



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Csatár Györgyné - Máté László

SOROK, FÜGGVÉNYSOROK



Műegyetemi Kiadó, 2005.

Szerzők:

Dr. Csatár Györgyné

Dr. Máté László

© Dr. Csatár Györgyné, Dr. Máté László, 1980

(Kilencedik utánnnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **051356**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 11,2(A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 167/05

Tartalomjegyzék

I. NUMERIKUS SOROK (Csatár Györgyné)	5
1. Alapvető fogalmak és tételek	5
A végtelen sor definíciója, konvergenciája, divergenciája	5
A végtelen sorok néhány tulajdonsága	8
2. Konvergencia kritériumok	11
Pozitív tagu sorok konvergencia kritériumai	12
Összehasonlító kritériumok	13
A gyök és a hányados kritérium	17
Az integrálkritérium	23
Váltakozó előjelű (alternáló) sorok	16
Általános típusu sorok konvergencia vizsgálata	29
Abszolút és feltételes konvergencia	30
3. Műveletek sorokkal	31
Zárójelezés, zárójelfelbontás	32
A sortagok sorrendjének megváltoztatása	34
Konvergens sorok összeadása és kivonása	39
Konvergens sorok szorzása	40
Végtelen sorral végzett számításoknál elkövetett hiba becslése	45
II. FÜGGVÉNYSOROZATOK, FÜGGVÉNYSOROK (Csatár Györgyné)	49
1. Alapvető fogalmak és tételek	49
A konvergencia tartomány, a határ- és az összegfüggvény	49
Egyenletes konvergencia	51
Az egyenletes konvergenciával összefüggő tételek	57
III. HATVÁNYSOROK (Csatár Györgyné)	67
Definíció, konvergenciatartomány	67
A hatványsorok tulajdonságai	72
Műveletek hatványsorokkal	80

IV. TAYLOR-SOROK (Csatár Györgyné)	83
Definíció. Konvergencia	83
A Taylor-sorok tulajdonságai	87
Példák Taylor-sorba fejtésre	89
V. FOURIER-SOROK (Máté László)	98
A Fourier-együtthatók meghatározása; Példák	98
Egy minimum probléma. Feladatok	106
A Fourier-sor konvergenciája; Feladatok	109
A Fourier-sor komplex alakja	115
Kapcsolat a lineáris algebrával	116
Ortogonalis függvényrendszerek. Példák	120
A kitűzött feladatok megoldása	125

I. NUMERIKUS SOROK

1. ALAPVETŐ FOGALMAK ÉS TÉTELEK

A végtelen sor definíciója, konvergenciája és divergenciája

Az

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

végtelen számsorozat segítségével felírhatjuk az

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1.1)$$

ugynevezett végtelen sort.

Az összeadás azonban csak véges számú összeadandóra értelmezett művelet, így az (1.1) alatti kifejezésnek nincs közvetlen értelme. Ahhoz, hogy az összeadást végtelen sok tagra kiterjeszthessük, egy új fogalmat vezetünk be: a részletösszegek sorozatát. E sorozatot a végtelen sorhoz az alábbi módon rendeljük hozzá:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

...

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

...

1.1 Definíció: A végtelen sor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata konvergens. A részletösszegek sorozatának határértékét tekintjük a végtelen sor összegének.

Ha a részletösszegek sorozata divergens, akkor a végtelen sort is divergensnek nevezzük.

Jelölések: Az (1.1) alatti végtelen sor jelölése $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (amit szövegen belül sokszor csak $\sum a_n$ alakban fogunk írni).

Az n-edik részletösszeg rövidebb felírás módja: $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Példák

1. Az

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

sor divergens, hiszen a részletösszegek sorozatának két sűrűsödési értéke van:

$$s_{2k} = 0; \quad \text{és} \quad s_{2k+1} = 1; \quad (k=1, 2, \dots)$$

2. A harmonikus sornak nevezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

sor szintén divergens. Ezt az alábbi módon láthatjuk be:

A sor tagjai pozitívak, így a részletösszegek sorozata monoton növvő. Kérdés csak az, hogy korlátos lesz-e a részletösszegek sorozata? Ennek megvizsgálásához felhasználjuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \quad (1.2)$$

(a fenti egyenlőtlenséghez úgy jutunk, hogy a k tagu összeg minden összeadandója helyébe a legkisebb összeadandót: $\frac{1}{2k}$ -t írjuk).

Ezek után tekintsük a harmonikus sor n -edik részletösszegét, ahol $n \geq 2^m$: ($m = 1, 2, 3, \dots$)

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) + \dots + \frac{1}{n}.$$

A zárójellel körülfogott tagok indexei 2-nek két egymást követő hatványa közé esnek. Ezekre a bezárójelezett összegekre alkalmazzuk az (1.2) egyenlőtlenséget:

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} > m \cdot \frac{1}{2} \quad (1.3)$$

Ebből már adódik, hogy s_n nem lehet korlátos, hiszen tetszőleges $K > 0$ esetén $m > 0$ egész szám megválasztható úgy, hogy

$$m \cdot \frac{1}{2} > K$$

teljesüljön. Így viszont

$$s_n > m \cdot \frac{1}{2} > K$$

minden $n \geq 2^m$ -re (1.3) miatt.

3. Vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^n + \dots$$

végtelen geometriai sor.

Az n -edik részletösszeg felírható az ismert formulával:

$$s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1) .$$

Elvégezve az a -val való beszorzást és a törtet két részre bontva:

$$s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^n$$

adódik. Látható, hogy q^n viselkedésén múlik, van-e s_n -nek $n \rightarrow \infty$ esetén véges határértéke.

a) Ha $|q| < 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Igy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q} .$$

b) Ha $q > 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

Igy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty, \quad \text{illetve} \quad -\infty,$$

a sor első tagjának előjelétől függően. Tehát a sorösszeg nem létezik.

c) Ha $q = 1$, akkor a geometriai sor

$$a + a + a + \dots$$

alakú, így

$$s_n = n \cdot a ,$$

amiből

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, illetve $-\infty$, az első tag előjelétől függően.

Tehát a sorösszeg nem létezik.

d) Ha $q \leq -1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nem létezik. (Ennek speciális esete az 1. példa, ahol $a = 1$ és $q = -1$.)

Összefoglalva: a végtelen mértani sor akkor és csak is akkor konvergens, ha $|q| < 1$ és ilyenkor

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

4. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

sorról belátható, hogy konvergens.

Bontsuk fel a sor tagjait az alábbi módon:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

A sor n -edik részletösszege:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Innen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Tehát a sor konvergens és összege 1.

A végtelen sorok néhány tulajdonsága

1.2 Tétel: Egy végtelen sor konvergenciáját, ill. divergenciáját nem befolyásolja, ha véges számú tagot elhagyunk belőle, illetve, ha véges számú tagot megváltoztatunk a sorban. (Természetesen az összeg megváltozik!)

Más szóval ez azt jelenti, hogy azok a sorok, amelyek csak az "elejükben" különböznek egymástól, egyszerre konvergenssek, ill. divergenssek.

A tétel könnyen belátható, Hagyjuk el az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1.4)$$

sorból az első m darab tagot (m rögzített szám!) Így az

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots \quad (1.5)$$

maradéksor keletkezik.

Állítás: a) ha az (1.4) sor konvergens, akkor az (1.5) sor is konvergens és megfordítva:

b) ha az (1.5) sor konvergens, akkor az (1.4) sor is az.

Bizonyítás: a) Tegyük fel, hogy (1.4) konvergens. Vizsgáljuk meg az (1.5) sor k -adik részletösszegét:

$$s'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} \quad (\text{ahol } m \text{ rögzített!})$$

Írjuk fel s'_k -t az (1.4) sor részletösszegeinek a segítségével is:

$$s'_k = s_{m+k} - s_m \quad (1.6)$$

Mivel feltettük, hogy (1.4) konvergens, így

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{m+k} = s$$

határérték létezik. Ugyanakkor kikötöttük, hogy m rögzített szám, így s_m egy meghatározott véges szám. Ezért (1.6)-ból

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s'_k = s - s_m$$

véges határérték létezik, tehát az (1.5) sor konvergens.

b) Megfordítva: tegyük fel, hogy (1.5) konvergens. Ekkor belátható, hogy (1.4) sor is az. Hiszen

$$s_n = s_m + s'_{n-m} \quad (n > m)$$

alapján az előbbi gondolatmenettel ez azonnal következik.

1.3 Definíció: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor m -edik maradéktagjának a sor

összegének és az m -edik részletösszegének a különbségét nevezzük:

$$r_m = s - s_m, \quad (1.7)$$

ahol s_m az $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens sor m -edik részletösszege. Így:

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots$$

Divergens sorra a maradéktag fogalmának nincs értelme.

1.4 Tétel: A konvergens sor m -edik maradéktagja $m \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart, vagyis:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0.$$

Bizonyítás: A $\sum a_m$ sor konvergenciája miatt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s.$$

Igy az (1.7) összefüggésből:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = s - s = 0. \quad \square$$

A tétel folyamánya: egy konvergens sor összegét tetszőleges pontossággal ki lehet számítani alkalmasan nagy indexű részletösszege segítségével. Hiszen elég nagy m esetén a maradéktag bármely $\varepsilon > 0$ számnál kisebbé válik.

1.5 Tétel: Ha egy konvergens sor valamennyi tagját c számmal megszorozzuk, a sor konvergens marad és összege az eredeti sor c -szerese lesz, vagyis

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ugyanis a $\sum c \cdot a_n$ sor n . részletösszege $s_n'' = c \cdot s_n$, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n'' = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \quad \square$$

1.6 Tétel: Ha egy sor konvergens, akkor tagjainak sorozata null-sorozat, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Bizonyítás: a_n felírható két egymást követő részletösszeg különbségként:

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

A sor konvergenciája miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s - s = 0.$$

A tétel más megfogalmazásban így szól:

1.7 Tétel: Egy sor konvergenciájának szükséges feltétele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

E feltétel azonban korántsem elégséges a konvergenciához, lásd például a harmonikus sort (2. példa).

MEGJEGYZÉS: A fenti tételt később az általános típusú soroknál az 1.23 Tétel folyományaként más módszerrel is bebizonyítjuk.

2. KONVERGENCIA KRITÉRIUMOK

Az 1. fejezetben közölt példák közül az 1., a 3. és a 4. feladatban szereplő sorok részletösszegeit elő tudtuk állítani zárt alakban, így a definíció alapján el lehetett dönteni, hogy konvergens, ill. divergens-e. Sőt konvergencia esetén a sor összegét, - mint a részletösszegek sorozatának határértékét, - ki is lehetett számítani.

A részletösszegek azonban többnyire nem írhatók fel zárt alakban, így a sorok konvergenciájának vizsgálatához a definíció kevés segítséget nyújt. Szükség van ezért ún. konvergencia kritériumokra. E kritériumok használhatósága szempontjából különválasztjuk a pozitív tagu sorokat és a váltakozó előjelű sorokat az általános típusu soroktól. (E kritériumok egy részére később az I.3 utolsó fejezetében a sorösszeg közelítő meghatározásánál /az elkövetett hiba becslésénél/ még visszatérünk.)

Pozitív tagu sorok konvergencia és divergencia kritériumai

Pozitív tagu minden olyan sor, amelynek valamennyi tagja pozitív szám, vagyis

$$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

A pozitív tagu sorok részletösszegei szigorúan monoton növekvő sorozatot alkotnak $a_n > 0$ miatt. Így e sorok konvergenciája a részletösszegek sorozatának korlátosságán múlik. (Lásd "Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása" c. jegyzet II. 4.4 pont.)

Kimondhatjuk tehát a pozitív tagu sorok konvergenciájának szükséges és elégséges feltételét:

1.8 Tétel: Egy pozitív tagu sor akkor és csakis akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

Ha a részletösszegek sorozata nem korlátos, akkor a pozitív tagu sor $+\infty$ -hez divergál.

Az 1.8 Tétel alkalmazható nem negatív tagu sorokra is, ahol

$$a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

A "zérus tagok" ugyanis a részletösszegek sorozatának korlátosságát nem befolyásolják, így a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$$

sor helyett a zérus tagok elhagyásával keletkező pozitív tagu sort vizsgálhatjuk.

Az 1.8 Tétel a csupa negatív tagból álló sorokra ugyancsak alkalmazható, hiszen a tagokat (-1) -gyel megszorozva, - ami a konvergenciát nem befolyásolja (lásd 1.5 Tétel), - a sor pozitív tagúvá válik.

1.9 MEGJEGYZÉS: A továbbiakban gyakran kihasználjuk majd az 1.2 Tételt, nevezetesen azt, hogy véges sok tag viselkedése nem befolyásolja a sor konvergencia vagy divergencia mivoltát. A konvergencia vizsgálat szempontjából tehát mindegy, hogy a kritériumokban szereplő feltételek $n > 1$ -től, vagy csak valamely $n > N$ indextől kezdve teljesülnek.

Összehasonlító kritériumok

Az 1.8 Tételből számos elégséges feltétel származtatható a pozitív tagu sorok konvergenciájának eldöntésére. Ezek egy csoportját képezik az úgynevezett összehasonlító kritériumok, amelyek a vizsgált sort egy már ismert viselkedésű pozitív tagu sorral hasonlítják össze.

1.10 Tétel: Majoráns Kritérium: Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens pozitív tagu sor. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagu sor tagjai egy bizonyos N indextől kezdve minden $n > N$ esetén eleget tesznek az

$$a_n \leq c_n$$

egyenlőtlenségnek, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

A bizonyítás során felhasználjuk az 1.9 Megjegyzésben mondottakat és feltesszük, hogy a fenti egyenlőtlenség már $n = 1$ -től kezdve érvényes. Ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ sor } n\text{-edik részletösszege: } A_n \text{ és a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ sor } n\text{-edik részletösszege: } C_n \text{ között a fenti egyen-}$$

lőtlenség miatt

$$A_n \leq C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.8)$$

kapcsolat áll fenn.

Mivel feltételünk értelmében $\sum c_n$ konvergens, így részletösszegeinek sorozata korlátos, amiből az (1.8) miatt A_n korlátossága is adódik. $\square$

Majoráns sornak alkalmas sorok például az alábbiak:

a) Tetszőleges pozitív tagu konvergens geometriai sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n \quad (a > 0 \quad \text{és} \quad 0 < q < 1)$$

(lásd 3. példa.)

b) A konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{sor. (lásd 4. példa.)}$$

c) A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\text{ahol } \alpha > 1) \quad \text{tipusu sorok, amelyek konver-}$$

genciáját e fejezet végén, integrálkritériummal bizonyítjuk.

1.11 Tétel: Minoráns kritérium: Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens pozitív tagu sor. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagu sor tagjai bizonyos N indextől kezdve eleget tesznek az

$$a_n \geq d_n \quad (n > N)$$

egyenlőtlenségnek, akkor a $\sum a_n$ sor is divergens. A bizonyítás gondolatmenete az előző tételéhez hasonló:

$$\text{a } \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{ sor részletösszegeinek sorozata } \underline{\text{nem korlátos}},$$

ebből következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegeinek sorozata sem lehet az. $\square$

Minoráns sornak alkalmas sorok például az alábbiak:

a) Tetszőleges pozitív tagu divergens geometriai sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n \quad (a > 0 \quad \text{és} \quad q > 1) \quad (\text{lásd 3. példa})$$

b) Az ugyancsak divergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{harmonikus sor.} \quad (\text{lásd 2. példa})$$

Az összehasonlító kritériumok egy másik típusához jutunk, ha a vizsgált pozitív tagu sor két egymást követő tagjának hányadosát hasonlítjuk össze egy ismert pozitív tagu sor megfelelő tagjainak a hányadosával.

1.12 Tétel. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens és $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens pozitív tagu sor.

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagu sor tagjai bizonyos N indextől kezdve az

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad (n \geq N) \quad (1.9)$$

egyenlőtlenségnek tesznek eleget, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Viszont, ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n} \quad (n \geq N) \quad (1.10)$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

Bizonyítás: Figyelembe véve a fejezet elején tett 1.9 Megjegyzést, feltesszük, hogy a fenti egyenlőtlenségek minden n -re teljesülnek. Így az (1.9) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} \leq \frac{a_n}{c_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Tehát az $\frac{a_n}{c_n}$ sorozat monoton fogyó, ezért

$$\frac{a_n}{c_n} \leq \frac{a_1}{c_1}, \quad (n = 2, 3, \dots),$$

amiből

$$a_n \leq \frac{a_1}{c_1} \cdot c_n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

adódik.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort tehát az

$$\frac{a_1}{c_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

konvergens sor majorálja, így $\sum a_n$ konvergens. $\square$

Viszont, ha az (1.10) egyenlőtlenség teljesül, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort az

$$\frac{a_1}{d_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

divergens sor minorálja, tehát $\sum a_n$ maga is divergens.

Példák:

5. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

sor divergens, ugyanis

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$$

miatt a divergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

sor minorálja. (Lásd 2. példa)

6. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens, ugyanis majorálható a konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ sorral
(lásd 4. példa), hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor n -edik részletösszege:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

7. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sor $\alpha < 1$ esetén divergens, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens sor minorálja.
(Lásd 2. példa.)

8. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^k}$$

sor konvergens, mert a

$$\pi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

konvergens geometriai sor majorálja, hiszen

$$0 < \sin \frac{\pi}{2^k} < \frac{\pi}{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

A gyök és a hányados-kritérium

Ha az összehasonlító kritériumokban a

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots \quad (0 < q < 1) \quad (1.11)$$

geometriai sort használjuk majoráns konvergens sorként, illetve az

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad (1.12)$$

sor divergens minoráns sorként, akkor újabb kritériumokhoz jutunk.

1.13 Tétel: (Cauchy-féle gyökkritérium) Ha a $\sum a_n$ pozitív tagu sorban bizonyos N indextől kezdve minden $n > N$ esetén

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q, \quad \text{ahol } 0 < q < 1,$$

akkor a $\sum a_n$ sor konvergens.

Ha viszont

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \quad (n > N)$$

akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

Bizonyítás: Ha

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q, \quad \text{vagyis} \quad a_n \leq q^n,$$

ahol $0 < q < 1$, akkor ez azt jelenti, hogy a $\sum a_n$ sort az (1.11) konvergens geometriai sor majorálja.

Viszont, ha

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \quad \text{vagyis} \quad a_n \geq 1,$$

akkor a $\sum a_n$ sor az (1.12) divergens sorral minoráltuk.

MEGJEGYZÉS: A divergenciához már az is elegendő, ha végtelen sok n -re fennáll az

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

egyenlőtlenség.) Tehát nem kell valamely N -től kezdve valamennyi n -re teljesülnie!)

Bizonyítás: Belátható, hogy ha a feltétel teljesül, akkor a részletösszegek sorozata nem korlátos. Ugyanis bármely K pozitív egész szám esetén megválaszthatjuk az m indexet olyan nagynak, hogy az s_m részletösszegbe legalább K darab olyan tag jusson, amelyre $a_n \geq 1$. Ekkor

$$s_m \geq K,$$

vagyis a részletösszegek sorozata nem korlátos, emiatt a sor divergens. $\square$

A Cauchy-féle gyökkritériumból származik az

1.14 Tétel: Ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = C, \text{ ahol } C < 1,$$

határérték létezik, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens.
Ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = C, \text{ ahol } C > 1$$

határérték létezik, vagy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty,$$

akkor a $\sum a_n$ pozitív tagu sor divergens.

Bizonyítás: a határérték definíciója értelmében bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan N index, hogy minden $n > N$ -re fennálljon a

$$C - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < C + \varepsilon \quad (1.13)$$

összefüggés.

a) $C > 1$ esetében válasszuk meg $\varepsilon > 0$ -t úgy, hogy

$$0 < \varepsilon < C - 1$$

legyen, amiből

$$C - \varepsilon > 1$$

adódik. Ekkor (1.13) miatt van olyan N , hogy

$$1 < \sqrt[n]{a_n} \quad (n > N)$$

egyenlőtlenség teljesül. Tehát a $\sum a_n$ sor az 1.13 Tétel értelmében divergens. $\square$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ esetén az $\sqrt[n]{a_n}$ sorozat nem lehet felülről korlátos, ezért itt is léteznie kell olyan N indexnek, hogy

$$1 < \sqrt[n]{a_n} \quad (n > N)$$

legyen, tehát a $\sum a_n$ sor divergens. $\square$

c) $C < 1$ esetben $\varepsilon > 0$ -t megválasztjuk úgy, hogy

$$0 < \varepsilon < 1 - C$$

legyen. Ekkor

$$q = C + \varepsilon < 1$$

választással (1.13) egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1 \quad (n > N).$$

Tehát a $\sum a_n$ sor az 1.13 Tétel értelmében konvergens. $\square$

A D'Alembert-féle hányados kritériumhoz jutunk, ha az 1.12 Tételben konvergens sorként az (1.11) geometriai sort, divergens sorként pedig az (1.12) sort alkalmazzuk:

1.15 Tétel: Ha $a \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagu sorban bizonyos N indextől kezdve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad (n \geq N),$$

akkor a $\sum a_n$ sor konvergens, viszont, ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad (n \geq N),$$

akkor a sor divergens.

A tétel második fele tulajdonképpen azt mondja ki, hogy

$$a_{n+1} \geq a_n,$$

vagyis a sor tagjai monoton növény sorozatot alkotnak. Ilyenkor a konvergencia szükséges feltétele sem teljesül, (lásd 1.6 Tétel) hiszen egy pozitív tagu, monoton növény sorozat nem lehet null-sorozat!

1.16 MEGJEGYZÉS: A hányados és gyökkritériumoknál egyaránt a feltételeknek egy $0 < q < 1$ konstansra kell teljesülniük. Korántsem elegendő ugyanis azt belátni, hogy

$$\sqrt[n]{a_n} < 1, \text{ ill. } \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Jól illusztrálja ezt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor, amelyre $\sqrt[n]{a_n}$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

is kisebb 1-nél, holott a sor divergens. (Lásd 2. példa.)

Az 1.15 Tételből származtatható az

1.17 Tétel: Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagu sornál

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = C, \quad \text{ahol } C > 1$$

határérték létezik, vagy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty,$$

akkor a sor divergens.

A tétel bizonyítása lényegében megegyezik az 1.14 Tétel bizonyításával.

1.18 MEGJEGYZÉS: Az 1.14 illetve az 1.17 Tétel $C = 1$ határérték esetében nem mond semmit a sor konvergenciájáról. Legfeljebb abban az esetben tudjuk, hogy a sor divergens, ha a $C = 1$ határértéket felülről, vagyis 1-nél nagyobb számokon át közelíti meg az $\sqrt[n]{a_n}$ illetve az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ kifejezés.

1.19 MEGJEGYZÉS: Az 1.14 és az 1.17 Tételek általánosíthatók az alábbi módon:

Ha az $\sqrt[n]{a_n}$, ill. az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozatnak nincs limese, viszont

$\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, ekkor a sor konvergens,

$\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$, ekkor a sor divergens.

Hasonlóképpen

$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ esetén a sor konvergens,

$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ esetén a sor divergens.

Természetesen a $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ feltétel a konvergenciáról nem mond semmit. Ezzel szemben a divergenciához már az is elég, ha $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, hiszen ilyenkor végtelen sok n -re $a_n > 1$ teljesül. (Lásd az 1.13 Tételnél tett megjegyzést!)

Példák:

9. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ sor konvergens, ugyanis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^k} = \frac{(n+1)^{k-1}}{n^k},$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1.$$

10. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ sor is konvergens, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Az integrálkritérium

Befejezésül az integrálkritériumot ismertetjük, amely a vizsgált sort egy alkalmasan megválasztott függvény improprius integráljához hasonlítja.

1.20 Tétel: Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív, monoton csökkenő tagokból

álló sor és $f(x)$ ugyancsak pozitív, monoton csökkenő függvény ($x \geq 1$ -re), amely minden n -re

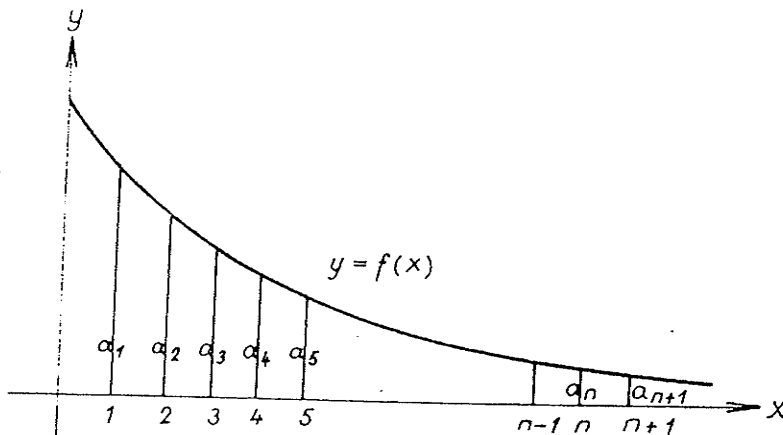
$$f(n) = a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

értéket vesz fel: (Lásd 1. ábra)

A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha az

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad (1.14)$$

improprius integrál konvergens.



1.1 ábra

Bizonyítás: Feltételünk értelmében $f(x)$ monoton csökken, ezért

a $k \leq x \leq k+1$ intervallumban $f(x) \leq a_k$, viszont

a $k-1 \leq x \leq k$ intervallumban $f(x) \geq a_k$. ($k = 2, 3, \dots$).

Emiatt az egységnyi intervallumon vett integráljaik között

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k \leq \int_{k-1}^k f(x)dx \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (1.15)$$

kapcsolat érvényes. Összegezzük az (1.15) alatti egyenlőtlenséget $k = 2, 3, \dots, n$ értékekre:

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \leq a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx.$$

Innen egyrészt

$$s_n \leq \int_1^n f(x)dx + a_1, \quad (1.16)$$

másrészt

$$s_n \geq a_1 + \int_2^{n+1} f(x)dx \quad (1.17)$$

adódik.

Ha az (1.14) improprius integrálnak van véges határértéke, akkor

$\int_1^n f(x)dx$ korlátos és így (1.16) miatt s_n szintén korlátos, tehát a $\sum a_n$ sor konvergens. (Lásd 1.8 Tétel.) $\square$

Viszont, ha az (1.14) integrál divergens, vagyis értéke $\rightarrow \infty$, akkor tetszőleges $K > 0$ számhoz megválasztható n értéke úgy, hogy

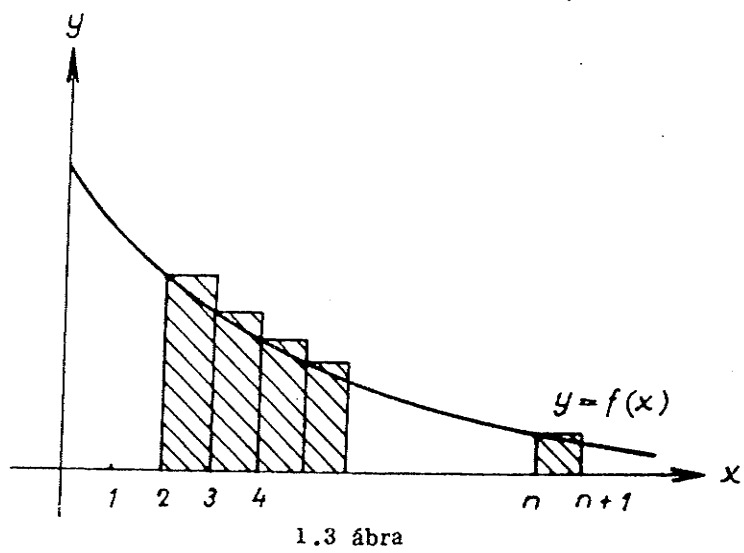
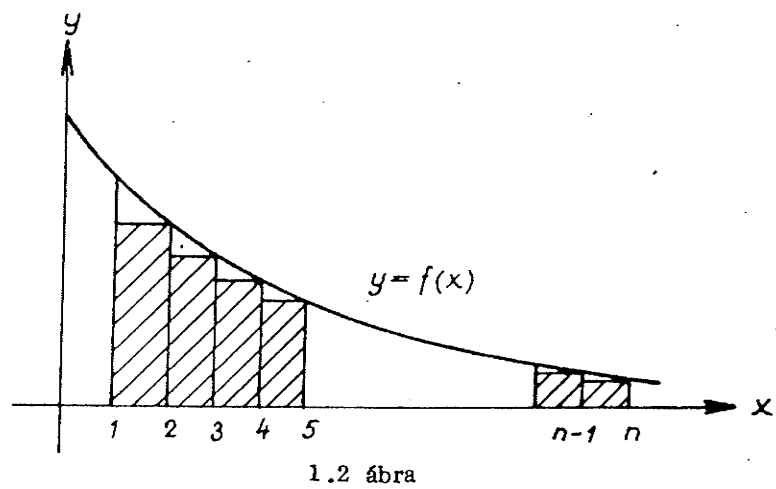
$$\int_2^{n+1} f(x)dx > K$$

legyen. Ekkor az (1.17) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$s_n \geq a_1 + \int_2^{n+1} f(x)dx > a_1 + K$$

is fennáll, tehát a részletösszegek sorozata nem korlátos, amiből $\sum a_n$ sor divergenciája már következik. (Lásd 1.8 Tétel.) $\square$

Az (1.16) és az (1.17) egyenlőtlenségeket a 2. ill. a 3. ábrán szemléltetjük.



Példák:

11. A $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ sor divergens, ugyanis

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln \ln x]_2^t = +\infty$$

12. Milyen valós α értékekre konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sor?

a) Ha $\alpha = 1$, akkor a $\sum \frac{1}{n}$ divergens sort kapjuk. E sor divergenciáját integrálkritériummal is beláthatjuk:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln x]_1^t = +\infty$$

b) Ha $\alpha \neq 1$, akkor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) - \frac{1}{1-\alpha}$$

Ha $\alpha > 1$, akkor az integrál és vele együtt a sor is konvergens,
Ha $\alpha < 1$, akkor az integrál és vele együtt a sor is divergens.

Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

Váltakozó előjelűnek nevezzük a sort, ha az egymást követő tagok előjele felváltva pozitív, ill. negatív. A

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot c_n + \dots, \quad \text{ahol}$$

$$c_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

alternáló sor. (Természetesen e sor (-1) -szerese is alternáló sor!)

A váltakozó előjelű sorok konvergenciájára egy igen egyszerű elégséges feltétel mondható ki:

1.21 Tétel: (Leibnitz kritérium) Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékéből képezett sorozat monoton fogyó, vagyis

$$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots c_n \geq c_{n+1} \geq \dots \quad (1.18)$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, \quad (1.19)$$

akkor a sor konvergens.

Bizonyítás: 1. lépés: belátjuk, hogy a páros indexű részletösszegek sorozata monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens.

$$s_{2k+2} = s_{2k} + (c_{2k+1} - c_{2k+2}) \geq s_{2k},$$

hiszen (1.18) miatt $(c_{2k+1} - c_{2k+2}) \geq 0$. Tehát a sorozat monoton nő.

Visszont e sorozat felülről korlátos, hiszen

$$s_{2k} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) \dots - c_{2k} \leq c_1,$$

ugyanis (1.18) miatt minden zárójelben nem negatív szám áll.

A páros indexű részletösszegek sorozata tehát konvergens:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = s$$

határérték létezik.

2. lépés: belátjuk, hogy a páratlan indexű részletösszegek sorozata ugyanehhez a határértékhez tart. Irjuk fel e részletösszegeket a páros indexűek segítségével:

$$s_{2k-1} = s_{2k} - c_{2k}.$$

Ebből

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = s,$$

hiszen (1.19) miatt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k} = 0. \quad \square$$

Példák:

13. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ sor tagjainak abszolút értéke monoton fogyó null-sorozatot képez, tehát a sor konvergens.

14. Ugyancsak belátható a

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

alternáló sor konvergenciája Leibnitz kritériummal.

1.22. MEGJEGYZÉS: A Leibnitz kritérium nem alkalmazható abban az esetben, ha a tagok sorozata nem monoton fogyó! Egy példával szemléltetjük ezt:

15. Az

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

váltakozó előjelű sor esetében

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0.$$

A monoton fogyással viszont baj van! Igaz, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}+1},$$

viszont a rákövetkező tag esetében:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}.$$

Tehát a Leibnitz kritérium nem használható. Egyébként a sorról könnyen belátható, hogy divergens. Ha kettesével zárójelek közé fogjuk a sor tagjait, egy régi ismerőshöz jutunk:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1} \quad (\text{lásd 2. példa})$$

(A konvergenciát a zárójelezéssel nem "ronthattuk el", lásd később 1.27 Tételt!)

MEGJEGYZÉS: Egy alternáló sor természetesen lehet akkor is konvergens, ha a tagok abszolút értékéből képezett sorozat nem monoton. Például:

16.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k} + \dots$$

A sor tagjainak abszolút értékéből képezett sorozat nem monoton fogyó, hiszen

$$\frac{1}{3^k} < \frac{1}{2^{k+1}} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

A sor mégis konvergens, mert részletösszegei két konvergens geometriai sor részletösszegeinek különbségeként írhatók fel.

Általános típusú sorok konvergencia vizsgálata

Amennyiben a sortagok előjele tetszőleges, nem alkalmazhatjuk sem a pozitív tagú sorokra, sem az alternáló sorokra vonatkozó kritériumokat. Ilyenkor a konvergencia eldöntése csupán a részletösszegek vizsgálatán alapulhat. (Lásd 1.1 Definíció.)

A részletösszegek sorozatára viszont kimondható a sorozatok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle szükséges és elégséges feltétel. (Lásd VALÓS EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMITÁSA c. jegyzet II: (5.4) pont.)

1.23 Tétel: A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy valahányszor $n > N(\varepsilon)$ és $k \geq 1$, mindannyiszor teljesül az

$$|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon,$$

más szóval az

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.

MEGJEGYZÉS: A tétel természetesen alkalmazható pozitív tagú és alternáló sorokra is!

A tétel folyománya: Ha egy sor konvergens, akkor tagjai nullsorozatot alkotnak.

Bizonyítás: Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens sor, akkor eleget tesz a Cauchy-féle feltételnek $k=1$ választás mellett is. Így

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon) \text{ és } \varepsilon > 0 \text{ tetszőleges})$$

adódik. Tehát a sortagok valóban nullsorozatot alkotnak. (Ugyanezt már korábban más módon is bebizonyítottuk az 1.6 Tételnél.)

Abszolút és feltételes konvergencia

Az előző pontban ismertetett 1.23 Tétellel általában nehéz a konvergencia megállapítása. Ezért gyakran konvergencia helyett abszolút konvergenciát vizsgálunk, vagyis a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ általános típusú sor helyett a tagok abszolút értékéből képezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

sorra alkalmazzuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó kritériumok valamelyikét. Ugyanis kimondható az alábbi tétel:

1.24 Tétel: Ha $\sum |a_n|$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.

Bizonyítás: Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens, akkor az 1.23 Tétel értelmében bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon \quad (1.20)$$

minden $n > N(\varepsilon)$ -re és $k \geq 1$ -re. Viszont ismeretes az összeg abszolút értékére vonatkozó egyenlőtlenség:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}|$$

Ezt az egyenlőtlenséget egybevetve (1.20)-szal

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon \quad \text{adódik.}$$

Tehát a $\sum a_n$ sor eleget tesz a Cauchy-féle feltételnek, így konvergens. □

1.25 Definíció: A $\sum a_n$ sort abszolút konvergensnek nevezzük,

ha a tagok abszolút értékéből képezett $\sum |a_n|$ sor konvergens.

Az 1.24 Tétel tehát kimondható így is. Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

A tétel nem fordítható meg! A $\sum a_n$ sor konvergenciájából nem következik a sor abszolút konvergenciája.

1.26 Definíció: Azokat a konvergens sorokat, amelyek nem abszolút konvergensnek, feltételesen konvergens soroknak nevezzük. Feltételesen konvergens példák:

$$A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \text{ sor. (Lásd 2. példa, illetve 13. példa)}$$

$$A \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n \cdot \ln n}: \text{ (Lásd 11. példa, illetve 14. példa)}$$

A feltételes konvergenciára később még visszatérünk. (Lásd hátrább az 1.31 Tételt.)

3. MŰVELETEK SOROKKAL

Az alábbiakban arra a kérdésre keressük a választ, hogy a véges összegekre vonatkozó műveleti szabályok érvényben maradnak-e konvergens végtelen sorokra is.

Zárójelezés, zárójelfelbontás

A véges számú összeadandóból álló összeg asszociatív tulajdonsága érvényben van konvergens végtelen sorokra is. Erre vonatkozik az

1.27 Tétel: Ha az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2} + \dots \quad (1.21)$$

konvergens sor tagjait tetszőleges módon zárójelezzük, (anélkül, hogy a tagok sorrendjét megváltoztatnánk), az így nyert

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots \quad (1.22)$$

sor is konvergens és összege megegyezik az (1.21) sor összegével.

Bizonyítás: Az (1.21) sor konvergens, tehát részletösszegei konvergens sorozatot alkotnak. A zárójelezés miatt az (1.22) sor részletösszegei az (1.21) sor részletösszegei sorozatának egy részsorozata csupán, így konvergenciája az (1.21) konvergenciájából már következik.

A tétel nem fordítható meg! Ha egy konvergens sor tagjainak egyes csoportjait zárójelek fogják közre, akkor e zárójelek általában nem hagyhatók el, hiszen ezzel a részletösszegek sorozata bővül és így előfordulhat, hogy a zárójelek elhagyásával nyert sor divergense válik. Egyszerű példa erre az alábbi:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

sor konvergens, hiszen minden tagja $(1 - 1) = 0$. Sőt összege is számolható hiszen $\sum (1 - 1) = 0$.

Viszont a zárójelek elhagyásával nyert sor:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

divergens. (Lásd 1. példa.)

Megadható több olyan feltétel is, amelynek teljesülése esetén a konvergens sorban a zárójelek elhagyhatók és az így nyert sor is konvergens marad. E feltételek egyike így szól:

1.28 Tétel: Az

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{t_1}) + (a_{t_1+1} + \dots + a_{t_2}) + \dots + \dots \quad (1.23)$$

$$+ (a_{t_{k-1}+1} + \dots + a_{t_k}) + \dots + (a_{t_k+1} + a_{t_k+2} + \dots + a_{t_{k+1}}) + \dots$$

konvergens sorban a zárójelek elhagyhatók, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan N index, hogy minden $k > N$ esetén a k -adik zárójelben levő kifejezésre

$$|a_{t_k+1}| + |a_{t_k+2}| + \dots + |a_{t_{k+1}}| < \varepsilon \quad (1.24)$$

teljesül.

Bizonyítás: Jelöljük az (1.23) sor összegét S -sel, a k . részlétösszegét pedig S_k -val.

$$S_k = (a_1 + \dots + a_{t_1}) + \dots + (a_{t_{k-1}+1} + \dots + a_{t_k}),$$

Mivel S_k véges számú összeadandóból áll, így a zárójelek elhagyhatók:

$$S_k = a_1 + \dots + a_{t_1} + \dots + a_{t_k}.$$

Feltételünk értelmében az (1.23) sor konvergens, így bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $M(\varepsilon)$ szám, hogy $k > M$ esetén

$$|S - S_k| = |S - (a_1 + a_2 + \dots + a_{t_k})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.25)$$

teljesüljön.

Válasszuk meg k -t olyan nagynak, hogy (1.24) is teljesüljön, vagyis a k -adik zárójelben levő elemek abszolút értékének összege is $\frac{\varepsilon}{2}$ -nél kisebb legyen.

Írjuk fel ezek után a zárójelek elhagyásával nyert sor n -edik részlétösszegét, ahol $t_k < n \leq t_{k+1}$ (vagyis a_n a k . zárójelben szerepel).

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{t_k} + a_{t_k+1} + \dots + a_n.$$

Becsüljük meg az (1.23) sor összegének S -nek és s_n -nek az eltérését:

$$|S - s_n| = |S - (a_1 + a_2 + \dots + a_{t_k} + a_{t_k+1} + \dots + a_n)|.$$

Használjuk fel az ismert összefüggést: $(|a - b| \leq |a| + |b|)$ és az (1.24), valamint az (1.25) egyenlőtlenségeket:

$$|S - s_n| \leq |S - (a_1 + a_2 + \dots + a_{t_k})| + |a_{t_k+1} + \dots + a_n| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + |a_{t_k+1}| + \dots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ha k elég nagy és így $t_k < n \leq t_{k+1}$ miatt n is elég nagy.

Ezzel beláttuk, hogy a tett feltevések mellett

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S,$$

vagyis a zárójelek felbonthatók és az így nyert konvergens sor összege megegyezik az (1.23) sor összegével. $\square$

A fenti bizonyítással azt is beláttuk, hogy a zárójelek elhagyásával nyert sor összege megegyezik az eredeti sor összegével. Ez általában így mondható ki:

1.29 Tétel: Amennyiben a zárójelek elhagyásával nyert sor konvergens, akkor ennek összege megegyezik a zárójelekkel rendelkező sor összegével.

Ugyanis a zárójelek elhagyásával a részletösszegek sorozata bővül és ha ez a sorozat konvergens, akkor határértéke szükségképpen meg kell hogy egyezzen részsortozatának, - vagyis a zárójeles sor részletösszegei sorozatának, - határértékével. $\square$

A sortagok sorrendjének megváltoztatása

A véges számú összeadandóból álló összeg kommutatív tulajdonságával a konvergens végtelen sorok általában nem rendelkeznek.

Definíció: A

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

konvergens sor átrendezése alatt azt a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k + \dots$$

sorrt értjük, amelyben az eredeti sor minden tagja egyszer és csakis egyszer szerepel.

1.30 Tétel: Ha a sor abszolút konvergens, akkor az átrendezéssel nyert sor is abszolút konvergens és a két sor összege egyenlő.

Bizonyítás:

a) A tételt előbb pozitív tagu sorokra bizonyítjuk:

Jelöljük a $\sum a_n$ pozitív tagu konvergens sor n . részletösszegét s_n -nel, összegét pedig s -sel.

A $\sum a'_k$ átrendezett sor n . részletösszegét s'_n -vel, összegét pedig, - amennyiben létezik, - s' -vel.

Válasszuk meg N -t olyan nagynak, hogy s_N mindazokat a tagokat tartalmazza, amelyek s'_n -ben szerepelnek. Ekkor nyilván

$$s'_n < s_N < s.$$

Ebből következik, hogy s'_n korlátos és így a $\sum a'_k$ sor konvergens.

(Lásd 1.8 Tétel.) A sor összege, s' , pedig a fenti egyenlőtlenség miatt

$$s' \leq s.$$

Ezek után tekinthetjük a $\sum a_n$ sort a konvergens $\sum a'_k$ sor átrendezésének, így a fenti gondolatmenet alapján

$$s \leq s'$$

adódik. Ezt az előbb kapott egyenlőtlenséggel összevetve

$$s = s'$$

egyenlőséghez jutunk. Tehát pozitív tagu konvergens sorok tetszés szerint átrendezhetők anélkül, hogy a sor összege megváltoznék. $\square$

b) A tételt abszolút konvergens sorokra bizonyítjuk:

Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor az a) pont értelmében a $\sum |a_n|$ tetszőlegesen átrendezhető és a $\sum |a'_k|$ sor is konvergens, amiből a $\sum a'_k$ sor konvergenciája már következik.

A kérdés csupán az, hogy a $\sum a'_k$ sor összege is egyenlő lesz-e a $\sum a_n$ sor összegével? Ezt alább bizonyítjuk:

Mivel $\sum a_n$ abszolút konvergens, ezért bármely $\varepsilon > 0$ esetén m megválasztható olyan nagynak, hogy minden $k \geq 1$ esetén

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_{m+k}| < \varepsilon \quad (1.26)$$

legyen. (Lásd /1.23/ Tétel.) Vegyük ezek után n_0 indexet olyan nagynak, hogy minden $n > n_0$ esetén s'_n tartalmazza az

$$a_1; a_2; \dots a_m$$

tagok mindegyikét. Ekkor az

$$|s'_n - s_n| < \varepsilon$$

lesz, ugyanis az

$$s'_n - s_n$$

különbség csak véges számú tagot tartalmaz és csupa olyan tagot, amelynek indexe $> m$, így rájuk az (1.26) összefüggés érvényes. Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s. \quad \square$$

Az abszolút konvergens sorok tagjai tehát tetszés szerinti sorrendbe rendezhetők, anélkül, hogy a sorösszeg megváltoznék.

Ezzel szemben a nem abszolút konvergens sorok tagjainak sorrendjét megváltoztatva a sorösszeg is módosul. Erre vonatkozik az alábbi

1.31 Tétel: (Riemann-féle átrendezési tétel). Ha $\sum a_n$ konvergens sor, de nem abszolút konvergens, (azaz feltételesen konvergens sor), akkor mindig átrendezhető úgy, hogy összege egy előre megadott tetszőleges véges szám legyen, illetve a sor $+\infty$ -hez, vagy $-\infty$ -hez divergáljon.

Bizonyítás: Legyen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.27)$$

sor konvergens, de nem abszolút konvergens. Jelöljük pozitív előjelű tagjait p_k -val ($k = 1, 2, \dots$), negatív előjelű tagjainak abszolút értékét pedig q_m -mel ($m = 1, 2, \dots$).

Mivel az (1.27) sor konvergens, tagjai nullsorozatot alkotnak, vagyis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} q_m = 0. \quad (1.28)$$

Könnyen belátható, hogy a pozitív tagokból képezett

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad (1.29)$$

és a negatív tagok abszolút értékéből képezett

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m \quad (1.30)$$

divergens.

Ugyanis az (1.27) alatti konvergens sor n . részletösszege felírható

$$s_n = P_k - Q_m \quad (1.31)$$

alakban, ha abban k darab pozitív és m darab negatív tag van. (P_k -val jelöltük az (1.29) sor k . részletösszegét és Q_m -mel az (1.30) sor m . részletösszegét.)

Viszont az (1.27) sor tagjainak abszolútértékéből képezett sor n . részletösszege a fenti jelölésekkel

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = P_k + Q_m \quad (1.32)$$

alakú.

Ha az (1.29) vagy az (1.30) sorok közül az egyik konvergens lenne, akkor (1.31) miatt a másiknak is konvergensnek kellene lenni. (Lásd később 1.34 Tétel: Két konvergens sor összege és különbsége is konvergens!)

Viszont mindkettő nem lehet konvergens, mert akkor (1.32) miatt az összegük is konvergens volna, viszont ez azt jelentené, - feltételünkkel ellentétben -, hogy az (1.27) sor abszolút konvergens.

Tehát az (1.29) és az (1.30) sorok mindketten divergensek.

Ezekután belátjuk, hogy bármely H véges számot adunk is meg, az (1.27) sor átrendezhető úgy, hogy összege H legyen. Az alábbi eljárást alkalmazzuk: (az egyszerűség kedvéért legyen $H > 0$.)

Összegezzünk az (1.29) sor tagjaiból annyit (egymás közötti sorrendjüket tartsuk meg!), hogy

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > H \quad (1.33)$$

legyen (viszont, ha egy taggal kevesebbet vettünk volna, akkor még $< H$ állna fenn.) Adjunk (1.33)-hoz az (1.27) sor negatív tagjaiból annyit, (egy-más közötti sorrendjüket őrizzük meg!) hogy

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} < H$$

teljesüljön (de ha eggyel kevesebb negatív tagot vettünk volna, akkor még $> H$ állt volna fenn).

Eljárásunkat folytassuk újabb pozitív tagok, majd újabb negatív tagok hozzáadásával, a fent leírtak szem előtt tartásával.

Az eljárás vég nélkül folytatható és az így származtatott végtelen sor H -hoz konvergál, hiszen a részletösszegeknek H -tól való eltérése kisebb, mint a részletösszegben szereplő utolsó tag, ami viszont (1.28) miatt 0-hoz tart. $\square$

Hasonló megfontolással belátható az is, hogy az (1.27) sor oly módon is átrendezhető, hogy összege a $+\infty$ -hez divergáljon.

Tekintsünk ugyanis egy

$$H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$$

pozitív tagu sorozatot, amely a $+\infty$ -hez divergál. Majd az (1.27) sor pozitív tagjaiból vegyünk annyit, hogy

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 > H_1 \quad \text{legyen.}$$

Majd vegyünk megint annyi pozitív tagot, hogy a következő negatív taggal együtt is

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 + \dots + p_{k_2} - q_2 > H_2 \quad \text{legyen.}$$

Az eljárás vég nélkül folytatható az (1.29) sor divergenciája miatt. Így az (1.27) sor olyan átrendezéséhez jutunk, amely a $+\infty$ -hez divergál. $\square$

A fentiekhez hasonló módon bizonyítható a $H < 0$ és a $-\infty$ -hez tartás is.

1.32. Definíció: Azokat a konvergens sorokat, amelyek tetszőleges módon átrendezhetők és az átrendezés után nyert sor összege megegyezik az eredeti sor összegével, feltétlenül konvergens soroknak nevezzük.

1.33 Definíció: Azokat a konvergens sorokat, amelyek átrendezés után megváltoztatják összegüket (vagy divergensekké válnak), feltételesen konvergens soroknak nevezzük.

Az 1.30 Tétel értelmében minden abszolút konvergens sor feltétlenül konvergens és az 1.31 Tétel értelmében minden nem abszolút konvergens sor feltételesen konvergens.

Ez azt jelenti, hogy egy konvergens végtelen sor akkor és csak akkor feltétlenül konvergens, ha abszolút konvergens.

MEGJEGYZÉS: A feltételes konvergenciáról már korábban kimondott 1.26 Definícióval a feltételes konvergencia fenti meghatározása tehát teljes összhangban van.

Konvergens sorok összeadása és kivonása

1.34 Tétel: Két konvergens sor:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = A$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = B$$

tagonként összeadható és az így előállt

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots \quad (1.34)$$

sor konvergens és összege $= A + B$.

Bizonyítás: Jelöljük a fenti két konvergens sor n . részletösszegét A_n ill. B_n -nel, az (1.34) sor n . részletösszegét pedig s_n -nel.

$$s_n = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) .$$

Mivel s_n véges sok tagból áll, így átcsoportosítható:

$$s_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n + B_n .$$

Innen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = A + B .$$

Konvergens sorok kivonása visszavezethető (-1) -gyel való szorzásra (lásd 1.5 Tétel) és összeadásra, tehát két konvergens sor különbsége is konvergens sort alkot és összege $= A - B$.

Konvergens sorok szorzása

Legyen két konvergens sor:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = A$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = B.$$

Mit értsünk a két végtelen sor szorzatán? Két összeg szorzatát véges számú összeadandó esetén úgy képeznénk, hogy az egyik összeg valamennyi tagjával rendre megszoroznánk a másik összeg tagjait és a kapott szorzatokat összegeznénk. Végtelen sorok esetében is kövessük formálisan ezt a módszert: az egyik sor, például a $\sum a_n$ tagjaival szorozzuk meg rendre a másik sor tagjait és a kapott részletszorzatokat rendezzük az alábbi sémába:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n & \dots & \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_3 & \dots & a_n b_n & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array} \quad (1.35),$$

Most már csak az a kérdés, hogy a kapott végtelen sok tagot milyen módon összegezzük? Egyik lehetőség, hogy az (1.35) sémában a bal felső sarokból kiindulva a négyzetekkel bekeretezett tagokat foglaljuk egybe. (Lásd 1.4 ábra).

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{a_1 b_1} & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n & \dots & \\ a_2 b_1 & \boxed{a_2 b_2} & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n & \dots & \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & \boxed{a_3 b_3} & \dots & a_3 b_n & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_3 & \dots & \boxed{a_n b_n} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

1.4 ábra

Az ilyen módon képezhető

$$(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_3) + \\ + (a_n b_1 + \dots + a_n b_n + \dots + a_1 b_n) + \dots \quad (1.36)$$

sor konvergenciájára vonatkozik az

1.35 Tétel: Ha a $\sum a_n$ és a $\sum b_n$ sorok konvergenssek és összegük A ill. B , akkor az (1.36) sor is konvergens és összege $A \cdot B$.

Bizonyítás: Megfigyelhető, hogy az 1.4 ábra egy-egy négyzetén belül a $\sum a_n$, ill. a $\sum b_n$ sorok azonos indexű részletösszegeinek szorzata áll. Tehát az n . négyzet belsejében

$$A_n \cdot B_n = a_1 b_1 + \dots + a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_2 b_n + \dots + a_n b_1 + \dots + a_n b_n$$

van. Ez azonban éppen az (1.36) sor n . részletösszegeivel, s_n -nel egyenlő. Mivel a két eredeti sor konvergens, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cdot B_n) = A \cdot B$$

határérték létezik, ami azt jelenti az előbbiek alapján, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A \cdot B,$$

amit bizonyítani akartunk. $\square$

Végtelen sorok Cauchy-féle szorzata az (1.35) sémában felsorolt tagokat párhuzamos átlók mentén csoportosítja (lásd 1.5 ábra).

$$\begin{array}{cccccc} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n & \dots \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_n & \dots \\ \dots & & & & & \end{array}$$

1.5 ábra

A Cauchy-szorzat tehát

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + \\ + \dots + (a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \dots + a_k b_1) + \dots \quad (1.37)$$

alakú.

(A Cauchy-féle szorzat jelentőségére a III. fejezetben, a hatványsorok tárgyalásánál visszatérünk és ott e szorzást többször alkalmazni is fogjuk!)

A Cauchy-szorzat konvergenciájára vonatkozik az alábbi két tétel:

1.36 Tétel: Ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

sorok abszolút konvergensek, akkor a két sor Cauchy-szorzata is abszolút konvergens sort alkot és a szorzatsor összege $= A \cdot B$.

Bizonyítás: Feltételünk értelmében mindkét sor abszolút konvergens. Jelöljük az abszolútértékekből képezett sorok összegét az alábbi módon:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^* \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = B^* \quad (1.38)$$

Tekintsük ezután az (1.37) alatti sor k -adik részletösszegét:

$$s_k = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \dots + a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \dots + a_k b_1.$$

Alkalmazzuk erre az összegre az ismert $|a + b| \leq |a| + |b|$ összefüggést:

$$|s_k| \leq |a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_1| + \dots + |a_1 b_k| + \dots + |a_k b_1|.$$

A fenti egyenlőtlenségben szereplő $|a_i b_j|$ alakú szorzatokban az i és a j indexek lehetséges értékei: $1, 2, 3, \dots, k$. Mivel k -nál nagyobb index nem szerepelhet, így a fenti kifejezés majorálható az (1.38) alatti sorok k -adik részletösszegeinek a szorzatával, vagyis

$$|s_k| < \left(\sum_{i=1}^k |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^k |b_j| \right) < A^* \cdot B^*.$$

(Az utóbbi egyenlőtlenség azért igaz, mert az (1.38) alatti sorok pozitív tagok és így a részletösszegek értékénél nagyobb a sorösszeg.)

Ezzel beláttuk, hogy az (1.37) alatti Cauchy-féle szorzással nyert sor részletösszegeinek abszolútértéke korlátos, vagyis, hogy az (1.37) alatti sor abszolút konvergens. (Lásd 1.8 Tétel.)

Mivel az (1.37) sor abszolút konvergens, így tetszés szerint átrendezhető, a sor összege az átrendezéssel nem változik. (Lásd 1.30 Tétel.) Az (1.36) alatti elrendezést tekinthetjük a Cauchy-féle szorzat egy átrendezésének, így a Cauchy-szorzat értéke megegyezik az ott kapott szorzat értékével, vagyis $= A \cdot B$. (Lásd 1.35 Tétel.) $\square$

Az 1.36 Tétel igen erős követelményt állít mindkét sor elé, igaz, hogy ennek fejében maga a Cauchy-szorzat is abszolút konvergens sort alkot a zárójelek elhagyása után is.

A követelményeken enyhít az alábbi (Mertenstől származó) tétel:

1.37 Tétel: Ha a $\sum a_n$ és a $\sum b_n$ konvergens sorok egyike abszolút konvergens, akkor a Cauchy-féle szorzatuk konvergens. E feltételek mellett a zárójelek általában már nem hagyhatók el.

Bizonyítás: A tett feltevésekből az alábbiak következnek:

1. Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum |a_n|$ sor részletösszegei korlátosak:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq K \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.39)$$

2. Mivel $\sum a_n$ konvergens,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (1.40)$$

3. Mivel $\sum b_n$ konvergens, így m . maradéktagja: $r_m = (B - B_m)$ -re teljesül: (lásd 1.4 Tétel)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0, \quad (1.41)$$

ahol B_m a $\sum b_n$ sor m . részletösszege:

$$B_m = B - r_m. \quad (1.42)$$

Ezek előrebocsátása után képezzük a Cauchy-szorzat n . részletösszegét:

$$C_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \dots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1).$$

Elvégezzük a szorzásokat és kiemeljük az a_1 -ket:

$$C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_n B_1$$

adódik, ahol $B_n, B_{n-1}, \dots$ a $\sum b_n$ sor részletösszegei, így (1.42) alapján felírható:

$$C_n = a_1(B - r_n) + a_2(B - r_{n-1}) + \dots + a_n(B - r_1).$$

Ezt beszorozva és átrendezve:

$$C_n = B(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \dots + a_n r_1)$$

adódik, vagyis

$$C_n = B \cdot A_n - (a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \dots + a_n r_1),$$

ahol A_n a $\sum a_n$ sor n . részletösszege. Mivel e sor konvergens,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \text{ így}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A \cdot B - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \dots + a_n r_1).$$

Ha sikerül belátni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \dots + a_n r_1) = 0,$$

akkor ezzel Mertens tételét bizonyítottuk.

Bontsuk fel az

$$a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \dots + a_{n-m} r_{m+1} + a_{n-m+1} r_m + \dots + a_n r_1$$

összeget két részre. Az első $(n - m)$ tag összege:

$$|a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \dots + a_{n-m} r_{m+1}| \leq |a_1| \cdot |r_n| + \dots + |a_{n-m}| \cdot |r_{m+1}|. \quad (1.43)$$

Viszont (1.41) következtében m olyan nagynak választható, hogy minden $n > m$ esetén

$$|r_n| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Felhasználva még (1.39)-et is

$$|a_1 r_n + \dots + a_{n-m} r_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-m}|) < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tekintsük ezután az (1.43) összeg második felét az

$$a_{n-m+1} r_m + \dots + a_n r_1$$

összeget, ahol m rögzített. Így $n > m$ megválasztható olyan nagynak, hogy (1.40) miatt ebben az m tagu összegben minden tag olyan kicsivé válik, hogy

$$|a_{n-m+1} r_m + \dots + a_n r_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

adódjék. Ezzel beláttuk, hogy

$$|a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \dots + a_n r_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül, ezzel a tételt igazoltuk. Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A \cdot B. \quad \square$$

Végtelen sorral végzett számításoknál elkövetett hiba becslése

Közelítő számításoknál gyakran alkalmazunk konvergens sorokat. Természetesen ilyenkor a sornak csak az n . részletösszegével, az

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

véges összeggel dolgozunk, vagyis az

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

maradéktagot nem vesszük számításba. Ezzel nyilvánvalóan hibát követünk el. Ennek nagyságát a maradéktag becslésével határozhatjuk meg. A maradéktag becslése tehát felvilágosítást nyújt a közelítő számítás pontosságára, illetve segítségével meghatározhatjuk, hogy milyen nagy indexű s_n részletösszeggel kell számolnunk ahhoz, hogy az elkövetett hiba egy előírt korlát alatt maradjék.

1. A hibabecslés a váltakozó előjelű, Leibnitz-típusú soroknál a leg-egyszerűbb.

Ugyanis a

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots$$

sor n . maradéktagját becsülve

$$\begin{aligned} |r_n| &= |c_{n+1} - c_{n+2} + \dots| = \\ &= |c_{n+1} - (c_{n+2} - c_{n+3}) - (c_{n+4} - c_{n+5}) - \dots| \leq |c_{n+1}| \end{aligned}$$

adódik, hiszen a zárójelekben csupa nem negatív tag áll. (Itt kihasználtuk a Leibnitz-típusú sorokra jellemző $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots c_n \geq \dots$ tulajdonságot!)

Például a $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ sor esetében $|r_n| < \frac{1}{n+1}$.

2. Pozitív tagú, illetve abszolút konvergens soroknál gyakran célszerű a maradéktagot egy olyan konvergens pozitív tagú sorral majorálni, amelynek összege pontosan meghatározható.

Könnyen belátható, hogy a majoráló sor összege alkalmas hibabecslésre. Legyen ugyanis

$$a_1 + a_2 + \dots a_n + \dots$$

a vizsgált abszolút konvergens sor, amelyet a

$$c_1 + c_2 + \dots c_n + \dots$$

konvergens pozitív tagú sor majorál, vagyis valamely $N \geq 1$ indextől kezdve

$$|a_k| \leq c_k \quad (k \geq N)$$

teljesül. Ekkor a vizsgált sor maradéktagjára

$$\begin{aligned} |r_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots < c_{n+1} + c_{n+2} + \dots = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \quad (n \geq N) \end{aligned}$$

adódik. Ha $\sum c_k$ számolható, akkor ezzel a hiba abszolút értékére felső becslést kaphatunk. Erre a célra gyakran használjuk a konvergens geometriai sort.

Például a $\sum \frac{1}{n!}$ sor esetében:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right]$$

Mivel a zárójelben egy végtelen geometriai sor áll, melyre $q = \frac{1}{n+1}$,
így

$$r_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

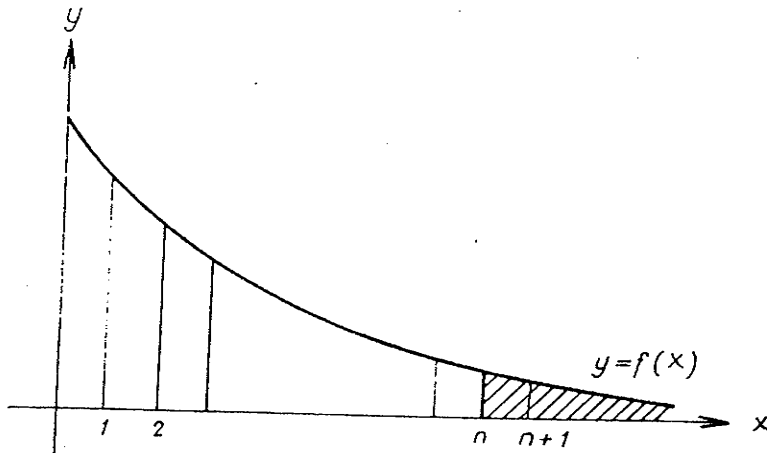
3. Ha egy pozitív tagú sor konvergenciája integrálkritériummal állapítható meg, akkor a maradéktag is becsülhető integrállal. Ugyanis, ha a $\sum a_n$ pozitív tagú konvergens sor, amelyre az integrálkritérium alkalmazható, akkor van olyan $f(x) \geq 0$ monoton fogyó függvény, amelyre

$$f(n) = a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ és}$$

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ létezik. Ekkor a sor maradékösszege:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \leq \int_n^\infty f(x) dx,$$

ami az integrálkritérium bizonyításánál alkalmazott módszerrel azonnal belátható. Itt csupán az alábbi (1.6 ábrával) illusztráljuk a fenti egyenlőtlenséget.



1.6 ábra

Például a $\sum_n \frac{1}{n^3}$ sor esetében

$$r_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-x^{-2}}{2} \right]_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2} .$$

II. FÜGGVÉNYSOROZATOK, FÜGGVÉNYSOROK

1. ALAPVETŐ FOGALMAK ÉS TÉTELEK

A konvergenciatartomány, a határ- és az összefüggvény definíciója

Tekintsük az X számhalmazon értelmezett függvénysorozatot:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, \quad (2.1)$$

illetve a belőle képezhető függvénysort:

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2.2)$$

A (2.1) függvénysorozat konvergenciatartományának az X számhalmaz azon $H(f)$ részhalmazát ($H(f) \subset X$) nevezzük, amelynek minden $x_0 \in H(f)$ pontjában az $(f_n(x_0))$ számsorozatnak véges határértéke van. Hasonló módon definiáljuk a (2.2) függvénysor konvergenciatartományát.

2.1 Definíció: A (2.1) függvénysorozat határfüggvényének azt a konvergenciatartományban értelmezett $f(x)$ függvényt nevezzük, amely e tartomány bármely x_0 pontjában kielégíti a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

egyenlőséget. A határfüggvényt így jelöljük:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in H(f))$$

2.2 Definíció: A (2.2) függvénysor összegfüggvényének azt az $s(x)$ függvényt nevezzük, amely a konvergenciatartomány bármely x_0 pontjában kielégíti a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = s(x_0)$$

egyenlőséget. Az összegfüggvényt így jelöljük:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x),$$

ahol $s_n(x)$ a (2.2) függvénysor n -edik részletösszege:

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

A függvénysorozatok és a függvénysorok vizsgálatánál számos érdekes kérdésre várunk választ: vajon a függvénysorozat elemeinek tulajdonságait örökli-e a határfüggvény, illetve az összegfüggvény? Például folytonos-e a határ, - illetve összegfüggvény egy olyan pontban, amelyben a függvénysorozat valamennyi eleme folytonos. Vagy, ha a függvénysorozat elemei egy $[a, b]$ intervallum felett integrálhatók, vajon integrálható-e ugyanítt az összegfüggvény és szabad-e az integrálást tagonként végezni?

Mielőtt e kérdésekre általános választ keresnénk, nézzünk néhány példát:

Példák:

1. A $0 \leq x \leq 1$ intervallumban az

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

függvénysorozat konvergens és határfüggvénye:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} = 0.$$

A függvénysorozat elemei és a határfüggvény egyaránt folytonosak $[0, 1]$ -ben.

2. Az

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

függvénysorozat ugyancsak konvergens a $0 \leq x \leq 1$ intervallumban, határfüggvénye:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

A függvénysorozat elemei $[0, 1]$ -ben mindenütt folytonosak, a határfüggvénynek azonban az $x = 1$ helyen szakadása van!

3. Az

$$f_n(x) = 2 \cdot n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

függvénysorozat a $0 \leq x \leq 1$ intervallumban konvergens, határfüggvénye:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2} = 0.$$

A függvénysorozat elemei is és a határfüggvény is integrálhatóak a $[0, 1]$ intervallumban. Kérdés, hogy az x változó szerinti integrálásnak és az n indexben végzett határátmenet műveletének a sorrendje felcserélhető-e, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

Végezzük el a számításokat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2 \cdot n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-e^{-n^2 x^2} \right]_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n^2}) = 1.$$

Másrészt:

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2} \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Amint látjuk: két különböző eredményhez jutottunk!

MEGJEGYZÉS: A függvénysorozat elemei és a határfüggvény egyaránt folytonosak a $0 \leq x \leq 1$ intervallumban.

Egyenletes konvergencia

Az előző pontban ismertetett példák is figyelmeztetnek arra, hogy a függvénysorozatokról és a függvénysorokról nem elég a konvergencia tényét megállapítani, hanem annak módját is mélyebben tanulmányozni kell. E célból egy új fogalmat vezetünk be, az egyenletes konvergencia fogalmát.

2.3 Definíció: Az $f_n(x)$ függvénysorozat, illetve a $\sum f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens a konvergencia intervallum egy

részintervallumán, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén, az intervallum bármely x helyén

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (2.3)$$

illetve soroknál:

$$|s_n(x) - s(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon, \quad (2.4)$$

ahol $r_n(x)$ a sor n -edik maradéktagja.

Vizsgáljuk meg, hogy az előző pontban ismertetett függvénysorozatok közül, melyik egyenletesen konvergens a megadott intervallumon!

Tekintsük az 1. példabeli

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \text{ függvénysorozatot és határfüggvényét, az}$$

$f(x) = 0$ függvényt.

Kérdés, tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található-e olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy a (2.3)-beli egyenlőtlenség, vagyis:

$$\left| \frac{x}{1 + n^2 x^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

teljesüljön, ha $n > N(\varepsilon)$ és $0 \leq x \leq 1$.

Könnyen belátható, hogy

$$\left| \frac{x}{1 + n^2 x^2} \right| < \frac{1}{2n},$$

ugyanis

$$\frac{x}{1 + n^2 x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n \cdot x}{1 + n^2 x^2} < \frac{1}{2n},$$

hiszen

$$\frac{2n \cdot x}{1 + n^2 x^2} < 1.$$

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz az $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$ küszöbindex esetén minden $n > N(\varepsilon)$ -ra $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ teljesül, vagyis a sorozat $[0, 1]$ -ben egyenletesen konvergens. $\square$

Tekintsük a 2. példában szereplő

$$f_n(x) = x^n \text{ függvénysorozatot, amelynek } 0 \leq x < 1 \text{ esetén}$$

$f(x) = 0$ a határfüggvénye.

Legyen $0 < \varepsilon < 1$ és $0 < x < 1$. A (2.3) egyenlőtlenség, vagyis

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| < \varepsilon$$

teljesül minden $n > N(\varepsilon, x)$ -re, ha $N(\varepsilon, x)$ -t így választjuk meg:

$$N(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \right\rceil.$$

(Ugyanis, ha $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$, akkor $\ln x < 0$ miatt

$$n \cdot \ln x < \ln \varepsilon, \text{ vagyis } x^n < \varepsilon \text{ teljesül.})$$

Ennél a sorozatnál azonban tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz nem található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, amely az x helytől függetlenül a teljes $(0, 1)$ intervallumban megfelelne, ugyanis az $x = 1$ helyhez közeledve az $N(\varepsilon, x)$ értéke egyre nő $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ miatt. Vagyis a konvergencia nem egyenletes a

$(0, 1)$ intervallumon.

A 3. példabeli

$$f_n(x) = 2 \cdot n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2} \text{ függvénsorozat határfüggvénye a } 0 \leq x \leq 1$$

intervallumon az $f(x) = 0$ függvény.

A konvergencia azonban a $[0, 1]$ intervallumban nem egyenletes, ugyanis az $x = \frac{1}{n}$ helyeken

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 2 \cdot n \cdot e^{-1} \geq \frac{2}{e}. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Emiatt a 0 hely közelében, vagyis az $x = \frac{1}{n}$ helyeken $(n = 1, 2, \dots)$

a függvénsorozat n . tagjának eltérése a határfüggvénytől nem lehet ε -nál kisebb, - amennyiben $0 < \varepsilon < \frac{2}{e}$, - bármilyen nagynak választjuk is az n indexet.

4. példa: A

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ geometriai sor konvergens a } -1 < x < 1 \text{ intervallumon}$$

és összegfüggvénye: $\frac{1}{1-x}$. Teljesül-e a (2.4) feltétel a $(-1, 1)$ intervallumon?

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{x^n - 1}{x - 1} \right| = \left| \frac{x^n}{1-x} \right|.$$

Az intervallum belsejében $|x| < 1$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{1-x} \right| = 0.$$

Viszont tetszőleges, de rögzített n esetén az intervallum végpontjai felé közelítve:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} |r_n(x)| = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left| \frac{x^n}{1-x} \right| = +\infty$$

illetve:

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} |r_n(x)| = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left| \frac{x^n}{1-x} \right| = \frac{1}{2} \text{ adódik.}$$

Látható, hogy az intervallum két széle felé közeledve $|r_n(x)|$ nem tesz eleget a (2.4) követelménynek, tehát nincs olyan $N(\varepsilon)$ index, amely a teljes $(-1, 1)$ intervallumban megfelelne. Tehát a sor itt nem egyenletesen konvergál.

Az egyenletes konvergencia szükséges és elégséges feltétele megadható a Cauchy-féle konvergencia kritérium alapján. (Lásd 1.23 tétel.)

2.4 Tétel: Az $f_n(x)$ függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál egyenletesen az I intervallumban, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan x -től független $N(\varepsilon)$ szám, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ és $k \geq 1$ esetén

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ minden } x \in I \text{ helyen.}$$

2.5 Tétel: A $\sum f_n(x)$ függvénysor akkor és csak akkor konvergál egyenletesen az I intervallumban, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan x -től független $N(\varepsilon)$ szám, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ és $k \geq 1$ esetén

$$|s_{n+k}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon, \quad (2.5)$$

minden $x \in I$ helyen.

Bizonyítás: A 2.4 Tételt külön nem bizonyítjuk, ugyanis bármely

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

függvénysorozat egyenletes konvergenciája helyett vizsgálható a vele ekvivalens

$$f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \dots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \dots$$

függvénysor egyenletes konvergenciája.

A 2.5 tételt két lépésben bizonyítjuk:

a) belátjuk a feltétel szükségességét:

Ha $\sum f_n(x)$ egyenletesen konvergens I -ben, akkor a 2.3 Definíció alapján bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, amely x -től független, és amelyre

$$|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } n > N(\varepsilon)$$

és

$$|s_{n+k}(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } n > N(\varepsilon) \text{ és } k \geq 1.$$

E kettőből éppen az

$$|s_{n+k}(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon) \text{ és } k \geq 1)$$

egyenlőséget nyerjük.

b) belátjuk a feltétel elégességét:

Ha a Cauchy-féle feltétel teljesül, vagyis az I intervallum minden x helyén

$$|s_{n+k}(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon) \text{ és } k \geq 1),$$

akkor a $\sum f_n(x)$ sor az intervallum bármely rögzített x helyén konvergens, így e helyen

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x) + \dots| \leq \varepsilon.$$

Ha rögzített $n > N(\varepsilon)$ mellett $k \rightarrow \infty$, akkor ez éppen az

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget adja minden $n > N(\varepsilon)$ esetére bármely $x \in I$ helyen. Vagyis a függvénysor egyenletesen konvergens I -ben, mert eleget tesz a 2.3 Definíció követelményének. $\square$

Az egyenletes konvergenciára vonatkozó Cauchy-féle szükséges és elégséges feltételből a függvénysorokra egy igen gyakran használható elégéssé feltétel vezethető le:

2.6 Tétel: (Weierstrass-féle kritérium)

Ha a $\sum f_n(x)$ függvénysor tagjai egy I intervallumban eleget tesznek az

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

egyenlőtlenségnek és a $\sum c_n$ numerikus sor konvergens, akkor a $\sum f_n(x)$ függvénysor I -ben egyenletesen konvergens.

Bizonyítás: Az $|f_n(x)| \leq c_n$ feltétel miatt a $\sum c_n$ konvergens sor abszolút értelemben majorálja a függvénysort az I intervallumban:

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + \\ &+ |f_{n+k}(x)| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ez utóbbi a $\sum c_n$ sor konvergenciájából következik minden $n > N(\varepsilon)$ és $k = 1, 2, \dots$ esetén.

Ezzel beláttuk, hogy a $\sum f_n(x)$ függvénysorra (2.5) teljesül minden $n > N(\varepsilon)$ és $k \geq 1$ -re az intervallum bármely x helyén, vagyis a $\sum f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens I -ben. (Lásd 2.5 Tétel.)

Példák:

1. Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens numerikus sor, akkor a

$$\sum a_n \cdot \sin nx \quad \text{és a} \quad \sum a_n \cdot \cos nx$$

függvénysorok minden x -re egyenletesen konvergens.

Ugyanis $|\sin nx| \leq 1$ és $|\cos nx| \leq 1$ miatt

$$|a_n \cdot \sin nx| \leq |a_n|$$

illetve

$$|a_n \cdot \cos nx| \leq |a_n|.$$

Igy a $\sum |a_n|$ sor majorálja a $\sum a_n \cdot \sin nx$ ill. a $\sum a_n \cdot \cos nx$ sorokat, tehát azok egyenletesen konvergens x bármely értékére.

2. A $\sum r^n \cdot \cos nx$ függvénysor $|r| < 1$ esetén egyenletesen konvergens a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban. Felhasználhatjuk ugyanis az előző

példa eredményét, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ sor $|r| < 1$ esetén abszolút konvergens.

Az egyenletes konvergenciával összefüggő tételek

2.7 Tétel: Ha a $\sum f_n(x)$ függvénysor az $a \leq x \leq b$ intervallumban egyenletesen konvergens és a sor tagjai az $x_0 \in (a, b)$ helyen valamennyien folytonosak, akkor e helyen a sor összegfüggvénye, $s(x)$ is folytonos. (A tétel függvénysorozatokra ugyanígy szól.)

Bizonyítás: Be kell látni, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|s(x) - s(x_0)| < \varepsilon,$$

ha $x \in [a, b]$ és $|x - x_0| < \delta$.

Írjuk fel a vizsgált különbséget

$$\begin{aligned} |s(x) - s(x_0)| &= |s_m(x) + r_m(x) - [s_m(x_0) + r_m(x_0)]| = \\ &= |s_m(x) - s_m(x_0) + r_m(x) - r_m(x_0)| \leq \\ &\leq |s_m(x) - s_m(x_0)| + |r_m(x)| + |r_m(x_0)| \end{aligned} \quad (2.6)$$

alakban.

Az egyenletes konvergencia miatt az intervallum bármely x helyén megválaszthatjuk az m indexet olyan nagyra, hogy

$$|r_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{és} \quad |r_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

legyen.

Rögzítsük a fenti m indexet és használjuk ki azt, hogy rögzített m esetében az $s_m(x)$ függvény folytonos az x_0 helyen, hiszen m darab (vagyis véges számú!) olyan függvény összege, amelyek e helyen folytonosak. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta > 0$, hogy az intervallum bármely x helyén, amelyre $|x - x_0| < \delta$,

$$|s_m(x) - s_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

teljesüljön. A kapott három egyenlőtlenséget (2.6)-ba beírva

$$|s(x) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

adódik, (minden $x \in (a, b)$ és $|x - x_0| < \delta$). Ez pedig éppen az $s(x)$ függvény x_0 -beli folytonosságát jelenti. $\square$

2.7.a) Tétel: Ha az $f_n(x)$ függvények egy I intervallumban folytonosak és ott a $\sum f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens, akkor ezen az intervallumon az összegfüggvény is folytonos.

MEGJEGYZÉS: Az összegfüggvény (függvénysorozatok esetében a határfüggvény) folytonosságának az egyenletes konvergencia nem szükséges feltétele! A II. fejezet bevezetőjében ismertetett 3. sz. példában szereplő

$$f_n(x) = 2 \cdot n^2 \cdot x \cdot e^{-n^2 x^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

függvénysorozatról beláttuk, hogy a $[0, 1]$ intervallumban nem konvergál egyenletesen a határfüggvényhez. Ennek ellenére a függvénysorozat határfüggvénye:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot n^2 \cdot x \cdot e^{-n^2 x^2} = 0$$

folytonos a fenti intervallumban.

2.8 Tétel: Ha a $\sum f_n(x)$ függvénysor valamennyi tagja az $a \leq x \leq b$ intervallumban korlátos és integrálható függvény és a sor ugyanebben az intervallumban egyenletesen konvergens, akkor az $s(x) = \sum f_n(x)$ összegfüggvény is integrálható $[a, b]$ -ben és

$$\int_a^b s(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b f_n(x) dx \right]$$

vagyis a sor tagonként integrálható és az integrálok összege megegyezik a sorösszeg integráljával.

Bizonyítás: Két lépésben történik:

a) Először belátjuk, hogy a tett feltevések mellett az $s(x)$ függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon.

Az egyenletes konvergencia miatt bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadhatunk olyan n indexet, hogy az intervallum minden pontjában

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis

$$s_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < s(x) < s_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.7)$$

teljesüljön. Ezekután rögzítsük n -t, majd osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot tetszőleges módon részintervallumokra. Jelöljük az i -edik részintervallumban

$s_n(x)$ függvényértékeinek alsó határát m_i -vel,

$s_n(x)$ függvényértékeinek felső határát M_i -vel.

Igy $s_n(x)$ oszcillációja az $[x_{i-1}, x_i]$ -ben: $o_i = M_i - m_i$.

Jelöljük ugyanitt az $s(x)$ függvény oszcillációját 0_i -vel. Belátható, hogy

$$0_i \leq o_i + \varepsilon. \quad (2.8)$$

Ugyanis (2.7) miatt

$$m_i - \frac{\varepsilon}{2} < s(x) < M_i + \frac{\varepsilon}{2} \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

ahonnan (2.8) már adódik.

A (2.8) egyenlőtlenséget Δx_i -vel megszorozva és szummázva

$$\sum_i 0_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_i o_i \cdot \Delta x_i + \varepsilon \cdot (b - a) \quad (2.9)$$

kifejezés adódik, ahonnan az $s(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumbeli oszcillációs összegére kapunk felső korlátot: a jobb oldalon álló $\varepsilon \cdot (b - a)$ értéke tetszőlegesen kicsivé válik ε megválasztásától függően. A $\sum_i o_i \cdot \Delta x_i$

az $s_n(x)$ oszcillációs összege és mivel $s_n(x)$ az $[a, b]$ -n integrálható

$$\sum_i o_i \cdot \Delta x_i \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad \max \Delta x_i \rightarrow 0.$$

Igy (2.9) miatt az $s(x)$ oszcillációs összege

$$\sum_i 0_i \cdot \Delta x_i \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad \max \Delta x_i \rightarrow 0.$$

Tehát $s(x)$ integrálható $[a, b]$ -n. $\square$

b) Be kell látni, hogy $s(x)$ integrálja megegyezik a tagok integráljainak az összegével.

Az egyenletes konvergencia következtében bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan N index, hogy $n > N$ esetén minden $x \in [a, b]$ -re

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (2.10)$$

Rögzítsük n -t. Mivel

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

ezért

$$\left| \int_a^b s(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b r_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |r_n(x)| dx. \quad (2.11)$$

Alkalmazzuk az integrálszámítás középértéktételét és vegyük figyelembe (2.10)-et:

$$\int_a^b |r_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Igy (2.11)-ből

$$\left| \int_a^b s(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx \right| < \varepsilon \quad (2.12)$$

adódik. Vegyük figyelembe, hogy n rögzített, így $s_n(x)$ véges számú összeadandóból áll, tehát szabad tagonként integrálni:

$$\int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)$$

Ezt beírva (2.12)-be:

$$\left| \int_a^b s(x) dx - \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahol a kivonandó éppen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

sor n -edik részletösszege. Tehát az n . részletösszegnek van határértéke és pedig

$$\int_a^b s(x) dx,$$

amit bizonyítani kívántunk. $\square$

MEGJEGYZÉS I.: Amennyiben a 2.8 Tételben a $\sum f_n(x)$ függvénysor tagjairól kikötjük, hogy azok az $[a, b]$ intervallumban folytonosak és a sor ugyanott egyenletesen konvergens, akkor az előbb közölt bizonyítás a) pontja szükségtelen, ugyanis a folytonos $f_n(x)$ függvények összegfüggvénye is folytonos (lásd 2.7 Tétel) és mint ilyen az $[a, b]$ intervallumban integrálható. Így a bizonyítás b) pontjára van csupán szükség.

MEGJEGYZÉS II.: Az összegfüggvény (illetve sorozatnál a határfüggvény) integrálhatóságának az egyenletes konvergencia nem szükséges feltétele. A II. fejezet bevezetőjében a 2. sz. példában szereplő

$$f_n(x) = x^n$$

függvénysorozatról beláttuk, hogy nem konvergál egyenletesen a $[0, 1]$ intervallumban. Ennek ellenére

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx,$$

vagyis az integrálás és a határátmenet műveletének sorrendje felcserélhető. Határozzuk meg először a bal oldalon álló integrál értékét:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 x^n dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 0.$$

A jobb oldalon álló integrál kiszámításához először elő kell állítani

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

határfüggvényt:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

Integráljuk ezek után a határfüggvényt :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

eredményre jutunk. A két eredmény megegyezik, anélkül, hogy a függvény-sorozat egyenletesen konvergálna a fenti intervallumban.

2.9 Tétel: Legyen a $\sum f_n(x)$ függvénytör sor valamennyi tagja az $a \leq x \leq b$ intervallumban differenciálható függvény és a differenciálhányadosokból képzett

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

sor az $[a, b]$ intervallumban egyenletesen konvergens.

Ha a $\sum f_n(x)$ sor az $[a, b]$ intervallumnak legalább egy c pontjában konvergens, akkor a $\sum f_n(x)$ sor az intervallumban egyenletesen konvergens, összegfüggvénye, $s(x)$, az intervallumban differenciálható és differenciálhányadosa:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Vagyis a sort a fenti feltételek mellett szabad tagonként differenciálni és a differenciálhányadosokból álló sor összege megegyezik az összegfüggvény differenciálhányadosával.

Bizonyítás:

a) Először azt látjuk be, hogy a tett feltevések mellett a $\sum f_n(x)$ sor is egyenletesen konvergens az $[a, b]$ intervallumban.

Mivel az $f_n(x)$ függvények ($n = 1, 2, 3, \dots$) valamennyien differenciálhatók $[a, b]$ -ben, ezért véges számú tag összege, vagyis

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \tag{2.13}$$

is differenciálható az intervallumban. Alkalmazni kívánjuk a (2.13)-beli függvényre a differenciálszámítás középértéktételét, mégpedig a tetszőleges $x \in [a, b]$ pont és a feltételben szereplő $c \in [a, b]$ pont figyelembevételével.

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} [f_k(x) - f_k(c)] = (x - c) \cdot \sum_{k=n+1}^{n+m} f'_k(\xi), \quad (2.14)$$

(ahol a ξ pont x és c pontok közé esik).

A feltétel alapján $\sum f'_n(x)$ egyenletesen konvergens, így a 2.5 Tétel értelmében bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan N index, hogy $n > N$ és $m \geq 1$ esetén az $[a, b]$ intervallum bármely helyén

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f'_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ezt (2.14)-ben felhasználva:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} [f_k(x) - f_k(c)] \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot |x - c| < \varepsilon.$$

(Ugyanis $\left| \frac{x-c}{b-a} \right| \leq 1$, hiszen x és c az $[a, b]$ intervallum belső pontjai.)

A kapott eredmény éppen azt fejezi ki, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(c)] \quad (2.15)$$

sor az $[a, b]$ intervallumban egyenletesen konvergens, hiszen elegendő teszt az egyenletes konvergencia szükséges és elégséges feltételének. (Lásd 2.5 Tétel)

Azonban feltételünk értelmében a c pontban $\sum f_n(x)$ konvergens, vagyis a $\sum f_n(c)$ konvergens numerikus sor, így (2.15)-ből következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

sor is egyenletesen konvergens $[a, b]$ -ben, amit bizonyítani kívántunk. $\square$

b) Ezek után már csak azt kell belátni, hogy az

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (2.16)$$

függvénynek a differenciálhányadosa

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Állítsuk elő az intervallum egy rögzített x_0 pontjában az

$$\frac{f_k(x_0 + h) - f_k(x_0)}{h} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.17)$$

függvényeket. Ezek h függvényei (x_0 rögzített!) és minden olyan $h \geq 0$ helyen értelmezettek, amelyre $(x_0 + h)$ az $[a, b]$ intervallumba esik.

Az a) pontban alkalmazott eljáráshoz hasonlóan a (2.17) függvényekből véges soknak az összegére alkalmazzuk a differenciálszámítás középértéktételét:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{f_k(x_0 + h) - f_k(x_0)}{h} = h \cdot \sum_{k=n+1}^{n+m} f'_k(x_0 + t \cdot h), \quad (2.18)$$

(ahol $0 < t < 1$).

Feltevésünk értelmében $\sum_n f'_n(k)$ egyenletesen konvergens az $[a, b]$ intervallumban. Így a (2.18) egyenlőség jobb oldalán álló kifejezés tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ értéknél kisebbé válik, ha n index elég nagy. (Lásd 2.5 Tétel.) Ebből következik, hogy a bal oldalt álló kifejezés is ε -nál kisebbé válik, vagyis:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{f_k(x_0 + h) - f_k(x_0)}{h} < \varepsilon.$$

Ez viszont a 2.5 Tétel értelmében éppen azt fejezi ki, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h}$$

sor minden h -ra (amelyre $(x_0 + h) \in [a, b]$) egyenletesen konvergens. E sor összege (2.16) miatt nyilván:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} = \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h}.$$

Mivel a sor a fenti kikötésnek eleget tevő minden h -ra egyenletesen konvergens, így $h \rightarrow 0$ esetén határértékét tagonként számíthatjuk. (Lásd 2.7.a. Tétel.) és a tagok határértékének összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)$$

megegyezik az összegfüggvény határértékével:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = s'(x_0).$$

Mivel ez az $[a, b]$ intervallum tetszőleges x_0 pontjában fennáll, így

$$\sum f'_n(x) = s'(x),$$

amit bizonyítani akartunk. $\square$

MEGJEGYZÉS: Csak hangsúlyozni kívánjuk, hogy a sorok tagonkénti differenciálásához nem elég megkövetelni a sor tagok differenciálhatóságát és a $\sum f'_n(x)$ sor egyenletes konvergenciáját. Ugyanis könnyen előállíthatunk olyan példát, amely e két követelménynek eleget tesz és a sor mégsem differenciálható tagonként. Ilyen például a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + \frac{\sin nx}{n} \right)$$

sor, ahol a tagonkénti differenciálással nyert

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

sor egyenletesen konvergens minden x -re, hiszen a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sorral majorálható.

Mégsem szabad a sort tagonként differenciálni, ugyanis az eredeti sor sehol sem konvergens, mert a konvergencia szükséges feltételének (lásd 1.6 Tétel) nem tesz eleget:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{\sin nx}{n} \right) = 3 \neq 0.$$

Ezért kell megkövetelni, hogy a $\sum f_n(x)$ sornak is konvergensnek kell lennie legalább az intervallum egy pontjában.

Ugyancsak hibás eredményre juthatunk, ha a $\sum f_n(x)$ sorról kötjük ki az egyenletes konvergenciát a $\sum f'_n(x)$ sor helyett.

Például a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

sor egyenletesen konvergens minden x -re, viszont a tagonkénti differenciálás sal nyert sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

az $x = 0$ helyen a divergens $\sum \frac{1}{n}$ sorrá válik, tehát itt sem differenciálható tagonként a sor.

III. HATVÁNYSOROK

Definíció. Konvergenciatartomány

Hatványsornak nevezzük az x hatványait tartalmazó

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots \quad (3.1)$$

függvényt. Az a_n állandók a hatványsor együtthatói.

A hatványsor általánosabb alakja az $(x - x_0)$ hatványait tartalmazó

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n + \dots \quad (3.2)$$

függvényt.

Mivel a (3.2) hatványsor a $z = (x - x_0)$ helyettesítéssel a (3.1) sorral megegyező alakúvá válik, ezért a továbbiakban csupán az x hatványait tartalmazó (3.1) sorral foglalkozunk.

MEGJEGYZÉS: Természetesen mindazok a tételek, amelyeket az előbbi fejezetben a függvénytörökről elmondottunk, a hatványsorokra is érvényesek, hiszen a hatványsorok maguk is függvénytörök. De az általános függvénytörökről elmondottakon felül a hatványsoroknak még számos egyéb tulajdonságuk is van, amelyeket alább ismertetünk.

A hatványsor konvergenciájával kapcsolatosan két igen egyszerű tétel mondható ki:

3.1 Tétel: Ha a (3.1) hatványsor az $x = x_2$ helyen ($x_2 \neq 0$) konvergens, akkor minden olyan $x = x_1$ helyen, amelyre

$$|x_1| < |x_2|, \text{ abszolút konvergens.}$$

Bizonyítás: Mivel a (3.1) hatványsor az x_2 helyen konvergens, ezért tagjai e helyen korlátosak, vagyis

$$|a_n \cdot x_2^n| \leq K \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ugyanakkor az $|x_1| < |x_2|$ kikötés miatt $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = t < 1$ is fennáll. Így

$$\left| a_n \cdot x_1^n \right| = \left| a_n \cdot x_2^n \right| \cdot \left| \frac{x_1}{x_2} \right|^n \leq K \cdot t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Tehát a $\sum |a_n \cdot x_1^n|$ sort a $K \cdot \sum t^n$ ($0 < t < 1$) konvergens pozitív tagu sor majorálja, amiből a $\sum a_n \cdot x_1^n$ sor abszolút konvergenciája már következik. $\square$

3.2 Tétel: Ha a (3.1) hatványsor az $x = x_2$ helyen divergens, akkor minden olyan $x = x_1$ helyen, amelyre $|x_1| > |x_2|$, a sor szintén divergens.

Bizonyítás: Ha a sor az x_1 helyen konvergens lenne, akkor a 3.1 Tétel értelmében az $|x_2| < |x_1|$ helyen is konvergens lenne. Ez viszont feltételünknek ellentmond, tehát a sor x_1 -ben divergens. $\square$

Az előbbi két tétel felhasználásával a hatványsorok konvergenciájáról egy alapvető tétel mondható ki:

3.3 Tétel: Ha a (3.1) hatványsor az $x = 0$ helyen kívül még más pontban is konvergens, - de nem konvergens minden x -re, - akkor található olyan $R > 0$ szám, hogy a sor minden $|x| < R$ helyen konvergens (sőt abszolút konvergens!) és minden $|x| > R$ helyen pedig divergens.

Az R számot a (3.1) sor konvergencia sugarának, a $(-R, R)$ számközt a sor konvergencia-intervallumának nevezzük.

MÉGJEGYZÉS: Az $x = \pm R$ helyeken a sor lehet konvergens is, de lehet divergens is.

Bizonyítás: A feltétel értelmében van olyan pont, ahol a (3.1) sor divergens és olyan $x \neq 0$ pont, ahol a sor konvergens. Meg lehet tehát adni egy olyan $r_0 > 0$ számot, amely a konvergencia pontnál közelebb fekszik az $x = 0$ helyhez és egy olyan $r_0^* > 0$ számot, amely a divergencia pontnál messzebb van $x = 0$ -tól. A 3.1 és a 3.2 Tételek értelmében a sor r_0 -ban konvergens, r_0^* -ban pedig divergens.

Ezek után felezzük meg az (r_0, r_0^*) intervallumot és nevezzük I_1 -nek azt az (r_1, r_1^*) félintervallumot, amelynek bal oldali végpontja: $r_1 > 0$ konvergencia pont, jobb oldali végpontja: $r_1^* > 0$ pedig divergencia-pont. A 3.1 és a 3.2 Tételek értelmében

$$0 < r_1 < r_1^*.$$

Az I_1 intervallumot felezve folytassuk az eljárást vég nélkül. Ilyen módon intervallumskatulyázáshoz jutunk, amelynek magja: $R > 0$ szám.

Könnyű belátni, hogy R a keresett konvergencia sugár:

a) Vegyük fel az x_0 pontot úgy, hogy $|x_0| < R$ legyen. Ekkor a sor x_0 -ban konvergens, ugyanis az előbb leírt eljárásnál az n indexet megválaszthatjuk olyan nagynak, hogy

$$|x_0| < r_n \leq R$$

teljesüljön. Viszont $|x_0| < r_n$ miatt az x_0 pont konvergenciapont. (Lásd 3.1 Tétel.)

b) Válasszuk meg az x_1 pontot úgy, hogy $|x_1| > R$ teljesüljön. Ekkor a sor x_1 -ben divergens, ugyanis a fenti eljárásban most olyan nagy-nak választjuk meg az m indexet, hogy

$$R \leq r_m^* < |x_1|$$

teljesüljön. Ekkor a 3.2 Tétel értelmében $|x_1| > r_m^*$ miatt a sor x_1 -ben divergens.

Végül belátjuk, hogy egyetlen ilyen $R > 0$ szám van. Ugyanis, ha $R' \neq R$ ugyancsak konvergenciasugár lenne, akkor ezek egy intervallumot határoznának meg, amelynek belső pontjai egyidejűleg lennének konvergencia és divergencia pontok, ami lehetetlen.

Tehát $R' = R$ kell hogy legyen. $\square$

A hatványsor konvergenciatartományának meghatározására több módszer is megadható. Erre vonatkoznak az alábbi tételek:

3.4 Tétel: (Cauchy-Hadamard-féle tétel)

Ha a $\sum a_n \cdot x^n$ hatványsor együtthatóiból képezett

$$|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots \text{ számsorozatra}$$

I.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \quad (3.3)$$

véges szám, akkor a hatványsor konvergencia sugara : R .

II. Ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

akkor a sor minden x -re konvergens, vagyis $R = \infty$.

III. Ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty,$$

akkor a sor csak $x = 0$ -ban konvergens, vagyis $R = 0$.

Bizonyítani a pozitív tagu soroknál megismert gyökkritériummal lehet.
(Lásd 1.14 Tétel.)

I. eset: Vegyünk fel egy rögzített x értéket és szorozzuk be (3.3)-t $|x|$ -kel. Így

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} = \frac{|x|}{R}$$

adódik.

Ha $|x| < R$, akkor $\frac{|x|}{R} < 1$ miatt található olyan $0 < q < 1$ szám, hogy

$$\frac{|x|}{R} \leq q < 1$$

fennáll (x rögzített szám!). Így a $\limsup$ definíciójából következőleg található olyan N index, hogy

$$\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} \leq q < 1 \quad \text{minden } n > N\text{-re,}$$

Amiből a $\sum |a_n \cdot x^n|$ sor konvergenciája már következik. (Lásd 1.14 Tétel.)

Ha viszont $|x| > R$, akkor $\frac{|x|}{R} > 1$ miatt végtelen sok n -re

$$\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} > 1,$$

tehát a $\sum |a_n \cdot x^n|$ sor divergens. (Lásd 1.13 Tételnél tett megjegyzés.) $\square$

II. eset: Tetszőleges $|x|$ rögzített értékkel szorozva a

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

kifejezést mindig 0 eredményhez jutunk. Így minden x -re, ha n elég nagy,

$$\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} \leq q < 1$$

adódik, tehát a sor minden x -re konvergens. Azt szokták mondani: a konvergencia sugár, $R = +\infty$, $\square$

III. eset:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$$

lévén, az $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozat nem korlátos, így bármely $x \neq 0$ rögzített szám esetén végtelen sok n -re

$$\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} > 1,$$

tehát a sor divergens. (Lásd 1.13 Tételnél tett megjegyzést.) $\square$

3.5 Tétel: Ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

véges határérték létezik, akkor a konvergencia sugár:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

A tétel hányadoskritériummal (lásd 1.17 Tétel) az előző tételnél alkalmazott módszerrel bizonyítható.

Példák:

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ hatványsor konvergencia sugara: $R = 0$, ugyanis

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)} = 0.$$

2. A $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ geometriai sor esetében $R = 1$, ugyanis $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

3. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsor mindenütt konvergens, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

így $R = +\infty$.

4. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ sor a $(-1, 1)$ intervallumban konvergens, mert

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1.$$

A hatványsorok tulajdonságai

Az alábbiakban a hatványsorokra vonatkozó igen fontos tételeket ismer-
tetünk.

Tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots \quad (3.4)$$

hatványsort, amelynek összegfüggvénye $f(x)$ és konvergencia sugara: R ,
(ahol $R > 0$).

3.6 Tétel: Tetszőleges $0 < r < R$ szám esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$
hatványsor a $[-r, r]$ intervallumban egyenletesen konvergens.

Bizonyítás: Mivel $0 < r < R$, ezért a 3.3 Tétel értelmében a hat-
ványsor az $x = r$ helyen abszolút konvergens, vagyis a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

numerikus sor konvergens.

Viszont minden $|x| \leq r$ helyen $|x^n| \leq r^n$ miatt a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n|$ sort majorálja a fenti $\sum |a_n| r^n$ konvergens numerikus sor. Így az egyenletes konvergenciára vonatkozó Weierstrass-féle kritérium (lásd 2.6 Tétel) értelmében a (3.4) sor $[-r, r]$ -ben egyenletesen konvergens.

MEGJEGYZÉS: Ámbár r akármilyen közel lehet R -hez, a fenti tétel mégsem mondható ki a teljes konvergencia intervallumra, vagyis a $[-R, R]$ intervallumra. Gondoljunk csak a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

geometriai sorra, amely minden $\varepsilon > 0$ esetén a $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ zárt intervallumban egyenletesen konvergens, de $(-1, 1)$ nyílt intervallumon már nem. (Lásd a 2.3 Definíciót követő 4. példát.)

3.7 Tétel: A $\sum a_n \cdot x^n$ hatványsor összegfüggvénye, $f(x)$, folytonos függvénye x -nek minden $-R < x < R$ helyen.

Bizonyítás: A konvergencia intervallum bármely belső $x = x_0$ helyéhez található olyan $r < R$ szám, hogy

$$|x_0| < r$$

legyen.

A $[-r, r]$ zárt intervallumon a sor egyenletesen konvergens (lásd az előbb bizonyított 3.6 Tételt) és tagjai x -nek folytonos függvényei. Ebből viszont az összegfüggvény folytonossága a 2.7 Tétel értelmében már következik.

3.8 Tétel: (Abel-tétele.) Ha a hatványsor az $x = R$ helyen is konvergens, akkor e helyen összegfüggvénye balról folytonos.

Bizonyítás: A hatványsor a $(-R, R)$ nyílt intervallumon mindenütt konvergens és az $f(x)$ függvényt állítja elő, vagyis

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots, \quad (3.5)$$

ahol $-R < x < R$.

Feltételünk értelmében a sor az $x = R$ helyen is konvergens, jelöljük e pontban az összegét s -sel:

$$s = a_0 + a_1 \cdot R + a_2 \cdot R^2 + \dots + a_n \cdot R^n + \dots \quad (3.6)$$

Azt szeretnénk belátni, hogy az $f(x)$ függvény a tett feltevések mellett balról folytonos, vagyis

$$\lim_{x \rightarrow R-0} f(x) = s$$

A továbbiakban vezessük be az x független változó jelölésére az

$$x = R \cdot t$$

kifejezést. Így a (3.5) új alakja:

$$f(R \cdot t) = a_0 + (a_1 \cdot R)t + \dots + (a_n \cdot R^n)t^n + \dots \quad 0 < t < 1 \quad (3.7)$$

Az $x \rightarrow R - 0$ megfelelője pedig $t \rightarrow 1 - 0$ lesz. (3.8)

Mivel $0 < t < 1$, így

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad (3.9)$$

fennáll. A (3.7) és a (3.9) alatti sorok egyaránt abszolút konvergenssek, így Cauchy-szorzatuk (lásd 1.36 Tétel) képezhető:

$$\frac{f(R \cdot t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 \cdot R + \dots + a_n \cdot R^n) \cdot t^n. \quad (3.10)$$

Jelöljük a (3.6) sor n -edik részletösszegét s_n -nel, vagyis

$$s_n = a_0 + a_1 \cdot R + \dots + a_n \cdot R^n.$$

Ezt írjuk be (3.10)-be:

$$\frac{f(R \cdot t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot t^n \quad (3.11)$$

adódik.

Ezek után szorozzuk meg a (3.9) alatti egyenlőség mindkét oldalát a (3.6) sor összegével, az s véges számmal:

$$\frac{s}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} s \cdot t^n. \quad (3.12)$$

A (3.11) és a (3.12) alatti kifejezéseket $(1-t)$ -vel megszorozva és a különbségüket képezve az

$$f(R, t) - s = (1-t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) \cdot t^n$$

adódik. A további számítások érdekében bontsuk fel ezt az összeget két részre:

$$f(R, t) - s = (1-t) \cdot \sum_{n=0}^{k-1} (s_n - s) \cdot t^n + (1-t) \cdot \sum_{n=k}^{\infty} (s_n - s) \cdot t^n. \quad (3.13)$$

Az $|a + b| \leq |a| + |b|$ egyenlőtlenséget a (3.13)-ra alkalmazva:

$$|f(R, t) - s| \leq (1-t) \cdot \sum_{n=0}^{k-1} |s_n - s| \cdot t^n + (1-t) \cdot \left| \sum_{n=k}^{\infty} (s_n - s) \cdot t^n \right| \quad (3.14)$$

adódik.

Vizsgáljuk meg először a (3.14)-beli II. összeadandót. Használjuk ki, hogy a (3.6) sor konvergens és válasszuk meg a k indexet olyan nagy-
nak, hogy minden $n \geq k$ esetén

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

fennálljon. Ezáltal a (3.14)-beli II. összeg (ahol $n \geq k$)

$$\begin{aligned} \left| (1-t) \cdot \sum_{n=k}^{\infty} (s_n - s) \cdot t^n \right| &< (1-t) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} t^n = (1-t) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{t^k}{1-t} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^k < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

(A legutolsó lépésnél figyelembe vettük, hogy $0 < t < 1$ miatt $t^k < 1$.)

Vizsgáljuk meg ezek után a (3.14)-beli összeg I. részét. Ez egy racionális egész függvény (ugyanis véges sok összeadandóból áll!) és így t -nek folytonos függvénye. Emiatt bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $0 < \delta < 1$ szám, hogy

$$\left| (1-t) \cdot \sum_{n=0}^{k-1} (s_n - s) \cdot t^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.16)$$

legyen, valahányszor

$$1 - \delta < t < 1.$$

Ha a (3.15) és a (3.16)-ot felhasználjuk (3.14)-ben, akkor arra az eredményre jutunk, hogy

$$|f(R \cdot t) - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ha

$$1 - \delta < t < 1.$$

Mivel bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $0 < \delta < 1$ szám, amelyre

$$|f(R \cdot t) - s| < \varepsilon,$$

ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} f(R \cdot t) = s.$$

fennáll. Ez viszont $x = R \cdot t$ és a (3.8)-ban mondottak miatt éppen

$$\lim_{x \rightarrow R-0} f(x) = s$$

egyenlőséget adja, amit bizonyítani kívántunk. $\square$

MEGJEGYZÉS: A tétel akkor is igaz, ha a hatványsor az $x = -R$ helyen konvergens. Természetesen ilyenkor az összegfüggvény az $x = -R$ helyen jobbról folytonos.

Abel tételének egy lényeges folyománya a következő fejezetben, a Taylor-soroknál még visszatérünk.

3.9 Tétel: A $\sum_n a_n \cdot x^n$ hatványsor a konvergencia intervallum bármely belső részintervallumán tagonként integrálható és a tagonkénti integrálással nyert sor összege egyenlő az összegfüggvény ugyanezen intervallumon számított integráljával.

Vagyis

$$a_0 \cdot x + a_1 \cdot \frac{x^2}{2} + a_2 \cdot \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \int_0^x f(t) dt,$$

ahol $|x| < R$, $f(t)$ pedig a hatványsor összegfüggvénye.

Bizonyítás: A tétel egyszerű folyamánya annak, hogy a hatványsor tagjai integrálható függvények és a sor egyenletesen konvergens $[0, x]$ -ben, amennyiben $|x| < R$ és így a 2.8 Tétel értelmében az integrálás és az összegképzés sorrendje felcserélhető.

MEGJEGYZÉS: Az integrálás a $[0, R]$ intervallum felett is elvégezhető, ha a sor R -ben is konvergens. (Lásd 3.8 Tétel.)

3.10 Tétel: A $\sum a_n \cdot x^n$ hatványsor a konvergencia intervallum bármely $-R < x < R$ helyén tagonként differenciálható és az így nyert hatványsor összege egyenlő a sor összegfüggvényének, $f(x)$ -nek, a differenciálhányadosával. Vagyis:

$$\frac{d f(x)}{dx} = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \dots$$

Bizonyítás: A $\sum a_n \cdot x^n$ hatványsor differenciálható függvényekből áll és a tagonkénti differenciálással nyert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(a_n \cdot x^n)}{dx} = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \dots$$

sor maga is hatványsor. Jelöljük a konvergencia sugarát R^* -gal és határozzuk értékét a Cauchy-Hadamard-tétel (lásd 3.4 Tétel) alapján. Előzőleg azonban szorozzuk meg a differenciálással nyert sor $x \neq 0$ -val, ami a

konvergenciát nem befolyásolja (lásd 1.5 Tétel) és az így nyert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n$ sorra alkalmazzuk a fent említett tételt:

$$\frac{1}{R^*} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

Vegyük figyelembe, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, így

$$\frac{1}{R^*} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R},$$

amiből

$$R^* = R$$

adódik. Tehát a differenciálással nyert sor ugyancsak a $(-R, R)$ intervallumban konvergens. Mivel e sor maga is hatványsor, így a 3.6 Tétel értelmében a $(-R, R)$ intervallum bármely belső részintervallumán egyenletesen konvergens. Ugyanítt az eredeti $\sum a_n \cdot x^n$ sor is konvergens, tehát szabad tagonként differenciálni. (Lásd 2.9 Tétel). $\square$

A 3.10 Tétel következményei:

Beláttuk, hogy az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

sor differenciálásával nyert sor maga is hatványsor, melynek konvergenciasugara megegyezik az eredeti hatványsor konvergenciasugarával, így e sorra a 3.10 Tétel újból alkalmazható. Vagyis az eredeti hatványsorból kiindulva, egymás után végzett differenciálásokkal az alábbi sorozathoz juthatunk:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot x + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + \dots$$

...

...

$$f^{(n)}(x) = 1, 2, 3, \dots, (n-1) \cdot n \cdot a_n + \dots$$

...

Ha a fenti kifejezésekbe $x = 0$ értéket helyettesítünk, akkor az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2 \cdot a_2$$

...

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

...

Innen a hatványsor együtthatói meghatározhatók:

$$a_0 = f(0)$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= f'(0) \\
 a_2 &= \frac{f''(0)}{2!} \\
 &\dots \\
 a_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Eszerint az $f(x)$ függvényt előállító hatványsor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = f(x)$$

felírható a (3.17) együtthatók felhasználásával

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

alakban.

Kimondható tehát az alábbi tétel:

3.11 Tétel: Ha az $f(x)$ függvény egy intervallumban, - amely az $x = 0$ pontot tartalmazza -, hatványsor összegeként előállítható, akkor az $f(x)$ függvény a sor konvergencia intervallumán belül akárhányszor differenciálható. A hatványsor együtthatóit pedig a (3.17) egyenletek szolgáltatják.

3.12 MEGJEGYZÉS: Ha az $(x - x_0)$ hatványait tartalmazó

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

hatványsorral végezzük el az egymás utáni differenciálásokat és a kapott egyenletekbe az $x = x_0$ értéket helyettesítjük be, akkor a fenti hatványsor az alábbi alakban írható fel:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

3.13 MEGJEGYZÉS: A (3.17) egyenletekkel már korábban találkoztunk: A "Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása" c. jegyzetnek V.3. a Taylor polinomokkal foglalkozó fejezetében.

Műveletek hatványsorokkal

3.14 Tétel: Két hatványsor tagonként összeadható és eredményül

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$$

hatványsort nyerjük minden $|x| < r$ helyen, ahol r -rel a két hatványsor konvergencia sugara közül a kisebbiket jelöljük. A tétel nem szorul bizonyításra, mivel csupán a sorok összeadására vonatkozó 1.34 Tétel alkalmazása.

3.15 Tétel: Két hatványsor minden $|x| < r$ helyen (ahol r a két sor konvergencia sugara közül a kisebbik) összeszorozható és eredményül

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_0) \cdot x^n$$

hatványsort nyerjük. (Cauchy-szorzat)

Bizonyítás: Mivel r a két hatványsor konvergencia sugara közül a kisebbik, így minden $|x| < r$ helyen a két sor abszolút konvergens (lásd 3.1 Tétel) és így alkalmazható a Cauchy-féle szorzási szabály. (Lásd 1.36 Tétel.)

A 3.15 Tétel alkalmazható egy hatványsor pozitív egész kitevőjű hatványainak az előállítására is:

Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ hatványsor konvergencia sugara: r .

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ hatványsor négyzetét kapjuk eredményül, ha a sort az $|x| < r$ helyen önmagával szorozzuk meg:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot a_n + a_1 \cdot a_{n-1} + \dots + a_n \cdot a_0) \cdot x^n$$

Ezt az eljárást megismételhetjük akárhányszor és ezzel a konvergencia-intervallumon belül előállíthatjuk a hatványsor bármely pozitív egész kitevőjű hatványát.

Az ismételt szorzásokkal nyert sorok hatványsorok és valamennyien abszolút konvergenssek minden olyan helyen, ahol az eredeti $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ sor abszolút konvergens. (Lásd 1.36 Tétel.)

Végezzük el két hatványsor szorzását egy érdekes példán:
Tekintsük az

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

hatványsort, amelyről a 3.5 Tétel segítségével már beláttuk, hogy minden x -re konvergens és az

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots + \frac{y^n}{n!} + \dots$$

hatványsort, amely - lévén a fenti sorral azonos felépítésű, - minden y -ra konvergens.

Képezzük a két sor szorzatát:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} &= 1 + (x + y) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{y^2}{2!} + x \cdot y \right) + \\ &+ \left(\frac{y^3}{3!} + \frac{x \cdot y^2}{2!} + \frac{y \cdot x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{n-1!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{n-2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) + \dots \end{aligned}$$

A zárójelben álló kifejezéseket rendezve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x + y)^n}{n!} + \dots$$

adódik, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!}.$$

Vezessük be a fenti sorok összegfüggvényeire az alábbi jelölést:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{és} \quad F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

A kapott eredményt a sorok összegfüggvényével felírva:

$$F(x) \cdot F(y) = F(x + y)$$

adódik.

MEGJEGYZÉS: Könnyen felismerhető, hogy a kapott függvényegyenletnek az $f(x) = e^x$ függvény eleget tesz, hiszen

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

IV. TAYLOR-SOROK

Definíció. Konvergencia

Az előző fejezetben a hatványsorok tárgyalásánál arra az eredményre jutottunk, hogy ha egy hatványsor az $x = 0$ pontot tartalmazó intervallumban egy $f(x)$ függvényt állít elő, akkor e függvény a hatványsor konvergencia intervallumán belül akárhányszor differenciálható és az $f(x)$ függvény differenciálhányadosai segítségével előállíthatók a hatványsor együtthatói:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad (4.1)$$

Illetve az $x = x_0$ pontra felírva ugyanezt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

Kérdés, hogy az eljárás megfordítható-e? Eddig a hatványsorból kiindulva jutottunk el oda, hogy az $f(x)$ függvény, vagyis a hatványsor összegfüggvénye, felírható (4.1) alakban.

Vajon elindulhatunk-e egy akárhányszor differenciálható $f(x)$ függvényből és eljuthatunk-e az $f(x)$ függvényt előállító (4.1) alakú hatványsorhoz? Amennyiben ez sikerülne, akkor e konvergens hatványsor részletösszegeivel, vagyis polinomokkal, lehetne bonyolultabb függvények közelítő értékeit számolni az $x = 0$, (illetve az $x = x_0$) pontnak a megadott hiba által meghatározott kis környezetében.

4.1 Definíció: Legyen az $f(x)$ függvény az $x = 0$ helyen akárhányszor differenciálható. Ekkor a formálisan előállítható

$$f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad (4.2)$$

hatványsort az $f(x)$ függvény $x = 0$ alapponthoz tartozó Taylor sorának nevezzük.

Amennyiben az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ helyen akárhányszor differenciálható, akkor felírható az $x = x_0$ alappontra támaszkodó Taylor sora

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots \quad (4.3)$$

alakban.

MEGJEGYZÉS: Az $x = 0$ alappontra támaszkodó (4.2) sort szokták Maclaurin-sornak is nevezni.

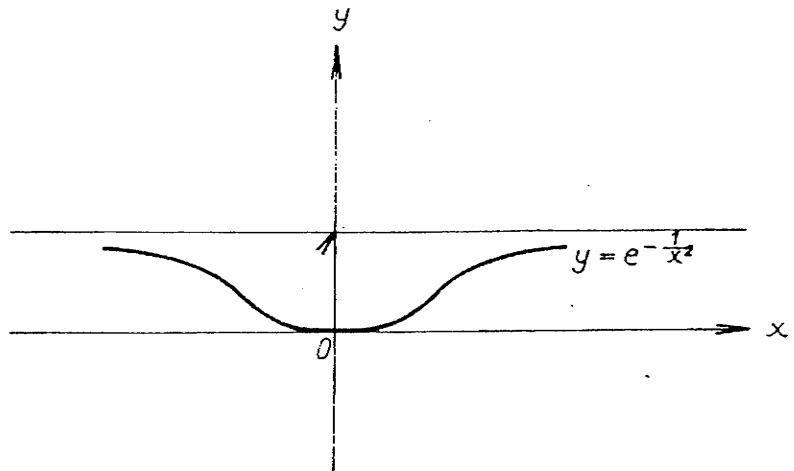
Hangsúlyozni kell, hogy a fenti előállítás csak formális. Egy akárhányszor differenciálható függvény formálisan előállított (4.2) illetve (4.3) alakú Taylor-sora nem biztos, hogy egyáltalában konvergens. De az is lehetséges, hogy a sor konvergens csak éppen összegeként nem az $f(x)$ függvényt állítja elő. Ez utóbbira Cauchytól származik a következő klasszikus példa:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

E függvény az $x = 0$ pontban akárhányszor differenciálható és e pontban valamennyi deriváltja 0 értékű, így az $x = 0$ alappontu Taylor sora:

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots$$

E sor mindenütt konvergens és összege természetesen $= 0$. Azonban a sor csak az alappontban állítja elő a függvényt, annak környezetében már nem, hiszen $f(x) \neq 0$, amit az $f(x)$ ábrája is tanúsít (lásd 4.1 ábra):



4.1 ábra

Meg kell tehát vizsgálni, hogy egy $f(x)$ függvény Taylor-sora mikor állítja elő a függvényt. Irjuk fel a (4.2) sort

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + r_n(x) \quad (4.4)$$

alakban, ahol $r_n(x)$ a sor n -edik maradéktagja. (Lásd 1.3 Definíció.)

4.2 Tétel: A (4.4) sor az $f(x)$ függvényt valamely x helyen akkor és csak is akkor állítja elő, ha e helyen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

A tétel nem szorul bizonyításra, hiszen ez a sorokra kimondott 1.4 Tétel egyszerű alkalmazása.

A Taylor-soroknál fellépő maradéktagra már megismertünk egy formulát a "VALÓS EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMITÁSA" c. jegyzetben a Taylor-polinom tárgyalásánál. (Lásd V. fejezet 3. pont.) Éspedig az n -edrendű Taylor-polinom, $T_n(x)$, és az $f(x)$ függvény eltérése Lagrange-féle maradéktaggal felírva:

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad (4.5)$$

alakú, ahol $\xi \in (x, x_0)$.

Alkalmazva ezt az $x_0 = 0$ esetre és bevezetve a $\xi = t \cdot x$ jelölést:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \quad (4.6)$$

adódik, ahol $0 < t < 1$.

A maradéktag vizsgálatához sok esetben eredményesen használható az alábbi tétel.

4.3 Tétel: Ha az $f(x)$ függvény a $[0, H]$ (illetve a $[-H, 0]$) intervallumban akárhányszor differenciálható és differenciálhányadosai az intervallum bármely x helyén abszolút értékben bizonyos közös korlát alatt maradnak, vagyis

$$|f^{(n)}(x)| \leq K \quad (n = 1, 2, \dots \text{ és } K \text{ független } n \text{ értékétől!}),$$

akkor a (4.4) sor az $f(x)$ függvényt az egész $[0, H]$ intervallumban előállítja.

Bizonyítás: A fenti feltételek mellett a Lagrange-féle maradéktag abszolút értékére az alábbi becslés adható:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \leq K \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!} \quad (4.7)$$

Ugyanis $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq K$ és $|x| \leq H$.

Ismeretes, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

ezért (4.7)-ből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Tehát a sor minden $x \in [0, H]$ helyen előállítja az $f(x)$ függvényt.

4.4 Definíció: Az $f(x)$ függvény az $x = 0$ pontban analitikus, ha e pont valamely környezetében előállítható x hatványai szerint haladó hatványsor összegeként:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots,$$

amely sor a már bizonyított tételek értelmében az $f(x)$ függvény Taylor-sora, vagyis

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Illetve az $x = x_0$ alappont esetében:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

Az $f(x)$ függvény valamely nyílt intervallumban analitikus, ha az intervallum minden pontjában analitikus.

A Taylor-sorok tulajdonságai

A függvények hatványsorba fejtése egyértelmű. Erre vonatkozik az alábbi:

4.5 Tétel: Ha két hatványsor:

$$a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n + \dots = f(x)$$

és

$$b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_n \cdot x^n + \dots = g(x)$$

összegfüggvénye az $x = 0$ pont környezetében ugyanaz a függvény, akkor a két sor azonos, vagyis

$$a_0 = b_0 ; \quad a_1 = b_1 ; \quad \dots \quad a_n = b_n ; \quad \dots$$

Bizonyítás: A feltétel értelmében $x = 0$ egy környezetében a két összegfüggvény megegyezik, vagyis

$$f(x) = g(x) .$$

Ezért a

$$h(x) = f(x) - g(x) \equiv 0$$

függvény Taylor-sora csupa 0 együtthatót tartalmaz:

$$h(x) = 0 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n + \dots$$

Másrészt

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \dots + (a_n - b_n) \cdot x^n + \dots$$

E kettőt egybevetve

$$a_0 = b_0 ; \quad a_1 = b_1 ; \quad \dots \quad a_n = b_n ; \quad \dots$$

adódik, amit bizonyítani kívántunk. $\square$

4.6 Tétel: Ha $f(x)$ páros függvény, akkor az

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$$

hatványsor x -nek csak páros hatványait tartalmazza, vagyis

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{2n-1} = 0. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Ha $f(x)$ páratlan függvény, akkor hatványsora x -nek csak páratlan hatványait tartalmazza, vagyis

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2n} = 0. \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Bizonyítás: Kihasználjuk, hogy a hatványsor tagjai az abszolút konvergencia miatt átrendezhetőek és az alábbi módon csoportosítjuk a sor tagjait:

$$f(x) = (a_0 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_{2n} \cdot x^{2n} \dots) + (a_1 \cdot x + \dots + a_{2k-1} \cdot x^{2k-1} \dots) \quad (4.8)$$

Írjuk fel ez után $f(x)$ hatványsorát a $-x$ helyen:

$$f(-x) = (a_0 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_{2n} \cdot x^{2n} \dots) - (a_1 \cdot x + \dots + a_{2k-1} \cdot x^{2k-1} \dots) \quad (4.9)$$

a) Legyen $f(x)$ páros függvény, ekkor

$$f(x) = f(-x)$$

miatt a (4.8) és a (4.9) sorfejtésekből

$$(a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_{2k-1} \cdot x^{2k-1} + \dots) = 0$$

adódik a konvergencia intervallum bármely x helyén. Tehát

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{2k-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

adódik, amint állítottuk. $\square$

b) Legyen $f(x)$ páratlan függvény, ekkor

$$-f(x) = f(-x)$$

miatt a (4.8) és a (4.9) egybevetéséből

$$(a_0 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_{2n} \cdot x^{2n} + \dots) = 0$$

adódik a konvergencia intervallum minden x helyére. Tehát

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2n} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

amit állítottunk. $\square$

4.7 Tétel: (Abel-tételének /lásd 3.8 Tétel/ egy folyománya.)
Ha $f(x)$ a $(-R, R)$ nyílt intervallumban előállítható

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \quad (-R < x < R)$$

hatványsorral és $f(x)$ az intervallum egyik végpontjában, $x = R$ (vagy $x = -R$ -ben) pontban folytonos és ott a sor konvergens, akkor a fenti sorfejtés e pontban is előállítja a függvényt.

Bizonyítás: Az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

egyenlet mindkét oldalán elvégezve az $x \rightarrow R-0$ határátmenetet, a fent elmondott eredményhez jutunk. $\square$

E tétel két alkalmazását a következő pontbeli 5. és 6. példánál bemutatjuk.

Példák Taylor-sorba fejtésre

Az alábbiakban előállítjuk néhány elemi függvény Taylor-sorát és megvizsgáljuk azok tulajdonságait:

1. Az

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

hatványsorról a 3.5 Tétel felhasználásával (lásd ott a 3. példa) beláttuk, hogy minden x -re konvergens.

Ezenfelül bármely $[-H, H]$ intervallumban e^x akárhányadik deriváltjára

$$\left| (e^x)^{(n)} \right| = \left| e^x \right| \leq e^H \quad (n = 1, 2, \dots)$$

fennáll, ezért a 4.3 Tétel értelmében e^x sora minden x -re az e^x függvényt állítja elő.

Ha a fenti sorba $x = -x$ -t írunk, az

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots$$

sor adódik.

2. A hiperbolikus függvények közül az

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{és a} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Taylor-sorát a fenti két sorból származtathatjuk

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

Mindkét sor az 1. példában elmondottak miatt minden x -re konvergens és $\operatorname{sh} x$, illetve $\operatorname{ch} x$ -et állítja elő.

MEGJEGYZÉS: Emlékeztetünk a 4.6 Tételre: mivel $\operatorname{sh} x$ páratlan függvény, sorában csak x páratlan kitevőjű hatványai szerepelnek. Viszont $\operatorname{ch} x$ sorában x páros kitevői állnak, mivel $\operatorname{ch} x$ páros függvény.

3. Ugyanez jellemzi a $\sin x$, illetve a $\cos x$ függvények $x = 0$ alappontra támaszkodó Taylor-sorát:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

E sorok minden x -re konvergens (lásd az 1. példánál mondottakat). Ezen felül mindkét függvény valamennyi deriváltja abszolút értékben közös korlát alatt marad:

$$|(\sin x)^{(n)}| \leq 1 \quad \text{és} \quad |(\cos x)^{(n)}| \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Igy a 4.3 Tétel értelmében bármely $[-H, H]$ intervallumban mindkét függvény Taylor-sora minden $x \in [-H, H]$ -ra a $\sin x$, illetve a $\cos x$ függvényt állítja elő.

4. A binomiális sor

$$(1+x)^t = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n \quad (4.10)$$

alakú, ahol t tetszőleges valós szám. A $\binom{t}{n}$ szimbólum pedig az alábbiakat jelenti:

a) Ha $n = 0$, akkor $\binom{t}{0} = 1$.

b) Ha n tetszőleges pozitív egész szám:

$$\binom{t}{n} = \frac{t \cdot (t-1) \cdot \dots \cdot (t-n+1)}{n!}.$$

Ha $n \geq 1$, akkor az alábbi könnyen igazolható összefüggés áll fenn:

$$\binom{t-1}{n-1} + \binom{t-1}{n} = \binom{t}{n}. \quad (4.11)$$

(A fenti definíció alapján utána lehet számolni!)

MEGJEGYZÉS: Amennyiben t pozitív egész szám, a (4.10) sor csak véges számú tagból áll, vagyis egy polinom. Ugyanis az együtthatók $n = (t+1)$ -től kezdve valamennyien 0-vá válnak. Minden más esetben a (4.10) sor végtelen sor.

Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n$$

hatványsor konvergencia sugarát a 3.5 Tétel felhasználásával:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \binom{t}{n+1} \right|}{\left| \binom{t}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|t-n|}{n+1} = 1,$$

amiből a konvergencia sugár:

$$R = 1.$$

Ezek után már csak azt kell bizonyítani, hogy a $-1 < x < 1$ intervallumban a sor összege valóban $(1+x)^t$.

Bizonyítás: Mivel a (4.10) sor konvergens $(-1 < x < 1)$ -ben, ezért van összefüggvénye, amelyet $f_t(x)$ -szel jelölünk.

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n \quad (4.12)$$

Ugyancsak felírható (4.12) alapján $f_{t-1}(x)$ is:

$$f_{t-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t-1}{n} \cdot x^n \quad (4.13)$$

Szorozzuk meg (4.13)-at $(1+x)$ -szel:

$$(1+x) \cdot f_{t-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t-1}{n} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t-1}{n} \cdot x^{n+1} \quad (4.14)$$

$$A \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t-1}{n} \cdot x^{n+1} \quad \text{felírható} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{t-1}{n-1} \cdot x^n \quad \text{alakban is.}$$

$$A \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t-1}{n} \cdot x^n \quad \text{pedig} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{t-1}{n} \cdot x^n \quad \text{alakban.}$$

(Számolással igazolható!)

Használjuk fel a két átalakítást (4.14)-ben:

$$(1+x) \cdot f_{t-1}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{t-1}{n} + \binom{t-1}{n-1} \right] \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n \quad (4.15)$$

A legutolsó lépésnél felhasználtuk a (4.11) azonosságot.

$$\text{Mivel} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n$$

így (4.15) átírható

$$(1+x) \cdot f_{t-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n = f_t(x)$$

alakra, ahol még felhasználtuk (4.12)-t is. Innen

$$f_{t-1}(x) = \frac{f_t(x)}{(1+x)} \quad (4.16)$$

adódik.

Az $f_t(x)$ függvényt a továbbiakban a differenciálhányadosa segítségével vizsgáljuk. A (4.12) sor tagonként differenciálható (lásd 3.10 Tétel).

$$f'_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \binom{t}{n} \cdot x^{n-1}. \quad (4.17)$$

Viszont

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \binom{t}{n} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \binom{t}{n+1} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} t \cdot \binom{t-1}{n} \cdot x^n.$$

Ezt (4.17)-be beírva:

$$f'_t(x) = t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t-1}{n} \cdot x^n = t \cdot f_{t-1}(x). \quad (4.18)$$

A legutolsó lépésnél felhasználtuk (4.13)-at. Írjuk be (4.18)-ba (4.16)-ot:

$$f'_t(x) - t \cdot \frac{f_t(x)}{(1+x)}.$$

Ezt $(1+x)$ -szel beszorozva:

$$f'_t(x) \cdot (1+x) - t \cdot f_t(x) = 0. \quad (4.19)$$

adódik. Ennyi előkészítés után már könnyű belátni, hogy

$$f_t(x) = (1+x)^t,$$

vagy ami ezzel ekvivalens, hogy

$$\frac{f_t(x)}{(1+x)^t} = 1 \quad (-1 < x < 1). \quad (4.20)$$

A fenti függvény $(-1 < x < 1)$ -ben mindenütt differenciálható és a differenciálhányadosa:

$$\left[\frac{f_t(x)}{(1+x)^t} \right]' = \frac{f'_t(x) \cdot (1+x) - f_t(x) \cdot t}{(1+x)^{t+1}} = 0,$$

(a derivált számlálója (4.19) miatt egyenlő 0-val!) ami azt jelenti, hogy a függvény értéke $(-1 < x < 1)$ -ben állandó. Könnyen kiszámítható a függvény értéke az $x = 0$ pontban: Itt a nevező értéke = 1, a számláló értéke pedig (4.12)-ből adódóan: $f_t(0) = 1$.

Ezzel (4.20)-at igazoltuk. Tehát $-1 < x < 1$ -ben

$$f_t(x) = (1+x)^t = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n,$$

amit bizonyítani akartunk. $\square$

5. Állítsuk elő az

$$f(x) = \ln(1+x)$$

Taylor-sorát az $x = 0$ alappontban. Kihasználjuk a 4.5 Tételt, nevezetesen azt, hogy ha bármilyen módon fejthetjük is a függvényt x hatványai szerint haladó hatványsorba, a kapott konvergencia sor a függvény Taylor-sora.

Alkalmazzuk az alábbi módszert:

Fejtsük először sorba a függvény differenciálhányadosát:

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + \dots$$

geometriai sor, amely konvergens, ha $|x| < 1$.

Mivel a hatványsor a konvergencia intervallumon belül tagonként integrálható, (lásd 3.9 Tétel) így:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int [\ln(1+x)]' dx = \int (1 - x + x^2 - \dots) dx = C + x - \\ &\quad - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \end{aligned}$$

A C integrációs konstans meghatározható, ha mindkét oldalt az $x = 0$ alappontban tekintjük:

$$\ln 1 = C, \text{ amiből } C = 0 \text{ adódik.}$$

Igy a keresett Taylor-sor:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

A konvergencia intervallum az integrálással nem változik, így a sor $(-1 < x < 1)$ -ben konvergens.

MEGJEGYZÉS: A fenti

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

sor az $x = 1$ helyen is konvergens (lásd 13. példa) és e helyen az $\ln(1+x)$ függvény folytonos, így a 4.7 Tétel értelmében a fenti sor az $x = 1$ helyen is előállítja a függvényt, vagyis

$$\ln(1+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Tehát

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} + \dots$$

6. Állítsuk elő az

$$f(x) = \arcsin x$$

függvény Taylor-sorát az $x = 0$ alappontban. Ugyanazt a módszert alkalmazzuk, mint az 5. példánál, most is először a függvény differenciálhányadosának a sorát állítjuk elő:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}.$$

Itt a 4. példában ismertetett

$$(1+x)^t = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} \cdot x^n$$

binomiális sorfejtést kívánjuk felhasználni, mégpedig $t = -1/2$ és $x = (-x^2)$ értékekre. Így a binomiális sor:

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \cdot (-x^2)^n = 1 + \binom{-1/2}{1} \cdot (-x^2) + \binom{-1/2}{2} \cdot (-x^2)^2 + \\ &+ \binom{-1/2}{3} \cdot (-x^2)^3 + \binom{-1/2}{4} \cdot (-x^2)^4 + \dots \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot x^6 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot x^8 + \dots \end{aligned}$$

A sor a $(-1 < x < 1)$ intervallumban konvergens, amint ezt a 4. példánál a binomiális sorokról beláttuk.

Mivel a hatványsor a konvergencia tartományon belül tagonként integrálható, így:

$$\arcsin x = \int (\arcsin x)' dx = \int \left(1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot x^6 + \dots \right) dx = C + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

A C integrációs konstans meghatározható, ha a kapott sort és a sorbafejtett függvényt az $x = 0$ alappontban tekintjük:

$$\arcsin 0 = C, \text{ amiből } C = 0 \text{ adódik.}$$

Igy a keresett Taylor sor:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

A konvergencia intervallum az integrálás révén nem változik, tehát a sor a $(-1 < x < 1)$ intervallumban konvergens.

MEGJEGYZÉS: Erre a sorra is alkalmazható a 4.7 Tétel, vagyis Abel-tételének a folyománya és segítségével $\sum$ közelítő értéke is számolható. Ugyanis a függvény a konvergencia intervallum mindkét végpontjában, a -1 és $+1$ pontokban egyaránt folytonos, ezen kívül könnyen belátható, hogy e pontokban a sor konvergens. Alább az $x = 1$ pontban bizonyítjuk a sor konvergenciáját:

A sor pozitív tagu, tehát az n -edik részletösszeg kisebb a sorösszegnél, vagyis bármely $0 < x < 1$ pontban

$$s_n(x) < \arcsin x < \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

(az utóbbi egyenlőtlenség annak a következménye, hogy a $0 < x < 1$ intervallumban az $\arcsin x$ függvény monoton növvő.)

Rögzítsük az n indexet és tekintsük a fenti kifejezés limesét:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} s_n(x) = s_n(1) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Tehát a fenti pozitív tagu sor n -edik részletösszege az $x = 1$ pontban is korlátos, amiből a sor $x = 1$ pontbeli konvergenciája már következik.

A kapott eredményt felhasználhatjuk $\frac{\pi}{2}$ értékének közelítő számítására, ugyanis a 4.7 Tétel értelmében:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$$

(MEGJEGYZÉS: a fenti számításokhoz hasonló módon látható be a sor konvergenciája a -1 pontban is.)

V. FOURIER-SOROK

1. Bevezető

Ha egy periodikus jelet vizsgálunk, akkor (gyakran) első lépésként, azt szinusz alaku jelek szuperpozíciójaként állítjuk elő úgy, hogy a szinuszos jelek körfrekvenciái egy adott ω körfrekvencia egész számu többszörösei.

Egy ilyen előállítás matematikai megfogalmazása a következő: Legyen f egy olyan periodikus függvény, amelyre

$$f(t - a) = f(t), \quad a = \frac{2\pi}{\omega};$$

határozzuk meg $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ együtthatókat úgy, hogy a

$$b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots$$

sor összege $f(t)$ legyen minden t értékre.

(Itt és a továbbiakban f "közönséges egyváltozós" függvény.)

Egy ilyen sor nem minden esetben létezik. Ha azonban a $\{\sin k\omega t; k = 0, 1, 2, \dots\}$ függvényekhez hozzávesszük a $\{\cos \omega kt; k = 1, 2, 3, \dots\}$ függvényeket, akkor minden számba jöhető a periódusu (vagyis az $f(t - a) = f(t)$ feltételt teljesítő) függvényre a feladat "majdnem minden" t pontban megoldható.

A Fourier sorok elmélete periodikus függvényeknek ilyen un. trigonometrikus sor alaku előállításával és az ilyen sorok tulajdonságaival foglalkozik.

2. A Fourier-együtthatók meghatározása

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$
$$\dots + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

alaku függvényeket (n -edrendű) trigonometrikus polinomnak nevezzük. Tömörebb jelöléssel:

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

A trigonometrikus polinomok tehát az $\{\cos k\omega t; k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ és $\{\sin k\omega t; k = 1, 2, \dots, n\}$ függvények lineáris kombinációi. Trigonometrikus sornak nevezzük azt a függvényysort, amelynek $2n + 1$ -edik részletösszege egy n -edfokú trigonometrikus polinom, vagyis egy trigonometrikus sor a következő alaku

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \dots + a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t + \dots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \end{aligned}$$

A továbbiakban csakis olyan a periódusu függvényekkel foglalkozunk, amelyek olyanok, hogy $[0, a]$ intervallum felosztható véges sok olyan részintervallumra, amelyek belsőjében a függvény monoton (nemcsökkenő v. nemnövekvő). Ezeket a függvényeket megengedett függvényeknek nevezzük majd [5.1 ábra].

Az egyszerűbb jelölés céljából a továbbiakban csakis 2π periódusu függvényekkel foglalkozunk. (Ekkor $\omega = 1$) Eredményeinket könnyen átirhatjuk ezután az $a \neq 2\pi$ esetre.

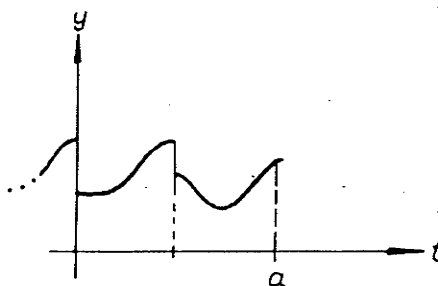
A legelső probléma amivel foglalkozunk a következő:

Hogyan válasszuk meg az $a_0, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots$ együtthatókat, hogy

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_k \cos kt + b_k \sin kt + \dots$$

legyen?

Tételezzük fel azt, hogy a jobb oldalon álló trigonometrikus sor egyenletesen konvergál az adott f függvényhez. Ekkor az egyenlőség mindkét oldalát megszorozva a $\cos nt$ függvénnyel (n rögzített!), majd tagonként integrálva a $[0, 2\pi]$ intervallumon, az egyenlőség érvényes marad: (ld. 2.8 Tétel).



megengedett függvény

5.1 ábra

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos nt \, dt + a_1 \int_0^{2\pi} \cos t \cos nt \, dt + \\ &+ b_1 \int_0^{2\pi} \sin t \cos nt \, dt + \dots + a_k \int_0^{2\pi} \cos kt \cos nt \, dt + \\ &+ b_k \int_0^{2\pi} \sin kt \cos nt \, dt + \dots \end{aligned}$$

Közvetlen számolással belátható az

$$(*) \quad 1, \cos t, \sin t, \dots, \cos kt, \sin kt, \dots$$

függvénysorozat következő nevezetes tulajdonsága

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt \, dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ 1, & \text{ha } n = m \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \, dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ 1, & \text{ha } n = m \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt \, dt = 0$$

vagyis (ez a lényeges tulajdonság) a $[0, 2\pi]$ intervallumon bármely két különböző függvény szorzatának integrálja nulla a $(*)$ függvénysorozatban. Az ilyen függvénysorozatot ortogonálisnak fogjuk nevezni.

Az elmondottak alapján

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

és ez nyilván tetszőleges n -re, vagyis $n = 0, 1, 2, \dots$ értékekre érvényes.

Használva nyerhető, a $\sin nt$ függvénnyel végigszorozva majd integrálva,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Az kapott a_n, b_n $n = 0, 1, 2, \dots$ értékeket az f függvény Fourier együtthatóinak és az ezekkel az együtthatókkal felírt trigonometrikus sort Fourier sornak nevezzük. Eredményünk a következő:

5.1 Tétel: Ha az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

sor egyenletesen konvergens és a sor összege f , akkor

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Példák: I. Irjuk fel az $f(t) = |\sin t|$ függvény Fourier sorát (5.2 ábra). Ekkor

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t| \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin t \, dt - \right.$$

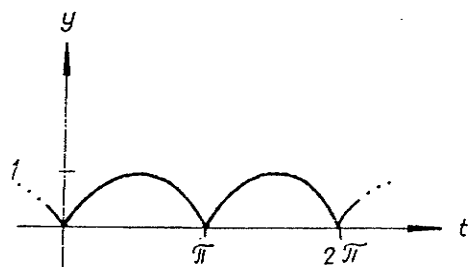
$$\left. - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \, dt \right] = \frac{4}{\pi},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t| \cos kt \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin t \cos kt \, dt - \right.$$

$$\left. - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \cos kt \, dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k+1} (1 - \cos(k+1)\pi) - \frac{1}{k-1} (1 - \cos(k-1)\pi) \right], \text{ ha } k > 1,$$

mivel a



$y = |\sin t|$
5.2 ábra

$$\sin t \cos kt = \frac{1}{2} [\sin (k+1)t - \sin (k-1)t].$$

trigonometrikus azonosság alapján

$$\int \sin t \cos kt \, dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{k+1} \cos (k+1)t + \frac{1}{k-1} \cos (k-1)t \right],$$

ha $k \neq 1$. Továbbá

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t| \cos t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos t \, dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2t \, dt = 0. \end{aligned}$$

Hasonló számításokkal

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t| \sin kt \, dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Arra az eredményre jutottunk, hogy $y = |\sin t|$ Fourier sora "tiszta koszinusz" sor és a Fourier együtthatók sorozata

$$\frac{4}{\pi}, 0, -\frac{4}{3\pi}, 0, -\frac{4}{15\pi}, 0, -\frac{4}{35\pi}, 0, \dots$$

általában

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right), & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

és így a Fourier sor

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 2t - \frac{4}{15\pi} \cos 4t - \dots - \frac{4}{(2k+1)(2k-1)} \cos 2kt + \dots$$

Tömörebb formában

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-1} \cos 2kt.$$

MEGJEGYZÉS: a) Figyeljük meg, hogy

$$\int_0^{2\pi} |\sin t| \sin kt \, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} |\sin t| \sin kt \, dt$$

és így abból, hogy $|\sin t| \sin kt$ páratlan függvény, már rögtön következik; hogy $b_k = 0$.

b) Figyeljük meg azt is, hogy

$$\int_0^{2\pi} |\sin t| \cos ktdt = \int_{-\pi}^{+\pi} |\sin t| \cos ktdt$$

és így abból, hogy $|\sin t| \cos kt$ páros függvény, az a_k $k \neq 1$ együtthatókat

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\sin t| \cos ktdt = 2 \int_0^{\pi} |\sin t| \cos ktdt = 2 \int_0^{\pi} \sin t \cos ktdt$$

alapján az elmondottaknál egyszerűbben is kiszámíthatjuk.

c) Arról még nem beszéltünk, hogy $y = |\sin t|$ Fourier-sora konvergál-e a függvényhez. Itt "előlegezett bizalommal" egyenlőséget írtunk a függvény és a Fourier sora közé. Ezt fogjuk tenni a jövőben is. Így minden esetben amikor a konvergencia problémák nem tisztázottak " $f(t) =$ " így olvasandó: " $f(t)$ Fourier-sora egyenlő".

A Fourier-sor összege itt valóban előállítja a függvényt?

Mivel a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$ sor konvergens és nyilván

$$\frac{1}{4k^2 - 1} \geq \frac{1}{4k^2 - 1} |\cos 2kt|,$$

ezért a Fourier-sor egyenletesen konvergens. (ld. 2.6 tétel).

Később, a Fourier sorok konvergenciájáról szóló 4. pontban megmutatjuk, hogy ha f folytonos függvény és a Fourier sora egyenletesen konvergens, akkor a sor összege maga a függvény. (Ez nem nyilvánvaló, ld. a Taylor sor esetében a 4.1 ábrát.)

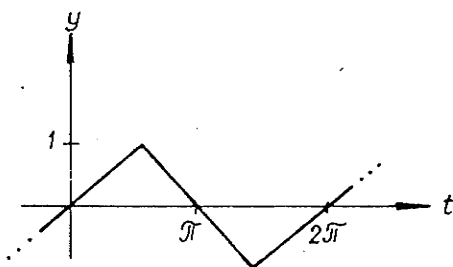
II. Irjuk fel az

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} t, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < t \leq +\frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi} t, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad f(t - 2\pi) = f(t)$$

függvény Fourier sorát (5.3 ábra).

Közvetlenül látható, hogy

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$



5.3. ábra

Mivel minden 2π periódusu g függvényre

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi+a} g(t) dt$$

(tetszőleges a mellett), ezért

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} t \cos kt dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(2 - \frac{2}{\pi} t\right) \cos kt dt = 0$$

($k = 1, 2, \dots$),

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} t \sin kt dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[2 - \frac{2}{\pi} t\right] \sin kt dt =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \left[-\frac{3\pi}{2k} \cos k \frac{\pi}{2} \cos k \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \sin k \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k} \frac{3\pi}{2} \cos k \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin k \frac{3\pi}{2} \right] +$$

$$+ \frac{2}{k\pi} (\cos k \frac{\pi}{2} - \cos k \frac{3\pi}{2}),$$

amiből kiolvasható, hogy $b_k = 0$, ha k páros, $b_k = \frac{4}{k^2}$, ha k néggyel osztva egyet ad maradékul, és $b_k = -\frac{4}{k^2}$, ha k néggyel osztva hármat ad maradékul. Formulában:

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros} \\ \frac{2}{k^2}, & \text{ha } k = 4n + 1 \\ -\frac{2}{k^2}, & \text{ha } k = 4n + 3 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Eredményünk alapján

$$f(t) = 2 \left(\sin t - \frac{1}{9} \sin 3t + \frac{1}{25} \sin 5t - \frac{1}{49} \sin 7t + \dots \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} \sin (2k+1)t$$

és éppugy mint az előző példában belátható, hogy a sor egyenletesen konvergál az f függvényhez.

III. Az I. példa eredményében, $t = \frac{\pi}{2}$ értéket helyettesítve

$$\left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos k\pi.$$

Figyelembe véve $\sin \frac{\pi}{2}$ és $\cos k\pi$ $k = 1, 2, \dots$ értékeit, megfelelő rendezés után

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4k^2 - 1},$$

vagyis az

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \dots + (-1)^k \frac{1}{4k^2 - 1}$$

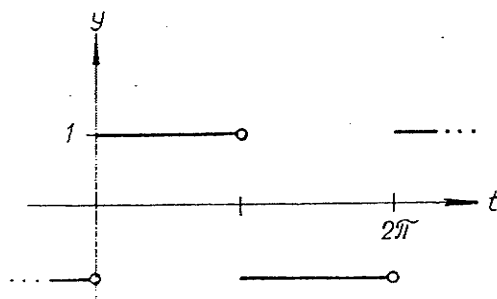
sor összegéből kiszámíthatjuk π értékét.

MEGJEGYZÉS: Ahhoz, hogy π értékét ebből a sorból 0,01 pontossággal biztosan megkapjuk 10 tagot kell összeadnunk. (Miért?)

A Fourier együtthatókra vonatkozó eredményeket azon feltétel mellett nyertük, hogy az f függvény Fourier sora egyenletesen konvergál az f függvényhez (az egész számegyenesen).

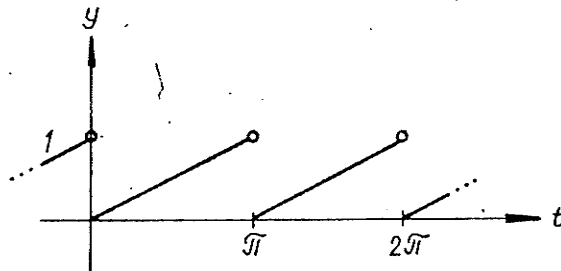
A Fourier sorok jelentős része azonban nem konvergál egyenletesen.

Példa: Gyakran fordul elő, hogy az ábrán látható periodikus jeleket kell Fourier sorba fejteni. (5.4 és 5.5 ábra). Ekkor a Fourier sor nem konvergálhat egyenletesen a megfelelő függvényhez, mivel folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának összege is folytonos függvény. (Ld. 2.7 Tétel.)



négyszög rezgés

5.4 ábra



fűrészes rezgés

5.5 ábra

(Ebből arra is következtethetünk, hogy az ugráshelyek körül lehet baj a közelítés pontosságával.)

Részben ez a jelenség indokolja, hogy a Fourier együtthatók meghatározására egy másik utat keressünk.

3. Egy minimum probléma

Határozzuk meg az a_k, b_k $k = 0, 1, 2, \dots$ együtthatókat úgy, hogy

$$(*) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right])^2 dt$$

értéke minimális legyen.

Részletesen kifejtve a fenti integrált és figyelembe véve az

$$2, \cos t, \sin t, \dots, \cos kt, \sin kt, \dots$$

függvénysorozat ortogonálítását (ld. 2. pont) a fenti integrál

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) - a_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt - \\ & - 2 \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt - 2 \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt \end{aligned}$$

alakot ölt. Ez a kifejezés, minden egyes a_k és b_k másodfoku függvé-

nye. Ezért a minimumkeresést teljes négyzetté egészítéssel kezdjük. A fenti összeg ekkor

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt + \frac{1}{2} \left(a_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt \right)^2 + \\ & + \sum_{k=1}^n \left(b_k - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt \right)^2 - \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right)^2 - \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt \right)^2 - \\ & - \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt \right)^2. \end{aligned}$$

Ebből az alakból viszont nyilvánvaló, hogy a szóban forgó integrál értéke pontosan akkor lesz minimális, ha

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt$$

vagyis a_k, b_k $k = 0, 1, 2, \dots$ éppen az előző, 2. pontban meghatározott Fourier együtthatók.

MEGJEGYZÉS: Ha a többváltozós függvények szélsőértékszámítását ismerjük, akkor annak alkalmazásával is eljutunk a fenti eredményre. Ugyanis, az a_k és b_k változók szerinti parciális deriváltak,

$$2a_k - 2 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$2b_k - 2 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

pontosan a fenti értéknél nullák és a második deriváltakból alkotott mátrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & & \\ . & & . & \\ . & & & . \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

nyilván pozitív definit. (Ld. Valós többváltozós függvények differenciálszámítása IV. 2.12. és 14.)

A kitűzött minimumprobléma megoldásából fontos összefüggést kaptunk egy függvény négyzetintegrálja és a Fourier együtthatói között.

Ha a_k, b_k Fourier együtthatók, akkor

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right])^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt - \left(\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right),$$

amiből következik, hogy a Fourier együtthatók négyzetösszege konvergens és

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt.$$

Ez az egyenlőtlenség alapvetően fontos a Fourier sorok elméletében.

FELADATOK

1. Legyen h egy 2π szerint periodikus függvény és c tetszőleges érték. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\int_0^{2\pi} h(t) dt = \int_c^{c+2\pi} h(t) dt.$$

2. Milyen, a fentihez hasonló tulajdonsága van egy tetszőleges T -periodosusú függvénynek?
3. Igazoljuk, hogy

$$a) \int_0^{2\pi} \cos kt \sin mt dt = 0$$

$$b) \int_0^{2\pi} \cos kt \cos mt dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq m \\ \pi, & \text{ha } k = m \end{cases}$$

$$c) \int_0^{2\pi} \sin kt \sin mt dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq m \\ \pi, & \text{ha } k = m. \end{cases}$$

4. Adott a -hoz hogyan kell ω értékét úgy megválasztani, hogy az $1, \cos \omega t, \sin \omega t, \dots, \cos k \omega t, \sin k \omega t, \dots$ függvénysorozat ortogonális legyen a $[0, a]$ intervallumon?

5. Legyen h egy T -periódusu függvény. Ekkor a h Fourier-együtthatóinak nevezzük az

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T h(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t \, dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T h(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t \, dt$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

értékeket. Igazoljuk, hogy ha az

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + \dots + a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t + \dots$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergál a h függvényhez, akkor a_k, b_k $k = 0, 1, 2, \dots$ csakis a Fourier együtthatók lehetnek.

6. Igaz-e minden páratlan függvényre, hogy Fourier sorában $a_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)?
 7. Mi jellemzi egy páros függvény Fourier-sorát?

4. A Fourier-sor konvergenciája

Eddig még nem foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogy egy függvény Fourier-sora mikor konvergál a függvényhez. Csupán két dolgot állapítottunk meg:

a) Ha az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergál az f függvényhez akkor a_k, b_k éppen az f függvény Fourier együtthatói.

b) Ha

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

akkor

$$(*) \quad \int_0^{2\pi} (f(t) - T_n(t))^2 \, dt$$

értéke pontosan akkor minimális, ha a_k, b_k éppen az f Fourier együtthatói.

Az első eredmény azt sugallja, hogy megvizsgáljuk, melyek azok a függvények, amelyeknek Fourier sora egyenletesen konvergens és a sor összege minden t értékre $f(t)$.

A második eredmény pedig azt a problémát veti fel, hogy n növelésével az $(*)$ integrál értéke tetszőlegesen kicsivé tehető-e? Röviden, igaz-e, hogy ha $T_n(t)$ az $f(t)$ Fourier-sorának n -edrendű részletösszege, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [f(t) - T_n(t)]^2 dt = 0?$$

A következőkben az egyenletes konvergencia problémájával foglalkozunk. A második problémára a 6. pontban térünk rá.

Segéd-tétel: Ha g egy olyan megengedett függvény, amelyre

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0 \quad \text{és} \quad f(t) = f(0) + \int_0^t g(\tau) d\tau,$$

(vagyis, f egy olyan (2π) szerint) periodikus függvény, amely egy megengedett g integrálfüggvénye), akkor az f és g függvény $\{a_k, b_k\}$ és $\{a'_k, b'_k\}$ Fourier együtthatói között a következő összefüggés van

$$a_k = -\frac{1}{k} b'_k, \quad b_k = +\frac{1}{k} a'_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Bizonyítás: Közvetlen számolással:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt = \frac{1}{k\pi} \left[f(t) \sin kt \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin kt dt = -\frac{1}{k} b'_k,$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt = -\frac{1}{k\pi} \left[f(t) \cos kt \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos kt dt = \\ &= \frac{1}{k} a'_k - \frac{1}{k} (f(2\pi) - f(0)) \end{aligned}$$

és $f(2\pi) - f(0) = 0$, mivel f 2π szerint periodikus folytonos függvény. $\square$

5.2 Tétel: Ha f kétszer differenciálható, függvény és az f' deriváltfüggvény is folytonos, akkor f Fourier-sora egyenletesen konvergens.

Bizonyítás: Kétszer alkalmazva az előző eredményt

$$a_k = \frac{1}{k^2} a''_k \quad \text{és} \quad b_k = \frac{1}{k^2} b''_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ahol a''_k , b''_k az f'' Fourier együtthatói. Ennek alapján

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot (a''_k \cos kt + b''_k \sin kt).$$

Ha figyelembe vesszük azt, hogy $a''_k \rightarrow 0$, $b''_k \rightarrow 0$, (hiszen az előző, 3. pont végén igazolt egyenlőtlenség alapján $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$), akkor azt kapjuk, hogy elegendően nagy n -re $|a''_n \cos nt + b''_n \sin nt|$ kisebb például mint kettő.

Ebből következik, hogy elegendően nagy n, m párra

$$\left| \sum_{k=n}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| = \left| \sum_{k=n}^m \frac{1}{k^2} (a''_k \cos kt + b''_k \sin kt) \right| \leq \sum_{k=n}^m \frac{2}{k^2},$$

amiből a 2.6 Tétel, a "Weierstrass kritérium" alapján már következik, hogy f Fourier-sora egyenletesen konvergens. $\square$

A most bebizonyított tétel nem kielégítő a villamosmérnök számára, hiszen még a 2. pont megoldott példáira sem alkalmazható. (Miért?). Hatásosabb tétel igazolására a Stieltjes-integrálról tanultak szükségeseek.

5.3 Tétel: Ha az f függvényről csupán azt tételezzük fel, hogy egy megengedett g függvény integrálfüggvénye, a Fourier-sora akkor is egyenletesen konvergens.

Bizonyítás: Ekkor

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(\tau) d\tau$$

és a g Fourier együtthatóira:

$$a'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos ktdt = \frac{1}{k\pi} \left[g(t) \sin kt \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} \sin kt dg(t),$$

amiből a folytonos függvények Stieltjes integráljára vonatkozó alapvető becslés alapján

$$|a'_k| \leq \frac{1}{k\pi} \text{Var } g ;$$

és hasonló módon

$$|b'_k| \leq \frac{1}{k\pi} \text{Var } g.$$

(Itt $\text{Var } g$ jelenti a g függvény totális variációját. Ld. Valós egyváltozós függvények integrálszámítása III.2.21.)

A Segéd-tétel alapján ebből következik

$$|a_k| < \text{konst.} \cdot \frac{1}{k^2} ; |b_k| < \text{konst.} \cdot \frac{1}{k^2}$$

és éppugy mint az előző 5.2 tételben ebből már következik a kívánt egyenletes konvergencia. $\square$

Abból, hogy egy f függvény Fourier sora egyenletesen konvergens, még nem következik, hogy az f függvényhez konvergál. Ezt külön be kell bizonyítani.

Meg fogjuk mutatni a következőt:

5.4 Tétel: Ha az f folytonos függvény Fourier-sora egyenletesen konvergens és összege $T(t)$, akkor $T(t) = f(t)$ (minden t értékre).

A bizonyítás két lépésben történik.

I. lépés: Legyen $T(t)$ a Fourier-sor összege, ekkor

$$\int_0^{2\pi} [T(t) - f(t)] \cos ktdt = 0 ; \quad \int_0^{2\pi} [T(t) - f(t)] \sin ktdt = 0$$

($k = 0, 1, 2, \dots$) vagyis a $T - f$ folytonos függvény minden Fourier együtt-hatója nulla.

Ezt az állítást közvetlen számolással igazolhatjuk.

II. lépés: A momentum tétel: Ha a h folytonos függvény minden Fourier-együtthatója nulla, vagyis

$$\int_0^{2\pi} h(t) \cos ktdt = 0 \quad \text{és} \quad \int_0^{2\pi} h(t) \sin ktdt = 0$$

($k = 0, 1, 2, \dots$), akkor $h(t) = 0$ minden t értékre.

MEGJEGYZÉS: A momentum tétel tartalma az, hogy csakis a $h = 0$ függvény az, amelynek minden Fourier-együtthatója nulla.

A momentum tétel bizonyítása. Ha van olyan t_0 , hogy $h(t_0) = c \neq 0$, akkor

$$g(t) = \frac{1}{c} h(t + t_0)$$

olyan folytonos függvény, hogy $g(0) = 1$ és.

$$\begin{aligned} c \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) \cos kt \, dt &= \int_{-\pi}^{+\pi} h(t) \cos k(t - t_0) \, dt = \cos kt_0 \int_{-\pi}^{+\pi} h(t) \cos kt \, dt + \\ &+ \sin kt_0 \int_{-\pi}^{+\pi} h(t) \sin kt \, dt = 0, \end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\int_0^{2\pi} g(t) \cos kt \, dt = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

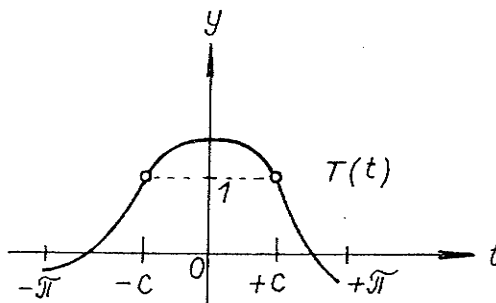
Ugyanígy látható be, hogy

$$\int_0^{2\pi} g(t) \sin kt \, dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Mivel g folytonos és $g(0) = 1$, ezért van olyan $(-a, +a)$ intervallum, amelyben $g(t) > \frac{1}{2}$. Legyen $T(t) = 1 - \cos a + \cos t$ (6.6 ábra); ekkor $T^n(t)$ $n = 1, 2, \dots$ mind trigonometrikus polinomok (miért?) és így

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(t) T^n(t) \, dt = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Bontsuk fel ezt az integrált öt részre



5.6 ábra

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \dots = \int_{-\pi}^{-a-\varepsilon} + \int_{-a-\varepsilon}^{-a} + \int_{-a}^{+a} + \int_{+a}^{+a+\varepsilon} + \int_{+a+\varepsilon}^{+\pi}.$$

A $(-a, +a)$ intervallumon $T(t) > 1$ és $g(t) > \frac{1}{2}$ és így

$$\int_{-a}^{+a} g(t) T^n(t) dt > a.$$

A $(-T, -a - \varepsilon)$ és $(a + \varepsilon, T)$ intervallumon $|T(t)| \leq q < 1$ és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T}^{-a-\varepsilon} g(t) T^n(t) dt = \int_{a+\varepsilon}^T g(t) T^n(t) dt = 0.$$

Végül, elegendően kicsi $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left| \int_a^{a+\varepsilon} g(t) T^n(t) dt \right| \leq \int_a^{a+\varepsilon} |g(t)| dt$$

és

$$\left| \int_{-a}^{-a-\varepsilon} g(t) T^n(t) dt \right| \leq \int_{-a}^{-a-\varepsilon} |g(t)| dt$$

alapján a bal oldali integrálok értéke tetszőlegesen kicsi.

Azt kaptuk tehát eredményül, hogy

$$\int_{-T}^{+T} g(t) T^n(t) dt$$

nem lehet 0, ami ellentmond feltételünknek. Így $h(t) = 0$ minden t értékre, amit bizonyítani akartunk.

Más esettel nem foglalkozunk. Ugyanis ha f nem integrálfüggvény, akkor a konvergenciaproblémák tárgyalásához olyan matematikai eszközök szükségesek, amelyek tulmennek az eddig tárgyalt matematikai ismeretek keretén.

Erre az esetre bizonyítás nélkül közlünk egy olyan eredményt, amely a villamosmérnöki gyakorlatban előforduló eseteket magában foglalja.

Dirichlet tétele. Legyen a $[0, 2\pi]$ intervallum felosztható olyan (a, b) részintervallumokra, amelyek belsejében f nem csökkenő vagy nem növekvő függvény és a végpontokban pedig létezik az $f(a + 0)$ jobb oldali és az $f(b - 0)$ bal oldali határérték.

Ekkor minden t pontban létezik az $f(t + 0)$ jobb és $f(t - 0)$ baloldali határérték és az f függvény Fourier-sorának összege

$$\frac{1}{2} [f(t + 0) + f(t - 0)].$$

Következésképpen, minden olyan t pontban, ahol f folytonos, a Fourier-sora az f függvényhez konvergál.

FELADATOK

8. Igazoljuk a 3. Tétel bizonyításának I. lépését!

9. Igazoljuk, hogy

$$p(t) = (\sin t)^m \cdot (\cos t)^k \quad m = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

trigonometrikus polinom.

10. Igazoljuk a következő tételt:

"Ha minden t értékre

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = 0,$$

akkor $a_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$ "

11. Mutassuk meg, hogy az előző feladatban közölt tétel a következővel ekvivalens:

"Az $f \rightarrow \{a_k, b_k\}$ leképezés egy-egyértelmű. (Ahol f folytonos fv és $\{a_k, b_k\}$ a Fourier-együtthatók.)"

12. Írjuk fel a 4. ábrán látható függvény Fourier-sorát. Mutassuk meg, hogy a Fourier-sor összege 0 a $t = k\pi$ pontokban.

5. A Fourier-sor komplex alakja

Az Euler-formula

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

alapján az e^{jt} hatványai szerint haladó sor alakjában is felírhatunk egy Fourier-sort.

Az Euler-formulából

$$\cos kt = \frac{1}{2} (e^{jkt} + e^{-jkt}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\sin kt = \frac{1}{2j} (e^{jkt} - e^{-jkt}) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

aminek alapján a Fourier-sor n -edik részletösszege így is felírható

$$T_n(t) = \frac{1}{2} \left[a_0 + a_1 (e^{jt} + e^{-jt}) - jb_1 (e^{jt} - e^{-jt}) + \dots + a_n (e^{jnt} + e^{-jnt}) - \right. \\ \left. - jb_n (e^{jnt} - e^{-jnt}) \right].$$

Bevezetve a $c_k = \frac{1}{2} (a_k + jb_k)$ jelölést, a $T_n(t)$ trigonometrikus polinomot az e^{jkt} hatványai szerint rendezve

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{-jkt},$$

ahol $c_{-k} = \overline{c_k}$, ha $k = 1, 2, \dots$

(Természetesen, bármely trigonometrikus polinom felírható ilyen alakban a fenti átalakítással.)

A komplex alakú tömörebb, jobban kezelhető, "esztétikusabb" formula, mint az eredeti Fourier-sor. Ezért a továbbiakban, különösen az elvi megfontolásoknál, ezt használjuk.

6. Kapcsolat a lineáris algebrával

A geometriai vektortérben minden vektor felbontható három, páronként merőleges vektor összegére

$$\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k},$$

ahol v_1, v_2, v_3 együtthatók skaláris szorzattal határozhatók meg:

$$v_1 = \underline{v} \cdot \underline{i}, \quad v_2 = \underline{v} \cdot \underline{j}, \quad v_3 = \underline{v} \cdot \underline{k}.$$

A lineáris algebrában tanultuk ennek absztrakt megfelelőjét: Egy n -dimenziós Euklideszi-térben adott $\{e_k; k = 1, 2, \dots, n\}$ ortonormált bázissal minden v vektor felírható

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$$

alakban, ahol $v_k = (v|e_k)$ $k = 1, 2, \dots, n$.

A $\{v_k; k = 1, 2, \dots, n\}$ szám n -es az adott $\{e_k\}$ bázisban, "teljes mértékben" képviseli a v vektort abban az értelemben, hogy két

vektor összegének (lineáris kombinációjának) a megfelelő szám n -esek összege (lineáris kombinációja) felel meg és ha v, w két vektor, akkor

$$(v|w) = \sum_{k=1}^n v_k \bar{w}_k,$$

ahol $\{\bar{w}_k\}$ a w "koordinátáinak" komplex konjugáltja.

A következőkben megmutatjuk, hogy a Fourier sorfejtés az elmondottak "végtelen dimenziós" általánosításaként is felfogható.

Először az n -edfoku trigonometrikus polinomok és a szám $2n + 1$ -esek kapcsolatát fogjuk megvizsgálni.

Rendeljük hozzá minden egyes (legfeljebb) n -edfoku trigonometrikus polinomhoz a (Fourier) együtthatóit. Ekkor egy lineáris izomorfizmust adunk meg az n -edfoku trigonometrikus polinomok és a szám $2n + 1$ -esek között. Ennek az izomorfizmusnak a következő fontos tulajdonságai vannak:

5.5 Tétel: Legyen

$$T_n = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{-jkt} \quad \text{és} \quad T'_n = \sum_{k=-n}^{+n} c'_k e^{-jkt}$$

két (legfeljebb) n -edfoku trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) T'_n(t) dt = \sum_{k=-n}^{+n} c_k \bar{c}'_k$$

speciálisan

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |T_n(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2.$$

Bizonyítás: Közvetlen számolással:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) \overline{T'_n(t)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{-jkt} \sum_{m=-n}^{+n} \bar{c}'_m e^{jmt} dt = \\ &= \sum_{k=-n}^{+n} \sum_{m=-n}^{+n} c_k \bar{c}'_m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jkt} e^{jmt} dt; \end{aligned}$$

figyelembe véve, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jkt} e^{jmt} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m-k)t dt + j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(m-k)t dt = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq k \\ 1, & \text{ha } m = k \end{cases} \end{aligned}$$

kapjuk a kívánt eredményt. $\square$

Az előző tételhez hasonlóan bizonyítható:

5.6 Tétel: Ha

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{-jkt}, \quad \text{akkor} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) e^{jkt} dt.$$

A fenti két tétel a következő analógiát mutatja:

Két trigonometrikus polinom szorzatintegrálja az együtthatókból alkotott szám n -esek skaláris szorzatával egyenlő.

A Fourier együtthatókat úgy számítjuk ki, mint egy vektor komponenseit adott ortonormált bázisban, ha skaláris szorzatnak a megfelelő szorzatintegrált tekintjük.

A fenti egyenlőségek átvihetők egy folytonos f függvény Fourier-sorára, ha a Fourier-sor egyenletesen konvergens:

Ha a folytonos f függvény Fourier sora egyenletesen konvergens, akkor (2.8 Tétel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{-jkt} \right|^2 dt = 0,$$

ha $\{c_k; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ az f (komplex) Fourier együtthatói:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} (a_k + j b_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt + j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{jkt} dt. \end{aligned}$$

Ebből következik az 5.3 pontban mondottak alapján

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Továbbá

5.7 Tétel: Ha az f és g folytonos függvények Fourier-sora egyenletesen konvergens és a megfelelő Fourier-együtthatók $\{c_k\}$ és $\{d_k\}$, akkor

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \overline{d_k}.$$

Bizonyítás. Ha a megfelelő Fourier-sorok n -edik részletösszege F_n és G_n , akkor az 5.5 tétel alapján

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) G_n(t) dt = \sum_{k=-n}^{+n} c_k \overline{d_k},$$

mivel feltételünk szerint $F_n \rightarrow f$ és $G_n \rightarrow g$ egyenletesen ezért (ld. 2.8 Tétel)

$$\int_0^{2\pi} F_n(t) G_n(t) dt \rightarrow \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt,$$

amivel állításunkat bebizonyítottuk. $\square$

Felmerül a kérdés, mit mondhatunk arra az esetre, amikor f Fourier-sora nem konvergál egyenletesen?

Ennek a kérdésnek a tárgyalásához olyan matematikai eszközök szükségesek, amelyek tulmennek az eddig tárgyalt matematikai ismeretek keretén. Bizonyítás nélkül azonban közöljük, hogy az előző 5.7 tétel minden "megengedett" függvényre érvényes.

Speciálisan, minden megengedett f függvényre

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

és így, ha T_n az f Fourier sorának n -edrendű részletösszege, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [f(t) - T_n(t)]^2 dt = 0.$$

7. Ortogonalis függvényrendszerek

Az elmondottak alapján sejthető, hogy a Fourier sorfejtés "sikere" az

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

függvénysorozat következő tulajdonságán alapul

$$\frac{1}{T} \int_0^{2T} \cos kt \cos mtdt = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq m \\ 1, & \text{ha } k = m \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^{2T} \sin kt \sin mtdt = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq m \\ 1, & \text{ha } k = m \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^{2T} \sin kt \cos mtdt = 0.$$

Ez, valamint a Fourier sorfejtés és a lineáris algebra között az előző pontban kifejtett kapcsolat a következő általánosítást sugallja.

Legyenek a továbbiakban szereplő függvények egy $[a, b]$ intervallumon értelmezett olyan valós, vagy komplex értékű függvények, amelyek az 5.2 pontban leírt megengedett függvényosztályhoz tartoznak, illetve a valós és képzetes része megengedett függvény.

5.8 Definíció. Az $\{e_k(t); k = 1, 2, \dots\}$ függvénysorozatot az $[a, b]$ intervallumon ortogonalisnak nevezzük, ha

$$\int_a^b e_k(t) \overline{e_m(t)} dt = 0, \text{ ha } k \neq m \text{ és } \int_a^b |e_k(t)|^2 dt > 0.$$

Ha ezen felül $\int_a^b |e_k(t)|^2 dt = 1 \quad k = 1, 2, \dots$ akkor

$e_k; k = 1, 2, \dots$ ortonormált rendszer.

Ortogonalis és normált, röviden ortonormált függvénysorozatokra is érvényesek a következők:

5.9 Tétel: Legyen f megengedett függvény az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor az

$$\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k e_k(t) \right|^2 dt$$

Értéke pontosan akkor minimális, ha $c_k = \int_a^b f(t) e_k(t) dt$.
Ekkor

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt .$$

A c_k értékeket az f általánosított Fourier-együtthatóinak nevezzük (az e_k ortonormált rendszerre vonatkozólag.)

A tétel bizonyítása az 5.3 pontban leírt módon történhet, éppen úgy mint a Fourier-sorok esetén. $\square$

5.10 Definíció. Az $\{e_k ; k = 1, 2, \dots\}$ ortogonális rendszer teljesnek nevezzük, ha a Momentum Tétel (5.4 Tétel II.) érvényes az $\{e_k ; k = 1, 2, \dots\}$ függvénysorozatra.

Ez azt jelenti, hogy ha a h folytonos függvény minden általánosított Fourier-együtthatója nulla, vagyis

$$\int_a^b h(t) e_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

akkor $h(t) \equiv 0$.

Ha az $\{e_k ; k = 1, 2, \dots\}$ ortonormált rendszer teljes, a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k(t)$$

függvénysor egyenletesen konvergens, a $\{c_k ; k = 1, 2, \dots\}$ egy f folytonos függvény általánosított Fourier-együtthatói (az e_k rendszerre vonatkozóan), akkor érvényesek az 5.4-5.7 Tételek következő általánosításai.

5.4* Tétel: $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k(t)$

és nyilvánvalóan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k e_k(t) \right|^2 dt = 0 .$$

5.7* Tétel: Ha $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k(t)$ és $g = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k(t)$,

akkor

$$\int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k},$$

speciálisan

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Ezek a tételek teljesen az 5.4 illetve 5.7 Tétel mintájára bizonyíthatók.

Abban az esetben, amikor f és g az e_k függvények lineáris kombinációi, a fenti két tétel a következő alakot ölti.

5.6* Tétel. Ha

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k(t), \quad \text{akkor} \quad \alpha_k = c_k = \int_a^b s_n(t) e_k(t) dt.$$

5.5* Tétel. Ha

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k e_k(t) \quad \text{és} \quad s'_n(t) = \sum_{k=1}^n c'_k e_k(t),$$

akkor

$$\sum_a^b s_k(t) \overline{s'_n(t)} dt = \sum_{k=1}^n c_k \overline{c'_k}.$$

Felmerül a kérdés, mit mondhatunk arra az esetre, amikor f és g általánosított Fourier-sora nem konvergál egyenletesen?

Ennek a kérdésnek a tárgyalásához olyan matematikai eszközök szükségesek, amelyek tulmennek az eddig tárgyalt matematikai ismeretek keretén. Bizonyítás nélkül azonban közöljük, hogy az 5.4* - 5.7* tételek minden "megengedett" függvényre érvényesek.

5.7^{xx} Tétel. Legyen $\{e_k; k = 1, 2, \dots\}$ teljes ortonormált rendszer,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k(t) \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k(t)$$

a megengedett f és g függvények általánosított Fourier-sora.
Ekkor

$$(*) \quad \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k},$$

speciálisan

$$(*) \quad \int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2,$$

továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k e_k(t) \right|^2 dt = 0.$$

A tételben szereplő $(*)$ egyenlőségeket nevezzük Parseval-formulának v: Parseval-egyenlőségnek.

8. Példák ortogonális függvényrendszerre

Az

$$1, t, \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \dots$$

kezdetű polinomsorozat, amelynek képzési szabálya

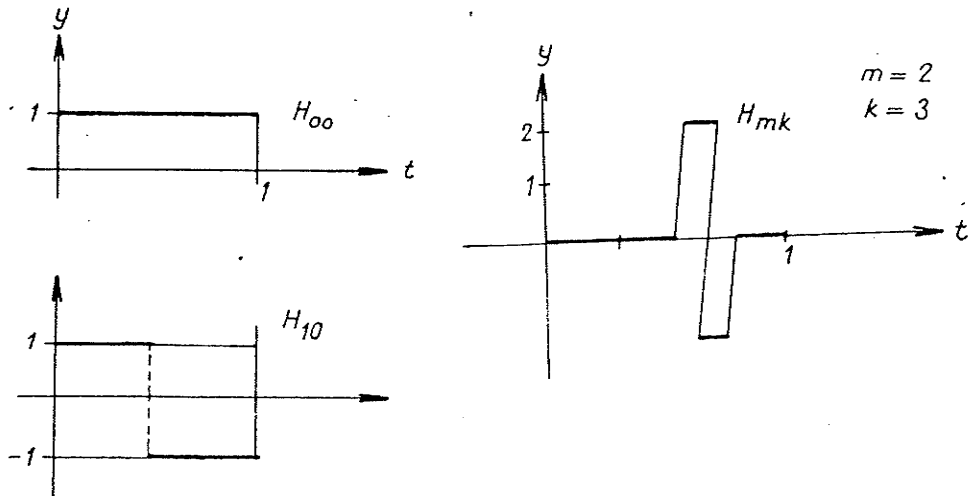
$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n,$$

ortogonális a $[-1, +1]$ intervallumon. Ezt az ortogonális rendszert Legendre-polinomoknak nevezzük.

A legegyszerűbb függvények, valamely intervallum karakterisztikus függvényei (a műszaki tudományokban négyzetimpulzus-függvénynek is ne-

vezik az ilyen függvényeket). A Haar-rendszer ilyen karakterisztikus függvények lineáris kombinációjából álló ortogonális függvényrendszer. Ez egy kettős indexszel ellátott a $[0,1]$ intervallumon értelmezett

$\{H_{mk} ; k = 1, 2, \dots, 2^m ; m = 1, 2, \dots\}$ függvénysorozat, ahol H_{00} és H_{01} a 6. ábrán látható függvények és általában a H_{mk} függvényt úgy kapjuk, hogy a $[0,1]$ intervallumot 2^m egyenlő részre osztjuk; a H_{mk} függvény értéke a k -adik intervallumon kívül nulla, a k -adik intervallumot pedig megfelelően a függvényérték az intervallum első felében $\sqrt{2^m}$, a második felében $-\sqrt{2^m}$ [5.7] ábra.



5.7 ábra

Ennek a rendszernek alkalmazásánál hátrányos, hogy nagy m esetén a $H_{mk}(t)$ függvény értéke igen kis intervallumon kívül nulla, másrészt a függvényérték igen nagy lehet. Ezért előnyösebb a megfelelő Haar-függvények összegezéséből származó ún. Rademacher-függvényekkel számolni; amelyek szintén ortogonális rendszert alkotnak. [5.8] ábra.

A Haar és Rademacher-függvénysorozat közötti kapcsolat a következő:

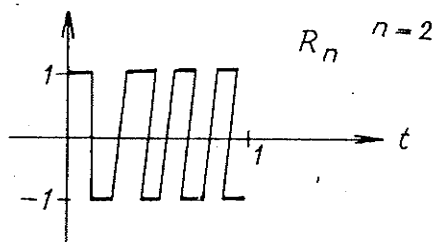
$$R_0 = H_{00} ; \quad R_1 = H_{10} \quad \text{és}$$

$$R_n = \sqrt{2^{-n}} \sum_{k=1}^{2^n} H_{nk} \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

A Rademacher-függvényrendszer azonban nem teljes. Például, ha

$f(t) = \cos 2\pi t$, akkor

$$\int_0^1 R_n(t) f(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$



Ezért a Rademacher-rendszert kiegészítik további lépcső-függvényekkel úgy, hogy a bővített ortogonális rendszer már teljes legyen. Ez így történik:

5.8 ábra

$$W_0 = R_0, \quad W_1 = R_1$$

$$W_n = R_{n_1+1} R_{n_2+1} \dots R_{n_p+1} \quad (n > 1),$$

ahol $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_p}$, vagyis az n szám bináris alakjából determinált.

Figyeljük meg, hogy $W_{2^n} = R_{n+1}$ vagyis a fenti sorozat tartalmazza a Rademacher függvényeket.

A Rademacher-rendszer fenti bővítését Walsh-függvényeknek nevezzük és a Fourier sorfejtés után a Walsh-függvények szerinti sorfejtésnek van a legnagyobb jelentősége.

Laguerre függvényeknek nevezzük a $t^n e^{-\alpha t}$ $\alpha > 0$ függvények lineáris kombinációból nyert a $[0, \infty)$ intervallumon ortogonális rendszert. Ezeknek főként a differenciálegyenleteknek a Laplace-transzformáció segítségével történő megoldásánál van jelentősége.

A kitűzött feladatok megoldása:

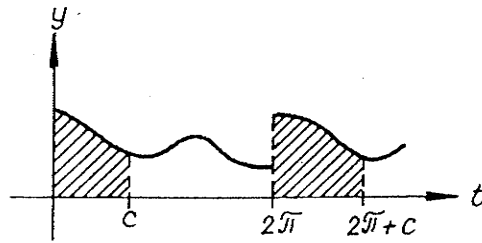
1.

$$\int_c^{c+2\pi} h(t) dt = \int_c^{2\pi} h(t) dt + \int_{2\pi}^{2\pi+c} h(t) dt$$

és $t = \tau + 2\pi$ helyettesítéssel

$$\int_{2\pi}^{2\pi+c} h(t) dt = \int_0^c h(\tau + 2\pi) d\tau = \int_0^c h(\tau) d\tau,$$

amiből az állítás következik.



5.9 ábra

$$2. \quad \int_0^T h(t) dt = \int_C^{T+C} h(t) dt.$$

$$3.a) \quad \int_0^{2\pi} \cos kt \sin mt dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kt \sin mt dt$$

és $\cos kt \sin mt$ páratlan függvény.

b) Ha $k = m$, akkor

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kt dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2kt) dt = \pi.$$

Ha $k \neq m$, akkor az integrál értékét a

$$\cos kt \cos mt = \frac{1}{2} [\cos (k+m)t + \cos (k-m)t]$$

alapján számoljuk ki.

c) Teljesen a b) mintájára.

$$4. \quad \omega = \frac{2\pi}{a}; \text{ érdekes speciális esetek:}$$

ha $a = 2\pi$, akkor $\omega = 1$ és ha $a = \pi$, akkor $\omega = 2$.

5. Szóról szóra ugy történik, mint a 2. pontban a $T = 2\pi$ esetben.

6. Igaz, mivel ekkor $f(t) \cos kt$ páratlan függvény és

$$\int_0^{2\pi} = \int_{-\pi}^{+\pi}.$$

7. Ha f páros, akkor $f(t) \sin kt$ páratlan függvény és így

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \, dt = 0.$$

8. Ha $T_n(t)$ a Fourier sor n -edrendű részletösszege, akkor

$$T_n - f \rightarrow T - f$$

egyenletesen és így a $[T(t) - f(t)] \cos kt$ tagonként integrálható.

$$\int_0^{2\pi} [T(t) - f(t)] \cos kt \, dt = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos kt \, dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos nt \cos kt \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin nt \cos kt \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt = a_k \pi - \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt = 0.$$

9. Ha $m = 1$, $k = 1$, akkor $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$; ha $m = 1$, $k = 2$, akkor $\sin t \cos^2 t = \frac{1}{2} \sin 2t \cos t = \frac{1}{2} (\sin 3t + \sin t)$,

ha $m = 2$, $k = 1$, akkor $\sin^2 t \cos t = \frac{1}{2} \sin t \sin 2t = \frac{1}{2} (\cos 3t - \cos t)$,

ha már az m, k párra igazolt a tétel, akkor ebből már következik az $m, k+1$ párra a következőképpen:

$$(\sin t)^m (\cos t)^{k+1} = \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \cdot \cos t =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k [\cos (k+1)t + \cos (k-1)t] + \beta_k [\sin (k+1)t +$$

$$+ \sin (k-1)t]),$$

ami újra trigonometrikus polinom, s.i.t.

10. Ez a tétel a momentum-tétellel ekvivalens. Ugyanis, ha a sorösszeg $s(t)$, akkor

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(t) \cos kt \, dt; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(t) \sin kt \, dt$$

és így $a_k = b_k = 0$ pontosan akkor, ha a momentum tétel feltételei teljesülnek.

11. Nyilvánvaló.
12. Mivel a függvény páratlan, ezért Fourier sora "szinuszos" sor és így a Fourier sor összege a $t = k\pi$ pontokban nulla.
A Fourier-sor

$$T(t) = + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin (2k+1)t .$$