert $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{a^n}{n}$

b) $KT = AT = (-1, 1)$;

$$\{ET\} = \{[a, b]:\ -1 < a < b < 1,\quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

3. $\alpha > 1$ mellett $KT = AT = ET = [-1, 1]$

$0 < \alpha \leq 1$ mellett $AT = (-1, 1)$, $KT = [-1, 1)$, $\{ET\} = \{[-1, a]:$ $a \in \mathbb{R},\quad a < 1\}$

50. 3. $\alpha \leq 0$ mellett $AT = KT = (-1,1)$, $\{ET\} = \{[a,b]:$

$-1 < a < b < 1, \quad a,b \in \mathbb{R}\}$

51. 1. a) Tudjuk, hogy egy hatványsor x_o-ban akárhányszor differenciálható tagonként, ha $x_o \in (-R,R)$ igy

$$f'(x_o) = a_1 + 2a_2 x_o + \dots + na_n x_o^{n-1} + \dots;$$

$$f''(x_o) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x_o + \dots + n(n-1)a_n x_o^{n-2} + \dots$$

$$f^{(k)}(x_o) = a_k k! + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} + \dots$$

(Teljes indukcióval) minden $x_o \in (-R, R)$-re

b) α) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ a $\sum_{n=o}^{\infty} x^n$ sor tagonkénti differenciálásából származik, igy összegfüggvénye

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1).$$

β) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ sor a $\sum x^n$ sor

kétszeri tagonkénti deriválásával származik, igy összegfüggvénye $= \dfrac{2}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$.

c) α) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ függvény az $-\dfrac{1}{1+x}$ deriváltfüggvénye.

igy $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$.

51. 1. c) β) $\frac{1}{(1+x)^3} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}\right)''$, így

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)x^{n-2} \quad (|x|<1) .$$

2. a) Tudjuk, hogy egy hatványsor akárhányszor integrálható tagonként $[0, x_o] \subset (-R, R)$ -ben, tehát

$$f_1(x) = \int_0^{x_o} f(t)dt = a_o x_o + \frac{a_1 x_o^2}{2} + \frac{a_2 x_o^3}{3} + \dots$$

$$\dots + a_n \frac{x_o^{n+1}}{n+1} + \dots\dots , \text{ ugyanugy}$$

$$f_2(x) = \int_0^{x_o} f_1(t)dt = a_o \frac{x_o^2}{2} + \frac{a_2 x_o^4}{3.4} + \dots +$$

$$+ a_n \frac{x_o^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)} + \dots , \text{ ugyanigy}$$

$$f_k(x) = \int_0^{x_o} f_{n-1}(t)dt = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \frac{x_o^{n+k}}{(n+1)\,(n+2)..(n+k)} =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n+k)!} x_o^{n+k} \quad \text{(Teljes indukcióval)}$$

Minden $x_o \in (0, R)$-re

b) α) $\sum_{n=o}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ Tagonkénti integrálásával keletkezik, így

51. 2. b) α) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x) = \ln\frac{1}{1-x}$

β) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ sor a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor kétszeri tagonkénti integrálásából származik, így

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \int_0^x -\ln(1-t)\,dt = x-(1+x)\ln(1-x),$$

$|x| < 1$-re konvergens.

c) α) $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$; $KI = (-1,1]$;

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad ;$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \; ;$$

β) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$;

$KI = (-1,1]$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \; ;$$

53. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' =$

$= x\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$, $KI = (-1,1)$.

53. 2. $$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, x^{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} (n+1).n.x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)x^{n}\right]' =$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{n+1}\right)'' = x \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^{3}}, \qquad KI = (-1,1).$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2}x^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n^{2}x^{n} + nx^{n} - nx^{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1)x^{n} - nx^{n}).$$

Mivel $|x|<1$-re abszolut konvergensek az 1., 2.-beli sorok, igy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2}x^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n} = \frac{2x}{(1-x)^{3}} - \frac{x}{(1-x)^{2}} =$$

$$= \frac{x^{2}+x}{(1-x)^{3}}, \qquad KI = (-1,1).$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^{n}}\, x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left(\frac{x^{2}}{2}\right)^{n} = \left(\frac{x^{2}}{2}\right)^{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x^{2}}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(\frac{x^{2}}{2}\right)^{2} \frac{1}{\left(1-\frac{x^{2}}{2}\right)^{2}} = \frac{x^{4}}{(2-x^{2})^{2}}$$ $\frac{x^{2}}{2} < 1$-re konvergens,

$KI = (-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

5. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!}\, x^{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n}}{n!} = e^{-x}$$

53. 6. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{(-x)^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=e^x+e^{-x}=2\operatorname{ch}x$$

$$AT=(-\infty,\ \infty)$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,dx=\sum_{n=o}^{\infty}\int_0^x x^n dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,dx=$$

$$=-\ln(1-x),\qquad KI=[1,1).$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x\frac{x^n}{n}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\int_0^x\left(\int_0^x(x^n)dx\right)dx\right)=\frac{1}{x}\int_0^x-\ln(1-x)dx=$$

$$=\frac{1}{x}\left((x+1)\ln(1-x)-x\right)=\frac{x+1}{x}\ln(1-x)-1,\qquad KI=[-1,1]\ .$$

9. $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}x^n\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right)'=\left(\frac{x}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)'=$$

$$=\left(\frac{x}{3-x}\right)'=\frac{3}{(3-x)^2}\qquad KT=(-3,3)$$

54. 1. Mindkét állitás következik abból, hogy egy hatványsor a konvergencia körének belsejében abszolut konvergens, igy összegük és Cauchy szorzatuk is konvergens és egyenlő a függvények összegével illetve szorzatával.

<u>54.</u> 2. a) $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln (1+x) - \ln (1-x)$

$$\ln (1+x) = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln (1 - x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln (1+x) - \ln (1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

b) $(1+x^2) \left(\frac{1}{1-x^2}\right) = (1+x^2)(1+x^2+x^4 + \dots) = 1+2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$

c) $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3 + \dots$

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$1.\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$x.\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \dots \quad (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n} + \dots$$

$$x^2.\ln(1+x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^6}{4} + \dots \quad (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n} + \dots$$

$\vdots$

$$x^n.\ln(1+x) = x^{n+1} - \frac{x^{n+2}}{2} + \frac{x^{n+3}}{3} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} + \dots$$

54. $\ln(1+x)\,\frac{1}{1-x} = x + x^2\left(1-\frac{1}{2}\right) + x^3\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + x^4\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots$

$\ldots + x^n\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots-\frac{1}{n}\right) + \ldots$

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{n}\right)$$ konvergens, ha $|x|<1$

55. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{(x+1)^n}{n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\frac{(x+1)^n}{n}$ tagonkénti integrálással adódik

a $3 + \sum_{n=o}^{\infty} 3(3(x+1))^{n+1}$ sorból, mely konvergens a $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

intervallumban, és összege $= \frac{3}{1-3(x+1)}$

Igy $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{(x+1)^n}{n} = \int_{-1}^{x} \frac{3}{1-3(x+1)}\,dx = -\ln|-3x-2|$, ugyanigy

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(x+1)^n}{n} = -\ln|2x+3|$, melyhez $KI = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Tehát $S(x) = -\ln\left|-6x^2-13x-6\right|$, $KI \supseteq \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

$x = -\frac{4}{3}$ -ban a sor konvergens

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n}\right),\right.$$

55. $x = -\frac{2}{3}$ -ban pedig divergens

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right),\quad \text{igy}$$

$KI = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$

56. $\sum_{n=o}^{\infty} x^n$ abszolut konvergens $[-a, a]$ $a < 1$-ben, összege

$\frac{1}{1-x}$, ezért a Cauchy-szorzat összege $= \frac{1}{(1-x)^2}$, de

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ miatt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=o}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=o}^{\infty} x^n\right)^2.$$

57. 1. a) Tetszőleges $x_o \in I$-re $g(x_o) \in (-R, R)$, itt pedig

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n\left[g(x_o)\right]^n = f(g(x_o)).$$

b) Az igy kapott sor I belsejében abszolut konvergens, igy átrendezhető x hatványai szerint és a hatványsorfejtés egyértelmü.

2. a) $f(y) = \frac{1}{1-y}$; $y = x^2$ miatt

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=o}^{\infty} x^{2n};\quad \text{ahol } |x^2| < 1, \text{ azaz } |x| < 1$$

57. 2. b) $f(y) = \frac{1}{1-y}$ $y = -x$ miatt $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n x^n$

ahol $|-x| < 1$ azaz $|x| < 1$.

c) $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ $|x-1| < 1$

d) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{a}\right)^n$,

ha $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, azaz ha $|x| < a$.

e) $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$; $|x| < 1$

58. 1. $\left(\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=o}^{\infty} x^n\right) = f(x) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=o}^{\infty} S_n x^n$

2. KI = (-1, 1), mivel $\sum_{n=o}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=o}^{\infty} (a_o + a_1 R + a_2 R^2 + \dots + a_n R^n) x^n =$$

$$= \left(\sum_{n=o}^{\infty} (a_n R^n x^n)\right) \left(\sum_{n=o}^{\infty} x^n\right)$$ Cauchy szorzata.

59. 1. A feltétel szerint

$$S_n = \sum_{k=o}^{n} a_k R^k \quad \text{konvergens}, \quad \sum_{k=o}^{\infty} a_k R^k = S,$$

igy $\frac{\varepsilon}{2}$ -höz van N, hogy

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k R^k \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ha} \qquad n, m > N.$$

$$\sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=o}^{\infty} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k = \left(\sum_{k=o}^{\infty} S_k \left(\frac{x}{R}\right)^k\right) \left(1 - \frac{x}{R}\right).$$

58. 1 alapján, igy

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k x^k \right| = \left| \left(\sum_{k=n}^{m} S_k \left(\frac{x}{R}\right)^k \right) \left(1 - \frac{x}{R}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| 1 - \frac{x}{R} \right| \left| \sum_{n}^{m} \left(\frac{x}{R}\right)^k \right| +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^m = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^m < \varepsilon$$

$0 \le x \le R$ -ben.

b) Tehát a sor egyenletesen konvergens $[0, R]$-ben, igy f(x) összegfüggvénye folytonos és $f(R) = S$.

2. a) $\ln (1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, ha $|x| < 1$, de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad \text{(Leibniz sor), igy összege 1.)}$$

miatt nem lehet más, mint ln 2.

59. 2. b) Ugyanigy

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ tehát}$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

60. 1. Nem, mert minden hatványsor a konvergenciaköre belsejében abszolut konvergens.

2. Nem, (lásd 59. 1.)

3. Igen, pl. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

4. Nem, mert ha x_1-ben és x_2-ben konvergens lenne $(x_1 < x_2)$, akkor minden $x_1 < x < x_2$ -re is.

5. Igen, pl. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ $(x \geq 0)$ egyenletesen konvergens $[0, 1]$-ben,

de csak $[0, 1)$-ben abszolut konvergens.

6. Nem, mert ott konvergens sem lehet.

7. Igen, mert akkor x a konvergenciakör belsejébe esik.

61. 1. a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}(x - \frac{\pi}{4})^3 ++--\ldots$

b) $e^x = e^2 + e^2 (x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \ldots$

c) $x^2 = x^2$

$x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$

61. 1. d) $(x-1)^3 = -1 + 3x - 3x^2 + x^3$

$(x-1)^3 = (x-1)^3$

$(x-1)^3 = -8 + 12(x+1) - 6(x+1)^2 + (x+1)^3$

2. $R_{10}(x) = \frac{10!}{11} \cdot \frac{(x-3)^{11}}{11!} = \frac{1}{11}\left(\frac{x-3}{\xi}\right)^{11}$;

$\left|\frac{x-3}{\xi}\right| \leq \frac{1}{2}$ így $|R_{10}(x)| \leq \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{11}}$

$R_k(x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x-3}{\xi}\right)^k \longrightarrow 0$ ha $x \in [2,4]$

62. 1. a) feltételből nem, pl. ha $f^{(n)}(x)$ korlátos függvény, de a korlátokra

$|f'(x)| < 1$

$|f''(x)| < 2^2$

$|f^{(3)}(x)| < 3^3$

$\vdots \qquad \vdots$

$|f^{(n)}(x)| < n^n$ .... stb. akkor nem következik, hogy a

Lagrange-maradéktag 0-hoz tart.

b) feltételből igen, mert akkor a Lagrange-maradéktagra

$$\left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right] < \frac{K}{(n+1)!} R^{n+1} \longrightarrow 0$$

62. 2. a) Hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(x-a) + a\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m =$

$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} a^{n-m}\right](x-a)^m$ ez pedig az

62. 2. b) a-körüli sorfejtés, mely a) alapján

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

$\boxed{3.}$ Hatványsor összegfüggvénye akárhányszor differenciálható a konvergenciaköre belsejében, ezért $f^{(n)}(a)$ létezik minden a-ra. Legyen x tetszőleges, $|f^k(x)| < K$ minden k-ra, ugyanis

$$\left| f^{(k)}(x) \right| = \left| k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} x + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} x^2 + \ldots + \right| <$$

$$< C \left| 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \right| = Ce^x = K .$$

Igy 1.b) miatt igaz az állitás.

4. A Lagrange-maradéktag 0-hoz tart.

5. a) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$$

Igy, ha $n=2k+1$ alaku, akkor $f^{(n)}(0) = 0$, ha $n=2k$ alaku, akkor

$$\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}, \text{ vagyis } f^{(2k)}(0) = \frac{(-1)^k (2k)!}{(2k+1)!}$$

b) Hasonlóan

$$g^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{n+1}$$

63. 1. Lásd 57. 1. b)

2. Megjegyzés. Az $f'(x_o) \neq 0$ feltétel azért szükséges, mert egyébként az inverz függvény deriváltja nem korlátos x_o-ban, így nem létezik a Taylor-sora,

64. 1. $$e^{-x} = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \qquad KT = (-\infty, \infty)$$

2. $$e^{-x^2} = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \qquad KT = (-\infty, \infty)$$

3. $$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$KT = (-\infty, \infty)$$

4. $$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{ch}\, 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$KT = (-\infty, \infty)$$

5. $$\sin x^2 = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} \qquad KT = (-\infty, \infty)$$

65. 1. $\sqrt{x}$ a 0-körül nem fejthető sorba, mert $f'(0)$ nem létezik,

$x_o = 1$ körül igen, $\sqrt{x} = \sqrt{1 + (x-1)} = (1 + (x-1))^{1/2}$

binomiális sor,

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - + \ldots \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2$$

65. 2. $x^{3/2}$ a 0 körül nem fejthető sorba, mert $f''(0)$ nem létezik
$x_o = 1$ körül

$$x^{3/2} = \sum_{k=o}^{\infty} \binom{3/2}{k} (x-1)^k \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2$$

3. Ha $\alpha \geq 0$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ akkor a 0 -körüli hatványsorára $x^{\alpha} \equiv x^{\alpha}$, ha $\alpha \geq 0$ nem egész, akkor az $[\alpha]+1$ -edik deriváltja nem korlátos, így $\nexists$ Taylor sora.
Ha $\alpha < 0$, akkor a fv. nem korlátos 0-ban.
$x_o = 1$ körül

$$x^{\alpha} = \sum_{k=o}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (x-1)^k \qquad 0 < x \leq 2 \text{ -ben.}$$

66. 1. Mivel $(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$

és ha $k > \alpha$, akkor a binomiális együtthatók váltakozó előjelüek, ezért ha $x > 0$, akkor a sor váltakozó előjelű $N > \alpha$ indextől kezdve, ha pedig $x < 0$, akkor jeltartó $N > \alpha$ indextől kezdve.

2. a) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2.4} x^2 + \frac{1.3}{2.4.6} x^3 - \ldots \; (|x| < 1),$

de a sor $x = \pm 1$-ben is konvergens, így a sorfejtés $[-1, 1]$-ben érvényes.

$\boxed{\text{b)}}$ $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{1.2.\ldots.n} = (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}, \quad \text{így}$$

66. 2. b) $$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(-x)^2 - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{1.3.\ (2n-1)}{2.4..2n}(-x)^n + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}x^2 + \ldots + \frac{1.3..(2n-1)}{2.4...2n}x^n + \ldots \quad (|x| < 1),$$

de $x = -1$-ben is konvergens, tehát $[-1,1)$-ben érvényes a sorfejtés.

c) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3..(2n-1)}{2.4..2n}x^{2n} + \ldots$$

$(|x|<1)$ $x = \pm 1$ -ben is konvergens, igy $[-1,1]$-ben érvényes a sorfejtés

d) $$\frac{1}{(1-x)^2} = 1-2(-x)+3(-x)^2 - \ldots (-1)^n(n+1)(-x)^n + \ldots =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots \quad (|x| < 1)$$

$$\left(\left(\frac{1}{1-x}\right)' = + \frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

67. 1. $$(\mathrm{arctg}\ x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\mathrm{arctg}\ x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ ha } |x|<1.$$

Mivel a kapott sor $x = \pm 1$ -ben is konvergens, igy Abel-tétele szerint $[-1,1]$-ben érvényes a sorfejtés.

2. $$(\mathrm{arth}\ x)' = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\ ; \qquad \mathrm{arth}\ x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

KI = $(-1,1)$

67. 3. Az arcth x függvény $|x|>1$ -re van értelmezve, igy a 0-körül nem fejthető sorba.

4. $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.(2n-1)}{2.4..2n} x^{2n} \qquad |x| < 1 \text{ -ben}$$

$$\text{arc} \sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \dots +$$

$$+ \frac{1.3..(2n-1)}{2.4.2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Mivel ez $x = \pm 1$ -ben abszolut konvergens, igy $KI = [-1,1]$.

5. $$\text{arc} \cos x = -\text{arc} \sin x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x - \dots -$$

$$- \frac{1.3..(2n-1)}{2.4.\ 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad \text{ha } |x| \leq 1 \qquad (4.\ \text{miatt})$$

6. $$(\text{arsh}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1.3(2n-1)x^{2n}}{2.4.\ 2n}.$$

ha $|x| < 1$, igy

$$\text{arsh}\ x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \dots +$$

$$+ (-1)^n \frac{1.3..\ (2n-1)}{2.4..\ 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots.$$

7. Az arch x függvény nincs értelmezve a 0-ban, igy nem lehet a 0 körüli sorba fejteni.

67. 8. $\left[\ln(1+x^2)\right]' = \dfrac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2 . x^{2n+1}$, ha $|x|<1$,

így $\ln(1+x^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n . x^{2n}}{2n}$. Ez $x = \pm 1$-ben is

konvergens, tehát $KI = [-1,1]$.

9. $\ln(1-x^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n}$; $KI = (-1,1)$

10. $\ln\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ (lásd 8. -as)

11. $\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \ln(1+x^2) - \ln(1-x^2) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-2}}{4n-2}$ $(-1,1)$ -ben.

68. 1. $1 + x = 1 + x$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{x})^4}{4!} - \dots (-1)^k \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{2k!} + \dots$$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots (-1)^k \frac{x^k}{2k!} + \dots$$

$$+ x \cdot \cos\sqrt{x} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6!} + \dots \frac{(-1)^{k-1} x^k}{(2k-2)!} + \dots$$

$$\cos\sqrt{x} + x\cos\sqrt{x} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right)x - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right)x^2 + \dots$$

$$+ (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{(2k-2)!} - \frac{1}{(2k)!}\right)x^k + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\left[\frac{1}{(2k-2)!} - \frac{1}{(2k)!}\right] x^k$$

68. 1. $(-\infty, \infty)$-ben érvényes a sorfejtés, mert a $\cos\sqrt{x}$ és az $1+x$ sora abszolut konvergens ott ...

2. $$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \dots \qquad (-\infty, \infty)\text{-ben}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \qquad (-\infty, \infty)\text{-ben}$$

$$xe^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^6}{5!} \quad \frac{x^7}{6!} - + \dots$$

$$-\frac{x^3}{3!} e^{-x} = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^5}{3!2!} + \frac{x^6}{3!3!} - \frac{x^7}{3!4!} + \dots$$

$$\frac{x^5}{5!} e^{-x} = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{5!} + \frac{x^7}{5!2!} - + \dots\dots$$

$$-\frac{x^7}{7!} e^{-x} = -\frac{x^7}{7!} + \dots$$ Cauchy-szorzással:

$\vdots$

$$(\sin x)e^{-x} = x - x^2 + x^3 \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + x^4 \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) +$$

$$+ x^5 \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3!.2!} + \frac{1}{5!}\right) + x^6 \left(-\frac{2}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) +$$

$$+ x^7 \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{3!4!} + \frac{1}{5!2!} + \frac{1}{7!}\right) + \dots = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{\frac{k}{2}} \sin k \frac{\pi}{4}}{k!} x^k$$

azt az alakját a következő azonosságok felhasználásával láthatjuk be.

68. 2.

$$\sin k\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k = 4\ell+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & k = 4\ell+2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & k = 4\ell+3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & k = 4\ell \end{cases}$$

és $\sum_{l=o}^{k}\binom{k}{2l} = 2^{k-1}$; $\sum_{l=o}^{k}\binom{k}{2l+1} = 2^{k-1}$

a sorfejtés $(-\infty, \infty)$ -ben érvényes.

$\boxed{3.}$ a) $\operatorname{tg} x = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

$(\operatorname{tg} x)(\cos x) = \sin x$

$$(a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

A határozatlan együtthatókkal a Cauchy szorzást elvégezve és az együtthatók összehasonlitásából adódik, hogy

$a_o = 0;\ a_1 = 1,\quad a_2 = 0,\quad a_3 = -\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) = \frac{1}{3}$

$a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{15}, \ \dots$

tehát $\quad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{29}{840}x^7 + \dots +$

68. $\boxed{3.}$ a) $+\sin k\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k-1)!}+\ldots+\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{k+1}{2}\right)!}\right)x^k+\ldots$

Mivel a $tg\, x$ függvény a $\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ helyeken nem korlátos, így a sora $|x|<\frac{\pi}{2}$-ben konvergál.

b) Ha $x_0=\frac{\pi}{2}$ akkor itt $y=tg\, x$ sora nem konvergens, $y=\cos x$ sora abszolut konvergens és kapott szorzatsor a $y=\sin x$ sora abszolut konvergens.

69. 1. $(a+x)^{\alpha}=a^{\alpha}\left[1+\frac{x}{a}\right]^{\alpha}$ miatt, (ha $\left|\frac{x}{a}\right|<1$ vagyis $|x|<|a|$)

$$(a+x)^{\alpha}=a^{\alpha}\left[1+\binom{\alpha}{1}\frac{x}{a}+\binom{\alpha}{2}\frac{x^2}{a^2}+\ldots\right]=$$

$$=a^{\alpha}\left[1+\alpha\frac{x}{a}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{x^2}{a^2}+\ldots\right]$$

2. $$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{|a|}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\quad \left(0<\frac{x^2}{a^2}<1,\quad x^2<a^2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{|a|}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^4}{a^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^6}{a^6}+-\ldots\right)$$

3. $\log_b(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln b}$ miatt

$$\log_b(1+x)=\frac{1}{\ln b}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots\right]\qquad (|x|<1)$$

4. $$\log_b(a+x)=\frac{\ln(a+x)}{\ln b}=\frac{\ln\left(a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right)}{\ln b}=\frac{\ln a}{\ln b}+\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\ln b}$$

miatt

69. 4. $\log_b (a+x) = \frac{\ln a}{\ln b} + \frac{1}{\ln b}\left[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \dots\right] \quad (|x|<1)$

5. $10^x = e^{x.\ln 10}$ miatt

$$10^x = 1 + x\ln 10 + \frac{\ln^2 10}{2!}x^2 \ \frac{\ln^3 10}{3!}x^3 + \dots, \qquad x \in \mathbb{R}$$

6. $(\ln\cos x)' = -\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{29}{840}x^7 + \dots + \dots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

lásd 68. 3.

$$\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{2}{15}\frac{x^6}{6} - \dots = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \dots$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

7. $\ln(3 + 4x - 5x^2) = \ln 3 + \frac{4x-5x^2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{4x-5x^2}{3}\right)^2 +$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{4x-5x^2}{3}\right)^3 - + \qquad \left(\left|\frac{4x-5x^2}{3}\right| < 1\right)$$

$$= \ln 3 + \frac{4}{3}x - \frac{23}{9}x^2 + \frac{244}{81}x^3 - + \dots.$$

8. $\operatorname{ch}(x+2x^2) = 1 + \frac{(x+2x^2)^2}{2!} + \frac{(x+2x^2)^4}{4!} + \frac{(x+2x^2)^6}{6!} + \dots =$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + 2x^3 + \frac{49}{4!}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \dots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

9. $(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{3}{2}\frac{x^4}{2} + \dots + \frac{2.4.6..(2k-2)}{3.5.\ \ (2k-1)}\ \frac{x^{2k}}{k} + \dots$

$$(|x|<1)$$

10. a) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

69. 10. b) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ miatt

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + - \dots\right) =$$

$$= \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - + \dots . \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \frac{2^5x^6}{6!} + - \dots . \qquad (x \in \mathbb{R})$$

11. $$\ln\frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{a}\left[2x + \frac{2x^3}{3a^2} + \frac{2x^5}{5a^4} + \dots + \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)a^{2k}} + \dots\right] \quad (|x|<|a|)$$

12. $$\sqrt[3]{e^x} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2!3^2} + \frac{x^3}{3!3^3} + \frac{x^4}{4!3^4} + \dots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

13. a) $$\frac{1}{a-bx} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{b^k x^k}{a^{k+1}} \qquad \left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right);$$

b) $$\frac{1}{a+bx} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k b^k x^k}{a^{k+1}} \qquad \left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right)$$

14. $$(a-x)^{-\alpha} = a^{\alpha}\left[1 - \binom{\alpha}{1}\frac{x}{a} + \binom{\alpha}{2}\frac{x^2}{a^2} + \dots +\right.$$

$$\left. + (-1)^k\binom{\alpha}{k}\frac{x^k}{a^k} + \dots\right] \qquad (|x|<|a|)$$

15. $$\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 + \dots \qquad (|x|<1)$$

69. 16. $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$

$$= \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Fejtsük sorba a zárójelben levő függvényeket, és végezzük el a Cauchy szorzást!

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(\,|x| < 1)$$

17. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = C + \int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = C - \int \frac{dx}{1+x^2}\ ;$

$$C = \lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}x^{2k+1} + \dots \qquad (-1,1]$$

18. $\cos x \cdot e^{x^2} = 1 + x^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + x^4\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{4!}\right) + \dots$

$$\dots + x^{2k}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{2!(k-1)!} + \frac{1}{4!(k-2)!} - + \dots\right.$$

$$\left.\dots (-1)^m \frac{1}{(2m!)\,(k-m)!} + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\right) + \dots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

19. $\frac{\cos x}{1+x} = 1 - x + x^2\left(1 - \frac{1}{2!}\right) - x^3\left(1 - \frac{1}{2!}\right) + x^4\left(1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right) -$

$$- + \dots \quad (\,|x| < 1)$$

69. 20. $\frac{\ln(1+x)}{\cos x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{2} + \frac{29}{120}x^5 - + \dots \qquad (|x|<1)$

21. $\cos y$ Taylor-sora minden y-ra abszolut konvergens,

e^x sora minden x-re abszolut konvergens.

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + \dots (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} \pm \dots =$$

$$= 1 - \frac{e^{2x}}{2!} + \frac{e^{4x}}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{e^{2kx}}{(2k)!} \pm \dots$$

e^{kx} függvények $(k=1,2,\dots)$ Taylor-sora is abszolut konvergens, igy alkalmazhatjuk az átrendezési tételt.

$$-\frac{1}{2!}e^{2x} = -\frac{1}{2!} - \frac{2}{2!}x - \frac{2^2}{2!\,2!}x^2 - \frac{2^3}{2!\,3!}x^3 - \dots \frac{2^n}{2!\,n!}x^n \dots$$

$$\frac{1}{4!}e^{4x} = \frac{1}{4!} + \frac{4}{4!\,1!}x + \frac{4^2}{4!\,2!}x^2 + \frac{4^3}{4!\,3!}x^3 + \dots + \frac{4^n}{4!\,n!}x^4 + \dots$$

$$-\frac{1}{6!}e^{6x} = -\frac{1}{6!} - \frac{6}{6!\,1!}x - \frac{6^2}{6!\,2!}x^2 - \frac{6^3}{6!\,3!}x^3 - \dots - \frac{6^n}{6!\,n!}x^n - \dots$$

$$\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}e^{kx}}{k!} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}k}{k!}x + \dots + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}k^n}{k!\,n!}x^n + \dots$$

$(k = 2l)$

$$\cos(e^x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[x^n \quad {}_{k-1} \quad \frac{(-1)^k (2k)^n}{(2k)!\,n!}\right.$$

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} = \cos 1\right)$ miatt.

69. 22. $\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x} \dfrac{1}{1+x^2}$

$$e^{\operatorname{arctg} x} = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

$$(a_1 + 2a_2 + 3a_3 x^2 + \dots).(1+x^2) = a_o + a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

igy

$$a_1 = a_o \qquad 3a_3 + a_1 = a_2 \qquad 5a_5 + 3a_3 = a_4$$

$$2a_2 = a_1 \qquad 4a_4 + 2a_2 = a_3 \qquad 6a_6 + 4a_4 = a_5 \qquad \text{stb.}$$

igy

$$a_o = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = -\frac{7}{24}, \dots$$

$$e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7}{24} x^4 + \frac{1}{24} x^5 + \frac{29}{144} x^6 \pm \pm \dots$$

$(|x| < 1)$

23. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \qquad (a_o = 0, \; f(0) = 0 \text{ miatt})$

$$\ln(1+x) = (1+x)(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \dots = (1+x)(a_1 x + a_2 x^2 + \dots),$$

tehát $a_1 = 1 \quad a_2 = -\frac{1}{2} - a_1 = -\left(1 + \frac{1}{2}\right), \quad a_3 = \frac{1}{3} - a_2 =$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \qquad a_n = (-1)^{n-1}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right]$, igy

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right] x^n + \dots \qquad (|x| < 1)$$

70. 1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$e^x = e^{x-2+2} = e^2\, e^{x-2}$ ill. $e^x = e^{x-a+a} = e^a\, e^{x-a}$ miatt

$$e^x = e^2 \left[1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \ldots\right]$$

illetve

$$e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots\right] .$$

$\boxed{2.}$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ill.

$$\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin x = \sin(x-a+a) = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a$ miatt

$$\cos x = \cos(x-a+a) = \cos(x-a)\cos a - \sin(x-a)\sin a$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + -- ++ \ldots\right.$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} --++\ldots\right.$$

$$\sin x = \sin a + \cos a\,(x-a) - \sin a\,\frac{(x-a)^2}{2!} - \cos a\,\frac{(x-a)^3}{3!} +$$

$$+ \sin a\,\frac{(x-a)^4}{4!} + \cos a\,\frac{(x-a)^5}{5!} --++\ldots$$

70. $\boxed{2.}$ $\cos x = \cos a - \sin a\,(x-a) - \cos a\,\frac{(x-a)^2}{2!} + \sin a\,\frac{(x-a)^3}{3!} +$

$+ \cos a\,\frac{(x-a)^4}{4!} \ldots --++ \ldots$

3. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$ és

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$ miatt

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} --++ \ldots\right\}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} +--++ \ldots\right\}$$

4. $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \qquad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1\,(x-1) + \operatorname{sh} 1\,\frac{(x-1)^2}{2!} + \operatorname{ch} 1\,\frac{(x-1)^3}{3!} + \ldots$$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1\,(x-1) + \operatorname{ch} 1\,\frac{(x-1)^2}{2!} + \operatorname{sh} 1\,\frac{(x-1)^3}{3!} + \ldots$$

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} \; + \operatorname{ch} a\,(x-a) + \operatorname{sh} a\,\frac{(x-a)^2}{2!} + \operatorname{ch} a\,\frac{(x-a)^3}{3!} ++ \ldots$$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a\,(x-a) + \operatorname{ch} a\,\frac{(x-a)^2}{2!} + \operatorname{sh} a\,\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots$$

5. $\operatorname{sh}(x-a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a$

miatt

$\operatorname{ch}(x-a) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} a$

$$\operatorname{sh}(x-a) = -\operatorname{sh} a + \operatorname{ch} a x - \operatorname{sh} a\,\frac{x^2}{2!} + \operatorname{ch} a\,\frac{x^3}{3!} - \operatorname{sh} a\,\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\operatorname{ch}(x-a) = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a . x + \operatorname{ch} a\,\frac{x^2}{2!} - \operatorname{sh} a\,\frac{x^3}{3!} + \operatorname{ch} a\,\frac{x^4}{4!} -+ \ldots$$

70. 6. $\ln x = \ln (1+x-1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$

$\ln x = \ln(a+x-a) = \ln a + \ln \left[1 + \frac{x-a}{a}\right]$ miatt

$\ln x = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x-e)^3 - \frac{1}{4e^4}(x-e)^4 + - \dots$

$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-a)^3 \quad \frac{1}{4a^4}(x-a)^4 + - \dots$

7. $\ln (x+a) = \ln \left[a \left(\frac{x}{a} + 1\right)\right] = \ln a + \ln \left(\frac{x}{a} + 1\right)$ miatt

$\ln (x+a) = \ln a + \frac{1}{a} x - \frac{1}{2a^2} x^2 + \frac{1}{3a^3} x^3 - \frac{1}{4a^4} \quad + - \dots$

$\ln (x+a) = \ln(x-b+b+a) = \ln \left[(b+a)\left(\frac{x-b}{b+a} + 1\right)\right] =$

$= \ln (a+b) + \ln \left(1 + \frac{x-b}{a+b}\right)$ miatt

$\ln(x+a) = \ln(a+b) + \frac{1}{a+b}(x-b) - \frac{1}{2(a+b)^2}(x-b)^2 +$

$+ \frac{1}{3(a+b)^3}(x-a)^3 - \frac{1}{4(a+b)^4}(x-b^4) + - \dots$

71. 1. $\sum_{k=o}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ (ha $-1 < x \leq 1$), igy a függvény $x = 1$

helyen vett helyettesitési értéke adja a sorösszeget.

$$\sum_{k=o}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} = \sqrt{2}.$$

71. 2. $\sum_{k=o}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ lásd 53.1. (ha $x \in (-1,1)$),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

3. $\sum_{k=o}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \text{ch}\, x$; KT = $(-\infty, \infty)$; igy

$$\sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \text{ch}\, 1 = \frac{e^2+1}{2e}$$

4. $\sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \sin x$, KT = $(-\infty, \infty)$; igy

$$\sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \sin 1$$

5. $\sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} + \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \text{ch}\, 1 + \cos 1$

72. 1. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \dots$ $(-1 < x \leq 1)$

ha $0 < x \leq 1$, akkor az egyenlőtlenség a tagok monoton csökkenéséből és az előjelviszonyokból adódik.

2., 3., 4., 5., 6., hasonlóan 1.-hez.

7. $\sqrt{x}$ függvény a 0-körül nem fejthető sorba, igy használjuk az $x_o = 1$-körüli sorfejtését. Lásd: 65. 1.

72. 8. Az egyenlőtlenség átalakitva $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < \sin\frac{1}{n}$, mely

mely $(x = \frac{1}{n})$ helyen az $x - x^2 < x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ egyenlőtlenség miatt igaz.

73. 1. $|H(x)| = \left|a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^{k+2} + \dots\right| < |a_{k+1}| x^{k+1}$

mert a sor minden $0 < x < R$ -ben Leibniz tipusu.

2. a) $q = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot a + \varepsilon$ jó, mert van olyan ε, hogy

$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot a + \varepsilon < 1$ mivel $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot a < 1$

(gyök-kritérium miatt) és $\forall\, \varepsilon$ -hoz $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy

$n > N(\varepsilon)$ esetén $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} + \frac{\varepsilon}{a} > \sqrt[n]{|a_n|}$, tehát

$|a_n x^n| = (\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|)^n \leq (\sqrt[n]{|a_n|}\; a)^n < (\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} a + \varepsilon)^n = q^n$

b) a) szerint

$$H(x) = \sum_{n+1}^{\infty} |a_k x^k| < \sum_{n+1}^{\infty} q^k = q^{n+1} \frac{1}{1-q}$$

74. 1. a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$ a $[0,05]$ -ben

Leibniz-sor, igy $|H| = |R_4(x)| < \left|\frac{x^5}{5}\right| < \frac{(0.5)^5}{5} =$

$= 0.00625 = 6.25 \cdot 10^{-3} < 7.19^{-3}$

$\ln 1{,}5 \approx 0{,}5 - \frac{(0{,}5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{3} - \frac{(0.5)^4}{4} = 0{,}401$

74. 1. b) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + R_3(x)$; $R_3(x) = R_4(x)$ és a $[0, 0.2]$-ben

pozitiv tagu sor, így $|R_4(x)| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5\right| = \frac{\operatorname{ch} \xi}{5!} x^5$

$\xi \in [0, 0.2]$ és a ch x függvény monotonitása miatt

$$\frac{\operatorname{ch}\xi}{5!} x^5 \leq \frac{\operatorname{ch} 0.2}{120} \cdot (0.2)^5 = \frac{e^{0.2}+e^{-0.2}}{2} \cdot \frac{2^5}{10^5 . 120} < $$

$$< (3^{0.2} + 2^{-0.2}) \frac{2}{15 \, . \, 10^5} < 2{,}93 \, . \, 10^{-4} < 3.10^{-4}$$

$(\operatorname{ch} 0.2 < 1.1)$

$$\operatorname{sh} 0.2 \approx 0.2 + \frac{(0.2)^3}{3!} = 0.2001$$

c) $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + R_4(x)$, $R_4(x) = R_5(x)$

$$\frac{\sin 0.1}{0.1} \approx 0.9983342$$

d) $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + R_4(x)$

$$|R_4(x)| = |R_5(x)| = \left|\frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} + \dots\right| =$$

$$= \frac{x^6}{3!}\left[1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4.5} + \frac{x^6}{4.5.6} + \dots\right] < \frac{x^6}{3!}\left[1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2} + \frac{x^6}{4^3} + .\right] =$$

$$= \frac{x^6}{3!}\left[1 + \frac{x^2}{4} \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + \dots\right] = \frac{x^6}{6} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{x^6}{4-x^2} < \frac{2}{3} \frac{(0.8)^6}{4-(0.8)^2} \leq 2.621 \, . \, 10^{-2} \; ; \; e^{(0.8)^2} \approx 1.844$$

74. 1. e) $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + R_6(x)$

$$|R_6(x)| = 2\left|\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+..\right| < 2\left|\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{7}+\frac{x^{11}}{7}+...\right| =$$

$$= 2\,\frac{\frac{x^7}{7}}{1-x^2} \leq \frac{2}{7}\,\frac{(0.5)^7}{1-(0.5)^2} = 2.98\,.\,10^{-3}$$

$$\ln\frac{1+0.5}{1-0.5} = \ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{160}+\frac{1}{896}\right) \approx 1.098$$

2. a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$ $\qquad [0,\ a]$-ban

$$|H| < \left|\frac{x^5}{5}\right| < \frac{a^5}{5} < 7.10^{-3}$$

$$a < \sqrt[5]{35.10^{-3}} < 0.511$$

b) $|H| < \frac{\mathrm{ch}\,\xi}{5!}\,x^5 < \frac{\mathrm{ch}\,a}{120}\,a^5 < \frac{3^a+2^{-a}}{240}\,a^5 < 3.10^{-4}$ ha

$a < 0{,}29$ akkor már teljesül az egyenlőtlenség.

c) $|H| < \frac{x^6}{6!} \leq \frac{a^6}{6!} < 2.10^{-9}$, ha $a < 0.11$ már teljesül az egyenlőtlenség.

d) $|H| < \frac{2}{3}\,\frac{x^6}{4-x^2} \leq \frac{2}{3}\,\frac{a^6}{4-a^2} < 3.10^{-2}$ mely már

$a < 0.92$ -re teljesül.

e) $|H| < \frac{2}{7}\,\frac{x^7}{1-x^2} \leq \frac{2}{7}\,\frac{a^7}{1-a^2} < 3.10^{-3}$ mely már a

$a < 0.51$ -re teljesül.

74. 3. a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_k(x)$

$$|H| < \left|\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| < \frac{(0.5)^{k+1}}{k+1} < 7.10^{-3}, \quad \text{mely} \quad k \geq 4\text{-re}$$

már teljesül.

b) $$|H| < \frac{\operatorname{ch}\xi}{(2k+1)!}x^{2k+1} < \frac{\operatorname{ch} 0.2}{(2k+1)!}0.2^{2k+1} < \frac{1.1}{(2k+1)!}(0.2)^{2k+1}$$

mely $k \geq 2$-re már teljesül.

A $T_3(x)$ már jó, $T_1(x)$ nem.

c) $T_4(x)$ már jó, $T_3(x)$ nem.

d) $T_4(x)$ már jó, $T_2(x)$ nem.

e) $T_5(x)$ már jó, $T_4(x)$ nem.

75. 1. ln 3 értékét az $\ln(1+x)$ függvény sorával nem számolhatjuk, mert csak $(-1,1]$ -ben konvergens, de számolhatjuk az $\ln\frac{1+x}{1-x}$ függvény sorával, ui. $\frac{1+x}{1-x} = 3$ innen $x = 0.5$, ahol a sor konvergens.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right] + R_{2k-1}(x) \quad (-1,1)\text{-ben}$$

$$|H| = |R_{2k-1}(x)| < \left|\frac{2x^{2k+1}}{2k+1}\,\frac{1}{1-x^2}\right| = \frac{2(0.5)^{2k+1}}{2k+1}\cdot\frac{1}{1-(0.5)^2},$$

mely $k = 4$-re $< 5.10^{-4}$ igy

Tehát $\ln 3 \approx 1.098$

2. $\operatorname{sh} 0.2 \approx 1.2066$ a maradéktagot Lagrange-alakjából becsüljük.

75\. 3. $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}$ melyet az $(1+x)^{\frac{1}{3}} = \sum_{k=o}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{k} x^k$

binomiális sorból számolhatjuk, mely az $x = \frac{1}{9}$ -ben

Leibniz -tipusu $\sqrt[3]{30} \approx 3.1072$

4. $\sqrt[3]{24} = 3\sqrt[3]{1-\frac{1}{9}}$

$$\sqrt[3]{24} \approx 2.8845$$

76\. 1. $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} + \ldots$

egyenletesen konvergens tetszőleges korlátos intervallumon, ezért tagonként integrálható, így

$$\int_o^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{6 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!} + \ldots,$$

$(-\infty, \infty)$ -ben

2. $\int_o^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}$, $(-\infty, \infty)$ -ben

3. $\int_o^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $[-1, 1]$-ben

77\. 1. $\int_o^1 e^{-x^2} dx = \int_o^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} + \ldots\right) dx =$

$$= 1 - \frac{1}{3.1!} + \frac{1}{5.2!} - \frac{1}{7.3!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} + \ldots$$

77. 1. Ha ebből a sorból n -tagot veszünk, akkor az elkövetett hiba:

$$H = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(n+1)!} + \dots .$$

Mivel $|H| < \frac{1}{(2n+1)n!}$, így ha $n \geq 5$, akkor

$|H| < 0.00075 < 0.001$

(ha $n = 4$ akkor ebből a becslésből

$|H| < 0.00463 \not< 0.001$ adódik)

Tehát

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.747$$

2. $$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.605$$

3. $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx 0.507$$

4. $$\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_{0.01}^{0.1} \frac{\ln(1+n)}{u} du - \int_{0.01}^{0.1} \frac{\ln u}{u} du$$

($\frac{1}{x} = n$ helyettesítéssel)

5. $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \approx 0.119$$

6. $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \approx 0.927$$ ugyanis

77. 6. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{4k} = 1 - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{3x^8}{8} - \dfrac{5x^{12}}{8} + ..$

és mivel a sor Leibniz -tipusu, a H kisebb, mint az első elhagyott tag abszolut értéke.

78. 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\, x}{x}\, dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \ldots\right) dx =$

$$= \left[x + \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,(2k+1)!} + \ldots \right]_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{5.5!} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)\,(2k+1)!} + \ldots$$

Ha ebből a sorból k tagot veszünk, akkor az elkövetett hiba

$$H = \frac{1}{(2k+1)\,(2k+1)!} + \frac{1}{(2k+3)\,(2k+3)!} + \ldots\ldots\ldots <$$

$$\ldots < \frac{1}{2k+1}\left[\frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{(2k+3)!} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!}\left[1 + \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!}\left[1 + \frac{1}{(2k+2)^2} + \frac{1}{(2k+2)^4} + \ldots + \frac{1}{(2k+2)^{2l}} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!} \quad \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2k+2}\right)^2} < \frac{1}{(2k)!} \quad \frac{1}{(2k+1)^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)\,(2k)!\;2k}$$

(felhasználva, hogy a zárójelben levő sor egy $\left(\frac{1}{2k+2}\right)^2$ hányadosu geometriai sor.)

78. 1. Ha $k=2$ akkor $H < 0.0034 \not< 0.001$, de ha $k=3$ akkor $H < 0.000057 < 0.001$
Tehát

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx \approx 1 + \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{5.5!} = 1.0572$$

Végezhetjük a hiba becslését ugy is, hogy

$$H < \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!} \left[1 + \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)} + \dots\right] <$$

$$< \frac{1}{(2k(1)(2k+1)!} \left[1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots\dots\right] =$$

$$= \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!} \operatorname{sh} 1 = \frac{e - \frac{1}{e}}{2(2k+1)(2k+1)!} < \frac{3 - \frac{1}{3}}{2(2k+1)(2k+1)!} =$$

$$= \frac{4}{3(2k+1)(2k+1)!} .$$

Itt $k=3$ -ra már $H < 0.000035 < 0.001$ de $k=2$-re még csak 0.0025, igy e becsléssel is három tagot kell összeadni.

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} \approx 0.337$$

3. $$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.461$$

78. 3. $H = \frac{1}{(2k+1)k!} + \frac{1}{(2k+3)(k+1)!} + \ldots <$

$$< \frac{1}{(2k+1)k!} \left[1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(2k+1)k!} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\right] = \frac{e}{(2k+1)k!} < \frac{3}{(2k+1)k!}$$

$k=5$ esetén már $H < 0.001$

4. $$\int_0^{0.1} \ln(9 + x^2)dx = \int_0^{0.1} \ln\left[9(1 + (\frac{x}{3})^2\right] dx =$$

$$= \int_0^{0.1} \ln 9\, dx + \int_0^{0.1} \ln(1 + (\frac{x}{3})^2)\, dx = 0.1 \ln 9 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \int_0^{0.1} \left[(\frac{x}{3})^2\right]^{k+1} dx = 0.1 \ln 9 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left[\frac{x^{2k+3}}{3^{2k+2}(2k+3)}\right]_0^{0.1} \approx 0.1 \ln 9 + \frac{1}{30^3}$$

79. Mivel a Fourier sorfejtés egyértelmü a függvények pedig Fourier polinomok

1. $\sin x = \sin x$
   $a_o = 0$, $a_k = 0$ minden k-ra, $b_1 = 1$, $b_k = 0$ minden $k \neq 1$ -re

2. $\cos 2x = \cos 2x$
   $a_o = 0$, $a_2 = 1$, $a_k = 0$ minden $k \neq 2$ -re,
   $b_k = 0$ minden k-ra

3. $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$a_o = \frac{1}{2}$, $a_k = 0$ minden $k \neq 2$-re, $b_k = 0$ minden k-ra.

4. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$a_o = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_k = 0$ minden $k \neq 2$ -re

$b_k = 0$ minden k-ra.

80.

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$f(x+2\pi) = f(x)$ minden x -re

$a_o = 0$, $a_n = 0$ minden n -re

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin nxdx\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \frac{1}{7^2}\sin 7x + \dots\right]$$

81. 1. f(x) az alapintervallumán páratlan függvény, igy

$a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nxdx = \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \qquad n = 1,2, \ldots$$

($f(x)$ és $f'(x)$ szakaszonként folytonos, igy Fourier-sora konvergens és előállitja a függvényt a folytonossági helyein.)

81. $f(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x +- \ldots$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$$

A Fourier-sor nem konvergálhat egyenletesen, mert tagjai folytonosak, összegfüggvénye pedig nem folytonos függvény.

$\boxed{2.}$ $f(x)$ alapintervallumán páros, igy $b_n = 0$ $(n = 1,2 \ldots)$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\frac{\sin nx}{n}dx = 0 - \frac{4}{n}\left\{\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\pi(-1)^n = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$f(x)$, $f'(x)$ szakaszonként folytonos az alapintervallumon, igy

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - + \ldots\right)$$

$x = 0$ helyen

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots\right) \text{ igy}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$x = \pi$ helyen vizsgálva és rendezve

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{adódik.}$$

Az 1-ben szereplő Fourier-sor tagonkénti integrálásával is megkaphatjuk, az eljárás azonban nem jogos, mert az 1-ben szereplő sor nem egyenletesen konvergens.

81. $\boxed{3.}$ $b_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}x + 1\right)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{2}{\pi}x + 1\right)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{2}{\pi}x + 1\right)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{2}{\pi}x + 1\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin nx}{n}\,dx =$$

$$= 0 + \left[-\left(\frac{2}{\pi n}\right)^n \cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^2\left(1 - \cos n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{2}{\pi}x + 1\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}x^2 + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\cos x + \frac{2}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots\right)$$

4. $a_n = 0 \quad (n = 0, 1 \ldots)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\sin nxdx$$

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}, \quad b_3 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) \ldots$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right)\sin 2x + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right)\sin 3x + \ldots$$

5. $a_o = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \frac{1}{n}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)x}{2k+1} + \ldots\right)$$

$x = \frac{\pi}{2}$ -ben

81. $$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

6. A félperiódus $\ell = 2\pi$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\sin\frac{\pi}{\ell}\,nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\,\sin\frac{n}{2}\,xdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin\frac{n}{2}\,x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos\frac{n}{2}x}{\frac{n}{2}}\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n = 2k \\ \dfrac{4}{(2n+1)\pi} & \text{ha } n = 2k+1 \quad k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} x}{2k+1}$$

7. $\ell = 2$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \left[\frac{2}{\pi} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \right] \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{\pi^2} \cos \frac{2\pi x}{2} -$$

$$- \left[\frac{2}{3}\pi + \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 \right] \cos \frac{3\pi x}{2} + \ldots$$

8. a) $\alpha \in N$ esetén $\sin \alpha x$ Fourier - plinom, igy Founer-sora önmaga.

b) $\alpha \notin N$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \alpha x \, dx = \frac{2}{\alpha} \sin^2 \pi\alpha$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \alpha x \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha + n)x + \sin(\alpha - n)x \quad dx =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \sin^2 \pi\alpha$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \alpha x \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(\alpha - n)x - \cos(\alpha + n)x) \, dx =$$

$$= \frac{n}{\alpha^2 - n^2} \sin 2\pi\alpha$$

82\. 1. a) Legyen az alapintervallum a $[-\pi, \pi]$, és ezen a függvény páros, valamint a periódusa legyen 2π, azaz

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

$f(x+2\pi) = f(x)$ minden x-re, ekkor

$a_0 = 0$, $b_n = 0$ minden n-re,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right).$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{\pi}\,\frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{4}{\pi}\,\frac{\cos 5x}{5^2} + \dots$$

b) Legyen az alapintervallum $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$f(x+2\pi) = f(x)$ minden x-re, akkor

$$a_0 = 0\ ;\quad a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right);\ b_n = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\cos x + \sin 2x + \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos 3x}{3^2} + \dots +$$

c) az a)-beli sorfejtést használva, $x = 0$ helyen

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) \quad \text{azaz}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

82. 3. a) Legyen

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -1\le x<1 \\ f(x+2)=f(x) & \text{minden } x\text{-re} \end{cases}$$

ekkor; $a_o = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}$,

$$a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos n\,x\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{2x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x\right]_o^1 =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{4}{2^2\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{4}{3^2\pi^2}\cos 3\pi x + \dots$$

b) Legyen

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ -x^2 & -1\le x<0 \end{cases}$$

$f(x+2)=f(x)$ minden x-re, $\ell=1$

$a_o = 0$; $a_n = 0$, $n\in N$ -re

$$b_n = 2\int_0^1 x^2 \sin n\pi x\,dx = -2\left[\frac{-x^2}{n}\cos n\pi x + \frac{2x}{n^2\pi^2}\sin n\pi x + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi x\right]_o^1 = 2\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + 2\,\frac{(-1)^n-1}{n^3\pi^3}\right]$$

$$f(x) = 2\left[\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}\right]\sin\pi x + \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x + 2\left[\frac{1}{3\pi} - \frac{4}{3^3\pi^3}\right]\cdot$$

$\cdot \sin 3\pi x + \dots$

A példatárban szereplő nevezetesebb sorösszegek.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$ (lásd 59. 2. a.,)

2) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ (lásd 85. 5. b.)

3) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \frac{\ln 2}{2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (lásd 81. 2. c.,)

5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ (lásd 82. 1. c.,)

6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{24}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ (lásd 81. 2. c.,)

8) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{48}$

TARTALOMJEGYZÉK