

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Császár Ákosné

VALÓS EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA



Műegyetemi Kiadó, 2001.

(Tizedik utánnymás)

Azonosító: **051316**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 10,9 (A/5) ív

Nyomta és kötötte:

Műegyetemi Nyomda

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: **0104/01**

I. A HATÁROZOTT (RIEMANN-) INTEGRÁL

1. A határozott integrálra vezető néhány feladat

Az integrál fogalmának előkészítésére tekintsünk néhány fizikai (műszaki) és geometriai feladatot, melyeknek pontos megoldása - mint látni fogjuk - egy-egy integrál kiszámításához vezet.

1.1. Változó intenzitású $i(t)$ áram tölt fel egy kondenzátort. Meg szeretnénk határozni a $(0, T)$ időintervallum alatt szállított q töltésmennyiséget.

Ha $i(t) = c$ (c állandó), a kérdéses töltésmennyiség értéke cT lenne. Változó $i(t)$ áram esetén ugy járhatunk el, hogy belktatunk egy árammérőt, arról leolvassuk egy $\tau \in (0, T)$ pillanatban $i(t)$ értékét és $i(\tau)$ -val, vagyis az áram egy $(0, T)$ időintervallumbeli közbenső pillanatbeli értékével, mint $(0, T)$ -beli állandó értékkel számolva az $i(\tau)T$ szorzatot tekintjük a q töltésmennyiség közelítő értékének.

Változó $i(t)$ áram esetén azonban várhatóan jobb közelítést kapunk, ha a $(0, T)$ időintervallumot kis $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, n$, $t_0 = 0$, $t_n = T$) rész-időintervallumokra osztva fel, ezek mindegyikében az előbb vázolt közelítéssel élünk. Ha ugyanis az i -edik rész-időintervallumban egy $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ pillanatbeli $i(\tau_i)$ -vel mint $[t_{i-1}, t_i]$ -beli állandó értékkel számolunk, az i -edik rész-időintervallumban szállított töltésmennyiség közelítő értéke $i(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$, ezeket a közelítő értékeket pedig minden szóba jövő i -re összegezve a

$$\sum_i i(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

összeg a feladatnak az előbbinél várhatóan jobb közelítő megoldását adja.

1.2. Egy gépjármű sebessége változó. Meg szeretnénk határozni, hogy adott T idő alatt mennyi utat tett meg.

Ha a gépjármű sebessége állandó volna ($v \equiv c$), az ut mérőszámát cT szolgáltatná.

Változó $v(t)$ sebesség esetén az $I = (t_0, t_0 + T)$ időintervallumban egy τ időpontban ($\tau \in (t_0, t_0 + T)$) a sebességmérőn leolvasott $v(\tau)$ értékkel mint I -beli állandó sebességgel számolva, $v(\tau)T$ az ut mérőszámának közelítése. Várhatóan jobb közelítést kapunk, ha I -t a

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = t_0 + T,$$

osztópontokkal kis időintervallumokra osztjuk fel, és ezekbe eső $\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_n$ ($\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$) pillanatokban leolvasott $v(\tau_i)$ sebességértékkel mint $[t_{i-1}, t_i]$ -beli állandó értékkel számolva, a

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n v(\tau_i) (t_i - t_{i-1})$$

összeggel közelítjük meg az ut mérőszámát.

Ha meg akarjuk becsülni e közelítés "jóságát", ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, hogy a kiszámítandó értéket (pl. a fenti példánál az ut mérőszámát) alulról is, felülről is közelítjük I -nek fenti részintervallumokra történő felosztása mellett. Akár az alsó, akár a felső, akár a $(*)$ közelítés hibája biztosan kisebb lesz a felső és alsó közelítés különbségénél.

1.3. Tegyük fel, hogy egy gépjármű álló helyzetből T_1 idő alatt felgyorsul 60 km/h sebességre, ezzel halad tovább T_2 ideig, majd további T_3 idő alatt lefékez és megáll. Szeretnénk a gépjármű által megtett utat alulról is, felülről is lehetőleg jól megbecsülni, az ut mérőszámát közelítően meghatározni.

Legyen

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t), & \text{ha } 0 \leq t \leq T_1, \\ 60, & \text{ha } T_1 \leq t \leq T_1 + T_2, \\ v_2(t), & \text{ha } T_1 + T_2 \leq t \leq T_1 + T_2 + T_3 \end{cases}$$

és

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = T_1,$$

$$T_1 + T_2 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{i-1} < t'_i < \dots < t'_n = T_1 + T_2 + T_3$$

az első, ill. harmadik időintervallum egy felosztása.

Nyilván

$$s_n = \sum_{i=1}^n v_1(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + 60 T_2 + \sum_{i=1}^n v_2(t'_i - t'_{i-1}) < s <$$

$$< \sum_{i=1}^n v_1(t_i)(t_i - t_{i-1}) + 60 T_2 + \sum_{i=1}^n v_2(t'_{i-1}) = S_n,$$

hiszen $[0, T_1]$ -ben minden részintervallum kezdőpontjában a legkisebb, végpontjában a legnagyobb $v_1(t)$ értéke, $[T_1 + T_2, T_1 + T_2 + T_3]$ -ban pedig épp fordítva, a részintervallumok végpontjában a legkisebb, kezdőpontjában a legnagyobb $v_2(t)$ értéke. Akár s_n -nel, akár S_n -nel közelítve s értékét, a hiba biztosan kisebb $S_n - s_n$ értékénél.

1.4. Meg szeretnénk becsülni, vagy pontosan meghatározni azt a munkát, amit akkor végzünk, ha egy H hosszúságú rugót h hosszúsággal megnyújtott állapotba húzunk ki. (Ha x nem nagy, akkor ahhoz, hogy a rugót x hosszúsággal megnyújtva tartsuk, az x megnyúlással arányos $P = ax$ ($a > 0$) nagyságú erő szükséges.)

Képzeljük el a rugónak adott h megnyúlást n egyenlő nagyságú megnyúlásból összetéve. Minden egyes $\frac{h}{n}$ nagyságú megnyúlásnál a működő erő legkisebb, ill. legnagyobb értéke a megnyúlás előtti, ill. a megnyúlás utáni erő érték, tehát az i -edik megnyúlásnál a $(i-1) \frac{h}{n}$ ill. $ai \frac{h}{n}$. Az i -edik megnyúlásnál végzett munka tehát

$$a(i-1) \frac{h}{n} \cdot \frac{h}{n} \quad \text{és} \quad ai \frac{h}{n} \cdot \frac{h}{n}$$

közé esik. Az egész L munkára tehát - hasonlóan az 1.3. feladathoz - a következő alsó ill. felső becslés adható

$$0 + a \frac{h^2}{n} + \dots + a(n-1) \frac{h^2}{n} < L < a \frac{h^2}{n} + \dots + an \frac{h^2}{n}$$

azaz

$$a \frac{h^2}{n} (1 + \dots + (n-1)) < L < a \frac{h^2}{n} (1 + \dots + n),$$

illetve a számtani sorozat összegezési képletét alkalmazva

$$a \frac{h^2}{n} \frac{n(n-1)}{2} < L < a \frac{h^2}{n} \frac{n(n+1)}{2}.$$

A két korlát különbsége $a \frac{h^2}{n}$, ez annál kisebb, mennél nagyobb n , azaz

mennél több egyenlő részre osztottuk a $(0, h)$ intervallumot. Ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$a \frac{h^2}{n} \frac{n(n-1)}{2} = a \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow a \frac{h^2}{2},$$

$$a \frac{h^2}{n} \frac{n(n+1)}{2} = a \frac{h^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow a \frac{h^2}{2},$$

a két korlát közé szorított L tehát ugyancsak $a \frac{h^2}{2}$ -vel kell, hogy egyenlő legyen, a rugó h hosszúsággal történő megnyújtásánál végzett munka mérőszáma tehát

$$L = a \frac{h^2}{2}.$$

1.5. A téglalap területe az elemi geometriából ismert. Görbevonalakkal határolt síkidom területének meghatározásánál speciálisan a kör esetében úgy jártunk el, hogy beírt ill. köréírt szabályos sokszögek területe közé szorítottuk a kör területét. A beírt szabályos sokszögek területének felső határa $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, ahol t_n jelöli a körbe beírt szabályos n -szög

$n \rightarrow \infty$

területét) megegyezett a köréírt szabályos sokszögek T_n területének alsó határával ($\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ -nel), ez a közös érték adta meg a kör területét.

Hasonló megfontolásokkal élünk a folytonos $y = f(x)$ görbe és az $x = a$, $x = b$, $y = 0$ egyenletű egyenesek által határolt

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

idom területének (az f görbe alatti terület $[a, b]$ -ben) meghatározásánál.

1.6. Számítsuk ki annak az idomnak a területét, melyet az $y = x^2$ egyenletű parabola, az $x = a$, $x = b$, és $y = 0$ egyenletű egyenesek határolnak ($a < b$).

A keresett terület mérőszámát két korlát közé szorítjuk. Most az $[a, b]$ intervallumot az $aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n = b$ osztópontokkal lesz célszerű^{*} felosztanunk:

$$a = x_0 < aq = x_1 < \dots < aq^{i-1} = x_{i-1} < aq^i = x_i < \dots < aq^n = b.$$

Az így keletkező intervallumok fölé emeljük olyan téglalapokat, melyeknek magassága a parabolának a kérdéses intervallumbeli legkisebb ordinátája. Ezek a téglalapok a vizsgált idomban benne fekszenek, tehát területük összege legfeljebb a keresett T területtel egyenlő. Mivel az i -edik téglalap alapja $aq^{i-1} - aq^{i-2}$, magassága $(aq^{i-1})^2$, T -nek alábbi alsó becslésére jutottunk:

$$s_n = \sum_{i=1}^n (aq^{i-1})^2 (aq^i - aq^{i-1}) = a^3 (q-1) \sum_{i=1}^n q^{3i-3} < T.$$

Ha a feladatunkban az egyes intervallumok fölé most olyan téglalapokat emelünk, melyeknek magassága a parabola kérdéses intervallumbeli legnagyobb ordinátája, akkor ezek a téglalapok befedik a vizsgált idomot, tehát területük összege legalább T -vel egyenlő. T -re tehát a következő felső becslést kaptuk:

^{*} Azért célszerű ez a felosztás, mert így az alsó és felső becslést szolgáltató összegeket könnyű jól kezelhető (zárt) alakban előállítani. Egyenletes (egyenlőközű) felosztásnál a megfelelő közelítések elvégzését feladatként tűzzük ki.

$$S_n = \sum_{i=1}^n (aq)^{i-2} (aq^i - aq^{i-1}) = a^3 (q-1) q^2 \sum_{i=1}^n q^{3i-3} > T.$$

Felhasználva a geometriai sor ismert összegezési képletét

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q^{3i-3} &= 1 + q^3 + \dots + q^{3n-3} = \\ &= \frac{q^{3n}-1}{q^3-1} \end{aligned}$$

adódik, vagyis T-re az

$$a^3 (q-1) \frac{q^{3n}-1}{q^3-1} < T < a^3 (q-1) q^2 \frac{q^{3n}-1}{q^3-1}$$

illetve az $aq^n = b$ egyenlőség figyelembevételével a

$$\frac{b^3 - a^3}{q^2 + q + 1} < T < q^2 \frac{b^3 - a^3}{q^2 + q + 1}$$

becslést kaptuk. (Nyilván $a \neq b$, tehát $q \neq 1$, és így $(q-1)$ -gyel egyszerűsíthetünk.) T két korlátjának különbsége

$$(q^2 - 1) \frac{b^3 - a^3}{q^2 + q + 1},$$

ennek nagyságával becsülhetjük közelítésünk "jóságát". Az i -edik felosztási részintervallum hosszúsága

$$x_i - x_{i-1} = aq^i - aq^{i-1} = (q-1) aq^{i-1} < (q-1) b$$

és ez a becslés minden szóbaeső i -re (minden felosztási részintervallumra) jó, ha tehát $n \rightarrow \infty$, amikor is $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ folytán $q \rightarrow 1$, akkor ugy

sűrítjük $[a, b]$ felosztását, hogy közben mindenyik felosztási részintervallum hosszúsága 0-hoz tart. Ugyancsak 0-hoz tart $q \rightarrow 1$ esetén T két korlátjának különbsége, ekkor tehát a T értékét alulról becsülő s_n és felülről becsülő S_n összegek egyre kisebb hibával közelítik meg a terület mérőszámát.

Mivel pedig T mindig a megfelelő s_n és S_n közé esik, és

$$\lim_{q \rightarrow 1} s_n = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{b^3 - a^3}{q^2 + q + 1} = \frac{b^3 - a^3}{3},$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_n = \lim_{q \rightarrow 1} q^2 \cdot s_n = 1 \cdot \frac{b^3 - a^3}{3}$$

a keresett terület mérőszáma csak $\frac{b^3 - a^3}{3}$ lehet:

$$T = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

1.7. Bevezető példáink közös matematikai lényegét így foglalhatjuk össze: megadtunk valamely I intervallumon egy f függvényt. I -t részintervallumokra osztottuk fel, és képeztünk olyan összegeket, melyeknek tagjaiban I egyes részintervallumainak hosszúságát az azokban fekvő valamilyen közbülső pontbeli függvényértékkel szoroztuk. Minél kisebb részintervallumokra osztottuk fel I -t, várhatóan annál jobb közelítésnek voltak tekinthetők a megfelelő összegek.

A közelítés jóságát úgy tudtuk becsülni, hogy - mint ahogy azt az 1.3, 1.4, 1.6. példában tettük - a közelítő összeg tagjaiban az egyes részintervallumokban felvett legkisebb ill. legnagyobb függvényértékkel szoroztuk meg a részintervallum hosszúságának mérőszámát. Az 1.4. és 1.6. példában az így felírt összegek közös határértékhez tartottak, ha az I intervallumot egyre kisebb részekre osztottuk fel, a közéjük eső meghatározandó érték (a rugó munkájának, ill. a görbe alatti területnek mérőszáma) is e közös határértékkel kellett, hogy megegyezzen.

Általában azokat az f függvényeket, melyekre ez teljesül, (Riemann-) integrálható függvényeknek mondjuk, magát a határértéket pedig f I -re vonatkozó határozott (Riemann-) integráljának nevezzük. E fogalmakat kívánjuk a továbbiakban pontosan értelmezni, majd a további alkalmazások érdekében az integrál fontosabb tulajdonságait foglaljuk össze.

1.8. Feladat.

1. Becsüljük meg az $y = x^2$ egyenletű parabola, az $x = 0$, $x = b$, és $y = 0$ egyenletű egyenesek által határolt idom területének mérőszámát $[0, b]$ egyenletes felosztása mellett. Meg lehet-e ezen az úton is határozni az idom területének mérőszámát?

(A számolás egyszerűsítése érdekében vizsgáljuk most az 1.6. -beli idomot $a = 0$ esetében.)

2. A határozott (Riemann-) integrál definíciója. Integrálható függvények főbb osztályai

2.1. Tegyük fel, hogy az alábbiakban az $I = [a, b]$ intervallumon megadott f függvény ott korlátos.

2.2. Állapodjunk meg a következő jelölésekben:

a) $[a, b]$ -nek egy F felosztása az $\{x_0, \dots, x_n\}$ ponthalmaz, ahol

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

F részintervallumai az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok $(i = 1, 2, \dots, n)$.

b) F felosztási részintervallumainak hosszúsága

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

c) F részintervallumaiban (azok belsejében vagy határán) felvett helyek (reprezentáns pontoknak is nevezik őket)

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n \text{ ahol tehát } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i=1, \dots, n).$$

d) F egyes részintervallumaiban az ott felvett függvényértékek halmazának alsó, ill. felső határa

$$m_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \},$$

ill.

$$M_i = \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}.$$

(Mivel f I -ben korlátos, a nem üres $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ halmaznak "A valószínűs egyváltozós függvények differenciálszámítása" jegyzet I.5.12. tétele értelmében kell, hogy alsó, ill. felső határa létezzen.

A m_i ill. M_i értékeket persze nem kell, hogy f felvegye x_{i-1}, x_i -ben!

$$\left\| \begin{array}{l} \text{e) } f \text{ ingadozása (oszcillációja) } F \text{ felosztási részintervallumaiban} \\ 0_i = M_i - m_i = \sup\{|f(\xi_i) - f(\eta_i)| : \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]\} . \end{array} \right.$$

(A $M_i - m_i = \sup\{|f(\xi_i) - f(\eta_i)| : \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$ összefüggés bizonyítását feladatként tűzzük ki.)

2.3. A következő fogalmakat értelmezzük és ezekre a következő jelöléseket vezetjük be:

a) Az f függvény F felosztáshoz tartozó alsó összege (2.2 jelöléseivel)

$$s(f, F) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i .$$

b) Az f függvény F felosztáshoz tartozó felső összege (2.2 jelöléseivel)

$$S(f, F) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i .$$

c) Az f függvény F felosztáshoz tartozó oszcillációs összege (2.2. jelöléseivel)

$$\Omega(f, F) = \sum_{i=1}^n 0_i \Delta x_i .$$

d) Az f függvény F felosztáshoz és a ξ_i ($i = 1, \dots, n$) reprezentáns pontokhoz tartozó integrálközelítő összege (2.2. jelöléseivel)

$$\sigma(f, F, \equiv) \sigma(f, F, \{\xi_1, \dots, \xi_n\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

(Egy F felosztáshoz, attól függően, hogy hol vesszük fel a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontokat, végtelen sok integrálközelítő összeg tartozik.)

e) Az F felosztás δ finomsága, ha minden felosztási részintervallum legfeljebb δ hosszúsága, azaz

$$\max \Delta x_i \leq \delta.$$

f) Az F_1 felosztás F -nek finomítása, ha F -ből újabb osztópontok hozzávételével (a régi osztópontok meghagyása mellett) áll elő.

g) Az F_1 és F_2 felosztás egyesítése, az $F_1 \cup F_2$ felosztás, az F_1 és F_2 osztópontjainak egyesítésével előálló felosztása I -nek.

h) I felosztásainak egy (F_n) sorozata minden határon túl finomodó, ha tetszőleges δ -ra F_n δ -finomsága, amennyiben $n > N(\delta)$.

2.4. Legyen f korlátos az $I = [a, b]$ intervallumban, és képezzük I minden lehetséges F felosztását, majd ezekhez a felosztásokhoz f felső ill. alsó összegét. Ezeknek halmaza korlátos, nem üres, kell tehát, hogy alsó, ill. felső határuk létezzen. Vezessük be tehát a következő jelöléseket:

$$h = \sup \{ s(f, F) \},$$

$$H = \inf \{ S(f, F) \}$$

(ahol pl. $\{ s(f, F) \}$ -vel I összes lehetséges felosztásához tartozó alsó összegeinek halmazát jelöltük).

2.5. Definíció. f Riemann-integrálható (röviden integrálható) I -n, ha a fenti jelöléssel

$$h = H.$$

A Riemann-integrálható (a továbbiakban röviden integrálható) függvények osztályát $\mathcal{R}$ -rel jelölve a 2.5. Definíció így írható:

$$f \in \mathcal{R} \iff \sup \{ s(f, F) \} = \inf \{ S(f, F) \}$$

2.6. Definíció. f Riemann-integrálja (határozott integrálja, röviden integrálja) I -n $([a, b]$ -ben) a megegyező $h = H$ érték.

A határozott integrál jelölésére a következő jelet vezetjük be (a jelölés emlékeztet a közelítő összegek jelölésére)

$$R = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

Az f függvényt integrálandó függvénynek, vagy röviden integrandus-nak nevezik. x az integrációs változó, jelölésére - a függvény független változójának jelöléséhez hasonlóan - bármilyen más betű használható, vagyis

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(u) \, du = \dots,$$

és a és b az integrál határai (alsó, ill. felső határ).

2.7. Definíció. Az f függvény I különböző felosztásaihoz tartozó felső összegeinek alsó határát (H) ill. alsó összegeinek felső határát (h) szokás Darboux-féle felső ill. alsó integrálnak is nevezni.

Be fogjuk látni, hogy pl. az $[a, b]$ -ben folytonos, vagy ott korlátos és monoton függvények integrálhatók (2.17., 2.19.). Annak érdekében, hogy ezt bizonyíthassuk, és egyébként is lehetőleg jól kezelhető feltételeket adhassunk meg függvények integrálhatóságának vizsgálatára, nézzük meg először, mi mondható az f függvénynek I különböző F felosztásaihoz tartozó alsó, felső és oszcillációs összegeiről.

2.8. Segédétel. Ha F_1 az I intervallum F felosztásának finomítása (2.3.f) akkor

$$s(f, F_1) \geq s(f, F), \quad S(f, F_1) \leq S(f, F), \quad \Omega(f, F_1) \leq \Omega(f, F).$$

Bizonyítás. Elég az első állítást bizonyítanunk, hiszen a második bizonyítása hasonló okoskodással történik, míg a harmadik állítás az első kettőből következik ($\Omega = S - s$).

Tegyük fel először, hogy F_1 és F felosztásból egyetlen új $x'_1 \in (x_{i-1}, x_i)$ osztópont hozzávételével állt elő. Legyen

$$m'_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x'_i] \},$$

$$m''_i = \inf \{ f(x) : x \in [x'_i, x_i] \},$$

$$m_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}.$$

$$\text{Mivel } [x_{i-1}, x'_i] \subset [x_{i-1}, x_i], [x'_i, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i],$$

s így

$$\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x'_i]\} \subset \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$\{f(x) : x \in [x'_i, x_i]\} \subset \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

azért

$$m'_i \geq m_i, \quad m''_i \geq m_i,$$

tehát

$$\begin{aligned} s(f, F_1) &= \sum_{k=1}^{i-1} m_k (x_k - x_{k-1}) + m'_i (x'_i - x_{i-1}) + m''_i (x_i - x'_i) + \\ &+ \sum_{k=i+1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{i-1} m_k (x_k - x_{k-1}) + m_i (x'_i - x_{i-1}) + \\ &+ m_i (x_i - x'_i) + \sum_{k=i+1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{i-1} m_k (x_k - x_{k-1}) + \\ &+ m_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{k=i+1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = s(f, F). \end{aligned}$$

Ha az F_1 felosztás m ponttal tartalmaz többet, mint F , akkor m -szer ismételve meg az előbbi okoskodást igazolhatjuk állításunkat. *

2.9. Tétel. Az I -ben korlátos f függvény I különböző felosztásaihoz tartozó alsó összegeinek felső határa nem lehet nagyobb a felső összegek alsó határánál:

$$h = \sup \{ s(f, F) \} \leq \inf \{ S(f, F) \} = H.$$

Bizonyítás. Első lépésként lássuk be, hogy tetszőleges F_1 felosztáshoz tartozó alsó összeg nem lehet nagyobb valamely más F_2 felosztáshoz tartozó felső összegnél (ha F_1 és F_2 megegyezik, akkor triviális az $s(f, F_1) \leq S(f, F_2)$ egyenlőtlenség).

Jelöljük ugyanis F_3 -mal az F_1 és F_2 felosztás egyesítését ($F_3 = F_1 \cup F_2$). F_3 F_1 -nek is, F_2 -nek is finomítása, tehát a 2.8. segédétel értelmében

$$s(f, F_1) \leq s(f, F_3) \leq S(f, F_3) \leq S(f, F_2),$$

azaz

$$s(f, F_1) \leq S(f, F_2).$$

amint azt állítottuk. Ha azonban ez igaz, akkor rögzített F_2 mellett az alsó összegek felső határára is fenn kell, hogy álljon (hiszen minden alsó összegre fennáll)

$$h = \sup \{ s(f, F) \} \leq S(f, F_2),$$

míg az utóbbi egyenlőtlenségből az összes felső összegek alsó határára is érvényes kell, hogy legyen

$$h \leq \inf \{ S(f, F) \} = H,$$

amit bizonyítanunk kellett. ✱

A 2.9. Tétel segítségével bizonyíthatjuk az integrálhatóság vizsgálatára szempontjából jól használható alábbi tételt:

2.10. Tétel. f akkor és csak akkor integrálható az I intervallumon, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan felosztás, melyre

$$\Omega = S - s < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A feltétel elégséges. Ha ugyanis F olyan felosztása I -nek, melyre

$$\Omega(f, F) = S(f, F) - s(f, F) < \varepsilon,$$

akkor, mivel minden felosztásra - így F -re is -

$$s(f, F) \leq h \leq H \leq S(f, F)$$

(felhasználtuk a 2.9. tételt),

$$0 \leq H - h \leq S(f, F) - s(f, F) < \varepsilon$$

adódik, amiből - ha minden $\varepsilon > 0$ -ra van olyan felosztás, melyre $\Omega < \varepsilon$ teljesül -

$$H - h = 0, \text{ ill. } h = H, \text{ vagyis } f \in \mathcal{R}$$

következik (2.6. definíció).

A feltétel szükséges. Ha ugyanis $f \in \mathcal{R}$, legyen $\varepsilon > 0$ adott, kell, hogy legyen olyan F_1 és F_2 felosztás, melyre

$$S(f, F_2) - R < \frac{\varepsilon}{2},$$

és

$$F - s(f, F_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

($R = h = H$). Jelöljük F_3 -mal az F_1 és F_2 felosztás egyesítését. Mivel ez F_1 -nek is, F_2 -nek is finomítása, adódik:

$$S(f, F_3) \leq S(f, F_2) < R + \frac{\varepsilon}{2} < (s(f, F_1) + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, F_3) + \varepsilon,$$

azaz a F_3 felosztásra

$$\Omega(f, F_3) = S(f, F_3) - s(f, F_3) < \varepsilon,$$

a tétel állítása teljesül.*

A fenti tétel alkalmazása előtt említsük meg néhány fontos következményét:

2.11. Tétel. Tetszőleges f függvényre legfeljebb egy olyan R szám van, amelyhez tetszőleges közel van alkalmas F felosztáshoz tartozó alsó ill. felső összeg. f akkor és csak akkor integrálható a vizsgált intervallumon, ha van ilyen R szám, és akkor R az integrál értéke.*

A 2.11. tétel állítása másképp így fogalmazható meg:

2.12. Tétel. Jelöljük az f függvénynek I F_n felosztásához tartozó alsó ill. felső összegét s_n -nek ill. S_n -nel. f akkor és csak akkor integrálható I -n, (és integrálja ott R), ha van olyan (F_n) felosztássorozat, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = R. *$$

2.13. Tétel. Ha $\Omega < \varepsilon$ adott $\varepsilon > 0$ -ra egy F felosztásra teljesül, akkor ugyanezen $\varepsilon > 0$ mellett F minden F_1 finomítására is

$$\Omega(f, F_1) < \varepsilon.$$

A tétel állítása a 2.8. Segédteletből közvetlenül adódik. *

2.14. Tétel. Ha F I -nek egy felosztása az

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

osztópontokkal, és erre a felosztásra adott $\varepsilon > 0$ mellett $\Omega(f, F) < \varepsilon$, akkor tetszőleges $[x_{i-1}, x_i]$ -be eső ξ_i és η_i pontokra

$$\sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i < \varepsilon$$

Bizonyítás. 2.2. e) értelmében

$$0_i = M_i - m_i \geq |f(\xi_i) - f(\eta_i)|,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i \leq S(f, F) - s(f, F) = \Omega(f, F) < \varepsilon,$$

és ezt kellett bizonyítanunk. *

2.15. Tétel. Ha f $[a, b]$ -ben integrálható, és egy F felosztásra $\Omega(f, F) < \varepsilon$, ezen F felosztás részintervallumaiban felvett reprezentáns pontokat (mint 2.14-ben) $\xi_1, \dots, \xi_n$ -nel jelöljük ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$), akkor bárhogyan is választjuk F -nél a ξ_i helyeket

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Nyilván

$$s(f, F) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq S(f, F)$$

és

$$s(f, F) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, F),$$

amiből az állítás következik. *

A 2.15. Tétel tulajdonképpen azt fejezi ki, hogy ha f $[a, b]$ -ben integrálható, akkor van $[a, b]$ -nek olyan felosztása, hogy az ahhoz tartozó minden integrálközelítő összeg (2.3.d) előírt pontossággal megközelíti f $[a, b]$ -n vett integrálját. Eredményünket kicsit kiegészítve a következő tételt mondhatjuk ki:

2.16. Tétel. f akkor és csak akkor integrálható $[a, b]$ -ben, és integrálja R , ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan F felosztása $[a, b]$ -nek, amelyhez tartozó tetszőleges σ integrálközelítő összegre

$$|\sigma - R| < \varepsilon$$

Bizonyítás. Azt, hogy a tétel állítása szükséges, a 2.15. tétellel bizonyítottuk.

Az elégségség bizonyításához azt kell csak igazolnunk, hogy $s(f, F)$ nem más, mint az F felosztáshoz tartozó összes integrálközelítő összeg alsó, $S(f, F)$ pedig felső határa. E tényből ugyanis következik, hogy ha minden F -hez tartozó integrálközelítő összeg beleesik $R \pm \varepsilon$ sugaru környezetébe, akkor ezek alsó és felső határa is bele kell hogy essen $R \pm 2\varepsilon$ sugaru, vagyis tetszőlegesen kicsiny sugaru környezetébe, amiből következik, hogy

$$S(f, F) - s(f, F) < 4\epsilon$$

és ez 2.10. tétel értelmében épp azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{R}$
Igazoljuk tehát, hogy

$$s(f, F) = \inf \left\{ \sigma(f, F, \{ \xi_1, \dots, \xi_n \}) \right\},$$

ahol az adott F felosztás mellett az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumba eső ξ_i értékek minden intervallumbeli értéket felvesznek ($i = 1, 2, \dots, n$). Mivel $m_i = \inf \{ f(\xi_i) : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \}$, azért tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, melyre

$$f(\xi_i) \Delta x_i \leq m_i \Delta x_i + \frac{\epsilon}{n}, \text{ azaz } \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i + \epsilon =$$

$$= s + \epsilon.$$

amiből $s \leq \sigma$ miatt következik az állítás. $S = \sup \{ \sigma \}$ hasonlóan igazolható. *

Az integrálhatóságra vonatkozó eddig levezetett szükséges és elégséges feltételt megadó tételek birtokában vizsgáljuk meg, melyek azok a sokszor szereplő egyszerű függvényosztályok, amelyekbe tartozó függvények biztosan integrálhatók.

2.17. Tétel. Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor ott integrálható ($f \in \mathcal{R}$).

Bizonyítás. f $[a, b]$ -ben egyenletesen folytonos (valós egyváltozós függvények differenciálszámítása III.3.25. 3.26), vagyis tetszőleges $\eta > 0$ -hoz található olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x'_i) - f(x''_i)| < \eta, \text{ ha } |x'_i - x''_i| < \delta.$$

f felveszi $[a, b]$ tetszőleges felosztása esetén annak minden $[x_{i-1}, x_i]$ felosztási részintervallumában a m_i és M_i értéket ($i = 1, \dots, n$), és ha $[a, b]$ F felosztása δ finomságú, akkor szükségképpen

$$|M_i - m_i| < \eta,$$

tehát az F felosztásra

$$\Omega(f, F) = S(f, F) - s(f, F) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i <$$

$$< \eta \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \eta(b-a) < \varepsilon,$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra, ha $\eta < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Találtunk tehát egy olyan F felosztást, amelyhez tartozó oszcillációs összeg a tetszőleges $\varepsilon > 0$ -nál kisebb, f a 2.10. tétel értelmében integrálható. *

Fenti okoskodásunkból azonban több is következik. Azt bizonyítottuk be tulajdonképpen, hogy minden $\delta(\eta)$ finomságú F felosztásra $\Omega < \varepsilon$, vagyis minden δ finomságú F felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg f integráljától tetszőlegesen kevéssel tér el a reprezentáns pontok választásától függetlenül (2.15. tétel).

Folytonos f esetében

$$R = \int_a^b f \, dx$$

előállítható tehát speciális minden határon túl finomodó felosztásokhoz tartozó speciális integrálközelítő összegek sorozatának határértékeként. Arra szabályt adni, hogy különböző folytonos függvényekre $[a, b]$ milyen minden határon túl finomodó felosztásához, milyen reprezentáns pontok választása mellett célszerű az integrálközelítő összegeket felírni, hogy azok határértékét meg lehessen határozni, nincs. Mint láttuk, az 1.4. feladatnál egyenletes felosztás és a részintervallumok kezdő (vagy vég-) pontjaiban felvett függvényértékek felvétele volt célravezető. 1.6-ban geometriai sorozatot alkottak az $[a, b]$ -ben felvett osztópontok, szintén a részintervallumok kezdő, ill. végpontjai voltak a reprezentáns pontok.

2.18. Tétel. Ha f korlátos és véges sok pont kivételével folytonos $[a, b]$ -ben, akkor ott integrálható.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f $[a, b]$ -ben az $a_1, \dots, a_p$ pontok kivételével folytonos és

$$|f| \leq K.$$

Megadhatók ekkor olyan diszjunkt $[u_k, v_k]$ intervallumok ($k = 1, 2, \dots, p$)

melyeknek belsejébe egy és csak egy szakadási hely esik és összhosszuságuk tetszőleges $\eta > 0$ -nál kisebb:

$$a_k \in (u_k, v_k), \quad a_i \notin (u_k, v_k) \quad \text{ha} \quad i \neq k$$

és

$$\sum_{k=1}^p (v_k - u_k) < \eta.$$

Elhagyva $[a, b]$ -ből az (u_k, v_k) intervallumokat, véges sok zárt intervallum marad vissza; ezek mindegyikében f folytonos, 2.17. értelmében tehát integrálható, vagyis megadható mindegyik zárt intervallumnak olyan felosztása amelyhez tartozó oszcillációs összege f -nek $< \eta$. E felosztások osztópontjai, hozzájuk véve még az u_k és v_k pontokat ($k = 1, \dots, p$)

$[a, b]$ -nek egy F felosztását adják, és ehhez a felosztáshoz tartozó oszcillációs összegben az $[u_k, v_k]$ intervallumok járuléka $\leq 2K(v_k - u_k)$ (mivel $M_k - m_k \leq 2K$), a többi $(p+1)$ -számu intervallum mindegyikének járuléka pedig $< \eta$. Tehát $\Omega(f, F) \leq \sum_{k=1}^p 2K(v_k - u_k) + (p+1)\eta < 2K\eta + (p+1)\eta < \varepsilon$,

ha $\eta < \frac{\varepsilon}{2K+p+1}$, ami tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra η alkalmas megválasztásával elérhető. *

A tétel bizonyításában követett okoskodással belátható, hogy ha f $[a, b]$ -ben korlátos, és minden $\delta > 0$ mellett $[a+\delta, b]$ -ben integrálható, akkor $[a, b]$ -ben is integrálható. Sőt ha az a helyen nincs is értelmezve, $(a, b]$ -ben korlátos, és minden $[a+\delta, b]$ -ben integrálható, akkor $[a, b]$ -ben integrálhatónak tekinthetjük, hiszen a -ban bárhogyan definiálva f -et integrálható függvényt kapunk, és az integrál értéke nem függ az a helyen felvett függvényértéktől (lásd 6) feladatot).

A 2.18. tételből következik, hogy pl $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ $[0, 1]$ -ben integrálható, hiszen korlátos, és $x = 0$ kivételével folytonos.

2.19. Tétel. Ha f korlátos és monoton $[a, b]$ -ben, akkor ott integrálható ($f \in \mathcal{R}$).

Bizonyítás. Jelölje F $[a, b]$ -nek egy δ finomságu felosztását, vagyis legyen minden i -re a felosztási részintervallumok hosszúsága

$$\Delta x_i < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ekkor, ha pl. f monoton növekedő $[a, b]$ -ben,

$$\begin{aligned} \Omega(f, F) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i < \\ &< \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \delta = \delta(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra, ha $\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ (nyilván feltehető, hogy $f(b) \neq f(a)$, ellenkező esetben ui. $f(x) = f(a)$ $[a, b]$ -ben, ami nyilván integrálható függvény). Ezzel állításunkat igazoltuk. *

A 2.17. tételhez hasonlóan most is többet bizonyítottunk az állításnál. Okoskodásunkból most is következik, hogy minden δ finomságu felosztásra $\Omega(f, F) < \varepsilon$, tehát ilyen felosztások sorozatára képezett integrálközelítő összegek (a reprezentáns pontok akármilyen megválasztása mellett) f integráljához tartanak a felosztás minden határon túl történő finomítása-kor (2.15). Az integrál tehát most is előállítható tetszőleges minden határon túl finomodó felosztásokhoz tartozó tetszőleges integrálközelítő összegek sorozatának határértékeként.

Általánosságban is igaz a fenti, speciálisan folytonos vagy monoton függvényekre kapott eredmény:

2.20. Tétel. Ha $f \in \mathcal{R} [a, b]$ -ben, akkor $\int_a^b f \, dx$ előállítható $[a, b]$

tetszőleges minden határon túl finomodó felosztásaihoz tartozó integrálközelítő összegek sorozatának határértékeként; ez a határérték független a reprezentáns pontok választásától.

Az állítás bizonyításával általánosságban nem foglalkozunk itt.

2.21. Összefoglalva eredményeinket, bizonyítottuk, hogy az $[a, b]$ -ben korlátos f ott integrálható, ha

a) folytonos,

ill. ha

b) véges sok szakadási helye van, egyébként folytonos,

ill. ha

c) monoton.

Ezzel természetesen nem merítettük ki az integrálható függvények osztályát. A fentiek értelmében azonban állíthatjuk, hogy az elemi függvények, az ezekből összetett függvények, ott, ahol korlátosak, integrálhatók.

2.22. Példa

Nem integrálható korlátos függvényre a Dirichlet-függvény:
 $[0, 1]$ -ben legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális.} \end{cases}$$

Mivel mind a racionális, mind az irracionális számok $[0, 1]$ -ben mindenütt sűrűn helyezkednek el, bármely felosztás bármely $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumban $m_i = 0$, $M_i = 1$, vagyis bármely F felosztásra

$$s(f, F) = \sum_i m_i \Delta x_i = 0, \quad S(f, F) = \sum_i M_i \Delta x_i = \sum_i \Delta x_i = 1,$$

$$\Omega(f, F) = S - s = 1,$$

tehát nem lehet tetszőleges $\varepsilon > 0$ -nál kisebb, 2.10. értelmében, tehát a Dirichlet-függvény nem integrálható.

2.20. Feladatok.

1. Integrálható-e $[0, 1]$ -ben az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \\ 0, & \text{ha } x \neq \frac{p}{q} \end{cases}$$

függvény? (p, q egész, relatív prim, $q > 0$).

2. Integrálható-e $[-2, 2]$ -ben

a) $g(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$

b) $h(x) = \frac{x^2}{\sin x}$

3. Lehetséges-e, hogy egy $[a, b]$ -ben integrálható, korlátos függvénynek végtelen sok megszüntethető szakadási helye legyen $[a, b]$ -ben?

4. Létezik-e a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2k-1}{2n}$$

határérték?

5. Igazoljuk, hogy $0_i = M_i - m_i = \sup\{|f(\xi_i) - f(\eta_i)| : \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

6. Igazoljuk, hogy ha f $[a, b]$ -ben korlátos, és minden $\delta > 0$ mellett $[a+\delta, b]$ -ben integrálható, akkor $[a, b]$ -ben is integrálható.

7. Igazoljuk, hogy ha f $[a, b]$ -ben integrálható és értékét egy pontban megváltoztatjuk, akkor integrálható marad és integráljának értéke sem változik meg.

8. Határozzuk meg alkalmas minden határon túl finomodó felosztásokhoz tartozó integrálközelítő összegek sorozatának határértékeként az alábbi integrálok értékét:

a) $\int_a^b e^x dx,$

b) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx .$

3. A határozott integrál tulajdonságai

Az előző pontban megismertük a (Riemann-) integrálható függvények főbb osztályait. Az alábbiakban olyan tételeket mondunk ki a határozott integrál tulajdonságaival kapcsolatban, amelyek adott I intervallumon integrálható minden f függvényre érvényesek (továbbra is mindig feltesszük, hogy f korlátos I-n). Először az integrál határaitra, majd az integranduszra vonatkozó állításokat sorolunk fel.

3.1. Tétel. Ha f integrálható $[a, b]$ -ben és $[c, d] \subset [a, b]$, akkor f $[c, d]$ -ben is integrálható.

Bizonyítás. Mivel $f \in \mathcal{R}[a, b]$ -ben, van $[a, b]$ -nek olyan F felosztása, melyre tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett $\Omega(f, F) < \varepsilon$ (2.10). Az F felosztáshoz hozzávéve a c és d pontokat osztópontként, F -nek F_1 finomítását kapjuk, melyre 2.8. értelmében

$$\Omega(f, F_1) \leq \Omega(f, F) < \varepsilon.$$

Elhagyva $\Omega(f, F_1)$ -ből a $[c, d]$ intervallumon kívül eső felosztási részin-
tervallumok járulékait (melyeknek mindegyike nemnegatív), $[c, d]$ egy F'_1 felosztáshoz tartozó $\Omega'(f, F'_1)$ oszcillációs összegére jutunk, melyre

$$\Omega'(f, F'_1) < \Omega(f, F_1) < \varepsilon. *$$

3.2. Tétel. Ha f integrálható $[a, b]$ -ben és $[b, c]$ -ben, akkor integrálható $[a, c]$ -ben is és

$$(x) \quad \int_a^b f \, dx + \int_b^c f \, dx = \int_a^c f \, dx.$$

Megfordítva, ha f integrálható $[a, c]$ -ben, és $a < b < c$, akkor 3.1. értelmében $[a, b]$ és $[b, c]$ -ben is integrálható és az integrálok között fennáll a (x) összefüggés.

Bizonyítás. Igazoljuk először a tétel első állítását. f feltételezett integrálhatósága miatt kell, hogy legyen $[a, b]$ -nek ill. $[b, c]$ -nek olyan F_1 ill.

F_2 felosztása, amelyekhez tartozó alsó és felső összegekre tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\int_a^b f \, dx - \varepsilon < s_1 = s(f, F_1) < S_1 = S(f, F_1) < \int_a^b f \, dx + \varepsilon ,$$

ill.

$$\int_b^c f \, dx - \varepsilon < s_2 = s(f, F_2) < S_2 = S(f, F_2) < \int_b^c f \, dx + \varepsilon .$$

F_1 és F_2 osztópontjai együttesen $[a, c]$ -nek egy F_3 felosztását adják, melyhez tartozó s_3 alsó és S_3 felső összegre

$$s_3 = s_1 + s_2, \quad S_3 = S_1 + S_2$$

és az előbbiek figyelembevételével

$$\int_a^b f \, dx + \int_b^c f \, dx - 2\varepsilon < s(f, F_3) < S(f, F_3) < \int_a^b f \, dx + \int_b^c f \, dx + 2\varepsilon$$

A 2.10. tétel értelmében tehát f integrálható $[a, c]$ -ben, mert van egy olyan szám (és akkor csak egy ilyen van):

$$R = \int_a^b f \, dx + \int_b^c f \, dx$$

melyet az s_3 ill. S_3 összegek tetszőleges pontossággal megközelítenek, ez a szám pedig akkor

$$\int_a^c f \, dx ,$$

amit bizonyítanunk kellett. *

Az állítás második része 3.1. következménye.

Az állításból következik, hogy ha f $[a, b]$ -ben korlátos, és szakaszonként monoton ($[a, b]$ véges sok olyan részintervallum egyesítése, amelyek mindegyikében külön-külön f monoton), akkor $[a, b]$ -ben integrálható.

3.3. Megjegyzés. 3.1.-ből következik, hogy ha $f \in \mathcal{R} [a, b]$ -ben, akkor minden $[c, d] \subset [a, b]$ intervallumhoz $f [c, d]$ -re vonatkozó integrálja rendelhető. A

$$[c, d] \rightarrow \int_c^d f \, dx$$

függvényt intervallumfüggvénynek nevezzük (értelmezési tartománya $[a, b]$ zárt részintervallumainak halmaza, értékkészlete $\mathbb{R}' \subset \mathbb{R}$). E függvény 3.2. értelmében additív intervallumfüggvény. Eddig csak

$a < b$ esetében tulajdonítottunk értelmet $\int_a^b f \, dx$ -nek. Célszerű a következőkben megállapodnunk:

3.4. Definíció. Ha $a > b$, akkor

$$\int_a^b f \, dx = - \int_b^a f \, dx \quad \text{és} \quad \int_a^a f \, dx = 0 \quad (f \in \mathcal{R}).$$

Könnyen belátható, hogy ezen kiterjesztés mellett is igaz marad a 3.2.-beli (*) összefüggés.

Az integranduszra vonatkozóan a következő állítások mondhatók ki:

3.5. Tétel. Ha $[a, b]$ -ben f és g integrálhatók, c tetszőleges állandó, akkor

a) cf is integrálható, és

$$\int_a^b cf \, dx = c \int_a^b f \, dx,$$

b) $f + g$ is integrálható, és

$$\int_a^b (f+g) \, dx = \int_a^b f \, dx + \int_a^b g \, dx,$$

c) $f \cdot g$ is integrálható,

d) ha $|g(x)| > \delta > 0$ $[a, b]$ -ben, akkor $\frac{f}{g}$ is integrálható,

e) $|f|$ is integrálható, és

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx .$$

Bizonyítás. Vezessük be az $R_1 = \int_a^b f \, dx$, $R_2 = \int_a^b g \, dx$ jelölést.

a) A 2.16. tétel értelmében azt kell csak belátnunk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan F felosztása $[a, b]$ -nek, amelyhez tartozó tetszőleges integrálközelítő összege a cf függvénynek cR_1 -től ε -nál kevesebbel tér el.

Mivel $f \in \mathcal{R}$, tetszőleges $\eta > 0$ -hoz, vagyis $\eta = \frac{\varepsilon}{|c|}$ -hoz is van olyan F felosztás, hogy tetszőleges σ integrálközelítő összegre

$|\sigma(f, F) - R_1| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Az egyenlőtlenséget $|c| > 0$ -val beszorozva adódik, hogy

$$|c\sigma - cR_1| < \varepsilon$$

amit bizonyítanunk kellett, hiszen $c\sigma$ a cf függvény integrálközelítő

összege $(\sum_i cf(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i)$. *

b) Mivel $f \in \mathcal{R}$, $g \in \mathcal{R}$, tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan F_1 ill. F_2 felosztása $[a, b]$ -nek, hogy az alsó és felső, és akkor egyben minden F_1 ill. F_2 -hoz tartozó integrálközelítő összegre

$$|\sigma(f, F_1, \Xi) - R_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\sigma(g, F_2, \Xi) - R_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $F_3 = F_1 \cup F_2$, akkor - mivel F_3 F_1 -nek is, F_2 -nek is finomítása - f ill. g F_3 -hoz tartozó alsó, felső, és minden integrálközelítő összegére biztosan fennáll

$$|\sigma(f, F_3, \Xi) - R_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\sigma(g, F_3, \Xi) - R_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor azonban

$$\begin{aligned} & \left| \sigma(f, F_3, \Xi) + \sigma(g, F_3, \Xi) - (R_1 + R_2) \right| \leq \\ & \leq \left| \sigma(f, F_3, \Xi) - R_1 \right| + \left| \sigma(g, F_3, \Xi) - R_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

és ez az állítást adja, hiszen

$$\sigma(f, F_3, \Xi) + \sigma(g, F_3, \Xi) = \sigma(f+g, F_3, \Xi) \quad *$$

Vigyázzunk, a tétel állítása nem fordítható meg! Abból, hogy $(f+g)$ integrálható, nem következik f és g integrálhatósága. Pl. legyen $[0, 1]$ -ben

$$f = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Sem f , sem g nem integrálható, de $(f+g) = 0$ integrálható

c) 2.2.e) értelmében (2.20.5 feladat)

$$0_i = M_i - m_i = \sup \{ |f(\xi_i) - f(\eta_i)| : \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \}.$$

$$\text{Legyen } 0'_i = \sup \{ |g(\xi_i) - g(\eta_i)| : \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \}.$$

Ekkor - ha $[a, b]$ -ben $|f|$ korlátját K -val, $|g|$ korlátját K' -vel jelöljük - (f, g) ingadozása

$$\begin{aligned} 0''_i &= \sup \{ |f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\eta_i)g(\eta_i)| : \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \} = \\ &= \sup \{ |f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\xi_i)g(\eta_i) + f(\xi_i)g(\eta_i) - f(\eta_i)g(\eta_i)| \} \leq \\ &\leq K \sup \{ |g(\xi_i) - g(\eta_i)| \} + K' \sup \{ |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \} = K 0'_i + K' 0_i, \end{aligned}$$

és így (f, g) oszcillációs összege

$$\Omega'' = \sum_i 0''_i \Delta x_i \leq K \sum_i 0'_i \Delta x_i + K' \sum_i 0_i \Delta x_i.$$

Olyan F_1 ill. F_2 felosztásokat véve, melyekhez tartozó oszcillációs összege f -nek (tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra) $< \frac{\varepsilon}{2K'}$, g -nek pedig $< \frac{\varepsilon}{2K}$, az $F_1 \cup F_2 = F_3$ közös finomításra még inkább áll az alábbi becslés, és így

$$\Omega''(f, g, F_3) < K \frac{\varepsilon}{2K'} + K' \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,$$

amivel állításunkat igazoltuk. fg integráljának értékére R_1 és R_2 ismeretében semmit sem mondhatunk. *

d) Elég azt bizonyítani, hogy a tett feltevések mellett $\frac{1}{g}$ integrálható. Ezt feladatként tűzzük ki. c)-re való tekintettel ebből az állítás következik.

e) Az a tény, hogy f integrálhatóságából $|f|$ integrálhatósága következik, abból adódik, hogy $|f|$ ingadozása, és így oszcillációs összege is, nem lehet nagyobb f ingadozásánál, oszcillációs összegénél. A szereplő egyenlőtlenséget itt külön nem bizonyítjuk, erre 3.6. a) bizonyításánál következményként utalunk majd.

A gyakorlatban egy integrál kiszámítása helyett sokszor megelégedhetünk annak alkalmas becslésével is. Erre vonatkozik az alábbi tétel:

3.6. Tétel. Tegyük fel, hogy f és g integrálható $[a, b]$ -ben,

$|f|$ korlátja, K , $m = \inf \{ f(x) : x \in [a, b] \}$, $M = \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \}$.

Akkor

a) ha $f \leq g$, akkor

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx,$$

(ha még legalább egy $x_0 \in [a, b]$ helyen, ahol f és g folytonos $f(x_0) < g(x_0)$ akkor

$$\int_a^b f \, dx < \int_a^b g \, dx,$$

$$b) \quad \left| \int_a^b f \, dx \right| \leq K (b - a),$$

$$c) \quad m (b - a) \leq \int_a^b f \, dx \leq M (b - a),$$

d) Ha speciálisan f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor van olyan $\xi \in [a, b]$ melyre

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dx.$$

(A c) és d) összefüggéseket szokás az integrálszámítás középértéktételeinek nevezni.)

Bizonyítás.

a) ha $f \in \mathcal{R}$, $g \in \mathcal{R}$, akkor 3.5.b) értelmében $(-f+g) \in \mathcal{R}$. Mivel $(-1+g) \geq 0$, minden első összeg nem-negatív, így ezek felső határa, az integrál is nem-negatív.

$$\int_a^b (-f+g) \, dx = - \int_a^b f \, dx + \int_a^b g \, dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx. \quad *$$

Mivel $f \leq |f|$, fenti állításunkból következik, hogy

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b |f| \, dx, \quad \text{ill.} \quad - \int_a^b |f| \, dx \leq \int_a^b f \, dx, \quad \text{mert } -|f| \leq f.$$

F két egyenlőtlenségből adódik, hogy

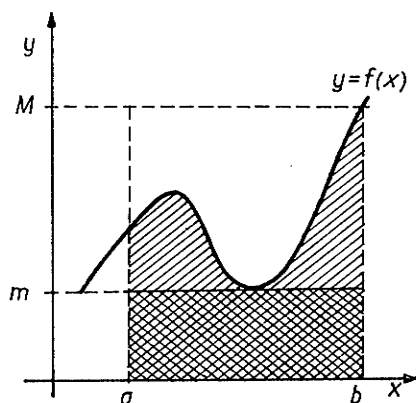
$$- \int_a^b |f| \, dx \leq \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b |f| \, dx, \quad \text{azaz} \quad \left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx \quad (3.5.e) \quad *$$

b) Alkalmazva az előbb bizonyított tételt speciálisan $g(x) \equiv K$ -ra, mivel tetszőleges F felosztásra $s(g, F) = S(g, F) = \sum_i K \Delta x_i = K \sum_i \Delta x_i = K(b-a)$,

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx \leq \int_a^b K \, dx = K(b-a),$$

mivel $|f| \leq K$, közben a 3.5.e összefüggést alkalmazva. *

c) Mivel $m \leq f(x)$, ill. $f(x) \leq M$, a)-t alkalmazva adódik az állítás (lásd folytonos, $[a, b]$ -ben nem-negatív f -re a 2. ábrát). *



2. ábra

d) Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor felveszi valamely $[a, b]$ -be eső helyen az m ill. az M függvényértéket, és minden e két érték közé eső függvényértéket. (Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása, III. 3.24. és 3.20.) Létezik tehát olyan $\xi \in [a, b]$ melyre

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dx,$$

mivel c)-ből

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dx \leq M. *$$

3.7. Feladatok

1. Keressünk példát olyan függvényekre, amelyek adott I intervallumban nem integrálhatók, de összegük, vagy szorzatuk, vagy hányadosuk integrálható.

2. Igazoljuk, hogy ha g korlátos és integrálható $[a, b]$ -ben és ott $g(x) > \delta > 0$, akkor $1/g$ is integrálható.

3. Igazoljuk, hogy a 3.6.d) középértéktétel feltételei mellett $[a, b]$ belsejében, azaz (a, b) -ben kell, hogy legyen legalább egy olyan ξ hely, melyre a tétel állítása igaz.

4. Igazoljuk, hogy ha $[a, b]$ -ben f és g integrálható, $g \geq 0$ és f alsó, ill. felső határa m ill. M , akkor

$$m \int_a^b g \, dx \leq \int_a^b f \cdot g \, dx \leq M \int_a^b g \, dx.$$

5. Ha f és g $[a, b]$ -ben folytonosak, $g \geq 0$ és nem azonosan 0, igazoljuk, hogy van olyan $\xi \in (a, b)$ hely, melyre

$$\int_a^b f \cdot g \, dx = f(\xi) \int_a^b g \, dx \quad (\text{és itt a jobb oldal második tényezőjével}$$

át is oszthatunk).

6. Ha f és g $[a, b]$ -ben integrálhatók, igazoljuk, hogy

$$\left(\int_a^b f \cdot g \, dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \, dx \cdot \int_a^b g^2 \, dx$$

(Bunyokovszkij-Schwarz egyenlőtlenség.)

4. A primitív függvény és az integrál összefüggése

4.1. Az integrál kiszámítására eddig még csak egy módszert ismerünk: megadtunk valamely úgyesen választott (F_n) felosztássorozathoz tartozó alsó- vagy felső- vagy integrálközelítő összeg sorozatot és ennek határértékét igyekeztünk meghatározni, amikor a felosztást minden határon túl finomítjuk. Ha $f \in \mathcal{R}$, akkor e speciális, alkalmasan választott felosztásokhoz tartozó összegek sorozatának határértéke a keresett integrál értékét adja meg.

A bevezető példákban általában alsó és felső összegeket adtunk meg. Az 1.4. példában a rugó kihúzásakor végzett munka meghatározásánál egyenletes felosztás esetén ($P = ax$ erő, $0 \leq x \leq h$ megnyúlás)

$$s_n = \sum_{i=1}^n a (i-1) \frac{h}{n} \frac{h}{n} = a \frac{h^2}{2} \frac{n(n-1)}{n^2}$$

és ennek határértéke $n \rightarrow \infty$ esetén (amikor a felosztás minden határon túl finomodik)

$$\int_0^h P \, dx = a \frac{h^2}{2}.$$

Az 1.6. példában az $y = x^2$ görbe alatti területet számítottuk ki $[a, b]$ -ben. A felosztás osztópontjai most célszerűen geometriai sorozatot alkottak, így alsó összegnek

$$s_n = \sum_{i=1}^n (aq^{i-1})^2 (aq^i - aq^{i-1}) = \dots = \frac{b^3 - a^3}{q^2 + q + 1},$$

ennek határértékeként pedig a felosztás minden határon túl történő finomításánál ($n \rightarrow \infty$, azaz $q \rightarrow 1$ esetén)

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

adódott.

Integrálok kiszámítására azonban lényegesen egyszerűbb módszer is megadható. Ennek alapgondolatát az 1.2. példa újbóli végiggondolásával érthetjük meg a legjobban.

A változó $v(t)$ sebességgel mozgó jármű által T idő alatt megtett ut mérőszámát a

$$\sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i \quad (\tau_i \in [t_{i-1}, t_i] \subset [0, T])$$

összeggel közelítettük meg. Ha $v \in \mathcal{R}[0, T]$ -ben, akkor a keresett ut mérőszámát az

$$s = \int_0^T v(t) dt$$

integrál szolgáltatta.

Ha most a rögzített a pillanat és a változó x pillanat között megtett utat mint az x változó függvényét keressük, akkor ezen s függvény értékét az x helyen

$$s(x) = \int_a^x v(t) dt$$

adja meg. Tudjuk azonban, hogy az a és x pillanatok között megtett utnak az x idő szerinti deriváltja a sebességnek x pillanatbeli értékével egyenlő:

$$s'(x) = v(x).$$

Mint ebből a példából láthatjuk, az integrál meghatározásának problémája kapcsolatban van azzal a feladattal, amelyben egy adott függvényhez olyan függvényt keresünk, amelynek deriváltja az adott függvény. Az alábbiakban meg fogjuk mutatni, hogy ez nemcsak a fenti speciális esetben van így, hanem - bizonyos megszorítások mellett - általában is.

4.2. Definíció. Ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$ -ben, akkor az $x \in [a, b]$ esetén értelmezett

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

függvényt f integrálfüggvényének nevezzük.

Az integrálfüggvény nevezetes tulajdonságait foglaljuk most össze:

4.3. Tétel.

- a) az integrálfüggvény folytonos,
 b) minden olyan $x \in (a, b)$ pontban, ahol f folytonos, a F integrálfüggvény differenciálható és

$$F'(x) = f(x) .$$

Bizonyítás. 3.2. értelmében

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Ezt az integrált azonban 3.6.b) értelmében - f egy korlátját K -val jelölve - így becsülhetjük:

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq K |x+h - x| = K|h| < \varepsilon$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra, ha $|h| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ezzel az a) állítást igazoltuk.

b) Be kell látnunk, hogy f folytonossági helyein

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x) .$$

Valóban, ha f az x helyen folytonos, tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan h , hogy (pl. $h > 0$ esetében)

$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$ amennyiben $x \leq t \leq x+h$, a közéérték-tétel (3.6.c)) értelmében tehát

$$(f(x) - \varepsilon) h < \int_x^{x+h} f(t) dt < (f(x) + \varepsilon) h.$$

Az egyenlőtlenségláncot h -val végigosztva adódik, hogy F különbségi hányadosa $f(x) - \varepsilon$ és $f(x) + \varepsilon$ közé esik, vagyis

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon,$$

amiből ε tetszőleges volta miatt az állítás adódik. ($h < 0$ esetén hasonlóan okoskodhatunk.) *

E tétel tartalmának lényegét egy újabb fogalom bevezetésével igen röviden fejezhetjük ki:

4.4. Definíció. F a f függvény primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumban, ha F folytonos $[a, b]$ -ben és $x \in (a, b)$ esetén

$$F'(x) = f(x).$$

E fogalom segítségével a 4.3. tétel b) állítása azt mondja ki, hogy az $[a, b]$ -ben folytonos f függvénynek mindig van primitív függvénye, nevezetesen az

$$\int_a^x f(t) dt$$

integrálfüggvény mindenestre primitív függvény. Ez persze nem az egyetlen primitív függvény. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha F primitív függvény, akkor $F + c$ is primitív függvény, ha c tetszőleges állandó. Más primitív függvény azonban nincs. Igaz ugyanis az alábbi állítás:

4.5. Tétel. Valamely f függvény primitív függvényei adott $[a, b]$ intervallumban egymástól csak egy állandóban különbözhetnek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f -nek $[a, b]$ -ben F és G is primitív függvénye, vagyis $x \in [a, b]$ -re

$$F'(x) = G'(x) = f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy a $H = F - G$ függvényre

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

az egész $[a, b]$ intervallumban. A Lagrange-féle középértéktétel (Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása (IV. 3.2)) értelmében tehát bármely $x \in [a, b]$ -re

$$\frac{H(x) - H(a)}{x - a} = H'(\xi) = 0 \quad (\xi \in [a, b]),$$

vagyis

$$H(x) = H(a) = c,$$

ugyhogy $F - G = c$, $F = G + c$, amint állítottuk.*

4.6. Megjegyzés. Ha f értelmezési tartománya nem egy intervallum, akkor nem lehet azt állítani, hogy f bármely két primitív függvénye csak egy állandóban különbözhet egymástól.

Legyen pl.

$$f(x) = x, \quad \text{ha} \quad -\infty < x \leq -1 \quad \text{és} \quad 1 \leq x < +\infty$$

f -nek nyilván primitív függvénye

$$F(x) = \frac{x^2}{2}, \quad \text{ha} \quad -\infty < x \leq -1 \quad \text{és} \quad 1 \leq x < +\infty$$

is, és

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{ha} \quad -\infty < x \leq -1, \\ \frac{x^2}{2} + 1, & \text{ha} \quad 1 \leq x < +\infty \end{cases}$$

is, ugyanakkor $H = F - G$ nem állandó értelmezési tartományában, mert

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -\infty < x \leq -1, \\ -1, & \text{ha} \quad 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Történetileg kialakult a következő elnevezés:

4.7. Definíció. Egy f függvény primitív függvényeinek összességét valamely $[a, b]$ intervallumon f határozatlan integráljának nevezzük és az

$$\int f(x) dx$$

jellel jelöljük.

Hangsúlyozni szeretnénk tehát, hogy ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$ -ben, akkor f határozott integrálja

$$\int_a^b f(x) dx$$

egy szám, f határozatlan integrálja

$$\int f(x) dx$$

pedig függvények összessége.

4.8. A differenciálás és az integrálás egymásnak inverz műveletei a következő értelemben:

a) Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor integrálfüggvénye deriváltjaként állítható elő:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) ,$$

és megfordítva, ha $F [a, b]$ -ben folytonosan differenciálható függvény, akkor

$$F(x) = \int_a^x F'(t) dt, + C \quad (C = F(a)),$$

vagyis ha az F függvényt differenciáljuk, majd deriváltját integráljuk, visszakapjuk az eredeti F függvényt additív állandótól eltekintve. Speciálisan $F(a) = 0$ esetén

$$F(x) = \int_a^x F'(t) dt.$$

A most bevezetett fogalmak segítségével térjünk vissza az integrál (határozott integrál) kiszámításának problémájához. Az előbbiekben láttuk ugyanis, hogy valamely $[a, b]$ intervallumban folytonos függvény

integráljának ismeretében fel tudjuk írni annak összes primitív függvényét. Igaz ennek megfordítottja is, ha ismerjük az $f \in \mathcal{R}$ függvény egy primitív függvényét, akkor ki tudjuk számítani f integrálját is:

4.9. Tétel. (Newton-Leibniz formula)

Ha $f \in \mathcal{R}$ $[a, b]$ -ben és $a < x < b$ esetén $F' = f$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(Szokás a Newton-Leibniz formulát a következő jelöléssel is felírni:

$$R = \int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(x) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $F^* [a, b]$ -nek olyan felosztása az

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

osztópontokkal, melyre adott $\varepsilon > 0$ mellett

$$R - \varepsilon < s(f, F^*) < S(f, F^*) < R + \varepsilon.$$

A Lagrange-féle közéértéktételt alkalmazva azonban

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}), \quad (\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]). \end{aligned}$$

Az utóbbi összeg azonban egy, az F^* felosztáshoz tartozó σ integrálközelítő összeg, és mivel

$$s(f, F^*) \leq \sigma \leq S(f, F^*),$$

$$\left| \sigma - R \right| = \left| \sigma - \int_a^b f(x) dx \right| < 2\varepsilon$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra, azaz $F(b) - F(a) = R$, amit bizonyítanunk kellett. *

Valamely $\int_a^b f(x) dx$ integrál kiszámítása tehát általában úgy tör-

ténik, hogy először meghatározzuk az integrandusz határozatlan integrálját, majd egy primitív függvény $x = b$ helyen (a felső határ helyén) vett helyettesítési értékéből levonjuk az $x = a$ helyen (az alsó határ helyén) vett helyettesítési értékét. Pl. a bevezető feladatokra visszanyulva:

$$\int_0^h ax dx = \left[a \frac{x^2}{2} \right]_0^h = a \frac{h^2}{2}, \quad \int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Mielőtt összefoglalnák 4.8. értelmében az ismert differenciálási képletek megfordításaként az ún. "alapintegrálokat" jegyezzük még meg a következőket:

4.10. Megjegyzés. Az $[a, b]$ intervallumban (Riemann-) integrálható függvények osztálya nem egyezik meg az $[a, b]$ -ben primitív függvénnyel rendelkező függvények osztályával. Az általános esetben az integrálás és a primitív függvény keresésének feladata különböző feladat, ha az egyik feladatnak van megoldása, ez még nem jelenti azt, hogy szükségképpen a másik feladatnak is van megoldása. Nem minden integrálható függvénynek van primitív függvénye, Pl. $y = \frac{x}{|x|}$ $[-1, 1]$ -ben integrálható ($x = 0$ kivételével folytonos, ott ugrása van), de nincs $[-1, 1]$ -ben primitív függvénye.

Lehet példát konstruálni olyan F függvényre, amelynek differenciálhányadosa $F' = f$ (Riemann-szerint) nem integrálható, tehát egy nem-integrálható f függvénynek lehet, hogy van F primitív függvénye. (A példa megkonstruálása nem könnyű, ezért itt mellőzzük.)

A következőkben a határozatlan integrál előállításának különféle módszereit ismertetjük.

4.11. Feladatok

$$1. \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctg \frac{1}{x} \right) dx = ?$$

2. Adjunk meg olyan folytonos f függvényt, amelyre

$$\int_1^x f(x) dx = 2 + f(x) .$$

5. Az integrálás technikája

A gyakorlatban sokszor integráltáblázatokból olvassuk ki az integrálok értékét. Általában ahhoz, hogy adott feladat megoldását a táblázatban megtalálhassuk, először azonos átalakításokat kell végeznünk, vagy helyettesítést kell alkalmaznunk, az egyszerűbb feladatok megoldása pedig sokszor nem is szerepel a táblázatokban. Ezért kell röviden az integrál kiszámításánál legtöbbször használt módszerekkel foglalkoznunk.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1), \quad \text{mert} \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)' = x^n,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad \text{mert} \quad (\ln|x| + c)' = \frac{1}{x},$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad \text{mert} \quad (e^x + c)' = e^x,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \text{mert} \quad (\sin x + c)' = \cos x,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad \text{mert} \quad (-\cos x + c)' = \sin x,$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, \quad \text{mert} \quad (\operatorname{tg} x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + c, \quad \text{mert} \quad (-\operatorname{ctg} x + c)' = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c,$	mert	$(\operatorname{sh} x + c)' = \operatorname{ch} x,$
$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c,$	mert	$(\operatorname{ch} x + c)' = \operatorname{sh} x,$
$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x + c,$	mert	$(\operatorname{th} x + c)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c,$	mert	$(\arcsin x + c)' =$ $= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{ar} \operatorname{ch} x + c =$ $= \ln (x + \sqrt{x^2-1}) + c,$	mert	$(\operatorname{ar} \operatorname{ch} x + c)' =$ $= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x + c =$ $= \ln (x + \sqrt{x^2+1}) + c,$	mert	$(\operatorname{ar} \operatorname{sh} x + c)' =$ $= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c,$	mert	$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c)' = \frac{1}{1+x^2},$
$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \operatorname{ar} \operatorname{th} x + c,$ ill. $\ln \left \frac{x+1}{x-1} \right + c,$	mert	$(\operatorname{ar} \operatorname{th} x + c)' = \frac{1}{1-x^2}.$

Mindegyik összefüggés azokban az intervallumokban érvényes, amelyekben a jobb oldali függvények differenciálhatók.

Sok integrál kiszámítását teszi lehetővé a következő tételek alkalmazása:

5.2. Tétel. Ha

$$\int f(x) dx = F(x) + c ,$$

akkor tetszőleges a és b állandókra (a ≠ 0)

$$\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c .$$

Bizonyítás. A láncszabályt alkalmazva

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{F(ax + b)}{a} + c \right)' = \frac{1}{a} F' (ax + b) . \quad a = f(ax + b) . \quad *$$

5.3. Tétel. Ha φ és φ' integrálható, akkor

$$a) \quad \int \varphi^k(x) \cdot \varphi'(x) dx = \frac{\varphi^{k+1}(x)}{k+1} + c \quad (k \neq -1) ,$$

b) ha $f = \frac{1}{\varphi}$ és φ' integrálható, akkor

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln | \varphi(x) | + c .$$

Bizonyítás.

$$a) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi^{k+1}(x)}{k+1} + c \right) = \frac{1}{k+1} (k+1) \varphi^k(x) \cdot \varphi'(x) = \varphi^k(x) \cdot \varphi'(x) .$$

$$b) \quad \frac{d}{dx} (\ln | \varphi(x) | + c) = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) . \quad *$$

5.4. Példák.

$$a) \quad \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} = \int (3x+1)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(3x+1)^2} + c .$$

Sokszor egyszerű azonos átalakítások után jutunk alapintegrálokra, ill. az 5.2., 5.3. tételben felsorolt típusu integrálokra.

$$b) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c,$$

$$c) \int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x \, dx = \\ = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \int (\cos 2x) \cdot 2 dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c,$$

$$d) \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \dots = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

$$e) \int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \int \cos (a+b)x + \cos (a-b)x \, dx = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (a+b)x}{a+b} + \frac{\sin (a-b)x}{a-b} \right) + c, \quad (a \neq \pm b).$$

$$f) \int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos (a-b)x - \cos (a+b)x) \, dx = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (a-b)x}{a-b} - \frac{\sin (a+b)x}{a+b} \right) + c, \quad (a \neq \pm b),$$

$$g) \int \sin ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin (a+b)x + \sin (a-b)x) \, dx = \\ = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos (a+b)x}{a+b} - \frac{\cos (a-b)x}{a-b} \right) + c, \quad (a \neq \pm b)$$

$$h) \int \sin^3 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = - \int -\sin x \, dx + \\ + \int \cos^2 x (-\sin x) \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c,$$

$$i) \int \operatorname{tg} x \, dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c \quad \left(x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2} \right),$$

$$j) \int_0^{0,8} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{0,8} (-2x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{0,8} =$$

$$= -0,6 + 1 = 0,4.$$

$$k) \int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c.$$

5.5. Parciális integrálás. Ha u és v deriváltjaikkal együtt folytonosak $[a, b]$ -ben, akkor

$$\int_a^b uv' dx = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b u' v dx,$$

illetve határozatlan integrálokkal felírva

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx.$$

Ez az integrálási szabály a szorzat differenciálási szabályának megfordításával adódik:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

tehát $f = u'v + uv'$ egy primitív függvénye uv , azaz

$$\int_a^b (u'v + uv') dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = \left[uv \right]_a^b.$$

Határozatlan integrálokra az összefüggés hasonlóképpen adódik.

5.6. Példák. Bizonyos függvényosztályokba tartozó függvények integrálját a parciális integrálás elvének egyszeri, vagy többszöri alkalmazásával mindig ki lehet számítani. Ilyenek pl.

- a) $\int x^n g(x) dx$, ahol $n > 0$, egész, $g(x)$ pedig az e^{ax+b} , $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$ függvények valamelyike ($a \neq 0$, b állandó) az $u = x^n$ szerepsoztással, n -szer parciálisan integrálva. Pl.

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \left(\frac{2x}{3} \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{2}{9} e^{3x} dx \right) =$$

$$= \dots = \frac{1}{27} e^{3x} (9x^2 - 6x + 2) + c.$$

b) $\int x^\alpha \ln^n x dx$, ahol $n > 0$ egész, $\alpha \neq -1$ tetszőleges állandó, az $u = \ln^n x$ szereposztással ($x > 0$). Pl.

$$\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x - \int \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x - \frac{3}{2} \int \ln x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \int x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{x} dx = \dots =$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \ln^2 x - \frac{9}{8} \sqrt[3]{x^4} \ln x + \frac{27}{32} \sqrt[3]{x^4} + c.$$

c) $\int 1 \cdot g(x) dx$, ahol $g(x) = \ln x, \arctg x, \arcsin x, \arccos x,$
 $\operatorname{arsh} x, \operatorname{arch} x, \operatorname{arth} x$, a $v' = 1$ ($v = x$) szereposztással. Pl.

$$\int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

$$\begin{matrix} v' & u & & v & u & & v & u' \end{matrix}$$

5.7. Helyettesítéssel integrálás. A helyettesítéssel történő integrálás szabályainak levezetésére az összetett függvény differenciálási szabályának megfordításával juthatunk. Ha ugyanis f primitív függvénye F , akkor a láncszabály értelmében (az x szerinti deriváltat vesszővel jelölve)

$$F(\varphi(x))' = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

tehát

$$(*) \quad \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c \quad [F(u)]_{u=\varphi(x)} = \left[\int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)}$$

Az itt felírt összefüggést szokás a helyettesítéssel történő integrálás egyik szabályának nevezni. E szabálynak speciális esete az 5.2. és 5.3. tétel, de ezektől az igen egyszerű esetektől eltekintve ritkán használható. A fenti szabály jobban használható alakjára jutunk az alábbiakban:

(*)-ban cseréljük fel az u és x betűk szerepét és az egyenlőség két oldalát:

$$\left[\int f(x) dx \right]_{x=\varphi(u)} = \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Tegyük fel, hogy a jobb oldalon álló integrált meg tudjuk határozni. Akkor utóbbi képletünk szerint ez megadja azt a függvényt, melyet az $\int f(x) dx$ integrálból x helyébe $\varphi(u)$ -t helyettesítve nyerünk. Az

$$\int f(x) dx = F(x),$$

$$\int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du = G(u)$$

jelöléssel tehát

$$F(\varphi(u)) = G(u).$$

Ha a vizsgált intervallumban van a φ függvénynek inverze, akkor az $x = \varphi(u)$ kapcsolat $u = \varphi^{-1}(x)$ alakban is írható, azaz utóbbi képletünkben u helyébe $\varphi^{-1}(x)$ -et írva

$$F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = F(x) = G(\varphi^{-1}(x)),$$

azaz

$$(**) \quad \int f(x) dx = \left(\int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du \right)_{u=\varphi^{-1}(x)}$$

adódik. Általában a (**) formulát szokás a helyettesítéssel integrálás képletének nevezni. Ezt szavakban így fejezhetjük ki:

az $\int f(x) dx$ integrál kiszámítását úgy végezzük el, hogy az integrálandó f függvényben x helyébe egy új u változó $\varphi(u)$ függvényét írjuk, dx helyébe pedig $\varphi'(u)du$ -t teszünk. Az így kapott integrál kiszámítása után a $\varphi(u) = x$ egyenlőség segítségével az eredeti x változót helyettesítjük vissza.

Általában érvényű szabályt arra nézve, mikor, milyen helyettesítés a célszerű, nem adhatunk. Néhány egyszerű helyettesítésre azonban példát mutatunk.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = \int \cos^2 u du = \dots = \\ &= \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + c = \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \sin u \sqrt{1-\sin^2 u} + c = \\ &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c,\end{aligned}$$

ahol az $x = \sin u$ ($dx = \cos u du$) helyettesítést alkalmaztuk. Hasonló

megfontolásokkal $\int \sqrt{1+x^2} dx$ kiszámításánál az $x = \sinh u$, $\int \sqrt{x^2-1} dx$ kiszámításánál pedig az $x = \cosh u$ helyettesítés a célravezető.

Ha határozott integrált számítunk ki a helyettesítés módszerével, akkor elmaradhat a "visszahelyettesítés" vagyis az u változóról az eredeti x változóra való visszatérés az integrál kiszámítása után. Ehelyett az integrál határait kell úgy megváltoztatni, hogy az új határok u azon értékei legyenek, melyek az $x = \varphi(u)$ ill. $u = \varphi^{-1}(x)$ kapcsolat értelmében az eredeti határoknak megfelelnek.

Pontosabban megfogalmazva:

5.8. Tétel. Ha f az $[a, b]$ intervallumban folytonos függvény, $x = \varphi(u)$ értékei az $[a, b]$ intervallumba esnek, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, és $x = \varphi(u)$ -nak $[\alpha, \beta]$ -ban (vagy $[\beta, \alpha]$ -ban) folytonos $\varphi'(u)$ differenciálhányadosa van, akkor fennáll az

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $\alpha < \beta$ és tekintsük az $\alpha \leq u \leq \beta$ intervallumban értelmezett alábbi két függvényt:

$$F(u) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(u)} f(x) dx$$

és

$$G(u) = \int_{\alpha}^u f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Az integrálandó függvények feltételezett folytonossága miatt $F(u)$ és $G(u)$ differenciálható

(a láncszabályt alkalmazva $\frac{dF}{du} = \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{du}$ és itt az első tényező 4.3., a második tényező a feltétel értelmében létezik) és differenciálhányadosuk megegyezik:

$$F'(u) = G'(u) = f(\varphi(u)) \varphi'(u).$$

Ebből következik azonban, hogy

$$F(u) - G(u) = c,$$

tehát G értelmezése folytan

$$F(\alpha) = G(\alpha) = 0, \text{ tehát } c = 0$$

míg $u = \beta$ -ra, figyelembevétel, hogy $c = 0$

$$F(\beta) = G(\beta),$$

vagyis

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = F(\beta) = G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du. \quad *$$

A határozott integrál kiszámítására vonatkozó képletet a benne szereplő függvényekre tett más feltételek mellett is lehet igazolni. Pl. ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$ -ben, $x = \varphi(u)$ szigorúan monoton $[\alpha, \beta]$ -ban, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ és $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ -ban, akkor is igaz a (***) összefüggés.

A helyettesítéssel integrálás képletének alkalmazásával könnyen beláthatók az alábbi állítások:

5.9. Tétel. Ha f páros függvény, akkor

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx,$$

és így

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

ha g páratlan függvény, akkor

$$\int_{-a}^0 g(x) dx = - \int_0^a g(x) dx,$$

és így

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk mindkét esetben a $[-a, 0]$ intervallumban vett integrálra az $x = -u$ helyettesítést. Mivel ekkor

ha $x = -u$, akkor $dx = -du$,

az $x = -a$ határnak $u = a$,

az $x = 0$ határnak $u = 0$

felel meg:

$$\int_{x=-a}^0 f(x) dx = \int_{u=a}^0 f(-u) (-du) = - \int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du, \quad \text{ill.}$$

$$\int_{x=-a}^0 g(x) dx = \int_{u=a}^0 g(-u) (-du) = \int_a^0 g(u) du = - \int_0^a g(u) du$$

és

$$\int_{-a}^a f dx = \int_{-a}^0 f dx + \int_0^a f dx$$

(g-re ugyanez fennáll), az állítás adódik.

5.10. Integrálás részlet törtre bontással.

Ha egy integrál kiszámításánál az integrandusz racionális törtfüggvény (vagy helyettesítés után racionális törtfüggvény integráljára jutotunk) az integrál kiszámítására a részlet törtre való bontás módszerét használjuk.

Először emlékeztetünk néhány - a bevezető jegyzetben szereplő - fogalomra, majd bizonyítás nélkül felsorolunk néhány (a komplex függvénytanban elég egyszerűen bizonyítható) tételt.

Racionális törtfüggvénynek két polinom hányadosát nevezzük.

$$f = \frac{p_n(x)}{r_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{k=0}^m b_k x^k}, \quad (b_m \neq 0)$$

f valódi racionális törtfüggvény, ha $m > n$. Ha f nem valódi racionális törtfüggvény, akkor számlálóját elosztva nevezőjével egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként állítható elő. Polinomok integrálása nem okoz problémát, elég tehát a továbbiakban csak valódi racionális törtfüggvényekkel foglalkoznunk.

Igazak mármost a következő állítások:

a) Ha egy $p_n(x)$ polinomnak x_1 gyöke ($p_n(x_1) = 0$), akkor $p_n(x)$ ilyen alakban írható:

$$p_n(x) = (x - x_1) p_{n-1}(x).$$

(Az $(x - x_1)$ tényező neve gyöktényező.). Ha

$$p_n(x) = (x - x_1)^k \cdot p_{n-k}(x) \quad \text{és} \quad p_{n-k}(x_1) \neq 0,$$

akkor x_1 k -szoros gyök.

b) Ha $p_n(x)$ n -edfoku, akkor legfeljebb n különböző valós gyöke lehet.

c) Ha a valós együtthatós $p_n(x)$ polinomnak ξ_1 k -szoros komplex (nem valós) gyöke, akkor $\bar{\xi}_1$ is k -szoros gyöke $p_n(x)$ -nek.

d) A pontosan n -edfoku $p_n(x)$ polinom n gyöktényező szorzatára bontható. (Az algebra un. alaptétele.) A gyöktényezők között megegyezők és komplexek is lehetnek. Az egymástól különböző gyököket $\xi_1, \dots, \xi_r$ -rel jelölve ($r \leq n$) a $p_n(x)$ polinom gyöktényezőkre felbontott alakja (un. gyöktényezős felbontása)

$$p_n(x) = (x - \xi_1)^{\alpha_1} \cdot (x - \xi_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x - \xi_r)^{\alpha_r} \cdot a_n$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n).$$

c)-re való tekintettel, továbbá $(x - \xi_i)(x - \bar{\xi}_i) = x^2 - (\xi_i + \bar{\xi}_i)x + \xi_i \bar{\xi}_i = x^2 + q_i x + s_i$ (q_i, s_i valós) miatt az algebra alaptétele még így is fogalmazható:

A valós együtthatós pontosan n -edfoku $p_n(x)$ polinom valós első és másodfoku gyöktényezők szorzatára bontható (ilyen másodfoku gyöktényező pl. a fenti $(x^2 + q_i x + s_i)$ tényező). E gyöktényezők között is lehetnek persze megegyezők (többszörös gyöktényezők).

e) Ha

$$f = \frac{p_n(x)}{r_m(x)}$$

valódi racionális törtfüggvény ($m > n$) és $r_m(x)$ gyöktényezős felbontása

$$r_m(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (c_1 x^2 + q_1 x + s_1)^\gamma (c_2 x^2 + q_2 x + s_2)^\delta$$

$$(q_1^2 - 4c_1 s_1 < 0, \quad i=1, 2, \alpha + \beta + 2(\gamma + \delta) = m, \quad \text{akkor}$$

$$\begin{aligned} \frac{p_n(x)}{r_m(x)} &= \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \\ &+ \frac{C_\gamma x + D_\gamma}{(c_1 x^2 + q_1 x + s_1)^\gamma} + \frac{C_{\gamma-1} x + D_{\gamma-1}}{(c_1 x^2 + q_1 x + s_1)^{\gamma-1}} + \dots + \frac{C_1 x + D_1}{c_1 x^2 + q_1 x + s_1} + \\ &+ \frac{E_\delta x + F_\delta}{(c_2 x^2 + q_2 x + s_2)^\delta} + \dots + \frac{E_1 x + F_1}{c_2 x^2 + q_2 x + s_2} \end{aligned}$$

(természetesen hasonlóan adódik a felbontás több gyöktényező esetében is).

A részlettörtekre való felbontás együtthatóinak meghatározása többféleképpen is történhet. Az alábbiakban az erre szolgáló határozatlan együtthatók módszerét ismertetjük.

Felírjuk a $\frac{p_n(x)}{r_m(x)}$ $m > n$ valódi racionális törtfüggvényt részlettör-

tekre bontott alakban határozatlan együtthatókkal. A részlettörteket közös

nevezőre hozva, az adódó $\frac{r(x)}{r_m(x)}$ törtfüggvény az eredeti törtfüggvénnyel,

vagyis a $p_n(x)$ polinom $r(x)$ -szel azonosan meg kell, hogy egyezzen.

Ez azt jelenti, hogy $p_n(x)$ -és $r(x)$ ugyanazon hatványon szereplő tagjainak

együtthatói meg kell, hogy egyezzenek egymással. Ez az összefüggés lineáris egyenletrendszer szolgáltat a részlettörtekre történt bontás határozatlan együtthatóira nézve.

Pl.

1. Határozzuk meg $\int \frac{2x-5}{(x-1)^3(x-2)} dx$ értékét.

$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{(x-1)^3(x-2)} &= \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2} = \\ &= \frac{(A(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)^2(x-2) + D(x-1)^3)}{(x-1)^3(x-2)} \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 2x - 5 &= (D+C)x^3 + (-3D-4C+B)x^2 + (3D+5C-3B+A)x + \\ &+ (-D-2C+2B-2A). \end{aligned}$$

Megoldva a

$$\begin{aligned} D+C &= 0, \\ -3D-4C+B &= 0, \\ 3D+5C-3B+A &= 2 \\ -D-2C+2B-2A &= -5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer $A = 3, B = 1, C = 1, D = -1$ adódik, vagyis

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-5}{(x-1)^3(x-2)} dx &= \int \frac{3}{(x-1)^3} dx + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \ln|x-1| - \ln|x-2| + c. \end{aligned}$$

- 2) Határozzuk meg $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^4 + x^2} dx$ értékét.

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{A(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2)}{x^2(x^2 + 1)}$$

azaz

$$2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (B+C) x^3 + (A+D) x^2 + Bx + A.$$

A határozatlan együtthatókra tehát a következő egyenletrendszer adódott:

$$A = 1,$$

$$B = -2,$$

$$A + D = 3, \quad \text{azaz} \quad D = 3 - A = 3 - 1 = 2,$$

$$B + C = 2, \quad \text{azaz} \quad C = 2 - B = 2 + 2 = 4.$$

Igy

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{4x+2}{x^2+1} dx =$$

$$= -\frac{1}{x} - 2 \ln |x| + 2 \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{x} - 2 \ln |x| + 2 \ln(x^2+1) + 2 \arctg x.$$

(természetesen kell kötnünk, hogy $x \neq 0$).

5.11. Végezetül megemlítünk még néhány - gyakran szereplő - helyettesítést, amely racionális törtfüggvény integráljára vezet.

a) az integrandusz e^x - racionális függvénye; a helyettesítés $e^x = u$,

b) az integrandusz $\sin x$ és $\cos x$ racionális függvénye; a helyettesi-

$$\text{t és } u = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \text{ (ekkor } \sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2} \text{ ,}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ , } x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} u, dx = 2 \frac{du}{1+u^2} \text{).}$$

Például

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x(1 + \cos x)} &= \int \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2} \left(1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \\ &= \int \frac{1+u^2}{2u} du = \int \frac{du}{2u} + \frac{1}{2} \int u du = \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

5.12. Feladatok

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = ?$ (Alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát ($n > 0$ egész).)
2. Igazoljuk, hogy

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^2}{1 \cdot 3} \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \quad (\text{Wallis-formula}).$$

(Használjuk fel az 1) feladat eredményét.)

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = ? \quad (p \neq -1)$$

$$4. \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx = ? \quad (k \text{ egész})$$

$$5. \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} dx = ? \quad (m > 0 \text{ egész})$$

$$6. \int_0^{\pi} x \sin^m x dx = ? \quad (m > 0 \text{ egész}).$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = ?$$

II. IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

1. Az improprius integrálok fogalma

1.1. Tudjuk, hogy az e_1 elektromos töltés a tőle r távolságban elhelyezett e_2 elektromos töltésre

$$P = k \frac{e_1 e_2}{r^2} = \frac{c}{r^2}$$

nagyságu taszító erővel hat (ha a töltések egyenlő előjelűek). A rugó megnyújtásánál végzett munka kiszámításához (I.1.4.) egészen hasonló okoskodással nyerjük, hogy pl. az e_2 töltésnek r távolságból R távolságba való taszításánál végzett munka értéke

$$\int_r^R \frac{c}{x^2} dx = c \left[-\frac{1}{x} \right]_r^R = c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Ha az R távolságot a "végtelenbe" növeljük, akkor ennek a munkának az értéke az $c \frac{1}{r}$ határértékhez közeledik, amit úgy szoktunk kifejezni, hogy az r távolságból "a végtelenbe" való taszításnál végzett munka értéke $c \frac{1}{r}$. Célszerű ennek a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_r^R \frac{c}{x^2} dx$$

határértéknek a jelölésére az

$$\int_r^{\infty} \frac{c}{x^2} dx$$

jelet bevezetni. Az így felírt integrál azonban nem az eddigi értelemben (vagyis a szó közönséges értelmében) vett integrál, hanem ún. "impropius integrál". Erre az integrálra új definíciót kell adnunk, mert a véges $[a, b]$ intervallumra vonatkozó határozott integrál (röviden integrál) definíciója végtelen intervallumban adott f függvényre nem alkalmazható. (Egy végtelen intervallumot nem lehet osztópontokkal véges számú véges részintervallumra osztani, így mindjárt az első lépésnél megakadunk, az alsó, felső és integrálközelítő összegek konstrukciója elveszti értelmét.)

Az impropius integráloknak lényegében két típusát ismertetjük. Az elsőnél - melyre példa a bevezetőként említett feladat - az integrál nem korlátos intervallumra vonatkozik, a második típusnál az integrandusz nem korlátos az integrációs intervallumban. Foglalkozunk először az első típussal.

1.2. Definíció. Ha f integrálható az $[a, \omega]$ intervallumban bármely $\omega > a$ esetén és létezik a (véges)

$$(*) \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^{\omega} f \, dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy az

$$(**) \quad \int_a^{+\infty} f \, dx$$

impropius integrál konvergens és értékének épp az előbbi határértéket tekintjük:

$$\int_a^{+\infty} f \, dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^{\omega} f \, dx .$$

Ha a $(*)$ határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor a $(**)$ impropius integrált divergensnek mondjuk.

Például $\omega \rightarrow +\infty$ esetén

$$\int_1^{\omega} \frac{dx}{x^a} = \int_1^{\omega} x^{-a} \, dx = \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right]_1^{\omega} = \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{\omega^{a-1}} - 1 \right) \rightarrow \frac{1}{a-1} ,$$

ha $a > 1$; ekkor az

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}$$

improprius integrál konvergens, egyébként divergens ($a = 1$ esetén azért, mert

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{\omega} = \ln \omega - \ln 1 = \ln \omega$$

és $\omega \rightarrow +\infty$ esetén ez nem tart véges határértékhez). Ez a példa mutatja, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ a (**) improprius integrál konvergenciájának szükséges,

de nem elégséges feltétele.

A határozott integrálnak a primitív függvény segítségével történő kiszámítása a (**) improprius integrál esetében úgy módosul, hogy a primitív függvény $+\infty$ -ben vett határértékéből (ha létezik és véges) le kell vonni az $x = a$ a helyen felvett értéket. Pl.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + e^0 = 0 + 1 = 1.$$

1.3. Teljesen hasonlóan értelmezhető az

$$\int_{-\infty}^b f dx$$

improprius integrál:

$$\int_{-\infty}^b f dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f dx,$$

és akkor mondjuk konvergensnek, ha a jobb oldali véges határérték létezik, Pl.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x \right]_{-\infty}^0 = \arctan 0 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Az improprius integrálok másik típusára vezet pl. a következő feladat megoldása: meg szeretnénk határozni az $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ egyenletű görbe, az $x = 0$ és $x = 4$, valamint $y = 0$ egyenletű egyenesek által bezárt nem korlátozott síkidom területének mérőszámát (amennyiben ez a görbe alatti terület véges érték). Az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény $x = 0$ -ban nincs értelmezve, feladatunkat tehát Riemann-integrállal nem oldhatjuk meg. Célszerű most is a feladat megoldásaként egy határértéket értelmezni, nevezetesen azt mondani, hogy ha

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} \int_{\beta}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

véges, ez a keresett terület nagysága, és ezt röviden így jelölni

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

holott tudjuk, ez nem közönséges integrál, hiszen nem korlátozott függvény esetében az alsó ill. felső összeg konstrukciója elveszti értelmét. Általánosságban mondjuk tehát ki a következő definíciót:

1.4. Definíció. Ha f $[a, b]$ -ben Riemann-értelemben nem integrálható, de tetszőleges $\delta > 0$ mellett $[a+\delta, b]$ -ben már integrálható és létezik a véges

$$(*) \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f dx$$

határérték, akkor ezt a határértéket az

$$(**) \quad \int_a^b f \, dx$$

improprius integrál értékének tekintjük, és az improprius integrált konvergensnek mondjuk. Ha a (*) határérték nem létezik, (nem véges) a (**) improprius integrált divergensnek mondjuk.

Hasonló definíció adható meg a tetszőleges $\beta > 0$ mellett $[a, b-\beta]$ -ban integrálható, $[a, b]$ -ben azonban közönséges értelemben nem integrálható f függvény $[a, b]$ -beli integráljára:

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{\beta \rightarrow +0} \int_a^{b-\beta} f \, dx,$$

feltéve, hogy az utóbbi határérték létezik (véges).

A határozott integrálnak a primitív függvény segítségével történő kiszámítására vonatkozó szabály ebben az esetben is azzal a módosítással marad érvényben, hogy a primitív függvénynek a megfelelő helyen a határértékét kell venni. Pl.

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_0^1 = \ln 1 - 1 - \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x + 0 = 0 - 1 - 0 + 0 = -1,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} \, dx = \int_0^1 x^{-a} \, dx = \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{1-a} - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{-a+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

ha $a < 1$, egyébként az improprius integrál divergens ($a=1$ esetében azért,

mert $\delta > 0$ -ra $\int_{\delta}^1 \frac{dx}{x} = -\ln \delta$ és ez nem tart véges határértékhez, ha

$\delta \rightarrow +0$), $x=0$ környezetében sem $\ln x$, sem $\frac{1}{x^a}$ ($a > 0$) nem korlátos!

1.4. valóban csak akkor mond ujat, ha az integrandusz valamelyik határkörnyezetében nem korlátos (lásd I.2.18. és a hozzá fűzött megjegyzések, ill. 2.20.6).

2. Improprius integrálok tulajdonságai Parciális és helyettesítéssel integrálás

A közönséges (Riemann-) integrál tulajdonságaihoz sokban hasonló jellemzőit sorolhatjuk fel az improprius integráloknak.

Tekintsük az

$$(*) \quad \int_a^b f(x) \, dx \quad (a < b)$$

improprius integrált, amelynél vagy $a = -\infty$, vagy $b = +\infty$, vagy f csak $[a+\varepsilon, b]$ -ben vagy csak $[a, b-\delta]$ -ban integrálható tetszőleges $\varepsilon, \delta > 0$ mellett. Ez a $(*)$ improprius integrál a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

2.1. Tétel. Ha $(*)$ konvergens improprius integrál és $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Bizonyítás. Ha a jobb oldali első integrál közönséges (Riemann-) integrál és $c < \omega < b$, akkor az integrál additív tulajdonsága miatt

$$(**) \quad \int_a^\omega f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^\omega f(x) \, dx,$$

és mivel a bal oldali ω - a feltevés szerint - van $\omega \rightarrow b-0$ esetén véges határértéke, ezért

$$\lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

is létezik, és így $(**)$ -ből határátmenettel az állított egyenlőségre jutunk.

Hasonló módon okoskodhatunk, ha $\int_a^c f(x) \, dx$ az improprius integrál. *

Eddig csak olyan improprius integrálok szerepeltek, melyeknek egyik határa nem volt véges, vagy az integrandusz az egyik határ környezetében nem volt korlátos. Kézenfekvő az integrál additív tulajdonságára támaszkodva az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2-4}$$

típusu integrálok konvergenciáját a következőképpen értelmezni:

2.2. Definíció. Az

$$\int_a^b f dx$$

improprius integrált konvergensnek mondjuk, ha tetszőleges $c \in (a, b)$ mellett

$$\int_a^c f dx \quad \text{és} \quad \int_c^b f dx$$

mindketten konvergens integrálok, és a fenti integrál divergens, ha az utóbbi két integrál közül akár csak az egyik divergens.

Az additivitásból látszik, hogy ha a feltétel egy $c \in (a, b)$ -re teljesül, akkor minden $c \in (a, b)$ -re is fennáll.

Például

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

konvergens, mert előbbi felbontásának mindkét tagja konvergens:

$$\int_{-\infty}^c x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_{-\infty}^c = -\frac{1}{2} (e^{-c^2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2}) = -\frac{1}{2} e^{-c^2},$$

$$\int_c^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_c^{+\infty} = -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} - e^{-c^2} \right) = \frac{1}{2} e^{-c^2},$$

és így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 0.$$

Ugyanakkor

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^c \frac{dx}{x^2} + \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

divergens, mert - bár a jobb oldali második integrál konvergens - a jobb oldali első integrál divergenciája a bal oldali integrál divergenciáját vonja maga után.

Hangsúlyozni szeretnők, hogy

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{-\omega}^{\omega} f dx$$

létezéséből még nem következik

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx$$

létezése, lehetséges ugyanis, hogy felbontva az integrált

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx = \int_{-\infty}^c f dx + \int_c^{+\infty} f dx$$

alakra a jobb oldali integrálok divergensek. Pl.

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{-\omega}^{\omega} x dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} \right) = 0,$$

ugyanakkor

$$\int_{-\infty}^0 x \, dx \text{ és } \int_0^{\infty} x \, dx$$

divergens improprius integrálok.

2.3. Ha az $[a, b]$ intervallum véges számú

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

osztóponttal olyan $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumokra bontható, amelyek mindegyikében létezik f improprius integrálja, akkor az

$$\int_a^b f \, dx$$

improprius integrál is konvergens és értéke

$$\int_a^b f \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \, dx .$$

Pl.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \left[x^{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^0 + \frac{3}{2} \left[x^{\frac{2}{3}} \right]_0^1 = 0$$

Az improprius integrálok konvergenciájának vizsgálatára a következő tétel ad hasznos segédeszközt:

2.4. Tétel. Ha $[a, b]$ véges, vagy végtelen intervallum, melynek minden belső részintervallumában az f és g függvény integrálható, továbbá $[a, b]$ belsejében $|f(x)| \leq g(x)$, akkor az

$$\int_a^b g \, dx$$

improprius integrál konvergenciája maga után vonja

$$\int_a^b f \, dx$$

konvergenciáját.

Bizonyítás. Az igazolást arra az esetre végezzük el, amikor $[a, b]$ véges intervallum, és f és $g \geq 0$ mellett $[a, b-h]$ -ban integrálhatók. A többi esetre hasonlóképpen végezhető el a bizonyítás.

Legyen (h_n) pozitív számokból álló 0-hoz tartó számsorozat,

$$H_n = \int_a^{b-h_n} f \, dx, \quad G_n = \int_a^{b-h_n} g \, dx.$$

A $G_1, \dots, G_n, \dots$ sorozat az $\int_a^b g \, dx$ improprius integrál feltételezett konvergenciája miatt konvergens, tehát bármely $\varepsilon > 0$ mellett kielégíti a Cauchy-féle konvergenciakritériumot:

$$|G_n - G_m| < \varepsilon, \quad \text{hacsak } n > m > n_0(\varepsilon).$$

Megmutatjuk, hogy a (H_n) sorozat is kielégíti a Cauchy-féle konvergenciakritériumot, azaz konvergens. Igaz ugyanis a következő becslés:

$$\begin{aligned} |H_n - H_m| &= \left| \int_a^{b-h_n} f \, dx - \int_a^{b-h_m} f \, dx \right| = \left| \int_{b-h_m}^{b-h_n} f \, dx \right| \leq \left| \int_{b-h_m}^{b-h_n} g \, dx \right| = \\ &= \left| \int_a^{b-h_n} g \, dx - \int_a^{b-h_m} g \, dx \right| = |G_n - G_m| < \varepsilon, \end{aligned}$$

hacsak $n > m > n_0$.

Minden (h_n) sorozatra, melynél $h_n \rightarrow +0$, létezik tehát a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b-h_n} f \, dx$$

határérték. Meg kell még mutatnunk, hogy ez a határérték független a $(h_n) + 0$ -hoz tartó sorozat speciális választásától. Ha ugyanis (h'_n) és (h''_n) két ilyen sorozat, akkor az egyesített

$$h'_1, h''_1, h'_2, h''_2, \dots, h'_n, h''_n, \dots$$

sorozatnak az előbbiek szerint konvergens integrálsorozat felel meg. Ezen utóbbi integrálsorozatnak azonban az

$$\left(\int_a^{b-h'_n} f \, dx \right) \text{ és } \left(\int_a^{b-h''_n} f \, dx \right)$$

sorozat részsorozata, és így ezeknek is ugyanaz a határértéke. Van tehát olyan I szám, hogy $h_n \rightarrow +0$ esetén

$$\int_a^{b-h_n} f \, dx \rightarrow I,$$

ez pedig azt jelenti, hogy

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_a^{b-h} f \, dx = I. \quad *$$

Improprius integrálok számítási technikájával kapcsolatban megemlítjük, hogy a parciális ill. helyettesítéssel integrálás szabálya most is érvényes a következő megfogalmazásban:

2.5. Tétel. Ha az u' és v' differenciálhányadosok bármely $[a, t] \subset [a, b]$ intervallumban integrálhatók, és létezik a $\lim_{x \rightarrow b} u(x) \cdot v(x)$ határérték, az

$$\int_a^b u' v \, dx \quad \text{és} \quad \int_a^b uv' \, dx$$

integrálok közül pedig az egyik konvergens improprius integrál, akkor a másik integrál is konvergens, és

$$\int_a^b u' v \, dx = \lim_{x \rightarrow b} (u \cdot v) - u(a)v(a) - \int_a^b uv' \, dx .$$

(Természetesen hasonló módon fogalmazható meg a szabály, ha az alsó határ nem korlátos, vagy annak környezetében nem korlátos az integrandusz.)

Bizonyítás. Ha $a < x < b$, akkor a közönséges integrálokra vonatkozó parciális integrálás képlete értelmében

$$\int_a^x u' v \, dx = u(x) \cdot v(x) - u(a) \cdot v(a) - \int_a^x uv' \, dx ,$$

innen pedig határátmenettel adódik az állítás. *

2.6. Tétel. Ha pl. $\alpha < \beta$ és az $[\alpha, \beta]$ intervallumban folytonos $x = \varphi(u)$ függvényre $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{u \rightarrow \beta} \varphi(u) = b$, $a \leq \varphi(u) < b$, ha $u \in [\alpha, \beta]$ és tetszőleges $[\alpha, \beta]$ -ban fekvő $[\alpha, \beta]$ intervallumban teljesülnek azok a feltételek, amelyek mellett a közönséges integrál helyettesítéséről szóló 1.5.8. tétel érvényes, akkor fennáll az

$$(*) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du$$

egyenlőség, feltéve, hogy az utóbbi integrálok közül az egyik konvergens.

Bizonyítás. Ha a (*) összefüggés bal oldalán álló integrál konvergens, akkor mivel $u \in [\alpha, \beta)$ esetén a közönséges integrálokra vonatkozó helyettesítés képletéből

$$\int_a^{\varphi(u)} f(x) dx = \int_{\alpha}^u f(\varphi(u)) \varphi'(u) du,$$

ezen összetett függvény határértéke létezik:

$$\lim_{u \rightarrow \beta} \int_a^{\varphi(u)} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

és a (*) képlet jobb oldalán álló

$$\int_{\alpha}^u f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

integrál is ugyanehhez a határértékhez tart. Fenti képletünkéből tehát határátmenettel valóban (*) adódik.

Megfordítva, ha a (*) jobb oldalán álló integrál konvergens (értékét jelöljük R -rel), akkor

$$\int_{\alpha}^u f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

határértéke a β helyen. Az $x = \varphi(u)$ folytonos függvény $a[\beta', \beta)$ intervallumot valamely $[b', b)$ intervallumba viszi át; a β' számot úgy választva, hogy

$$\left| \int_{\alpha}^u f(\varphi(u)) \varphi'(u) du - R \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } u \in [\beta', \beta),$$

akkor a közönséges integrálokra vonatkozó helyettesítés fenti képletéből

$$\left| \int_a^x f(x) dx - R \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } x \in [b', b) .$$

Ennélfogva

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(x) dx = R ,$$

amit bizonyítani akartunk.*

2.7. Feladatok

1. a és b milyen értéke mellett lesz közösleges (Riemann-) integrál

$$\int_a^b \frac{x}{\sin 2x} dx ,$$

és amennyiben improprius az integrál, konvergens-e vagy divergens?

2. Konvergens-e, és ha igen, mi az értéke az alábbi integráloknak:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0), \quad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n > 0, \text{ egész}) ,$$

$$3. \quad \int_0^{\pi} \ln \sin x dx = ?$$

$$4. \quad \int_0^1 \ln^n x dx \text{ konvergens-e, ha igen, mi az értéke? } (n \in \mathbb{N})$$

III. A RIEMANN-STIELTJES-INTEGRÁL

1. Riemann-Stieltjes-integrálra vezető néhány feladat

Az integrálfogalomnak fontos általánosítása a Riemann-Stieltjes (vagy röviden Stieltjes-) integrál, mely az integrálszámítás igen sok alkalmazásában fellép, és olyan problémák precíz tárgyalását teszi lehetővé, amelyeknek megoldása Riemann-integrál segítségével nem, vagy csak sok felesleges megszorítás mellett volna lehetséges.

1.1. Tegyük fel, hogy egy egyenes, mondjuk a koordináta-rendszer x tengelyének $[a, b]$ intervalluma mentén töltések helyezkednek el, és csak azt kötjük ki, hogy minden $x \in [a, b]$ mellett adott az $[a, x]$ -beli töltés x -től függő $q(x)$ mérőszáma (egyébként lehetséges, hogy a töltések folytonosan, de nem egyenletesen vannak eloszolva, vagy az egyenes mentén pontszerű (diszkrét) töltések vannak, vagy a töltések az egyenes mentén szakaszonként folytonosan vannak eloszolva, de ezen kívül helyenként még diszkrét töltések is vannak). Számítsuk ki a potenciál értékét a sík valamely nem az $[a, b]$ egyenesszakaszba eső (x_0, y_0) pontjában.

Bontsuk fel az $[a, b]$ intervallumot az

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

osztópontokkal részekre. Képzeljük el az egy-egy részintervallumbeli töltést a részintervallum egy pontjában egyesítve. Az i -edik részintervallumban legyen ez a pont ξ_i ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$), az $(x_{i-1}, x_i]$ -ben egyesített töltés mennyisége $q(x_i) - q(x_{i-1})$. Mivel a $(\xi_i, 0)$ pont távolsága (x_0, y_0) -től

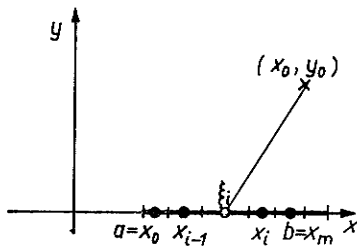
$$\sqrt{(\xi_i - x_0)^2 + y_0^2},$$

minden egyes felosztási részintervallumban hasonló-

képpen járva el, az (x_0, y_0) -beli potenciál közelítő értékeként

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(\xi_i - x_0)^2 + y_0^2}} (q(x_i) - q(x_{i-1}))$$

adódik. (3. ábra).



3. ábra

A felosztást minden határon túl finomítva a fenti integrálközelítő összeg várhatóan az (x_0, y_0) -beli potenciál mérőszámához tart.

Hasonló típusú integrálközelítő összegre juthatunk a következő feladat megoldása során:

1.2. Tekintsünk pl. az x tengely $[a, b]$ intervalluma mentén egy inhomogén tömegeloszlású pácát, amelynek tömegeloszlásáról nem kötjük ki, hogy (vonalmentti) sűrűséggel rendelkezzen, csupán azt tesszük fel, hogy minden $x \in [a, b]$ mellett meg van adva a pác $[a, x)$ intervallumbeli részébe eső tömeg x -től függő $m(x)$ mérőszáma. Számítsuk ki a pác y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

A pácát az

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

osztópontokkal részekre bontva egy-egy rész tömegét ennek a résznek egy kiszemelt pontjában (speciálisan az y tengelyhez legközelebb eső, vagyis legkisebb abszcisszáju, vagy legtávolabb eső, azaz legnagyobb abszcisszáju pontban) képzeljük egyesítve. Az i -edik rész kiszemelt pontjának abszcisszáját ξ_i -vel jelölve ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, lehet tehát speciálisan x_{i-1} vagy x_i is), az így nyert pontrendszer y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 (m(x_i) - m(x_{i-1})),$$

mivel az $[x_{i-1}, x_i)$ intervallumbeli tömeg feltevésünk értelmében $m(x_i) - m(x_{i-1})$. A felosztást minden határon túl finomítva, a fenti összeg a pác tehetetlenségi nyomatékához tart.

1.3. A bevezető példák közös matematikai lényegét így foglalhatjuk össze: megadtunk valamely I intervallumon két függvényt. (Az egyik függvény, a tömeg mérőszámát megadó $m(x)$ függvény még speciálisan monoton növekedő függvény is volt.) I -t részintervallumokra osztottuk fel, és képeztünk olyan összegeket, melyeknek tagjaiban az egyik függvénynek az egyes részintervallumokon vett megváltozását szoroztuk a másik függ-

vénynek a részintervallum valamely közbenső pontjában felvett (vagy a részintervallumban felvett legkisebb, vagy legnagyobb) értékével. Minél kisebb részintervallumokra osztottuk fel I -t, várhatóan annál jobb közelítésnek voltak tekinthetők a megfelelő összegek. Ha a felosztásoknak minden határon túl történő finomításakor ezek az összegek közös határértékhez tartanak, ezt a határértéket nevezzük Stieltjes-integrálnak. Ennek fogalmát kívánjuk a továbbiakban pontosan értelmezni, majd az integrál fontosabb tulajdonságait foglaljuk össze.

2. A Riemann-Stieltjes-integrál definíciója, tulajdonságai Stieltjes-integrálható függvények főbb osztályai

2.1. Tegyük fel, hogy az alábbiakban az $I = [a, b]$ intervallumon f korlátos, továbbá vizsgálataink első felében (2.19-ig), hogy g monoton növekedő (ebből persze korlátossága következik).

2.2. I felosztásait, azoknak részintervallumait, az azokban felvett reprezentáns pontokat (közbülső helyeket) most is úgy jelöljük, mint I.2.2-ben, m_i és M_i most is f $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumbeli értékeinek alsó és felső határát jelölik.

2.3. A következő fogalmakat értelmezzük és ezekre a következő jelöléseket vezetjük be:

a) Az f függvény F felosztáshoz és g függvényhez (g súlyfüggvényhez, g eloszlásfüggvényhez) tartozó alsó összege

$$s(f, F, g) = \sum_{i=1}^n m_i [g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n m_i \Delta g_i.$$

b) Az f függvény F felosztáshoz és g függvényhez tartozó felső összege

$$S(f, F, g) = \sum_{i=1}^n M_i [g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n M_i \Delta g_i.$$

c) Az f függvény F felosztáshoz, a ξ_i ($i=1, 2, \dots, n$) reprezentáns pontokhoz és a g függvényhez tartozó integrálközelítő összege

$$\sigma(f, F, \overline{\omega}, g) = \sigma(f, F, \{\xi_1, \dots, \xi_n\}, g) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta g_i.$$

(Egy F felosztáshoz, attól függően, hogy hol vesszük fel a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontokat, végtelen sok integrálközelítő összeg tartozik.)

A σ finomságu F felosztást, F finomítását, felosztások egyesítését, a minden határon túl finomodó felosztássorozatot I. 2.3. -ban már értelmeztük.

2.4. I minden lehetséges F felosztásához f, g -hez tartozó alsó ill. felső összeget képezve, e nem üres, korlátos halmazoknak biztosan létező felső ill. alsó határát így jelöljük:

$$h = \sup \{ s(f, F, g) \},$$

$$H = \inf \{ S(f, F, g) \}$$

(azol pl. $S(f, F, g)$ -vel I összes lehetséges felosztásához tartozó felső összegek halmazát jelöltük).

2.5. Definíció. f, g szerint Riemann-Stieltjes-értelmében integrálható I-n, ha a fenti jelöléssel

$$h = H.$$

A g szerint (röviden) Stieltjes-integrálható függvények osztályát $\mathcal{R}(g)$ -vel jelölve a 2.5. definíció így írható:

$$f \in \mathcal{R}(g) \leftrightarrow \sup \{ s(f, F, g) \} = \inf \{ S(f, F, g) \}.$$

2.6. Definíció. f, g szerinti Riemann-Stieltjes-integrálja (röviden Stieltjes-integrálja) az $[a, b]$ intervallumon

$$h = H = \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f dg.$$

2.7. Megjegyzés. A Riemann-integrál - mint látható - a Riemann-Stieltjes-integrálnak az a speciális esete, amikor

$$g(x) = x.$$

Annak érdekében, hogy f g szerinti Stieltjes-integrálhatóságára jói kezelhető szükséges és elégséges feltételeket kapjunk, most is a Riemann-integrálhoz hasonló gondolatmenetet járhatunk végig (a tételek bizonyítását csak ott adjuk meg, ahol lényegesen eltérnek az I. fejezetbeli analóg állítások igazolásától).

2.8. Segéd-tétel. Ha F_1 az I intervallum F felosztásának finomítása, akkor

$$s(f, F, g) \leq s(f, F_1, g), \quad S(f, F_1, g) \leq S(f, F, g). \quad *$$

2.9. Tétel.

$$h = \sup \{ s(f, F, g) \} \leq \inf \{ S(f, F, g) \} = H. \quad *$$

2.10. Tétel. Az $[a, b]$ intervallumon $f \in \mathcal{R}(g)$ akkor és csak akkor, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan F felosztás, melyre

$$S(f, F, g) - s(f, F, g) < \varepsilon. \quad *$$

E tétel következménye:

2.11. Tetszőleges f függvényre legfeljebb egy olyan R szám van, amelyhez tetszőlegesen közel van alkalmas F felosztás esetén $s(f, F, g)$ és $S(f, F, g)$. f akkor és csak akkor Stieltjes-integrálható a vizsgált intervallumon, ha van ilyen R szám, és akkor R a Stieltjes-integrál értéke.

Másképpen megfogalmazva, az $s_n = s(f, F_n, g)$, $S_n = S(f, F_n, g)$ jelöléssel:

2.12. Tétel. $f \in \mathcal{R}(g)$ és $R = \int_a^b f dg$ akkor és csak akkor, ha van olyan (F_n) felosztássorozat $[a, b]$ -n, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = R. \quad *$$

2.13. Tétel. Ha adott $\varepsilon > 0$ -ra egy F felosztásra

$$S(f, F, g) - s(f, F, g) < \varepsilon$$

akkor F minden F_1 finomítására is, ugyanezen $\varepsilon > 0$ mellett

$$S(f, F_1, g) - s(f, F_1, g) < \varepsilon.$$

(lásd 2.8. Segéd-tétel.)

2.14. Tétel. Ha egy F felosztásra adott $\varepsilon > 0$ mellett

$$S(f, F, g) - s(f, F, g) < \varepsilon,$$

akkor tetszőleges $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ esetén

$$\sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta g_i < \varepsilon.$$

2.15. Tétel. Ha $f \in \mathcal{R}(g)$ és 2.14. feltételei teljesülnek, akkor bárhogyan is választjuk a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ helyeket

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta g_i - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon.$$

2.16. Tétel. f akkor és csak akkor integrálható Stieltjes-értelemben $[a, b]$ -ben g szerint (és ott g -szerinti Stieltjes-integrálja R), ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan F felosztása $[a, b]$ -nek, amelyhez tartozó tetszőleges σ integrálközelítő összegre

$$|\sigma - R| < \varepsilon.$$

Jól alkalmazható elégséges feltétel a Stieltjes-integrál létezésére a következő állítás:

2.17. Tétel. Ha f folytonos (g monoton növekedő) $[a, b]$ -ben, akkor $f \in \mathcal{R}(g)$ az $[a, b]$ intervallumon.

Bizonyítás. Mint I. 2.17. csak most $\varepsilon > 0$ -hoz úgy kell $\eta > 0$ -t megválasztani, hogy

$$\eta (g(b) - g(a)) < \varepsilon$$

legyen. Ehhez az $\eta > 0$ -hoz f egyenletes folytonossága miatt van olyan $\delta > 0$, hogy ha F δ -finomságú, akkor minden felosztási részintervallumban

$$M_i - m_i < \eta$$

tehát

$$S(f, F, g) - s(f, F, g) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta g_i < \eta \sum_{i=1}^n \Delta g_i = \eta (g(b) - g(a)) < \varepsilon$$

és akkor 2.10-ből következik, hogy $f \in \mathcal{R}(g)$. *

Most is következik az okoskodásból, hogy minden $\delta(\eta)$ finomságu felosztásra $S - s < \varepsilon$, vagyis minden δ finomságu F felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg f integráljától tetszőlegesen kevés el a reprezentáns pontok választásától függetlenül.

Ugyanez a többlet olvasható ki az alábbi tétel bizonyításából:

2.18. Tétel. Ha f monoton, g folytonos (és monoton növekedő) $[a, b]$ -ben, akkor ott $f \in \mathcal{R}(g)$.

Bizonyítás. $\varepsilon > 0$ -hoz úgy kell most $\eta > 0$ -t megválasztani, hogy - ha pl. f monoton növekedő -

$$\eta (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

legyen. Ehhez az $\eta > 0$ -hoz, g egyenletes folytonossága miatt, megadható $[a, b]$ -nek olyan δ finomságu F felosztása, hogy annak minden részintervallumában $\Delta g_i < \eta$ legyen, és így

$$S(f, F, g) - s(f, F, g) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta g_i < \eta \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \eta (f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

tehát

$$f \in \mathcal{R}(g). *$$

Az itt tapasztaltakra támaszkodva a Stieltjes-integrálnak a következő általánosabb definícióját fogalmazhatjuk meg:

2.19. Definíció. Legyen f és g $[a, b]$ -ben értelmezve. f -et $[a, b]$ -ben g szerint Stieltjes-integrálhatónak mondjuk (jelben $f \in \mathcal{R}(g)$), ha van olyan R szám, hogy $[a, b]$ -nek bármely minden határon túl finomsó (F_n) felosztássorozatra és tetszőleges reprezentáns pontok mellett

$$\sigma(f, F_n, \xi_n, g) \rightarrow R;$$

akkor

$$\int_a^b f(x) dg(x) = R.$$

Nem evidens, hogy 2.19. valóban általánosabb 2.5-nél; be lehet azonban bizonyítani, hogy ha $f \in \mathcal{R}(g)$ a 2.5. alatti értelemben, akkor teljesül a 2.19-ben foglalt kikötés. Speciálisan a 2.17-ben ill. 2.18-ban megfogalmazott feltételek mellett ezt be is bizonyítottuk.

2.17-nél kicsit általánosabban igaz a következő:

2.20. Tétel. Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, g pedig itt $g = g_1 - g_2$ alakban írható, ahol g_1 és g_2 monoton növekedő $[a, b]$ -ben, akkor $f \in \mathcal{R}(g)$, és

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg_1(x) - \int_a^b f(x) dg_2(x) .$$

Bizonyítás. Bármely F felosztás és Ξ reprezentáns pontrendszer mellett

$$\Theta(f, F, \Xi, g) = \Theta(f, F, \Xi, g_1) - \Theta(f, F, \Xi, g_2) . \quad *$$

A 2.20-ben fellépő g függvények osztályát érdemes közelebbről is tanulmányozni. Ehhez a következő elnevezéseket vezetjük be:

2.21. Definíció. Legyen g $[a, b]$ -ben értelmezve. g korlátos variációjú $[a, b]$ -ben, és itt totális variációja $V = V(g, a, b)$, ha $[a, b]$ -nek összes $F = \{x_0, \dots, x_n\}$ felosztására a

$$\sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| = v(g, F)$$

összegek halmaza felülről korlátos, és V a számhalmaz felső határa. A definíció alapján evidens:

2.22. Tétel. Ha g monoton növekedő $[a, b]$ -ben, akkor itt korlátos variációjú, és

$$V(g, a, b) = g(b) - g(a) . \quad *$$

2.23. Tétel. Ha g_1 és g_2 korlátos variációjú $[a, b]$ -ben, $c \in \mathbb{R}$, akkor cg_1 és $g_1 + g_2$ is korlátos variációjú itt.

Bizonyítás. Bármely felosztásra

$$\sum_{i=1}^n |cg_1(x_i) - cg_1(x_{i-1})| = |c| \sum_{i=1}^n |g_1(x_i) - g_1(x_{i-1})| ,$$

$$\sum_{i=1}^n |(g_1(x_i) + g_2(x_i)) - (g_1(x_{i-1}) + g_2(x_{i-1}))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |g_1(x_i) - g_1(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g_2(x_i) - g_2(x_{i-1})| . \quad *$$

E kettőből kiolvasható:

2.24. Tétel. Ha $g = g_1 - g_2$, és g_1, g_2 monoton növekedő $[a, b]$ -ben akkor itt g korlátos variációju.*

Nevezetes ennek következő megfordítása:

2.25. Jordan tétele. Ha g korlátos variációju $[a, b]$ -ben, akkor itt $g = g_1 - g_2$, ahol g_1, g_2 monoton növekedő $[a, b]$ -ben.

Bizonyítás. Legyen $x \in (a, b]$ esetén

$$g_1(x) = V(g, a, x) ,$$

továbbá $g_1(a) = 0$. Ekkor $a \leq c < d \leq b$ esetén

$$(*) \quad g_1(d) - g_1(c) = V(g, c, d).$$

Ez evidens, ha $c = a$; legyen $a < c < d \leq b$. Most legyen

$F = \{x_0, \dots, x_n\}$ $[a, d]$ -nek egy felosztása, $x_{i-1} \leq c < x_i$, és

$F_1 = \{x_0, \dots, x_{i-1}, c, x_i, \dots, x_n\}$. Mivel

$$|g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq |g(x_i) - g(c)| + |g(c) - g(x_{i-1})| ,$$

azért $v(g, F) \leq v(g, F_1) = v(g, F_2) + v(g, F_3)$, ahol

$$F_2 = \{x_0, \dots, x_{i-1}, c\}, \quad F_3 = \{c, x_i, \dots, x_n\}.$$

Igy

$$v(g, F) \leq V(g, a, c) + V(g, c, d),$$

és

$$(**) \quad V(g, a, d) \leq V(g, a, c) + V(g, c, d).$$

Másrészt adott $\varepsilon > 0$ -hoz van $[a, c]$ -nek olyan F_4 és $[c, d]$ -nek olyan F_5 felosztása, hogy

$$v(g, F_4) > V(g, a, c) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad v(g, F_5) > V(g, c, d) - \frac{\varepsilon}{2},$$

s akkor $[a, d]$ -nek $F_6 = F_4 \cup F_5$ felosztására

$$v(g, F_6) = v(g, F_4) + v(g, F_5) > V(g, a, c) + V(g, c, d) - \varepsilon.$$

s annál inkább

$$(***) \quad V(g, a, d) > V(g, a, c) + V(g, c, d) - \varepsilon$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ mellett (***) a (**) -gal ellentétes egyenlőtlenségbe megy át, úgyhogy

$$g_1(d) = V(g, a, d) = V(g, a, c) + V(g, c, d) = g_1(c) + V(g, c, d),$$

s innen (*) adódik.

(*)-ból $V(g, c, d) \geq 0$ folytán látszik, hogy g_1 monoton növekedő $[a, b]$ -ben. Másrészt $[c, d]$ -nek $F = \{c, d\}$ felosztását tekintve evidensen

$$g(d) - g(c) \leq |g(d) - g(c)| = v(g, F) \leq V(g, c, d),$$

úgyhogy (*)-ból

$$g(d) - g(c) \leq g_1(d) - g_1(c),$$

vagyis $g_2 = g_1 - g$ is monoton növekedő. *

2.20 és 2.25. egybevetéséből nyerjük:

2.26. Tétel. Ha f folytonos és g korlátos variációju $[a, b]$ -ben, akkor $f \in \mathcal{R}(g)$. *

Ami a Stieltjes-integrál tulajdonságait illeti, a következő állítások monoton növekedő g esetén ugyanúgy igazolhatók, mint a Riemann-integrálra vonatkozó analóg tételek; (ezekből a folytonos f és korlátos variációju g esetére áttérhetünk 2.20 (*) alapján).

2.27. Tétel. Ha a szereplő integrálok léteznek, akkor

$$a) \quad \int_a^b c f_1(x) dg(x) = c \int_a^b f_1(x) dg(x) \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$$b) \quad \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) + \int_a^b f_2(x) dg(x),$$

$$c) \int_a^b f_1(x) dg(x) = \int_a^c f_1(x) dg(x) + \int_c^b f_1(x) dg(x) \quad (a < c < b).$$

Gyakran visszavezethető a Stieltjes-integrál kiszámítása közönséges Riemann-integrál kiszámítására.

Erre vonatkozik a

2.28. Tétel. Ha f és g folytonos $[a, b]$ -ben, továbbá g (a, b) -ben differenciálható és g' Riemann-szerint integrálható, akkor

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Bizonyítás. A feltételek értelmében mind a bal oldali Stieltjes-integrál (1. feladat), mind a jobb oldali Riemann-integrál létezik. Ha $[a, b]$ -nek egy F felosztásához a $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ ($i = 1, \dots, n$) reprezentáns pontokat úgy választjuk, hogy

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

legyen, akkor

$$\begin{aligned} \sigma(f, F, \Xi, g) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sigma(fg', F, \Xi). \end{aligned}$$

A felosztást minden határon túl finomítva a fenti kifejezés bal és jobb oldala a megfelelő integrálokhoz tart. *

2.29. Megjegyzés. Az I.5.3. tételben tulajdonképpen az

$$\int_a^b \varphi^k(x) d\varphi(x) \quad (k \neq -1), \text{ ill. } \int_a^b \frac{1}{\varphi(x)} d\varphi(x)$$

Stieltjes-integrálok kiszámítására adtunk meg képletet:

$$\int_a^b \varphi^k(x) d\varphi(x) = \int_a^b \varphi^k(x) \cdot \varphi'(x) dx = \left[\frac{\varphi^{k+1}(x)}{k+1} \right]_a^b = \dots \quad (k \neq -1),$$

$$\int_a^b \frac{1}{\varphi(x)} d\varphi(x) = \int_a^b \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx = \left[\ln |\varphi(x)| \right]_a^b = \dots$$

2.30. Megjegyzés. A helyettesítési integrálás szabályát is megfogalmazhatjuk Stieltjes-integrálokkal:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du,$$

ill

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) d\varphi(u) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du,$$

ahol

$$u = \varphi^{-1}(x), \quad \alpha = \varphi^{-1}(a), \quad \beta = \varphi^{-1}(b), \quad (\text{I. 5.8.})$$

2.31. Feladatok

1. Legyen g folytonos $[a, b]$ -ben, differenciálható (a, b) -ben és itt $|g'| \leq M$. Igazoljuk, hogy g korlátos variációjú $[a, b]$ -ben, és $V(g, a, b) \leq M(b-a)$.

2. Igazoljuk, hogy 2.23. feltételei mellett

$$V(cg_1, a, b) = |c| V(g_1, a, b),$$

$$V(g_1 + g_2, a, b) \leq V(g_1, a, b) + V(g_2, a, b).$$

3. Igazoljuk, hogy ha $[a, b]$ -ben $|f| \leq M$, g korlátos variációjú és $f \in \mathcal{R}(g)$, akkor

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq M \cdot V(g, a, b).$$

4. Legyen $a < 0 < b$, f folytonos a 0 helyen,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [a, 0), \\ 1, & \text{ha } x \in [0, b]. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(0).$$

(Most 2.28 feltételei nem teljesülnek, mégis szokták a $g' = \delta$ szimbólumot (Dirac-féle δ) bevezetve az alábbi írásmódot alkalmazni:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) \delta(x) dx.)$$

5. Igazoljuk, hogy ha $\int_a^b f(x) dg(x)$ létezik, akkor

$$\int_a^b f(x) dg(x) + \int_a^b g(x) df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

(Tekintsünk olyan közelítő összegeket, amelyek közül az elsőnek osztópontjai a másodiknak reprezentáns pontjai és viszont.)

IV. AZ INTEGRÁLSZÁMITÁS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

1. Terület- és térfogatszámítás

1.1. Bevezetésképpen szóljunk néhány szót görbék egyenletének ún. paraméteres megadásáról.

Sokszor valamely síkgörbe egyenlete nem $y = f(x)$ alakban van megadva, hanem az x és y koordináta egy harmadik változó, az ún. paraméter függvényeként adott:

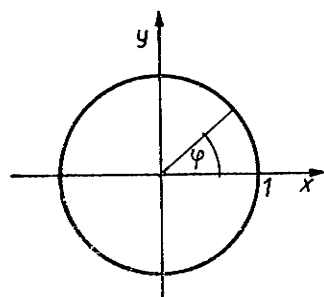
$$(*) \quad \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned}$$

Ilyen paraméteres megadásra jutunk pl. ha egy az xy síkban mozgó pont pályájának egyenletét úgy írjuk fel, hogy megadjuk minden egyes időpillanatban a mozgó pont derékszögű koordinátáit, azaz megadjuk x és y -t az idő (t) függvényeként. A $(*)$ összefüggést a görbe paraméteres egyenletrendszerének nevezzük.

Egy görbének igen sokféle paraméteres egyenletrendszere adható meg, aszerint, hogy mit választunk paraméternek. Pl. az $O(0,0)$ középpontú egységnyi sugarú kör derékszögű koordinátás egyenlete

$$(**) \quad x^2 + y^2 = 1,$$

ha azonban x -et, ill. y -t, ill. az 1. ábrán látható φ középponti szöget vezettük be paraméternek, a kör $x > 0$, és $y > 0$ ívének, ill. az egész körvonalnak paraméteres egyenletrendszere



4. ábra

$$\begin{aligned} x &= u, & y &= v, & x &= \cos \varphi, \\ y &= \sqrt{1-u^2}, & x &= \sqrt{1-v^2}, & y &= \sin \varphi \\ (0 < u < 1), & (0 < v < 1), & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

A fenti paraméteres egyenletrendszerek tulajdonképpen $-1 \leq u \leq 1$ esetén az $y \geq 0$, ill.

$-1 \leq \varphi \leq 1$ esetén a $x \geq 0$ félkörív, ill. ha $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ az egész körív egyenletét is megadják.

Megaható azonban(**) egyenlete polárkoordináták segítségével is. (A polárkoordináta-rendszer egy pontból - kezdőpont, origó - és egy ebből kiinduló félegyenesből - a polárrendszer tengelyéből - áll; egy tetszőleges pont polárkoordinátái: az origótól mért távolság, r - a polársugár - és ennek a polárrendszer tengelyével bezárt szöge - a polárszög, φ - ; egy P pont megadása polárkoordináták (r, φ) segítségével nem egyértelmű, hiszen nyilván (r, φ) és $(r, \varphi + 2k\pi)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) ugyanazt a P pontot határozzák meg.) A derékszögű koordináta-rendszerben úgy véve fel a polárkoordináta-rendszert, hogy annak origója a derékszögű koordináta-rendszer origójába, tengelye pedig az x tengely pozitív irányába essék, a derékszögű és polárkoordináták között a következő kapcsolat áll fenn:

$$x = r \cos \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y = r \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{Speciálisan(**) egyenle-}$$

te polárkoordinátákkal tehát

$$r = 1.$$

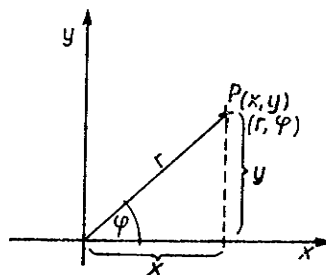
A polárkoordináta-rendszert a derékszögű koordináta-rendszerrel a fenti módon össze-
ejtve, amennyiben egy görbe egyenletét polárkoordinátákkal

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

alakban adtuk meg, ugyanennek a görbének következő paraméteres egyenletrendszerét is megadhatjuk (a polárszöget választva paraméternek)

$$x = r(\varphi) \cos \varphi,$$

$$y = r(\varphi) \sin \varphi, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$



5. ábra

1.2. A görbe alatti idom területe (lásd I.1.5. ill. I.1.6), ha f $[a, b]$ -ben folytonos és ≥ 0 , akkor

$$a) \quad A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}, \quad T(A) = \int_a^b f(x) \, dx,$$

$$b) \quad A = \{(x, y) = x = x(t), \quad y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta, \quad 0 \leq y \leq y(t), \quad a = x(\alpha), < \\ < b = x(\beta)\}$$

és $y \geq 0, \quad x' \geq 0$ folytonos, akkor

$$T(A) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) \, dt.$$

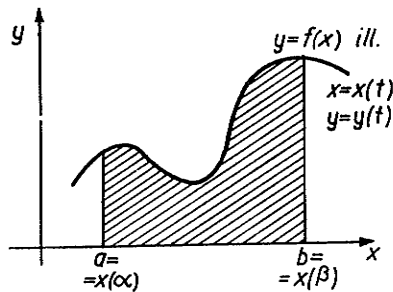
(Utóbbi az a) képlethől a helyettesítéssel integrálás képletének alkalmazásával adódik.

Pl. 1. az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletű ellipszis $x > 0, \quad y > 0$ negyedének területét megadja

$$T = \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx.$$



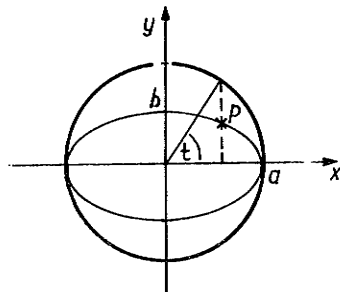
6. ábra

Helyettesítéssel ez az integrál kiszámítható, de egyszerűbb mindjárt az ellipszis alkalmas paraméteres egyenletrendszerét felírva (a paraméter jelentését lásd a 7. ábrán)

$$x = a \cos t,$$

$$y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

közvetlenül a következő integrált kiszámítani:



7. ábra

$$T = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = ab \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= ab \frac{\pi}{4}$, vagyis az egész ellipszis területe $ab\pi$.

2. Az $y = e^{-x}$ görbe a $x \geq 0$ része, a két koordinátatengely és $x = a$ által bezárt síkrész területének mérőszámát a következő integrál adja meg:

$$T = \int_0^a e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^a = 1 - e^{-a} \quad (T \rightarrow 1, \text{ ha } a \rightarrow +\infty, \text{ tehát}$$

az e^{-x} görbe és a koordinátatengelyek által bezárt terület nagysága 1).

1.3. Szektorterület meghatározása.

Tekintsük azt az idomot, amelyet a polárkoordinátákkal megadott $r = f(\varphi)$ egyenletű görbe ($f \geq 0$ folytonos), valamint a $\varphi = \alpha$ ill. $\varphi = \beta$ egyenletű félegyeneseknek a görbéig terjedő (esetleg ponttá fajuló) szakaszai határolnak (8. ábra). Ennek az ún. szektorszerű idomnak területe

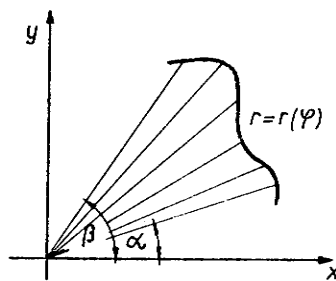
$$T = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$$

Ha ugyanis $f \in \mathcal{R}$, akkor $[\alpha, \beta]$ -nak tetszőleges F felosztására az

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \dots < \varphi_n = \beta$$

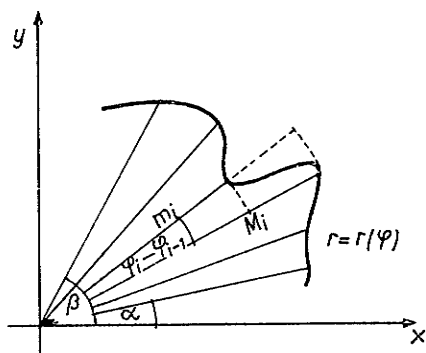
$$m_i = \inf \{ f(\varphi) : \varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i] \},$$

$$M_i = \sup \{ f(\varphi) : \varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i] \}$$



8. ábra

jelöléssel, nyilván (9. ábra) a vizsgált idom $\varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i$ polárszögu darabjának területe a m_i ill. M_i sugaru körcikkek területe közé esik, vagyis



9. ábra

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \leq$$

$$\leq T \leq \sum_{i=1}^n M_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}),$$

és itt a jobb, ill. bal oldalon az

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$$

integrál felső ill. alsó összege áll.

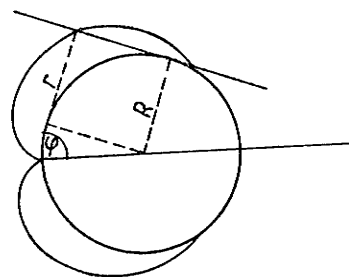
Mivel $f \in \mathcal{R}$, a felosztásokat minden határon túl finomítva az alsó és felső összegek ehhez az integrálhoz tartanak, T közéjük eső értéke tehát csak a fenti integrállal lehet egyenlő.

Pl. a kardioid nevű görbe által bezárt terület mérőszáma, mivel a görbe egyenlete

$$r = R(1 + \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \dots = \frac{3}{2} R^2 \pi.$$

(A görbe úgy keletkezik, hogy a R sugaru kör érintőire a kör kerületének egy pontjából merőlegeseket bocsátunk; a kardioid e merőlegesek talppontjainak mértani helye. 10. ábra).



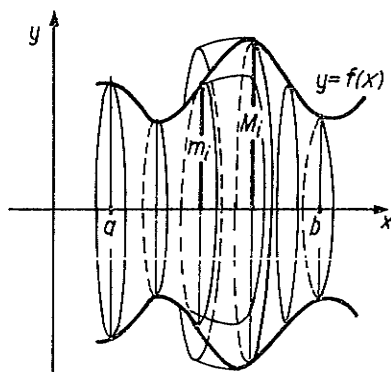
10. ábra

1.4. Forgástest köbtartalmának meghatározása.

Tekintsük azt a forgástestet, melyet a folytonos $y = f(x)$ egyenletű görbe $f(x) \geq 0$ x tengely körüli forgatásánál nyert forgásfelület és az x tengelyre annak $x = a$ ill. $x = b$ abszcisszájú pontjában állított merőleges síkok határolnak. E test köbtartalma

$$K = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Tekintsük ugyanis $[a, b]$ -nek egy F felosztását, akkor, a szokásos jelölésekkel élve, a vizsgált test $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ szakaszhoz tartozó részének köbtartalma nyilván az $x_i - x_{i-1}$ magasságu és m_i ill. M_i sugaru hengerek köbtartalma közé esik, azaz (11. ábra)



11. ábra

$$\pi \sum_{i=1}^n m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \leq K \leq \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

A bal és jobb oldalon a

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

integrál alsó, ill. felső összege áll, a felosztás minden határon túl való finomításánál mindkettő ehhez az integrálhoz tart, így K értéke is ezzel az integrállal egyenlő.

Pl. az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis $y > 0$ ívét az x tengely körül megforgatva

a keletkező forgási ellipszoid köbtartalma

$$K = \int_{-a}^a \frac{b^2}{a} (a^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4}{3} ab^2 \pi.$$

E képletből $a = b = r$ esetében a gömb köbtartalmának ismert képletére jutunk.

Az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű görbe $1 \leq x \leq a$ darabjának x tengely körüli forgatásával nyert felület és az $x = 1$ és $x = a$ a síkokkal határolt test köbtartalma

$$K = \pi \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right).$$

E kifejezésnek véges határértéke van, ha $a \rightarrow \infty$. Azt kaptuk tehát, hogy az $y = \frac{1}{x}$ görbe $x \geq 1$ darabjának x tengely körüli forgatásával nyert, végtelenbe nyúló test köbtartalma π . (Ugyanakkor az $y = \frac{1}{x}$ görbe alatti terület $[1, \infty)$ -ben nem véges!)

2. Ivhosszuság számítása

2.1. Definíció. Legyen $x = f(t)$, $y = g(t)$ az $[\alpha, \beta]$ intervallumban folytonos függvény. Ekkor az

$$x = f(t),$$

$$y = g(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

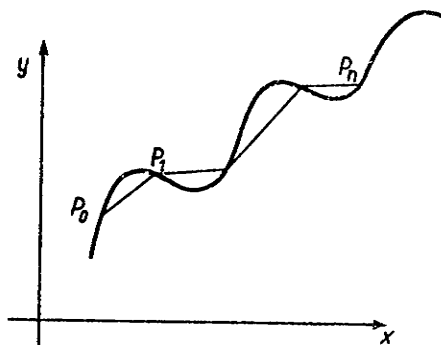
paraméteres egyenletrendszer $[\alpha, \beta]$ -ban egy folytonos görbe egyenletét állítja elő.

Vegyünk fel a görbén a befutás (növekedő t értékek) sorrendjében a $P_0, P_1, \dots, P_n$ pontokat, és kössük őket ebben a sorrendben össze egyes darabokkal (12. ábra). Így egy, a görbedarabba beírt hurpoligont kapunk (P_0 és P_n legyen a görbedarab kezdő, ill. végpontja). Az eképpen nyerhető görbébe írt hurpoligonok hosszúságáról a következő mondhatjuk:

2.2. Definíció. Ha egy folytonos görbedarab beosztásainak olyan sorozatát tekintve, melyben a szomszédos osztópontokhoz tartozó paraméterértékek különbsége 0-hoz tart, a megfelelő hurpoligonok hosszúsága minden ilyen sorozatban ugyanazon határértékhez tart, akkor a vizsgált folytonos görbedarabot rektifikálhatónak mondjuk. A hurpoligonok hosszúságaiból az itt részletezett módon képezett sorozat határértéke a görbedarab ivhosszsága.

Az így értelmezett ivhosszuság a paraméter választásától független. Pontosabban megfogalmazva:

2.3. Tétel. Ha az $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe egyenletébe a t paraméter helyett a $t = \varphi(u)$ képlettel új u paramétert vezetünk be, és φ szigorúan monoton, folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumban, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$, akkor a görbe ivhosszusága változatlan marad.



12. ábra

Bizonyítás. A tett feltevések mellett mindkét paraméterbeosztáshoz ugyanazon hurpoligonok tartoznak, és $[a, b]$ minden határon túl való finomításakor $\varphi(u)$ egyenletes folytonossága miatt $[\alpha, \beta]$ is minden határon túl finomodik. $[\alpha, \beta]$ finomításakor $\varphi^{-1}(t)$ egyenletes folytonossága miatt $[a, b]$ felosztása is minden határon túl finomodik, és ebből az állítás már következik. *

A 2.2. definícióból következik az alábbi

2.4. Tétel. Rektifikálható görbedarab ivhosszusága a beirt hurpoligonok hosszúságainak felső határa.

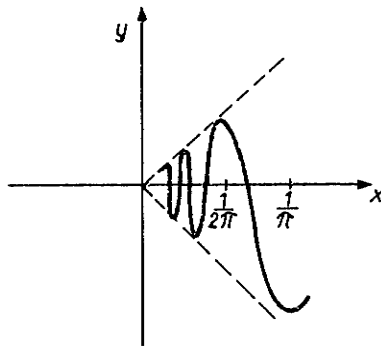
(Gyakran ezt az állítást is használják az ivhosszuság definíciójaként, akkor persze ebből vezetve le a 2.2-ben megfogalmazottakat.)

Bizonyítás. Új osztópont beiktatásakor a beirt hurpoligon hosszúsága nem csökkenhet, ha tehát volna olyan hurpoligon, melynek hosszúsága a görbedarab ivhosszuságánál nagyobb volna, akkor ennek osztópontjaihoz újabbakat hozzávéve olyan minden határon túl finomodó beosztás-sorozatot készíthetnénk, amelyhez tartozó hurpoligonok hosszúságai nem konvergálnak a görbe ivhosszuságához. *

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy nem minden folytonos görbedarab rektifikálható. Pl. az

$$y = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } 0 < x < \frac{2}{\pi} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

egyenletű görbedarab $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ -ben folytonos, de nem rektifikálható. Az $x = 0$, $x = \frac{1}{n\pi}$, $x = \frac{1}{(n-1)\pi}$, ..., $x = \frac{1}{\pi}$, $x = \frac{2}{\pi}$ abszcisszájú pontokat a görbén felvéve, a beírt hurpoligon hosszúsága nagyobb, mint



13. ábra

$$\frac{1}{n\pi} + \left(\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{(n-1)\pi} + \left(\frac{1}{(n-1)\pi} + \frac{1}{(n-2)\pi} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \right) + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right)$$

(13. ábra), ez pedig akármilyen nagy lehet, ha n elég nagy. A görbébe beírt hurpoligonok hosszúságai tehát nem korlátosak, a görbe nem rektifikálható.

Rektifikálható görbék néhány nevezetes tulajdonságát soroljuk fel az alábbiakban, melyeknek bizonyítását feladatként tűzzük ki:

2.5. Tétel. Ha az $x = f(t)$, $y = g(t)$ görbének $\alpha \leq t \leq \beta$ darabja rektifikálható, és $\alpha \leq \alpha' < \beta' \leq \beta$, akkor ugyanezen görbének $\alpha' \leq t \leq \beta'$ darabja is rektifikálható. (Rektifikálható görbedarab része is rektifikálható.)

2.6. Tétel. Ha az $x = f(t)$, $y = g(t)$ görbének $\alpha \leq t \leq \beta$ és $\beta \leq t \leq \gamma$ darabjai rektifikálhatóak, akkor az $\alpha \leq t \leq \gamma$ darab is rektifikálható és ivhosszúsága az előbbi két darab ivhosszúságának összegével egyenlő.

Bármely rektifikálható görbedarab ivhosszúsága (hacsak a görbedarab nem fajul el egy ponttá) pozitív, az előző tétel alapján tehát az $[\alpha, t]$ intervallumnak megfelelő görbedarab ivhosszúságát $s(t)$ -vel jelölve, $s(t)$ monoton növekvő függvény. Nyilvánvaló, hogy ha f és g egyetlen intervallumban sem állandó egyszerre, akkor s szigorúan monoton növekvő. Sokszor célszerű lesz egy görbe megadásánál az ivhosszúságot paraméterként bevezetni. Ahhoz, hogy ezt megteheszük, még a következőt kell belátnunk:

2.7. Tétel. Az $[\alpha, \beta]$ paraméterintervallumban vizsgált rektifikálható görbe $[\alpha, t]$ intervallumnak megfelelő darabjának $s(t)$ ivhosszúsága t -nek folytonos függvénye.

Bizonyítás. Elég s t helyen vett bal oldali folytonosságát igazolnunk, a jobbról való folytonosság hasonlóképpen bizonyítható.

Tekintsük tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett $[\alpha, t]$ -nek egy olyan F felosztását, amelynek megfelelő hurpoligon hosszúsága $> s(t) - \frac{\varepsilon}{2}$. Jelöljük a felosztásban a t előtti utolsó osztópontot t' -vel. $\varepsilon > 0$ -hoz válasszuk meg $h > 0$ -t úgy, hogy $t' < t-h < t$ legyen, és a $t-h$ és t paraméterű görbepontokat összekötő hur hosszúsága is kisebb legyen $\frac{\varepsilon}{2}$ -nél (ez a görbe paraméteres egyenletrendszerében szereplő f és g függvény folytonossága miatt megtehető). Az előbbi F felosztáshoz a $t-h$ osztópontot hozzávéve, a megfelelő poligon hosszúsága még inkább $> s(t) - \frac{\varepsilon}{2}$, ill. az utolsó poligon-oldalt elhagyva, a megmaradó poligon hosszúsága még mindig $> s(t) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = s(t) - \varepsilon$.

Az $[\alpha, t-h]$ intervallumnak megfelelő görbedarab ivhosszúsága, $s(t-h)$, nagyobb azonban ezen hurpoligon hosszúságánál, tehát még inkább áll:

$$s(t-h) > s(t) - \varepsilon.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett elég kicsiny h -ra mindig fennáll, azért s a t helyen balról folytonos. *

Egy rektifikálható görbe ivhosszúságának kiszámításáról a következőket mondhatjuk:

2.8. Tétel. Ha f és g $[\alpha, \beta]$ -ban folytonos differenciálhányadosokkal bírnak, akkor az $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ görbedarab rektifikálható és ivhosszúsága

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt.$$

Bizonyítás. Vegyük fel az

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = \beta$$

paraméterértékeket és jelöljük P_i -vel a t_i paraméterértéknek megfelelő görbepontot. A $P_{i-1}P_i$ szakasz hosszúsága nyilván

$$\sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2},$$

az egész poligon hossza

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.$$

A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva azonban

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\tau_i')(t_i - t_{i-1}), \quad \tau_i' \in [t_{i-1}, t_i],$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\tau_i'')(t_i - t_{i-1}), \quad \tau_i'' \in [t_{i-1}, t_i],$$

és így a kérdéses poligon hosszúsága

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n \sqrt{f'(\tau_i')^2 + g'(\tau_i'')^2} (t_i - t_{i-1})$$

alakban is felírható. Ha ebben az összegben $g'(\tau_i'')$ helyett $g'(\tau_i')$ állna, akkor az összeg az

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

integrál egy integrálközelítő összege volna, amely a beosztás minden határon túl való finomításánál az integrálandó függvény feltételezett folytonossága miatt a kérdéses integrálhoz konvergálna. Azt kell tehát kimutatnunk, hogy ha a felosztás már elég finom, akkor $g'(\tau_i'')$ helyébe $g'(\tau_i')$ -t írva,

a (*) összeg csak kevéssel változik meg.

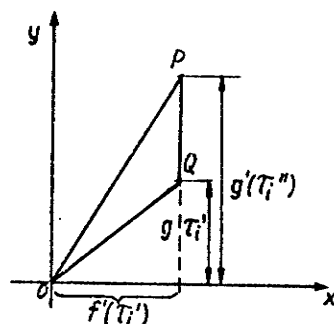
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny, és válasszuk meg $\delta > 0$ -át olyan kicsinyre, hogy az intervallum valamely δ -nál rövidebb szakaszán g' oszcillációja már ε -nál kisebb legyen. (Ez g' feltételezett folytonossága miatt megtehető.) Tegyük fel továbbá, hogy a választott felosztás már δ -nál finomabb; ekkor

$$|\tau_i' - \tau_i''| < \delta \text{ és így } |g'(\tau_i') - g'(\tau_i'')| < \varepsilon$$

minden i -re. Mivel

$$\sqrt{(f'(\tau_i'))^2 + (g'(\tau_i''))^2} \quad \text{ill.} \quad \sqrt{(f'(\tau_i'))^2 + (g'(\tau_i'))^2}$$

- mint ahogyan az a 14. ábrán látható - a sík P ill. Q pontjának a kezdőponttól való távolságaként fogható fel, ezek különbsége legfeljebb a 14. ábrán látható OPQ háromszög PQ oldalával lehet egyenlő. Ennek az oldalnak hossza azonban a fentiek értelmében $< \varepsilon$, így tehát δ -nál finomabb felosztás esetén



14. ábra

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{(f'(\tau_i'))^2 + (g'(\tau_i'))^2} (t_i - t_{i-1}) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \sqrt{(f'(\tau_i'))^2 + (g'(\tau_i'))^2} (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{(f'(\tau_i'))^2 + (g'(\tau_i'))^2} - \sqrt{(f'(\tau_i'))^2 + (g'(\tau_i'))^2} \right| (t_i - t_{i-1}) < \\ & < \sum_{i=1}^n \varepsilon (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon (\beta - \alpha), \end{aligned}$$

ez pedig tetszőlegesen kicsiny, ha ε elég kicsiny. *

Ha a vizsgált görbedarab egyenlete $y = f(x)$ (f' folytonos) alakban adott, akkor a $t = x$ paraméterválasztással az $a \leq x \leq b$ görbedarab ívhosszúságára a következő képlet adódik:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Egyszerű számolással adódik, hogy ha egy görbe egyenletét polárkoordinátarendszerben adjuk meg (pl. $r = f(\varphi)$), akkor φ paraméterválasztással ($\varphi \in [\alpha, \beta]$) az ívhosszúságra az

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2} d\varphi$$

képlet adódik (feltéve, hogy pl. f' folytonos).

Például

1. Az $y = \operatorname{ch} x$ un. láncgörbe $0 \leq x \leq a$ szakaszának hosszúsága

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + ((\operatorname{ch} x)')^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^a \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_0^a = \operatorname{sh} a.$$

2. Az $r = R(1 + \cos \varphi)$ polárkoordinátás egyenlettel megadott kardioid ívhosszúsága

$$\begin{aligned} L &= R \int_0^{2\pi} \sqrt{((1+\cos \varphi)')^2 + (1+\cos \varphi)^2} d\varphi = \dots = R \int_0^{2\pi} \sqrt{1+2\cos \varphi} d\varphi = \\ &= 2R \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4R \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \dots = 8R. \end{aligned}$$

Az ívhosszúság kiszámításánál gyakran jutunk elemien nem integrálható integrálra. Ezt közelítően, alkalmas integrálközelítő összeggel, vagy más - később ismertetésre kerülő - közelítő módszerrel határozzuk meg.

2.9. Feladatok

1. Igazoljuk 2.5. és 2.6. állítását.

2. Az ismeretlen y függvény, annak x független változója és x szerinti első deriváltja, y' között fennálló

$$(*) \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

összefüggést szeparálható (szétválasztható változóju) differenciálegyenletnek nevezik. Igazoljuk a következő állítást:

Tétel. Ha $f(a,b)$ -ben, $g(c,d)$ -ben folytonos és $g \neq 0$, akkor minden (x_0, y_0) ponton (ahol $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$) áthalad egy és csak egy olyan függvény görbéje, amely a $(*)$ összefüggést kielégíti. (Az ilyen függvényt a differenciálegyenlet $y(x_0) = y_0$ feltételt kielégítő megoldásának, görbáját a differenciálegyenlet integrálgörbéjének nevezik.) A $(*)$ differenciálegyenlet $y(x_0) = y_0$ feltételt kielégítő megoldását a

$$(**) \quad w(y) = \int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} ; \quad \int_{x_0}^x f(x) dx = v(x), \quad w(y) = v(x)$$

összefüggésből (implicit alakban) integrálással kapjuk meg. Itt $x \in (\alpha, \beta)$, ahol $(\alpha, \beta) [a, b]$ -nek az a legnagyobb x_0 -t tartalmazó részintervalluma; amelybe eső x -ekre fennáll:

$$(***) \quad \gamma = \inf \{ w(y) : y \in (c, d) \} < v(x) < \sup \{ w(y) : y \in (c, d) \} = \delta.$$

3. Az áram munkájának meghatározása

3.1. Ha egy vezetőben I intenzitású és V feszültségű egyenáram t ideig folyik, akkor az áram által végzett munka:

$$L = I \cdot V \cdot t.$$

Ha az áram intenzitása és feszültsége változik, akkor a $t = a$ és $t = b$ pillanatok közt végzett munka értékét az

$$(*) \quad L = \int_a^b I(t) \cdot V(t) dt$$

képlet adja meg. Erre a képletre a következő megfontolással juthatunk el:
Az $[a, b]$ időköz az

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$$

pillanatokkal részekre osztva fel, és az i -edik rész-időintervallumban az áram és feszültség tényleges, változó értékét az időtartam valamely τ_i pillanatában felvett $I(\tau_i)$ és $V(\tau_i)$ értékével pótolva, a $[t_{i-1}, t_i]$ időköz alatt végzett munka közelítő értéke $I(\tau_i) V(\tau_i) (t_i - t_{i-1})$ ($t_i \in [t_{i-1}, t_i]$), és így az egész $[a, b]$ -ben végzett munka közelítő értéke

$$\sum_{i=1}^n I(\tau_i) V(\tau_i) \Delta t_i$$

lesz. Ha $I \in \mathcal{R}$, $V \in \mathcal{R}$ (pl. korlátos, véges számú hely kivételével folytonos függvények), akkor $[a, b]$ felosztását minden határon túl finomítva a fenti összeg valóban a (*) integrálhoz tart, ez tekinthető tehát a munka értékének.

Ha pl. egy áramkörben $V(t) = V_0 \sin 2\pi\nu t$ feszültségű váltóáram kering, tiszta ohmikus ellenállás esetén az intenzitás $I(t) = I_0 \sin 2\pi\nu t$, az egy periódus alatt végzett munka ($T = \frac{1}{\nu}$):

$$L = \int_0^T V_0 I_0 \sin^2 2\pi\nu t \, dt = V_0 I_0 \int_0^T \frac{1 - \cos 4\pi\nu t}{2} \, dt = \dots = \frac{1}{2} V_0 I_0 T.$$

Eszerint az ilyen váltóáram munkája akkora, mint a $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ feszültségű,

$\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ intenzitású egyenáram munkája (a $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ ill. $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ értéket effektív feszültségnek, ill. effektív intenzitásnak nevezik).

3.2. Ha váltóáramu áramkörben önindukció van, akkor a feszültség és az áram már nincsenek általában fázisban, hanem közöttük φ fáziskülönbség mutatkozik:

$$V(t) = V_0 \sin 2\pi\nu t, \quad I(t) = I_0 \sin (2\pi\nu t - \varphi).$$

Az ilyen áramnak egy periódus alatt végzett munkája:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^T V_0 \sin 2\pi\nu t \, I_0 \sin (2\pi\nu t - \varphi) \, dt = \\ &= V_0 I_0 \frac{1}{2} \int_0^T (\cos \varphi - \cos (4\pi\nu t - \varphi)) \, dt = \dots = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi \cdot T. \end{aligned}$$

Ilyenkor tehát a munka kiszámításánál az effektív feszültség és effektív intenzitás szorzatát még a fáziskülönbség koszinuszával is szorozni kell.

3.3. Tiszta ohmikus ellenállást tartalmazó áramkörben az intenzitás és a feszültség között az $I = \frac{V}{R}$ összefüggés érvényes. Ilyen áram munkáját tehát az

$$L = \int_a^b V(t) \cdot \frac{V(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \int_a^b V(t)^2 dt$$

képlet adja meg. Ha $\bar{V}$ jelenti azon egyenáram feszültségét, mely a kérdéses áramkörben ugyanazon idő alatt ugyanakkor munkát végez, akkor

$$(b-a) \frac{\bar{V}^2}{R} = \frac{1}{R} \int_a^b V(t)^2 dt$$

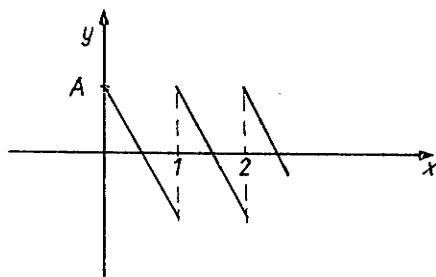
alapján

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b V(t)^2 dt}.$$

Ezt az értéket most is effektív feszültségnek nevezzük.

Pl. a 15. ábrán szemléltetett un. fűrészrezgés esetén az effektív feszültség

$$\bar{V} = \sqrt{\int_0^1 A^2 (1-2t)^2 dt} = A \sqrt{\left[\frac{(1-2t)^3}{-2 \cdot 3} \right]_0^1} = A \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{A}{\sqrt{3}}.$$



15. ábra

V. AZ INTEGRÁL KÖZELÍTŐ KISZÁMITÁSA

A gyakorlatban igen sok, véges sok elemi függvény segítségével ki nem számítható (más szavakkal: zárt alakban meg nem adható) integrállal találkozhatunk. Ilyen pl.

$$\int_1^b \frac{e^x}{x} dx, \quad \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx, \quad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}.$$

Az ilyen "elemien nem integrálható" integrálok kiszámítására több közelítő módszer ismeretes, ezek közül megemlítünk az alábbiakban néhány numerikus módszert, utalva egyben a módszer alkalmazásánál, a közelítéssel elkövetett hiba becslésére is.

1. Téglalap-szabály. E közelítő eljárásnál az integrál helyett alkalmas integrálközelítő összeget számolunk ki. Mivel geometriailag a módszer azt jelenti, hogy $[a, b]$ -ben az $f \geq 0$ folytonos függvény görbéje alatti terület helyett alkalmas téglalapok területének összegével számolunk:

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n})$$

indokolt a téglalap-szabály elnevezés. E közelítésnél elkövetett H hiba nagysága, ha $[a, b]$ -ben f' korlátos ($|f'| \leq N$) így becsülhető:

$$|H| \leq N \frac{(b-a)^2}{n}.$$

A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva ugyanis

$$|H| = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right| \leq \frac{b-a}{n} \left| \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \right| =$$

$$= \frac{b-a}{n} \left| \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) \frac{b-a}{n} \right| \leq \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n N = N \frac{(b-a)^2}{n}.$$

2. Trapéz-szabály. Legyen $f \geq 0$ folytonos $[a, b]$ -ben. Tekintsük $[a, b]$ -nek ismét egy egyenletes felosztását, és pótoljuk minden felosztási részintervallumban f görbét az $(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))$ pontokon áthaladó egyenessel. A görbe alatti terület helyett az így nyert megfelelő trapéz területével számolva:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2} \right) =$$

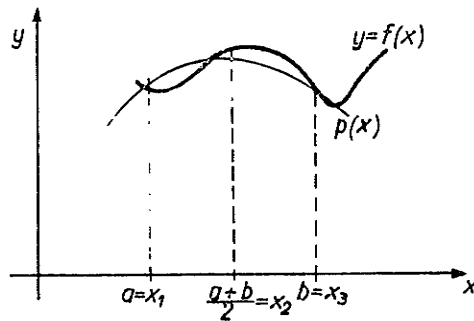
$$= \frac{b-a}{2n} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)).$$

Be lehet bizonyítani, hogy ha f kétszer differenciálható $[a, b]$ -ben és $|f''| \leq M$, akkor a trapéz-szabállyal való közelítésnél elkövetett hiba így becsülhető:

$$|H| = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2n} (f(a)+f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M.$$

3. Simpson-szabály. Legyen ismét $f \geq 0$ folytonos $[a, b]$ -ben. Pótoljuk $[a, b]$ -ben f görbét a $P_1(a, f(a)), P_2(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})), P_3(b, f(b))$ pontokon áthaladó másodfokú parabolaívvel, melynek egyenletét a p függvény adja meg. A Simpson-szabály alkalmazásával az f görbéje alatti terület helyett a p görbéje (a parabolaív) alatti területet számítjuk ki, előbbit az utóbbival közelítjük meg:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx.$$



16. ábra

A másodfoku parabolaív egyenletét az

$$a = x_1, \quad \frac{a+b}{2} = x_2, \quad b = x_3$$

jelöléssel könnyű felírni:

$$p(x) = A(x-x_1)^2 + B(x-x_1) + f(x_1),$$

hiszen $p(x_1) = f(x_1)$ kell, hogy legyen. a $p(x_2) = f(x_2)$, $p(x_3) = f(x_3)$ összefüggések pedig az A és B együtthatók számára adnak meg lineáris egyenletrendszert. Ezt megoldva, végül is

$$p(x) = f(x_1) - \frac{3f(x_1) - 4f(x_2) + f(x_3)}{2h} (x-x_1) + \frac{f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)}{2h^2} (x-x_1)^2$$

adódik ($x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = h$), integrálás után végül is

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx \approx \int_{x_1}^{x_3} p(x) dx = \dots = \frac{h}{3} (f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)).$$

E szabályt nevezik Simpson-szabálynak.

A közelítés így igen durva. Finomíthatjuk számításunkat azáltal, hogy az $[a, b]$ integrációs intervallumot nem két, hanem páros számú egyenlő részre bontjuk fel, melyek mindegyikének hosszát h -val jelölve az

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_1) + 4(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n})) + 2(f(x_3) + f(x_5) + \dots + f(x_{2n+1})))$$

közelítés adódik. Ezt a képletet szokás általános Simpson-szabálynak nevezni.

Ha $f[a, b]$ -ben négyszer differenciálható, és negyedik deriváltja korlátos ($|f^{(4)}(x)| \leq M$), akkor - bizonyíthatóan - a fenti jelölések mellett a közelítés hibája így becsülhető:

$$|H| < \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M}{90n^4}.$$

E helyen nem törekedtünk teljességre, más közelítő módszerek is ismeretesek integrálok közelítő kiszámítására. Ezek - és a fentiek is - napjainkban már nem közvetlen számolással kerülnek alkalmazásra, hanem egy-egy gépi program alapjául szolgálnak. Sokszor azonban a látszólag igen egyszerű képletek programra vitelénél is óvatosan kell eljárunk, hogy megfelelően jó közelítést kapjunk.

Közvetlen számolással, a Simpson-szabály alkalmazásával π közelítő értékét öt tizedesjegy pontossággal így határozhatjuk meg:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

A $[0, 1]$ intervallumot 10 egyenlő részre bontva fel, mivel öt tizedesjegy pontossággal az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény értékei

$$f(x_1) = f(0) = 1,$$

$$f(x_2) = f(0,1) \approx 0,990099,$$

$$f(x_3) = f(0,2) \approx 0,961538,$$

$$f(x_4) = f(0,3) \approx 0,917431,$$

$$f(x_5) = f(0,4) \approx 0,862069,$$

$$f(x_6) = f(0,5) \approx 0,800000,$$

$$f(x_7) = f(0,6) \approx 0,735294,$$

$$f(x_8) = f(0,7) \approx 0,671141,$$

$$f(x_9) = f(0,8) \approx 0,609756,$$

$$f(x_{10}) = f(0,9) \approx 0,552486,$$

$$f(x_{11}) = f(1) = 0,500000$$

a Simpson-szabály alkalmazásával a sövvetkező közelítést kapjuk:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 \approx 0,785398,$$

azaz

$$\pi \approx 3,141592 .$$

VI. AJÁNLOTT IRODALOM

Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai (Műszaki könyvkiadó, 1978)

B. P. Gyemidovics: Matematikai analízis feladatgyűjtemény (Tankönyvkiadó, 1971).

M. K. Grebencsa - Sz. I. Novoszelov: Matematikai analízis I-II (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951)

VII. UTMUTATÁS A FELADATMEGOLDÁSHOZ

I. A határozott (Riemann-) integrál

1.8.1. $[0, b]$ -t n egyenlő részre osztva fel

$$s_n = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n b^2 \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \rightarrow \frac{b^3}{3}, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

$$S_n = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n b^2 \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \frac{b^3}{3}, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

- 2.20.1. Adott $\varepsilon > 0$ mellett véges számú olyan hely van, ahol $f(x) > \varepsilon$. Készítsünk olyan felosztást $[0, 1]$ -ben, amelyben az ε helyeket tartalmazó intervallumok hosszúságának összege $< \varepsilon$. Ekkor $\Omega < 2\varepsilon$, mert ezeknek az intervallumoknak a járuléka is, és a többié is $< \varepsilon$ (az ingadozás ≤ 1 és az összhosszuság $< \varepsilon$, ill. az ingadozás $\leq \varepsilon$, és az összhosszuság < 1).
- 2.20.2. Mindkét függvénynek véges határértéke van a 0 helyen.
- 2.20.3. Igen, lásd 2.20.1.
- 2.20.4. Igen, értéke $\int_0^1 \sin x \, dx$.
- 2.20.6. Ha $|f| < K$, és $[a+\delta, b]$ -ben olyan felosztást készítünk, hogy itt az oszcillációs összeg $< \varepsilon$, akkor $[a, b]$ -ben $\Omega < 2K\delta + \varepsilon$.
- 2.20.7. Az integrálhatóság következik 2.20.6.-ból, az integrál értéke nem változik, mert a közelítő összegekben választhatunk mindig a kritikus helytől különböző reprezentáns helyeket.

$$\begin{aligned}
 2.20.8. \quad a) \quad s &= \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} e^{a+(i-1) \frac{b-a}{n}} = \\
 &= \dots = (e^b - e^a) \frac{1}{\frac{b-a}{n} - 1} \rightarrow (e^b - e^a) \frac{1}{(e^x)'_{x=0}} = e^b - e^a, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

b) ismét egyenletes felosztással, de minden felosztási részintervallum felezőpontjában véve fel a reprezentáns pontot

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sum_{i=1}^n \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} \frac{\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \sum_{i=1}^n 2 \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{2n} = \\
 &= \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \sum_{i=1}^n (\cos \frac{(2i-2)\pi}{2n} - \cos \frac{2i\pi}{2n}) = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} (-\cos \pi + 0) \rightarrow 2
 \end{aligned}$$

ha $n \rightarrow \infty$.

$$3.7.1. \quad f = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in Q, \\ -1, & \text{ha } x \in R-Q, \end{cases} \quad g = -f \quad [-1, 1] \text{-ben.}$$

3.7.2. Ha egy intervallumban g ingadozása $< \varepsilon$, akkor ott $\frac{1}{g}$ ingadozása

$$< \frac{\varepsilon}{\delta^2}, \quad \text{mert} \quad \left| \frac{1}{g(x_1)} - \frac{1}{g(x_2)} \right| = \frac{|g(x_2) - g(x_1)|}{|g(x_1)g(x_2)|}.$$

3.7.3. Ha $f \equiv c$, akkor $[a, b]$ -ben minden $x \in (a, b)$ megfelel. Ha $f \neq c$, akkor van olyan hely, melynek környezetében $f(x) > m = \min \{f(x) : x \in [a, b]\}$, ill. $f(x) < M = \max \{f(x) : x \in [a, b]\}$, és e helyeken f folytonos, vagyis 3.6.a) értelmében

$m < \int_a^b f(x) dx < M$, és így a Bolzano-tétel (III.3.20) értelmében van olyan $\xi \in (a, b)$, melyre

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

3.7.4. Alkalmazzuk 3.6. a)-t.

3.7.5. Alkalmazzuk 3.7.3-t és 3.7.4-t.

$$3.7.6. \quad 0 \leq \int_a^b f(x) + t g(x)^2 dx = \underbrace{\int_a^b f^2(x) dx}_C + t 2 \underbrace{\int_a^b f(x)g(x) dx}_B +$$

$$+ t^2 \underbrace{\int_a^b g^2(x) dx}_A \text{ az } At^2 + Bt + C = 0 \text{ egyenletnek tehát legfeljebb}$$

egy megoldása lehet, vagyis diszkriminánsa

$$B^2 - 4AC = 4 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b g^2(x) dx \int_a^b f^2(x) dx \leq 0$$

kell, hogy legyen.

$$4.11.1. \quad f(x) = \frac{d}{dx} \left(\arctg \frac{1}{x} \right) = \dots = -\frac{1}{x^2+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1, \text{ az integrandusz}$$

tehát $[-1, 1]$ -ben korlátos és tetszőleges $\delta > 0$ -ra $[-1, -\delta]$ -ban és $[\delta, 1]$ -ben integrálható, azaz $[-1, 1]$ -ben integrálható

A Newton-Leibniz formula közvetlenül nem alkalmazható, mert egy primitív függvény

$$F(x) = \begin{cases} \left(\arctg \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} \right), & \text{ha } x < 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ \left\{ \arctg \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} \right\}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Valóban } F'(x) = f(x), \text{ ha } x \neq 0, \text{ és } F'(0) = \lim_{h \rightarrow \pm 0} \frac{\arctg \frac{1}{h} + \frac{\pi}{2}}{h} =$$

$$= \dots = -1.)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^1 \dots dx = \dots = -\frac{\pi}{2}.$$

4.11.2. A tett feltevések mellett az azonosság differenciálható, azaz

$$f(x) = f'(x) \text{ és } f(1) = \int_1^1 f(x) dx - 2 = 2, f(x) = ce^x \text{ nyilván kielégíti az}$$

$$f = f'$$

összefüggést és $f(1) = -2$ miatt itt $c = \frac{-2}{e}$, a keresett függvény $f(x) = -2 \cdot e^{x-1}$.

5.12.1. Ha $n = 2k$, akkor

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3) \dots 3 \cdot 1}{2k (2k-2) \dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2},$$

míg ha $n = 2k+1$, akkor

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{2k (2k-2) \dots 4 \cdot 2}{(2k+1) (2k-1) \dots 5 \cdot 3}.$$

Ezek a képletek

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

értékét is megadják.

5.12.2. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ esetén $0 \leq \sin x \leq 1$, vagyis

$$\sin^{2k+2} x \leq \sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x;$$

integrálva az egyenlőtlensége $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ -ben, az integrálok 5.12.1-beli értékét beírva az egyenlőtlenségláncba, egyszerűsítés után

$$\text{az } a_k = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \text{ jelöléssel}$$

$$\frac{2k+1}{2k+2} \frac{\pi}{2} \leq a_k \leq \frac{\pi}{2}$$

ill. innen a $k \rightarrow \infty$ határátmenettel az állítás adódik.

$$5.12.3. \quad \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

$$5.12.4. \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2k(u+\pi/2)}{\sin(u+\pi/2)} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2ku \cdot (-1)^k}{\cos u} du = 0$$

5.12.5. az $x = \sin u$ helyettesítéssel lényegében 5.12.1-re vezethető vissza.

5.12.6. Az $x = \pi - u$ helyettesítéssel, összevonás után a kiszámítandó integrálra a következő adódik:

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^m x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^m u du = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u du,$$

ez után pedig alkalmazzuk 5.12.1-t.

5.12.7. Az $x = \frac{\pi}{2} - u$ helyettesítéssel

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos u}{\cos u + \sin u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u du}{\cos u + \sin u}$$

és így

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u + \cos u}{\sin u + \cos u} du = \frac{\pi}{2}, \quad I = \frac{\pi}{4}.$$

II. Impropius integrálok

2.7.1. Ha $[a, b]$ -be nem esik $\pm k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor közönséges Riemann-integrál ui. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x}$ véges, különben divergens improprius integrál.

2.7.2. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx$ konvergens, ($a > 0$) mert $|e^{-ax} \cos bx| \leq e^{-ax}$,

és $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \, dx$ konvergens, parciális integrálással adódik, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx$ ($n > 0$) konvergenciája hasonlóképp látható, és n -szeri parciális integrálás után $n! \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = n!$ adódik.

$$2.7.3. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin x \, dx \text{ az utóbbi}$$

integrálok pedig konvergens, pl. az első, mert

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\text{-ben } \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq 1, \quad \left| \ln \sin x \right| \leq \left| \ln \frac{2}{\pi}x \right| < C + D x^a \quad (-1 < a < 0)$$

és $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^a \, dx$ konvergens. Iazonban így is írható

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin 2x - \ln 2) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du - \ln 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

2.7.4. Ismételt parciális integrálással (a kiintegrált részek határértékének kiszámításánál a l'Hospital szabályt alkalmazva) az integrál értékére $(-1)^n n!$ adódik.

III. A Riemann-Stieltjes-integrál

2.31.1. Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt.

2.31.4. Tetszőleges felosztás mellett a közelítő összeg értéke $f(\xi)(1-0)$, ahol ξ a 0 helyet tartalmazó részintervallum reprezentáns helye.

IV. Az inegrálszámítás néhány alkalmazása

2.9.1. 2.5. Tétel. Adott $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $[\alpha, \beta]$ -nak δ -nál finomabb felosztását véve, a beírt poligon hossza az iv-hosszuságtól ϵ -nél kevesebbel tér el. (Ellenkező esetben alkalmas ϵ -hoz volna olyan minden határon túl finomodó felosztássorozat, hogy a beírt hurropoligonok hosszúságai nem tartanak az ivhosszusághoz.) Készítsünk $[\alpha', \beta']$ -ben két δ -finomságu felosztást, és mindegyikét egészítsük ki $[\alpha, \alpha']$ -ben és $[\beta', \beta]$ -ban ugyanazzal a δ -finomságu felosztással. Ebből látszik, hogy az $[\alpha', \beta']$ -höz tartozó két beírt poligon hosszúságának különbsége kisebb mint 2ϵ . Ha tehát $[\alpha', \beta']$ -ben minden határon túl finomodó felosztássorozatot készítünk, a beírt poligonhosszak sorozata konvergens, és határértéke mindig ugyanaz. *

2.6. Tétel. Készítsünk $[\alpha, \gamma]$ -ban minden határon túl finomodó felosztássorozatot, és mindegyik felosztáshoz vegyük még hozzá osztópontként β -t. Az így előálló megváltozása a poligonhossznak 0-hoz tart. A módosított felosztásokhoz tartozó poligonhosszak két részre bonthatók, s ezek egyike az $[\alpha, \beta]$ darab, másika a $[\beta, \gamma]$ darab ivhosszuságához tart. *

2.9.2. Bizonyítás. A $g(y)$ függvényre tett kikötések értelmében a (**) -ban definiált $w(y) = u$ függvény (c, d) -ben szigorúan monoton, értékkészlete (***) jelöléseivel (γ, δ) , és mivel $w(y_0) = 0$ (lásd (**)), $0 \in (\gamma, \delta)$. $w(y)$ szigorúan monoton, ezért létezik inverze, $w^{-1}(u)$, melynek értelmezési tartománya (γ, δ) , $w^{-1}(0) = y_0$ és w^{-1} értékkészlete (c, d) .

A (**) -ban értelmezett v - az f függvényre tett kikötések mellett - nyilván folytonos, $v(x_0) = 0$, megadható tehát olyan $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, hogy $x \in (\alpha, \beta)$ esetén $v(x) \in (\gamma, \delta)$ (mint előbb láttuk, $0 \in (\gamma, \delta)$). Beszélhetünk tehát $x \in (\alpha, \beta)$ -ra az

$$(\text{***}) \quad \varphi = w^{-1} \circ v$$

függvényről. Azt állítjuk, hogy **(***)** a **(*)** differenciálegyenlet $y(x_0) = y_0$ feltételt kielégítő megoldása. Valóban, alkalmazva az összetett függvény és az inverz függvény differenciálási szabályát **(**)** miatt

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d(w^{-1} \circ v)}{dx} = \frac{dw^{-1}}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\frac{dw}{dx} \circ w^{-1}} \cdot \frac{dv}{dx} = (g \circ \varphi) \cdot f,$$

$y = \varphi$ tehát megoldja a differenciálegyenletet és $\varphi(x_0) = w^{-1}(o) = y_0$.

Másrészt, ha $y = \varphi$ is megoldása **(*)**-nak, $\psi(x_0) = y_0$,

$x_0 \in (\alpha_0, \beta_0)$, és $\psi(x) \in (c, d)$, ha $x \in (\alpha_0, \beta_0) = (\alpha, \beta) = (a, b)$, akkor $\varphi(x) = \psi(x)$. Ti $\Phi = w \circ \varphi$ -re

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d(w \circ \varphi)}{dx} = \frac{dw}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{g \circ \varphi} \cdot f \cdot (g \circ \varphi) = f,$$

tehát Φ és v is primitív függvénye f -nek (α_0, β_0) -ban, és

$\Phi - v = 0$, hiszen az x_0 helyen mindkét függvény $= 0$. Ekkor

azonban $\varphi = w^{-1} \circ \Phi = w^{-1} \circ v = \varphi$, amint állítottuk.

Például az

$$y' = e^{x-2y}$$

differenciálegyenlet $y(0) = 1$ feltételt kielégítő megoldása, mivel a differenciálegyenlet

$$y' = e^x \cdot e^{-2y}$$

alakban is felírható, az

$$\int_1^y \frac{dy}{e^{-2y}} = \int_0^x e^x dx$$

összefüggés integrálásával nyerhető:

$$\left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_1^y = \left[e^x \right]_0^x,$$

$$\frac{e^{2y} - e^2}{2} = e^x - 1,$$

$$e^{2y} = 2 \cdot e^x - 2 + e^2.$$

$$y = \frac{1}{2} \ln (2e^x + e^2 - 2).$$

Mint itt is, sok más esetben is meg tudjuk adni explicit alakban is a megoldást.

A (**) képletet formálisan így lehet könnyen megjegyezni:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

és innen integrálással adódik (**):

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

VIII. JELÖLÉSEK, TÁRGYMUTATO

1. Jelölések

- m_i az i -edik felosztási részintervallumban felvett függvényértékek halmazának alsó határa I. 2. 2. d.
- M_i az i -edik felosztási részintervallumban felvett függvényértékek halmazának felső határa I. 2. 2. d.
- $O_i = M_i - m_i$ (oszcilláció, ingadozás) I. 2. 2. e.
- $s(f, F)$ az f függvény F felosztáshoz tartozó alsó összege I. 2. 3.
- $S(f, F)$ az f függvény F felosztáshoz tartozó felső összege I. 2. 3.
- $\Omega(f, F)$ az f függvény F felosztáshoz tartozó oszcillációs összege I. 2. 3.
- $\sigma(f, F, \Xi)$ az f függvény F felosztáshoz és $\Xi = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($x_i \in [x_{i-1}, x_i]$) reprezentáns pontokhoz tartozó integ. álközelítő összege I. 2. 3.
- $F_1 \cup F_2$ az F_1 és F_2 felosztás egyesítése (közös finomítása) I. 2. 3.
- h $\sup \{s(f, F)\}$ I. 2. 4.
- H $\inf \{S(f, F)\}$ I. 2. 4.
- $\mathcal{R}$ a Riemann-integrálható függvények osztálya I. 2. 5.
- $R = \int_a^b f(x)dx$ az f függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó határozott (Riemann-) integrálja I. 2. 6.
- $\int f(x)dx$ f határozatlan integrálja I. 4. 7.

$$\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \text{ I. 4. 9}$$

$$\int_a^{+\infty} f \, dx \quad \text{végtelen határu improprius integrál II. 1. 2.}$$

$$\int_{-\infty}^b f \, dx \quad \text{végtelen határu improprius integrál II. 1. 3.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \, dx \quad \text{végtelen határu improprius integrál II. 2. 2.}$$

$s(f, F, g)$ az f függvény F felosztáshoz és g függvényhez (eloszlásfüggvényhez) tartozó alsó összege III. 2. 3.

$S(f, F, g)$ az f függvény F felosztáshoz és g függvényhez tartozó felső összege III. 2. 3.

$\sigma(f, F, \Xi, g)$ az f függvény F felosztáshoz, $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ reprezentáns pontokhoz és g függvényhez tartozó integrálközelítő összege III. 2. 3.

$\mathcal{R}(g)$ a g szerint (Riemann-) Stieltjes-értelemben integrálható függvények osztálya III. 2. 5.

$$\int_a^b f \, dg \quad f \, g \text{ szerinti Riemann-Stieltjes-integrálja az } [a, b] \text{ intervallumon III. 2. 6.}$$

$V(g, a, b)$ g totális variációja $[a, b]$ -ben III. 2. 21.

2. Targyismutató

alapintegrálok I. 5. 1.

algebra alaptétel I. 5. 10

alsó összeg (Riemann-féle I. 2. 3.; Riemann-Stieltjes-féle III. 2. 3.)

Darboux-féle alsó (felső) integrál I. 2. 7.

felosztás (intervallumé) I. 2. 2.

felosztási részintervallum I. 2. 2.

felosztási részintervallum hosszúsága I. 2. 2.

felosztás finomítása I. 2. 3.

felosztás finomsága I. 2. 3.

felosztások egyesítése I.2.3.
 felső összeg (Riemann-féle I.2.3.; Riemann-Stieltjes-féle III.2.3.)
 forgástest térfogata IV.1.4.
 folytonos görbe IV.2.1.
 görbe alatti idom területe IV.1.2.
 gyök (k-szoros) I.5.10.
 gyöktényező I.5.10.
 gyöktényező felbontás I.5.10.
 határozatlan integrál I.4.7.
 határozott integrál I.2.6.
 helyettesítési integrálás I.5.7. (Riemann) II.2.6. (improprius)
 integrál határai I.2.6.
 integrálás parciálisan I.5.5., helyettesítéssel I.5.7.
 integrálás részlettörtekre bontással I.5.10.
 integrálfüggvény I.4.2.
 integrálhatóság (Riemann-) I.2.5. (g szerint Riemann-Stieltjes értelemben) III.2.5.
 integrálszámítás középértéktételei I.3.6.
 integrandusz I.2.6.
 intervallumfüggvény I.3.3.
 improprius integrál II.1.2-4.
 ivhosszuság IV.2.2.
 minden határon túl finomodó felosztás-sorozat I.2.3.
 oszcilláció I.2.2.
 oszcillációs összeg I.2.3.
 paraméteres megadás IV.1.1.
 parciális integrálás I.5.5. (Riemann) II.2.5. (improprius)
 polárkoordinátás egyenlet IV.1.1.
 primitív függvény I.4.4.
 rektifikálhatóság IV.2.2.
 reprezentáns pont I.2.2.
 részlettörtekre bontás I.5.10.
 Riemann-integrál I.2.6.
 Riemann-integrálható függvények osztálya I.2.5.
 Riemann-Stieltjes-integrál III.2.6., III.2.19.
 Riemann-Stieltjes integrálhatóság III.2.5.
 Simpson-szabály IV.3.
 Stieltjes-integrál III.2.6., III.2.19.
 Szeztorterület IV.1.3.

Téglalap-szabály V.1.
Totális variáció III.2.21.
Trapéz-szabály V.2.
Wallis-formula I.5.12.2.

TARTALOMJEGYZÉK

I.	A határozott (Riemann-) integrál	3
	1. A határozott integrálra vezető néhány feladat	3
	2. A határozott (Riemann-) integrál definíciója. Integrálható függvények főbb osztályai	10
	3. A határozott integrál tulajdonságai	25
	4. A primitív függvény és az integrál összefüggése	34
	5. Az integrálás technikája	42
II.	Improprius integrálok	59
	1. Az improprius integrálok fogalma	59
	2. Improprius integrálok tulajdonságai. Parciális és helyettesítési integrálás	64
III.	A Riemann-Stieltjes-integrál	73
	1. Riemann-Stieltjes-integrálra vezető néhány feladat	73
	2. A Riemann-Stieltjes-integrál definíciója, tulajdonságai. Stieltjes-integrálható függvények főbb osztályai	75
IV.	Az integrálszámítás néhány alkalmazása	86
	1. Terület és térfogatszámítás	86
	2. Ívhosszuság számítása	92
	3. Az áram munkájának meghatározása	99
V.	Az integrál közelítő kiszámítása	102
VI.	Ajánlott irodalom	107
VII.	Utmutatás a feladatmegoldáshoz	108
VIII.	Jelölések, tárgymutató	117
	1. Jelölések	117
	2. Tárgymutató	118

