

**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

Császár Ákosné

**VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK
INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA**



Műegyetemi Kiadó, 2000.

(Negyedik utánnomás)

Azonosító: **051355**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kar
megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 11,2 (A/5) ív

Nyomtatva és kötötte: **Műegyetemi Nyomda**

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 009/2000

I. PONTALMAZOK JORDAN – MÉRTÉKE

1. KETTŐS ÉS HÁRMAS (RIEMANN) INTEGRÁLRA VEZETŐ NÉHÁNY FELADAT

1.1. Ha a $P_i \in \mathbb{R}^3$ pontban, melynek koordinátái (x_i, y_i, z_i) , az m_i tömeget helyezzük el $(i=1,2,\dots,n)$, akkor a $P_1, \dots, P_n$ pontokból álló pontrendszer súlypontja az a S pont, melynek koordinátái:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

A számlálókban szereplő összegek a pontrendszer YZ , XZ , XY síkokra vonatkozó sztatikai /elsőrendű/ nyomatékai.

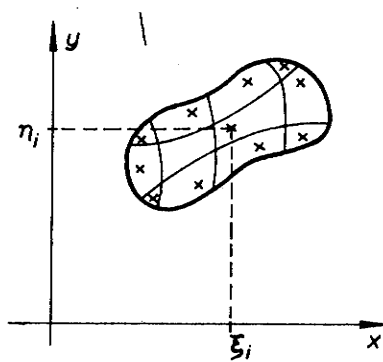
Ha a fenti pontrendszer speciálisan az XY síkban helyezkedik el, akkor $z_S = 0$, x_S ill. y_S pedig a fenti képlettel nyerhető, ahol a számlálóban álló összegek a pontrendszer Y , ill. X tengelyre vonatkozó sztatikai nyomatékai.

Folytonos /speciálisan homogén/ tömegeloszlású síkidom /térbeli idom/ súlypontjának meghatározásánál az előbbieket figyelembevételével a következőképpen járhatunk el:

Osszuk fel az idomot kicsiny részekre és egyesítsük az egyes kis részek tömegét a részecske egy tetszőleges pontjában. Képezzük az így nyert pontrendszer súlypontjának koordinátáit, ezek várhatóan akkor fogják jól megközelíteni idomunk súlypontjának koordinátáit, ha a felosztásunkban szereplő részek átmérői /lásd Többváltozós függvények differenciálszámítása, 1.4.1./ kicsinyek. A fent

részletesen felírt összegek határértékét keressük tehát a felosztások olyan természetű változtatásánál, amikor a felosztással nyert részek átmérői zérushoz tartanak, amit röviden így fejezünk ki: "minden határon túl finomodó felosztásokra".

Ha a vizsgált idom homogén, azaz egyenlő területű /térfogatu/ részeiben egyenlő tömegek foglaltatnak, és ρ -val jelöljük az egységnyi területű /térfogatu/ részben foglalt tömeg mérőszámát, akkor az i -edik rész kiválasztott pontjának koordinátáit (ξ_i, η_i, ζ_i) -vel jelölve, a közelítő pontrendszer sztatikai nyomatékai:



$$M_{yz} = \sum_{i=1}^n \xi_i \rho t_i,$$

$$M_{xz} = \sum_{i=1}^n \eta_i \rho t_i,$$

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^n \zeta_i \rho t_i,$$

1. ábra

ha n részre történt a felosztás, és t_i jelöli a felosztással nyert i -edik rész területét /térfogatát/. /Ha a síkidom a XY síkban fekszik, akkor $M_{yz} = M_y$; $M_{xz} = M_x$; $M_{xy} = 0$; /1. ábra//.

Az idom súlypontjának meghatározásához tehát a

$$\lim_{i=1}^n \xi_i \rho t_i, \quad \lim_{i=1}^n \eta_i \rho t_i, \quad \lim_{i=1}^n \zeta_i \rho t_i$$

határértékek ismerete szükséges, ha a felosztást minden határon túl finomítjuk.

1.2. Hasonló jellegű okoskodással az előbbihez hasonló típusú határértékek meghatározására vezet pl. homogén síkidomok tehetetlenségi nyomatékainak meghatározása. He-

lyezzük el ugyanis a síkidomot az XY síkban, akkor az előbbiek mintájára felvett anyagi pontrendszer Y ill. X tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \rho t_i, \quad \text{ill.} \quad \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \rho t_i,$$

és ezeknek az összegeknek határértékét kell minden határon túl finomodó felosztásokra meghatároznunk:

$$\theta_y = \lim \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \rho t_i, \quad \theta_x = \lim \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \rho t_i.$$

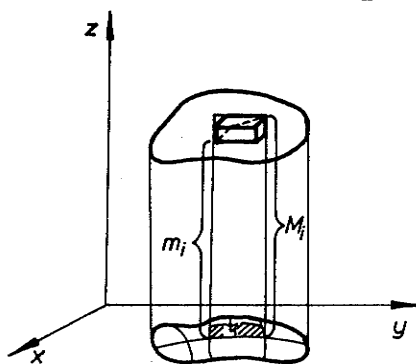
1.3. Határozzuk meg annak a testnek térfogatát, amelyet alulról az XY síkban fekvő T idom, oldalról a T-t határoló görbére emelt, Z tengellyel párhuzamos alkotóju hengerfelület, felülről a $z = f(x, y)$ egyenlettel megadott felületnek T feletti része határol. /Tegyük fel, hogy $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $f \geq 0$ T-ben./

Ha a T idomot részekre osztjuk, és az egyes részek fölé olyan hengereket emelünk, melyeknek magassága $f(x, y)$ -nak az illető részbeli legkisebb, ill. legnagyobb értéke /jelöljük ezt az i-edik, t_i területű résznél m_i -vel, ill. M_i -vel/, akkor a keresett köbtartalom az első alkalommal kapott t_i alapterületű, m_i magasságú hengerek köbtartalmainak összegénél nagyobb, a második alkalommal kapott, t_i alapterületű, M_i magasságú hengerek köbtartalmainak összegénél kisebb, azaz /ha n részre osztottuk fel T-t/

$$\sum_{i=1}^n m_i t_i \leq K \leq \sum_{i=1}^n M_i t_i$$

/lásd* 2. ábra/.

Ha T felosztását minden határon túl finomítva e két ösz-



2. ábra

szeg közös határértékhez tart, akkor idomunk K térfogata is ezzel a határértékkel kell, hogy egyenlő legyen:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i t_i.$$

1.4. Az 1.1., 1.2., 1.3. példák mindegyikében egy-egy T síkbeli /ill. térbeli/ idom szerepelt, ezt részekre osztottuk, majd minden egyes rész t_i területét /térfogatát/ megszoroztuk valamilyen f függvénynek (ρx , ρy , ρz , ρx^2 , ρy^2 -nek) az egyes részek valamely rögzített pontjában felvett értékével /1.3.-ban a részben felvett legkisebb, ill. legnagyobb függvényértékkel/, majd ezeket a szorzatokat összegeztük. Az így nyert összegek határértékét kellett azután meghatároznunk, amikor az idom felosztását "minden, határon túl finomítjuk".

Szembevetendő ezeknek a feladatoknak az egyváltozós függvény integráljának fogalmával való rokonsága. A különbség az, hogy ott egy intervallum részintervallumai és azoknak hosszúságai szerepeltek, itt viszont egy idom részhidomai és azoknak területei /térfogatai/ szerepelnek a közelítő /ill. alsó és felső/ összegek felírásánál. Az itt fellépő határértékek adott kétváltozós /háromváltozós/ függvény-nyel állnak kapcsolatban, és mivel hasonló jellegűek, mint az egyváltozós függvény integrálját szolgáltató határérték, kettős /hármass/ integrálnak nevezzük majd őket. Általában az $f: H \rightarrow R(HCR^m)$ m -változós függvényekkel kapcsolatban fellépő hasonló határérték-feladatok un. többes /m-es/ integrálokra vezetnek.

A többes /speciális kettős, hármass/ integrálok elmélete az egyváltozós függvény integráljával való rokonsága mellett sok új problémát vet fel. Az egyváltozós esetben nem okozott problémát az, hogy mit kell értenünk az $[a, b]$ intervallum felosztásával nyert $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok hosszúságának mérőszámán ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$),

ugyanakkor kérdéses az, hogy mit kell értenünk valamilyen szabálytalan síkbeli $/R^2$ -beli/, térbeli $/R^3$ -beli/, ill. R^m -beli T idom felosztásán, a felosztással nyert részek t_i területén, térfogatán, ill. e fogalom m -dimenziós megfelelőjén.

Annak érdekében tehát, hogy a bevezetőben szereplő példákban követett okoskodást pontossá tegyük és a többes integrál fogalmához így eljussunk, először a szabálytalan alaku síkidomok területszámításának /térbeli idomok térfogatszámításának, R^m -beli idomok "mértékének"/ problémáját kell vizsgálnunk.

2. PONTALMAZOK JORDAN-MÉRTÉKE

Az elemi geometria foglalkozik egyenes szakaszokkal határolt síkidomok /sokszögek/ területének kiszámításával, és bizonyos egyszerű görbevonalu idomok /pl. körlemez, körcikk/ területszámításával is. Speciális területszámítási feladatokat meg tudunk oldani határozott /Reimann-/ integrál segítségével /görbe alatti idom területe, szektorterület /Valós egyváltozós függvények integrálszámítása, IV. 1.2., 1.3./.

Speciális térbeli idomok térfogatszámítási problémáival is foglalkoztunk már mind az elemi geometriában /hasáb, gúla, körhenger, körkup, gömb stb./, mind az analízisben /forgástest térfogata; Valós egyváltozós függvények integrálszámítása IV. 1.4./.

Ezekben az esetekben mindig feltételeztük, hogy a vizsgált idomnak van területe /térfogata/, azaz hozzárendelhető olyan valós szám, amely - a sokszögek, hasábok körében tapasztaltakkal összhangban - a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 2.1. a) a terület /térfogat/ nem-negatív szám,
 b) egy idom valamely részének területe /térfogata/ nem nagyobb az egész idom területénél /térfogatánál/,
 c) ha egy idomot véges számú, páronként közös belső pont nélküli részre bontunk fel, akkor a részek területének /térfogatának/ összege egyenlő az egész idom területével /térfogatával/.

A továbbiakban az lesz a célunk, hogy síkidomok, illetőleg bonyolultabb szerkezetű R^2 -beli ponthalmazok elég széles osztályára értelmezzük a terület fogalmát úgy, hogy az a 2.1.-beli a) b) c) tulajdonságokkal rendelkezzen és az elemi geometriában és az analízisben eddig már tárgyalt téreltszámítási feladatok eredményével összhangban maradjon. Ezután /ill. többször egyidejűleg/ vizsgáljuk majd a megfelelő analóg problémákat R^3 -beli, ill. általánosabban R^m -beli ponthalmazok esetében.

Az elemi geometriával való összhang biztosítása érdekében a területet először egy síkbeli koordinátarendszer megadása /rögzítése/ után a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapokra értelmezzük a két oldalhosszúság szorzataként. A rövid kifejezésmód kedvéért állapodjunk meg a következőkben:

2.2. DEFINÍCIÓ. Nevezzük négyszögnek a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú zárt téglalapot, azaz az

$$N = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x_1, x_2) : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$$

alakú síkbeli ponthalmazt, ahol $[a_1, b_1]$ az X tengelyen, $[a_2, b_2]$ az Y tengelyen fekvő zárt intervallum. A fenti N négyszög területe $t(N) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

Könnyű ezt az értelmezést magasabb dimenzióra általánosítani:

2.3. DEFINÍCIÓ. Téglá R^3 -ban a

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = \bigtimes_{i=1}^3 [a_i, b_i] = \\ = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, 3\}$$

alaku ponthalmaz, ahol $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ az előzőleg felvett és rögzített térbeli koordinátarendszer X , Y , ill. Z tengelyén fekvő zárt intervallum. A T tégla térfogata

$$t(T) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) = \prod_{i=1}^3 (b_i - a_i).$$

Hasonlóképpen

2.4. DEFINÍCIÓ. Téglá R^m -ben a

$$T = \bigtimes_{i=1}^m [a_i, b_i] (a_i < b_i, i = 1, \dots, m)$$

zárt halmaz, ennek / m -dimenziós/ térfogata

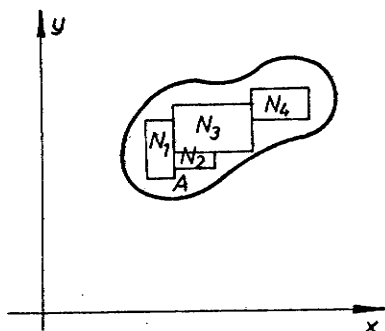
$$t(T) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i).$$

2.5. DEFINÍCIÓ. Az $A_1, \dots, A_n$ halmazokat, ahol $A_i \subset R^m$ ($i=1, \dots, n$) egymásba nem nyulónak mondjuk, ha nincs közös belső pontjuk, azaz

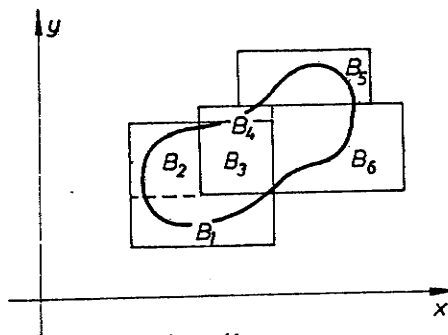
$$\text{int } A_i \cap \text{int } A_j = \emptyset, \text{ ha } i \neq j \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

A következő gondolatmenet célja annak megmutatása, hogy ha az előző definíciókból indulunk ki, és a terület /térfogat/ 2.1.a)b)c) tulajdonságait megkívánjuk, hogyan célszerű a terület /térfogat/ fogalmát általánosságban definiálni. Először az $m=2$ esetet tekintjük:

Legyen $A \subset R^2$ és az egymásba nem nyuló N_i ($i=1, \dots, n$) négyszögek A -nak részei, azaz $\bigcup_{i=1}^n N_i \subset A$, akkor a 2.1.a)



3. ábra



4. ábra

és b) tulajdonság értelmében A területére alsó becslést ad a

$$\sum_{i=1}^n t(N_i) \quad (*)$$

összeg /3. ábra/.

Ha viszont az N'_i ($i = 1, \dots, n'$) négyszögek együttesen lefedik A-t, azaz

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n'} N'_i,$$

akkor A területére felső becslést ad a

$$\sum_{i=1}^{n'} t(N'_i) \quad (**)$$

összeg (ugyanis a

$$B_i = N'_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} N'_j$$

idomok egymásba nem nyulók és $B_i \subset N'_i$ miatt B_i területe legfeljebb $t(N'_i)$, tehát az

$$\bigcup_{i=1}^{n'} B_i \text{ idom területe legfeljebb } \sum_{i=1}^{n'} t(N'_i),$$

ez az összeg tehát mindenképpen felső korlátja A területé-

nek; ugyanakkor vegyük észre, hogy $\bigcup_{i=1}^{n'} B_i = \bigcup_{i=1}^{n'} N'_i$ /4. ábra/).

A keresett területfogalom A területére csak olyan értéket adhat tehát, amelyre a (*) összegek, ill. ezek felső határa is alsó korlátot, a (**) összegek, ill. ezek alsó határa is felső korlátot ad.

Ezzel a gondolatmenettel jutunk el a következő elnevezésekhez:

2.6. DEFINÍCIÓ. Legyen ACR^2 korlátos halmaz. Az A halmaz külső területe /jelben $k(A)$ / az összes

$$\sum_{i=1}^{n'} t(N_i')$$

összegek alsó határa [ahol az N_i' négyszögek együttesen befedik A-t:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n'} N_i']$$

Az A halmaz belső területe /jelben $b(A)$ / az összes

$$\sum_{i=1}^n t(N_i)$$

összegek felső határa, ahol $N_1, \dots, N_n$ olyan egymásba nem nyúló négyszögek, amelyek mind A-ban fekszenek: $N_i \subset A$ ($i=1, \dots, n$), feltéve, hogy A tartalmaz egyáltalán négyszöget. Ha A egyetlen négyszöget sem tartalmaz, akkor legyen

$$b(A) = 0.$$

2.7. MEGJEGYZÉS. Kérdés, hogy a 2.6. definícióban szereplő alsó és felső határ a tett feltevések mellett valóban létezik-e? Az A halmaz korlátosságából következik, hogy akár egyetlen négyszöggel lefedhető, a

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n'} t(N_i') \right\}$$

halmaz tehát nem üres, alulról korlátos /elemei, a terület-összegek, pozitívok/, és így /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása I.5.15./

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n'} t(N_i^1) \right\} = k(A)$$

létezik.

Bizonyításra szorul azonban az a /egyébként R^2 -ben szemléletes, könnyen látható, de később, az általános esetben is fennálló/ tény, hogy ha a korlátos A halmaz tartalmaz négyszöget, akkor a

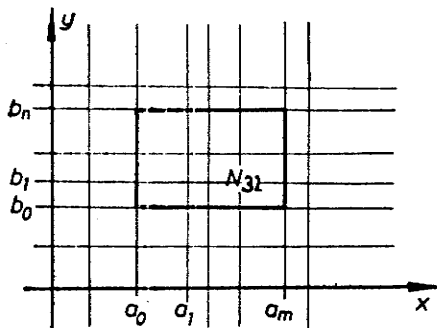
$$\left\{ \sum_{i=1}^n t(N_i) \right\}, (N_i \subset A, \text{ int } N_i \cap \text{int } N_j = \emptyset, i \neq j, i, j=1, \dots, n)$$

halmaz felülről korlátos, és így

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n t(N_i) \right\} = b(A)$$

valóban létezik. Ennek belátására egy - a továbbiakban is igen hasznos fogalmat célszerű bevezetnünk:

2.8. DEFINÍCIÓ. Négyszögrács R^2 -ben véges számú



5. ábra

$$x = a_i \quad (i=0, 1, \dots, m; m \geq 1)$$

és

$$y = b_j \quad (j=0, 1, \dots, n; n \geq 1)$$

alku egyenes együttesé a síkban; ezeket az egyeneseket a négyszögrács rácsegyeneseseinek nevezzük.

$$\text{Ha } a_0 < a_1 < \dots < a_m, \\ b_0 < b_1 < \dots < b_n, \text{ akkor az}$$

$N_{ij} = [a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$ négyszögek a négyszögrács rácsnégyszögei. Ezek tehát olyan négyszögek, amelyeknek oldalai szomszédos rácsegyeneseken fekszenek. Az olyan N négyszögeket, amelyeknek oldalai nem szükségképpen szomszédos rácsegyenesek:

$$N = [a_{i_1}, a_{i_2}] \times [b_{j_1}, b_{j_2}] \quad (i_1 < i_2, j_1 < j_2).$$

a négyszögrácshoz illeszkedő négyszögnek nevezzük. /5. ábra/

2.9. Tétel. Ha egy N négyszög egy négyszögrácshoz illeszkedik, akkor N az általa tartalmazott rácsnégyszögek egyesítése, és $t(N)$ egyenlő a rácsnégyszögek területösszegeivel.

Ha N_{ij} egy N által nem tartalmazott rácsnégyszög, akkor

$$N_{ij} \cap \text{int } N = \text{int } N_{ij} \cap N = \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen

$$N = [a_{i_1}, a_{i_2}] \times [b_{j_1}, b_{j_2}], [a_{i_1}, a_{i_2}] = \bigcup_{i=i_1+1}^{i_2} [a_{i-1}, a_i],$$

$$[b_{j_1}, b_{j_2}] = \bigcup_{j=j_1+1}^{j_2} [b_{j-1}, b_j], \text{ akkor,}$$

$$N = \bigcup_{i=i_1+1}^{i_2} \bigcup_{j=j_1+1}^{j_2} [a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j] =$$

$$= \bigcup_{i=i_1+1}^{i_2} \bigcup_{j=j_1+1}^{j_2} N_{ij}, \text{ és mivel}$$

$$a_{i_2} - a_{i_1} = \sum_{i=i_1+1}^{i_2} (a_i - a_{i-1}),$$

$$b_{j_2} - b_{j_1} = \sum_{j=j_1+1}^{j_2} (b_j - b_{j-1}), \text{ ezért}$$

$$t(N) = (a_{i_2} - a_{i_1})(b_{j_2} - b_{j_1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \sum_{j=j_1+1}^{j_2} (a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1}) = \\
&= \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \sum_{j=j_1+1}^{j_2} t(N_{ij}), \text{ mivel az első állításunkat igazoltuk.}
\end{aligned}$$

Ha N_{ij} olyan rácsnégyszög, amely nem része N -nek, akkor vagy $i \leq i_1$, vagy $i > i_2$, vagy $j \leq j_1$, vagy $j > j_2$, így tehát $N \cap N_{ij}$ legfeljebb az N -et határoló

$$x = a_{i_1}, \quad x = a_{i_2}, \quad y = b_{j_1}, \quad y = b_{j_2}$$

egyenesek bizonyos pontjaiból állhat. Ezek a pontok azonban sem N -nek, sem N_{ij} -nek nem belső pontjai, vagyis

$$N_{ij} \cap \text{int } N = \text{int } N_{ij} \cap N = \emptyset. *$$

Erre a tételre hivatkozva igazolható mármost az alábbi állítás:

2.10. Tétel. Ha ACR^2 korlátos, akkor $k(A)$ felső korlátja a belső terület értelmezésében felhasznált

$$\sum_{i=1}^n t(N_i) \quad (N_i \subset A, \text{ int } N_i \cap \text{int } N_j = \emptyset, i \neq j, i, j=1, \dots, n)$$

összegeknek. Létezik tehát

$$b(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n t(N_i) \right\}, \text{ és } b(A) \leq k(A).$$

Bizonyítás. Ha A nem tartalmaz négyszöget, akkor $b(A) = 0$, vagyis az evidens $0 \leq k(A)$ egyenlőtlenség adódik. Ha A tartalmaz négyszöget, akkor legyenek

$N_1, \dots, N_n$ A -beli, egymásba nem nyúló,

$N'_1, \dots, N'_n$ együttesen A -t lefedő négyszögek.

Tekintsük azt a négyszögrácsot, amelynek rácsegyenesei az összes N_i és N_j' négyszögek oldalszakaszain átfektett egyenesek. Ekkor minden N_i és N_j' négyszög illeszkedik a rácsnégyszöghöz, tehát akár a

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n t(N_i), \quad \text{akár a}$$

$$(**) \quad \sum_{j=1}^{n'} t(N_j')$$

összegek felírhatók az N_i -k, ill. N_j' -k által tartalmazott rácsnégyszögek területösszegeként. Egy rácsnégyszög nem lehet két N_i -nek része /az N_i -k egymásba nem nyúló négyszögek/, tehát $(*)$ -ban minden rácsnégyszög területe legfeljebb egy tagban szerepel. Másrészt minden olyan rácsnégyszög, amely $(*)$ felírásakor fellép, $(**)$ -ban is kell, hogy szerepeljen, hiszen egy ilyen N rácsnégyszögnek minden $p \in \text{int } N$ pontja NCA miatt A-hoz tehát legalább egy N_j' négyszöghöz hozzátartozik, tehát 2.9. értelmében

$$N \subset N_j' \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n t(N_i) \leq \sum_{j=1}^{n'} t(N_j') .$$

Az N_i -ket rögzítve és a jobb oldal alsó határát véve az állításnak megfelelően

$$\sum_{i=1}^n t(N_i) \leq k(A)$$

adódik, tehát ezen összegek halmazának felső határa, $b(A)$ valóban létezik, és mindjárt az is kiolvasható eredményünkből, hogy $b(A) \leq k(A)$ kell, hogy fennálljon. *

A korlátos A halmaz külső, ill. belső területének fogalmát olyan gondolatsoron keresztül vezettük be, amellyel rávilágítottunk arra, hogy ha van egyáltalán A-nak területe, az

csak $b(A)$ és $k(A)$ közötti szám lehet. Ha tehát $b(A) = k(A)$, akkor egyértelműen előírható, mit kell A területének tekinteni. Kézenfekvő gondolat a területet éppen azokra a halmazokra értelmezni, amelyekre ez az egyenlőség teljesül:

2.11. DEFINÍCIÓ. A korlátos ACR^2 halmaz mérhető, ha $b(A) = k(A)$.
Ekkor A területe /jelben $t(A)$ /: $t(A) = k(A) = b(A)$.

Ez az értelmezés a négyszögek korábban már értelmezett területével összhangban van, mert:

2.12. Tétel. Bármely $N = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ($a_1 < b_1, a_2 < b_2$) négyszög mérhető és a 2.11. definíció értelmében is
 $t(N) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

Bizonyítás. $k(N) \leq (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \leq b(N)$, magát az N négyszöget használva beírt, ill. lefedő négyszöggént. * Arra A tényre, hogy egy halmaz belső és külső területe is létezhet anélkül, hogy azok egyenlők lennének egymással, vagyis a halmaz mérhető volna a következő példát adhatjuk meg:

Jelentse A az egységnégyzet racionális koordinátájú pontjainak halmazát:

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

Nyilván $k(A) = 1$, $b(A) = 0$. / A nem tartalmaz négyszöget/, és így A nem mérhető.

2.13. MEGJEGYZÉS. A terület itt bevezetett fogalmának elméletét C. Jordan dolgozta ki, ezért pontosabban /más területfogalmaktól való megkülönböztetés miatt/ szokás

- Jordan-féle külső /belső/ területről
/2.6. definíció/
- Jordan-féle értelemben mérhető halmazról
/2.11. definíció/

- Jordan-féle mértékről /speciálisan területről /
/2.11. definíció/

beszélni.

Mielőtt a Jordan-féle terület /röviden terület/ tulajdonságainak vizsgálatára rátérnénk, általánosítsuk az eddig bevezetett fogalmakat R^2 -ről R^m -re.

2.14. DEFINÍCIÓ. Egy korlátos ACR^m halmaz / m -dimenziós/ külső térfogata az összes, A -t befedő $T'_1, \dots, T'_n$ téglarendszerekre képzett

$$\sum_{j=1}^{n'} t(T'_j)$$

térfogatösszegek /lásd 2.4. definíció/ alsó határa:

$$k(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n'} t(T'_j) \right\}, \text{ míg}$$

A belső térfogata az összes, A -ban fekvő és egymásba nem nyúló /2.5. definíció/ $T_1, \dots, T_n$ téglarendszerekre képezett

$\sum_{i=1}^n t(T_i)$ térfogatösszegek felső határa:

$$b(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n t(T_i) \right\}, \text{ ill.}$$

$b(A) = 0$, ha A nem tartalmaz téglát.

Speciálisan $m=3$ esetében dimenziószám megjelölése nélkül röviden belső és külső térfogatról beszélünk.

A belső térfogat értelmezésében szereplő összegek korlátosságát most a négyszögrácsok analógiájára bevezetett téglarácsok felhasználásával igazolhatjuk:

2.15. DEFINÍCIÓ. Legyenek az x_i ($i=1, \dots, m$) tengelyen felvett pontok $a_{i0} < a_{i1} < \dots < a_{in_i}$ ($i = 1, \dots, m$; $n_i \geq 1$), ekkor az $x_i = a_{ij}$ ($j = 0, \dots, n_i$) egyenlettel $m=3$ esetében rácshikokat, $m>3$ esetében un. rácshipersikokat adunk meg, a

$T_{j_1 \dots j_m} = \bigotimes_{i=1}^m [a_{ij_{i-1}}, a_{ij_i}]$ téglák rácstéglák, a

$T = \bigotimes_{i=1}^m [a_{ij_i}, a_{ik_i}]$ ($0 \leq j_i < k_i \leq n_i$) alaku téglák pedig a téglarácsra illeszkedő téglák.

E fogalmakkal megfogalmazható és bizonyítható a 2.9. és 2.10. tétel m -dimenziós megfelelője. Igaz tehát a következő állítás:

2.16. Ha ACR^m korlátos, akkor létezik /Jordan-féle/ külső és belső térfogata, továbbá $b(A) \leq k(A)$.

2.17. DEFINÍCIÓ. A korlátos ACR^m halmaz /Jordan-féle értelemben/ mérhető, ha $b(A) = k(A)$.

Az A halmaz m -dimenziós /Jordan-féle/ térfogata $/m=3$ esetben $t(A) = b(A) = k(A)$.

Ha szükséges, a dimenziószám feltüntetésével, b , k , t helyett b_m , k_m , t_m is írható.

A továbbiakban a "Jordan-féle" jelzőt elhagyjuk.

Foglaljuk össze az m -dimenziós térfogat /speciálisan térfogat, terület/ nevezetesebb, a gyakorlat, az alkalmazások miatt fontos, $m=2$ ill. 3 esetén a szemlélettel is alátámasztott alaptulajdonságait.

2.18. Tétel.

a) Ha $A \subset B \subset R^m$ korlátos halmazok, akkor $k(A) \leq k(B)$, $b(A) \leq b(B)$, és ha A és B mérhető is, akkor $t(A) \leq t(B)$.

b) Ha $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ és az $A_i \subset R^m$ halmazok korlátosak, akkor

$k(A) \leq \sum_{i=1}^n k(A_i)$. /Ezt a tulajdonságot úgy szoktuk ki-

fejezni, hogy a külső mérték szubadditív./

- c) Ha $A = \bigcup_{i=1}^n A_i \subset \mathbb{R}^m$ korlátos, és az A_i halmazok nem nyúl-
nak egymásba, akkor $b(A) \geq \sum_{i=1}^n b(A_i)$.
- d) Ha az $A_1, \dots, A_n$ halmazok mérhető és egymásba nem nyúl-
lók, továbbá $A = \bigcup_{i=1}^n A_i \subset \mathbb{R}^m$, akkor A is mérhető, és
 $t(A) = \sum_{i=1}^n t(A_i)$.

/Az utóbbi tulajdonság azt mutatja, hogy a mérték additív
egymásba nem nyuló mérhető halmazok esetén./

Bizonyítás.

- a) A B -t befedő T_j^i réglák A -t is befedik, az A -ban elhe-
lyezett egymásba nem nyuló T_i téglák B -nek is részei,
így $k(A) \leq \sum_{j=1}^{n'} t(T_j^i)$, $\sum_{i=1}^n t(T_i) \leq b(B)$, ugyanilyen egyen-
lőtlenség kell, hogy fennálljon az első összegek alsó,
a másodikok felső határára is. *
- b) Adott $\varepsilon > 0$ mellett fedjék be A_i -t a $T_{i1}^i, \dots, T_{in_i}^i$ téglák
ugy, hogy $\sum_{j=1}^{n_i} t(T_{ij}^i) < k(A_i) + \frac{\varepsilon}{n}$. Ekkor az összes T_{ij}^i
téglák ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n_i$) befedik A -t így
 $k(A) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} t(T_{ij}^i) < \sum_{i=1}^n k(A_i) + \varepsilon$, ahonnan az $\varepsilon \rightarrow 0$ ha-
tárátmenettel az állítás adódik. *
- c) Adott $\varepsilon > 0$ mellett legyenek $T_{i1}, \dots, T_{in_i}$ olyan A_i -beli
egymásba nem nyuló téglák, amelyekre
 $\sum_{j=1}^{n_i} t(T_{ij}) > b(A_i) - \frac{\varepsilon}{n}$, /ha A_i nem tartalmaz téglát, le-

gyen $n_i = 0$, ehhez az i -hez nem tartozik egyetlen T_{ij} sem, a fenti képlet bal oldalán 0-t kell érteni/. Ekkor az összes T_{ij} téglák ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n_i$) egymásba nem nyúlók, hiszen

$$\text{int } T_{i_1 j_1} \cap \text{int } T_{i_2 j_2} \subset \text{int } A_{i_1} \cap \text{int } A_{i_2} = \emptyset \text{ és } T_{ij} \subset A$$

minden i -re és j -re, azaz

$$b(A) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} t(T_{ij}) > \sum_{i=1}^n b(A_i) - \epsilon,$$

és innen $\epsilon \rightarrow 0$ esetén adódik az állítás. *

- d) Az A_i halmazokkal együtt nyilván A is korlátos, így b) és c) alapján

$$k(A) \leq \sum_{i=1}^n k(A_i) = \sum_{i=1}^n b(A_i) \leq b(A),$$

és mivel mindig $b(A) \leq k(A)$ /2.16/, $b(A) = k(A)$ adódik, A tehát mérhető és

$$t(A) = \sum_{i=1}^n k(A_i) = \sum_{i=1}^n t(A_i). *$$

Annak érdekében, hogy halmazok mérhetőségének vizsgálatára alkalmas, a mérhetőségre vonatkozó szükséges és elégséges feltételt megadó tételt kimondhassunk, először a nullamértékű /speciálisan zérus területű, zérus térfogatu/ halmazokkal kell foglalkoznunk.

2.19. Tétel. $AC \mathbb{R}^m$ zérus mértékű / $t(A) = 0$ /, ha tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz vannak olyan $T_1, \dots, T_n$ téglák, hogy

$$AC \bigcup_{i=1}^n T_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n t(T_i) < \epsilon.$$

/Könnyű látni, hogy a T_i téglákat úgy is lehet választani, hogy $AC \bigcup_{i=1}^n \text{int } T_i$ legyen./

Bizonyítás. Mivel $t(A) \leq k(A)$ és a feltételek értelmében $k(A) = 0$, így az állítás adódik. *

Zérus mértékű halmazokkal kapcsolatosak az alábbi állítások, amelyek a 2.19. tételre támaszkodva közvetlenül beláthatók:

2.20. Tétel.

- a) Zérus mértékű /területű, térfogatu/ pont-halmaz minden része is zérus mértékű /területű, térfogatu/. *
- b) Véges számú zérus mértékű /területű, térfogatu/ pont-halmaz egyesítése is zérus mértékű /területű, térfogatu/. *
- c) A véges számú pontból álló halmaz zérus mértékű /területű, térfogatu/. *

Az utóbbi állításnál lényegesen több is mondható az $m = 2$ esetben:

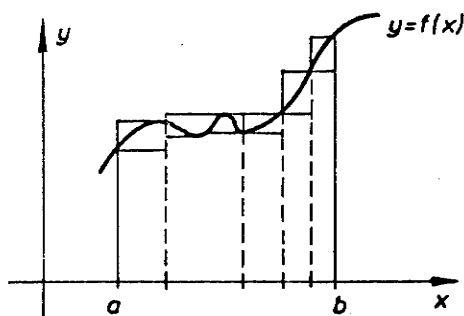
2.21. Tétel. Ha f az $[a, b]$ intervallumban folytonos függvény, akkor az $y = f(x) (a \leq x \leq b)$ egyenletű görbe zérus területű.

Bizonyítás. $f[a, b]$ -ben egyenletesen folytonos, tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz megadható tehát olyan $\delta > 0$, hogy $[a, b]$ -nek δ -nál finomabb $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ felosztására $f[x_{i-1}, x_i]$ -ben felvett legnagyobb függvényértékét M_i -vel, a legkisebb függvényértéket pedig m_i -vel jelölve /ezeket az értékeket biztosan felveszi $[x_{i-1}, x_i]$ -ben f [Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása III.3.26./].

$M_i - m_i < \epsilon$, az

$N_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$

négyszög területe tehát



6. ábra

$$t(N_i) = (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon \delta \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n t(N_i) < (b-a)\epsilon$$

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y = f(x)\} \subset \bigcup_{i=1}^n N_i.$$

Mivel $\epsilon(b-a)$ tetszőleges kicsinnyé tehető, ha ϵ elég kicsiny, 2.19. értelmében állításunkat igazoltuk. *

/A tétel m -dimenziós megfelelője a következő:

Ha $K \subset \mathbb{R}^{m-1}$ korlátos, zárt halmaz, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és $A \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^m$ és

$$A = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) : (x_1, \dots, x_{m-1}) \in K, x_m = f(x_1, \dots, x_{m-1})\}$$

akkor A m -dimenziós mértéke $t_m(A) = 0$.

Ezután az előkészítés után kimondható a következő tétel:

2.22. Tétel. Az ACR^m halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha korlátos és határa zérus mértékű.

Okoskodásunk szemléletesebbé tétele végett végezzük a bizonyítást az $m = 2$ speciális esetre.

Bizonyítás. Legyen A korlátos halmaz, jelöljük határát H -val. Tegyük fel, hogy A mérhető és tetszőleges $\epsilon > 0$ mellett válasszuk meg az $N_1, \dots, N_n$ és $N'_1, \dots, N'_n$ négyszögeket úgy, hogy $N_i \subset A$ legyen, az N_i -k ne nyuljanak egymásba, az N'_j -k pedig fedjék be A -t és

$$(*) \quad t(A) - \epsilon < \sum_{i=1}^n t(N_i), \quad \sum_{j=1}^{n'} t(N'_j) < t(A) + \epsilon$$

legyen. Tekintsük azt a négyszögrácsot, amelynek rácsegyenesei az előbbi N_i és N'_j négyszögek oldalszakaszain átfektetett egyenesek. Jelöljük s -sel azoknak a rácsnégyszögeknek területösszegét, amelyek valamelyik N_i -nek részei, s' -vel pedig azokét, amelyek részei egy

$N_j^!$ -nek, de egyetlen N_i -nek sem részei. Mivel bármely rácsnégyyszög legfeljebb egy N_i -nek lehet része, azért 2.9. értelmében

$$(**) \quad s = \sum_{i=1}^n t(N_i),$$

továbbá az s összeg előállításában szereplő rácsnégyyszögek mindegyike része A -nak, és így 2.9. szerint egy $N_j^!$ -nek is, vagyis

$$(***) \quad s + s' \leq \sum_{j=1}^{n'} t(N_j^!)$$

/egy rácsnégyyszög több $N_j^!$ -nek is lehet része/. (*),
(**) és (***) folytán

$$s' < t(A) + \epsilon - s < (t(A) + \epsilon) - (t(A) - \epsilon) = 2\epsilon.$$

Ha $p \in H$, akkor $p \in N_j^!$, valamely j -re, hiszen a zárt n'
 $\bigcup_{j=1}^{n'} N_j^!$ halmaz A -val együtt A -nak minden érintkezési pontját, tehát minden határpontját is tartalmazza. Így $p \in N$ valamely $N_j^!$ rácsnégyyszögre. Ha $p \in \text{int } N$, akkor $N \subset N_i$ esetén $p \in \text{int } A$ volna, holott p határpontja A -nak; így ekkor N nem lehet egyetlen N_i -nek sem része. Eszerint H -t befedik azok a rácsnégyyszögek, amelyeknek területösszege $s' < 2\epsilon$, továbbá bizonyos rácsnégyyszögek határai, amelyek azonban 2.20.b. és 2.21. szerint együttvéve is zérus területűek, tehát ϵ -nál kisebb területösszegű további négyszögekkel befedhetők, s így valóban, ha A mérhető, akkor $t(H) = 0$. Tegyük most fel azt, hogy $t(H) = 0$. Legyen N olyan négyszög, amely A -t tartalmazza, továbbá adott $\epsilon > 0$ mellett $N_1, \dots, N_n$ olyan négyszögek, hogy

$$H \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int } N_i, \quad \sum_{i=1}^n t(N_i) < \epsilon.$$

Készítsünk négyszögrácsot N és N_i oldalegyeneseiből. Jelöljük az A -ban fekvő rácsnégyszögek területösszeget s -sel, azokét pedig, amelyek metszik A -t, de nem részei A -nak, s' -vel. Mivel a rácsnégyszögek nem nyulnak egymásba, azért

$$(+) \quad s \leq b(A),$$

mivel pedig a rácsnégyszögek befedik N -et és vele A -t,

$$(++) \quad k(A) \leq s + s'.$$

Ha most N' az s' előállításában szereplő rácsnégyszögek egyike, akkor van benne A -hoz tartozó pont is, A -hoz nem tartozó pont is, így a kettőt összekötő szakaszon H -hoz tartozó pont is. Ezért N' metszi valamelyik N_i -t, ami 2.9. szerint csak $N' \subset N_i$ esetén lehetséges. Így 2.9. miatt

$$(+++ \quad s' \leq \sum_{i=1}^n t(N_i) < \varepsilon.$$

Végül is $(+)$, $(++)$, $(+++)$ szerint

$$k(A) - b(A) \leq s + s' - s < \varepsilon,$$

innen pedig $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén $k(A) \leq b(A)$ adódik, amit

$b(A) \leq k(A)$ -val összevetve /2.10./ $k(A) = b(A)$, vagyis $t(H) = 0$ esetén A valóban mérhető. *

2.23. MEGJEGYZÉS. A 2.20., 2.21., 2.22 tételekből következik, hogy R^2 -ben minden olyan korlátos halmaz, amelynek határa véges számú egyenesszakasz ill. folytonos görbe egyesítéséből áll, mérhető. Mérhetőek tehát mindazok az idomok, amelyekkel az elemi geometriában foglalkozni szoktak.

Természetesen adódik az a kérdés, hogy mérhető halmazok egyesítése, különbsége, metszete mérhető-e? Ezekre a kérdésekre a következő válaszok adhatók:

|| 2.24. Tétel. Ha A és B mérhető, akkor $A \cup B$, $A \cap B$ és $A - B$ is mérhető.

Bizonyítás. Jelöljük tetszőleges X halmaz határát H_X -szel. A -val együtt $A - B$ is korlátos, és A , B , $A - B$ határára fennáll a

$$(*) \quad H_{A-B} \subset H_A \cup H_B$$

összefüggés. Valóban, akár külső pontja p az A halmaznak, akár belső pontja a B halmaznak, külső pontja lesz az $A - B$ halmaznak, míg ha p belső pontja A -nak, külső pontja B -nek, akkor $A - B$ -nek belső pontja kell, hogy legyen. Ekkor azonban $(*)$ miatt H_A -val és H_B -vel együtt H_{A-B} is zérus mértékű, így 2.20. és 2.22. értelmében $A - B$ mérhető.

Másrészt, mivel $A \cup B = A \cup (B - A)$, a jobb oldalon álló halmazok pedig diszjunkt, vagyis biztosan egymásba nem nyúló, mérhető halmazok, 2.18.d) értelmében $A \cup B$ mérhető, és $t(A \cup B) = t(A) + t(B - A)$.

Mivel pedig $A \cap B = A - (A - B)$, a mérhető A és $(A - B)$ halmazok különbsége a fentiek miatt mérhető kell, hogy legyen.

*

2.25. MEGJEGYZÉS. Arra, hogy A mérhetőségéből nem következik tetszőleges részhalmazának mérhetősége, a következő egyszerű példával világíthatunk rá:

Az $N = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ egységnégyzet pontjaiból álló halmaz mérhető, területe $t(N) = 1$.

Jelöljük A -val az N egységnégyzet racionális koordinátájú pontjainak halmazát.

ACN , $k(A) = 1$ /2.28.2. feladat/ $b(A) = 0$, s így A nem mérhető.

Igazak azonban a következő állítások /bizonyításukat feladatként tűzzük ki:

2.26. Tétel. Ha A mérhető, akkor int A és $\bar{A}$ is mérhető / $\bar{A}$ értelmezését lásd Többváltozós függvények differenciálszámítása 1.5.16./ és mértékük megegyezik A mértékével.

2.27. MEGJEGYZÉS. A terület fogalmától elvárjuk azt a tulajdonságot, hogy egybevágó idomok területe megegyezzek. Igaz ennek megfelelően a következő állítás:

ACR^2 és BCR^2 egybevágó halmazok, ha van R^2 -nek olyan önmagára való leképezése, amely a pontok távolságait változtatlanul tartja /un. kongruens leképezés/ és A -t B -be viszi át. /Ilyen leképezés pl. az eltolás, a tükrözés, stb./

Egy korlátos A halmaz külső ill. belső térfogata /területe/ nem változik távolságtartó /konruens/ leképezésnél.

Az állítást itt nem bizonyítjuk.

2.28. Feladatok.

1. Mutassuk meg, hogy R^3 -ben bármely rektifikálható folytonos görbe képe zérus térfogatu.
2. Igazoljuk a 2.25. megjegyzésben adott A halmazra, hogy $k(A) = 1$.
3. Igazoljuk a 2.26. tétel állítását.
4. Igazoljuk, hogy ha ACR^2 korlátos, $\epsilon > 0$, akkor van olyan mérhető, nyílt G , hogy ACG , $\tau(G) < k(A) + \epsilon$.

II. TÖBBES (RIEMANN-) INTEGRÁL

1. A TÖBBES (RIEMANN-) INTEGRÁL DEFINÍCIÓJA, INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK FŐBB OSZTÁLYAI

A többes integrál fogalmához az 1.1, 1.2, 1.3 példákban követett, majd 1.4.-ben általánosabban megfogalmazott gondolatmenet vezet el bennünket. A szabatos és általános megfogalmazáshoz olyan definíciók és tételek sorozatán át jutunk el, amelyek teljesen megegyeznek a határozott /Riemann-/ integrál értelmezésénél szereplőkkel, a bevezető fogalmakat csupán az a tény teszi valamelyest bonyolultabbá, hogy az $[a, b]$ intervallumnak és felosztásainak szerepét most $\mathbb{R}^m$ korlátos mérhető A halmazra és ennek egymásba nem nyúló mérhető részhalmazokra való felbontása veszi át. Egyébként a kimondott definíciók és tételek nagyobb részt még sorszámozásukban is megegyeznek a Valós egyváltozós függvények integrálszámítása I.2. fejezetbeli analóg definíciókkal, tételekkel, a tételek bizonyítása is egyező, így most többségében el is hagyható.

1.1. Tegyük fel, hogy az alábbiakban az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) függvény a mérhető $A \subset H$ halmazon korlátos.

1.2. Állapodjunk meg a következő definíciókban, jelölésekben:

- a) A mérhető $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaznak egy F felosztása olyan egymásba nem nyúló, nem üres, mérhető $A_1, \dots, A_n$ halmazok rendszere, amelyre

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Ezt röviden így jelöljük:

$$F = \{A_1, \dots, A_n\}.$$

- b) F felosztási részhalmazainak mértéke /területe, térfogata/ a korábbi jelöléssel

$$t(A_i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

- c) F részhalmazában /azok belsejében, vagy határán/ felvett pontok /reprezentáns pontoknak is nevezik őket/

$$\xi_1, \dots, \xi_n,$$

ahol tehát

$$\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{im}) \in A_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

- d) F egyenes részhalmazain felvett függvényértékek halmazának alsó, ill. felső határa /az $f: H \rightarrow R$, $ACHCR^m$ A -n korlátos függvény esetében/

$$m_i = \inf\{(f(x) : x = (x_1, \dots, x_m) \in A_i)\} = \inf f(A_i)$$

$$M_i = \sup\{(f(x) : x = (x_1, \dots, x_m) \in A_i)\} = \sup f(A_i)$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

/Mivel f A -n, és így a nem-üres $A_i \subset A$ -n korlátos, a szintén nem-üres $f(A_i)$ halmaznak kell, hogy alsó, ill. felső határa létezzen a Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása jegyzet I.5.15. tétele értelmében./

Az m_i ill. M_i értékeket persze nem kell, hogy f felvegye A_i -n.

- e) f ingadozása /oszcillációja/ F részhalmazában

$$O_i = M_i - m_i = \sup\{|f(\xi_i) - f(\eta_i)| : \xi_i, \eta_i \in A_i\}$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

1.3. A következő fogalmakat értelmezzük és ezekre a következő jelöléseket vezetjük be:

- a) Az f függvény F felosztáshoz tartozó alsó összege /1.2. jelöléseivel/

$$s(f, F) = \sum_{i=1}^n m_i t(A_i).$$

- b) Az f függvény F felosztáshoz tartozó felső összege /1.2. jelöléseivel/

$$S(f, F) = \sum_{i=1}^n M_i t(A_i).$$

- c) Az f függvény F felosztáshoz tartozó oszcillációs összege /1.2. jelöléseivel/

$$\Omega(f, F) = \sum_{i=1}^n O_i t(A_i).$$

- d) Az f függvény F felosztáshoz és a ξ_i ($i = 1, \dots, n$) reprezentáns pontokhoz tartozó integrálközelítő összege /1.2. jelöléseivel/

$$\sigma(f, F, \Xi) = \sigma(f, F, \{\xi_1, \dots, \xi_n\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) t(A_i).$$

/Egy F felosztáshoz, attól függően, hogy hol vesszük fel a $\xi_i \in A_i$ pontokat, végtelen sok integrálközelítő összeg tartozik./

- e) Az F felosztás δ finomságu, ha minden felosztási részhalmazának átmérője /Valós többváltozós függvények differenciálszámítása I.4.1./ legfeljebb δ , azaz $\max \delta_i \leq \delta$, /ahol $\delta_i = \sup \{d(x, y) : x, y \in A_i\}$.

- f) Az F_1 felosztás F -nek finomitása, ha $F = \{A_1, \dots, A_n\}$ -ből az egymásba nem nyuló, mérhető A_i részhalmazok továbbbosztása révén áll elő. Ez a továbbbosztás ismét olyan egymásba nem nyuló, nem üres, mérhető $C_{i1}, \dots, C_{in_i}$

halmazok rendszere, amelyre $A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} C_{ij}$ ($i = 1, \dots, n$),
 vagyis $A = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_i} C_{ij}$ [$\text{int } C_{i_1 j_1} \cap \text{int } C_{i_2 j_2} = \emptyset$,
 $j_1 \neq j_2$ $i_1 = i_2$ esetén ugyanis A_{i_1} egy felosztásának
 két tagjáról van szó, $i_1 \neq i_2$ esetén pedig $\text{int } A_{i_1} \cap$
 $\text{int } A_{i_2} = \emptyset$ miatt lesz $\text{int } C_{i_1 j_1} \cap \text{int } C_{i_2 j_2} = \emptyset$.]

g) Ha $F_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$ és $F_2 = \{B_1, \dots, B_m\}$ az A halmaznak
 két mérhető, egymásba nem nyúló halmazokra való felbon-
 tása, továbbá $C_{ij} = A_i \cap B_j$, akkor az F_1 és F_2 közös fi-
nomítása, F_{12} , a C_{ij} halmazok közül a nem üresékből
 álló felosztás, ahol $A = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m C_{ij}$ /mivel $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ és

$$A_i = \bigcup_{j=1}^m C_{ij} /, \text{ ill. } A = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n C_{ij} / \text{mivel } A = \bigcup_{j=1}^m B_j \text{ és}$$

$$B_j = \bigcup_{i=1}^n C_{ij}.$$

/A C_{ij} halmazok közül a nem-üresek F_1 -nek is, F_2 -nek
 is továbbosztását alkotják, mérhetőek /I.2.25/,

$$\text{int } C_{i_1 j_1} \cap \text{int } C_{i_2 j_2} = \emptyset \quad i_1 \neq i_2 \text{ esetén, mert}$$

$$\text{int } A_{i_1} \cap \text{int } A_{i_2} = \emptyset, \quad j_1 \neq j_2 \text{ esetén, mert } \text{int } B_{j_1} \cap$$

$\text{int } B_{j_2} = \emptyset$, az egyesítésből pedig az üres C_{ij} halma-
 zok elhagyhatók/.

h) A felosztásainak egy (F_n) sorozata minden határon tul
finomodó, ha tetszőleges δ -ra F_n δ -finomságu, mihelyt
 $n > N(\delta)$.

1.4. Legyen $h = \sup \{s(f, F)\}$,

$$H = \inf \{S(f, F)\},$$

ahol $\{s(f, F)\}$ ill. $\{S(f, F)\}$ -vel A összes lehetséges felosz-
 tásához tartozó alsó, ill. felső összegeinek halmazát je-

lőltük. /Mivel f - 1.1. feltevésünk szerint - a mérhető $A \neq \emptyset$ halmazon korlátos, h, H létezik./

1.5. DEFINÍCIÓ. A mérhető A halmazon korlátos f függvény ott Riemann-integrálható /röviden integrálható/, ha $h = H$.

A mérhető A -n Riemann-integrálható /továbbiakban röviden A -n integrálható/ függvényeket osztályát $\mathcal{R}$ -rel jelölve az 1.5. definíció így írható:

$$A\text{-n } f \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \sup\{s(f, F)\} = \inf\{S(f, F)\}.$$

1.6. DEFINÍCIÓ. f integrálja A -n a megegyező $h = H$ érték. Az m -változós f függvény A halmazon vett többes integráljának jelölésére a következő jelet vezetjük be:

$$h = H = R = \int_A \dots \int_A f \, dx_1 \dots dx_m = \int_A f \, dt$$

Az f függvényt most is integrálandó függvénynek, vagy integrandusznak nevezzük, A az integrációs tartomány.

Speciálisan két- ill. háromváltozós függvény esetében ($A \subset \mathbb{R}^2, A \subset \mathbb{R}^3$) a következő jelöléseket szoktuk használni:

$$\iint_A f \, dx_1 dx_2 = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_A f \, dt,$$

$$\iiint_A f \, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_A f \, dv$$

és a területi ill. térfogati integrálról beszélünk.

1.7. DEFINÍCIÓ. Az 1.4.-ben értelmezett h, H számot többes Darboux-féle alsó ill. felső integrálnak is nevezik.

f integrálhatóságára a következő feltételeket adhatjuk meg:

1.8. Tétel. A mérhető A halmazon korlátos f függvény ott akkor és csak akkor integrálható, ha

a) tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz található olyan felosztás, amelyre $\Omega = S - s < \epsilon$, ill.

b) van olyan (F_n) felosztássorozat, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = R$$

/itt az F_n felosztáshoz tartozó alsó, ill. felső összeget jelöltük s_n -nel ill. S_n -nel/, ill.

c) ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz van olyan F felosztása A-nak, amelyhez tartozó tetszőleges σ integrálközelítő összegre $|\sigma - R| < \epsilon$, /ahol R-rel jelöltük f integrálját A-n/,

Bizonyítás. Mindegyik állítás bizonyítása az egyváltozós esetben követett gondolatmenettel történik /lásd Valós egyváltozós függvények integrálszámítása I. 2.10, 2.12, 2.16, az ott szereplő segédtetelekre építve és az ottani következtetésekre jutva/. *

m -változós korlátos függvények esetében is igazak tehát az alábbi állítások:

1.9. Ha F_1 az A halmaz F felosztásának finomítása, akkor

$$s(f, F_1) \geq s(f, F), S(f, F_1) \leq S(f, F), \Omega(f, F_1) \leq \Omega(f, F). *$$

/A bizonyításnál felhasználhatjuk I.2.18.d) állítását./

1.10. $h \leq H$. *

1.11. Tétel. Tetszőleges f függvényre legfeljebb egy olyan R szám van, amelyhez tetszőleges közel van alkalmas F felosztáshoz tartozó alsó, ill. felső összeg. f akkor és csak akkor integrálható a vizsgált /mérhető/

|| halmazon, ha van ilyen R szám, és akkor R az integrál értéke. /Ez 1.8.a) következménye./ *

1.12. Tétel. Ha adott $\epsilon > 0$ -ra és egy F felosztásra $\Omega(f, F) < \epsilon$, akkor ugyanezen $\epsilon > 0$ mellett F minden F_1 finomítására is $\Omega(f, F_1) < \epsilon$. /Ez 1.9.-ből következik./ *

1.13. Tétel. Ha $F = \{A_1, \dots, A_n\}$ A -nak egy felosztása, és F -re, adott $\epsilon > 0$ mellett, $\Omega(f, F) < \epsilon$, akkor tetszőleges $\xi_i, \eta_i \in A_i$ pontokra

$$\sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| t(A_i) < \epsilon.$$

/Lásd Valós egyváltozós függvények integrálszámítása I.2.14./

1.14. Tétel. Ha f a mérhető A halmazon integrálható, és egy $F = \{A_1, \dots, A_n\}$ felosztásra $\Omega(f, F) < \epsilon$, akkor bárhogyan választva is a $\xi_i \in A_i$ helyeket

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) t(A_i) - \iint_A f dt \right| < \epsilon.$$

/Nyilván az összeg is, az integrál is $s(f, F)$ és $S(f, F)$ közé esik./ *

Tulajdonképpen ezt a tételt kiegészítve jutottunk az 1.8.c) állításhoz.

Az integrálhatóságra vonatkozó 1.8. alatti szükséges és elégséges feltételt megadó tételek birtokában a következő függvényosztályok integrálhatóságát tudjuk könnyen bizonyítani:

|| 1.15. Tétel. Ha f folytonos a mérhető, zárt A halmazon, akkor ott integrálható. *

Az egyváltozós esethez hasonlóan az egyenletes folytonosság tényére épülő bizonyításból /v.ö. Valós egyváltozós

függvények integrálszámítása I.2.17/ most is következik, hogy minden elég finom felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg f integráljától tetszőleges ϵ -szel tér el a reprezentáns pontok választásától függetlenül. Folytonos f esetében tehát az A -n vett R integrál előállítható tetszőleges minden határon túl finomodó felosztásokhoz tartozó tetszőleges integrálközelítő összegek sorozatának határértékeként. Ez nemcsak folytonos függvények, hanem tetszőleges integrálható függvény esetében is fennáll. /Nem bizonyíthatjuk./

1.16. Tétel. Ha f korlátos a mérhető A -n, és van olyan $B \subset A$, hogy $t(B) = 0$ és f a $p \in A - B$ pontokban A -ra szorítva folytonos, akkor f integrálható A -n.

Bizonyítás. Jelöljük A határát H -val, és legyen $\epsilon > 0$ adott. I.2.22, 2.19, és 2.28.4. értelmében bármely $\eta > 0$ -hoz található olyan mérhető, nyílt G halmaz, hogy $B \cup H \subset G$, $t(G) < \eta$. Ekkor $C = A - G = (A \cap H) - G$ mérhető /I.2.24/ zárt, f folytonos C -n, így 1.15. alkalmazható, és C -nek van olyan felosztása, amelynek megfelelő osztályok összege $< \frac{\epsilon}{2}$. E felosztáshoz $(A \cap C)$ -t hozzávéve A -nak olyan felosztását kapjuk, amelynek osztályok összege egyetlen taggal nő, amely legfeljebb $2M\eta < \frac{\epsilon}{2}$, ha η elég kicsiny, ahol $M|f|$ felső korlátja A -n. Ezzel állításunkat igazoltuk. *

Végül fogalmazzuk meg általánosságban az 1.15. után tett megjegyzésünket:

1.17. Tétel. Ha f A -n integrálható, akkor $\int_A f dt$ előállítható A tetszőleges, minden határon túl finomodó felosztásaihoz tartozó integrálközelítő összegek sorozatának határértékeként, továbbá tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz van olyan δ , hogy minden δ -finomságú felosztáshoz tartozó alsó,

felső és integrálközelítő összeg ϵ -nál jobban megköze-
liti az integrált.

1.18. Feladatok.

1. Végezzük el - az egyváltozós eset mintájára - az 1.8. a), b), c), 1.9, 1.10, 1.13, 1.15 állítások igazolását.

2. Integrálható-e a mérhető $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazon az

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x,y \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ és } y \text{ közül legalább az egyik} \\ & \text{irracionális} \end{cases}$$

$((x,y) \in A)$ függvény?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha N négyszög.

$$A \subset N, \quad g = \begin{cases} 1 & A\text{-n,} \\ 0 & (N-A)\text{-n} \end{cases}$$

és g N -en integrálható, akkor A mérhető.

4. Számítsuk ki

$$\iint_A xy \, dx \, dy \quad (A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\})$$

értékét /az integrálközelítő összegeket négyzetrácsos felosztáshoz írjuk fel, reprezentáns pont legyen pl. minden négyzet jobb oldali felső csúcsa/.

5. Integrálható-e $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x+y+1)$ az $A = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 3\}$ halmazon?

2. A TÖBBES INTEGRÁL TULAJDONSÁGAI

Az előző pontban láttuk, hogy a mérhető A halmazon folytonos, illetve annak egy zérus mértékű részén kívül folytonos, korlátos f függvény A -ban integrálható. /1.15. 1.16./ Most olyan tulajdonságokat sorolunk fel, amelyek minden mérhető A halmazon integrálható /tehát az előbbinél

bővebb függvényosztályba tartozó/ függvény esetében fennállnak. A tulajdonságok első része az integrációs tartományra, második része az integranduszra vonatkozik. Végezetül a többes integrálokra vonatkozó néhány becslést adunk meg.

A következő tételek bizonyítása az egyváltozós megfelelő tételek bizonyításával gyakorlatilag megegyezik /csupán arra kell mindig figyelemmel lennünk, mit jelent R^m -ben a mérhető A halmaz egy F felosztása, annak finomítása, két felosztás egyesítése /1.2.a), 1.3.f), g)/ így ezek részletezését itt mellőzzük, ill. feladatként tűzzük ki.

2.1. Tétel. Ha f integrálható A -n és BCA mérhető, akkor f integrálható B -n is. * /V.ö. egyváltozós esetben I.3.1./

2.2. Tétel. Ha f integrálható az egymásba nem nyuló A_i halmazok mindegyikén, akkor integrálható az

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ halmazon is, és } \int_A f dt = \int_A \dots \int_A f dt =$$

$$= \int_A \dots \int_A f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \dots \int_{A_i} f dx_1 \dots dx_m \quad *$$

/V.ö. egyváltozós esetben I.3.3./

A 2.2. tétel azt fejezi ki, hogy a többes integrál egymásba nem nyuló halmazokon additív. Amennyiben a mérhető A és B halmazra int $A \cap \text{int } B \neq \emptyset$ az előbbinél kevesebbet állíthatunk:

2.3. Tétel. Ha f integrálható a mérhető A és B halmazon, akkor az $A \cup B$ halmazon is integrálható.

Bizonyítás. $A \cup B = A \cup (B - A)$, tehát mivel A és $(B - A)$ diszjunkt /tehát egymásba nem nyuló/, mérhető /I.2.24./, $f(B - A)$ -n 2.1. értelmében integrálható, és így 2.2.-ből az állítás adódik. *

A gondolatmenetből egykébként még az is következik, hogy

$$\int_{A \cup B} f \, dt = \int_A f \, dt + \int_{B-A} f \, dt.$$

Az integranduszra vonatkozóan a következő állításokat mondhatjuk ki:

2.4. Tétel. Ha f és g A -n integrálható, c tetszőleges állandó, akkor

a) cf is integrálható A -n, és $\int_A cf \, dt = c \int_A f \, dt,$

b) $f+g$ is integrálható A -n, és $\int_A (f+g) \, dt =$
 $= \int_A f \, dt + \int_A g \, dt.$

c) $(f \cdot g)$ is integrálható A -n,

d) ha $|g| > \delta > 0$ A -n, akkor $\frac{f}{g}$ is integrálható A -n,

e) $|f|$ is integrálható A -n és $\left| \int_A f \, dt \right| \leq \int_A |f| \, dt.$

/V.ö. az egyváltozós esetben I.3.5./ *

Mivel a gyakorlatban az integrál kiszámítása helyett sokszor megelégedhetünk annak alkalmas becslésével is, erre vonatkozóan a következő állításokat könnyű igazolni:

2.5. Tétel. Ha f és g integrálható A -n, itt $|f|$ korlátja K , ill. az 1.2.d)-ben használt jelölésekkel $m = \inf f(A)$, $M = \sup f(A)$, akkor

a) ha $f \leq g$ A -n, akkor $\int_A f \, dt \leq \int_A g \, dt,$

b) $\left| \int_A f \, dt \right| \leq K \cdot t(A),$

c) $m \cdot t(A) \leq \int_A f \, dt \leq M \cdot t(A).$ * /V.ö. az egyváltozós esetben I.3.6./

c)-ben = áll pl. akkor, ha $f \equiv 1$ A-n /ekkor $m = M = 1$,
 $\int \dots \int_A dt = t(A)$, ami $A \subset \mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{R}^3$ esetén A területe ill.
 térfogata/.

Felvethető a kérdés, hogy mikor állítható valamely A-n integrálható f függvényre, hogy A-n vett integrálja biztosan = 0. Triviálisan ez a helyzet, ha $f \equiv 0$ A-n, de könnyű az alábbi állítást is igazolni:

2.6. Tétel. Ha f korlátos A-n, és $t(A) = 0$, akkor
 $\int \dots \int_A f dt = 0$.

Bizonyítás. A bármely felosztásának bármely tagjára $t(A_i) = 0$ /I.2.20.a)/, így minden σ integrálközelítő összeg 0. *

2.7. Feladatok.

- Végezzük el - az egyváltozós eset mintájára - a 2.1.; 2.2.; 2.4.a), b), c), d), e); 2.5.a), b), c) állítások igazolását.
- Következik-e $f+g$, $f \cdot g$ ill. $|f|$ A-n való integrálhatóságából f és g, ill. f integrálhatósága A-n. Adjunk meg alkalmas példát állításunk indokolására.
- Igazoljuk, és próbáljuk meg javítani az alábbi becslést: $0 \leq \int_A (4 - \sqrt{x^2+y^2}) dx dy \leq 16\pi$ ahol
 $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

- Adjunk becslést a következő integrálra:

$$\int\int_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \sin^2 x + \sin^2 y}.$$

3. A KETTŐS INTEGRÁL ÁTALAKÍTÁSA KÉTSZERES INTEGRÁLLÁ. A KETTŐS INTEGRÁL TRANSZFORMÁCIÓJA

A kettős integrált közvetlenül a definíció alapján, ill. az 1.17. tétel alapján alkalmas, minden határon túl finomodó felosztásokhoz tartozó integrálközelítő összegek sorozatának határértékeként ritkán, és akkor is körülményes számolással határozhatjuk meg. Célszerű ezért olyan módszert keresünk, amellyel - legalábbis speciális integrációs tartományok esetében - vissza tudjuk vezetni a kettős integrál kiszámítását egyváltozós függvények integráljának kiszámítására.

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor az integrációs tartomány négyyszög.

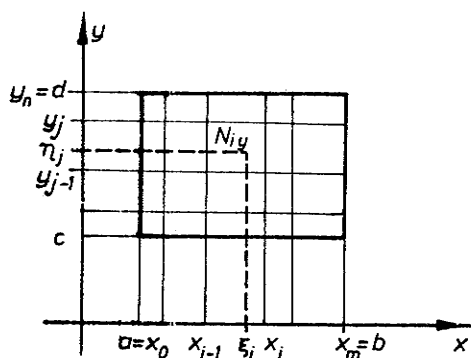
3.1. Tétel. Legyen f integrálható az $N = [a,b] \times [c,d]$ négyyszögön, és tegyük fel, hogy $c \leq y \leq d$ esetén létezik az $\int_a^b f(x,y) dx$ /y-től természetesen függő értékű/

$$(*) \quad g(y) = \int_a^b f(x,y) dx$$

integrál. Ekkor g integrálható $[c,d]$ -ben, és

$$(**) \quad \iint_N f(x,y) dx dy = \int_c^d g(y) dy.$$

Bizonyítás. Vegyünk fel $[c,d]$ -ben tetszőleges $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ osztópontu felosztást és $y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j$ közbülső helyeket, továbbá $[a,b]$ -ben is egy $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ osztópontu felosztást. Az $x = x_i$ és $y = y_j$ ($i = 0, \dots, m$; $j = 0, \dots, n$) rácsegyenesekből készített négyszögrács N_{ij} rácsnégyszögei N -nek egy felosztását adják. /7. ábra/



7. ábra

Legyen 1.2.d jelöléseivel

$$m_{ij} = \inf f(N_{ij}),$$

$$M_{ij} = \sup f(N_{ij}).$$

Ekkor a (*) képlettel értelmezett g függvényre

$$\begin{aligned} g(\eta_j) &= \int_a^b f(x, \eta_j) dx = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_j) dx, \end{aligned}$$

és mivel

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ esetén } m_{ij} \leq f(x, \eta_j) \leq M_{ij},$$

azért

$$\sum_{i=1}^m m_{ij} (x_i - x_{i-1}) \leq g(\eta_j) \leq \sum_{i=1}^m M_{ij} (x_i - x_{i-1}).$$

Igy g -nek az adott felosztáshoz és η_j helyekhez tartozó közelítőösszegére

$$\begin{aligned} s &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m m_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n g(\eta_j) (y_j - y_{j-1}) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) = S \end{aligned}$$

adódik, ahol s és S az f függvénynek a tekintett négyzög-rácsos felosztás mellett megfelelő alsó és felső összeg.

Ha most adott $\epsilon > 0$ -hoz olyan $\delta > 0$ -t választunk, hogy N -nek minden δ -nál finomabb felosztása esetén /1.17./

$$R - \epsilon < s \leq S < R + \epsilon, \quad \text{ahol} \quad R = \iint_N f(x, y) dx dy,$$

és $[c,d]$ -ben $\frac{\delta}{2}$ -nél finomabb felosztást készítünk, akkor $[a,b]$ -ben is $\frac{\delta}{2}$ -nél finomabb felosztást készítve, a négy-szögrácsos felosztás δ -nál finomabb lesz, úgyhogy

$$R - \epsilon < \sum_{j=1}^n g(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) < R + \epsilon,$$

g tehát integrálható $[c,d]$ -ben,

$$\int_c^d g(y) dy = R,$$

tehát, teljesül (**). (*)

3.2. MEGJEGYZÉS. Az előbbi tételben természetesen x és y szerepe felcserélhető, azaz feltéve, hogy rögzített $a \leq x \leq b$ mellett mindig létezik a

$$h(x) = \int_c^d f(x,y) dy \quad \text{integrál,}$$

$$\iint_N f(x,y) dx dy = \int_a^b h(x) dx.$$

3.3. A 3.1. tétel, ill. 3.2. megjegyzés tartalmát röviden úgy szokás megfogalmazni, hogy az

$$\iint_N f(x,y) dx dy$$

kettős integrált /területi integrált/ az

$$(+)$$

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy \quad \text{ill.} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx$$

kétszeres integrállá lehet átalakítani, ha a kettős integrál és a (+) alatti valamelyik belső integrál a rögzített

változó minden szóba jövő értéke mellett létezik. /Ez biztosan teljesül pl. f N -en folytonos/.

A (+) alatti kétszeres integrálokban a belső integrál zárójelzése el is hagyható /ilyenkor azonban vigyázzunk arra, hogy a kiszámítás mindig belülről halad kifelé/:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy, \quad \text{ill.} \quad \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx.$$

Végül megemlítjük még a

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx, \quad \text{ill.} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$$

jelölésmódot.

3.4. MEGJEGYZÉS. A 3.3.-beli (+) képletek azt mutatják, hogy az $\iint_N f dx dy$ kiszámításánál adódó kétszeres integrálokban az integrálás sorrendje felcserélhető. Hangsúlyozzuk, hogy ez csak négyszögtartományon vett integrál esetében áll.

Jelentse pl. N az $\{(x,y) : -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$ négyszöget. Ekkor $f(x,y) = x^2 + 4y$ esetén

$$\begin{aligned} \iint_N f(x,y) dx dy &= \int_{x=-2}^2 \int_{y=1}^3 (x^2 + 4y) dy dx = \int_{x=-2}^2 \left[x^2 y + \frac{4y^2}{2} \right]_{y=1}^3 dx = \\ &= \int_{x=-2}^2 \left(3x^2 + 18 - (x^2 + 2) \right) dx = \int_{x=-2}^2 (2x^2 + 16) dx = \dots = 64 + \frac{32}{3} \approx 74,67. \end{aligned}$$

Másrészt, először x szerint integrálva:

$$\begin{aligned} \iint_N f(x,y) dx dy &= \int_{y=1}^3 \int_{x=-2}^2 (x^2 + 4y) dx dy = 2 \int_{y=1}^3 \left[\frac{x^3}{3} + 4yx \right]_{x=0}^2 dy = \\ &= 2 \cdot \int_{y=1}^3 \left(\frac{8}{3} + 8y \right) dy = 16 \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^3 = 16 \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$= 80 - \frac{16}{3} \approx 74,76.$$

Sokszor megkönnyíti az N négyszögtartományra vonatkozó kettős integrál kiszámítását az alábbi tétel:

3.5. Tétel. Legyen $N = [a,b] \times [c,d]$, $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ továbbá $g[a,b]$ -ben, $h[c,d]$ -ben integrálható egyváltozós függvény. Ekkor $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ integrálható N -en, és

$$\iint_N f(x,y) \, dx \, dy = \left[\int_a^b g(x) \, dx \right] \cdot \left[\int_c^d h(y) \, dy \right].$$

Bizonyítás. Mivel integrálható függvények szorzata is integrálható /2.5.c)/, ha $g_1(x,y) = g(x)$ és $h_1(x,y) = h(y)$ integrálható N -en, ebből már következik f integrálhatósága N -en. Szimmetriaokokból nyilván elég belátnunk pl $g_1(x,y)$ integrálhatóságát. Ha a 3.1. tétel bizonyításában leírt módon N -ben négyszögrácsos felosztást készítünk és O_i jelöli g ingadozását $[x_{i-1}, x_i]$ -ben, akkor g_1 oszcillációs

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^m O_i (x_i - x_{i-1}) (d-c) = \Omega (d-c),$$

ahol Ω a g függvény oszcillációs összege az $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ osztópontu felosztás mellett. Ez Ω -val együtt tetszőlegesen kicsiny lehet.

Tudva, hogy f integrálható, a 3.1. tétel alkalmazásával kettős integrálja kétszeres integrállá, ez pedig egyszeres integrálok szorzatává közvetlenül átalakítható. *

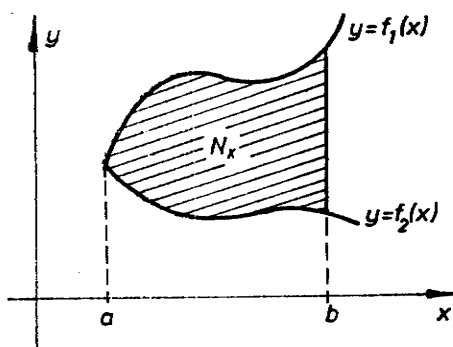
Pl. Legyen $N = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$,

$$f(x,y) = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y}.$$

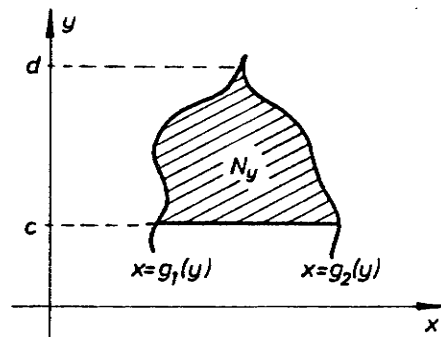
$$\begin{aligned}
 \iint_N e^{x-y} dx dy &= \int_{x=0}^1 \int_{y=1}^2 e^x \cdot e^{-y} dy dx = \int_{x=0}^1 e^x \int_{y=1}^2 e^{-y} dy dx = \\
 &= \int_{x=0}^1 e^x dx \cdot \int_{y=1}^2 e^{-y} dy = \left[e^x \right]_{x=0}^1 \cdot \left[\frac{e^{-y}}{-1} \right]_{y=1}^2 = (e-1) \left(e^{-1} - e^{-2} \right) = \\
 &= 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}.
 \end{aligned}$$

A kettős integráltnak kétszeres integrállá való átalakítása olyan módszer az integrál kiszámítására, amely nemcsak négy-szögtartományok esetében alkalmazható, hanem elég egyszerű szerkezetű görbevonallakkal határolt idomok esetében is. Utóbbiak jellemzésére vezessük be a következő elnevezést:

3.6. DEFINÍCIÓ. Legyen f_1 és f_2 az $[a, b]$ intervallumban folytonos, továbbá $a \leq x \leq b$ esetén $f_1(x) \leq f_2(x)$. Ekkor az $N_x = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ alakú halmazokat x -re nézve normáltartományok nevezük. /8. ábra/



8. ábra



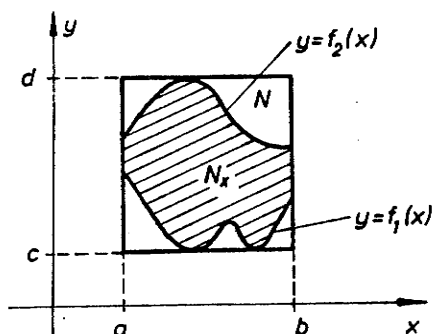
9. ábra

Hasonlóan az $N_y = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$ alakú halmazok /ahol g_1, g_2 $[c, d]$ -ben folytonos függvények/ y -re nézve normáltartományok. /9. ábra/

Ha f normáltartományon értelmezett integrálható függvény, akkor beszélhetünk ott f integráljáról, mert igaz az alábbi állítás:

3.7. Tétel. Bármely normáltartomány korlátos, zárt és mérhető.

A tétel bizonyítását feladatként tűzzük ki.



10. ábra

3.8. Tétel. Ha f folytonos az $N_x = \{(x,y): a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ normáltartományon, akkor

$$\iint_{N_x} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Bizonyítás. Mivel f_1 és f_2 $[a,b]$ -ben folytonos, felvesszük $[a,b]$ -ben legkisebb, ill. legnagyobb függvényértékeket. Jelöljük $f_1[a,b]$ -beli legkisebb függvényértékét c -vel, $f_2[a,b]$ -beli legnagyobb függvényértékét d -vel. /10. ábra/ Ekkor $N = [a,b] \times [c,d]$ -n értelmezzük a következő függvényt:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{ha } (x,y) \in N_x \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in N - N_x \end{cases}$$

Mivel N_x mérhető, zárt és f ott folytonos, g N_x -en integrálható, és nyilván integrálható g $N - N_x$ -en is, és így N -en is, továbbá

$$\iint_N g(x,y) \, dx \, dy = \iint_{N_x} g(x,y) \, dx \, dy + \iint_{N-N_x} g(x,y) \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{N_x} f(x,y) \, dx \, dy, \text{ mivel az } (N-N_x)\text{-ra kiterjesztett integrál nyilván } 0.$$

Rögzített $a \leq x \leq b$ esetén

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } c \leq y < f_1(x), \\ f(x,y), & \text{ha } f_1(x) \leq y \leq f_2(x), \\ 0, & \text{ha } f_2(x) < y \leq d. \end{cases}$$

Igy e rögzített x mellett $g(x,y)$ y függvényeként integrálható $[c,d]$ -ben, és

$$\begin{aligned} \int_c^d g(x,y) \, dy &= \int_c^{f_1(x)} g(x,y) \, dy + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x,y) \, dy + \int_{f_2(x)}^d g(x,y) \, dy = \\ &= 0 + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y) \, dy + 0. \end{aligned}$$

Eszerint teljesülnek a 3.1. tétel feltételei g -re és így

$$\begin{aligned} \iint_{N_x} f(x,y) \, dx \, dy &= \iint_N g(x,y) \, dx \, dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d g(x,y) \, dy \right) dx = \\ &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y) \, dy \right) dx. * \end{aligned}$$

3.9. MEGJEGYZÉS. Teljesen hasonlóképpen adódik a 3.6.-beli N_y normáltartományon folytonos f függvényre kettős integrálját kétszeres integrállá átalakító következő képletünk:

$$\iint_{N_y} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y) \, dx \right) dy.$$

Az előbbiek értelmében véges sok, páronként egymásba nem nyúló normáltartomány egyesítésén is integrálható az ott folytonos f függvény, kettős integrálját az egyes normáltartományokon vett integrálok összege szolgáltatja /2.2/, s ezeket azután külön-külön az előbb ismertetett módon kétszeres integrállá alakíthatjuk át.

Pl. az $f(x,y) = 3x - y^2$ függvénynek a 11. ábrán látható trapéz alakú tartományra vonatkozó kettős integrálját így számíthatjuk ki:

Az integrációs tartomány tekinthető x -re nézve normáltartománynak. A határoló görbék egyenlete:

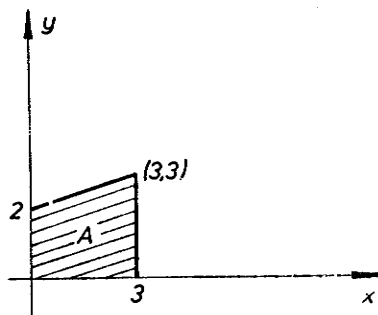
$$y = 0, y = \frac{x}{3} + 2, x = 0, x = 3,$$

$$\text{így tehát } \iint_A (3x - y^2) dx dy =$$

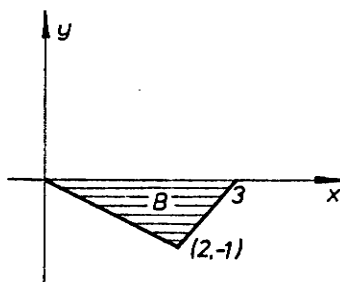
$$= \int_{x=0}^3 \left[\int_{y=0}^{\frac{x}{3} + 2} (3x - y^2) dy \right] dx =$$

$$= \int_{x=0}^3 \left[3xy - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{\frac{x}{3} + 2} dx =$$

$$= \int_{x=0}^3 \left(x^2 + 6x - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{3} + 2 \right)^3 \right) dx = \dots = \frac{63}{4} = 15,75.$$



11. ábra



12. ábra

Az $f(x,y) = \sin(y-x)$ függvény 12. ábrán látható B tartományra vonatkozó kettős integráljának kiszámításánál célszerűbb B-t y -ra nézve normáltartománynak tekintenünk /ha ugyanis x -re nézve tekintenénk normáltartománynak, akkor nyujtaná a számítást az a tény, hogy a $P_1P_2P_3$ törtvonal

egyenletét egy képlettel nem tudjuk megadni, csak kettővel, így két kétszeres integrált kellene kiszámítanunk.

$$\begin{aligned} \iint_B \sin(y-x) dx dy &= \int_{y=-1}^0 \left[\int_{x=-2y}^{y+3} \sin(y-x) dx \right] dy = \\ &= \int_{y=-1}^0 \left[\cos(y-x) \right]_{x=-2y}^{y+3} dy = \int_{-1}^0 (\cos 3 - \cos 3y) dy = \\ &= \left[y \cos 3 - \frac{\sin 3y}{3} \right]_{-1}^0 = \cos 3 - \frac{\sin 3}{3} \approx -1,037. \end{aligned}$$

3.10. A kettős /területi/ integrál kiszámítására szolgáló további módszerként a helyettesítéssel való integrálás szabályának megfelelőjét keressük. E szabályt egyváltozós függvény határozott integrálja esetében /nem a legáltalánosabb alakjában/ így fogalmaztuk meg:

Ha f integrálható $[a,b]$ -ben, az $x = \varphi(u)$ helyettesítést alkalmazva, ahol φ egy $[\alpha, \beta]$ intervallumban szigorúan monoton és folytonosan differenciálható függvény és $\varphi([\alpha, \beta]) = [a,b]$ akkor $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ esetén /vagyis ha φ monoton növekvő/

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du,$$

ill. $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$ esetén /ha φ monoton fogyó/

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = + \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \left[-\varphi'(u) \right] du.$$

A monoton növekvő ill. monoton fogyó φ esetét egy képletbe foglalva össze, a tett feltevések mellett a helyettesítéssel integrálás szabálya így írható fel:

$$(+)\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \left| \varphi'(u) \right| du.$$

A (+) képlethez hasonló átalakító képletet keresünk kétváltozós függvény kettős integráljának transzformációjára.

Legyen f integrálható az $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmazon, és vezessük be x és y helyett az u és v változókat, amelyek az előbbiekkal az

$$(++) \quad x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v)$$

képletek alapján függnek össze. Olyan B mérhető halmazt keresünk, amelyre a (++) képletekkel megadott

$$\phi(u,v) = \left[\varphi(u,v), \psi(u,v) \right]$$

leképezésnél $\phi(B) = A$, és azt várjuk, hogy

$$\begin{aligned} (+++) \quad \iint_A f(x,y) \, dx \, dy &= \\ &= \iint_B f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \Delta(u,v) \right| du \, dv \end{aligned}$$

lesz, ahol azonban nem világos még, hogy milyen $|\Delta(u,v)|$ kifejezés veszi át a (+)-ban fellépő $|\varphi'(u)|$ tényező szerepét.

A feltett kérdésre először abban a speciális esetben adunk választ, amikor $f \equiv 1$ /amikor tehát a bevezető I.1.3 feladat értelmében látható, hogy (+++) bal oldala A területének mérőszámát adja meg/. Ekkor tehát (+++) a következő képletbe megy át:

$$t(A) = \iint_A 1 \cdot dx \, dy = \iint_B \left| \Delta(u,v) \right| du \, dv,$$

vagyis olyan $|\Delta(u,v)|$ kifejezést keresünk, amelynek B -re kiterjesztett integrálja megadja a $\phi(B) = A$ képhalmaz területét.

3.11. Tétel. Legyen B mérhető, G nyílt halmaz $\mathbb{R}^2$ -ben $B \subset \bar{B} \subset G \subset \mathbb{R}^2$, $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható, B bel-sejében kölcsönösen egyértelmű leképezés $(\phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)))$ megadásánál $\varphi, \varphi_u, \varphi_v, \psi, \psi_u, \psi_v$ folytonos G -n, $p, q \in \text{int } B$, $p \neq q$ esetén $\phi(p) \neq \phi(q)$. Ekkor $\phi(B)$ is mérhető, és

$$t\{\phi(B)\} = \iint_B |\Delta(u,v)| \, du \, dv,$$

ahol: $\Delta(u,v) = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$ /Jacobi-determináns/.

A tételt nem bizonyítjuk. * $\Delta(u,v)$ szokásos jelölése

$$\Delta(u,v) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u,v)}.$$

Tetszőleges integrálható $f(x,y)$ függvény kettős integráljának transzformációjával kapcsolatban mármost a következőt mondhatjuk:

3.12. Tétel. Legyen $B \subset \bar{B} \subset G \subset \mathbb{R}^2$, B mérhető, G nyílt, $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható kölcsönösen egyértelmű leképezés, $\phi(B) = A$. /3.11. értelmében akkor A mérhető./ Ha f integrálható A -n, akkor $\phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$

$$\iint_A f(xy) \, dx \, dy = \iint_B f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |\Delta(u,v)| \, du \, dv,$$

ahol: $\Delta(u,v) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$ A tételt nem bizonyítjuk. *

Írjuk fel 3.12. állítását egy gyakran előforduló speciális esetben, ti. polárkoordinátás transzformációra:

3.13. Tétel. Legyen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r \geq 0$, $\alpha \leq \varphi \leq \alpha + 2\pi$ /ekkor a polárkoordinátás transzformáció eleget tesz a kölcsönösen egyértelműségre tett megszorításnak B belsejében. Ha $BC[0, +\infty] \times [\alpha, \alpha + 2\pi]$ mérhető, és B polárkoordinátás transzformációval adódó képét A-val jelöljük, akkor, amennyiben f A-n integrálható,

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi.$$

/Azt a tényt belátni, hogy amennyiben 3.12. állítását elfogadjuk, abból most speciális esetként

$$\Delta(r, \varphi) = \frac{\partial(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r \cos \varphi}{\partial r} & \frac{\partial r \cos \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial r \sin \varphi}{\partial r} & \frac{\partial r \sin \varphi}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

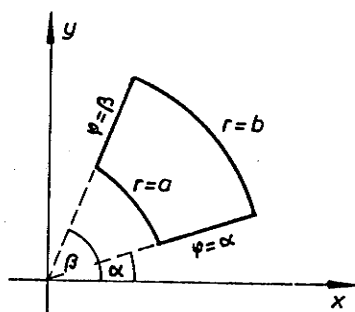
adódik, nem okoz problémát, az alábbiakban azonban nem 3.12.-re támaszkodva, hanem közvetlenül kívánjuk 3.13. állítását igazolni./

Bizonyítás. Legyen speciális esetként

$$B = N = \{(r, \varphi) : 0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \alpha + 2\pi\}$$

és jelöljük ϕ -vel az

$$(+)\ x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$



13. ábra

képletekkel megadott leképezést. N kép a $\phi(N)$ körgyűrű-cikk / $a=0$ esetén körcikk, $a>0$, $\beta-\alpha=2\pi$ esetén körgyűrű, $a=0$, $\beta-\alpha=2\pi$ esetén körlemez/ az xy síkban, és belátható, hogy ϕ az egymásba nem nyuló N_1 és N_2 négyszögeket egymásba nem nyuló $\phi(N_1)$ és $\phi(N_2)$ halmazokban viszi át. $\phi(N)$ területe

$$\begin{aligned} t(\phi(N)) &= \frac{1}{2} b^2(\beta-\alpha) - \frac{1}{2} a^2(\beta-\alpha) = \frac{a+b}{2} (b-a)(\beta-\alpha) = \\ &= \frac{a+b}{2} t(N) \end{aligned}$$

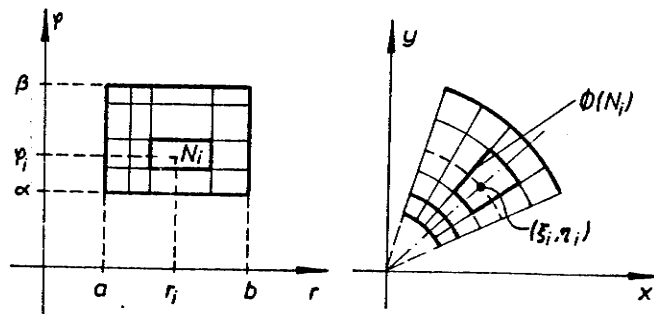
/13. ábra/. Ha tehát

$$N = \bigcup_{i=1}^n N_i$$

az N négyszög egy négyszögrácsos felosztása, akkor

$$\phi(N) = \bigcup_{i=1}^n \phi(N_i)$$

$\phi(N)$ -nek felosztása /egymásba nem nyuló, mérhető halmazokra való felbontása/ /14. ábra/ Mivel a $(+)$ függvények a zárt N négyszögön egyenletesen folytonosak, minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha a $(++)$ felosztás δ -nál finomabb, akkor a $(+++)$ felosztás ε -nál finomabb lesz.



14. ábra

Legyen $(r_i, \varphi_i) \in N_i$ tetszőleges pont N_i -ben és

$$\xi_i = r_i \cos \varphi_i, \eta_i = r_i \sin \varphi_i.$$

A feltétel értelmében f $A = \phi(N)$ -en integrálható, tehát korlátos, legyen $|f| \leq K$, ekkor

$$\begin{aligned} (++++) & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) t(\phi(N_i)) - \sum_{i=1}^n f(r_i \cos \varphi_i, r_i \sin \varphi_i) r_i t(N_i) \right| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \left[t(\phi(N_i)) - r_i t(N_i) \right] \right| \leq \\ & \leq K \left| \sum_{i=1}^n t(\phi(N_i)) - r_i t(N_i) \right| = K \sum_{i=1}^n |r'_i - r_i| t(N_i), \end{aligned}$$

ahol r'_i jelöli az N_i négyszög alsó és felső oldalához tartozó r koordináta számtani közepét. Ezért a (++++)
bal oldalán álló két összeget σ' -vel és σ'' -vel jelölve

$$|\sigma' - \sigma''| \leq K\Omega,$$

ahol Ω az r függvénynek az N négyszög (++) felosztás-
hoz tartozó oszcillációs összege.

Ha még $(r_i^*, \varphi_i^*) \in N_i$ és σ^* ; σ^{**} -gal jelöljük a σ' és
 σ'' -höz hasonlóan (r_i, φ_i) helyett (r_i^*, φ_i^*) -gal képezett
összegeket, akkor ugyanigy

$$|\sigma^* - \sigma^{**}| \leq K\Omega$$

$$\begin{aligned} \text{vagyis } |\sigma' - \sigma^*| & \leq |\sigma'' - \sigma^{**}| + 2K\Omega, \\ |\sigma'' - \sigma^{**}| & \leq |\sigma' - \sigma^*| + 2K\Omega. \end{aligned}$$

Ha mármost az f függvénynek a (+++) felosztáshoz tar-
tozó oszcillációs összegét Ω' -vel, $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)r$
(++) felosztáshoz tartozó oszcillációs összegét pedig

Ω'' -vel jelöljük, akkor előbbi eredményünkből következik, hogy

$$\Omega' \leq \Omega'' + 2K\Omega, \quad \Omega'' \leq \Omega' + 2K\Omega.$$

Ha tehát feltesszük, hogy létezik az

$$(*) \quad \iint_N f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr$$

integrál, akkor a (++) felosztás minden határon túl való finomításakor $\Omega'' + 2K\Omega \rightarrow 0$, tehát $\Omega' \rightarrow 0$, és létezik

$$(**) \quad \iint_{\phi(N)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Megfordítva, ha létezik (**) és (++)-t ismét minden határon túl finomítjuk, akkor (+++) is minden határon túl finomodik, tehát $\Omega' + 2K\Omega \rightarrow 0$, így $\Omega'' \rightarrow 0$ és létezik (*).

Ha tehát akár (*), akár (**) létezik, akkor minden határon túl finomodó (++) felosztást véve σ'' tart (*)-hoz, σ' (**) -hoz, $\Omega \rightarrow 0$, úgyhogy $|\sigma' - \sigma''| \leq K\Omega$ miatt

$$\iint_{\phi(N)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_N f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr.$$

Ezzel a tételt speciálisan $r\varphi$ síkbeli N négyszögtartományra ($B=N$) bebizonyítottuk.

Legyen most $B \subset N$ tetszőleges mérhető halmaz és

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \in \phi(B) = A, \\ 0, & \text{ha } (x, y) \in \phi(B) = A. \end{cases}$$

Ekkor:

$$h(r, \varphi) = \begin{cases} g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 1, & \text{ha } (r, \varphi) \in B, \\ 0, & \text{ha } (r, \varphi) \in \text{int } N - B. \end{cases}$$

h és $h(r, \varphi)r$ is integrálható N -en, úgyhogy g integrálható $\phi(N)$ -en s vele együtt valamely $\phi(N)$ -et tartalma-

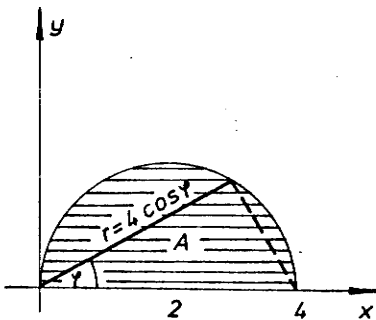
zó N' négyszögön is. Ebből következik, hogy $\phi(B) = A$ mérhető /ugyanis g -hez az N' négyszög valamely négyszögrácsos felosztásánál alsó összegként a $\phi(B)$ által tartalmazott rácsnégyszögek területösszege, felső összegként a $\phi(B)$ -t metsző rácsnégyszögek területösszege tartozik, e két területösszeg különbsége tehát tetszőlegesen kicsiny lehet, l. 1.18.3. feladat/.

Ha most f az előbbi $\phi(B)$ mérhető halmazon integrálható függvény, akkor kiterjesztve f értelmezését $\phi(N)$ -re úgy, hogy $\phi(N) - \phi(B)$ pontjaiban 0-val legyen egyenlő, f $\phi(N)$ -en integrálható lesz. Létezik tehát a $(*)$ integrál. Mivel pedig $(r, \varphi) \in N - B$ esetén a $(*)$ -beli integrandusz eltűnik, szükségképpen létezik

$$\iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr$$

és egyenlő $(*)$ -gal. Végül is

$$\begin{aligned} \iint_{\phi(B)} f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_{\phi(N)} f(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \iint_N f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr = \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr. * \end{aligned}$$



15. ábra

3.14. Számítsuk ki a $z = xy$ függvénynek a 15. ábrán látható A tartományra vonatkozó kettős integrálját.

Az A tartományt határoló görbék polárkoordinátás egyenlete $r = 0$, $r = 4 \cos \varphi$ /a Thales-tétel értelmében/,

$$\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2},$$

tehát polárkoordinátás transzformációval a 16. ábrán látható B tartomány képe lesz

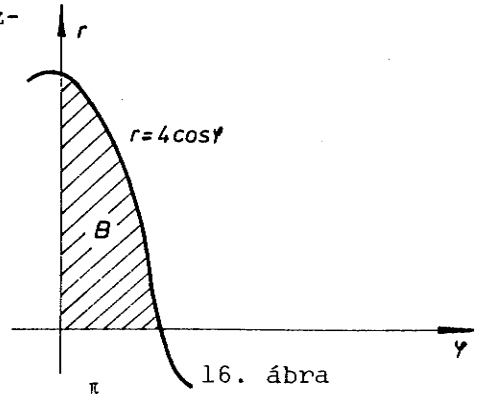
A.

$$\iint_A xy \, dx \, dy =$$

$$= \iint_B r^2 \cos \varphi \sin \varphi \, r \, dr \, d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{4 \cos \varphi} r^3 \sin \varphi \cos \varphi \, dr \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \sin \varphi \cos \varphi \right]_{r=0}^{4 \cos \varphi} d\varphi =$$

$$= 64 \left[-\frac{\cos^6 \varphi}{6} \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3} \approx 10,67.$$



16. ábra

Ennél a példánál is láthattuk, hogy akkor célszerű a kettős integrál kiszámításánál polárkoordinátás transzformációt alkalmazni, ha az integrációs tartományt határoló görbéknek egyszerű a polárkoordinátás egyenlete /tehát nem az integrálandó függvény alakja, hanem elsősorban az integrációs tartomány indokolja az esetleges polárkoordinátás transzformáció elvégzését/.

3.15. Kettős integrál segítségével számítható ki az alábbi egyszeres improprius integrál:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

/Ezzel az integrállal pl. a valószínűségszámítás alkalmazásai során fogunk találkozni. Az integrál konvergens, mert $(1, +\infty)$ -ben

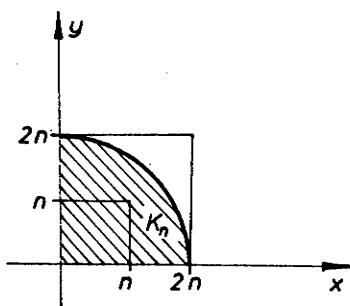
$$e^{-u^2} < e^{-u} \quad \text{és} \quad \int_1^{\infty} e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_1^{\infty} = 1./$$

Az improprius integrál definíciója alapján /Valós egy-
változós függvények integrálszámítása II.1.2./

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-u^2} du,$$

vagyis az integrációs változót egyszer x-szel, egyszer y-
nal jelölve 3.5.-t alkalmazva.

$$I^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \cdot \int_0^n e^{-y^2} dy \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x=0}^n \int_{y=0}^n e^{-x^2-y^2} dx dy.$$



17. ábra

A 17. ábrából látható azonban,
hogy ekkor egyszersmind

$$I^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2n} \int_0^{2n} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

ill. a 17. ábra jelöléseivel

$$\int_0^n \int_0^n e^{-x^2-y^2} dx dy \leq$$

$$\leq \iint_{K_n} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \int_0^{2n} \int_0^{2n} e^{-x^2-y^2} dx dy ,$$

tehát egyszersmind

$$I^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Polárkoordinátás transzformációt alkalmazva

$$\iint_{K_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2n} e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{2n} e^{-r^2} r dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{-r^2}}{-2} \right]_0^{2n} = \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-4n^2} \right),$$

tehát:

$$I^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-4n^2} \right) = \frac{\pi}{4}, \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3.16. Feladatok.

1. Mutassuk meg az $N = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ négyzeten értelmezett

$$f(x,y) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}) \text{ és, } 0 \leq y \leq 1 \text{ racionális,} \\ 1, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}) \text{ és, } 0 \leq y \leq 1 \text{ irracionális,} \\ 1, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ és, } 0 \leq y \leq 1 \text{ racionális,} \\ -1, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ és, } 0 \leq y \leq 1 \text{ irracionális.} \end{cases}$$

függvény esetében, hogy egyik kétszeres integrálja létezik, bár f N -en nem integrálható.

2. Igazoljuk a 3.7. tétel állítását.
3. Igazoljuk, hogy folytonos f függvény esetében

$$\int_0^a dy \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y) dx \quad (a > 0).$$

4. Mutassuk meg, hogy ha f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

/Tekintsük e célból $\{f(x) - f(x)\}^2$ -nak $N = [a,b] \times [a,b]$ -n vett kettős integrálját./

5. Igazoljuk, hogy $-\frac{\ln 4}{2} \leq \iint_T \ln \frac{x^2+y^2}{2} dx dy \leq 0$, ahol T

az $x=1, y=1, y=1-x$ egyenletek által határolt tartomány.

4. HÁRMAS INTEGRÁL

II.1.5.-ben megadtuk a mérhető $A \subset \mathbb{R}^m$ halmazon integrálható m -változó f függvény többes $/m\text{-es}/$ integrálhatóságának definícióját, majd II.1.6.-ben értelmeztük f A -n vett integrálját. Ezt speciálisan $m=3$ esetre alkalmazva háromváltozós függvények integrálhatóságának, ill. a hármas integrálnak fogalmára jutunk:

4.1. $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^3$) integrálható a mérhető $A \subset H \subset \mathbb{R}^3$ halmazon, ha

$$\sup\{s(f, F)\} = h = H = \inf\{S(f, F)\}$$

ahol $\{s(f, F)\}$, ill. $\{S(f, F)\}$ A összes lehetséges egymásba nem nyúló, mérhető részhalmazokra való felbontásához tartozó alsó és felső összegeinek halmazát jelöli. f integrálja A -n ez a közös $h = H = R$ érték, melyet így jelöltünk:

$$R = \int_A f \, dt = \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Ha A -n $f \equiv 1$, akkor

$$\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = t(A).$$

Az f függvény A -n való integrálhatóságára megadott szükséges és elégséges feltételek /II.1.8./ most is alkalmazhatók, így II.1.17. most is módot nyújt arra, hogy pl. egy zárt, mérhető $A \subset \mathbb{R}^3$ halmazon folytonos háromváltozós $f(x, y, z)$ függvény A -ra vonatkozó hármas integrálját /amely II.1.15. miatt biztosan létezik/ alkalmas, minden határon túl finomodó felosztásokhoz tartozó integrálközelítő összegek sorozatának határértékeként határozzuk meg. E nehézkes módszer helyett azonban jobbat keresünk, a kettős

integrál kétszeres integrállá való átalakításának megfelelőjét.

Foglalkozunk először azzal az esettel, amikor az integrációs tartomány téglá, ezután térjünk rá - a kétváltozós esethez hasonlóan - normáltartományokra vonatkozó integrálok kiszámítására, majd a hármas integrál transzformációjára.

4.2. Tétel. Legyen f integrálható a

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

téglán és vezessük be az

$$N = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

jelölést. / N a T téglá vetülete az xy síkon, ugyhogy

$$T = N \times [a_3, b_3]. /$$

Ekkor

$$(*) \quad \iiint_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_N \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right) dx, dy$$

ha a jobb oldalon a zárójelben álló belső integrál létezik minden rögzített $(x, y) \in N$ mellett;

$$(**) \quad \iiint_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_N f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz$$

ha a jobb oldalon a zárójelben álló belső kettős integrál létezik minden rögzített $z \in [a_3, b_3]$ mellett.

A tétel bizonyítása a 3.1. tétel bizonyításához hasonlóan történik, feladatnak tűzzük ezért ki. *

4.3. MEGJEGYZÉS. A (*) és (**) képleteket is szokás zárójelek nélkül is írni. Természetesen mindkét képlet tovább alakítható, a benne szereplő kettős integrálnak kétszeres integrállá való átalakításával. Így a hármas integrált megfelelő kikötések mellett háromszoros integrállá tudjuk átalakítani:

$$\iiint_T f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iint_N \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) \, dz \, dx \, dy = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f \, dx \, dy \, dz$$

ill.

$$\iiint_T f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_{a_3}^{b_3} \iint_N f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f \, dx \, dy \, dz$$

/Az integrálok kiszámítása most is mindig belülről kifelé halad./ Látható az is, hogy bármelyik átalakításban tetszőlegesen felcserélhető az egyes változók szerepe /ez csak akkor áll, ha az integrációs tartomány téglá/.

A normáltartomány fogalmát most így célszerű értelmezni:

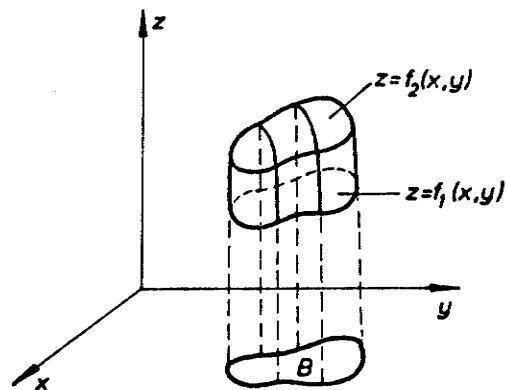
4.4. DEFINÍCIÓ. Legyen $BC \mathbb{R}^2$ mérhető, zárt halmaz, f_1 és f_2 B-n folytonos függvény, és $f_1 \leq f_2$ a B halmazon. Ekkor az

$$N_{xy} = \{(x,y,z) : (x,y) \in B, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$$

alaku halmazt xy-ra nézve normáltartománynak nevezzük. /18. ábra/

4.5. Tétel. A 4.4.-ben értelmezett N_{xy} normáltartomány korlátozott, zárt mérhető.

Ennek bizonyítását is feladatként tűzzük ki. *



18. ábra

4.6. MEGJEGYZÉS. 4.4.-hez hasonlóan értelmezhető az yz , ill. zx -re nézve normáltartomány. Az N_{xy} -ra vonatkozó állítások értelemszerűen ezekre is igazak.

4.7. Tétel. Legyen f folytonos a 4.4.-ben értelmezett N_{xy} normáltartományon. Ekkor

$$\iiint_{N_{xy}} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iint_B \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right] dx \, dy.$$

Bizonyítás. A 3.8. tétel bizonyításához hasonlóan most N_{xy} -t egy

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

téglába foglaljuk, ezen egy

$$g(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{ha } (x,y,z) \in N_{xy}, \\ 0 & \text{ha } (x,y,z) \in -N_{xy} \end{cases}$$

függvényt értelmezünk, és megállapítjuk, hogy 4.2. alapján

$$\begin{aligned} \iiint_{N_{xy}} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_T g(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iint_N \left[\int_{a_3}^{b_3} g(x,y,z) \, dz \right] dx \, dy = \iint_B \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right] dx \, dy, \end{aligned}$$

ahol: $N = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, ugyanis

$$g(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (x,y) \in B, \, a_3 \leq z < f_1(x,y) \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in B, \, f_2(x,y) < z \leq b_3 \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in N-B, \, a_3 \leq z \leq b_3 \\ f(x,y,z), & \text{ha } (x,y) \in B, \, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \\ & \text{/vagyis } (x,y,z) \in N_{xy} / * \end{cases}$$

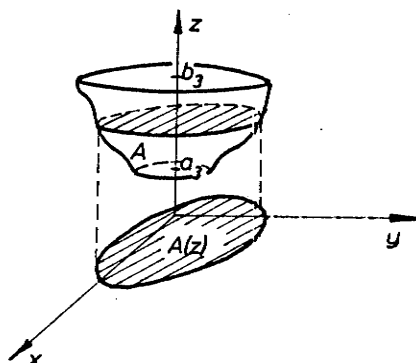
4.7. a 4.2. tétel (*) képletének alkalmazásával adódott. Tulajdonképpen még nagyobb jelentőségű a 4.2. tétel (**) képletéből adódó következő tétel:

4.8. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{R}^3$ mérhető, és tegyük fel, hogy $(x,y,z) \in A$ esetén $a_3 \leq z \leq b_3$, továbbá, hogy minden $z \in [a_3, b_3]$ mellett az

$$A(z) = \{(x,y) : (x,y,z) \in A\}$$

halmaz $\mathbb{R}^2$ -ben mérhető. Ha most f korlátos és folytonos A -n, akkor

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_{A(z)} f(x,y,z) \, dx \, dy \right) dz. \end{aligned}$$



19. ábra

{Az $A(z)$ halmaz úgy keletkezik, hogy A -t a z magasságban elmetsszük az xy síkkal párhuzamos síkkal, majd a metszet-idomot az xy síkra vetítjük /19. ábra/}

Bizonyítás. Foglaljuk A -t egy $T = \prod_{i=1}^3 [a_i, b_i]$ téglába és vezessük be ismét a 4.7. tétel bizonyításában felírt g függvényt és N négyszöget. Ekkor

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_T g(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_N g(x,y,z) \, dx \, dy \right) dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_{A(z)} f(x,y,z) \, dx \, dy \right) dz, \end{aligned}$$

ugyanis rögzített $z \in [a_3, b_3]$ esetén $g(x,y,z) = f(x,y,z)$,

ha $(x,y) \in A(z)$, $g(x,y,z) = 0$, ha $(x,y) \in N - A(z)$, és a mérhető $A(z)$ -n f mint (x,y) -nak függvénye korlátos és folytonos, tehát integrálható. *

A hármas integrál transzformációjára - bizonyítás nélkül - a következő, 3.11.-hez hasonló tételt mondhatjuk ki:

4.9. Tétel. Legyen $BC \bar{B}C GC R^3$, B mérhető, G nyílt, $\phi: G \rightarrow R^3$ folytonosan differenciálható B belsejében kölcsönösen egyértelmű leképezés, $\phi(B) = A$ /A ekkor mérhető/. Ha f integrálható A -n, akkor $(\phi(u,v,w) = \varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w))$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_B f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)) |\Delta(u,v,w)| du dv dw,$$

ahol:

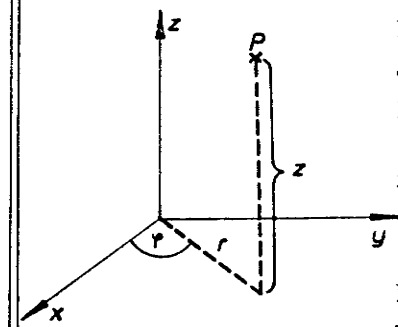
$$\Delta(u,v,w) = \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix} . * \quad \text{/Jacobi-determináns./}$$

4.10. A 4.9. tételt speciálisan

hengerkoordinátás transzformációra alkalmazva az $u = r$, $v = \varphi$, $w = z$ jelöléssel P koordinátái /20. ábra/.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

($r \geq 0$, $\alpha \leq \varphi \leq \alpha + 2\pi$ esetén a leképezés teljesíti a 3.13. transzformáció tétel feltételeit/,



20. ábra

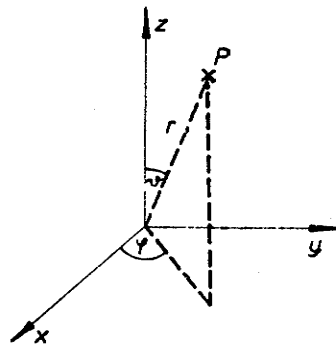
$$\Delta(u,v,w) = \Delta(r,\varphi,z) = \frac{\partial(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)}{\partial(r,\varphi,z)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad \text{és így}$$

$$\iiint_A f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \, r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

4.11. A 4.9. tételt speciálisan gömb koordinátás transzformációra alkalmazva az $u = r$, $v = \vartheta$, $w = \varphi$ jelöléssel φ koordinátái /21. ábra/

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \\ z = r \cos\vartheta$$



21. ábra

és itt 4.9. feltételei miatt az $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $\alpha \leq \varphi \leq \alpha + 2\pi$ kikötéseket kell tennünk. Most

$$\Delta(u,v,w) = \Delta(r,\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi & r\cos\vartheta \cos\varphi & -r\sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi & r\cos\vartheta \sin\varphi & r\sin\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = r^2 \sin\vartheta, \quad \text{és így}$$

$$\iiint_A f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta) \\ r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

4.12. Példák.

1. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = xy^2\sqrt{z}$ függvénynek a $T = [-1,2] \times [0,3] \times [1,4]$ téglára vonatkozó hármas integrálját.

$$\begin{aligned}
\iiint_T xy^2 \sqrt{z} \, dx \, dy \, dz &= \int_{x=-1}^2 \left(\int_{y=0}^3 \left(\int_{z=1}^4 xy^2 \sqrt{z} \, dz \right) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=-1}^2 \int_{y=0}^3 xy^2 \left[\frac{\sqrt{z^3}}{1,5} \right]_{z=1}^4 dy \, dx = \frac{16}{3} \int_{x=-1}^2 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^3 dx = \\
&= 48 \int_{-1}^2 x \, dx = 72.
\end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = 2x - y + z$ függvénynek a $z = -x^2 - y^2 + 4$ és $z=0$ felületekkel határolt H tartományra vonatkozó hármas integrálját.

$H = N_{xy}$ /határoló felületek: forgásparaboloid és ennek tengelyére merőleges sík/, vetülete az xy síkon

$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Az integrált vagy hengerkoordinátás transzformációval, vagy z szerinti integrálás elvégzése után polárkoordinátás transzformációval számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}
\iiint_H 2x - y + z \, dx \, dy \, dz &= \iint_A \int_{z=0}^{-x^2 - y^2 + 4} (2x - y + z) \, dz \, dx \, dy = \\
&= \iint_A \left[(2x - y)(-x^2 - y^2 + 4) + 0,5(-x^2 - y^2 + 4)^2 \right] dx \, dy = \\
&= \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[(2r \cos \varphi - r \sin \varphi)(-r^2 + 4) + 0,5(-r^2 + 4)^2 \right] r \, dr \, d\varphi = \\
&= \dots = \pi \int_0^2 (r^5 - 8r^3 + 16r) \, dr = \dots = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{4}}$ függvényének a

$H = \{(x, y, z) : r_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq r_2\}$ tartományra vonatkozó hármas integrálját.

Gömbi koordinátás transzformációt alkalmazva

$$\begin{aligned} \iiint_H (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{4}} dx dy dz &= \int_{r=r_1}^{r_2} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (r^2)^{\frac{5}{4}} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\ &= 2\pi \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[-\cos \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi} dr = \dots = 8\pi \left[\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1} \right]. \end{aligned}$$

4.13. Feladatok.

1. Bizonyítsuk be a 4.2. tételt.
2. Mondjuk ki a 3.5. tétel háromváltozós megfelelőjét és bizonyítsuk is be.
3. Bizonyítsuk be a 4.5. tételt.

$$4. F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz.$$

$\frac{dF}{dt} = ?$ /Az itt alkalmazott - szokásos - jelöléssel azt juttattuk kifejezésre, hogy az integrációs tartomány a $H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$ halmaz, vagyis $[0, 0, 0]$ középpontu t sugaru gömb belseje és felülete/.

5. Alakítsuk át egyszéres integrállá az alábbi háromszoros integrált:

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^{x+y} f(z) dz dy dx.$$

$$6. \text{ Bizonyítsuk be, hogy } \int_{z=0}^1 \int_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n z^2 dx dy dz = 0,$$

ha az m és n pozitív egészek közül legalább az egyik páratlan.

5. TÖBBES INTEGRÁL KISZÁMÍTÁSA

Altalánosságban megadtuk már II.1.5.-ben, ill. II.1.6.-ban a mérhető $AC R^m$ halmazon f integrálhatóságának és integráljának értelmezését. Amennyiben az integrált nem akarjuk alkalmas minden határon túl finomodó felosztáshoz tartozó integrálközelítőösszegek sorozatának határértékeként meghatározni, m -dimenziós téglá, ill. normáltartomány esetében a következőt mondhatjuk meghatározásáról:

5.1. Tétel. Legyen

$$T = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \text{ továbbá } 1 \leq p < m, q = m - p,$$

$$T' = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i], T'' = \prod_{i=p+1}^m [a_i, b_i], \text{ vagyis } T = T' \times T''.$$

Ha f integrálható T -n, akkor a rövidebb $x = (x_1, \dots, x_m)$ jelöléssel

$$\int_T f(x) dx = \int_{T''} \left(\int_{T'} f(x', x'') dx' \right) dx'',$$

ahol $x' = (x_1', \dots, x_p') \in T' \subset R^p$, $x'' = (x_1'', \dots, x_q'') \in T'' \subset R^q$,

$x = (x', x'')$, és feltesszük, hogy a jobb oldali belső integrál minden rögzített $x'' \in T''$ mellett létezik. *

5.2. MEGJEGYZÉS. Az 5.1. tételnek /amit itt nem bizonyítunk/ nyilván $m = 2$, ill. $m = 3$ esetében adódó speciális esete 3.1. ill. 4.2.

A 4.8. tételnek megfelelő tétel most így hangzik /és ugyanugy bizonyítható is/:

5.3. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$ mérhető, $A \subset T$, ahol T az 5.1.-beli téglát jelenti, továbbá az 5.1. tétel jelöléseivel rögzített $x'' \in T''$ esetén legyen az

$$A(x'') = \{x' \in T' : (x', x'') \in A\} \subset \mathbb{R}^p$$

halmaz $\mathbb{R}^p$ -ben mérhető. Ha f korlátos és folytonos A -n, akkor

$$\int_A \dots \int f(x) \, dx = \int_{T''} \left(\int_{A(x'')} \dots \int f(x', x'') \, dx' \right) dx'' \quad . \quad *$$

5.4. Érvényes természetesen az integráltranszformációról szóló 3.11. és 4.9. tétel megfelelője is, formálisan könnyen fel is írható, bizonyítása azonban sokkal több segédeszközt igényel, mint két- és háromváltozós megfelelője.

5.5. Feladatok.

$$1. \quad \int_{x_1=0}^1 \dots \int_{x_n=0}^1 (x_1^2 + \dots + x_n^2) \, dx_n \dots dx_1 = ?$$

$$2. \quad \int_{x_1=0}^1 \dots \int_{x_2=0}^1 (x_1 + \dots + x_n)^2 \, dx_n \dots dx_1 = ;$$

$$3. \quad \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{x_1} \dots \int_{x_n=0}^{x_{n-1}} (x_1 \cdot \dots \cdot x_n) \, dx_n \dots dx_1 = ?$$

III. A TOBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSÁNAK NÉHÁNY GEOMETRIAI ÉS FIZIKAI ALKALMAZÁSA

1. TERÜLET- ÉS TÉRFOGATSZÁMÍTÁS

1.1. A mérhető $A \subset \mathbb{R}^3$ halmazzal megadott térrész térfogata

$$t(A) = \iiint_A 1 \cdot dx \, dy \, dz,$$

amint az az integrál értelmezéséből következik.

1.2. Ha speciálisan $A = N_{xy} = \{(x,y,z) : (x,y) \in B, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$, ahol $B \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, zárt, f_1, f_2 folytonos B -n, akkor II.4.7. értelmében

$$\begin{aligned} t(A) &= \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \iint_B \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} 1 \, dz \right] dx \, dy = \\ &= \iint_B [f_2(x,y) - f_1(x,y)] dx \, dy. \end{aligned}$$

1.3. További speciális esetként, ha 1.2.-ben $f_1(x,y)=0$, vagyis a $z=f_2(x,y)$ felület $\{(x,y) \in B\}$ alatti térrés térfogatát keressük, ezt a következő integrállal számíthatjuk:

$$\iint_B f_2(x,y) \, dx \, dy.$$

1.4. Forgástest térfogatát egyszeres integrállal számíthatjuk ki. Ha ugyanis a forgástengelyt a derékszögű

koordinátarendszer x tengelyébe helyezzük és a meridiángörbe egyenletét az $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) folytonos függvény adja meg, akkor a keresett térfogat II.4.8. alkalmazásával a következőnek adódik:

$$\pi \int_a^b f^2(z) dz.$$

/Vesd össze: Valós egyvátlozós függvények integrálszámítása IV.1.4./

Természetesen esetenként kiszámítás előtt célszerű az 1.1, 1.2, 1.3 integrált transzformálni /gömbi, henger, ill. polárkoordinátákra/, ill. 1.4.-ben helyettesítést alkalmazni.

1.5. Példaként számítsuk ki az $x^2 + y^2 = 1$ alapkörű, z tengellyel párhuzamos alkotóju, és az $y^2 + z^2 = 1$ alapkörű, x tengellyel párhuzamos alkotóju hengerek közös A részének térfogatát.

$$t A = \iiint_A dx dy dz = \iint_B \left[\int_{z=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz \right] dx dy = 2 \iint_B \sqrt{1-y^2} dx dy,$$

ahol $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Polárkoordinátás transzformációt alkalmazva az integrandusz bonyolulttá válna, ezért közvetlenül számolunk:

$$\begin{aligned} t(A) &= 2 \iint_B \sqrt{1-y^2} dx dy = 2 \int_{y=-1}^1 \left[\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx \right] dy = \\ &= 2 \int_{y=-1}^1 \left[x \sqrt{1-y^2} \right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy = 2 \int_{-1}^1 2(1-y^2) dy = 2 \left[2y - 2 \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

1.6. A mérhető $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazzal megadott síkrész területe A -t az xy síkban helyezve el/

$$t(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy,$$

amint az az integrál értelmezéséből következik.

Ebből a képletből adódik speciálisan, ha $A = N_x$, a két görbe közti idom, ill. további speciális esetként a görbe alatti terület mérőszámát szolgáltatató egyszeres integrál:

Ha $N_x = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \text{ és } f_1, f_2 \text{ folytonos } [a, b]\text{-ben, akkor}$

$$\iint_{N_x} 1 \, dx \, dy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1 \, dy \, dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, dx$$

$$\text{ill. } f_1(x) = 0 \text{ esetén } \int_a^b f_2(x) \, dx.$$

A szakterület képletét 1.6.-ból polárkoordinátás transzformációval és az r szerinti integrálás elvégzése után nyerjük:

Legyen az A -t határoló görbék polárkoordinátás egyenlete $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, ahol r_1, r_2 $[\alpha, \beta]$ -ben folytonos függvények, $\alpha \leq \beta$, $0 \leq r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$. Ekkor

$$\begin{aligned} t(A) &= \iint_A 1 \, dx \, dy = \iint_B r \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \int_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)] \, d\varphi. \end{aligned}$$

/Ez a képlet a valós egyváltozós függvények integrálszámítása jegyzetben az $r_2 = f$, $r_1 = 0$ speciális esetben már szerepelt - IV.1.3. -/

2. HOMOGÉN TÖMEGELOSZLÁSÚ TEST TÖMEGÉNEK, NYOMATÉKAINAK, SULYPONTJÁNAK MEGHATÁROZÁSA.

ELEKTROSZTATIKUS POTENCIÁL MEGHATÁROZÁSA HOMOGÉN TÖLTÉSELOSZLÁSÚ TEST ESETÉN.

2.1. Legyen ACR^3 mérhető és homogén tömegeloszlást feltételezve az A-ban foglalt tömeg sűrűsége /a térfogat-egységben foglalt tömeg mérőszáma/ ρ . Jelöljük ugyancsak ρ -val a mérhető BCR^2 -ben foglalt tömeg területi sűrűségét. Ekkor a bevezető I.1.1., 1.2. példákban követett okoskodással, a többes integrál fogalmának ismeretében adódik, hogy A ill. B tömege:

$$M(A) = \iiint_A \rho \, dx \, dy \, dz, \quad M(B) = \iint_B \rho \, dx \, dy \quad \begin{array}{l} \text{/ha B-t az xy sík-} \\ \text{ban helyeztük} \\ \text{el/,} \end{array}$$

az elsőrendű /sztatikai/ nyomatékok:

$$M_{xy} = \iiint_A z \rho \, dx \, dy \, dz, \quad M_x = \iint_B y \rho \, dx \, dy,$$

$$M_{yz} = \iiint_A x \rho \, dx \, dy \, dz, \quad M_y = \iint_B x \rho \, dx \, dy,$$

$$M_{zx} = \iiint_A y \rho \, dx \, dy \, dz,$$

és így az A-val ill. B-vel megadott test súlypontjának koordinátáit megkapjuk, ha az

$$x_S = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_S = \frac{M_{zx}}{M}, \quad z_S = \frac{M_{xy}}{M} \quad \text{ill.} \quad x_S = \frac{M_y}{M}, \quad y_S = \frac{M_x}{M}$$

képletekbe a fenti integrálokat behelyettesítjük.

2.2. A fentiekhez teljesen hasonló módon adódik, hogy homogén tömegeloszlás esetén a mérhető $A \subset R^3$ /ill. $B \subset R^2$ / idom tehetetlenségi nyomatéka valamely e egyenesre mint forgástengelyre vonatkozóan ρ jelentse most is a térfogati /területi/ sűrűséget/

$$\theta_e = \iiint_A r_e(x,y,z)^2 \rho dx dy dz, \quad \text{illetve}$$

$$\theta_e = \iint_B r_e(x,y)^2 \rho dx dy,$$

ahol r_e jelöli az (x,y,z) (ill. (x,y)) pont távolságát az e egyenestől.

Hasonlóan értelmezhető a centrális másodrendű nyomaték:

$$\begin{aligned} \theta(0,0,0) &= \iiint_A (x^2+y^2+z^2) \rho dx dy dz, \quad \text{illetve} \\ &\iint_B \rho (x^2+y^2) dx dy. \end{aligned}$$

2.3. Hasonló eljárással lehet meghatározni homogén elektromos töltéseloszlásnál a mérhető A isomban levő töltés által létrehozott elektrosztatikus potenciált, egy adott A-n kívül P pontban. Ekkor arra lehet hivatkozni, hogy a P_i pontokban koncentrált m_i töltések esetén a potenciál értéke a P pontban

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_P(P_i)}$$

ahol $r_P(P_i)$ jelöli a P és P_i pontok közti távolságot. A-nak egy F felosztására a $P_i \in A_i$ közbülső /reprezentáns/ pontok választásával, a közelítő pontrendszer potenciálja

$$\sum_{i=1}^n \frac{\rho t(A_i)}{r_P(P_i)},$$

ahol ρ a töltésseloszlás sűrűsége. Innen határátmenettel A potenciáljára

$$V = \iiint_A \frac{\rho}{r_p(x,y,z)} dx dy dz, \text{ ill. } \iint \frac{\rho}{r_p(x,y)} dx dy$$

adódik aszerint, hogy az idom a térben, vagy az xy síkban helyezkedik-e el. Az integrál létezik, mert

$$r_p = \sqrt{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 + (z-p_3)^2} \neq 0$$

korlátos és folytonos A-ban.

Inhomogén tömeg- ill. töltésseloszlás esetén ugyanezen feladatok megoldása több problémát jelent, nagyobb elméleti előkészítést igényel, így erre a következő pontban külön térünk ki.

2.4. Példák.

1. A kezdőpont körüli R sugaru homogén gömb első nyolcadának (A) súlypontját keressük. A súlypont - amennyiben van ilyen - a test szimmetriatengelyében fekszik, így most $x_S = y_S = z_S$.

Mivel a gömb nyolcadának térfogata $\frac{4R^3\pi}{3 \cdot 8}$, elég a súlypont meghatározására egy sztatikai nyomatékot kiszámítanunk:

$$x_S = y_S = z_S = \frac{\rho \iiint_A x dx dy dz}{\rho \frac{4R^3\pi}{24}} = \frac{6}{R^3\pi} \iiint_A x dx dy dz.$$

Az integrált gömbi koordinátás transzformációval célszerű kiszámítani:

$$\iiint_A x dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^R r \sin\theta \cos\varphi r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \\
&= \left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\sin\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{4} \cdot 1 \cdot \frac{R^4}{4},
\end{aligned}$$

$$\text{azaz: } x_S = y_S = z_S = \frac{3}{8} R.$$

2. Az 1-ben értelmezett homogén test centrális nyomatéka

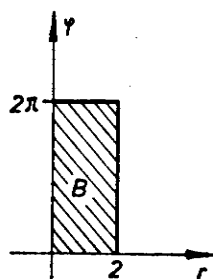
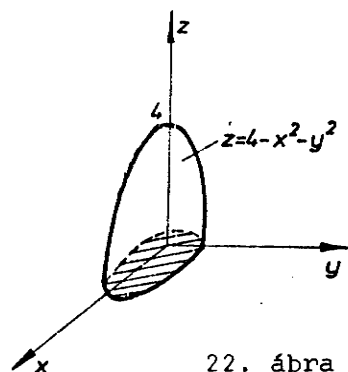
$$\begin{aligned}
\Theta_{(0,0,0)} &= \iiint_A \rho(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\
&= \rho \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^R r^2 r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \dots = \frac{R^5 \pi \rho}{10}.
\end{aligned}$$

3. A $z = 4 - x^2 - y^2$ és $z = 0$ egyenletű felületek által bezárt homogén, ρ sűrűségű (A) test z tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka /célszerű hengerkoordinátás transzformációt alkalmazni/

$$\begin{aligned}
\Theta_z &= \iiint_A (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = \rho \iint_B \int_{z=0}^{4-r^2} r^2 r dz dr d\varphi = \\
&= \rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 r^3 (4 - r^2) dr d\varphi = 2\pi \rho \left[r^4 - \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^2 = \dots =
\end{aligned}$$

$$= \frac{32}{3} \pi \rho$$

/lásd 22. ábra/



22. ábra

3. ADDITÍV HALMAZFÜGGVÉNY SZERINTI STIELTJES-INTEGRÁL. ALKALMAZÁSOK

3.1. A valós egyváltozós függvények integrálszámítása
c. jegyzet III. fejezetében az egyváltozós Riemann-Stieltjes
integrál /röviden Stieltjes integrál/ fogalmát két példán
vezettük be.

Adott egyenes szakasz mentén /mely az x tengely $[a,b]$
intervallumán helyezkedik el/ inhomogén töltéeloszlás
esetében jelölje $q(x)$ az $[a,x]$ -beli töltés mérőszámát; le-
gyen $q(a) = 0$. Egy (x_0, y_0) $[a,b]$ -n kívül fekvő pontban a
potenciál ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(\xi_k - x_0)^2 + y_0^2}} \left(q(x_k) - q(x_{k-1}) \right) = \int_a^b \frac{dq(x)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y_0^2}},$$

szolgáltatja.

Az x tengely $[a,b]$ intervalluma mentén elhelyezkedő
inhomogén tömegeloszlású pálca y tengelyre vonatkozó tehe-
tetlenségi nyomatéka ugyanakkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \left(m(x_k) - m(x_{k-1}) \right) = \int_a^b x^2 dm(x),$$

ahol $m(x)$ az $[a,x]$ intervallumba eső tömeg mérőszáma.

Általánosságban f g szerinti Stieltjes-intergrálja az
 $[a,b]$ intervallumon

$$(*) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \left(g(x_k) - g(x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(x) dg(x),$$

ahol a limesz azt jelenti, hogy az integrálközelítő össze-
geknek minden határon túl finomodó felosztások esetében a
felosztás módjától, ill. a reprezentáns $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$
helyektől független limesze az integrál.

Jobban megnézve e példákat, ill. az általános Stieltjes-integrál fogalmát, látható, hogy az integrálközelítő összegek tagjaiban egy intervallumfüggvény egyes felosztási részintervallumokhoz rendelt értékének és az illető felosztási részintervallumban felvett reprezentáns pontbeli f függvényértéknek szorzata áll. /Az intervallumfüggvény értelmezését lásd Valós egyváltozós függvények integrálszámítása I. 3.3./. A példákban, ill. a Stieltjes-integrál (*) értelmezésében fellépő intervallumfüggvényeket, az integrálközelítő összegeket és a Stieltjes-integrálokat így jelölhetjük / I jelentse (a,b) -t, I_k ennek k -adik felosztási részintervallumát:

$$\xi_k \in I_k, \quad \bigcup_{k=1}^n I_k = I/:$$

$$Q(I_k) = q(x_k) - q(x_{k-1}), \quad \lim_{k=1}^n \sum \frac{1}{\sqrt{(\xi_k - x_0)^2 + y_0^2}} Q(I_k) = \\ = \int_I \frac{dq}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y_0^2}},$$

$$M(I_k) = m(x_k) - m(x_{k-1}), \quad \lim_{k=1}^n \sum \xi_k^2 M(I_k) = \int_I x^2 dM,$$

$$G(I_k) = g(x_k) - g(x_{k-1}), \quad \lim_{k=1}^n \sum f(\xi_k) G(I_k) = \int_I f dG.$$

Minden véges I_k intervallum mérhető; mértéke /hossza/ $x_k - x_{k-1}$, minden $I_k \subset I$ -hez a szóbanforgó intervallum hosszúságát rendelő φ intervallum függvény - a fent említettekhez hasonlóan - páronként egymásba nem nyúló intervallumokra additív:

$$\varphi(I) = \sum_{k=1}^n \varphi(I_k) \quad \left(I = \bigcup_{k=1}^n I_k, \text{ int } I_j \cap \text{int } I_p = \emptyset, j \neq p \right)$$

Intervallumok helyett persze speciális lineáris pontthalmazokról is beszélhettünk volna, vagyis a fent szereplő függvények speciális esetei az ún. halmazfüggvényeknek:

3.2. DEFINÍCIÓ. $\varphi : D_\varphi \rightarrow R$ halmazfüggvény, ha D_φ egy A /alap/halmaz bizonyos részhalmazainak rendszere.

A halmazfüggvény tehát egy halmazrendszer minden eleméhez rendel pontosan egy valós számot.

3.3. DEFINÍCIÓ. Ha a H halmazrendszer olyan tulajdonságu, hogy $H \subset D_\varphi$, és diszjunkt $B_i \in H$, $D \in H$,

$$B = \bigcup_{i=1}^n B_i \text{ halmazokra } \varphi(B) = \sum_{i=1}^n \varphi(B_i),$$

akkor a φ függvényt H -n additívnak, ha $H = D_\varphi$, akkor pedig röviden additívnak mondjuk.

A korlátos f függvény G intervallumfüggvény szerinti Stieltjes-integráljának mintájára így értelmezhetjük mármost egy korlátos f függvény φ additív halmazfüggvény szerinti Stieltjes-integrálját.

3.4. DEFINÍCIÓ. Legyen φ additív halmazfüggvény, és $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, ahol B_i halmazok φ értelmezési tartományhoz tartozó diszjunkt halmazok, f korlátos B -n, és $\xi_i \in B_i$. Ha a B halmaz ilyen típusu felosztásainak minden határon túl finomodó sorozatára /vagyis olyan felosztásokra, melyeknél az egyes B_i halmazok átmérője 0-hoz tartanak/ a

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \varphi(B_i)$$

összegek a felosztástól, a közbülső ξ_i helyek választásától függetlenül azonos határértékéhez tartanak, akkor ezt a határértéket f φ szerinti Stieltjes-integráljának nevezzük és így jelöljük:

$$\lim \sum f(\xi_i) \varphi(B_i) = \int_B f \, d\varphi.$$

Arról, hogy hogyan lehet az ilyen integrálokat kiszámítani, általánosságban szinte semmi jól használható eredményt nem mondhatunk. Ezért további megszorításokat fogunk tenni, amelyek lehetővé teszik először is a φ halmazfüggvénynek többes Riemann-integrál alakjában történő előállítását, majd erre támaszkodva $\int_B f \, d\varphi$ többes Riemann-integrál alakjában való előállítását. Ennek érdekében a 3.3.-ban értelmezett additív halmazfüggvény fogalmánál szűkebb fogalmat kell bevezetnünk.

3.5. DEFINÍCIÓ. A φ halmazfüggvény /Jordan-féle értelemben/ additívnak mondjuk, ha értelmezési tartománya egy A halmaz összes mérhető részhalmazából áll, és abból, hogy $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ és a B_i halmazok φ értelmezési tartományához tartozó páronként egymásba nem nyúló halmazok, következik, hogy

$$\varphi(B) = \sum_{i=1}^n \varphi(B_i).$$

Környü belátni, hogy ha φ az A halmaz mérhető részhalmazain a 3.3. értelemben additív, akkor Jordan-féle értelemben vett additivitásához szükséges és elegendő, hogy $B \subset A$, $t(B) = 0$ esetén $\varphi(B) = 0$ álljon /A szükségesség abból látszik, hogy $t(B) = 0$ esetén ugyanis int $B = \emptyset$, tehát a $B = B \cup \emptyset$ előállításban int $B \cap \text{int } \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, vagyis ez az előállítás egymásba nem nyúló tagokra való felbontás, így $\varphi(B) = \varphi(B) + \varphi(\emptyset)$ amiből $\varphi(B) = 0$ következik. Az elégségesség bizonyítását feladatként tűzzük ki.

Egy H halmaz mérhető B részhalmazain értelmezett Jordan-értelemben additív halmazfüggvény például a B -hez B Jordan mértékét /területét, térfogatát, m dimenziós térfogatát/

rendelő $t(B)$ halmazfüggvény, vagy általánosabban adott H -n integrálható f függvény esetében f B -n vett integrálját f -hez rendelő függvény /II.2.4./:

$$\varphi(B) = \int \dots \int_B f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int_B f dt$$

Sem a 3.3., sem a 3.5. értelemben nem additív halmazfüggvény a H -n korlátos f függvénynél $B \subset H$ -hoz $\inf f(B)$, ill. $\sup f(B)$ értékét hozzárendelő $k(B)$, ill. $K(B)$ függvény. Az integrálszámítás középértéktétele az itt értelmezett $t(B)$, $k(B)$, $K(B)$ és $\varphi(B)$ halmazfüggvényekkel így írható fel:

$$(*) \quad k(B) \cdot t(B) \cdot \varphi(B) \leq K(B) \cdot t(B)$$

/lásd II.2.6.c./

Ezen állítás megfordításaként a következő, a későbbiekben jól használható tétel mondható ki:

3.6. Tétel. Legyen H mérhető B részhalmazain f korlátos és integrálható, φ Jordan-értelemben additív halmazfüggvény, amelyre minden mérhető $B \subset H$ halmazon teljesül:

$$(*) \quad k(B) \cdot t(B) \leq \varphi(B) \leq K(B) \cdot t(B),$$

ahol: $k(B)$, $K(B)$, $t(B)$ jelentése az előbbi. Ekkor

$$\varphi(B) = \int \dots \int_B f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int_B f dt.$$

Bizonyítás. Tekintsük a mérhető $B \subset H$ halmaz $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ egymásba nem nyúló, mérhető B_i halmazokra való felbontását. φ feltételezett Jordan-additivitása miatt

$$\varphi(B) = \sum_{i=1}^n \varphi(B_i)$$

és mivel (*) következtében $i = 1, \dots, n$ -re

$$k(B_i) \cdot t(B_i) \leq \varphi(B_i) \leq K(B_i) \leq t(B_i)$$

összegezve

$$\sum_{i=1}^n k(B_i) \cdot t(B_i) \leq \varphi(B) \leq \sum_{i=1}^n K(B_i) \cdot t(B_i)$$

adódik. Itt azonban a bal ill. jobb oldalon a H mérhető B részén integrálható f függvénynek az adott felosztáshoz tartozó alsó és felső összege áll. B felosztását minden határon túl finomítva a bal és jobb oldal egyaránt f B -n vett integráljához tart, $\varphi(B)$ értéke is csak az integrállal lehet egyenlő.

Annak érdekében, hogy inhomogén tömeg- ill. töltéseloszlás esetében is - ha nem is a legáltalánosabb esetben - meg tudjuk határozni egy mérhető halmazban levő tömeg, ill. töltés mérőszámát, a következő fogalmat vezetjük be:

3.7. DEFINÍCIÓ. A H halmazon folytonos eloszlást adunk meg, ha minden mérhető $B \subset H$ halmazhoz hozzárendelünk egy $m(B)$ számot úgy, hogy B tetszőleges mérhető, egymásba nem nyúló B_i halmazokkal törénő

$$B = \bigcup_{i=1}^n B_i \quad \text{alakú felbontására} \quad m(B) = \sum_{i=1}^n m(B_i).$$

$m(B)$ jelneheti itt speciálisan a B -ben foglalt tömeg, vagy töltés mérőszámát./

A 3.7. definícióban megkövetelt Jordan-additivitás következtében a 3.5. definíciót követő gondolatmenet alapján állíthatjuk a következőt:

3.8. Tétel. A H halmazon folytonos eloszlás esetén
 $m(B) = 0$, valahányszor $B \subset H$ és $t(B) = 0$. *

Inhomogén eloszlás esetében $m(B)$ általában nem arányos $t(B)$ -vel, így egy mérhető, pozitív térfogatu /területű/ $B \subset H$ halmaz esetén az $\frac{m(B)}{t(B)}$ hányadost az eloszlás átlagos sűrűségének tekinthetjük csupán /ha ekkora volna egy homogén eloszlás sűrűsége, akkor B-hez éppen akkora $m(B)$ tartoznék, mint a tekintett eloszlás mellett/. A sűrűség fogalmát most mint pontról pontra változó értéket határátmenettel vezetjük be:

3.9. DEFINÍCIÓ. Legyen a H halmazon folytonos eloszlás megadva. Ennek sűrűsége a $p \in H$ pontban $\rho(p)$, ha

$$\frac{m(B_n)}{t(B_n)} \rightarrow \rho(p), \quad (= \rho(x, y, z), \text{ ha } H \subset \mathbb{R}^3)$$

valahányszor (B_n) H mérhető, pozitív térfogatu részhalma-zainak olyan sorozata, hogy $p \in B_n$ és a B_n halmazok átmérő-je $\rightarrow 0$ /röviden: a (B_n) halmazsorozat p -re huzódik össze/.

3.10. Tetszőleges mérhető B halmazban foglalt tömeg /ill. töltés/ mérőszáma, amennyiben a tömegeloszlás /ill. töltéseloszlás/ sűrűsége a 3.9.-ben definiált ρ , $\int_B \rho \, dt$ /speciálisan $H \subset \mathbb{R}^3$, ill. $H \subset \mathbb{R}^2$ esetén

$$\iiint_B \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \text{ ill. } \iint_B \rho(x, y) \, dx \, dy/.$$

A 3.10. állítás a következő tételből következik: /ezért pontosan ezután fogalmazzuk csak meg/:

3.11. Tétel. Ha ρ H -n folytonos eloszlás sűrűsége, $B \subset \bar{B} \subset H$ mérhető és $B-n \, c \leq \rho \leq d$, akkor $c \cdot t(B) \leq m(B) \leq d \cdot t(B)$.

/Itt $m(B)$ jelentheti a B -ben foglalt tömeg, ill. töltés mérőszámát, ha ρ tömeg, ill. töltéseloszlás sűrűségét adja meg./

Bizonyítás. Egyszerűség kedvéért legyen $H \subset R^3$,
 $\rho = \rho(x, y, z)$. Tegyük fel először, hogy B zárt és
 $c < \rho(x, y, z) < d$. Igazoljuk pl. a bal oldali egyenlőtlenséget /a jobb oldali hasonlóképpen igazolható/.
 Foglaljuk be B -t egy T téglába, majd a téglá középpontján áthaladó, a téglá lapjaival párhuzamos síkokkal osszuk fel a téglát nyolc téglára. Jelöljük B -nek ezekkel közös részét rendre $B^{(i)}$ -vel ($i=1, \dots, 8$). Ha állításunkkal ellentétben

$$c \cdot t(B) > m(B) \quad \text{volna, akkor a} \quad c \cdot t(B^{(i)}) > m(B^{(i)})$$

egyenlőtlenségek közül legalább az egyik helyes volna (különben belőlük összegezéssel $c \cdot t(B) \leq m(B)$ adódna). Jelöljük a $B^{(i)}$ halmazok közül a megfelelő B_1 -gyel, az őt tartalmazó nyolcad-téglát T_1 -gyel. Ekkor tehát

$$c \cdot t(B_1) > m(B_1).$$

A T_1 téglát az előbbi módon ismét nyolcfelére osztva, hasonló okoskodással nyerjük a $B_2, B_3, \dots$ halmazokat, és a $T_2, T_3, \dots$ téglákat. Az egymásba skatulyázott $T, T_1, T_2, \dots$ -téglák egy (x, y, z) pontra húzódnak össze; minthogy minden T_n -nek van B -vel közös pontja, azért B zárttsága miatt $(x, y, z) \in B$. A konstrukcióból látszik, hogy (x, y, z) mindegyik B_n belsejében, vagy legalább határán van, tehát B_n zárttsága miatt B_n -hez tartozik, és

$$m(B_n) < c \cdot t(B_n),$$

ugyhogy $t(B_n) > 0$ -val átosztva $\frac{m(B_n)}{t(B_n)} < c$ tehát határértékben $\rho(x, y, z) \leq c$ adódik, a feltevéssel ellentétben.

Tegyük fel másodszor, hogy B zárt, de $c \leq \rho(x, y, z) \leq d$. Ekkor előbbi okoskodásunkat $c' = c - \varepsilon$, $d' = d + \varepsilon$ esetére

végezve ($\varepsilon > 0$) $\varepsilon \rightarrow 0$ esetében a bizonyítandó egyenlőtlenségre jutunk.

Tegyük fel végül, hogy B nem zárt, de $\bar{B} \subset H$. Ekkor a $c \leq \rho(x, y, z) \leq d$ feltétel $\bar{B}$ -on is áll, igaz az állítás $\bar{B}$ -ra is. De $t(\bar{B}) = t(B)$, $m(\bar{B}) = m(B)$, vagyis nem zárt B -re is igaz a tétel állítása. *

A 3.6. tétel feltevései a 3.11. tétel értelmében az $f = \rho$ függvényre teljesülnek $\varphi(B)$ helyett $m(B)$ -re/, így tehát igaz a következő állítás:

3.12. Tétel. Legyen megadva a mérhető H -n olyan folytonos eloszlás, amelynek H minden p pontjában létezik $\rho(p)$ sűrűsége. Ha ρ folytonos H -n, $B \subset \bar{B} \subset H$ mérhető, akkor az

$$m(B) = \iiint_B \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

halmazfüggvény megadja B tömegét /töltését/, amennyiben ρ tömegeloszlás /töltéseloszlás/. Ha f integrálható B -n a

$B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ felosztás minden határon túl történő finomítása-
kor /A B_i halmazok mérhetőek és egymásba nem nyulók,
 $p_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in B_i$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) m(B_i) \rightarrow \int_B f \, dm = \iiint_B f(x, y, z) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Bizonyítás. Az állítás második részét kell csak bizonyítanunk. A rövidebb $p_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ jelöléssel azt kell csak megmutatnunk, hogy B fenti típusú felosztásait minden határon túl finomítva a

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(p_i) m(B_i)$$

és a (*) jobb oldalán álló integrál ugyanezen felosztáshoz tartozó

$$\sigma' = \sum_{i=1}^n f(p_i) \rho(p_i) t(B_i)$$

integrálközelítő összegei azonos határértékhez tartanak.
Ha B -n $|f| \leq M$, akkor

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma'| &\leq \sum_{i=1}^n |f(p_i)| |m(B_i) - \rho(p_i) t(B_i)| \\ &\leq M \sum_{i=1}^n |m(B_i) - \rho(p_i) t(B_i)|. \end{aligned}$$

Az integrálszámítás középértéktételét ρ B_i -n vett integráljára felírva (3.5.*) az $m_i = \inf \rho(B_i)$,
 $M_i = \sup \rho(B_i)$ jelöléssel $m_i t(B_i) \leq m(B_i) \leq M_i t(B_i)$, és
evidensen $m_i t(B_i) \leq \rho(p_i) t(B_i) \leq M_i t(B_i)$, tehát

$$|m(B_i) - \rho(p_i) t(B_i)| \leq (M_i - m_i) t(B_i) = O_i t(B_i),$$

ahol O_i a ρ függvény ingadozása B_i -n Végül is

$$|\sigma - \sigma'| \leq \sum_{i=1}^n O_i t(B_i).$$

Mivel a jobb oldalon álló összeg az integrálható /ti. folytonos, korlátos/ ρ függvény oszcillációs összege, ha a felosztás elég finom, tetszőleges $\epsilon > 0$ -nál kisebbé tehető, σ és σ' tehát a felosztások finomításakor egyező határértékhez kell, hogy tartson. *

Összefoglalva eredményeinket és egyben rátérve a legkézenfekvőbb alkalmazásokra a következőket mondhatjuk:

Ha H -n m folytonos eloszlás, melynek ρ folytonos sűrűsége van, $B \subset \bar{B} \subset \bar{H}$, B_i mérhető, $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, akkor R^3 -ben speciálisan

a) B_i tömege:

$$m(B_i) = \iiint_{B_i} \rho(x,y,z) \, dx \, dy \, dz,$$

mig

$$(**) \iiint_B f(x,y,z) \rho(x,y,z) \, dx \, dy \, dz,$$

$f = x$ esetén az M_{yz} elsőrendű nyomatékot,

$f = y$ esetén az M_{zx} elsőrendű nyomatékot,

$f = z$ esetén az M_{xy} elsőrendű nyomatékot,

$f = r_e^2$ esetén az θ_e másodrendű nyomatékot [r_e jelenti (x,y,z) távolságát az e forgástengelytől.]

$f = x^2 + y^2 + z^2$ esetén a $\theta_{(0,0,0)}$ centrális nyomatékot adja meg.

Ha végül ρ a töltéssűrűséget adja meg H -n és

$$f = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

$(x_0, y_0, z_0) \in \bar{B}$ mellett a $(**)$ integrál a potenciál értékét adja meg (x_0, y_0, z_0) -ban.

3.13. MEGJEGYZÉS. Az előbbi tételben tárgyalt feladatok csak Stieltjes-integrálokkal tárgyalhatók, ha a tömeg-ill. töltésseloszlás nem tesz eleget az itteni erős kikötéseknek. Például ha az elektromos töltések pontokra, vonalakra vagy felületekre vannak koncentrálva, akkor a potenciált az (x_0, y_0, z_0) pontban $\int_A f \, d\varphi$ adja meg, ahol $\varphi(B)$ a B -be eső töltéssel egyenlő, és

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

3.14. Feladat.

1. Bizonyítsuk be, hogy a 3.5.-beli feltétel a Jordan-additivitásnak elégséges feltétele.

IV. PARAMÉTERES INTEGRÁLOK

1. KÖZÖNSÉGES PARAMÉTERES INTEGRÁLOK

Tekintsük az

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt$$

integrált, ahol $f(x, t)$ adott kétváltozós függvény. Az integrál természetesen függ x -nek megválasztásától, az x -nek függvénye.

1.1. DEFINÍCIÓ. Az x változóhoz az

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt$$

értéket rendelő F függvényt /közönséges/ paraméteres integrálnak nevezzük. Ebben az integrálban x a paraméter.

Ilyen paraméteres integrál lép fel például egy kettős integrálnak kétszeres integrállá való átalakításakor; a belső integrálban az egyik változó szerint kell integrálnunk, a másik változó a paraméter. Az ilyen paraméteres integrálok néhány tulajdonságával fogunk az alábbiakban foglalkozni.

1.2. Tétel. Ha f folytonos az $N = \{(x, t) : a \leq x \leq b, \alpha \leq t \leq \beta\}$ négyszögben, akkor

$$F(x) = \int_a^{\beta} f(x, t) dt$$

folytonos az $a \leq x \leq b$ intervallumban.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{\beta} f(x+h, t) dt - \int_a^{\beta} f(x, t) dt = \\ &= \int_a^{\beta} (f(x+h, t) - f(x, t)) dt. \end{aligned}$$

Mivel f $N = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ -ban egyenletesen folytonos, tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x+h, t) - f(x, t)| < \varepsilon$ ha csak $(x, t) \in N$, $(x+h, t) \in N$ és $|h| < \delta$, és így

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_a^{\beta} |f(x+h, t) - f(x, t)| dt \leq \varepsilon(\beta - \alpha) < \eta \quad (*)$$

1.3. Tétel. Ha a kétváltozós f és f_x függvény folytonos az $N = \{(x, t): a \leq x \leq b, \alpha \leq t \leq \beta\}$ négyszögben, akkor

$$F(x) = \int_a^{\beta} f(x, t) dt$$

differenciálható az $a \leq x \leq b$ intervallumban, és

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^{\beta} f(x, t) dt = \int_a^{\beta} f_x(x, t) dt.$$

Ezt a nevezetes szabályt szokták a paraméteres integrál differenciálási szabályának nevezni. Röviden úgy fogalmazható meg, hogy a tett feltevések mellett az integrálás és a paraméter szerinti differenciálás műveletének sorrendje felcserélhető.

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy

$$\left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^{\beta} f_x(x,t) dt \right| \rightarrow 0, \quad \text{ha } h \rightarrow 0.$$

A feltételek értelmében alkalmazható Lagrange-féle középértéktétel értelmében.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_a^{\beta} \frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} dt = \int_a^{\beta} f_x(x+\vartheta h,t) dt,$$

ahol $0 < \vartheta < 1$. Az f_x függvény N -en egyenletesen folytonos, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha a szóbanjövő helyek N -be esnek, akkor

$$|f_x(x+\vartheta h,t) - f_x(x,t)| < \varepsilon \quad \text{hacsak } |h| < \delta, \quad \text{és így}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^{\beta} f_x(x,t) dt \right| &= \\ &= \left| \int_a^{\beta} (f_x(x+\vartheta h,t) - f_x(x,t)) dt \right| \leq \int_a^{\beta} |f_x(x+\vartheta h,t) - f_x(x,t)| dt \leq \\ &\leq \varepsilon(\beta-a) < \eta, \end{aligned}$$

és innen η tetszőleges volta miatt az állítás adódik.

1.4. Tétel. Ha f folytonos az $N = \{(x,t): a \leq x \leq b, \alpha \leq t \leq \beta\}$ négyszögben, akkor

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left[\int_a^{\beta} f(x,t) dt \right] dx = \int_a^{\beta} \left[\int_a^b f(x,t) dx \right] dt.$$

Röviden: a tett feltevések mellett a két integrálás sorrendje felcserélhető.

Bizonyítás. f folytonossága miatt az $\iint_N f(x,t) dx dt$ kettős integrál létezik, és a kettős integrálnak kétszeres

integrállá való átalakítására vonatkozó szabály /II.3.1./ értelmében ugyanez az értéke az állított egyenlőségben szereplő mindkét integrálnak. *

Hasonló megfontolások alkalmazhatók, ha egy paraméteres integrál több paramétert is tartalmaz. Két paraméterre és folytonos függvényekre szorítkozva például a következőt mondhatjuk:

1.5. Tétel. Ha a háromváltozós f függvény folytonos a $T = [a,b] \times [c,d] \times [\alpha,\beta]$ halmazon /téglán/, akkor az

$$F(x,y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y,t) dt$$

függvény folytonos kétváltozós függvény az $N = [a,b] \times [c,d]$ négyszögön. Ha f_x is folytonos T -n, akkor létezik N minden pontjában az F_x parciális derivált, és

$$F_x(x,y) = \int_{\alpha}^{\beta} f_x(x,y,t) dt.$$

A tétel bizonyítását feladatként tűzzük ki. *

Az előző eredmények nehézség nélkül átvihetők olyan többes integrálokra, melyekben az integrálandó függvény még egy paramétert is tartalmaz.

1.6. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$ mérhető, zárt halmaz, $f(x,t)$ pedig a $B = [a,b] \times A$ halmazon értelmezett $(m+1)$ -változós függvény, amely minden rögzített $x \in [a,b]$ mellett A -n integrálható.

a) Ha f folytonos B -n, akkor

$$F(x) = \int_A f(x,t) dt$$

is folytonos $[a,b]$ -ben;

b) Ha f és f_x is folytonos B -n, akkor $[a,b]$ -ben

$$F'(x) = \int_A \dots \int_A f_x(x,t) dt$$

c) Ha f folytonos B -n, akkor

$$\int_a^b F(x) dx = \int_A \dots \left[\int_a^b f(x,t) dx \right] dt.$$

A tétel bizonyítását feladatként tűzzük ki. *

1.7. Oldjuk meg a következő feladatot:

Igazoljuk, hogy

$$F(x) = \int \sin^\alpha t \cos(x \cos t) dt \quad (\alpha \geq 0)$$

megoldása az

$$xy'' + (\alpha+1)y' + xy = 0$$

differentiálegyenletnek, azaz

$$xF''(x) + (\alpha+1)F'(x) + xF(x) = 0 \text{ minden } x \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

F eleget tesz 1.3. feltételeinek, ezért "bedifferenciálhatunk" az integráljel mögé:

$$F'(x) = \int_0^\pi \sin^\alpha t (-\sin(x \cos t)) \cdot \cos t dt,$$

és mivel F' is kielégíti 1.3. feltételeit

$$F''(x) = \int_0^\pi \sin^\alpha t (-\cos(x \cos t)) \cos^2 t dt$$

Annak érdekében, hogy az $F(x)$ -et megadó integrálban is $\cos(x \cos t)$ szerepeljen integráljunk egyszer parciálisan:

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \left[\frac{\sin^{\alpha+1} t}{\alpha+1} (-\sin(x \cos t)) \right]_{t=0}^{\pi} - \\
 &= - \int_0^{\pi} \frac{\sin^{\alpha+1} t}{\alpha+1} (-\cos(x \cos t)) \cdot (-x \sin t) dt = \\
 &= - \frac{x}{\alpha+1} \int_0^{\pi} \sin^{\alpha+2} t \cos(x \cos t) dt.
 \end{aligned}$$

$F'(x)$ most nyert értékét és $F''(x)$ -et a differenciálegyenletbe behelyettesítve, valóban azonosságot kapunk:

$$\begin{aligned}
 x \cdot F''(x) + (\alpha+1)F'(x) + x \cdot F(x) &= \\
 = x \int_0^{\pi} \sin^{\alpha} t \cos(x \cos t) [-\cos^2 t - \sin^2 t + 1] dt &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

1.8. Feladatok.

1. Bizonyítsuk be az 1.5. és 1.6. tétel állítását.
2. Legyen $I \in \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és $F(x)$ tetszőleges I -n értelmezett függvény. Adjunk meg olyan $I \times [0,1]$ -en értelmezett $f(x,t)$ függvényt, amelyre

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t) dt.$$

3. Számítsuk ki először $x > 0$, $y > 0$ mellett az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{x \cos^2 t + y \sin^2 t}$$

integrált, majd x és y szerinti deriválás segítségével az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(x \cos^2 t + y \sin^2 t)^2} \quad \text{integrált.}$$

2. IMPROPRIUS PARAMÉTERES INTEGRÁLOK

Az egyváltozós integrálszámítás tárgyalásánál a közös Riemann-integrál fogalmát kiterjesztve beszéltünk egyváltozós függvények nem véges intervallumra vonatkozó, ill. nem korlátos egyváltozós függvények véges intervallumra vonatkozó un. improprius integráljáról. Paraméteres integrálok esetében hasonlóképpen járunk el.

2.1. DEFINÍCIÓ. Ha az

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t) dt$$

paraméteres integrálban az (α, β) intervallum végtelen intervallum, vagy véges ugyan, de egyik végpontjában az $f(x,t)$ függvény /rögzített x mellett/ nem korlátos, akkor improprius paraméteres integrálról beszélünk.

Tételeinket az alábbiakban olyan improprius paraméteres integrálokra fogjuk kimondatni, melyek

$$(*) \quad F(x) = \int_{\alpha}^{\infty} f(x,t) dt$$

alakuak, ahol $f(x,t)$ az $S = \{(x,t): a \leq x \leq b, \alpha \leq t\}$ sávban folytonos, a tételek azonban átvihetők bármely más típusu improprius paraméteres integrálra is.

A $(*)$ típusu improprius integrálok vizsgálata és a végtelen sorok konvergenciavizsgálata sok rokon vonást mutat. A sorok egyenletes konvergenciájának értelmezéséhez teljesen hasonlóan adható meg a következő értelmezés:

2.2. DEFINÍCIÓ. Az

$$F(x) = \int_a^\infty f(x,t) dt$$

integrált az $[a,b]$ intervallumban egyenletesen konvergensnek mondjuk, ha bármely pozitív ε -hoz található olyan ω_0 szám, hogy $\omega \geq \omega_0$ esetén

$$\left| \int_\omega^\infty f(x,t) dt \right| < \varepsilon \quad (x \in [a,b])$$

legyen, x választásától függetlenül.

Az improprius paraméteres integrál egyenletes konvergenciájának és a sorok egyenletes konvergenciájának kapcsolatára utal az alábbi tétel:

2.3. Tétel. Ha az

$$F(x) = \int_a^\infty f(x,t) dt$$

integrál $[a,b]$ -ben egyenletesen konvergens, és $a = a_0 < a_k$
 $a_k \rightarrow \infty$, akkor az

$$(**) \quad F_k(x) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x,t) dt$$

jelölés mellett

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x)$$

és ez a sor $[a,b]$ -ben egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Az

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n F_k(x) \text{ jelöléssel } s_n(x) = \int_{\alpha}^{\alpha_{n+1}} f(x,t) dt,$$

ugyhogy $n \rightarrow \infty$ esetén $s_n(x) + \int_{\alpha}^{\infty} f(x,t) dt = F(x)$, így tehát

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x).$$

Ha adott $\varepsilon > 0$ -hoz megválasztjuk az ω_0 számot úgy, hogy $\omega \geq \omega_0$, $x \in [a, b]$ esetén

$$\left| \int_{\omega}^{\infty} f(x,t) dt \right| < \varepsilon$$

legyen, akkor az n_0 számot úgy választva, hogy $n \geq n_0$ esetén $\alpha_n \geq \omega_0$ legyen

$$|F(x) - s_n(x)| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t) dt - \int_{\alpha}^{\alpha_{n+1}} f(x,t) dt \right| = \left| \int_{\alpha_{n+1}}^{\infty} f(x,t) dt \right| < \varepsilon$$

hacsak $n \geq n_0$, $x \in [a, b]$, azaz $\sum_{k=0}^{\infty} F_k(x)$ csakugyan egyenletesen konvergens $[a, b]$ -ben. *

Az egyenletes konvergenciára vonatkozó elégséges feltételt megadó Weierstrass-féle kritérium megfelelője a következő:

2.4. Tétel. Ha az $S = \{(x, t) : a \leq x \leq b, \alpha \leq t\}$ sávban

$$|f(x, t)| \leq G(t), \quad \text{és} \quad \int_{\alpha}^{\infty} G(t) dt$$

konvergens, akkor az $\int_{\alpha}^{\infty} f(x, t) dt$ integrál $[a, b]$ -ben egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$ -hoz határozzuk meg az ω_0 számot úgy, hogy

$$\int_{\omega_0}^{\infty} G(t) dt < \varepsilon$$

legyen /ez G improprius integráljának feltételezett konvergenciája miatt megtehető/, akkor $\omega \geq \omega_0$ esetén nyilván

$$\left| \int_{\omega}^{\infty} f(x,t) dt \right| \leq \int_{\omega}^{\infty} \left| f(x,t) \right| dt \leq \int_{\omega}^{\infty} G(t) dt \leq \int_{\omega_0}^{\infty} G(t) dt < \varepsilon$$

ami épp az állítást adja. (*)

A (**) alatt értelmezett $F_k(x)$ függvényekre a közönséges paraméteres integrálokra vonatkozó 1.2., 1.3., 1.4 tételeket alkalmazva, az egyenletesen konvergens sorok megfelelő tulajdonságaiból rögtön következnek az alábbi állítások:

2.5. Tétel. Ha $f(x,t)$ folytonos az $S = [a,b] \times [\alpha, \infty]$ sávban és az

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\infty} f(x,t) dt$$

integrál $[a,b]$ -ben egyenletesen konvergens, akkor

a) $F(x)$ folytonos $[a,b]$ -ben

$$b) \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t) dt \right) dx = \int_{\alpha}^{\infty} \left(\int_a^b f(x,t) dx \right) dt,$$

c) ha a fenti feltételek mellett még $f_x(x,t)$ is folyto-

nos S -ben és az $\int_{\alpha}^{\infty} f_x(x,t) dt$ integrál egyenletesen

konvergens, akkor $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{\infty} f(x,t) dt = \int_{\alpha}^{\infty} f_x(x,t) dt.$ *

2.6. Paraméteres integrálok segítségével sok olyan integrált tudunk kiszámítani, amelyet más úton nem, vagy csak nehezen tudnánk meghatározni.

Igazoljuk pl. hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a} \quad (0 < a < b).$$

Az egyszeres improprius integrálnál mondottak értelmében $x > 0$ mellett nyilván

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{x}$$

és ez az integrál egyenletesen konvergens a $0 < a \leq x \leq b$ intervallumban, mert itt $|e^{-xt}| \leq e^{-at}$ és $a > 0$ miatt $\int_0^{\infty} e^{-at} dt$ konvergens. Így előbbi eredményünket x szerint az a és b határok között integrálva

$$\int_0^{\infty} \left(\int_a^b e^{-xt} dx \right) dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-xt}}{-t} \right]_{x=a}^b dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

egyrészt, másrészt 2.5.b) alkalmazásával

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\int_a^b e^{-xt} dx \right) dt &= \int_a^b \left(\int_0^{\infty} e^{-xt} dt \right) dx = \int_a^b \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_a^b = \\ &= \ln b - \ln a. \quad * \end{aligned}$$

2.7. Feladatok.

Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét /a kidolgozott példához hasonlóan alkalmas improprius paraméteres integrálként/:

$$1. \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos yt \, dt \quad \left(\int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt \, dt = \frac{x}{x^2 + y^2} \right.$$

$\left. -b < 0, \quad x > 0 \right), \quad (a > 0, \quad b > 0).$

$$2. \int_0^{\infty} t e^{-xt} \cos yt \, dt, \quad (x > 0).$$

$$3. \int_0^{\infty} t e^{-xt} \sin yt \, dt, \quad (x > 0).$$

3. VALTOZÓ HATÁRU PARAMÉTERES INTEGRÁL

Ha egy $N_x \subset \mathbb{R}^2$ x -re nézve normáltartományon tekintünk egy kettős integrált, akkor a kétszeres integrállá való átalakításakor a belső integrál

$$\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} d(x,y) \, dy$$

alaku lesz, vagyis a paraméter (x) nemcsak az integrálandó f függvényben, hanem az integrál határaiban is szerepel. Felvethető az a kérdés, hogy az ilyen integráloknak a paraméter szerinti folytonossága, differenciálhatósága milyen kikötések mellett van biztosítva.

A legegyszerűbb feltételekre szorítkozva a következő tételt mondhatjuk ki:

3.1. Tétel. Legyen $f(x,t)$ folytonos az $N = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ négyszögön, és értelmezzük a $T = [a,b] \times [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta]$ téglán
 a

$$G(x,u,v) = \int_u^v f(x,t) dt \quad \text{függvényt /ha } v < u, \text{ akkor}$$

$$G = - \int_v^u f(x,t) dt/. \quad \text{Ekkor}$$

a) $G(x,u,v)$ folytonos T -n

b) ha még $f_x(x,t)$ is létezik és folytonos N -en, akkor a T téglán minden pontjában

$$G_x(x,u,v) = \int_u^v f_x(x,t) dt,$$

$$G_u(x,u,v) = -f(x,u); \quad G_v(x,u,v) = f(x,v).$$

Bizonyítás. Legyen $(x_0, u_0, v_0) \in T$, $(x, u, v) \in T$. Ekkor

$$\begin{aligned} G(x,u,v) - G(x_0, u_0, v_0) &= \\ &= [G(x,u,v) - G(x, u_0, v_0)] + [G(x, u_0, v_0) - G(x_0, u_0, v_0)]. \end{aligned}$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$(*) \quad |G(x, u_0, v_0) - G(x_0, u_0, v_0)| < \varepsilon$$

hiszen az

$$\int_{u_0}^{v_0} f(x,t) dt$$

közönséges paraméteres integrálra az $[a,b] \times [u_0, v_0]$ /ill. $v_0 < u_0$ esetén az $[a,b] \times [v_0, u_0]$ / négyszögön alkalmazható 1.2. / $u_0 = v_0$ esetén az integrál x -től függetlenül eltűnik/.

Másrészt

$$G(x, u, v) - G(x, u_0, v_0) = \int_u^v f(x, t) dt - \int_{u_0}^{v_0} f(x, t) dt =$$

$$= \int_u^{u_0} f(x, t) dt + \int_{v_0}^v f(x, t) dt,$$

és ha N -en $|f(x, t)| \leq M$, akkor a jobb oldal abszolút értéke $\leq M|u - u_0| + M|v - v_0|$, és ez ε -nál kisebb, ha $|u - u_0|$ és $|v - v_0|$ elég kicsiny. Ezt és (*)-ot figyelembe véve adódik, hogy G az (x_0, u_0, v_0) pontban folytonos T -re szorítkozva/. *

A b) állítás igazolásánál az 1.3. tételt kell az $[a, b] \times [u, v]$ /ill. $[a, b] \times [v, u]$ / négyszögre alkalmazni $u = v$ esetén triviálisan igaz az állítás/. G_v a G -t megadó integrálnak, mint egyedül v függvényének deriválásáról szóló ismert tételnek alkalmazásával adódik $f(x, t)$ t függvényeként folytonos/, G_u pedig hasonlóképpen nyerhető a

$$G(x, u, v) = \int_a^v f(x, t) dt - \int_a^u f(x, t) dt$$

összefüggés alapján. *

3.2. Tétel. Legyen $f(x, t)$ folytonos az $N = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ négyszögben, f_1 és f_2 $[a, b]$ -ben folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $a \leq x \leq b$ esetén $\alpha \leq f_1(x) \leq \beta$, $\alpha \leq f_2(x) \leq \beta$, és

$$F(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

Ekkor

a) $F(x)$ folytonos $[a, b]$ -ben

b) ha még $f_x(x,t)$ is létezik és folytonos N -en, továbbá egy $x_0 \in [a,b]$ pontban f_1 és f_2 differenciálható, akkor

$$F'(x_0) = \int_{f_1(x_0)}^{f_2(x_0)} f_x(x_0, t) dt - f(x_0, f_1(x_0)) f_1'(x_0) + \\ + f(x_0, f_2(x_0)) \cdot f_2'(x_0).$$

Bizonyítás. Az a) állítás azonnal következik az $F(x) = G(x, f_1(x), f_2(x))$ előállításból, ahol G a 3.1. tételben értelmezett függvény, amely 3.1.a) értelmében folytonos $T = [a,b] \times [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ -n. b) igazolásánál azt kell meggondolni, hogy G -nek 3.1.b) szerint léteznek T -n az elsőrendű parciális deriváltjai, ezek folytonosak is G_u és G_v esetén ez evidens, G_x esetén pedig úgy nyerhető, hogy 3.1.a -t f helyett $f_x(x,t)$ -re alkalmazzuk/. Így a (*) előállításból és a 3.1.b) képletekből a többváltozós láncszabály alapján adódik az állítás. *

A 3.2. tételnek szépséghibája, hogy a változó határu paraméteres integrál folytonosságára és differenciálhatóságára olyan kikötések alapján következtet $f_1(x) \leq f_2(x)$ esetén, amely az integranduszra nemcsak a vizsgált $N_x = \{(x,t): a \leq x \leq b, f_1(x) \leq t \leq f_2(x)\}$ normáltartományon, hanem az ezt magában foglaló N négyszögön irnak elő megszorításokat. Bizonyítható, hogy N helyett csak N_x -en folytonos f esetén is igaz 3.2. állítása F folytonosságáról /csak kicsit bonyolultabb a bizonyítás/ és F differenciálhatóságáról /ha f_1, f_2 differenciálhatók/. Ennek igazolására itt nem térünk ki.

V. TÖBBES IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

1.1. Legyen A zárt, mérhető halmaz, f pedig olyan nem-negatív függvény, amely adott $a \in \text{int } A$ pont $K(a, \epsilon)$ környezetében nem korlátos, és bármely mérhető $A - A_i$ halmazon integrálható, ahol $a \in A_i$, $A_i \subset A$ nyílt, mérhető.

Az alábbiakban az összes szereplő halmazokról felteszünk, hogy mérhetőek, ezt tehát nem fogjuk minden esetben külön kikötni.

Nevezzük a továbbiakban az

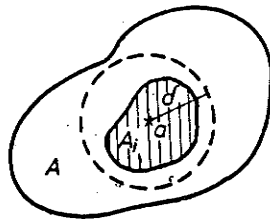
$$(*) \quad I(A_i) = \int_{A - A_i} \dots \int f \, dt$$

integrált részletintegrálnak.

1.2. DEFINÍCIÓ. I -t /ami lehet véges, vagy végtelen/ a $(*)$ részletintegrálok határértékének nevezzük, ha I -nek akármilyen megadott $K(I, \epsilon) = (I - \epsilon, I + \epsilon)$, ill. $(\epsilon, +\infty)$ környezetéhez létezik olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges, az a pontot tartalmazó $A_i \subset K(a, \delta)$ nyílt halmazra

$$I(A_i) \in K(I, \epsilon) \quad /23. \text{ ábra}/$$

Igaz mármost a következő tétel:



23. ábra

1.3. Tétel. Ha az f függvény bármely előbbi típusu $A - A_i$ halmazon integrálható, nem-negatív függvény,

akkor létezik részletintegráljainak véges vagy végtelen

$$I = \lim I(A_i)$$

határértéke $\delta \rightarrow 0$ esetén.

Bizonyítás. Amennyiben az $I(A_i)$ integrálok korlátosak, jelöljük felső határukat I -vel. Ha $\epsilon > 0$ adott, akkor legyen A_{i_0} olyan a -t tartalmazó nyílt halmaz, melyre

$$I(A_{i_0}) > I - \epsilon.$$

A_{i_0} tartalmazza a alkalmas δ -sugaru környezetét vagyis minden olyan A_i nyílt halmazra, mely a -t tartalmazza és beleesik ebbe a $K(a, \delta)$ környezetbe

$$I(A_i) = \int_{A-A_i} \dots \int f \, dt \geq \int_{A-A_{i_0}} \dots \int f \, dt = I(A_{i_0}) > I - \epsilon,$$

vagyis

$$I(A_i) > I - \epsilon,$$

és ez ϵ tetszőleges volta miatt épp azt jelenti, hogy

$$I = \lim I(A_i).$$

Ha az $I(A_i)$ integrálok nem korlátosak, akkor $\lim I(A_i) = I = \infty$. Legyen ugyanis K tetszőleges nagy szám, ekkor van olyan a -t tartalmazó nyílt A_{i_0} halmaz, melyre

$$I(A_{i_0}) > K.$$

Ugyanugy okoskodva mint előbb, A_{i_0} tartalmazza a alkalmas $K(a, \delta)$ környezetét, ebbe eső A_i nyílt halmazokra tehát $(a \in A_i) \quad I(A_i) \geq I(A_{i_0})$ folytán még inkább

$I(A_i) > K$, ami épp azt jelenti, hogy $\lim I(A_i) = \infty$. *

Egy A halmazon nem korlátos f függvény ($f \geq 0$) A -n vett többes improprius integrálját 1.1, 1.2, 1.3 alapján értelmezve, az egyes improprius integrálokhoz hasonlóan a következő elnevezésekben állapodunk meg:

1.4. DEFINÍCIÓ. Az $\int_A \dots \int f \, dt$ integrált konvergesnek nevezzük, ha részletintegráljainak határértéke véges, ebben az esetben

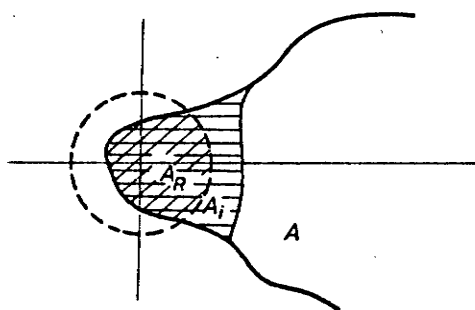
$$I = \int_A \dots \int f \, dt = \lim I(A_i).$$

Ha $\lim I(A_i) = \infty$, akkor a vizsgált integrált divergesnek mondjuk.

$I = \lim I(A_i)$ meghatározására felhasználhatunk speciális alakú A_i halmazokat.

Hasonlóképpen definiálható egy nem korlátos halmazra vonatkozó többes improprius integrál. Evégből állapodjunk meg a következőkben:

1.5. A nem korlátos zárt A halmazt mérhetőnek mondjuk, ha határának bármely korlátos része zérus térfogatu.



24. ábra

Legyen A nem korlátos, zárt halmaz.

Nevezzük az

$$I(A_i) = \int_{A_i} \dots \int f \, dt$$

integrált részletintegrálnak, ha $\bar{A}_i$ tartalmazza a zárt A halmaznak a $(0, \dots, 0)$ középpontu R sugaru zárt gömbbel

vett A_R metszetét /ha $A \subset \mathbb{R}^m$, akkor a gömb is m -dimenziós; az ábrán lásd az $m=2$ esetet/.

Legyen f nem-negatív, az A halmaz bármely korlátos, mérhető részén integrálható függvény. Ekkor az előbbi definíciók, ill. tétel analógiájaként kimondható az

1.6. DEFINÍCIÓ.

$$I = \lim I(A_i)$$

a részletintegrálok határértéke, ha I tetszőleges $K(I, \epsilon)$ környezetére $I(A_i) \in K(I, \epsilon)$, hacsak a részletintegrál értelmezésében szereplő gömb sugara, R , elég nagy.

1.7. Tétel. Az f -re tett feltevések mellett

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} I(A_R),$$

ahol A_R jelentése a fenti.

1.8. DEFINÍCIÓ. Az $\int_A \dots f \, dt$ integrált konvergensnek nevezzük, ha részletintegráljainak határértéke $/R \rightarrow \infty$ esetben/ véges, ebben az esetben

$$\int_A \dots f \, dt = \lim I(A_i),$$

ellenkező esetben az integrált divergensnek mondjuk.

$\lim I(A_i)$ meghatározására most is felhasználhatunk speciális alakú A_i halmazokat.

Hasonlóan tekinthetjük valamely vonal környezetében nem korlátos függvények integrálját /ekkor a részletintegrálokat úgy kapjuk meg hogy a zárt A halmazból kizárunk valamely, a szinguláris vonalat tartalmazó nyílt A_i halmazt.

Nem előjeltartó függvény improprius integráljait csak abban az esetben vizsgáljuk, ha ezek abszolút konvergensnek, vagyis amikor az

$$\int_A \dots |f| \, dt$$

integrál konvergencia. Belátható, hogy ha ez utóbbi integrál konvergencia, akkor az f részletintegráljainak is van határértéke. Ha azonban az utóbbi integrál divergencia, akkor bizonyítható, hogy az f függvény részletintegráljainak nincs véges határértéke, ezért nincs értelme feltételesen konvergencia többes integrálokat tekinteni.

1.9. Vizsgáljuk meg pl. az

$$I = \int \dots \int_A \frac{1}{(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2})^p} dx dy dz$$

integrál konvergenciáját, ahol $p > 0$, és

$$A = \{(x, y, z) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2\}.$$

Ha $B = \{(x, y, z) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq \rho^2\}$ és $\rho < R$, akkor

$$I(\rho) = \int \dots \int_{A-B} \frac{1}{(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2})^p} dx dy dz$$

és itt az $x' = x-a$, $y' = y-b$, $z' = z-c$ helyettesítést, majd gömbi koordinátás transzformációt alkalmazva:

$$I(\rho) = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=\rho}^R r^{-p} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \dots = 4\pi \int_{\rho}^R \frac{1}{r^{p-2}} dr$$

Mivel az utóbbi integrál $(p-2) > 1$ esetében, ha $\rho \rightarrow 0$ véges határértékhez tart, azért $p > 3$ esetén improprius integrálunk konvergencia, és

$$I = \frac{4\pi R^{3-p}}{3-p}. \quad (p \leq 3 \text{ esetén az integrál divergencia.})$$

Másik példaként vizsgáljuk az $f(x, y) = \sin^2(x^2 + y^2)$

függvénynek az $A \subset \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ halmazra vonatkozó integrálját.

Legyen $B = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. E negyedköröcikkre integrálva, polárkoordinátás traszformációt alkalmazva

$$\begin{aligned} I(R) &= \int_B \dots \int \sin^2(x^2+y^2) dx dy = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^R \sin^2 r^2 r dr d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{1}{4} \sin 2R^2 \right], \text{ vagyis} \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{1}{4} \sin 2R^2 \right],$$

és mivel ez a határérték nem létezik, improprius integrálunk divergens.

1.10. Feladatok.

1. Bizonyítsuk be, hogy $e^{-x^2-y^2}$ integrálja az egész síkon konvergens, és számítsuk ki az integrál értékét.
2. Milyen p értékre konvergens

$$\iint_A \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p} \quad (A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq R^2\})?$$

VI. AJÁNLOTT IRODALOM

A.F. BERMANT:

Matematikai analízis I.II /Tankönyvkiadó, 1951/

WALTER RUDIN:

A matematikai analízis alapjai /Műszaki könyvkiadó,
1978/

B.P. GYMIDOVICS:

Matematikai analízis feladatgyűjtemény /Tankönyvkiadó,
1971./

VIII. ÚTMUTATÁS A FELADATMEGOLDÁSHOZ

I.2.28.

1. Legyen a görbe $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$, az α -tól β -ig terjedő rész hosszúsága $s(\beta) - s(\alpha)$. Egy $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ felosztást véve, a görbe $[t_{i-1}, t_i]$ -nek megfelelő részét befedi a $\varphi(t_i)$ középpontu, $2h_i$ élű kocka, ahol $h_i = s(t_i) - s(t_{i-1})$; e kocka térfogata $\leq h_i (s(\beta) - s(\alpha))^2$.
2. Ha $A \subset \bigcup_{i=1}^n N_i$, az N_i -k /zárt/ négyszögek, akkor ezek $\bar{A}$ -t is befedik.
3. $\bar{A} = A \cup (\bar{A} - A)$, int $A = A - (\bar{A} - A)$, és az itt szereplő különbségek részei A határának.
4. Legyen $A \subset \bigcup_{i=1}^n N_i$, $\sum_{i=1}^n t(N_i) < k(A) + \frac{\epsilon}{2}$, és legyenek az N_i' négyszögek az N_i -k koncentrikus nagyításai úgy, hogy $N_i \subset \text{int } N_i'$, $\sum_{i=1}^n t(N_i') < k(A) + \epsilon$; $G = \bigcup_{i=1}^n \text{int } N_i'$ megfelel.

II.1.18. 1.8.-1.10:

Ha f integrálható, akkor $h=H$ folytán van olyan F_1 és F_2 felosztás, hogy $S_1 < H + \frac{\epsilon}{2}$, $s_2 > h - \frac{\epsilon}{2}$, s vehető a közös finomítás, rá teljesül $\Omega < \epsilon$. Ezt $\epsilon = \frac{1}{n}$ -re alkalmazva megkapjuk az (F_n) sorozatot. Ha van ilyen (F_n) sorozat, és n olyan nagy, hogy $|S_n - R| < \frac{\epsilon}{2}$, $|s_n - R| < \frac{\epsilon}{2}$, akkor $F_n = F$ megfelel a $|\sigma - R| < \epsilon$ kikötésnek.

Bármely korlátos f -re igaz, hogy ha F' finomítása F -nek, akkor $s \leq s' \leq S' \leq S$; ha F_1 és F_2 két felosztás, és F_3 a közös finomítás, akkor $s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2$; ezért $h \leq S$ bármely S felső összegre; ezért $h \leq H$; ha F olyan, hogy bármely hozzá tartozó σ -ra $|\sigma - R| < \epsilon$, akkor $|s - R| \leq \epsilon$ és $|S - R| \leq \epsilon$ is áll; így ilyenkor $|H - h| \leq 2\epsilon$.

$$1.13: |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \leq O_i.$$

1.15: f egyenletes folytonosságból $\Omega(f, F) \leq \epsilon$, ha olyan finom a felosztás, hogy minden tagján $O_i \leq \eta$ és $\eta t(A) \leq \epsilon$.

II.1.18.

2. A bármely felosztásának bármely pozitív területű tagja tartalmaz négyszöget, így rajta $m_i = 0$, $M_i = 1$, és így $s = 0$, $S = t(A)$.
3. Készítsünk N -ben négyszögrácsos felosztást; a g -hez tartozó alsó és felső összeg az A -ban fekvő ill. A -t metsző rácsnégyszögek területösszege.
4.
$$\sigma = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{ik}{n^2} = \frac{1}{n^4} \frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4}$$
 ha $n \rightarrow +\infty$.
5. Integrálható, mert $|f| \leq 1$, és f -nek szakadása A -ban csak az $x+y+1=0$ egyenes pontjaiban lehet, ez pedig 0 területű.

II.2.7.1.

- 2.1. A -ban olyan felosztást veszünk, amelyhez $\Omega < \epsilon$, és ennek tagjait elmetsszük B -vel.
- 2.2. A_i -nek egy felosztását véve minden i -re, ezekből előáll A -nak egy felosztása, és a közelítő összegek összeadódnak.

- 2.4. a) a közelítő összegek c -vel szorzódnak.
 b) a közelítő összegek összeadódnak.
 c) fg oszcillációja $\leq 2K\epsilon$, ha f oszcillációja $\leq \epsilon$.
 g oszcillációja $\leq \epsilon$, $|f| \leq K$, $|g| \leq K$.
 d) $\frac{1}{g}$ oszcillációja $\leq \frac{\epsilon}{\delta^2}$, ha g oszcillációja $\leq \epsilon$.
 e) Hasonló egyenlőtlenség áll a közelítő összegekre.

- 2.5. a) Hasonló áll a közelítő összegekre.
 b) $-K \leq f \leq K$.
 c) $m \leq f \leq M$.

II.2.7.2.

Legyen $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x,y \text{ racionális,} \\ -1, & \text{ha } x,y \text{ közül legalább egy irracionális,} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x,y \text{ racionális,} \\ 1, & \text{ha } x,y \text{ közül legalább egy irracionális.} \end{cases}$$

Most $f+g=0$, $fg=-1$, $|f|=1$.

II.2.7.3.

$0 \leq f \leq 4$, $t(A) = 4\pi$. Az alsó becslést javíthatjuk, mert
 $4 - \sqrt{x^2+y^2} \geq 4 - 2 = 2$.

II.2.7.4.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100+\sin^2 x + \sin^2 y} \leq \frac{1}{100},$$

$$\frac{100}{51} = \frac{200}{102} \leq \iint_A f(x,y) dx dy \leq \frac{200}{100} = 2.$$

II.3.16.

1. $\iint_N f(x,y) dx dy$ nem létezik, mert minden alsó összeg -1 , minden felső összeg 1 ;

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x,y) dx dy = \int_{y=0}^1 0 dy = 0.$$
2. Tekintsük a 3.6.-beli N_x -et; ez korlátos, mert $[a,b]$ -ben f_1 és f_2 korlátos, a zárttság és mérhetőség pedig abból adódik, hogy N_x határa $\{(x,y): y = f_1(x), a \leq x \leq b\} \cup \{(x,y): y = f_2(x), a \leq x \leq b\} \cup \{(x,y): x=a, f_1(a) \leq y \leq f_2(a)\} \cup \{(x,y): x=b, f_1(b) \leq y \leq f_2(b)\}$.
3. $T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\}$, vagy
 $T = \{(x,y) : 0 \leq y \leq a, y \leq x \leq a\}.$
4. $\iint_N (f(x)-f(y))^2 dx dy = \iint_N f^2(x) dx dy + \iint_N f^2(y) dx dy -$
 $- 2 \iint_N f(x) \cdot f(y) dx dy \geq 0$, így

$$2 \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq 2 \int_a^b f^2(x) dx \cdot (b-a).$$
5. $T = \{(x,y) : \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 2\}$, így $\ln \frac{1}{4} \leq \ln \frac{x^2+y^2}{2} \leq \ln 1$, és
 $t(T) = \frac{1}{2}.$

II.4.13.

1. N -ben négyszögrácsos felosztást, $[a_3, b_3]$ -ban felosztást készítünk. (*) jobb oldalának egy közelítő összege $\sigma = \sum_{i=1}^3 \int_{a_3}^{b_3} f(\xi_i, \eta_i, z) dz t(N_i)$; itt

$$\int_{a_3}^{b_3} f(\xi_i, \eta_i, z) dz = \sum_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} f(\xi_i, \eta_i, z) dz; \text{ ha}$$

$N_i \times [z_{j-1}, z_j]$ -n f értékkészletének alsó és felső határa m_{ij} és M_{ij} , akkor $\sum_i \sum_j m_{ij}(z_j - z_{j-1})t(N_i) \leq \sigma \leq \sum_i \sum_j M_{ij}(z_j - z_{j-1})t(N_i)$; a bal és jobb oldal értéke s és S T egy felosztásánál, amely előirtan finom, ha N és $[a_3, b_3]$ felosztása elég finom. Hasonló (**) igazolása.

2. Ha $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, és $f_i[a_i, b_i]$ -ben integrálható, akkor a $h(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$ függvény integrálja T -n

$$\int_{a_1}^{b_1} f_1(x) dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(y) dy \cdot \int_{a_3}^{b_3} f_3(z) dz.$$

Igazolása 4.2.(**) és 3.5. összevetéséből adódik.

3. A korlátos, zárt B -n f_1 és f_2 korlátos; N_{xy} határa $\{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = f_1(x, y)\} \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = f_2(x, y)\} \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in B \text{ határa}, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$. Az első kettő 0 térfogatu 2.21. háromdimenziós változata folytán, a harmadik pedig azért, mert B határát ϵ -nál kisebb területösszegű négyszögekkel befedhetjük, s föléljük téglákat emelhetünk a $z=a_3$ és $z=b_3$ sík között, ahol $a_3 \leq f_1 \leq f_2 \leq b_3$ (B -n).

$$4. F(t) = \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\rho^2) \rho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\rho =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho^2 \, d\rho; \quad \frac{dF}{dt} = 4\pi f(t^2) t^2 \text{ /feltehetjük,$$

hogy f folytonos/.

5. Az $A = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x+y\}$ halmaz esetén $A(z)$ az $N = [0, 1] \times [0, 1]$ négyzetből a

$H(z) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq z, 0 \leq y \leq z-x\}$ háromszög levonásával nyerhető. Ezért $t(A(z)) = 1 - \frac{z^2}{2}$, és

$$\iiint_A f(z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 f(z) \left(1 - \frac{z^2}{2}\right) dz \quad \text{ha } f \text{ folytonos/}$$

6. A belső integrál eltűnik, ami negyedkörökre való bontással látható.

II.5.5.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_{x_1=0}^1 \dots \int_{x_n=0}^1 (x_1^2 + \dots + x_n^2) \, dx_n \dots dx_1 = \\ & = \int_{x_1=0}^1 \dots \int_{x_{n-1}=0}^1 (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}) \, dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad I_n &= \int_{x_1=0}^1 \dots \int_{x_n=0}^1 (x_1 + \dots + x_n)^2 \, dx_n \dots dx_1 = \\ &= \int_{x_1=0}^1 \dots \int_{x_{n-1}=0}^1 \left(\frac{(x_1 + \dots + 1)^3}{3} - \frac{(x_1 + \dots + x_{n-1})^3}{3} \right) \, dx_{n-1} \dots dx_1 = \\ &= \int_{x_1=0}^1 \dots \int_{x_{n-1}=0}^1 \left[(x_1 + \dots + x_{n-1})^2 + (x_1 + \dots + x_{n-1}) + \frac{1}{3} \right] \, dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{3} + \frac{n-1}{2} + I_{n-1}; \text{ Innen} \end{aligned}$$

$$I_n = \frac{n}{3} + \frac{(n+1) + (n-2) + \dots + 2 + 1}{2} = \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{4}.$$

$$3. \quad \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{x_1} \dots \int_{x_n=0}^{x_{n-1}} (x_1 \cdot \dots \cdot x_n) \, dx_n \dots dx_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{x_1} \dots \int_{x_{n-1}=0}^{x_{n-2}} x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-2} x_{n-1}^3 dx_{n-1} \dots dx_1 = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int_{x_1=0}^1 \dots \int_{x_{n-2}=0}^{x_{n-3}} x_1 \dots x_{n-3} x_{n-2}^5 dx_{n-2} \dots dx_1 = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{6} \dots \frac{1}{2(n-2)} \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{x_1} x_1 x_2^{2(n-2)+1} dx_2 dx_1 = \frac{1}{2^n \cdot n!}.
\end{aligned}$$

III.3.14.1.

$B_i = \text{int } B_i \cup C_i$, ahol $t(C_i) = 0$, az $\text{int } B_i$ halmazok pedig diszjunktak.

IV.1.8.1.

1.5. $F(x+h, y+k) - F(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x+h, y+k, t) - f(x, y, t)) dt$; itt

$|f(x+h, y+k, t) - f(x, y, t)| < \epsilon$, ha $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, alkalmas $\delta > 0$ mellett f T -n való egyenletes folytonossága miatt.

Ha f_x is folytonos, akkor

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\beta} (f(x+h, y, t) - f(x, y, t)) dt = \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f_x(\xi, y, t) dt, \text{ ahol } \xi \text{ az } x \text{ és } x+h \text{ helyek között van,} \\
&\text{és } |f_x(\xi, y, t) - f_x(x, y, t)| < \epsilon, \text{ ha } |h| < \delta
\end{aligned}$$

1.6. $F(x+h) - F(x) = \int_A \dots \int [f(x+h, t) - f(x, t)] dt$, és

$|f(x+h, t) - f(x, t)| < \epsilon$, ha $|h| < \delta$, f -nek B -n való egyenletes folytonossága miatt; ha f_x is folytonos, akkor

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \int_A \dots \int f_x(\xi, t) dt, \text{ ahol } \xi \text{ az } x \text{ és } x+h \text{ között van, és így} \\
&|f_x(\xi, t) - f_x(x, t)| < \epsilon, \text{ ha } |h| < \delta.
\end{aligned}$$

A B-re kiterjesztett $(m+1)$ -szeres integrál kétféle átalakítása adja c)-t

IV.1.8.

2. $f(x, t) = F(x)$ megfelel.

3. A $z = \operatorname{tg} t$ helyettesítéssel

$$F(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{x \cos^2 t + y \sin^2 t} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{x(1 + \frac{y}{x} z^2)} = \dots = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{xy}};$$

$$F_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(x \cos^2 t + y \sin^2 t)^2} (-\cos^2 t) dt,$$

$$F_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 t}{(x \cos^2 t + y \sin^2 t)^2} dt,$$

$$\begin{aligned} F_x + F_y &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(x \cos^2 t + y \sin^2 t)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} + \\ &+ \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2} \right) y^{-\frac{3}{2}} = \dots = -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{xy}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

IV.2.7.

$$\begin{aligned} 1. \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos yt \, dt &= \int_0^{\infty} \left(\int_a^b e^{-xt} \cos yt \, dx \right) dt = \\ &= \int_a^b \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt \, dt \, dx = \int_a^b \frac{x}{x^2 + y^2} \, dx = \dots = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + y^2}{a^2 + y^2} \text{ ugyanis } |e^{-xt} \cos yt| \leq e^{-at}, \text{ ha } 0 < a < b. \end{aligned}$$

$$2. F(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt \, dt = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$F_x = \int_0^{\infty} -t e^{-xt} \cos yt \, dt = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ ugyanis}$$

$$\left| -t e^{-xt} \cos yt \right| \leq t e^{-xt} < c e^{-\frac{x}{2} t}; \text{ így}$$

$$\int_0^{\infty} t e^{-xt} \cos yt \, dt = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$3. F_y = \int_0^{\infty} e^{-xt} (-\sin yt) t \, dt = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \text{ az előbbi becse-}$$

$$\text{lés folytán, így } \int_0^{\infty} t e^{-xt} \sin yt \, dt = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

V.1.10.

1. Az origó körüli ρ sugaru K_ρ körre

$$\iint_{K_\rho} e^{-x^2 - y^2} dx \, dy = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\varphi dr = \dots = 2\pi(1 - e^{-\rho^2}) \rightarrow \pi$$

ha $\rho \rightarrow +\infty$; mivel az integrandusz pozitív, az integrál konvergens.

2. $R < R'$ esetén az origó körüli R és R' sugaru körök közötti gyűrűn

$$\int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^p} d\varphi dr = 2\pi \int_R^{R'} \frac{dr}{r^{p-1}} = 2\pi \left[\frac{r^{2-p}}{2-p} \right]_R^{R'},$$

ha $p \neq 2$, s ennek $R' \rightarrow +\infty$ esetén véges a határértéke, ha $p > 2$. A $p < 2$ esetben tehát divergens az integrál, s könnyen láthatóan a $p=2$ esetben is:

$$\int_R^{R'} \frac{dr}{r} = \ln \frac{R'}{R} \rightarrow +\infty.$$

VIII. JELÖLÉSEK, TÁRGYMUTATÓ

1. JELÖLÉSEK

/A valós egyváltozós függvények differenciálszámítása és integrálszámítása c. jegyzetekben bevezetett és változatlan értelemben felhasznált jelölések felsorolását itt nem ismételjük meg./

x_S, y_S, z_X	az S súlypont koordinátái I.1.1.
M_{yz}, M_{xz}, M_{xy}	az yz, xz ill. xy síkra vonatkozó sztatikai nyomatékok I.1.1.
θ_y, θ_x	az xy síkban az y ill. x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok I.1.2.
N	négyszög /a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú zárt téglalap/ I.2.2.
T	tégla I.2.3, I.2.4.
$t(N)$	az N négyszög területe I.2.2.
$t(T)$	a T tégla térfogata I.2.3, I.2.4.
$b(A)$	az A halmaz belső területe /térfogata/ I.2.6, I.2.14.
$k(A)$	az A halmaz külső területe /térfogata/ I.2.6, I.2.14.
$t(A)$	a korlátos, mérhető A halmaz területe /térfogata/ I.2.11.
$F = \{A_1, \dots, A_n\}$	a mérhető $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaznak egymásba nem nyúló nem üres mérhető $A_1, \dots, A_n$ halmazokra való felosztása II.1.2.

$m_i = \inf f(A_i)$	az A_i halmazon felvett függvény- értékek halmazának alsó határa II.1.2.
$M_i = \sup f(A_i)$	az A_i halmazon felvett függvényér- tékek halmazának felső határa II.1.2.
$\int \dots \int_A f \, dx_1 \dots dx_n =$ $= \int_A f \, dt$	az m -változós f függvény $A \subset \mathbb{R}^m$ halmazon vett többes Riemann-in- tegrálja II.1.6.
$\iint_A f(x,y) \, dx \, dy = \int_A f \, dt$	A kétváltozós f függvény $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazon vett kettős integrálja II.1.6.
$\iiint_A f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz =$ $= \int_A f \, dt$	A háromváltozós f függvény $A \subset \mathbb{R}^3$ halmazon vett hármas integrálja. II.1.6.
N_x, N_y	$\mathbb{R}^2$ -ben x ill. y tengely felől néz- ve normáltartomány II.3.6.
$\Delta(u,v) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u,v)}$	Jacobi-determinánt II.3.11.
N_{xy}	$\mathbb{R}^3$ -ben xy síkra nézve normáltarto- mány II.4.4.
$\Delta(u,v,w) = \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u,v,w)}$	Jacobi-determinánt II.4.9.

2. TÁRGYMUTATÓ

additív halmazfüggvény III.3.3.
 additív halmazfüggvény /Jordan-féle értelemben/ III.3.5.
 additív halmazfüggvény szerinti Stieltjes-integrál III.3.4.
 additivitás /Jordan-mértéké/ I.2.18.
 additivitás /Riemann-integrálé/ II.2.2.

belső terület I.2.6.
belső térfogat I.2.14.

Darboux-féle alsó integrál II.1.7.
Darboux-féle felső integrál II.1.7.

egybevágó halmazok I.2.27.
egymásba nem nyúló halmazok I.2.5.

folytonos eloszlás a H halmazon III.3.7.

halmazfüggvény III.3.2.
hármass integrál gömbi koordinátás transzformációja
II.4.11.
hármass integrál hengerkoordinátás transzformációja
II.4.10.
hármass integrál kiszámítása II.4.2, II.4.7., II.4.8.
hármass integrál transzformációja II.4.9.

improprius /többes/ integrálok V.1.2, V.1.4.
improprius paraméteres integrálok IV.2.1, IV.3.2.

Jacobi-determináns II.3.11, II.4.9.
Jordan-értelemben additív halmazfüggvény III.3.5.
Jordan-mérhető halmaz I.2.11, I.2.13, I.2.17.

kettős integrál kiszámítása II.3.1, II.3.2, II.3.5,
II.3.8, II.3.9.
kettős integrál polárkoordinátás transzformációja
II.3.13.
kettős integrál transzformációja II.3.12.
kongruens leképezés I.2.27.
külső terület I.2.6.
külső térfogat I.2.14.

mérhető halmaz /Jordan-értelemben/ I.2.11, I.2.17. /nem
korlátos halmazé V.1.5./
mérhető halmaz felosztásának finomítása II.1.3.
mérhető halmaz felosztásainak közös finomítása II.1.3.
mérhető idomok I.2.23.
minden határon túl finomodó felosztássorozat II.1.3.

négyszög I.2.2.
négyszögrács I.2.8.
négyszögrácsához illeszkedő négyszög I.2.8.
normáltartomány / x ill. y tengelyre nézve/ II.3.6.
normáltartomány / xy sikra nézve/ II.4.4.

paraméteres integrálok IV.1.1. IV.1.5, IV.1.6, IV.3.1,
IV.3.2.

rácsegyenes I.2.8.
rácshipersik I.2.15.
rácsnégyyszög I.2.8.
rácssík I.2.15.
rácstégla I.2.15.
részletintegrál V.1.1, V.1.5.
Riemann-integrálhatóság mérhető halmazon II.1.5.

súlypont I.1.1, III.2.1.

sztatikai nyomaték I.1.1., III.2.1.
szubadditivitás I.2.18.

tégla I.2.3, I.2.4.
téglarácsra illeszkedő tégla I.2.15.
tehetetlenségi nyomaték I.1.2, III.2.2.
térfogati integrál II.1.6.
térfogatszámítás III.1.1, III.1.2, III.1.3, III.1.4.
terület /térfogat/ I.2.11. /I.2.17./
területi integrál II.1.6.
területszámítás III.1.6.
többdimenziós Jordan-térfogat I.2.17.
többes integrál kiszámítása II.5.1. II.5.3.
többes Riemann-integrál II.1.6.
többes improprius integrálok V.1.2.

zérus mértékű halmaz /Jordan-értelemben/ I.2.19.

TARTALOMJEGYZÉK

I. PONTALMAZOK JORDAN MÉRTÉKE	3
1. Kettős és hármas /Riemann-/ integrálra vezető néhány feladat	3
2. Ponthalmazok Jordan-mértéke	7
II. TÖBBES (RIEMANN-) INTEGRÁL	27
1. A többes /Riemann-/ integrál definíciója. Integrálható függvények főbb osztályai	27
2. A többes integrál tulajdonságai	35
3. A kettős integrál átalakítása kétszeres integrállá. A kettős integrál transzformációja.	39
4. Hármas integrál	59
5. Többes integrál kiszámítása	68
III. A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSÁNAK NÉHÁNY GEOMETRIAI ÉS FIZIKAI ALKALMAZÁSA	70
1. Terület- és térfogatszámítás	70
2. Homogén tömegeloszlású test tömegének, nyomatékainak, súlypontjának meghatározása	73
Elektrosztatikus potenciál meghatározása homogén töltéseloszlású test esetén	73
3. Additív halmazfüggvény szerinti Stieltjes-integrál. Alkalmazások.	77
IV. PARAMÉTERES INTEGRÁLOK	89
1. Közönséges paraméteres integrálok	89
2. Improprius paraméteres integrálok	95
3. Változó határu paraméteres (integrál)	100
V. TÖBBES IMPROPRIUS (INTEGRÁLOK)	104
VI. AJANLOTT IRODALOM	110
VII. UTMUTATÁS A FELADATMEGOLDÁSHOZ	111

VIII. JELÖLÉSEK, TÁRGYMATATÓ	120
1. Jelölések	120
2. Tárgymutató	121

