

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Császár Ákosné

VEKTORANALÍZIS



Műegyetemi Kiadó, 2002.

Szerző:
Császár Ákosné dr.

(Nyolcadik utánnymás)

Azonosító: **051372**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának**
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Hajdu István
Terjedelem: 14,7 (A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó
Munkaszám: 0133-02

EGYPARAMÉTERES VEKTOR-SKALÁRFÜGGVÉNYEK

a) Definíció

Egyparaméteres vektor-skalárfüggvénynek olyan utasítást nevezünk, amely a valós számok bizonyos P_1 részhalmazának minden eleméhez egy vektorokból álló R halmaz meghatározott elemét rendeli. A P_1 halmazt a függvény értelmezési tartományának, az R halmazt pedig a P_1 függvény értékkészletének nevezzük. A P_1 halmaz elemeit t -vel, az R halmaz elemeit $\vec{r}$ -rel jelölve, függvénykapcsolatunk így írható:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad , \quad \text{vagy} \quad \vec{r} = \vec{v}(t).$$

A t skalár független változót paraméternek szoktuk nevezni.

Az R halmaz elemei ($\vec{r}(t)$ értékkészletének elemei) felfoghatók, mint egy derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjából kiinduló helyzetvektorok, s mint ilyeneket a koordináta-rendszerben összetevőikre bontva:

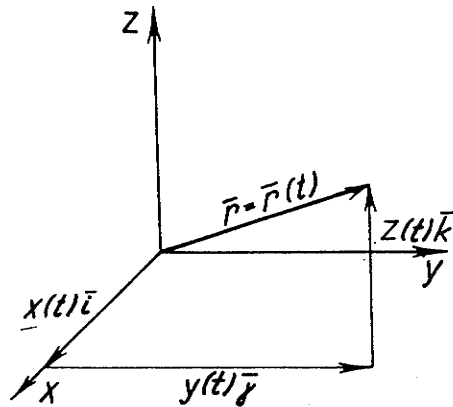
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad ,$$

amiből a függvénykapcsolatot más-képp megadó:

$$x = x(t) \quad ,$$

$$y = y(t) \quad ,$$

$$z = z(t)$$



un. paraméteres egyenletrendszer adódik.

Szemléltetni az egyparaméteres vektor-skalárfüggvényeket úgy tudjuk, hogy a független változó szóbaeső értékeihez tartozó $\vec{r}$ vektorokat a tér valamely fix pontjából mint helyzetvektorokat mérjük fel; e vektorok térbeli pontokhoz mutatnak, e pontok összessége, ill. az ezeken átfektetett

térgörbe, lesz az egyparaméteres vektor-skalárfüggvény képe. Megfordítva, egy térgörbe (speciálisan síkgörbe) egyenletét egyparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel, ill. a koordináta-rendszer megadása után a megfelelő paraméteres egyenletrendszerrel adhatjuk meg.

Ha egy síkgörbe egyenletét sikerül olyan paraméteres egyenletrendszerrel megadni, melyben a t paraméter éppen az x derékszögű koordináta, akkor ez a paraméteres megadás megegyezik a görbe derékszögű koordinátás egyenletével.

Adott $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$ vektorral párhuzamos, az $\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$ helyvektorral jellemzett $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó egyenes egyenlete az

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

vektor-skalárfüggvénnyel, vagy az

$$x = x_0 + t v_1,$$

$$y = y_0 + t v_2,$$

$$z = z_0 + t v_3$$

paraméteres egyenletrendszerrel adható meg. A t paraméter abszolút értékének jelentése itt

$$|t| = \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{|\vec{v}|},$$

speciálisan, ha $\vec{v}$ egységvektor (ekkor $\vec{v} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$):

$$|t| = |\vec{r} - \vec{r}_0|,$$

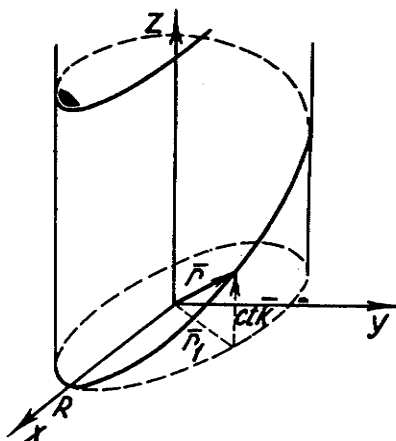
tehát az $\vec{r}$ helyzetvektoru ún. futó pont, és a fix $\vec{r}_0$ helyzetvektoru P_0 pont távolságát adja meg.

Ha a t paraméter az időt jelöli, a mozgó pont pályáját megadó $\vec{r} = \vec{r}(t)$ függvénykapcsolatot mozgásegyenletnek nevezzük. Ha például egy pont a Z tengely körül egyenletes forgást végez és közben a Z tengellyel párhuzamosan egyenletesen emelkedik, akkor ún. közönséges csavarvonal keletkezik. Ennek egyenletét, a keresett mozgásegyenletet, a következőképpen írhatjuk fel:

A mozgó pont vetülete az XY síkban egyenletes forgást végez valamely R sugarú $O(0,0)$ középpontú kör kerületén, vagyis a mozgó pont $\vec{r}$ helyzetvektorának vetületvektora az XY síkra:

$$\vec{r}_1(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j},$$

s mivel feltevésünk értelmében a mozgó pont a Z tengellyel párhuzamosan egyenletesen emelkedik, a pont helyzetvektora:



$$\vec{r} = \vec{r}_1(t) + ct\vec{k} = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j} + ct \vec{k},$$

ill. a megfelelő paraméteres egyenletrendszer felírva:

$$x = R \cos t,$$

$$y = R \sin t,$$

$$z = ct.$$

Például az $R = 2$ sugarú, Z tengellyel párhuzamos alkotóju Z tengelyre szimmetrikus egyenes körhengerre írt egységnyi menetemelkedésű közönséges csavarvonal egyenlete:

$$\vec{r} = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + \frac{t}{2\pi} \vec{k},$$

ill. a paraméteres egyenletrendszer:

$$x = 2 \cos t,$$

$$y = 2 \sin t,$$

$$z = \frac{t}{2\pi}.$$

b) Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\vec{r}(t)$ egyparaméteres vektor-skalárfüggvény hatarértéke a t_0 paraméterértékű pontban $\vec{a}$, jelben:

$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$, vagy $\bar{r}(t) \rightarrow \bar{a}$, $t \rightarrow t_0$ esetén, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\bar{r}(t) - \bar{a}| < \varepsilon, \text{ valahányszor } 0 < |t - t_0| < \delta$$

Könnyen belátható, hogy amennyiben az $\bar{a}$ határérték létezik, $\bar{r}(t)$ koordinátáinak is van határértéke $t \rightarrow t_0$ esetén, és e határértékek épp $\bar{a}$ megfelelő koordinátái, és megfordítva, ha $\bar{r}(t)$ koordinátáinak van határértéke $t \rightarrow t_0$ esetén, akkor $\bar{r}(t)$ -nek is van határértéke, és e határérték koordinátái $\bar{r}(t)$ megfelelő koordinátáinak határértékével egyeznek meg.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $\bar{r}(t)$ a t_0 paraméterértékű pontban folytonos, ha ott értelmezve van, véges határértéke is létezik, és ez megegyezik helyettesítési értékével: $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0)$.

Más szavakkal: $\bar{r}(t)$ folytonos a t_0 paraméterű pontban, ha tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)| < \varepsilon,$$

valahányszor

$$|t - t_0| < \delta.$$

A formulák részletes kiírásával itt is adódik, hogy az $\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0) \rightarrow 0$ reláció egyenértékű az $x(t) - x(t_0) \rightarrow 0$, $y(t) - y(t_0) \rightarrow 0$, $z(t) - z(t_0) \rightarrow 0$

relációk egyidejű fennállásával, s ezen állításunk megfordítása is érvényes, vagyis $\bar{r}(t)$ folytonosságából koordinátáinak folytonossága következik, és viszont.

c) A derivált fogalmát egyparaméteres vektor-skalárfüggvényekre a következőképpen vihetjük át:

Definíció

Az $\bar{r}(t)$ függvény differenciálható a t_0 paraméterű pontban, ha a t_0 és $t_0 + \Delta t$ paraméterű pontokhoz tartozó különbségi hányadosnak van véges határértéke $\Delta t \rightarrow 0$ esetében. E határérték $\bar{r}(t)$ differenciálhányadosa a t_0 paraméterű pontban:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\bar{r}}(t_0) = \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \right]_{t=t_0}$$

Az $\bar{r}(t)$ függvény t -beli differenciálhányadosának (deriváltjának) jelölésére az egyváltozós $y = f(x)$ skálár-skálárfüggvényeknél bevezetett jelölést használtuk.

Az egyváltozós skálár-skálárfüggvényekhez hasonló tételt mondhatunk ki egyparaméteres-vektor-skálárfüggvényekre:

Tétel

Az $\bar{r} = \bar{r}(t)$ függvény akkor és csak akkor differenciálható a t paraméterű pontban, ha a t_0 és $t_0 + \Delta t$ paraméterű pontokhoz tartozó megváltozása a következő alakban írható:

$$\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0) = \bar{a} \Delta t + \bar{\epsilon} \Delta t, \text{ ahol } |\bar{\epsilon}| \rightarrow 0, \text{ ha } \Delta t \rightarrow 0.$$

Ekkor

$$\bar{a} = \dot{\bar{r}}(t_0).$$

A differenciálhányados definíciójából következik annak geometriai jelentése: $\dot{\bar{r}}(t_0) \neq 0$ megadja az $\bar{r}(t)$ egyenletű térgörbe t_0 paraméterű pontjában az érintő irányát (a különbségi hányados a t_0 és $t_0 + \Delta t$ paraméterű pontokat összekötő hur-vektor irányába mutat, és $\Delta t \rightarrow 0$ esetben ez a t_0 -beli érintővektorhoz tart).

Az $\dot{\bar{r}}(t)$ derivált-vektornak fizikai jelentést is adhatunk. Ha az $\bar{r}(t)$ függvény egy pont mozgását írja le, azaz t az idő mérőszáma, akkor $\frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ a Δt időköz alatti elmozdulásvektornak és

Δt -nek hányadosa, azaz az átlagos sebesség-vektor. Ennek határértéke $\Delta t \rightarrow 0$ esetén a sebességvektor.

A mozgó pont helyzetvektorának idő szerinti deriváltja tehát a pont sebességének vektorát adja meg, ennek a vektornak az iránya a pálya érintőjének irányával egyezik meg.

A $\dot{\bar{r}}(t)$ sebesség-vektornak a t idő szerinti deriváltja, $\ddot{\bar{r}}(t)$, a gyorsulás-vektor.

A differenciálható $\bar{r}(t)$ egyparaméteres vektor-skálárfüggvényt a derékszögű koordinátarendszerben koordinátái segítségével írva fel: $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ adódik:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}, \text{ ill. } \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}.$$

Differenciálható egyparaméteres vektor-skalárfüggvény koordinátái is differenciálható függvények tehát, és ezen állítás megfordítása is nyilvánvalóan érvényes.

Például az

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j} + ct \vec{k}$$

egyenletű közös csavarvonal érintő-vektora:

$$\dot{\vec{r}}(t) = -R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j} + c \vec{k}.$$

Ez az érintő a csavarvonal minden pontjában a Z tengellyel azonos szöget zár be, mert

$$\vec{k} \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{c}{\sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + c^2}} = \frac{c}{\sqrt{R^2 + c^2}},$$

és ez t -től nem függ.

Könnyű belátni, hogy az ismert differenciálási szabályok egyparaméteres vektor-skalárfüggvényre is érvényben maradnak:

$$1^o \quad \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + \frac{d}{dt} \vec{r}_2,$$

$$2^o \quad \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \vec{r}_1 \frac{d}{dt} \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_1,$$

$$3^o \quad \frac{d}{dt} (u \cdot \vec{r}) = \vec{r} \frac{du}{dt} + u \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$4^o \quad \frac{d}{dt} (\vec{r}(u(t))) = \frac{d\vec{r}}{du} \cdot \frac{du}{dt},$$

$$5^o \quad \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \frac{d}{dt} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d}{dt} \vec{r}_2.$$

Például a második szabályt alkalmazva

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}^2) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 2 \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}},$$

összhangban az ismert szabállyal.

Az előbbi tételből következik az alábbi állítás:

Ha $\vec{r}(t)$ differenciálható, akkor folytonos is. Ezen állítás megfordítása általában nem érvényes.

Az egyváltozós függvény differenciáljához hasonlóan definiáljuk az $\vec{r}(t)$ függvény differenciálját ($d\vec{r}$) a t_0 és $t_0 + \Delta t$ helyekhez tartozó valódi függvénymegváltozás főrészeként:

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t_0) \Delta t.$$

d) Valamely folytonos térgörbedarabot rektifikálhatónak mondunk, hogyha a görbedarabon osztópontokat véve fel és azokat a befutás sorrendjében egyenes darabokkal összekötve, az így nyert hurpoligonok hosszúsága korlátos.

Ha az $\vec{r}(t)$ egyparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel megadott egyenletű görbedarab befutásakor a t paraméter az α értéktől a β értékig növekszik és a felvett osztópontok az

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i \dots < t_n = \beta$$

paraméterértékeknek felelnek meg, akkor a beírt törtvonal hosszúsága:

$$\sum_{k=1}^n |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|.$$

Ha a görbedarab rektifikálható, akkor - amint azt korábban síkgörbék esetére részletesen tárgyaltuk - a felosztás minden határon túl történő finomításakor ($\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ esetén) a beírt törtvonalak hosszúsága meghatározott véges határértékhez, a görbedarab ívhosszúságához tart:

$$\lim \sum_{k=1}^n |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| = s.$$

Ha az $\vec{r}(t)$ függvény $\dot{\vec{r}}(t)$ deriváltja az $[\alpha, \beta]$ paraméterintervallumban folytonos függvény, akkor

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1}) \approx d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1}),$$

ugyhogy

$$(*) \quad \sum_{k=1}^n |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| \approx \sum_{k=1}^n |\dot{\vec{r}}(t_{k-1})| (t_k - t_{k-1}).$$

Az utóbbi összeg azonban nem más, mint az $|\dot{\vec{r}}(t)|$ függvény egy integrálközelítő összege, vagyis a felosztás minden határon túl való finomításánál

az összeg az $\int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{r}}(t)| dt$ integrálhoz tart. A síkgörbe ivhosszasága számításánál részletezett módon be lehet bizonyítani, hogy a (*) összefüggésben szereplő két összeg eltérése a felosztás minden határon túl történő finomításakor a tett feltevések mellett zérushoz tart, azaz

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt.$$

Képletünkéből $z(t) = 0$ esetében adódik az XY síkban fekvő $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres egyenletrendszerrel adott $\alpha \leq t \leq \beta$ görbedarab ivhosszaságának korábban már levezetett képlete.

Például az

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j} + ct \vec{k}$$

csavarvonal egy menetének hosszúsága:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + c^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + c^2} dt = \\ &= 2\pi \sqrt{R^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Az $\vec{r}(t)$ folytonosan differenciálható egyparaméteres vektorskalár-függvénnyel megadott görbe t paraméterű rögzített pontjától a változó t paraméterű pontjáig terjedő görbeiv hosszúsága a fenti képlet értelmében:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\vec{r}}(t)| dt.$$

Az $s(t)$ függvény t szerinti differenciálhányadosa tehát:

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t)|.$$

Ha a vizsgált görbedarabon $|\dot{\vec{r}}(t)| \neq 0$, akkor $|\dot{\vec{r}}(t)| > 0$, és így az $s(t)$ függvény szigorúan monoton növekvő. Van tehát egyértékű inverz függvénye: $t = t(s)$, más szóval a t paraméter kifejezhető az s ivhosszaság segítségével.

Elméleti vizsgálatokban sokszor igen célszerű az s ívhosszuságot az egyparaméteres vektor-skálárfüggvénybe független változóként (paraméterként) bevezetni a térgörbe egyenletének felírásánál:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t(s)).$$

Az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ függvénybe az ívhosszuságot vezetve be paraméterként a $t = t(s)$ összefüggés segítségével, az ívhosszuság, mint paraméter szerinti első derivált-vektor:

$$\frac{d}{ds} \vec{r}(t(s)) = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{\vec{r}} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$$

az összetett függvény differenciálási szabályának (4^0) és az inverz függvény differenciálási szabályának alkalmazásával. Ez a vektor párhuzamos az $\vec{r}$ vektorral (az $\vec{r}(t)$ egyenletű görbe érintő-vektorával) és egységnyi abszolút értékű, azért az érintő irányába mutató egységvektornak, röviden érintő egységvektornak nevezzük. Az s ívhosszuság szerinti deriváltat vesszővel jelölve, a $t \neq s$ paraméter szerinti derivált jelölésre (a már korábban bevezetett) pontot tartva meg:

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|}.$$

Definíció

Valamely térgörbe érintő egységvektora ívhosszuság szerinti deriváltjának abszolút értékét a térgörbe görbületének nevezzük.

(E derivált nagysága az érintő egységvektor ívhosszusághoz viszonyított változási sebességét méri.)

A görbületet g -vel jelölve:

$$g = \left| \frac{d}{ds} \vec{r}' \right| = |\vec{r}''|.$$

Ha a térgörbe egyenlete $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \neq s$ egyenlettel van megadva, görbületét a következőképpen számíthatjuk ki:

$$g = \frac{|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

($\ddot{\vec{r}}$ itt a t paraméter szerinti második derivált-vektort jelenti).

A görbület fenti képletére a következőképpen juthatunk:

$$\ddot{\mathbf{r}}'' = \frac{d}{ds} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} .$$

Mivel $|\dot{\mathbf{r}}| = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^{\frac{1}{2}}$, az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \left(\ddot{\mathbf{r}} \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} + \dot{\mathbf{r}} \left(-\frac{1}{2}\right) (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^{-\frac{3}{2}} 2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \right) = \\ &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} (\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})) \end{aligned}$$

ugyanis $|\dot{\mathbf{r}}|^2 = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})$. A zárójelben álló kifejezésre a kifejtési tételt alkalmazva adódik

$$\ddot{\mathbf{r}}'' = \dots = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} (\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})) = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times (\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} ,$$

és mivel az $\dot{\mathbf{r}}$ és $(\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})$ vektorok egymásra merőlegesek

$$g = |\ddot{\mathbf{r}}''| = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times (\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})|}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}| \cdot |\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} = \frac{|\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} ,$$

amit bizonyítani akartunk.

Speciálisan az XY síkban fekvő síkgörbe esetében, ha annak egyenletét az

$$x = x ,$$

$$y = f(x)$$

paraméteres egyenletrendszerrel, ill. $y = f(x)$ egyenlettel adhatjuk meg

$$\overline{\mathbf{r}} = x\overline{\mathbf{i}} + f(x)\overline{\mathbf{j}} ,$$

$$\dot{\overline{\mathbf{r}}} = \overline{\mathbf{i}} + f'(x)\overline{\mathbf{j}} ,$$

$$\ddot{\overline{\mathbf{r}}} = f''(x)\overline{\mathbf{j}} ,$$

$$\ddot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & f'' & 0 \\ 1 & f' & 0 \end{vmatrix} = -f'' \bar{k}, \quad \left| \frac{\dot{\bar{r}}}{\bar{r}} \right| = (1 + (f')^2)^{\frac{1}{2}},$$

azaz

$$g = \left| \frac{f''}{(1+(f')^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

E képletet már a Matematika I/1. jegyzet 39. fejezetében levezettük; ez az érték az $y = f(x)$ egyenlettel megadott görbe simuló köre sugarának reciprok értékeként adódott. Síkgörbe görbületét a simuló kör sugarának reciprok értékeként definiáltuk. Most megadott általánosabb definíciónkból speciális esetként adódik tehát a síkgörbékre korábban nyert ezen eredményünk.

Pl. az

$$\bar{r} = R \cos t \bar{i} + R \sin t \bar{j} + ct \bar{k}$$

közönséges csavarvonal görbülete, mivel

$$\dot{\bar{r}} = -R \sin t \bar{i} + R \cos t \bar{j} + c \bar{k},$$

$$\ddot{\bar{r}} = -R \cos t \bar{i} - R \sin t \bar{j},$$

$$\ddot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -R \cos t & -R \sin t & 0 \\ -R \sin t & R \cos t & c \end{vmatrix} = -cR \sin t \bar{i} + cR \cos t \bar{j} +$$

$$+ \bar{k} R^2 \underbrace{(-\cos^2 t - \sin^2 t)}_{-1},$$

$$g = \frac{\sqrt{c^2 R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + R^4}}{(\sqrt{R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + c^2})^3} = \frac{\sqrt{c^2 R^2 + R^4}}{(\sqrt{R^2 + c^2})^3},$$

és ez az érték t -től nem függ, vagyis a csavarvonal görbülete állandó.

$$\text{Az } \bar{r}'' = \frac{d}{ds} \bar{r}' = \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \text{ vektorról a következőket mondhatjuk:}$$

$\bar{r}''$ merőleges $\bar{r}'$ -re; ugyanis egyrészt

$$\frac{d}{ds} (\vec{r}' \cdot \vec{r}') = \frac{d}{ds} |\vec{r}'|^2 = \frac{d}{ds} (1) = 0,$$

másrészt

$$\frac{d}{ds} (\vec{r}' \cdot \vec{r}') = \vec{r}'' \cdot \vec{r}' + \vec{r}' \cdot \vec{r}'' = 2\vec{r}'' \cdot \vec{r}',$$

és ez utóbbi skaláris szorzat zérus voltából következik az $\vec{r}''$ és $\vec{r}'$ vektor állított merőlegessége.

$\vec{r}''$ általában nem egységvektor, az $\vec{r}''$ vektor irányába mutató egységvektort $\vec{n}$ -nel jelölve

$$\vec{r}'' = g \vec{n}.$$

Definíció

Valamely térgörbe főnormális egységvektorának az $\vec{n} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}$ vektort nevezzük.

Definíció

Valamely térgörbe adott pontjabeli érintő egységvektorán és főnormális egységvektorán átfektetett síkot a görbe adott pontbeli simulósíkjának nevezzük.

Valamely $\vec{r} = \vec{r}(t)$ egyenlettel megadott térgörbe simulósíkjában fekszik az $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ vektor. Mivel ugyanis

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}' \frac{ds}{dt},$$

azért

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}'' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{r}' \frac{d^2 s}{dt^2},$$

tehát $\ddot{\vec{r}}$ felbontható egy $\vec{r}''$ és egy $\vec{r}'$ irányú komponensre, amivel állításunkat igazoltuk.

Ha t az időt jelenti, akkor fenti eredményünk értelmében az $\ddot{\vec{r}}$ gyorsulás-vektort az $\vec{r}'$ érintő egységvektor irányába mutató $\frac{dv}{dt}$ nagyságú tangenciális komponensre (ahol $v = \frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}|$ az un. pályasebesség mérőszáma) és az $\vec{r}'' = g \vec{n}$ egyenlőség figyelembevételével $g v^2 \vec{n}$ normális irányú komponensre lehetett bontani.

Definíció

Egy térgörbe adott P_0 pontbeli simulóköre azon kör határhelyzete, amely a P_0 ponton és a térgörbe további két pontján halad át, ha e további két ponttal a P_0 ponthoz konvergálunk.

Bebizonyítható, hogy a P_0 pontbeli simulókör középpontja a P_0 -ból kiinduló $\bar{n}$ főnormális irányu félegyenesen fekszik, és a simuló kör sugara, az un. görbületi sugár, a térgörbe P_0 -beli görbületének reciprok értékével egyenlő.

Előbbi feladatunkban tehát az $\ddot{\vec{r}}$ gyorsulás-vektor normális irányu komponensének nagysága $\frac{v^2}{\rho}$ alakban is felírható, ahol ρ a görbületi sugár.

A Matematika I/1. jegyzet 39. fejezetében megadott definíció a simuló kör most megadott definíciójából speciális esetként adódik.

Definíció

Valamely térgörbe adott pontbeli érintő egységvektorának és főnormális egységvektorának vektoriális szorzatát binormális egységvektornak nevezzük.

A binormális egységvektort így jelöljük:

$$\bar{b} = \bar{r}' \times \bar{n}.$$

Definíció

Valamely térgörbe adott pontjához tartozó érintő egységvektor, főnormális egységvektor és binormális egységvektor által kifeszített triédert az $\bar{r}'$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ hármast, kísérő triédernek nevezzük.

Sokszor célszerű megállapítanunk valamely térgörbéről, hogy speciálisan nem síkgörbe-e. Síkgörbe esetében a görbe benne fekszik bármely pontjához tartozó simuló síkban, felírva tehát valamely görbeponthez a simuló sík egyenletét, ezt a térgörbe pontjainak azonosan ki kell elégítenie.

Térgörbe esetében a simulósík általában pontról-pontra változtatja a helyzetét. A simulósík normális egységvektorának (a binormális egységvektornak) változási sebességével mérhetjük a simulósík helyzetváltoztatásának mértékét, vagy más szavakkal azt, hogy a térgörbe mennyire tér el a síkgörbétől.

Belátható, hogy

$$\frac{d}{ds} \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|} = t \bar{n},$$

ahol $\bar{n}$ a főnormális egységvektor, a t skalárt pedig a görbe adott pontbeli torziójának nevezzük. Ponttal a paraméter szerinti deriváltat jelölve, belátható, hogy a torzió

$$t = \frac{\dot{\bar{r}} \ddot{\bar{r}} \ddot{\bar{r}}}{\left| \dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}} \right|^2}$$

Könnyen igazolható, hogy a közönséges csavarvonal torziója állandó.

KÉTPARAMÉTERES VEKTOR-SKALÁRFÜGGVÉNYEK

a) Definíció

Kétparaméteres vektor-skalárfüggvénynek olyan utasítást nevezünk, amely az UV paramétersík bizonyos A ponthalmazának minden eleméhez egy vektorokból álló R halmaz meghatározott elemét rendeli.

Az A halmazt a függvény értelmezési tartományának, az R halmazt a függvény értékkészletének nevezzük.

Az A halmaz elemeit, az UV paramétersík pontjait, azok alkalmas koordinátarendszerbeli koordinátaival (u, v) -vel adva meg, a függő változó értékét $\vec{r}$ -rel jelölve, függvénykapcsolatunk így írható:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) , \quad \text{vagy} \quad \vec{r} = \vec{s}(u, v) .$$

Az $\vec{r}$ független változó vektorokat egy derékszögű XYZ koordinátarendszerben helyzetvektoroknak fogva fel, és azokat összetevőkre bontva, $\vec{r}$ koordinátái is függenek nyilván u és v -től:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} ,$$

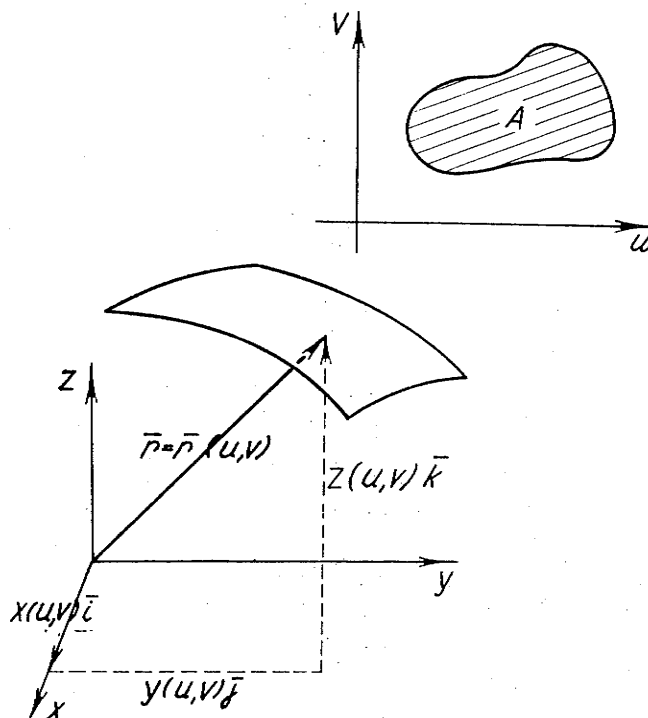
függvénykapcsolatunkat tehát a következő paraméteres egyenletrendszerrel helyettesíthetjük:

$$x = x(u, v) ,$$

$$y = y(u, v) ,$$

$$z = z(u, v) .$$

Szemléltetni egy kétparaméteres vektor-skalárfüggvényt a következőképpen tudunk. Az u és v paraméterek szóbaeső értékeiből alkotott rendezett (u, v) számpárokat ábrázoljuk az UV síkban felvett derékszögű koordinátarendszerben. Az így nyert A ponthalmazhoz rendel az $\vec{r}(u, v)$ függvény térbeli pontokat, az A ponthalmaz pontjaiból álló síkrészt leképezi bizonyos térbeli pontokból álló ponthalmazra. Ez utóbbi ponthalmaz - az A síkbeli ponthalmaz képe - általában egy felületdarab pontjaiból álló halmaz, röviden felület.



Megfordítva, felületek egyenletét általában kétparaméteres vektor-skalár-függvénnyel adhatjuk meg. Erről a megadásról azután könnyű áttérni a paraméteres egyenletrendszerrel történő megadásra.

Ha speciálisan az u és v paraméterek megegyeznek az x és y derékszögű koordinátákkal, a felület egyenletét megadó paraméteres egyenletrendszer azonos lesz a felület egyenletének kétváltozós függvénnyel való megadásával.

$$x = u,$$

$$y = v, \quad \text{ill.} \quad \bar{r} = u\bar{i} + v\bar{j} + f(u, v)\bar{k} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$$

$$z = f(u, v)$$

megegyezik a

$$z = f(x, y)$$

megadással.

Legkönnyebben forgásfelületek, henger és kupfelületek egyenletét tudjuk kétparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel megadni.

1^o Forgassuk meg az XZ síkban az

$$x = f(u) ,$$

$$z = g(u)$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbét (az un. meridián-görbét) a Z tengely körül. A nyert forgásfelület egyenlete, egyik paraméternek a meridiángörbe egyenletrendszerében szereplő u paramétert, másiknak az elfordulás v szögét (a forgásfelülethez mutató helyzetvektor XY síkra vetett vetületvektorának az $\bar{i}$ egységvektorral bezárt szögét) választva

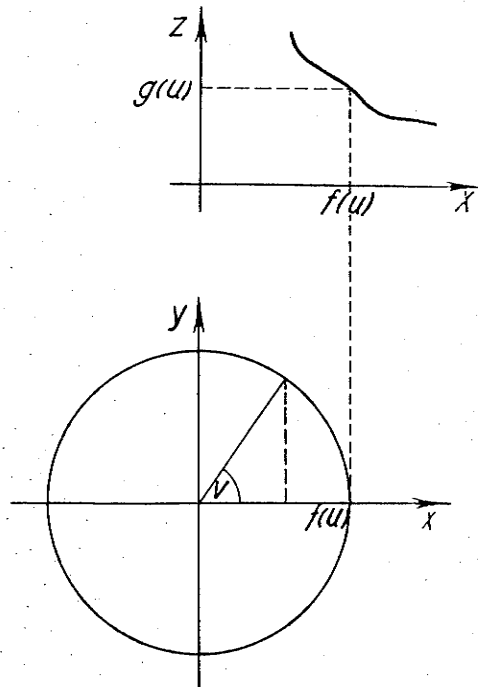
$$x = f(u) \cos v ,$$

$$y = f(u) \sin v ,$$

$$z = g(u) ,$$

ill.

$$\vec{r} = f(u) \cos v \bar{i} + f(u) \sin v \bar{j} + g(u) \bar{k}.$$

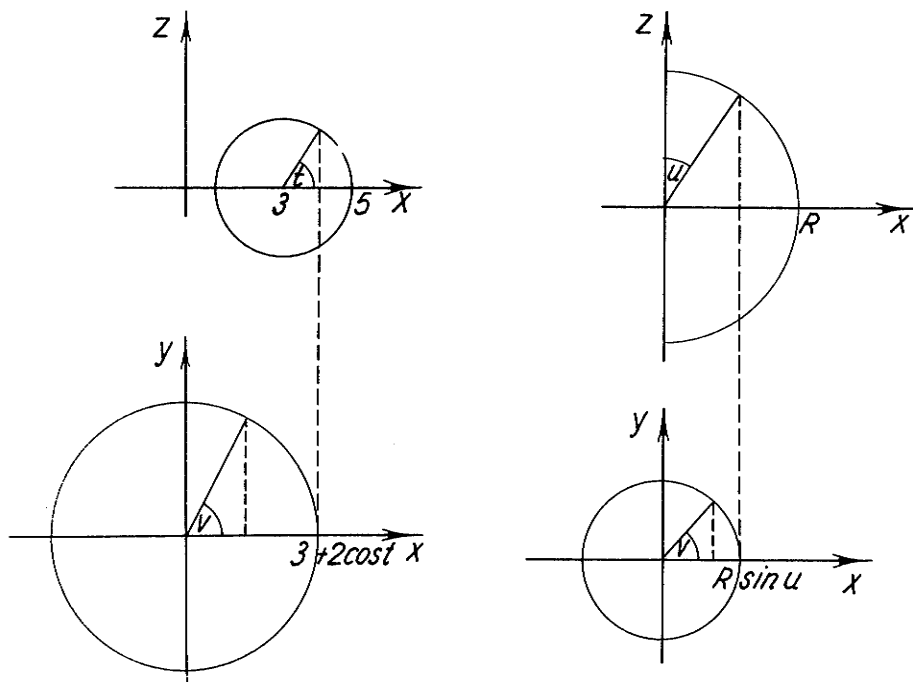


Pl. az $x = 3 + 2 \cos t$, $z = 2 \sin t$ egyenletrendszerű körvonalnak Z tengely körüli forgatásával előálló forgásfelületnek (torus) paraméteres egyenletrendszere:

$$x = (3 + 2 \cos t) \cos v ,$$

$$y = (3 + 2 \cos t) \sin v ,$$

$$z = 2 \sin t . \quad (0 \leq t \leq 2\pi , 0 \leq v \leq 2\pi)$$

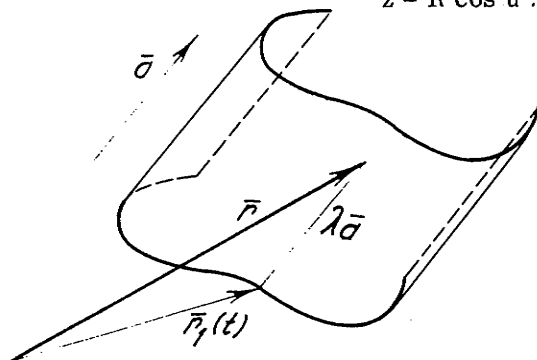


A R sugaru gömbfelület egyenlete, paramétereknek az ábrán bejelölt u és v szögeket választva:

$$x = R \sin u \cos v,$$

$$y = R \sin u \sin v,$$

$$z = R \cos u. \quad (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi).$$



2^o Csusztassunk végig egy $\bar{r} = \bar{r}_1(t)$ egyparaméteres vektorskalárfüggvénnyel megadott egyenletű térgörbén (un. vezérgörbén) egy $\bar{a}$ vektorral párhuzamos alkotót; az így származó felület hengerfelület, melynek egyenlete:

$$\bar{r} = \bar{r}_1(t) + \lambda \bar{a}$$

(a paramétereket t és λ -val jelöltük), ill. paraméteres egyenlet-rendszere:

$$x = x_1(t) + \lambda a_1 ,$$

$$y = y_1(t) + \lambda a_2 ,$$

$$z = z_1(t) + \lambda a_3 ,$$

$$(\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}) .$$

Pl. az $y = x^2$ vezérgörbéjü, $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}$ vektorral párhuzamos alkotóju hengerfelület paraméteres egyenletrendszere a paramétereket u és v -vel jelölve:

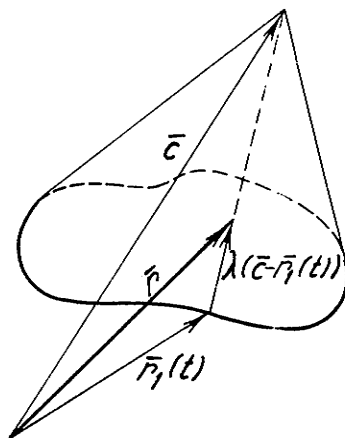
$$x = u + 3v ,$$

$$y = u^2 + 4v ,$$

$$z = 5v .$$

3^o Az $\bar{r} = \bar{r}_1(t)$ vezérgörbéjü kupfelület egyenlete, ha a kupfelület csucsat a $\bar{c}$ vektorral adjuk meg:

$$\bar{r} = \bar{r}_1(t) + \lambda (\bar{c} - \bar{r}_1(t)) .$$



Például az $x^2 + 4y^2 = 1$ vezérgörbéjü $C(1,3,6)$ csúcspontu kupfelület paraméteres egyenletrendszere (a vezérgörbe paraméteres egyenletrendszere:

$$x = \cos t , \quad y = \frac{1}{2} \sin t) :$$

$$x = \cos t + \lambda (1 - \cos t) ,$$

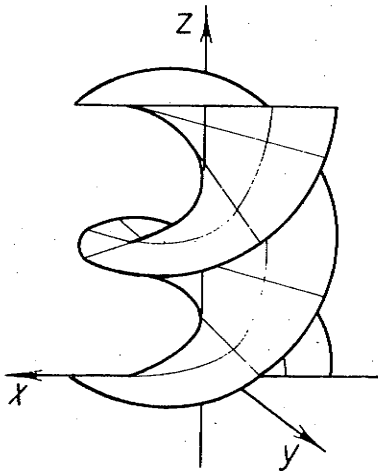
$$y = \frac{1}{2} \sin t + \lambda (3 - \frac{1}{2} \sin t) ,$$

$$z = 6 \lambda .$$

Más példaként a Z tengelyre merőleges egyenes végpontjának a Z tengelyen történő egyenletes végigcsuszátásával és közben az egyenes Z tengely körüli egyenletes forgatásával előálló csavarfelület paraméteres előállítás:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + c v \vec{k},$$

ahol $-a^2 \leq u \leq a^2$ és $-\infty < v < +\infty$



b) A határérték és folytonosság fogalmát kétparaméteres vektor-skalárfüggvényekre éppen úgy vihetjük át, mint egyparaméteresekre.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skalárfüggvény határértéke a $P_0 = (u_0, v_0)$ paraméterű pontban $\vec{b}$:

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \vec{r}(u, v) = \vec{b}, \text{ ill. } \lim_{P \rightarrow P_0} \vec{r}(P) = \vec{b},$$

ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\vec{r}(u, v) - \vec{b}| < \varepsilon, \text{ valahányszor } 0 < \overline{PP_0} = \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} < \delta.$$

Ekkor $\vec{r}(u, v)$ koordinátái is tartanak $\vec{b}$ megfelelő koordinátáihoz, és állításunk megfordítása is igaz.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\vec{r}(u, v) = \vec{r}(P)$ kétparaméteres vektor-skalárfüggvény a $P_0 = (u_0, v_0)$ paraméterű pontban folytonos, ha ott értelmezve van, van véges határértéke és ez megegyezik $\vec{r}(u, v)$ P_0 -beli helyettesítési értékével:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \vec{r}(P) = \vec{r}(P_0).$$

Más szavakkal, $\vec{r}(u, v) = \vec{r}(P)$ folytonos a $P_0 = (u_0, v_0)$ pontban, ha tetszőleges kicsiny $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\vec{r}(P) - \vec{r}(P_0)| < \varepsilon, \text{ valahányszor } \overline{PP_0} < \delta.$$

Ez azt jelenti, hogy $\bar{r}(u, v)$ akkor és csak akkor folytonos az (u_0, v_0) helyen, ha koordinátái ugyanott u és v -nek folytonos függvényei.

c) Ha rögzített $v=v_0$ mellett létezik az $\bar{r}(u, v_0)$ vektorskalárfüggvény u változó szerinti deriváltvektora az $u=u_0$ helyen, akkor ezt a vektort az $\bar{r}(u, v)$ kétparaméteres vektorskalárfüggvény u szerinti parciális deriváltvektorának nevezzük az (u_0, v_0) helyen. Hasonlóképpen, ha rögzített $u=u_0$ mellett képezzük $\bar{r}(u, v)$ v szerinti deriváltvektorát a $v=v_0$ helyen, ezt $\bar{r}(u, v)$ v szerinti parciális deriváltvektorának nevezzük az (u_0, v_0) helyen. E parciális deriváltvektorokat a többváltozós függvényeknél bevezetett jelöléssel jelöljük; az $\bar{r}(u, v)$ függvény parciális deriválása koordinátánként történik:

$$\frac{\partial \bar{r}(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \bar{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \bar{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \bar{k},$$

$$\frac{\partial \bar{r}(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \bar{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \bar{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \bar{k}.$$

A második parciális deriváltak: $\frac{\partial^2 \bar{r}(u, v)}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \bar{r}(u, v)}{\partial v \partial u}, \frac{\partial^2 \bar{r}(u, v)}{\partial u \partial v}$

$\frac{\partial^2 \bar{r}(u, v)}{\partial v^2}$ értelmezése hasonlóképpen történik. Koordinátákra bontással

igazolható, hogy az $\frac{\partial^2 \bar{r}(u, v)}{\partial v \partial u}$ és $\frac{\partial^2 \bar{r}(u, v)}{\partial u \partial v}$ parciális deriváltvektorok

(u_0, v_0) -beli folytonossága esetén e pontban a fenti vegyes másodrendű parciális deriváltvektorok megegyeznek egymással.

Definíció

Az $\bar{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skalárfüggvény differenciálható az $u=u_0, v=v_0$ paraméterű pontban, ha a $P_0 = (u_0, v_0)$ és $P = (u, v)$ pontokhoz tartozó megváltozása a következő alakban írható fel:

$$(*) \Delta \bar{r} = \bar{r}(u, v) - \bar{r}(u_0, v_0) = \bar{a}(u-u_0) + \bar{b}(v-v_0) + \bar{\varepsilon}_1(u-u_0) + \bar{\varepsilon}_2(v-v_0)$$

ahol $|\bar{\epsilon}_1|$ és $|\bar{\epsilon}_2|$ 0 -hoz tart, ha $\Delta u = u - u_0$ és $\Delta v = v - v_0$ a 0 -hoz tartanak, a és b az $\bar{r}(u, v)$ függvény (u_0, v_0) ponthoz tartozó parciális derivált-vektorai:

$$\bar{a} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\bar{r}(u, v_0) - \bar{r}(u_0, v_0)}{u - u_0} = \left[\frac{\partial \bar{r}(u, v)}{\partial u} \right]_{(u_0, v_0)},$$

$$\bar{b} = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{\bar{r}(u_0, v) - \bar{r}(u_0, v_0)}{v - v_0} = \left[\frac{\partial \bar{r}(u, v)}{\partial v} \right]_{(u_0, v_0)}.$$

Bebizonyítható, hogy ha egy (u_0, v_0) pontban az $\bar{r}(u, v)$ függvény u, ill. v szerinti parciális deriváltvektorai folytonosak, akkor $\bar{r}(u, v)$ e pontban differenciálható.

Az $\bar{r}(u, v)$ (*)-ban felírt megváltozásának főrésze, a kétparaméteres vektor-skalárfüggvény differenciálja ($d\bar{r}$):

$$d\bar{r} = \bar{a} \Delta u + \bar{b} \Delta v = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_0, v_0)} \Delta u + \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_0, v_0)} \Delta v.$$

Ha az $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ függvényt csak az $u = u(t)$, $v = v(t)$ függvénykapcsolattal jellemzett pontokban vizsgáljuk, akkor az így nyert $\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$ egyparaméteres vektor-skalárfüggvény egy, az $\bar{r}(u, v)$ egyenlettel jellemzett felületen futó görbe egyenletét szolgáltatja. Ezen görbe vizsgálatához szükséges első derivált értékét az összetett függvény differenciálási szabálya segítségével határozhatjuk meg:

$$(**) \quad \frac{d\bar{r}(u(t), v(t))}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

E szabályt az $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ és $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ parciális deriváltvektorok folytonosságának és az $u(t)$, $v(t)$ függvények differenciálhatóságának kikötése mellett koordinátákra történő kiírással a többváltozós összetett függvény differenciálási szabályának alkalmazásával igazolhatjuk.

A (**) formulából kiolvasható, hogy a felületen futó görbék érintői mind a $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ és $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ vektorok által kifeszített síkban fekszenek (feltéve, hogy a vizsgált pontban e két parciális derivált-vektor nem párhuzamos egymással).

Definíció

Az $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel megadott felülethez az $\bar{r}_0 = \bar{r}(u_0, v_0)$ helyzetvektoru pontban illeszkedő érintősíknak

az adott ponton áthaladó és az $\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_0, v_0)}$ és $\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_0, v_0)}$

vektorok által kifeszített síkot nevezzük. E sík normálisa, az un. felületi normális:

$$\bar{n} = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_0, v_0)} \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_0, v_0)}.$$

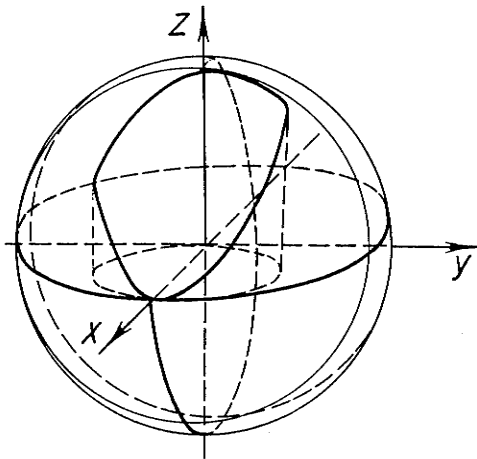
Fenti definícióinkban mindvégig feltettük, hogy $\bar{r}(u, v)$ parciális deriváltvektorai az (u_0, v_0) pontban léteznek, és nem párhuzamosak egymással.

Mint látható az előbb definiált felületi normális irányítása az u és v paraméterek sorrendjének felcserélésével ellenkezőre változik, tehát nem a felület belső sajátságaival, csupán előállításának módjával függ össze.

Példák

Az alábbi ábrán látható gömb és henger metszésvonalaként definiált Viviani-féle görbe egyenletét a gömb

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = R \sin u \cos v \bar{i} + R \sin u \sin v \bar{j} + R \cos u \bar{k}$$



egyenletéből a

$$v = \frac{\pi}{2} - u$$

összefüggéssel adhatjuk meg. A szokott módon a paramétert t -vel jelölve az

$$u = t,$$

$$v = \frac{\pi}{2} - t$$

összefüggés alapján a Viviani-féle görbe egyenlete:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}} &= \bar{\mathbf{r}}(u(t), v(t)) = R \sin t \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \bar{\mathbf{i}} + R \sin t \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \bar{\mathbf{j}} + \\ &+ R \cos t \bar{\mathbf{k}} = R \sin^2 t \bar{\mathbf{i}} + R \sin t \cos t \bar{\mathbf{j}} + R \cos t \bar{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Számítsuk ki a görbe görbületét a $t = 0$ paraméterű (azaz $(0, 0, R)$) pontban.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) &= 2R \sin t \cos t \bar{\mathbf{i}} + R (\cos^2 t - \sin^2 t) \bar{\mathbf{j}} - R \sin t \bar{\mathbf{k}} = \\ &= R \sin 2t \bar{\mathbf{i}} + R \cos 2t \bar{\mathbf{j}} - R \sin t \bar{\mathbf{k}},\end{aligned}$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}(t) = 2R \cos 2t \bar{\mathbf{i}} - 2R \sin 2t \bar{\mathbf{j}} - R \cos t \bar{\mathbf{k}},$$

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}}(0) = R \bar{\mathbf{j}},$$

$$|\dot{\bar{\mathbf{r}}}(0)| = R,$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}(0) = 2R \bar{\mathbf{i}} - R \bar{\mathbf{k}},$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}(0) \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}(0) = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 2R & 0 & -R \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} = +R^2 \bar{\mathbf{i}} + 2R^2 \bar{\mathbf{k}},$$

vagyis

$$g = \frac{|\ddot{\bar{\mathbf{r}}}(0) \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}(0)|}{|\dot{\bar{\mathbf{r}}}(0)|^3} = \frac{\sqrt{5} R^2}{R^3} = \frac{\sqrt{5}}{R}.$$

² Az

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(u, v) = R \sin u \cos v \bar{\mathbf{i}} + R \sin u \sin v \bar{\mathbf{j}} + R \cos u \bar{\mathbf{k}}$$

egyenlettel megadott gömbfelület felületi normálisa:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ R \cos u \cos v & R \cos u \sin v & -R \sin u \\ -R \sin u \sin v & R \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= R^2 \sin^2 u \cos v \bar{i} + R^2 \sin^2 u \sin v \bar{j} + R^2 \sin u \cos u \bar{k} = \\ &= R \sin u \bar{r}(u, v) .\end{aligned}$$

Látható tehát, hogy a felületi normális az $\bar{r}(u, v)$ vektorral párhuzamos, azaz e számolásból is leolvasható az a jól ismert tény, hogy a gömbfelület érintősíkjai a sugárra merőlegesen helyezkednek el.

Ha egy felület egyenletét a $z = f(x, y)$ alakban állítottuk elő, akkor mivel ezen előállítást másképp az

$$x = u ,$$

$$y = v ,$$

$$z = f(u, v)$$

paraméteres egyenletrendszerrel, ill. az

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = u \bar{i} + v \bar{j} + f(u, v) \bar{k}$$

alakban is felírhatjuk, a felületi normális a következőképpen adódik:

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = - \frac{\partial f}{\partial u} \bar{i} - \frac{\partial f}{\partial v} \bar{j} + \bar{k} ,$$

illetve visszatérve az $u = x$, $v = y$, $f(u, v) = f(x, y) = z$ jelölésre:

$$\bar{n} = - \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j} + \bar{k} .$$

Például a $z = xy$ felület (hiperbolikus paraboloid) esetében a felületi normális:

$$\bar{n} = - \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j} + \bar{k} = -y \bar{i} - x \bar{j} + \bar{k} .$$

A felülethez az $x=2$, $y=3$, $z=2 \cdot 3 = 6$ pontban illeszkedő érintősík egyenlete tehát $(\vec{n}_{(2,3,6)} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$:

$$-3(x-2) - 2(y-3) + (z-6) = 0 ,$$

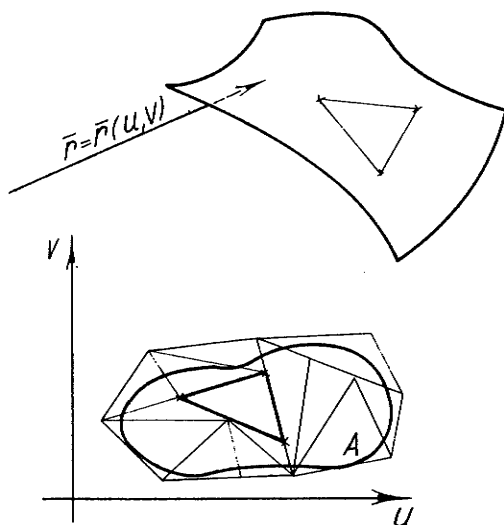
azaz

$$-3x - 2y + z + 6 = 0 .$$

Általánosságban a $z = f(x, y)$ egyenletű felülethez az $x=x_0$, $y=y_0$, $z=f(x_0, y_0) = z_0$ pontban illeszkedő érintősík egyenlete:

$$-\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{(x_0, y_0)} (x-x_0) - \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{(x_0, y_0)} (y-y_0) + (z-z_0) = 0 .$$

d) Egy felületdarab felszínének meghatározása a görbedarab hosszúságának kiszámítására emlékeztető feladat. Kézenfekvő tehát arra gondolnunk, hogy a felületdarab felszínét a felületdarabba beírt poliéderfelületek segítségével értelmezzük. Ennek kivitelezése a következőképpen történhetne:



Állítsuk elő a vizsgált felületdarabot $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skálárfüggvénnyel, a felületdarab pontjai feleljenek meg az UV paramétersík A halmazában fekvő pontoknak. Borítsuk le az UV síkot egy háromszögekből álló hálózattal. Szemeljünk ki a hálózatnak egy olyan háromszögét, melynek csúcspontjai A-hoz tartoznak és keressük meg a felületnek e három csúcspontnak megfelelő pontját. Ez a három felületi pont egy háromszöget határoz meg (amely esetleg egyenessé, vagy egyetlen ponttá is elfajulhat). Elkészítve az összes A-ba eső csúcspont hálózati há-

áromszögeknek illymódon megfelelő háromszöglapokat, azok együttléve egy, a felületdarabba beírt poliéderfelületet adnak. Az ívhosszúság kiszámításánál követett okoskodás mintájára azt várhatnánk mármmost, hogy ha a paramétersík A halmazát leborító háromszöges hálózatot minden határon túl

finomítjuk, akkor az ezekhez az előbbi módon rendelt poliéderfelületek felszínei az A halmazra és az $\tilde{r}(u,v)$ függvényre tett bizonyos megkötések mellett egy határértékhez konvergálnak, és ezt a határértéket tekinthetnénk a felületdarab felszínének. Könnyű azonban példát mutatnunk arra, hogy a felszín fogalma ilyen egyszerű módon nem értelmezhető. A fenti okoskodást követve ugyanis pl. egy körhengerpalástba beírt poliéderfelületekből készíthető akármilyen nagy határértékhez, vagy akár végtelenhez tartó felszíni sorozat. Ezt mutatja be H. A Schwarz híres példája.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x &= R \cos u, & y &= R \sin u, & z &= v, \\ 0 &\leq u \leq \pi, & 0 &\leq v \leq h \end{aligned}$$

fél-hengerpalástot. Jelentsenek n és m pozitív egész számokat, és tekintsük a fél-hengerpalástnak azon P_i^k pontjait, amelyek az

$$u = \frac{i\pi}{n}, \quad v = \frac{kh}{m} \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, m)$$

paraméterértékekhez, és azon Q_i^k pontjait, amelyek az

$$u = \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad v = \frac{(2k-1)h}{2m} \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, m)$$

paraméterértékekhez tartoznak. Képezzük ezekből a pontokból mint szögpontokból a

$$(1) \quad P_{i-1}^k P_i^k Q_i^k, P_{i-1}^{k-1} P_i^{k-1} Q_i^k \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, m)$$

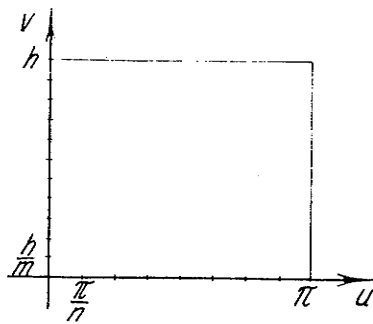
valamint a

$$(2) \quad P_i^k Q_i^k Q_{i+1}^k, P_i^{k-1} Q_i^{k-1} Q_{i+1}^k \quad (i=1, 2, \dots, n-1; \quad k=1, 2, \dots, m)$$

továbbá a

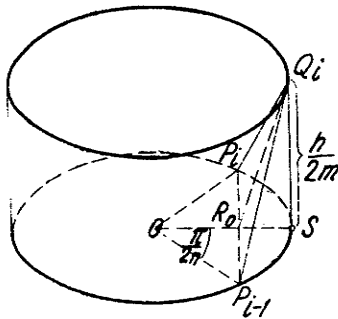
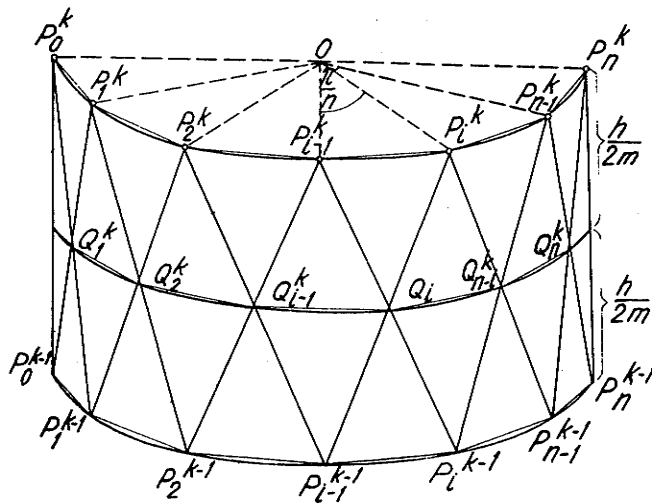
$$(3) \quad P_o^{k-1} P_o^k Q_1^k, P_n^{k-1} P_n^k Q_n^k \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

háromszögeket (lásd ábra). E háromszöglapok a fél-hengerpalást-felületbe beírt poliéderfelületet alkotnak. $m \rightarrow \infty$ és $n \rightarrow \infty$ esetén az UV paramétersík fent megkonstruált háromszöges hálózata minden határon túl finomodik, ill. a felületbe beírt háromszöglapok maximális



oldala is 0 -hoz tart. Megmutatjuk, hogy e háromszöglapokból álló poliéder-felületek felszíne nem tart meghatározott véges határértékhez.

A (3) alatti háromszögek területösszege nyilván 0 -hoz tart, mivel a $\frac{p_o^{k-1}}{p_o^k}$, valamint a $\frac{p_n^{k-1}}{p_n^k}$ oldalak összege a henger állandó h magasságát adja meg, ezeket tehát a határérték számítása szempontjából nem is szükséges tekintetbe vennünk.



Az (1) és (2) alatt felírt háromszögek egyenlőszáruak és egybevágók, számuk $[2n + 2(n-1)]m = (4n-2)m$. Számítsuk ki egy ilyen háromszög pl. (a felső indexet az egyszerűbb írásmód miatt elhagyva) a $P_{i-1}P_iQ_i$ háromszög területét. Legyen a P_i pontokat tartalmazó kör középpontja O , O -ból a $P_{i-1}P_i$ oldalra bocsátott merőleges talppontja R_0 , és messe $\overline{OR_0}$ meghosszabbítása e kört S -ben. Ekkor R_0 a $P_{i-1}P_i$ oldal felezőpontja,

tehát mivel $\overline{Q_i P_{i-1}} = \overline{Q_i P_i}$, azért $\overline{R_o Q_i}$ a $P_{i-1} P_i Q_i$ háromszög magassága, továbbá $R_o S Q_i \sphericalangle = \frac{\tilde{\pi}}{2}$ és $\overline{Q_i S} = \frac{h}{2m}$. Minthogy $P_{i-1} O P_i \sphericalangle = \frac{\tilde{\pi}}{n}$, azért

$$\overline{OR_o} = R \cos \frac{\tilde{\pi}}{2n},$$

és így

$$\overline{R_o S} = R - R \cos \frac{\tilde{\pi}}{2n},$$

azaz

$$\overline{R_o Q_i} = \sqrt{(R - R \cos \frac{\tilde{\pi}}{2n})^2 + (\frac{h}{2m})^2} = \sqrt{4R^2 \sin^4 \frac{\tilde{\pi}}{4n} + (\frac{h}{2m})^2}.$$

Mivel azonban a $\overline{P_{i-1} P_i}$ oldal fele $\overline{P_i R_o} = R \sin \frac{\tilde{\pi}}{2n}$, a $P_{i-1} P_i Q_i$ háromszög területe:

$$T_{P_{i-1} P_i Q_i} \Delta = R \sin \frac{\tilde{\pi}}{2n} \sqrt{4R^2 \sin^4 \frac{\tilde{\pi}}{4n} + (\frac{h}{2m})^2}.$$

Ennélfogva az (1) és (2) alatti háromszögek F_{nm} területösszege

$$(4) \quad F_{nm} = (4n-2)m R \sin \frac{\tilde{\pi}}{2n} \sqrt{4R^2 \sin^4 \frac{\tilde{\pi}}{4n} + (\frac{h}{2m})^2}$$

Megmutatjuk, hogy attól függően, hogy n és m milyen kapcsolatban áll egymással vagyis a hengerfelületen felvett párhuzamos körök távolsága és a körökön felvett osztópontok közötti ívek hosszúsága milyen összefüggésben áll egymással, $n \rightarrow \infty$ és $m \rightarrow \infty$ esetében F_{nm} különböző véges, ill. végtelen határértékhez tarthat.

1^o ha $m = cn$, ahol c állandó (4)-ből

$$F_{nm} = \frac{4n-2}{4n} 2\tilde{\pi} cR \frac{\sin \frac{\tilde{\pi}}{2n}}{\frac{\tilde{\pi}}{2n}} \sqrt{\tilde{\pi}^2 \frac{R^2}{4} \left(\frac{\sin \frac{\tilde{\pi}}{4n}}{\frac{\tilde{\pi}}{4n}} \right)^2 \sin^2 \frac{\tilde{\pi}}{4n} + (\frac{h}{2c})^2},$$

tehát $n \rightarrow \infty$ esetén (amikor egyszersemind $m \rightarrow \infty$)

$$F_{nm} \rightarrow 2\tilde{\pi} cR \frac{h}{2c} = R \tilde{\pi} h,$$

ami a félhenger-palást fel színének ismert képletével egyezik.

2° ha $m = cn^2$, ahol c állandó (4) -ből

$$F_{nm} = \frac{4n-2}{4n} 2\tilde{\pi} cR \frac{\sin \frac{\tilde{\pi}}{2n}}{\frac{\tilde{\pi}}{2n}} \sqrt{\frac{\tilde{\pi}^4 R^2}{4^3} \left(\frac{\sin \frac{\tilde{\pi}}{4n}}{\frac{\tilde{\pi}}{4n}} \right)^4 + \left(\frac{h}{2c} \right)^2},$$

vagyis $n \rightarrow \infty$ esetén (amikor is egyszerre mind $m \rightarrow \infty$)

$$F_{nm} \rightarrow 2\tilde{\pi} cR \sqrt{\frac{\tilde{\pi}^4 R^2}{4^3} + \frac{h^2}{4c^2}} = \tilde{\pi} R \sqrt{\frac{\tilde{\pi}^4 R^2 c^2}{16} + h^2},$$

és ez a c konstans alkalmas megválasztásával tetszőleges $\tilde{\pi}$ Rh-nál nagyobb véges értéket felvehet.

3° ha $m = n^3$, (4) -ből

$$\frac{4n}{4n-2} F_{nm} > 4n^4 R \sin \frac{\tilde{\pi}}{2n} 2R \sin^2 \frac{\tilde{\pi}}{4n} = \frac{\sin \frac{\tilde{\pi}}{2n}}{\frac{\tilde{\pi}}{2n}} \left(\frac{\sin \frac{\tilde{\pi}}{4n}}{\frac{\tilde{\pi}}{4n}} \right)^2 \frac{\tilde{\pi}^3 R^2 n}{4}$$

vagyis $n \rightarrow \infty$ esetében (ekkor egyszerre mind $m \rightarrow \infty$)

$$F_{nm} \rightarrow +\infty$$

A beírt poliéder felszínének tehát a felosztások ilyen módon történő finomítása mellett nincs meghatározott véges határértéke.

A bevezetőben említett módszerrel élve azonban a felületdarab felszínének mérőszámára jutunk, ha a paramétersík A halmazát leborító háromszöges hálózat minden határon túl való finomítását úgy végezzük, hogy közben az összes hálózati háromszögeknek valamennyi szöge egy $\tilde{\pi}$ -nél kisebb korlát alatt maradjon (vagyis a háromszögek ne laposodjanak el minden határon túl, amint azt a Schwarz-féle példa 2° és 3° esetében tették). Bebizonyítható ugyanis a következő tétel:

Tétel

Legyen A az UV síknak mérhető területű halmaza, s az $\bar{r}(u, v)$ függvény legyen elsőrendű parciálisaival együtt folytonos egy az A -t és A határpontjait tartalmazó G nyílt halmazon. Ha az UV -síknak elkészítjük egy minden határon túl finomodó háromszöges hálózat-sorozatát, s ebben az

összes háromszögek szögei egy π -nél kisebb korlát alatt maradnak, akkor az A -ba eső csucu háromszögeknek megfelelő háromszöglapokból álló beírt poliéderfelületek felszínei meghatározott határértékhez tartanak, melynek értéke:

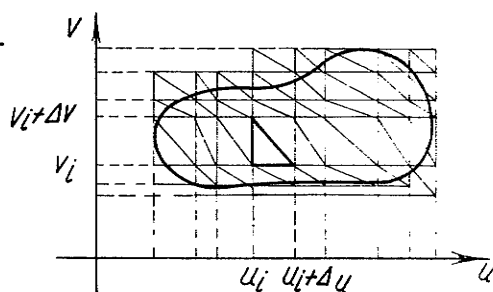
$$\iint_A \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u,v)} \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u,v)} \right| du dv.$$

Ezen kettős integrált tekintjük a kérdéses felületdarab felszínének (a fel-szín mérőszámának). E tételt nem bizonyítjuk. Vázlatosan megmutatjuk azonban, hogy alkalmas, speciálisan választott háromszöges hálózat esetén, az állított alakú integrál adódik határérték gyanánt.

Készítsünk el ugyanis az UV sík A halmazán egy olyan háromszöges hálózatot, amely egy négyszögrács négyszögeinek egyik átlójukkal történő felezésével keletkezik: (ezen háromszögrács minden egyes háromszöge derékszögű, s így a háromszögek szögei biztosan π -nél kisebb korlát alatt maradnak). A hálózat egy tetszőlegesen kiválasztott háromszögének csucspontjai legyenek

$$P_i(u_i, v_i), \quad P'_i(u_i + \Delta u, v_i),$$

$$P''_i(u_i, v_i + \Delta v),$$



vagyis a háromszög oldalai $|\Delta u|$ és $|\Delta v|$ hosszúságúak, a háromszög területe

$$\Delta t_i = \frac{|\Delta u| |\Delta v|}{2}.$$

A háromszög csucspontjainak megfelelő pontok a felületen az

$$\bar{r}(u_i, v_i) = \bar{r}_i, \quad \bar{r}(u_i + \Delta u, v_i) = \bar{r}'_i, \quad \bar{r}(u_i, v_i + \Delta v) = \bar{r}''_i$$

vektorokkal jellemezhetők, vagyis a $P_i P'_i P''_i$ háromszögnek megfelelő poliéderlap olyan háromszög, melynek élvektorai:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{i1} &= \bar{r}(u_i + \Delta u, v_i) - \bar{r}(u_i, v_i) = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta u + o(\Delta u) \approx \\ &\approx \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_{i2} &= \bar{r}(u_i, v_i + \Delta v) - \bar{r}(u_i, v_i) = 0 + \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta v + 0 + \bar{\varepsilon}_2 \Delta v \approx \\ &\approx \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta v ,\end{aligned}$$

az $\bar{r}(u, v)$ függvény differenciálhatósága miatt, ami a tételben tett feltevésekből következik. Így módon tehát a felületbe beírt háromszöglapok területe közelítőleg

$$\frac{1}{2} \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta u \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta v \right| = \frac{1}{2} |\Delta u| |\Delta v| \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} \right|$$

ahol

$$\frac{1}{2} |\Delta u| |\Delta v| = \Delta t_i ,$$

a paramétersíkban felvett P_i, P'_i, P''_i háromszög területe. A felületbe beírt poliéderlapok területének összege tehát közelítőleg

$$\left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} \right| \Delta t_i .$$

Ha mármost az UV paramétersíkban felvett háromszöges hálózatot minden határon túl finomítjuk (a tételben tett kikötések mellett) a fenti összeg a

$$\iint_A \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u, v)} \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u, v)} \right| du dv$$

kettős integrálhoz tart. Kimutatható, hogy a közelítéseknél elkövetett hiba a tételben tett kikötések mellett a zérushoz tart, úgyhogy a vizsgált felületdarab felszínére az

$$F = \iint_A \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u, v)} \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u, v)} \right| du dv$$

érték adódik.

Tétel

A felületdarab most definiált felszíne megfelelő feltételek mellett független a felületet előállító paraméterek választásától.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy a felületdarabot $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ egyenlettel állítottuk elő, és legyenek az új paraméterek s és t . Legyenek továbbá az $u(s, t)$ és $v(s, t)$ függvények az ST sík mérhető területű B halmazát és annak határpontjait tartalmazó bizonyos nyílt halmazon elsőrendű parciálisaikkal együtt folytonosak, és vigye át az

$$u = u(s, t), \quad v = v(s, t)$$

függvények által létesített leképezés a B halmazt az UV sík A halmazába úgy, hogy B különböző belső pontjainak A különböző pontjai feleljenek meg. Be fogjuk látni, hogy ekkor

$$\iint_A \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| du dv = \iint_B \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds dt,$$

ahol a baloldali integrálban a parciális deriváltak u és v , a jobboldaliban pedig s és t függvényei.

Valóban a tett feltevések mellett

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t},$$

tehát

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

és így a szokásos

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \cdot \left| \frac{\partial (u, v)}{\partial (s, t)} \right|,$$

ugyhogy az állított egyenlőség jobboldalán álló integrál a baloldaliból a kettős integrálok transzformációjára vonatkozó képlet alkalmazásával adódik.

Általában, ha a felület egyenletét $z = f(x, y)$ alakban adjuk meg, akkor - mint azt e fejezetben a c) pontban láttuk - x és y -t választva paraméternek: $(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k})$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = - \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} ,$$

s így az XY sík A tartománya feletti felületdarab felszíne:

$$F = \iint_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy .$$

Példák

1^o Az $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = R \sin u \cos v \vec{i} + R \sin u \sin v \vec{j} + R \cos u \vec{k}$

egyenletű gömbfelület $(0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$ felszíne, mivel

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = R \sin u (R \sin u \cos v \vec{i} + R \sin u \sin v \vec{j} + R \cos u \vec{k})$$

(lásd a c) pontbeli számolást), és így

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| &= R^2 \sin u \sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u} = \\ &= R^2 \sin u \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} = R^2 \sin u , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= R^2 \int_{v=0}^{2\pi} \left(\int_{u=0}^{\pi} \sin u \, du \right) dv = R^2 \int_{v=0}^{2\pi} \left[-\cos u \right]_{u=0}^{\pi} dv = \\ &= 2R^2 \int_0^{2\pi} dv = 4R^2 \pi . \end{aligned}$$

2^o A $z = xy$ felület azon részének felszíne, melynek vetülete az XY síkon az $x^2 + y^2 \leq R^2$ körlemez a következőképpen nyerhető:

A c) pontbeli példában végzett számolást felhasználva, ill. a $z=f(x,y)$ alakban megadott felületek felszinszámítási képletét közvetlenül alkalmazva:

$$F = \iint_T \sqrt{y^2 + x^2 + 1} \, dx \, dy, \quad \text{ahol} \quad T = \{ (x,y): x^2 + y^2 \leq R^2 \}.$$

Kettős integrálunk kiszámítása végett polárkoordinátás transzformációt alkalmazva

$$\begin{aligned} F &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^R \sqrt{r^2 + 1} \, r \, dr \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{(r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^R d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} \pi (\sqrt{(R^2 + 1)^3} - 1). \end{aligned}$$

SKALÁR-VEKTORFÜGGVÉNYEK

a) Definíció

A skalár-vektorfüggvény olyan utasítás, amely bizonyos vektorokból álló R halmaz elemeihez a valós számok bizonyos P részhalmazának egy-egy meghatározott elemét rendeli.

A független változó vektorokat $\vec{r}$ -rel, a skalár függő változó értékeket u vagy ϕ -vel jelölve, függvénykapcsolatunk formálisan így írható:

$$u = u(\vec{r}) , \quad \text{vagy} \quad \phi = \phi(\vec{r}) .$$

Az R halmazt az $u(\vec{r})$ függvény értelmezési tartományának, a P halmazt a függvény értékkészletének nevezzük.

Az $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvényről legjobban úgy alkothatunk magunknak képet, ha a független változó vektorokat a tér egy rögzített pontjából mint helyzetvektorokat felmérjük. Akkor az egyes vektorokhoz rendelt függvényértékeket a vektorok végpontjaihoz rendelhetjük hozzá, úgyhogy végeredményben a térnek, vagy a tér egy részének pontjaihoz rendel az ilyen függvény számértékeket. Ebben a felfogásban szokás a skalár-vektorfüggvényt skalártereknek, vagy skalármezőnek nevezni. Skalárteret nyerünk pl. ha a tér pontjaihoz függvényértékként az ott uralkodó hőmérséklet, potenciál, vagy nyomás értékét rendeljük hozzá.

Skalár-vektorfüggvénnyel írható le pl. az egységnyi elektrosztatikai töltés potenciáltere: $\phi = \frac{1}{|\vec{r}|}$, ahol $\vec{r}$ a töltés pontjából mutató vektort jelent.

A skalár-vektorfüggvényeket azonban másképp is jellemezhetjük. A független változó $\vec{r}$ vektorokat ugyanis pl. egy XYZ derékszögű koordináta-rendszerben összetevőkre bontva, $\vec{r}$, és ezen át az u függő változó értéke is függni fog $\vec{r}$ koordinátáitól, x, y és z -től, azaz

$$u = u(x, y, z) .$$

Az $u = u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvény tehát három skalár változó skalár függvényeként, háromváltozós függvényként is felfogható. Megfordítva, minden $u = u(x, y, z)$ háromváltozós skalár-skalárfüggvény úgy fogható fel, mint

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ valamilyen $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvénye. A többváltozós skalár-skalárfüggvények tehát valamennyien tárgyalhatók volnának speciális skalár-vektorfüggvényként ($z = f(x, y)$ síkvektor skalár függvényeként, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ az n -dimenziós $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ ($|\vec{e}_i|=1$) vektor skalár függvényeként).

Pl. az

$$u = (\vec{r})^2$$

skalár-vektorfüggvény így is írható:

$$u = x^2 + y^2 + z^2,$$

az egységnyi pontszerű elektrosztatikus töltés potenciáletterét előállító

$$\phi = \frac{1}{|\vec{r}|}$$

függvény pedig így is megadható:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Szemléltetni a skalár-vektorfüggvényeket közvetlenül nem tudjuk. Sokszor érdekes azonban azt megállapítani, milyen térbeli pontokhoz rendel a skalár-vektorfüggvény azonos számértéket (a tér mely pontjaiban lesz pl. a hőmérséklet, potenciál vagy nyomás ugyanaz az állandó). Ezen pontok összessége, ill. az ezeken áthaladó felület neve: a skalártér szintfelülete, vagy nívófelülete. Hasonlóképpen, ha $u(\vec{r})$ -ben $\vec{r}$ síkvektor, akkor $u(\vec{r})=c$ az un. nívógörbék egyenlete. Az előbb felírt skalárterek szintfelületei koncentrikus gömbfelületek, melyeknek egyenlete:

$$(\vec{r})^2 = c, \text{ azaz } x^2 + y^2 + z^2 = c,$$

ill.

$$\frac{1}{|\vec{r}|} = c, \text{ azaz } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c, \text{ ill. } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2}.$$

b) Definíció

Az $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvény határértéke az $\vec{r}_0$ helyzetvektoru pontban A;

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} u(\vec{r}) = A,$$

ha tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|u(\vec{r}) - A| < \varepsilon, \text{ valahányszor } 0 < |\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta.$$

Az $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvény folytonos az $\vec{r}_0$ helyzetvektoru pontban, ha ott értelmezve van, van véges határértéke is, és ez megegyezik az $u(\vec{r}_0)$ helyettesítési értékkel.

Más szavakkal: $u(\vec{r})$ folytonos az $\vec{r}_0$ helyzetvektoru pontban, ha tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0)| < \varepsilon, \text{ valahányszor } |\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta.$$

E fogalmak a többváltozós függvények analizisének tárgyalásánál már szerepeltek; ott vektorok helyett pontokról beszéltünk (az $\vec{r}$ helyzetvektoru pontot P -vel, az $\vec{r}_0$ helyzetvektort P_0 -al, a vizsgált függvényt $f(\vec{r})$ helyett $f(P)$ -vel jelöltük).

c) A többváltozós skalár-skalárfüggvények mintájára adhatjuk meg a skalár-vektorfüggvények differenciálhatóságának definícióját.

Definíció

Az $u = u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvény differenciálható az $\vec{r}_0$ helyzetvektoru pontban, ha a függvény $\vec{r}_0$ és $\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}$ helyzetvektoru pontokhoz tartozó megváltozása a következő alakban írható fel:

$$(*) \quad \Delta u = u(\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}) - u(\vec{r}_0) = \vec{a} \Delta \vec{r} + \varepsilon \Delta \vec{r},$$

ahol $|\varepsilon| \rightarrow 0$, ha $|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0$. Az $\vec{a} \Delta \vec{r}$ főrészt differenciálnak nevezzük és du -val jelöljük.

Könnyű belátni, hogy ha van ilyen $\vec{a}$ vektor, akkor csak egy lehet, úgyhogy az $u(\vec{r})$ skalártér és az $\vec{r}_0$ helyzetvektoru pont megadásával $\vec{a}$ egyértelműen meg van határozva. Ezt az $\vec{a}$ vektort nevezzük a szóbanforgó $u(\vec{r})$ skalártér $\vec{r}_0$ -hoz tartozó deriváltvektorának, vagy gradiensének.
Jelölése:

$$\vec{a} = \left[\frac{du}{d\vec{r}} \right]_{\vec{r}_0} = \left[\text{grad } u(\vec{r}) \right]_{\vec{r}_0}.$$

A skalár-vektorfüggvények differenciálhányadosát néha a $\frac{du}{d\vec{r}}$ szimbolummal is jelöljük (a $\text{grad } u(\vec{r})$ jelölés az általánosabb), bár $\frac{du}{d\vec{r}}$ az $u(\vec{r})$ függvény differenciálhányadosát nem értelmezhetjük az egyváltozós skalár-skalárfüggvények mintájára a különbségi hányados határértékeként, hiszen

az $u(\vec{r})$ függvény esetében a független változó megváltozása $\Delta \vec{r}$ vektor, a vektorral való osztás műveletét pedig nem értelmeztük.

A $\text{grad } u(\vec{r})$ vektor koordinátáinak meghatározására a következőképpen juthatunk el:

A (*) képletben szereplő vektorokat bontsuk fel az XYZ derékszögű koordináta-rendszerben a tengelyek irányába mutató komponensek összegére:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\ \Delta \vec{r} &= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}, \\ \vec{r}_0 &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}, \\ \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \\ \vec{\epsilon} &= \epsilon_1\vec{i} + \epsilon_2\vec{j} + \epsilon_3\vec{k}.\end{aligned}$$

E vektorokat a (*) képletbe behelyettesítve és a kijelölt műveleteket elvégezve adódik:

$$(**) \quad \Delta u = a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + a_3 \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z,$$

ahol $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rightarrow 0$, ha $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$.

Másrészt azonban, ha az $u(x, y, z)$ függvény differenciálható, akkor - amint azt korábban általánosságban n - változós függvény esetére állítottuk - az $u(x, y, z)$ függvény (x_0, y_0, z_0) és $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$

helyekhez tartozó megváltozása, amit (**) -ban röviden Δu -val jelöltünk

$$\begin{aligned}(***) \quad \Delta u &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta y + \\ &+ \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z\end{aligned}$$

alakban írható, ahol $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rightarrow 0$, ha $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$.

A (* *) és (* * *) képletekből adódik tehát, hogy

$$a_1 = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(x_0, y_0, z_0)},$$

$$a_2 = \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{(x_0, y_0, z_0)},$$

$$a_3 = \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{(x_0, y_0, z_0)},$$

azaz a (*) összefüggésben szereplő $\bar{a} = [\text{grad } u(\bar{r})]_{r_0}$ vektor:

$$\begin{aligned} [\text{grad } u(\bar{r})]_{r_0} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \bar{i} + \\ &+ \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \bar{j} + \\ &+ \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \bar{k}. \end{aligned}$$

Egy $u(\bar{r})$ skalártér deriváltjának, a grad u vektornak koordinátái tehát az $u(x, y, z)$ függvénynek az egyes koordináták szerinti parciális deriváltjai.

A többváltozós függvények differenciálhatóságára elmondott feltételekből következik, hogy az $u(\bar{r})$ skalár-vektorfüggvény differenciálhatóságához, vagyis a grad u vektor létezéséhez az $u(x, y, z)$ függvény x, y és z szerinti parciális deriváltjainak létezése csak szükséges, de nem elégséges feltétel. Ha azonban e parciális deriváltak folytonosak is, akkor ebből már $u(x, y, z) = u(\bar{r})$ differenciálhatósága, s így grad u létezése is következik.

Pl. az

$$u(\bar{r}) = \frac{1}{|\bar{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

függvény a $P(0, 0, 0)$ pont kivételével differenciálható, és

$$\begin{aligned}\text{grad } u &= \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} = \\ &= -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} \bar{i} - \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} \bar{j} - \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} \bar{k} = \\ &= -\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}.\end{aligned}$$

Könnyű igazolni az $u(\bar{r})$ függvény esetében az összeg, szorzat differenciálási szabályának, ill. az összetett függvény differenciálási szabályának megfelelő következő szabályokat:

$$1^{\circ} \quad \text{grad}(u_1(\bar{r}) + u_2(\bar{r})) = \text{grad } u_1(\bar{r}) + \text{grad } u_2(\bar{r}),$$

$$2^{\circ} \quad \text{grad}(u_1(\bar{r}) \cdot u_2(\bar{r})) = u_1(\bar{r}) \cdot \text{grad } u_2(\bar{r}) + u_2(\bar{r}) \cdot \text{grad } u_1(\bar{r}),$$

$$3^{\circ} \quad \text{grad } f(u(\bar{r})) = \frac{df(u)}{du} \cdot \text{grad } u(\bar{r}),$$

$$4^{\circ} \quad \frac{d}{dt} u(\bar{r}(t)) = \text{grad } u(\bar{r}) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt},$$

ahol a legutolsó szabályban a szorzás skaláris szorzást jelent.

Pl. a 4^o szabályt így igazolhatjuk:

Ha a t változót megváltoztatjuk Δt -vel, akkor $\bar{r}(t)$ megváltozik $\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) = \Delta \bar{r}$ -rel, s ennek következtében $u(\bar{r})$ megváltozik $u(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - u(\bar{r}) = \Delta u$ -val. A differenciálhatóság értelmezése szerint a differenciálható $u(\bar{r})$ függvény megváltozása:

$$\Delta u = \text{grad } u \Delta \bar{r} + \bar{\epsilon} \Delta r, \text{ ahol } |\bar{\epsilon}| \rightarrow 0, \text{ ha } |\Delta \bar{r}| \rightarrow 0.$$

Tehát

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \text{grad } u \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} + \bar{\epsilon} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Ha azonban $\Delta t \rightarrow 0$, akkor a szereplő függvények differenciálhatóságát feltételezve

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \rightarrow \frac{du}{dt}, \quad \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad |\Delta \bar{r}| \rightarrow 0, \text{ tehát } |\bar{\epsilon}| \rightarrow 0,$$

és így

$$\frac{du}{dt} = \text{grad } u \frac{d\bar{r}}{dt},$$

amint azt állítottuk.

Ez utóbbi szabály a gradiens fogalmát a következő szemléletes módon világítja meg: fektessünk a tér egy P_0 pontján át különböző görbéket, ezeket jellemezzük $\vec{r} = \vec{r}(s)$ alaku egyenlettel (vagyis a görbék egyenletében az ívhosszúságot válasszuk paraméternek). Vizsgáljuk meg, hogy a P_0 pontból az egyik ilyen görbe mentén haladva, mennyi lesz az $u(\vec{r})$ skalártér változási sebessége. Ha a kiszemelt görbén Δs szakaszt futottunk be, akkor ezen a szakaszon a skalár-vektorfüggvény átlagos változási sebessége $\frac{\Delta u(\vec{r}(s))}{\Delta s}$, ennek határértéke pedig $\Delta s \rightarrow 0$ esetén, a $\frac{d u(\vec{r}(s))}{ds}$ differenciálhányados, az $u(\vec{r})$ függvénynek, a P_0 pontban a kiszemelt görbe irányában vett változási sebességét adja meg. A 4^o szabály szerint azonban

$$\left[\frac{d u(\vec{r}(s))}{ds} \right]_{P_0} = \left[\text{grad } u \right]_{P_0} \left[\frac{d\vec{r}}{ds} \right]_{P_0} = \left[\text{grad } u \right]_{P_0} \cdot \vec{e},$$

ahol $\vec{e}$ -vel jelöltük a kérdéses görbe P_0 pontbeli érintő egységvektorát. Az $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvénynek tehát a P_0 pontban az $\vec{e}$ érintő egységvektoru görbe mentén vett változási sebessége - a skalár-vektorfüggvény $\vec{e}$ iránymenti deriváltja - :

$$\left[\text{grad } u \right]_{P_0} \cdot \vec{e}.$$

(Ezen eredményünkkel megegyező - bár ilyen szabatosan még meg nem fogalmazott - eredményre jutottunk már a többváltozós függvények differenciál-számításának tárgyalásakor.)

Az $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvény változási sebességét (ill. iránymenti deriváltját) a P_0 pontban különböző irányokban vizsgálva látható, hogy az eredményt szolgáltató skaláris szorzat két tényezőjének abszolút értéke mindig ugyanaz ($\left| \left[\text{grad } u \right]_{P_0} \right|$, ill. $|\vec{e}| = 1$), csupán a két vektor által közbezárt szög változik. Maximális ekkor lesz tehát a változási sebesség értékét szolgáltató skaláris szorzat értéke, ha $\vec{e}$ párhuzamos a $\left[\text{grad } u \right]_{P_0}$ vektorral, vagyis a gradiens vektor irányában lesz maximális a skalár-vektorfüggvény változási sebessége. Ezen maximális változási sebesség nagysága:

$$\left[\text{grad } u \right]_{P_0} \cdot \left[\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right]_{P_0} = \left| \text{grad } u \right|_{P_0}.$$

Egy tetszőleges P_0 pontban képezve tehát $\text{grad } u$ értékét ez irány és nagyság szerint megadja az $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvény P_0 pontbeli maximális változási sebességét.

Másrészt geometriai jelentést is adhatunk a gradiens vektornak. Tekintsük ugyanis az $u(\vec{r})$ skalártér P_0 ponton átfektetett szintfelületét. Ennek egyenlete legyen $u(\vec{r}) \equiv C$. Tekintsünk most olyan görbéket, amelyek e szintfelületen fekszenek (kielégítik a szintfelület egyenletét) és áthaladnak a P_0 ponton. Adjuk meg e görbék egyenletét az ívhosszúsággal, mint paraméterrel: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(s)$. Ezen görbékre is

$$u(\vec{r}_i(s)) \equiv C,$$

vagyis

$$\frac{d u(\vec{r}_i(s))}{ds} \equiv 0.$$

Mivel azonban az előbb elmondottak értelmében

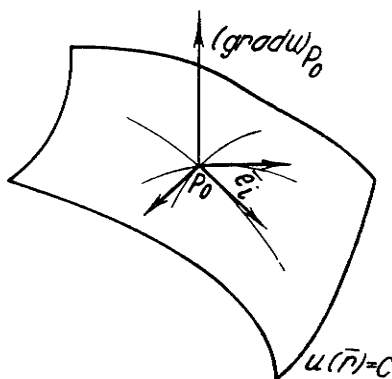
$$\left[\frac{d u(\vec{r}_i(s))}{ds} \right]_{P_0} = [\text{grad } u]_{P_0} \cdot \vec{e}_i,$$

ahol $\vec{e}_i$ jelenti az i -edik görbe P_0 pontbeli érintő egységvektorát, két összefüggésünk egybevetésével adódik:

$$[\text{grad } u]_{P_0} \cdot \vec{e}_i = 0$$

minden, a P_0 ponton áthaladó és a szintfelületen fekvő görbére. Ha tehát $[\text{grad } u]_{P_0}$ nem zérusvektor, akkor

utóbbi összefüggésünk értelmében merőlegesnek kell lennie az $\vec{e}_i$ vektorokra, úgyhogy ezek a vektorok (a vizsgált görbék érintő egységvektorai) mind egy síkban, a szintfelület P_0 -beli érintősíkjaiban fekszenek, és e síknak $[\text{grad } u]_{P_0}$ a normálisa.



$[\text{grad } u]_{P_0}$ megadja tehát az $u(\vec{r})$ skalártér P_0 ponton áthaladó szintfelületéhez a P_0 pontban illeszkedő érintősík normálisát.

Két eredményünket összesítve még a következőt mondhatjuk:

Az $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvény maximális változási sebességének iránya egy P_0 pontban mindig merőleges a skalártér P_0 ponton áthaladó szintfelületére.

Például a

$$\phi = \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

potenciáltér esetében

$$\text{grad } \phi = - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

ennek iránya tehát megegyezik $\vec{r}$ irányával (radiális irányu). A skalártér szintfelületei koncentrikus gömbfelületek, ezeknek $\text{grad } \phi$ valóban a normálisát adja meg. A potenciáltér maximális változási sebességének

nagysága: $|\text{grad } \phi| = \frac{1}{|\vec{r}|^2}.$

VEKTOR-VEKTORFÜGGVÉNYEK; TENZOROK

a)

Definíció

Vektor-vektorfüggvénynek olyan utasítást nevezünk, amely egy vektorokból álló P halmaz elemeihez rendeli egy másik, szintén vektorokból álló R halmaz egy-egy meghatározott elemét.

A független változó vektorokat $\vec{r}$ -rel, a függő változó vektorokat $\vec{v}$ -vel jelölve, függvénykapcsolatunk formálisan így írható fel:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}).$$

E függvénynek a fent értelmezett P halmaz ($\vec{r} \in P$) értelmezési tartománya, R pedig ($\vec{v} \in R$) értékkészlete.

Az $\vec{r}$ független változó vektorokat a tér egy fix pontjából mutató helyzetvektoroknak fogva fel, mivel a helyzetvektorok a tér pontjaiba mutatnak, azt is mondhatjuk, hogy a $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ függvénykapcsolat a tér ezen pontjaihoz rendel vektorokat. Ilyen értelemben szoktunk vektor-vektorfüggvény helyett vektortérrel, vagy síkvektorok esetében vektormezőről beszélni.

Ilyen tér pl. az egységnyi töltés által létesített elektrosztatikus tér, melynél a tér pontjaihoz az ott uralkodó térerősséget rendeljük hozzá. Ezt a teret - fix pontnak az egységnyi pontszerű töltés helyét választva - az

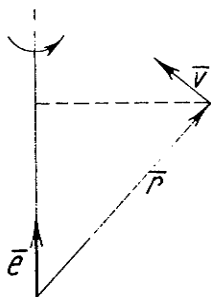
$$\vec{E} = \frac{1}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

vektor-vektorfüggvény írja le. A fix pontban elhelyezett egységnyi töltés ugyanis az $\vec{r}$ helyzetvektoru P pontban levő $+1$ töltést akkora erővel taszítja, melynek abszolút értéke a két töltés távolságának négyzetével fordítva arányos: $|\vec{E}| = \frac{1}{|\vec{r}|^2}$, (az arányossági tényezőt 1-nek vesszük),

iránya pedig a fix pontot az $\vec{r}$ helyzetvektoru P ponttal összekötő egyenesen a fix ponttól távolodó irányba mutat. Ezen irányba mutató egységvektor: $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, vagyis a vektorteret valóban az $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ függvény írja le.

Példaképpen megemlítjük még az un. sebességi vektorteret, melyet úgy nyerünk, hogy a tér pontjaihoz a pillanatnyilag ott tartózkodó töltés, folyadék-részecske, tömegpont sebességvektorát rendeljük. Ilyen vektortér az adott tengely körül (ennek irányába mutató egységvektort jelöljük $\vec{e}$ -vel) ω szögsebességgel forgó merev test sebességi vektortere:

$$\vec{v} = \omega (\vec{e} \times \vec{r}) = \vec{c} \times \vec{r} ,$$



ahol $\vec{r}$ a forgástengely fix pontjából mutató helyzetvektor, $\vec{c} = \omega \vec{e}$ pedig a szögsebesség vektora. (Az $\vec{r}$ helyzetvektoru részecske sebessége merőleges ugyanis az $\vec{e}$ és $\vec{r}$ vektorokra, nagysága pedig ω -val és a részecske forgástengelytől mért $|\vec{e} \times \vec{r}|$ távolságával arányos.)

Egy XYZ derékszögű koordinátarendszerben a

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$$

vektor-vektorfüggvénynek mind a függő, mind a független változóját össze-
tevéire bontva az

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} ,$$

$$\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

jelöléssel, mivel X, Y, Z nyilván x, y, z függvénye, a $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ vektor-
vektorfüggvényt az XYZ derékszögű koordinátarendszerben még a követ-
kező paraméteres egyenletrendszerrel is megadhatjuk:

$$X = X(x, y, z) ,$$

$$Y = Y(x, y, z) ,$$

$$Z = Z(x, y, z) .$$

Szokás még a $\vec{v}$ függő változó vektor koordinátáit így is jelölni:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} .$$

Például az egységnyi töltés elektrosztatikus terét leíró $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

függvényt, az egységnyi töltést az $O(0,0,0)$ pontban véve fel a következő
egyenletrendszerrel adhatjuk meg:

$$E_x = \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3},$$

$$E_y = \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3},$$

$$E_z = \frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Szemléltetni egy vektorteret közvetlenül nem tudunk. Sokszor célszerű megvizsgálni azokat a görbéket, melyeknek érintői a vektortér által a görbepontokhoz rendelt vektor irányába mutatnak. Ezeket a görbéket trajektóriáknak nevezzük.

Például az $\vec{E}$ elektrosztatikus erőter trajektóriái az origóból kiinduló félegyeneselek.

A végtelen hosszú vezető mágneses terét a

$$\vec{v} = \frac{c(\vec{e} \times \vec{r})}{|\vec{e} \times \vec{r}|^2}$$

vektorfüggvény írja le, ahol $\vec{e}$ jelenti a vezető irányába mutató egységvektort. A vezetőt a Z tengelyben véve fel, s a vektorteret csak a $z = 0$ síkban vizsgálva adódik:

$$\vec{v} = \frac{c_1(-y\vec{i} + x\vec{j})}{x^2 + y^2}.$$

Ennek a vektortérnek (vektormezőnek) trajektóriái az origó körüli koncentrikus körök, mert e körök érintői mindig merőlegesek az $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vektoral megadható sugarakra. Valóban $\vec{r}$ (az (x, y) ponton áthaladó $0(0, 0)$ középpontú körvonal (x, y) pontjába mutató sugár irányát megadó vektor) és $\vec{v}$ (az (x, y) ponton áthaladó $0(0, 0)$ középpontú körvonal (x, y) pontjához tartozó érintő irányát megadó vektor) skaláris szorzata zérus:

$$\vec{v}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \frac{c_1}{x^2 + y^2}(-yx + xy) = 0.$$

A trajektóriák segítségével csak a vizsgált vektortér irányáról tudunk szemléletes képet alkotni. A vektortér irányának és nagyságának szemléletes leírására az ún. erővonalrendszer fogalmát szokás bevezetni. Az erővonalak trajektóriák, melyeknek sűrűsége megadja a vektortér nagyságát. Ezen azt értjük, hogy a tér egy P_0 pontján áthaladó erővonal érintőjének irányába mutat a $\vec{v}(\vec{r})$ vektorfüggvény által a ponthoz rendelt $\vec{v}(\vec{r}_0)$

vektor, míg a P_0 pontban a $\bar{v}(\bar{r}_0)$ vektorra merőlegesen felvett egységnyi területű síkdarabon áthaladó erővonalsszám $|\bar{v}(\bar{r}_0)|$ -kel egyenlő.

Külön, részletesebben kívánunk az alábbiakban foglalkozni a vektor-vektorfüggvények egy speciális osztályával.

Definíció

A homogén lineáris vektor-vektorfüggvényeket tenzoroknak nevezzük.

A $\bar{v}(\bar{r})$ vektortér homogén lineáris, ha

$$\bar{v}(c\bar{r}) = c \bar{v}(\bar{r}), \quad (c \text{ állandó}),$$

$$\bar{v}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \bar{v}(\bar{r}_1) + \bar{v}(\bar{r}_2).$$

Homogén lineáris függvény volt az $y = cx$ egyváltozós skálár-skálárfüggvény, az $\bar{r} = \bar{a}t$ egyparaméteres vektor-skálárfüggvény, az $u = \bar{a}\bar{r}$ skálár-vektorfüggvény. Homogén lineáris vektor-vektorfüggvények pl.:

$$\bar{v} = c\bar{r}, \quad \bar{v} = \bar{c} \times \bar{r}, \quad \bar{v} = \text{grad } \bar{r}^2.$$

A tenzorokat általában nagy betűvel jelöljük: $\bar{A}, \bar{V}$; az $\bar{A}$ tenzor által az $\bar{r}$ vektorhoz rendelt vektort pedig $\bar{A}\bar{r}$ -rel fogjuk jelölni.

Egy $\bar{A}$ tenzor megadásához az szükséges, hogy tudjuk, milyen vektorokat feleltet meg a felvett XYZ derékszögű koordinátarendszer $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ egy-ségvektorainak. Ha

$$\bar{A}\bar{i} = \bar{a}_1 = a_{11}\bar{i} + a_{21}\bar{j} + a_{31}\bar{k} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}\bar{j} = \bar{a}_2 = a_{12}\bar{i} + a_{22}\bar{j} + a_{32}\bar{k} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}\bar{k} = \bar{a}_3 = a_{13}\bar{i} + a_{23}\bar{j} + a_{33}\bar{k} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

akkor a homogén lineáris tulajdonság miatt $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ esetén

$$\begin{aligned} \bar{A} \bar{r} &= x \bar{A} \bar{i} + y \bar{A} \bar{j} + z \bar{A} \bar{k} = x \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a mátrix-összeadás és szorzás műveletének értelmezését felhasználva).

Az a_{ik} ($i = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$) számokból alkotott

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mátrixot az $\bar{A}$ tenzor mátrixának nevezzük a választott XYZ derékszögű koordináta-rendszerben. Más koordináta-rendszer választásánál a mátrix elemei általában megváltoznak, a főátlóban álló elemek összege:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

azonban független a koordináta-rendszer megválasztásától. Ezt az értéket a tenzor skalár-invariánsának nevezzük. (Ezt nem bizonyítjuk.)

A tenzorok fontos típusai a szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorok.

A szimmetrikus tenzorok mátrixában a főátlóra nézve szimmetrikus helyzetű elemek megegyeznek egymással: $a_{ik} = a_{ki}$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$).

Az antiszimmetrikus tenzorok mátrixában a főátlóban csupa 0 áll, a főátlóra nézve szimmetrikus helyzetű elemek pedig egymástól csak előjelben különböznek: $a_{ik} = -a_{ki}$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$). Ha $\bar{A}$ antiszimmetrikus tenzor,

akkor van olyan $\bar{a}$ vektor, hogy $\bar{A} \bar{r} = \bar{a} \times \bar{r}$; ezen $\bar{a}$ vektort az $\bar{A}$ tenzor vektor-invariánsának nevezzük. Ennek igazolására itt nem térünk ki. Igaz továbbá, hogy minden $\bar{A}$ tenzor egyértelműen felbontható egy szimmetrikus $\bar{A}_s$ és egy antiszimmetrikus $\bar{A}_a$ tenzor összegére. E tenzorok mátrixai, a közöttük fennálló kapcsolat egyidejű feltüntetésével:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & \frac{a_{13}+a_{31}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} \\ \frac{a_{13}+a_{31}}{2} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} & \frac{a_{13}-a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2} & 0 & \frac{a_{23}-a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}-a_{13}}{2} & \frac{a_{32}-a_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel pl. azon $\bar{C}$ tenzor mátrixát, amelyre $\bar{C} \bar{r} = \bar{c} \times \bar{r}$.

$$\bar{c} \times \bar{i} = \bar{a}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = c_3 \bar{j} - c_2 \bar{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ -c_2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{c} \times \bar{j} = \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -c_3 \bar{i} + c_1 \bar{k} = \begin{pmatrix} -c_3 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{c} \times \bar{k} = \bar{a}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c_2 \bar{i} - c_1 \bar{j} = \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vagyis a tenzor mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A tenzor mátrixából látható, hogy ez a $\bar{C}$ tenzor antimetrikus.

Érdekes alkalmazásként megemlítjük az un. tehetetlenségi tenzort, amelyre a következő megfontolással jutunk.

Adott tengely körül forgó véges sok anyagi pontból álló merev pontrendszer impulzusát

$$\sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i = \sum_i m_i (\bar{c} \times \bar{r}_i)$$

adja meg, ahol m_i az anyagi pontrendszer i -edik pontjának tömege, $\bar{c}$ a szögsebesség vektora ($\bar{c} = \omega \bar{e}$, ahol ω a szögsebesség nagyságát, $\bar{e}$ pedig a forgástengely irányába mutató egységvektort jelenti), $\bar{r}_i$ a forgástengelyen fekvő origóból az anyagi pontrendszer i -edik pontjába mutató helyzetvektor.

A pontrendszer impulzusmomentuma (impulzus nyomatéka)

$$\bar{m} = \sum_i m_i \bar{r}_i \times (\bar{c} \times \bar{r}_i),$$

ill. a kifejtési tétel alkalmazásával

$$\bar{m} = \sum_i m_i (\bar{r}_i^2 \bar{c} - (\bar{r}_i \bar{c}) \bar{r}_i).$$

Az $\bar{m}$ vektor $\bar{c}$ -ben homogén lineáris, tehát $\bar{c}$ -ből egy $\bar{T}$ tenzor alkalmazásával nyerhető:

$$\bar{m} = \bar{T} \bar{c}.$$

Mielőtt a $\bar{T}$ tenzor mátrixának elemeit felírnánk, vizsgáljuk meg a következő kifejezéseket:

$$\bar{c} \cdot \bar{T} \bar{c} = \sum_i m_i \bar{c} (\bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = \sum_i m_i (\bar{c} \times \bar{r}_i) \cdot \dot{\bar{r}}_i = \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i^2 = 2E,$$

ahol E a mozgási energiát jelenti (az átalakítások során alkalmaztuk az $\dot{\bar{r}}_i = \bar{c} \times \bar{r}_i$, ill. a vegyes szorzatokra érvényes $\bar{c} \bar{r}_i \dot{\bar{r}}_i = \bar{c} (\bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = (\bar{c} \times \bar{r}_i) \cdot \dot{\bar{r}}_i$ összefüggést). Előbbi eredményünket a $\bar{c}$ szögsebesség-vektor helyett a $\bar{c}$ irányába mutató $\bar{e}$ egységvektorra alkalmazva ($\bar{c} = \omega \bar{e}$)

$$\bar{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{e}} = \sum_i m_i \bar{\mathbf{e}} \left[\bar{\mathbf{r}}_i \times (\bar{\mathbf{e}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) \right] =$$

$$= \sum_i m_i (\bar{\mathbf{e}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) (\bar{\mathbf{e}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) = \sum_i m_i (\bar{\mathbf{e}} \times \bar{\mathbf{r}}_i)^2 = \sum_i m_i d_i^2$$

adódik, ahol d_i a pontrendszer i -edik pontjának a forgástengelytől mért távolságát jelöli. Előbbi eredményünkkel összekapcsolva nyerjük:

$$2E = \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{c}} = \omega \bar{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \omega \bar{\mathbf{e}} = \omega^2 \bar{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{e}} = \omega^2 \sum_i m_i d_i^2$$

és itt $\sum_i m_i d_i^2$ a pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka. Ezért nevezzük a $\bar{\mathbf{T}}$ tenzort tehetetlenségi tenzornak.

A fenti összefüggés egyébként a mozgási energia jól ismert

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\bar{\mathbf{e}}}$$

képletét adja, ahol $I_{\bar{\mathbf{e}}}$ -vel a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot jelöltük.

Felírva a $\bar{\mathbf{T}}$ tehetetlenségi tenzor mátrixának elemeit, látható, hogy a főátlóban álló elemek a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok, a többi elem pedig az ún. deviációs nyomatékokat szolgáltatja; a tenzor maga szimmetrikus. Az előbb felírt $\bar{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{e}} = I_{\bar{\mathbf{e}}}$ képlet alkalmazásaként adódik ugyanis:

$$t_{11} = \bar{\mathbf{i}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{i}} = I_x, \quad t_{22} = \bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{j}} = I_y, \quad t_{33} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{k}} = I_z,$$

míg pl.

$$\begin{aligned} t_{12} &= \bar{\mathbf{i}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{j}} = \sum_i m_i \bar{\mathbf{i}} \left[\bar{\mathbf{r}}_i \times (\bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) \right] = \\ &= \sum_i m_i \bar{\mathbf{i}} \left[\bar{\mathbf{r}}_i^2 \bar{\mathbf{j}} - (\bar{\mathbf{r}}_i \bar{\mathbf{j}}) \bar{\mathbf{r}}_i \right] = - \sum_i m_i y_i x_i = - I_{yx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{21} &= \bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{i}} = \sum_i m_i \bar{\mathbf{j}} \left[\bar{\mathbf{r}}_i \times (\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) \right] = \\ &= \sum_i m_i \bar{\mathbf{j}} \left[\bar{\mathbf{r}}_i^2 \bar{\mathbf{i}} - (\bar{\mathbf{r}}_i \bar{\mathbf{i}}) \bar{\mathbf{r}}_i \right] = - \sum_i m_i x_i y_i = t_{12} \end{aligned}$$

és hasonlóképpen

$$t_{13} = t_{31} = - \sum_i m_i x_i z_i ,$$

$$t_{23} = t_{32} = - \sum_i m_i y_i z_i ,$$

tehát $\bar{T}$ mátrixa:

$$\begin{pmatrix} I_x & -I_{yx} & -I_{zx} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} .$$

b)

Definíció

A $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvény határértéke az $\bar{r}_0$ helyzetvektoru pontban $\bar{a}$:

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \bar{v}(\bar{r}) = \bar{a} ,$$

ha tetszőleges kicsiny $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\bar{v}(\bar{r}) - \bar{a}| < \varepsilon , \text{ valahányszor } 0 < |\bar{r} - \bar{r}_0| < \delta .$$

Ekkor $\bar{v}$ koordinátái is tartanak $\bar{a}$ megfelelő koordinátáihoz, és viszont.

Definíció

A $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvény folytonos az $\bar{r}_0$ helyzetvektoru pontban, ha ott értelmezve van, véges határértéke is létezik, és

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \bar{v}(\bar{r}) = \bar{v}(\bar{r}_0) .$$

Ez más szóval annyit jelent, hogy ha $\bar{v}(\bar{r})$ folytonos az $\bar{r}_0$ helyzetvektoru pontban, akkor tetszőleges kicsiny $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\bar{v}(\bar{r}) - \bar{v}(\bar{r}_0)| < \varepsilon , \text{ valahányszor } |\bar{r} - \bar{r}_0| < \delta .$$

$\bar{v}(\bar{r})$ akkor és csak akkor folytonos az $\bar{r}_0$ helyzetvektoru P_0 pontban, ha koordinátái: $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ folytonosak P_0 -ban. Egy nyílt A ponthalmaz pontjaiban akkor mondjuk a $\bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvényt folytonosnak, ha minden $P \in A$ ponthoz mutató $\bar{r}$ helyzetvektorra $\bar{v}(\bar{r})$ folytonos. Ekkor nyilván $\bar{v}$ koordinátái is folytonosak az A halmazon.

c)

Definíció

A $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvényt differenciálhatónak mondjuk az $\bar{r}_0$ helyzetvektoru pontban, ha e ponthoz elég közeli $\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}$ helyzetvektoru helyekre a függvény megváltozása a következő alakban írható:

$$\Delta \bar{v} = \bar{v}(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) - \bar{v}(\bar{r}_0) = \bar{A} \Delta \bar{r} + \bar{E} \Delta \bar{r},$$

ahol $\bar{A}$ és $\bar{E}$ tenzor; az $\bar{E}$ tenzor elemei $\Delta \bar{r} \rightarrow 0$ esetén zérushoz tartanak, az $\bar{A}$ tenzor pedig $\Delta \bar{r}$ -től független. Az $\bar{A}$ tenzort a $\bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvény $\bar{r}_0$ helyhez tartozó deriválttenzorának, az $\bar{A} \Delta \bar{r}$ vektort a $\bar{v}(\bar{r})$ függvény differenciáljának nevezzük. ($d\bar{v} = \bar{A} \Delta \bar{r}$.)

Egy derékszögű koordinátarendszerben az $\bar{r}$ és $\bar{v}$ vektorokat koordinátáik segítségével felírva egyszerűen adódik az $\bar{A}$ deriválttenzor mátrixa:

Legyen

$$\bar{v} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}, \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

$$\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}, \quad \Delta \bar{r} = \Delta x\bar{i} + \Delta y\bar{j} + \Delta z\bar{k}.$$

Az $X(\bar{r})$, $Y(\bar{r})$, $Z(\bar{r})$ skalár-vektorfüggvények differenciálhatósága miatt:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{v} &= \bar{v}(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) - \bar{v}(\bar{r}_0) = [X(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) - X(\bar{r}_0)]\bar{i} + [Y(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) - Y(\bar{r}_0)]\bar{j} + \\ &+ [Z(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) - Z(\bar{r}_0)]\bar{k} = ([\text{grad } X]_{\bar{r}_0} \Delta \bar{r})\bar{i} + \\ &+ ([\text{grad } Y]_{\bar{r}_0} \Delta \bar{r})\bar{j} + ([\text{grad } Z]_{\bar{r}_0} \Delta \bar{r})\bar{k} + (\bar{\epsilon}_1 \Delta \bar{r})\bar{i} + (\bar{\epsilon}_2 \Delta \bar{r})\bar{j} + (\bar{\epsilon}_3 \Delta \bar{r})\bar{k} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}_{\bar{r}_0} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ahol tehát az $\bar{A}$ deriválttenzor mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

amelyben a parciális deriváltakat az $\bar{r}_0$ helyzetvektoru (x_0, y_0, z_0) helyen kell vennünk, és az $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_{i1}\bar{i} + \epsilon_{i2}\bar{j} + \epsilon_{i3}\bar{k}$ ($i = 1, 2, 3$) vektorok koordinátáiból képezett

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

mátrix minden eleme zérushoz tart, ha $|\Delta \bar{r}| \rightarrow 0$.

Pl. az

$$\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$$

vektor-vektorfüggvény deriválttenzorának mátrixa, mivel

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} - \frac{3x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = -\frac{3xy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = -\frac{3xz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5},$$

és mivel X-ből $Y = \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$, ill. Y-ből $Z = \frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$

ciklikus cserével nyerhető (vagyis x, y, z helyére rendre y, z, x , ill. z, x, y -t írva), Y , és Z parciálisait a fenti parciális deriváltakból közvetlenül felírva, a deriválttenzor mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} & \frac{-3xy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} & \frac{-3xz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} \\ \frac{-3yx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} & \frac{-2y^2+z^2+x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} & \frac{-3yz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} \\ \frac{-3zx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} & \frac{-3zy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} & \frac{-2z^2+x^2+y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} \end{pmatrix}.$$

A mátrixból kiolvasható hogy az $\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$ vektortér deriválttenzora szimmetrikus tenzor.

A deriválttenzor fogalmának szemléletes tartalmat is adhatunk. Erre azonban későbbi tárgyalásaink során térünk csak ki.

VONALMENTI INTEGRÁL. POTENCIÁL

a) Tegyük fel, hogy egy $u(\vec{r})$ skalártér a tér egy tartományának minden pontjában differenciálható. Ekkor gradiense az egyes $\vec{r}$ helyzetvektoru pontokban általában más és más lesz; rendeljük hozzá az $\vec{r}$ helyzetvektoru ponthoz a $\text{grad } u = \vec{v}$ vektornak itteni értékét. Ily módon a kérdéses tartományban értelmezett $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvényre jutunk. A vektorterek közül általában azok a legegyszerűbbek, amelyek ilyen módon, egy $u(\vec{r})$ skalártér gradienseként származtathatók, azaz melyekre

$$\vec{v}(\vec{r}) = \text{grad } u(\vec{r}) .$$

Látni fogjuk, hogy nem minden vektortér ilyen. Fontos ezért az a kérdés, hogy egy megadott $\vec{v}(\vec{r})$ vektortérrel miként lehet eldönteni, hogy gradiens-tere-e valamely $u(\vec{r})$ skalártérnek, és ha igen, miként lehet ezt az $u(\vec{r})$ skalárteret előállítani. Az olyan $\phi(\vec{r})$ skalárteret, amelynek (-1) -szeresének (tehát a $-\phi(\vec{r}) = u(\vec{r})$ skalártérnek) a $\vec{v}(\vec{r})$ vektortér a gradiense, a $\vec{v}(\vec{r})$ vektortér potenciáljának nevezik. A kérdés tehát úgy is fogalmazható, van-e egy adott $\vec{v}(\vec{r})$ vektortérnek potenciálja, és ha igen, hogyan lehet $\vec{v}(\vec{r})$ ismeretében ezt a potenciált meghatározni.

Mint ahogy koordinátákra bontva

$$\text{grad}(-\phi) = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} ,$$

azért a $\text{grad}(-\phi) = \text{grad } u = \vec{v}$ egyenlőség így írható:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X(x, y, z) , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y(x, y, z) , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = Z(x, y, z) ,$$

ahol $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

Az előbbi kérdés tehát így is megfogalmazható: hogyan lehet felismerni, hogy adott $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ függvények azonosak-e valamilyen $u(x, y, z)$ függvény parciális deriváltjaival, és ha igen, hogyan lehet ezt a függvényt megkeresni.

Ez a feladat ahhoz hasonló, amikor egy adott $f(x)$ függvényről azt kérdezzük, hogy differenciálhányadosa-e valamilyen $F(x)$ függvénynek, és ha igen, hogyan lehet ezt a $F(x)$ függvényt $f(x)$ ismeretében meghatározni.

Tudjuk, ha $f(x)$ folytonos, akkor mindig vannak ilyen $F(x)$ függvények ($f(x)$ -nek vannak primitív függvényei) és ezek $f(x)$ ismeretében az

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

képlet alapján határozhatók meg. A potenciál meghatározásának kérdése is egy bizonyos típusú integrál kiszámításával megoldható feladat.

Ezen integrálfogalom előkészítéseként foglalkozzunk a következő feladat megoldásával.

b) Képzeljünk el egy erőteret, amelyben a tér valamely pontjában elhelyezett tömegpontra meghatározott nagyságu és irányu, esetleg pontról-pontra változó erő hat. A tömegpont mozogjon egy adott görbedarab mentén. Kérdés, hogy mekkora munkát végez eközben az erőter.

Ha a pont pályája egyenesvonalu és a reá ható erő mozgás közben állandó, akkor a végzett munka mérőszámát az elmozdulásvektor és az erővektor skaláris szorzata szolgáltatja: $L = \vec{P} \cdot (\vec{b}-\vec{a})$.

Ha a pont pályája nem egyenesvonalu és a reá ható erő mozgás közben változik, akkor a következőképp kaphatjuk meg a végzett munka közelítő értékét. A pont pályáját részekre osztjuk, az egyes részeket a megfelelő hurokkal pótoljuk és a pontra ható erőt e hurok mentén állandónak tekintjük. Az i -edik részben a hurvektort $\Delta \vec{r}_i$ -vel, a hur mentén állandónak tekintett erőt $\vec{P}_i$ -vel jelölve, ezen a részen a végzett munka közelítő értéke $L_i \approx \vec{P}_i \Delta \vec{r}_i$. Az egész vizsgált görbedarab mentén végzett munka közelítő értéke az egyes részeken vett munkák közelítő értékének összege:

$$L \approx \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \Delta \vec{r}_i$$

Minél kisebb részekre osztottuk a görbét, a görbére és az erőterre tett bizonyos kikötések mellett, annál jobban fogja megközelíteni ez az összeg a keresett munka valódi értékét, úgyhogy ez a munka végül is a szóban forgó összeg határértékeként adódik.

A most alkalmazott gondolatmenet általánosításaként a következő definícióra jutunk.

Definíció

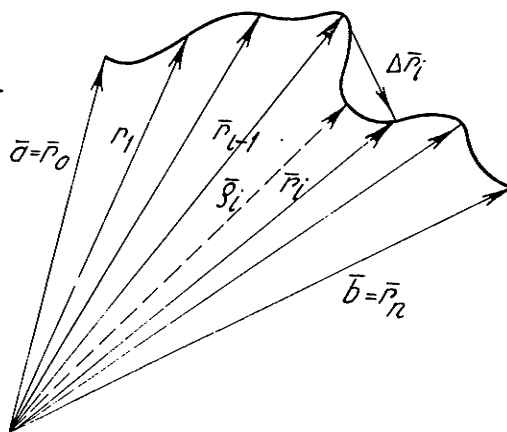
Legyen L egy rektifikálható görbedarab, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ pedig az L görbe pontjaiban folytonos vektortér. Osszuk fel az L görbét osztópontokkal részekre. Ezen osztópontokhoz mutató helyzetvektorok legyenek a befutás sorrendjében:

$$\vec{a} = \vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n = \vec{b}$$

ahol tehát $\vec{a} = \vec{r}_0$ a görbedarab kezdőpontjához, $\vec{b} = \vec{r}_n$ a görbedarab végpontjához mutató helyzetvektor. Legyen $\vec{\rho}_i$ a görbedarab i -edik részének valamely pontjához mutató helyzetvektor. Az L görbe bármely minden határon túl finomodó felosztásaihoz ilymódon képezett

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{\rho}_i) (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{\rho}_i) \Delta \vec{r}_i$$



összegek a felosztástól függetlenül bizonyíthatóan egy határértékhez konvergálnak, amelyet a $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvény skalárértékű vonalmenti integráljának nevezünk és így jelölünk:

$$\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Az L görbe minden határon túl finomodó felosztásain olyan felosztásokat értünk, amelyekben a görbén felvett osztópontok számának növekedésével együtt a két-két osztópont közötti görbeívek hosszúsága is 0 -hoz tart, $(\max \Delta s_i \rightarrow 0)$.

Bevezető feladatunkra visszatérve, ha $\vec{v}(\vec{r})$ erőter, akkor $\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$

az erőter által az L görbe mentén való mozgáskor végzett munkát jelenti.

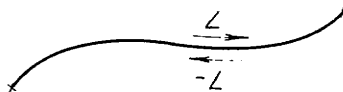
c) A most értelmezett görbementi integrál a következő könnyen igazolható tulajdonságokkal rendelkezik:

$$1^0 \quad \int_L (\vec{v}_1(\vec{r}) + \vec{v}_2(\vec{r})) d\vec{r} = \int_L \vec{v}_1(\vec{r}) d\vec{r} + \int_L \vec{v}_2(\vec{r}) d\vec{r}.$$

$$2^0 \quad \int_L c \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = c \int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Ha $-L$ jelenti az L görbedarabot ellenkező irányban történő befutás mellett, akkor

$$3^o \quad \int_{-L}^L \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = - \int_L^{-L} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}.$$



Ha az L_1 görbedarab végpontja és az L_2 görbedarab kezdőpontja egybeesnek, és $(L_1 + L_2)$ -vel jelöljük a két görbe egymáshoz való fűzésével keletkező görbét, akkor

$$4^o \quad \int_{L_1 + L_2} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_{L_1} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} + \int_{L_2} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}.$$



Megjegyezzük még, hogy ha az $\bar{r}$ és a $\bar{v}$ vektort koordinátákkal adjuk meg:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \bar{v} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

akkor a $\bar{v}(\bar{r})$ vektorfüggvény skalárértékű vonalmenti integráljának (*) integrálközelítő összegeiben a skaláris szorzást elvégezve

$$\begin{aligned} \int_L \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{\rho}_i) \Delta \bar{r}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X(\bar{\rho}_i) \Delta x_i + Y(\bar{\rho}_i) \Delta y_i + \\ &+ Z(\bar{\rho}_i) \Delta z_i) = \int_L X dx + Y dy + Z dz \end{aligned}$$

adódik. Ily módon tehát a $\bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvény L görbe menti skalárértékű vonalmenti integráljának egy másik szokásos jelölésére juthatunk.

d) Valamely görbementi integrál kiszámítása a következőképpen történik:

Legyen az L görbedarab egyenlete paraméteres alakban megadva: $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Tegyük fel továbbá, hogy $\dot{\bar{r}}(t)$ folytonos az $[\alpha, \beta]$ intervallumban (ekkor az L görbe biztosan rektifikálható), $\bar{v}(\bar{r})$ pedig legyen folytonos az L görbe pontjaiban. Az $\int_L \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}$ integrál egy közelítő összege:

$$\sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{r}_{i-1}) \Delta \bar{r}_i.$$

Ha azonban $\bar{r}(t)$ (a feltétel értelmében) differenciálható, akkor

$$\begin{aligned} \Delta \bar{r}_i &= \bar{r}_i - \bar{r}_{i-1} = \bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1}) = \bar{r}(t_{i-1} + \Delta t_i) - \bar{r}(t_{i-1}) = \\ &= \dot{\bar{r}}(t_{i-1}) \Delta t_i + \bar{\epsilon} \Delta t_i \approx \dot{\bar{r}}(t_{i-1}) \Delta t_i, \end{aligned}$$

t_i -vel jelölve az $\bar{r}_i$ helyzetvektoru ponthoz tartozó paraméterértéket.

A fenti integrálközelítő összeg tehát közelítőleg a

$$\sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{r}_{i-1}) \dot{\bar{r}}(t_{i-1}) \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{r}(t_{i-1})) \dot{\bar{r}}(t_{i-1}) \Delta t_i$$

összeggel egyenlő. Az utóbbi összeg azonban a felosztás minden határon túl való finomításakor (azaz $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ esetén) az

$$\int_{\alpha}^{\beta} \bar{v}(\bar{r}(t)) \dot{\bar{r}}(t) dt$$

közönséges valós skalárváltozós integrálhoz tart, és meg lehet mutatni, hogy a tett feltevések mellett a közelítéseknel elkövetett hiba is zérushoz tart, tehát:

$$\int_L \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \bar{v}(\bar{r}(t)) \dot{\bar{r}}(t) dt.$$

Ha tehát az L görbe egyenlete folytonosan differenciálható egyparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel van megadva, akkor a görbementi integrál kiszámítása egy közönséges integrál kiszámítására vezethető vissza. Az utóbbi integrált koordináták segítségével is felírhatjuk:

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[X(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + Y(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + Z(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) \right] dt,$$

vagy rövidebben

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \int_{\alpha}^{\beta} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) dt.$$

Példák

1^o Számítsuk ki a

$$\bar{v}(\bar{r}) = 2\bar{r}$$

vektortérnek az

$$\bar{r} = \cos t \bar{i} + \sin t \bar{j} + \frac{t}{2\pi} \bar{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

egységnyi menetemelkedésű közönséges csavarvonal menti integrálját a görbét növekedő paraméterértékek mentén befutva.

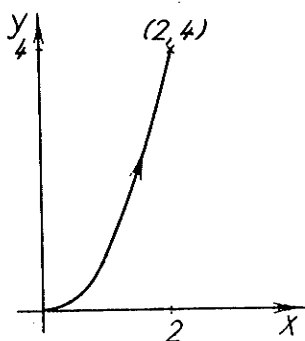
Mivel

$$\dot{\bar{r}} = -\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j} + \frac{1}{2\pi} \bar{k}$$

$$\int_L \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_L 2\bar{r} d\bar{r} = \int_0^{2\pi} (2\cos t(-\sin t) + 2\sin t \cos t + \frac{t}{\pi} \frac{1}{2\pi}) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 1.$$

2^o Kiszámítandó a



$$\bar{v} = (x^2 - 2y^2) \bar{i} + x^2 y \bar{j}$$

vektormező $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 2$) görbe mentén vett vonalmenti integrálja a görbét növekvő x -ek irányában befutva.

x -et tekintve paraméternek a fenti görbe egyenlete a következő egyparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel adható meg:

$$\bar{r} = x\bar{i} + x^2\bar{j},$$

azaz

$$\dot{\vec{r}} = \vec{i} + 2x\vec{j} ,$$

és így a keresett vonalmenti integrál:

$$\begin{aligned} \int_L \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r} &= \int_{x=0}^2 \vec{v}(\vec{r}(x)) \dot{\vec{r}}(x) \, dx = \int_0^2 \left[(x^2 - 2(x^2)^2 \vec{i} + x^2 (x^2) \vec{j}) \right] (\vec{i} + 2x\vec{j}) \, dx = \\ &= \int_0^2 (x^2 - 2x^4 + 2x^5) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^5}{5} + 2 \frac{x^6}{6} \right]_0^2 = \dots = 11,2 . \end{aligned}$$

3^o. A 2^o példában szereplő $\vec{v}(\vec{r})$ függvénynek az ott megadott L görbe kezdő és végpontját összekötő L' egyenesszakasz mentén vett vonalmenti integrálja, mivel a (0,0) és (2,4) pontokat összekötő egyenes egyenlete az

$$\vec{r} = (2\vec{i} + 4\vec{j})t \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{azaz } x = 2t, \, y = 4t)$$

egyparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel adható meg, azaz

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= 2\vec{i} + 4\vec{j} , \\ \int_{L'} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}}(t) \, dt = \int_0^1 \left[(4t^2 - 32t^2) \vec{i} + 16t^3 \vec{j} \right] (2\vec{i} + 4\vec{j}) \, dt = \\ &= \int_0^1 (-56t^2 + 64t^3) \, dt = 4 \left[-\frac{14t^3}{3} + \frac{16t^4}{4} \right]_0^1 = 8 \left[-\frac{7}{3} + \frac{8t^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{8}{3} . \end{aligned}$$

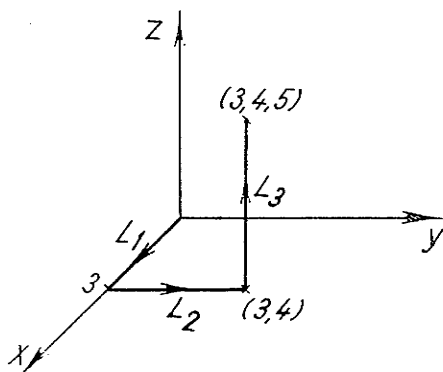
Az előbbi ábrán látható, hogy azonos kezdő és végpont mellett két különböző görbén integráltuk a $\vec{v}(\vec{r})$ függvényt. Az integrálok értéke különbözőnek adódott.

3^o Számítsuk ki a

$$\vec{v} = (3xy - x)\vec{i} + (xy^2 - yz^2)\vec{j} + xyz \vec{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az $L_1 + L_2 + L_3$ törtvonal mentén vett vonalmenti integrálját.

$$\int_{L_1 + L_2 + L_3} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_{L_1} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r} + \int_{L_2} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r} + \int_{L_3} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r} .$$



Az L_1 , L_2 , L_3 egyenesszakaszok egyenletét célszerű úgy felírni, hogy abban x , y ill. z -t választjuk paraméternek:

$$\begin{aligned} L_1 : \quad \vec{r}_1(x) &= x\vec{i}, & 0 \leq x \leq 3, & \text{(az } x \text{ paraméter szerinti deriváltat ponttal jelölve),} \\ \dot{\vec{r}}_1(x) &= \vec{i} \\ L_2 : \quad \vec{r}_2(y) &= 3\vec{i} + y\vec{j}, & 0 \leq y \leq 4, & \text{(az } y \text{ paraméter szerinti deriváltat ponttal jelölve),} \\ \dot{\vec{r}}_2(y) &= \vec{j}, \\ L_3 : \quad \vec{r}_3(z) &= 3\vec{i} + 4\vec{j} + z\vec{k}, & 0 \leq z \leq 5, & \text{(a } z \text{ paraméter szerinti deriváltat ponttal jelölve).} \\ \dot{\vec{r}}_3(z) &= \vec{k}, \end{aligned}$$

Az integrál mármost igen egyszerűen számítható ki:

$$\begin{aligned} \int_{L_1+L_2+L_3} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{x=0}^3 \left[(3 \cdot x \cdot 0 - x) 1 + (x \cdot 0^2 - 0 \cdot 0^2) \cdot 0 + x \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \right] dx + \\ &+ \int_{y=0}^4 \left[(3 \cdot 3 \cdot y - 3) \cdot 0 + (3 \cdot y^2 - y \cdot 0^2) \cdot 1 + 3 \cdot y \cdot 0 \cdot 0 \right] dy + \\ &+ \int_{z=0}^5 \left[(3 \cdot 3 \cdot 4 - 3) \cdot 0 + 3 \cdot 4^2 - 4 \cdot z^2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \cdot z \cdot 1 \right] dz = \\ &= \int_0^3 -x dx + \int_0^4 3y^2 dy + \int_0^5 12z dz = \dots = 209,5. \end{aligned}$$

Az ilyen típusu vonalmenti integrálokat - tekintettel a sok kieső tagra - az itt közölt első lépés elhagyásával, közvetlenül az x , y , ill. z szerinti integrálok felírásával szoktuk meghatározni.

e) Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a potenciál keresésének problémája és a görbementi integrál fogalma között.

Tegyük fel, hogy a folytonos $\vec{v}(\vec{r})$ vektortér egy T tartományban potenciális, azaz

$$\text{grad } (-\phi(\vec{r})) = \text{grad } u(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) .$$

Megmutatjuk, hogy ekkor a $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvény T -be eső L görbementi integrálja igen egyszerűen számítható ki.

Tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy az L görbe paraméteres előállítására $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) és itt $\vec{r}(t)$ folytonos. Ekkor

$$\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{v}(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \text{grad } u \dot{\vec{r}}(t) dt .$$

Mivel azonban

$$\text{grad } u(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d u(\vec{r}(t))}{dt} ,$$

a Newton-Leibniz formulát alkalmazva:

$$\begin{aligned} \int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d u(\vec{r}(t))}{dt} dt = \left[u(\vec{r}(t)) \right]_{\alpha}^{\beta} = u(\vec{r}(\beta)) - u(\vec{r}(\alpha)) = \\ &= u(b) - u(a) \end{aligned}$$

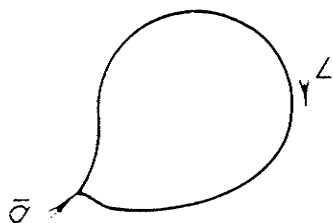
ahol $\vec{a} = \vec{r}(\alpha)$ az L görbe kezdőpontjának, $\vec{b} = \vec{r}(\beta)$ pedig végpontjának helyvektora. E szabály megfelel a határozott integrálnak a primitív függvény segítségével történő kiszámítására vonatkozó Newton-Leibniz-féle szabálynak.

Kimutatható, hogy ez a szabály akkor is érvényes, ha az $\dot{\vec{r}}(t)$ létezésére és folytonosságára tett kikötést elejtjük. A szabályból kiolvasható, hogy az integrál értéke csak a kezdő és végponttól függ, magától az uttól független.

Eredményünket a $\phi(\vec{r})$ potenciálfüggvénnyel kifejezve ($u(\vec{r}) = -\phi(\vec{r})$) adódik:

$$\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \phi(\vec{a}) - \phi(\vec{b}) .$$

Mivel az $\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$ integrál, amennyiben $\vec{v}(\vec{r})$ erőter, az $\vec{a}$ helyvektoru ponttól a $\vec{b}$ helyvektoru pontig az L görbe mentén haladva végzett munkát



jelenti, e munka nagyságát az $u(\vec{r})$ skalár-
tér növekedésével, ill. a $\phi(\vec{r})$ potenciál-
függvény csökkenésével mértük. Mivel az
energia megmaradásának törvénye értel-
mében az erőter pozitív munkát csak úgy
végezhet, hogy helyzeti energiája csök-
ken, a $\phi(\vec{r})$ skalártér, a potenciál, a
helyzeti energiát méri.

Ha az L görbe zárt, azaz ha vég-
pontja a kezdőpontjával egybeesik ($\vec{a} = \vec{b}$),
akkor

$$\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_L \text{grad } u(\vec{r}) d\vec{r} = u(\vec{a}) - u(\vec{a}) = 0.$$

A következő állítást fogalmazhatjuk meg tehát:

Ahhoz, hogy egy $\vec{v}(\vec{r})$ vektortérnek legyen potenciálja, egy T tartomány-
ban szükséges, hogy bármely zárt T -ben futó görbe mentén vett integrálja
zérus legyen.

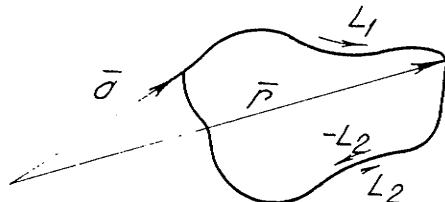
Megmutatjuk, hogy ezen állításban megfogalmazott feltétel elégséges is.

Legyen ugyanis $\vec{v}(\vec{r})$ egy olyan vektortér, mely a tér egy adott tarto-
mányában folytonos és az abban haladó bármely zárt görbe mentén vett in-
tegrálja zérus. Vegyünk fel ebben a tartományban egy $\vec{a}$ helyzetvektoru
pontot, és kössük össze a változó $\vec{r}$ helyzetvektoru pontot $\vec{a}$ -val egy, a
tartományban haladó uttal. Ha az
 $\vec{a}$ és $\vec{r}$ pontokat két különböző L_1

és L_2 görbével kötjük össze, a

$\vec{v}(\vec{r})$ vektortérnek az L_1 és L_2
görbék mentén vett integrálja egyező:

$$\int_{L_1} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}.$$



Az L_1 és L_2 görbe ugyanis együttevve zárt görbét alkot, az ennek men-
tén vett integrál pedig feltevésünk értelmében zérus, azaz korábban már be-
vezetett jelölésünkkel

$$\int_{L_1 + (-L_2)} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_{L_1} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} + \int_{-L_2} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_{L_1} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} - \int_{L_2} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = 0,$$

ez pedig az állítást adja.

Az előbbiek értelmében az $\bar{a}$ és $\bar{r}$ helyzetvektoru pontokat összekötő L görbe menti integrált jelölhetjük az

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{r}} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}$$

jellel, hiszen értéke valóban csak az $\bar{a}$ és $\bar{r}$ helyzetvektoru pontoktól függ, az azokat összekötő görbe választásától független.

Tekintsük most az

$$u(\bar{r}) = \int_{\bar{a}}^{\bar{r}} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}$$

képlettel értelmezett skalárteret. Megmutatjuk, hogy

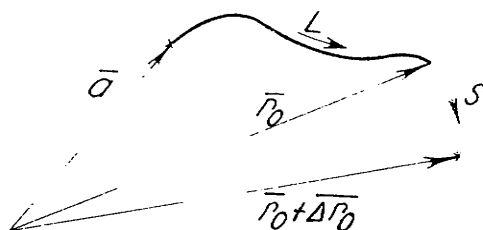
$$\text{grad } u(\bar{r}) = \bar{v}(\bar{r}),$$

azaz $-u(\bar{r}) = \phi(\bar{r})$ potenciálja a $\bar{v}(\bar{r})$ vektortérnek.

Tekintsük e célból az $u(\bar{r})$ skalártér értékét egy $\bar{r}_0$ helyzetvektoru pontban és e skalártér megváltozását, ha az $\bar{r}_0$ vektort $\Delta \bar{r}_0$ -al változtatjuk meg:

$$\Delta u = \int_{\bar{a}}^{\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}_0} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} - \int_{\bar{a}}^{\bar{r}_0} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}.$$

A jobboldali második integrált számítsuk az $\bar{a}$ és $\bar{r}_0$ pontokat összekötő valamely L görbén, az első pedig azon a görbén, mely L -ből az $\bar{r}_0$ és $\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}_0$ pontokat összekötő egyenesdarab hozzáfűzésével keletkezik. Ez utóbbi egyenesdarabot S -sel jelölve, nyilván



$$\Delta u = \int_{L+S} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} - \int_L \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_S \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}.$$

Az S egyenesdarab egy paraméteres előállításával:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t \Delta \bar{r}_0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

amiből

$$\dot{\bar{r}} = \Delta \bar{r}_0,$$

tehát

$$\int_S \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_0^1 \bar{v}(\bar{r}_0 + t \Delta \bar{r}_0) \Delta \bar{r}_0 dt.$$

Mivel azonban $\bar{v}(\bar{r})$ feltevésünk értelmében az $\bar{r}_0$ helyzetvektoru pontban folytonos,

$$\bar{v}(\bar{r}_0 + t \Delta \bar{r}_0) = \bar{v}(\bar{r}_0) + \bar{\eta}(t),$$

ahol $\bar{\eta}(t)$ tetszőlegesen kicsiny, ha csak $\Delta \bar{r}_0$ már elég kicsi. Így tehát

$$\begin{aligned} \int_S \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} &= \int_0^1 \bar{v}(\bar{r}_0) \Delta \bar{r}_0 dt + \int_0^1 \bar{\eta}(t) \Delta \bar{r}_0 dt = \\ &= \bar{v}(\bar{r}_0) \Delta \bar{r}_0 + \int_0^1 \bar{\eta}(t) \Delta \bar{r}_0 dt. \end{aligned}$$

Az utóbbi integrálra az integrálszámítás középértéktételét alkalmazva:

$$\int_0^1 \bar{\eta}(t) \Delta \bar{r}_0 dt = \bar{\eta}(\tau) \Delta \bar{r}_0 = \bar{\epsilon} \Delta \bar{r}_0 \quad (0 \leq \tau \leq 1),$$

ahol $|\bar{\epsilon}| \rightarrow 0$, ha $|\Delta \bar{r}_0| \rightarrow 0$. Végeredményünk tehát:

$$\Delta u = \bar{v}(\bar{r}_0) \Delta \bar{r}_0 + \bar{\epsilon} \Delta \bar{r}_0, \quad \text{ahol } |\bar{\epsilon}| \rightarrow 0, \text{ ha } |\Delta \bar{r}_0| \rightarrow 0.$$

$\text{grad } u(\bar{r})$ definíciója értelmében ez azonban épp azt jelenti, hogy

$$\left[\text{grad } u(\bar{r}) \right]_{\bar{r}=\bar{r}_0} = \bar{v}(\bar{r}_0),$$

amint azt állítottuk.

Kimutattuk tehát, hogy ha a $\vec{v}(\vec{r})$ vektortérnek bármely zárt görbe mentén vett integrálja zérus, akkor van potenciálja. Egy ilyen potenciált szolgáltat rögzített $\vec{a}$ mellett az

$$u(\vec{r}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r}$$

görbementi integrál.

Világos, hogy $u(\vec{r})$ -rel együtt $u(\vec{r}) + C$ is potenciálja a $\vec{v}(\vec{r})$ vektortérnek, ahol C tetszőesszerűen állandó. Más potenciál azonban nincs, mert ha $u_1(\vec{r})$ is egy potenciálja a $\vec{v}(\vec{r})$ vektortérnek, akkor

$$\text{grad } u = \vec{v}, \quad \text{grad } u_1 = \vec{v},$$

és így

$$\text{grad } (u - u_1) = \vec{0}.$$

Ha tehát bevezetjük az $u - u_1 = u_2$ jelölést, akkor

$$\text{grad } u_2 = \vec{0}.$$

Másrészt azonban

$$u_2(\vec{r}) - u_2(\vec{a}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \text{grad } u_2 \, d\vec{r} = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{0} \, d\vec{r} = 0,$$

ugyhogy bármely $\vec{r}$ helyen

$$u_2(\vec{r}) = u_2(\vec{a}) = C.$$

Vagyis

$$u_1(\vec{r}) = u(\vec{r}) - u_2(\vec{r}) = u(\vec{r}) + C.$$

Összefoglalva eredményeinket a következőt mondhatjuk:

A $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ vektortérnek akkor és csak akkor van potenciálja egy T tartományban, ha bármely T -ben futó zárt görbe mentén vett integrálja 0.
Ha ez a feltétel teljesül, akkor valamennyi potenciált megadja az

$$u(\vec{r}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r} + C$$

képlet, ahol $\vec{a}$ rögzített vektor, C tetszősszerű állandó és az integrál az $\vec{a}$ és $\vec{r}$ helyzetvektoru pontokat összekötő tetszősszerű T -ben futó görbe mentén számítandó.

Eredményünk könnyen értelmezhető a következő megfontolással:

Ha egy erőter fennáll energiafogyasztás nélkül (pl. ilyen a gravitációs, vagy az elektrosztatikus tér), akkor bármely zárt görbén végzett munka, azaz alkalmas jelöléssel $\oint \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$ zérus kell, hogy legyen, vagyis van potenciál. Ha ugyanis volna olyan zárt görbe, melyre $\oint \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} \neq 0$, akkor ezen többször végigvezetve egy tömegpontot, tetszőlegesen nagy munkát végeznénk energiafogyasztás nélkül, ami azonban az energia megmaradásának törvényébe ütközik.

Felmerül a kérdés, hogy valamely konkrétan, képlettel megadott vektortér esetében, hogyan lehet felismerni, van-e potenciálja, hiszen azt ellenőrizni, hogy minden zárt görbe mentén vett integrál zérus-e, gyakorlatilag lehetetlen. Jobban kezelhető kritériumot később tudunk majd adni, egyelőre csak annyit tehetünk, hogy rögzített $\vec{a}$ és változó $\vec{r}$ helyzetvektoru pontok között lehetőleg egyszerű görbe (általában a derékszögű koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos egyenes-szakaszokból álló ut) mentén integrálva a $\vec{v}(\vec{r})$ vektorteret, az így adódó $u(\vec{r})$ függvényre meg-nézzük, teljesül-e a $\text{grad } u = \vec{v}(\vec{r})$ összefüggés. Ha igen, akkor $-u = \phi$ a $\vec{v}(\vec{r})$ vektortér potenciálja.

Pl. az elektrosztatikus tér esetében:

$$u = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{(1,0,0)}^{(x,y,z)} \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} d\vec{r} =$$

$$= \int_{x=1}^x \frac{x}{(\sqrt{x^2+0+0})^3} dx + \int_{y=0}^y \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+0})^3} dy + \int_{z=0}^z \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} dz,$$

ahol a második integrálban x , a harmadikban x és y paraméterként (azaz az integrálás során állandóként) szerepel. Elvégezve az integrálást:

$$u = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^x + \frac{1}{2} \left[(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} (-2) \right]_0^y + \frac{1}{2} \left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} (-2) \right]_0^z =$$

$$= -\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{|\vec{r}|} + 1.$$

Mivel $\text{grad} \left(-\frac{1}{|\vec{r}|} \right) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, az egységnyi töltés elektrosztatikus terének potenciálja

$$\phi(\vec{r}) = -u(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

(Az integrálás során nem indulhattunk ki a $(0,0,0)$ pontból, mert ebben a pontban $\vec{E}$ nem volt értelmezve. A $(0,0,0)$ pont kivételével azonban a függvény az egész térben értelmezve van, s így $\vec{E}$ potenciálja az egész térben (a $(0,0,0)$ pontot kivéve) $\frac{1}{|\vec{r}|}$.

f) A $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvény skalárértékű vonalmenti integráljához teljesen hasonlóan értelmezhető a $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvény L görbe menti vektor-értékű, ill. az $u(\vec{r})$ skalár-vektorfüggvény vonalmenti integrálja. Feltételezve ugyanis az L görbe rektifikálhatóságát, az L görbét $\vec{r}_i$ helyzetvektoru P_i pontokkal részekre osztva, az i -edik rész valamely pontjához mutató helyzetvektort $\vec{\rho}_i$ -vel jelölve, L kezdő és végpontját $\vec{a} = \vec{r}_0$ és $\vec{b} = \vec{r}_n$ -nel adva meg

$$\sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{\rho}_i) \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{\rho}_i) \times \Delta \vec{r}_i \rightarrow \int_L \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{r},$$

$$\sum_{i=1}^n u(\vec{\rho}_i) (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) = \sum_{i=1}^n u(\vec{\rho}_i) \Delta \vec{r}_i \rightarrow \int_L u(\vec{r}) d\vec{r}$$

ahol az L görbe minden határon túl finomodó felosztásaira a határértékek biztosan léteznek, ha $\vec{v}(\vec{r})$ és $u(\vec{r})$ folytonosak.

Az integrálok kiszámítása is a vektor-vektorfüggvények skalárértékű vonalmenti integráljának kiszámítására szolgáló utasítás szerint történik. Ha ugyanis L egyenletét az $\vec{r}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) folytonosan differenciálható egyparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel adjuk meg, akkor az $\vec{a} = \vec{r}(\alpha)$, $\vec{b} = \vec{r}(\beta)$ jelöléssel:

$$\int_L \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{v}(\vec{r}(t)) \times \dot{\vec{r}}(t) dt,$$

$$\int_L u(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} u(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

Az így nyert valós, skalár változóju integrálok integrálandó függvénye vektor, az integrál értékét megadó vektor koordinátákra bontás után tagonkénti integrálással nyerhető. Vektor-vektorfüggvény vektorértékű vonalmenti integrálja lép fel a vezető mágneses terét megadó Biot-Savart-féle törvényben:

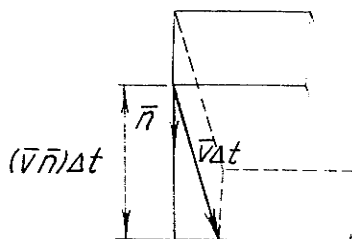
$$\vec{H}(\vec{r}_0) = - \int_L I \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \times d\vec{r},$$

ahol I a vezetőben folyó áram intenzitása, $\vec{r}$ a vezető pontjaihoz mutató helyzetvektor.

FELÜLETI INTEGRÁL

a) Jelentse $\vec{v}(\vec{r})$ egy áramló folyadék sebességi vektorterét. (Ezen az értendő, hogy a tér $\vec{r}$ helyzetvektoru pontjához az ott tartózkodó folyadék-részecske sebesség-vektorát rendeljük, és így áll elő a vizsgált vektortér.) Szemeljünk ki egy felületdarabot és próbáljuk meghatározni, hogy egy adott kicsiny Δt időközben mekkora térfogatu folyadékmennyiség lép át a kiszemelt felületdarabon.

Tegyük fel először, hogy a felületdarab egy síklap, és a $\vec{v}(\vec{r})$ sebességvektor iránya és nagysága a síklap minden pontjában azonos (a vektortér homogén). Minthogy a $\vec{v}$ sebességű folyadékrészecske Δt idő alatt $\vec{v} \Delta t$ vektorral megadható irányu és nagyságu elmozdulást végez, azért a Δt időtartam alatt a vizsgált síklapon átlépett folyadékrészecskék egy hasábot fognak kitölteni, melynek alapja a vizsgált síklap, oldalainak élvektora pedig $\vec{v} \Delta t$. A keresett folyadékmennyiség térfogata tehát ezen hasáb térfogatával lesz egyenlő. Ha $\vec{n}$ jelenti a síklapra merőleges egységvektort, akkor a haság magassága.



$$|\vec{v} \Delta t \vec{n}| = |\vec{v} \vec{n}| \Delta t,$$

s így a hasáb térfogata

$$V = |\vec{v} \vec{n}| f \Delta t,$$

ahol f jelenti a vizsgált síklap területét. Ha még abban is megállapodunk, hogy a síklapon az $\vec{n}$ vektor irányában átlépett folyadékmennyiség térfogatát pozitív előjellel, az ellenkező irányban átlépettét pedig negatív előjellel vesszük számításba, akkor nyilván az előjeles térfogat

$$V = \vec{v} \vec{n} f \Delta t$$

lesz.

Itt kétféle rövidítő jelölést is szokás bevezetni. Az egyik szerint, mivel $\vec{n}$ kikötésünk értelmében egységvektor, $\vec{v} \vec{n} = \vec{v}_n$, ahol $\vec{v}_n$ jelenti a $\vec{v}$ vektor $\vec{n}$ irányába eső vetületét, és így

$$V = v_n f \Delta t.$$

Másrészt, bevezetve az $\vec{f} = f\vec{n}$ vektort, amelynek iránya a felületdarabra merőleges, nagysága a felületdarab felszínével egyenlő, adódik:

$$V = \vec{v} \vec{f} \Delta t.$$

Adott felületdarabon Δt idő alatt átáramlott folyadékmennyiség meghatározása, ha a felületdarab nem sík, és pontjaiban a $\vec{v}$ sebesség nem állandó, hanem a helyzetvektornak $\vec{v}(\vec{r})$ függvénye, a következőképpen történhetik:

Előállítjuk a vizsgált felületdarab egyenletét kétparaméteres vektor-skalárfüggvény, azaz $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ alakban. Az UV sík felületdarabunknak megfelelő részében háromszöges hálózatot készítünk - úgy, ahogy azt a felület felszínének kiszámításánál tettük, vigyázva arra, hogy a háromszög szögei egy π -nél kisebb korlát alatt maradjanak - minden egyes háromszög szögpontjainak megfelelő felületi pontokon át háromszöglapot fektetünk át, és ilyen módon egy, a kérdéses felületdarabba beírt poliéderfelülethez jutunk. Az UV sík minden egyes háromszögében válasszunk ki egy pontot, és a felület ennek megfelelő pontjához tartozó $\vec{v}(\vec{r}_i)$ sebességvektort tekintsük a megfelelő i -edik poliéderlaphoz tartozó állandó sebességnek. Ha most a felületdarabot az előbbi módon nyert poliéderfelülettel helyettesítjük, és a poliéderfelület egyes háromszöglapjain a sebességet a leírt módon állandónak vesszük, akkor a keresett folyadékmennyiség közelítő értékűl

$$\sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{r}_i) \Delta \vec{f}_i \Delta t$$

adódik, ahol $\Delta \vec{f}_i$ az i -edik poliéderlapra merőleges, annak területével egyenlő nagyságú vektort jelent.

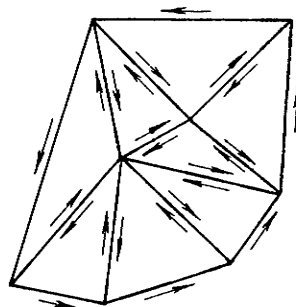
Kimutatható, hogy a $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvényre és a vizsgált felületre tett bizonyos kikötések mellett, ha a háromszöges hálózatot a felszín-számításnál részletezett módon minden határon túl finomítjuk, akkor a

$$\sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{r}_i) \Delta \vec{f}_i$$

összeg meghatározott határértékhez tart. Ezen határérték Δt -szerese adja meg a keresett folyadékmennyiség mérőszámát.

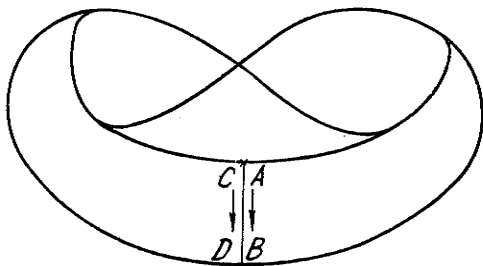
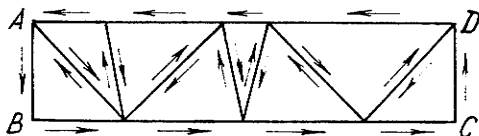
b) Mielőtt az előbbi példa megoldása során követett okoskodást általánosságban is megfogalmaznók, még egy fogalom bevezetése szükséges. (A mérhető felszínű felületdarab fogalmával, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ alaku egyenlettel történő megadás esetében a mérhető felszínüségre vonatkozó elégséges feltevél kimondásával korábban már foglalkoztunk.)

Tegyük fel, hogy a vizsgált felület minden pontjához fektethető érintősík, és az érintősík normális egységvektorának két lehetséges irányítása közül ki lehet egyet választani úgy, hogy az így kapott felületi normális egységvektor a felületen folytonosan változik. Az ilyen felületeket irányítható felületeknek nevezzük. Kimutatható, hogy az irányítható felületekbe beírt elég finom poliéderfelületek is irányíthatók, abban az értelemben, hogy háromszöglapjait el lehet látni egy-egy körüljárási iránynyal úgy, hogy a közös éleket ellenkező irányban, az esetleges perem-éleket pedig egymáshoz csatlakozó irányban járjuk be (lásd ábra).



Irányítható felületdarab pl. a gömbfelület, (folytonosan változó normális pl. a kifelé mutató normális) továbbá minden olyan felület, amely kölcsönösen egyértelmű és mindkét irányban folytonos leképezéssel (topologikus leképezéssel) a gömbfelületbe vihető át.

Nem irányítható felületdarab pl. az ún. Moebius-féle szalag. Erre a felületre a következőképpen juthatunk: az ABCD téglalappal megadható szalag CD oldalát egyszeri 180° -os elforgatás után (egyszeri "megcsavarás" után) illesszük az AB oldalhoz úgy, hogy az A csúcs a C csúccsal, a B csúcs a D csúccsal kerüljön fedésbe. Az így nyert felület nyilván nem irányítható, pl. az ábrán be rajzolt háromszöges hálózatonál az AB és CD élek a Moebius-szalagon mint közös élek nem lesznek ellenkező irányításuak.



Definíció

Legyen $\vec{v}(\vec{r})$ az F mérhető felszínü, irányítható felületdarab pontjaiban folytonos vektor-vektorfüggvény. Az F felületdarabba beírt, irányítható poliéderfelületekhez tartozó

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{\rho}_i) \Delta \bar{f}_i$$

összegeket képezve (ahol $\bar{\rho}_i$ az i -edik poliéderlapnak megfelelő felületdarab valamelyik pontjához mutató helyzetvektor, $\Delta \bar{f}_i$ pedig az i -edik poliéderlap területével egyenlő nagyságú és megfelelő irányítású normális) az F felület minden határon túl finomodó felosztásaihoz, ezen összegek valamely sorozatának határértéke (a tett feltevések mellett ez biztosan létezik és véges) a $\bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvénynek az adott normálisirányítás mellett az F felületre képezett skalárértékű felületmenti integrálja. Ennek jelölése:

$$\lim \sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{\rho}_i) \Delta \bar{f}_i = \iint_F \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f}.$$

Ha a $(*)$ integrálközelítő összegben a fejezet elején már bevezetett $\bar{v}_n = \mathbf{v}$ jelölést használjuk a tett kikötések mellett a következő eredményre jutunk:

$$\lim \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_n(\bar{\rho}_i) \Delta \bar{f}_i = \iint_F \mathbf{v}_n(\bar{r}) d\bar{f},$$

ahol az utóbbi integrált a $\mathbf{v}_n(\bar{r})$ skalár-vektorfüggvény felszín szerinti integráljának nevezzük. Ilyen felszín-szerinti integrálok lépnek fel felületdarabok első és másodrendű nyomatékainak, ill. súlypontjának kiszámításánál ahol a képletek a korábban követett okoskodáshoz hasonló gondolatmenettel adódnak.

Fenti eredményeink röviden úgy foglalhatók össze, hogy egy $\bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvény adott $\bar{n}$ normális-irányítású skalárértékű felületmenti integrálja mindig átalakítható $\bar{v}(\bar{r})$ ezen $\bar{n}$ normális irányú vetületének ugyanazon felületre vonatkozó felszín szerinti integráljává.

A $\bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvény mérhető felszínű, irányítható F felületdarabra vonatkozó skalárértékű felületmenti integráljának fizikai jelentése a bevezető példában követett gondolatmenet megismétlésével adódóan az F felületen az időegység alatt átlépő erővonalszámot (fluxus) megadó számérték.

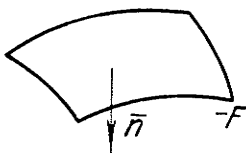
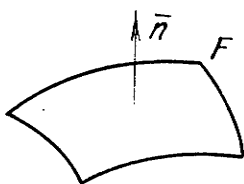
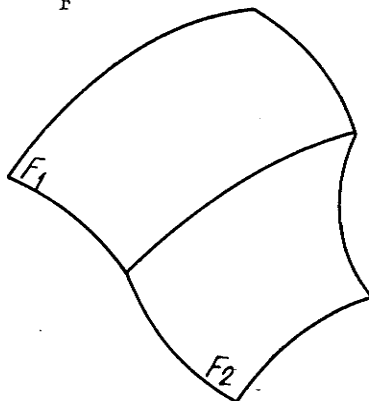
c) Könnyen belátható, hogy az előbb értelmezett felületmenti integrál a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$1^{\circ} \quad \iint_F c \, \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = c \quad \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f},$$

$$2^{\circ} \quad \iint_F [\bar{v}_1(\bar{r}) + \bar{v}_2(\bar{r})] \, d\bar{f} = \iint_F \bar{v}_1(\bar{r}) \, d\bar{f} + \iint_F \bar{v}_2(\bar{r}) \, d\bar{f}.$$

3^o Ha az F felületdarabot két részre bontjuk, s ezeket F_1 és F_2 -vel jelöljük, F, F_1 és F_2 normálisának egyező irányítása mellett

$$\iint_F \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} = \iint_{F_1} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} + \iint_{F_2} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f}.$$



4^o Ha $-F$ jelenti az F felületből a felületi normális irányításának ellenkezőre változtatásával keletkező irányított felületet, akkor

$$\iint_{-F} \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = - \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f}.$$

d) A folytonos $\bar{v}(\bar{r})$ vektorfüggvény irányítható, mérhető felszínű F felületre vonatkozó skalárértékű felületmenti integráljának kiszámítása, ha a felület egyenletét $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ alakban adjuk meg, az UV paramétersík megfelelő A halmazára vonatkozó kettős integrál kiszámítására vezethető vissza.

Létesítsünk ugyanis az A halmazon - úgy, mint azt a felszín kiszámításánál korábban tettük - háromszöges hálózatot négyszögrács négyszögeinek egyik átlójukkal való kettéosztása útján. Ekkor a felületdarabba irt poliéderfelület megfelelő háromszöglapjának két élvektora

$$\bar{r}_{i1} = \bar{r}(u_i + \Delta u_i, v_i) - \bar{r}(u_i, v_i) \approx \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta u_i,$$

$$\bar{r}_{i2} = \bar{r}(u_i, v_i + \Delta v_i) - \bar{r}(u_i, v_i) \approx \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta v_i$$

és így az i -edik poliéderlap területével egyező nagyságu normális

$$\Delta \bar{f}_i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} \Delta u_i \Delta v_i$$

(amennyiben a vektoriális szorzat iránya nem felelne meg a felület irányításának, úgy az u és v paraméterek felcserélésével, vagy a fenti vektoriális szorzat (-1) -gyel való beszorzásával elérhető, hogy a $\Delta \bar{f}_i$ vektorok irányítása megfelelő legyen). A $\bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvény F felületre vonatkozó skalárértékű felületmenti integráljának egy alkalmas közelítő összege tehát jó közelítéssel a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{r}(u_i, v_i)) \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \times \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} \frac{1}{2} \Delta u_i \Delta v_i = \\ & = \sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{r}(u_i, v_i)) \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_i, v_i)} \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_i, v_i)} t(A_i) \end{aligned}$$

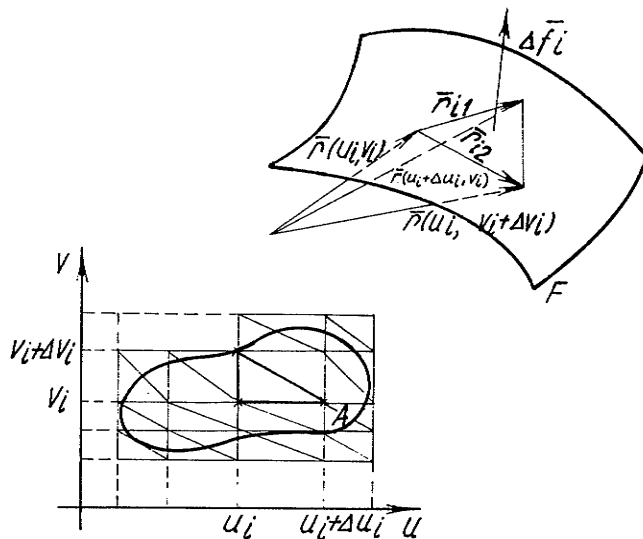
összeg, ahol A_i az UV síkbeli A ponthalmaznak a három szöges hálózattal történő felbontása révén előálló i -edik részhalmazát, $t(A_i)$ -vel pedig ennek területét jelöli.

Az UV sík ilyen háromszöges hálózattal történő felosztását minden határon túl finomítva ez utóbbi összeg az

$$\iint_A \bar{v}(\bar{r}(u, v)) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} du dv$$

kettős integrálhoz tart. Kimutatható, hogy az A halmaz $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ alakú minden határon túl történő finomodó felosztásainál az egyes $\Delta \bar{f}_i$ vektorok közelítésekor elkövetett hibák zérushoz tartanak, úgyhogy végül is

$$\iint_F \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} = \iint_A \bar{v}(\bar{r}(u, v)) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} du dv,$$



ahol ezen utóbbi kettős integrált + vagy - jellel kell venni aszerint, hogy az $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ vektor az F felület irányításának megfelelő, vagy az-
zel ellentett irányúnak adódik.

Ha az F felület egyenlete $z = f(x, y)$ alakban van megadva, akkor paraméternek x -et és y -t választva, a korábban már részletezett módon $\bar{r} = \bar{r}(x, y) = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$,

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \bar{k},$$

vagyis a

$$\bar{v} = X(x, y, z)\bar{i} + Y(x, y, z)\bar{j} + Z(x, y, z)\bar{k}$$

vektortérnek az F felületdarab mentén vett integrálja, ha az F felületet úgy irányítjuk, hogy $\bar{n}$ normálisára pl. $\bar{n}\bar{k} \geq 0$ legyen

$$\begin{aligned} \iint_F \bar{v} d\bar{f} &= \iint_A \bar{v}(\bar{r}(x, y, z)) \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} dx dy = \\ &= \iint_A \left[-X(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} - Y(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} + Z(x, y, f(x, y)) \right] dx dy, \end{aligned}$$

ahol A jelenti az F felületdarab vetületét az XY síkban.

Példák

1^o Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r}$ vektortének az

$$\vec{r} = \sin u \cos v \vec{i} + \sin u \sin v \vec{j} + \cos u \vec{k}$$

($0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$) egyenletű félgömbfelület menti skalárértékű felületmenti integrálját, feltéve, hogy e felület $\vec{n}$ normálisára $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$.
Mint már korábban kiszámítottuk

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \sin^2 u \cos v \vec{i} + \sin^2 u \sin v \vec{j} + \sin u \cos u \vec{k},$$

és ez a vektor az $A = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ halmaz pontjaihoz valóban olyan vektorokat rendel, amelyek $\vec{k}$ -val hegyesszöget zárnak be.

$$\begin{aligned} \iint_F \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f} &= \iint_F \vec{r} \, d\vec{f} = \iint_A \vec{r}(u, v) \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \, du \, dv = \\ &= \iint_A (\sin u \cos v \vec{i} + \sin u \sin v \vec{j} + \cos u \vec{k}) (\sin^2 u \cos v \vec{i} + \sin^2 u \sin v \vec{j} + \sin u \cos u \vec{k}) \, du \, dv = \\ &= \int_{v=0}^{2\pi} \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin u \cos^2 u) \, du \, dv = \int_{v=0}^{2\pi} \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, du \, dv = \\ &= \int_{v=0}^{2\pi} dv = 2\pi. \end{aligned}$$

2^o Számítsuk ki a

$$\vec{v} = xy \vec{i} + (x+z) \vec{j} - 2y^2 \vec{k}$$

vektortérnek a $z=xy$ felület azon darabja menti integrálját, amely az $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ XY síkbeli ponthalmaz felett fekszik, lefelé mutató (azaz a $\vec{k}$ vektorral tompaszöget bezáró) felületi normális mellett.

A kívánt irányítású felületi normális:

$$-\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j} - \bar{k} = y\bar{i} + x\bar{j} - \bar{k},$$

és így a vektortér felületmenti integrálja lefelé irányított felületi normális mellett

$$\begin{aligned} \iint_F \bar{v} d\bar{f} &= - \iint_A \bar{v}(\bar{r}(x, y)) \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_A (xy\bar{i} + (x+xy)\bar{j} - 2y^2\bar{k})(y\bar{i} + x\bar{j} - \bar{k}) dx dy = \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x (xy^2 + x^2 + x^2y + 2y^2) dy dx = \int_{x=0}^1 \left(x \frac{x^3}{3} + x^2x + x^2 \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{3} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} x^4 + \frac{5}{3} x^3 \right) dx = \frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

e) A folytonos $\bar{v}(\bar{r})$ vektor-vektorfüggvény mérhető felszínű, irányítható F felületdarabra vonatkozó skalárértékű felületmenti integráljához hasonlóan definiálható $\bar{v}(\bar{r})$ F -re vonatkozó vektorértékű, ill. a folytonos $\phi(\bar{r})$ skalár-vektorfüggvény F -re vonatkozó felületmenti integrálja. A b) pontban használt jelölésekkel

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \bar{v}(\bar{\rho}_i) \times \Delta \bar{f}_i &= \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \times d\bar{f}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \phi(\bar{\rho}_i) \Delta \bar{f}_i &= \iint_F \phi(\bar{r}) d\bar{f}, \end{aligned}$$

ahol a határérték jelével azt jelöltük, hogy az F felületdarabba beirt minden határon túl finomodó poliéderlapos felosztáshoz tartozó integrálközelítő összegek bármely sorozatának határértéke a definiálandó integrál.

Ezen integrálok kiszámítása az F felület egyenletének $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ alakú megadása esetén (az F felület pontjait az UV paramétersík A halmazának pontjaihoz rendeljük hozzá) szintén a skalárértékű felületmenti integrálhoz hasonlóan történik:

$$\iint_F \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) \times d\bar{\mathbf{f}} = \iint_A \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}(u, v)) \times \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v} \right) du dv,$$

ill.

$$\iint_F \phi(\bar{\mathbf{r}}) d\bar{\mathbf{f}} = \iint_A \phi(\bar{\mathbf{r}}(u, v)) \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v} \right) du dv,$$

feltéve, hogy $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v}$ irányítása az F felületi normálisának irá-

nyításával egyező (ha nem, úgy a kettős integrált - előjellel kell vennünk).

Teljesen hasonló módon lehet a $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}})$ vektor-vektorfüggvény, ill. a $\phi(\bar{\mathbf{r}})$ skalár-vektorfüggvény F felületre vonatkozó felszín-szerinti integrálját is definiálni.

$$\lim \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{v}}(\bar{\rho}_i) \Delta f_i = \iint_F \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) d\bar{\mathbf{f}},$$

$$\lim \sum_{i=1}^n \phi(\bar{\rho}_i) \Delta f_i = \iint_F \phi(\bar{\mathbf{r}}) d\bar{\mathbf{f}},$$

ahol Δf_i jelenti a felületbe beirt poliéderfelület i -edik lapjának területét.

Az integrál kiszámítása az F felület $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(u, v)$, $(u, v) \in A$ egyenlettel történő megadása esetén:

$$\iint_F \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) d\bar{\mathbf{f}} = \iint_A \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}(u, v)) \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v} \right| du dv,$$

$$\iint_F \phi(\bar{\mathbf{r}}) d\bar{\mathbf{f}} = \iint_A \phi(\bar{\mathbf{r}}(u, v)) \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v} \right| du dv,$$

a felszín-számításnál tett feltevések mellett. A skalár-vektorfüggvény felszín-szerinti integráljára már korábban utalást tettünk.

Vektor-vektorfüggvény divergenciája

a) Jelentsenek $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ a P pontot belsejükben vagy határukon tartalmazó zárt felületeket; tegyük fel, hogy e felületek mérhető felszínűek és irányíthatók, az általuk bezárt térrész mérhető térfogatu, és hogy a fenti sorozat tagjai a P pontra rázsugorodnak. Ezen pontosabban azt kell értenünk, hogy az F_n felületek pontjainak P -től való távolsága is zérushoz tart.

Legyen a $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvény folytonos a fent definiált $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ felületeken. Ekkor beszélhetünk $\vec{v}(\vec{r})$ F_n felületekre vonatkozó skalárértékű felületmenti integráljáról kifelé mutató felületi normális mellett. Az $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ felületek által bezárt térrész térfogatát $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ -nel jelölve az

$$\frac{\iint_{F_1} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_1}, \quad \frac{\iint_{F_2} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_2}, \dots, \frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_n}, \dots$$

sorozat határértékét - amennyiben ez létezik, véges, és a felületsorozat választásától független - a $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvény P pontbeli divergenciájának nevezzük és így jelöljük:

$$(1) \quad \left[\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) \right]_{(P)} = \lim \frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_n}$$

(F_n zárt felület, V_n az F_n által bezárt térrész térfogatának mérőszáma, a felületmenti integrált kifelé mutató felületi normálissal kell számítani, a $\lim$ jel pedig azt fejezi ki, hogy az $F_1, \dots, F_n, \dots$ felületek a P pontra zsugorodnak rá).

Az (1) definíciót $\text{div } \vec{v}$ Ignatowsky-féle definíciójának szokás nevezni. E definíció a felvett koordináta-rendszer-től független, ún. koordinátainvariáns definíció.

Felvetődik a kérdés, hogy milyen elégséges feltétel adható meg arra nézve, hogy az (1) definícióban szereplő határérték létezzék. Belátható, hogy ha $\vec{v}(\vec{r}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, és X, Y, Z parciális deriváltjai folytonosak a P pont környezetében, akkor az (1) határérték létezik. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

Az (1) határérték elnevezését könnyen indokolhatjuk abban a speciális esetben, amikor $\vec{v}(\vec{r})$ áramló összenyomhatatlan folyadék sebességi vektortere. Ekkor ugyanis - amint arról korábban már részletesen beszéltünk - $\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$ az F_n felületen az időegység

alatt átáramlott folyadék térfogatának mérőszámát, illetve, mivel a felületmenti integrált kifelé mutató felületi normálissal számítottuk, az F_n felületen az időegység alatt kilépő és belépő folyadék-térfogat különbségének mérőszámát adja meg.

Ez az érték csak akkor lesz zérustól különböző, ha az áramlási térben elhelyezkedő zárt F_n felület belsejében források, ill. nyelők (ezek helyett a továbbiakban szintén forrást - negatív forrást - mondunk majd) vannak. Az F_n felületre vonatkozó skalárértékű felületmenti integrál tehát F_n belsejében a forráserősséget méri. Ezt a mérőszámot az F_n felület által bezárt térrész V_n térfogatának mérőszámával osztva, a nyert

$$\frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}}{V_n}$$

hányados az F_n felület által határolt térrészben az átlagos forráserősségsűrűséget (forráserősűrűséget), e hányadosok (1) definícióban szereplő határértéke pedig a P pontbeli forráserősségsűrűséget méri.

Ezek szerint $[\text{div } \vec{v}(\vec{r})]_{(P)}$ a folyadék P pontbeli szétáramlásáról ad nekünk képet. ez indokolja a divergencia elnevezést.

Ha $\vec{v}(\vec{r})$ elektromágneses erőter, akkor (1)-ben a számlálóban álló integrál a fluxus, a hányados tehát az átlagos fluxussűrűség, határértékben tehát $\text{div } \vec{v}$ a P pontbeli fluxussűrűséget szolgáltatja.

Ha egy térrészben $\text{div } \vec{v} \equiv 0$, akkor ez azt jelenti, hogy nincsenek források a térben. Röviden az ilyen tereket forrásmentes tereknek nevez-

zük. Hasonló okoskodással adódik az (1) definícióból, hogy $\operatorname{div} \vec{v} \equiv c$ azt jelenti, hogy a források egyenletesen vannak a térben eloszolva.

b) Legyen

$$\vec{v} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

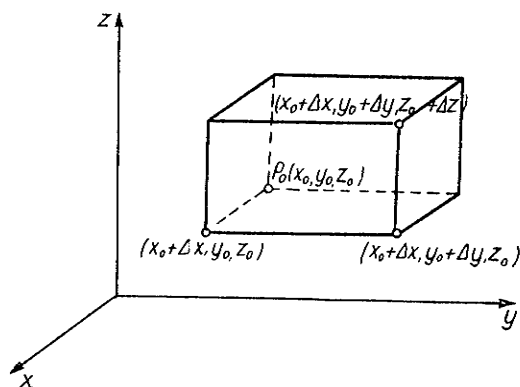
a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont H környezetében értelmezett vektor-vektorfüggvény.

Tegyük fel, hogy H -n $\vec{v}$ koordinátái, valamint ezeknek parciális deriváltjai folytonosak.

Legyen

$$K = \left\{ (x, y, z) : x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, \quad y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, \quad z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z \right\},$$

és $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ legyenek oly kicsinyek, hogy már $K \subset H$. Ezen kikötés mellett $[\operatorname{div} \vec{v}]$ létezik előbbi megjegyzésünk értelmében.
(P_0)



Tétel

Az előbbi feltételek mellett

$$\vec{v}(\vec{r}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

divergenciája

$$\operatorname{div} (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

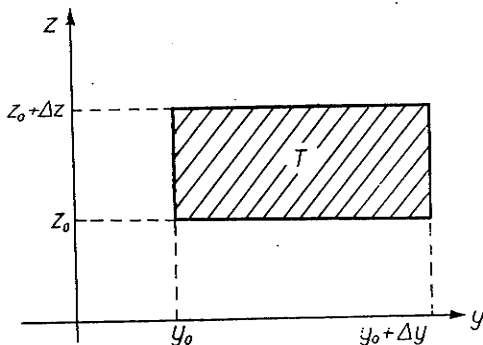
Bizonyítás

A K halmaz F határa az XYZ derékszögű koordinátarendszer koordinátasíkjaival párhuzamos oldalú egyenes hasáb felület. Számítsuk ki ezen F zárt felületre kifelé mutató felületi normális mellett a koordinátáinak parciális deriváltjaival együtt folytonosnak feltételezett $\vec{v}(\vec{r})$ vektortér skálárértékű felületmenti integrálját.

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f} = \iint_F X\vec{i} \, d\vec{f} + \iint_F Y\vec{j} \, d\vec{f} + \iint_F Z\vec{k} \, d\vec{f}.$$

Az $X\vec{i}$ vektortér F felületre vonatkozó felületmenti integrálja a hasáb $+\vec{k}$, $-\vec{k}$, $+\vec{j}$, $-\vec{j}$ normálisú lapjaira (ezek egyenlete $z = z_0 + \Delta z$, $z = z_0$, $y = y_0 + \Delta y$, $y = y_0$) zérus, a $+\vec{i}$ ill. $-\vec{i}$ normálisú $x = x_0 + \Delta x$, ill. $x = x_0$ egyenletű lapokra vonatkozó felületmenti integrált y és z -t vezetve be paraméternek az YZ paramétersík T tartományára ($\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$) vonatkozó kettős integrállá átalakítva:

$$\begin{aligned} \iint_F X\vec{i} \, d\vec{f} &= \iint_T X(x_0 + \Delta x, y, z) \vec{i} \vec{i} \, dy \, dz + \iint_T X(x_0, y, z) \vec{i} (-\vec{i}) \, dy \, dz = \\ &= \iint_T \left\{ X(x_0 + \Delta x, y, z) - X(x_0, y, z) \right\} \, dy \, dz. \end{aligned}$$



Integrálandó függvényünkre a Lagrange-féle közéértéktételt alkalmazva (ez a fent tett kikötések, vagyis a K halmazon X , Y , Z parciális deriváltjainak létezése és $\vec{v}(\vec{r})$ folytonossága mellett megtehető)

$$\left\{ X(x_0 + \Delta x, y, z) - X(x_0, y, z) \right\} = \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^0 \Delta x, y, z) \Delta x, \text{ ahol } 0 \leq \nu_1^0 \leq 1,$$

vagyis

$$\begin{aligned} \iint_F X \bar{I} d\bar{f} &= \dots = \iint_T \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y, z) \Delta x \right\} dy dz = \\ &= \int_{z=z_0}^{z_0+\Delta z} \left(\int_{y=y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y, z) \Delta x dy \right) dz. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk először a belső integrálra az integrálszámítás középtértéktételét (az integrálandó függvény feltételezett K -beli folytonossága miatt ez megtehető):

$$\int_{y=y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y, z) \Delta x dy = \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y_0 + \nu_2^\ell \Delta y, z) \Delta x \Delta y,$$

$$(0 \leq \nu_2^\ell \leq 1).$$

Hasonlóképpen a még visszamaradó z szerinti integrálban az integrálszámítás középtértéktételét alkalmazva adódik:

$$\begin{aligned} \iint_F X \bar{I} d\bar{f} &= \dots = \int_{z=z_0}^{z_0+\Delta z} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y_0 + \nu_2^\ell \Delta y, z) \Delta x \Delta y \right\} dz = \\ (2) \quad &= \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y_0 + \nu_2^\ell \Delta y, z_0 + \nu_3^\ell \Delta z) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (0 \leq \nu_3^\ell \leq 1). \end{aligned}$$

Teljesen hasonló okoskodással nyerhető, hogy

$$(3) \quad \iint_F Y \bar{J} d\bar{f} = \frac{\partial Y}{\partial y} (x_0 + \nu_4^\ell \Delta x, y_0 + \nu_5^\ell \Delta y, z_0 + \nu_6^\ell \Delta z) \Delta x \Delta y \Delta z, \text{ ahol } \nu_4^\ell, \nu_5^\ell, \nu_6^\ell$$

0 és 1 közötti számok,

$$(4) \iint_F Z \bar{k} \, d\bar{f} = \frac{\partial Z}{\partial z} (x_0 + \nu_7^{\ell} \Delta x, y_0 + \nu_8^{\ell} \Delta y, z_0 + \nu_9^{\ell} \Delta z) \Delta x \Delta y \Delta z, \text{ ahol } \nu_7^{\ell}, \nu_8^{\ell}, \nu_9^{\ell}$$

0 és 1 közötti számok.

(2), (3), (4) argumentumát röviden P', P'', P''' -vel jelölve ($P' \in K, P'' \in K, P''' \in K$), mivel a vizsgált hasáb térfogata ($\Delta z > 0$) $\Delta x \Delta y \Delta z$, a következő eredményre jutottunk:

$$\begin{aligned} \frac{\iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f}}{V} &= \frac{\left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (P') + \frac{\partial Y}{\partial y} (P'') + \frac{\partial Z}{\partial z} (P''') \right\} \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \\ &= \frac{\partial X}{\partial x} (P') + \frac{\partial Y}{\partial y} (P'') + \frac{\partial Z}{\partial z} (P'''). \end{aligned}$$

Ha az F felületek rázsugorodnak a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontra, akkor ezen speciális derékszögű hasáb-felületekből álló sorozat esetére a $\bar{v}(\bar{r})$ vektorvektorfüggvény koordinátáinak parciális deriváltjaira tett folytonossági kikötések mellett

$$\begin{aligned} (5) \quad \left[\operatorname{div} (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) \right]_{(P_0)} &= \lim \frac{1}{V} \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = \\ &= \lim \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (P') + \frac{\partial Y}{\partial y} (P'') + \frac{\partial Z}{\partial z} (P''') \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right\}_{(P_0)}. \end{aligned}$$

Pl. a $(0, 0, 0)$ pontban elhelyezett egységnyi pontszerű töltés elektrosztatikus terét előállító

$$\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \bar{k}$$

vektortér divergenciája $((x, y, z) \neq (0, 0, 0))$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3 - 3x^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \dots + \dots = \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2 - 3x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} + \dots + \dots = \\ &= \frac{y^2+z^2-2x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} + \frac{z^2+x^2-2y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} = 0, \end{aligned}$$

vagyis ez az elektrosztatikus tér divergenciamentes. (A számítások során az y és z szerinti parciális deriváltat, mivel a vektortér x , y és z -ben szimmetrikus, az x szerinti parciális deriváltból ciklikus cserével írtuk fel.)

Egy vektortér divergenciájának kiszámítására szolgáló képletünket - (5) - könnyen megjegyezhetjük, ha bevezetünk egy szimbolikus vektort. a ∇ jellel jelölt és nablának nevezett operátort:

$$(6) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

E vektornak önmagában nincs értelme (ezért is neveztük szimbolikus vektornak), csupán az bir értelemmel, hogy ∇ -t, mint operátort, utasítást, egy skalár, vagy vektorfüggvényre alkalmazzuk:

$$(7) \quad \nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v}.$$

A már korábban definiált grad u vektor is előállítható u -ból a ∇ vektor alkalmazásával:

$$(8) \quad \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \operatorname{grad} u.$$

c) Egyszerű számolással igazolhatók az alábbi összefüggések:

$$(9) \quad \operatorname{div} (\bar{v}_1(\bar{r}) + \bar{v}_2(\bar{r})) = \operatorname{div} \bar{v}_1(\bar{r}) + \operatorname{div} \bar{v}_2(\bar{r}),$$

$$(10) \quad \operatorname{div} (u(\bar{r}) \cdot \bar{v}(\bar{r})) = \bar{v}(\bar{r}) \operatorname{grad} u(\bar{r}) + u(\bar{r}) \operatorname{div} \bar{v}(\bar{r}).$$

Magukat a képleteket a ∇ szimbolikával (a bal oldalon álló vektorfüggvényekre a ∇ vektort formálisan alkalmazva) célszerű megjegyezni, ez a gondolatmenet azonban nem igazolása a fenti összefüggéseknek.

Például (10) esetében $\bar{v} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$ mellett

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (u(\bar{r}) \cdot \bar{v}(\bar{r})) &= \frac{\partial uX}{\partial x} + \frac{\partial uY}{\partial y} + \frac{\partial uZ}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} X + \frac{\partial u}{\partial y} Y + \frac{\partial u}{\partial z} Z + u \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = \\ &= \operatorname{grad} u \cdot \bar{v} + u \operatorname{div} \bar{v}. \end{aligned}$$

A ∇ operátor segítségével ez így írható fel:

$$\nabla (u \cdot \bar{v}) = (\nabla u) \bar{v} + u (\nabla \bar{v}),$$

s ebből kiolvasható az a más esetekben is helyesnek bizonyuló szabály, hogy a ∇ operátort egy szorzatra úgy kell alkalmazni, mint a differenciálás műveleti jelét, azaz minden tényezőre külön alkalmazzuk a többi változatlanul hagyása mellett, és az adódó tagokat összeadjuk.

A vektor-vektorfüggvények tárgyalásánál említettük, hogy külön tárgyalást érdemelnek azok a vektorterek, amelyek egy skalártér gradienseként származtathatók. (Az ilyen vektorterekről beláttuk, hogy alkalmas tartományban futó zárt görbe menti integráljuk mindig zérus. Ha $\bar{v} = \operatorname{grad} u$, akkor $\operatorname{div} \bar{v}$ a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} u &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Amennyiben tehát egy $\bar{v}$ vektortér potenciális ($\bar{v} = -\operatorname{grad} \phi$, $\phi = -u$), akkor

$$\operatorname{div} \bar{v} = \varphi(x, y, z),$$

esetében a vektortér potenciálja a

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \phi) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \varphi(x, y, z)$$

parciális differenciálegyenletnek tesz eleget. Ezt a parciális differenciálegyenletet $\varphi \equiv 0$ esetén Laplace-, egyébként Poisson-egyenletnek nevezik. Ezen nevezetes parciális differenciálegyenleteket még a következő rövid alakban szokás felírni. A ∇ operátor kétszer egymás után történő alkalmazásával adódó ∇^2 operátort Δ -val jelölve (a Δ operátort Laplace-operátornak szokás nevezni):

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

és így a Laplace-, ill. Poisson-egyenlet a következőképpen írható fel:

$$-\Delta \phi = 0,$$

ill.

$$-\Delta \phi = \varphi(x, y, z).$$

Gauss-Osztrogradszkij-tétel, síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tétel, Green-tétel

a) A Gauss-osztrogradszkij-tétel a következő fontos állítást mondja ki:

Legyen $\bar{v}(\bar{r})$ folytonos a mérhető felszínű, irányítható zárt F felületen, valamint az F felület által bezárt mérhető térfogatu térrészben; ugyanitt legyenek $\bar{v}(\bar{r})$ koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak. Ekkor

$$(1) \quad \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = \iiint_V \operatorname{div} \bar{v} \, dx \, dy \, dz,$$

ahol a felületmenti integrált kifelé mutató normálissal kell számítani.

A Gauss-Osztrogradszkij tétel tehát zárt felületre vonatkozó felületmenti integrált alakít át a felület által bezárt térrészre vonatkozó hármas integrállá.

Bizonyítás

A Gauss-Osztrogradszkij-tételt abban a speciális esetben fogjuk bebizonyítani, amikor az (1) -ben szereplő V tartomány mindhárom koordinátasík felől nézve normáltartomány. Ezen kívül $\vec{v}(\vec{r})$, ill. F -re a tétel kimondásában szereplő feltételek teljesülését természetesen megköveteljük.

Mivel

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V \operatorname{div} (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

a tételt bebizonyítottuk, ha e három hármas integrált megfelelő három felületi integrállá tudjuk átalakítani. Az átalakítást mi a felbontásban szereplő harmadik integrálra végezzük el, a másik kettő átalakítása teljesen hasonló lépésekben történik.

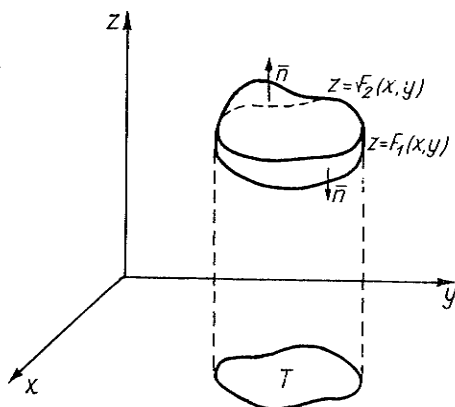
Az átalakítás első lépéseként végezzük el a z változó szerinti integrálást. Mivel feltevésünk értelmében V az XY síkra nézve normáltartomány, a két határoló felület egyenletét $z = F_1(x, y)$, ill. $z = F_2(x, y)$

alakban megadva, az XY sík megfelelő tartományát T -vel jelölve adódik:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \iint_T \left(\int_{z=F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z} \, dz \right) dx \, dy = \\ &= \iint_T \left[Z(x, y, z) \right]_{z=F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} dx \, dy = \\ &= \iint_T Z(x, y, F_2(x, y)) \, dx \, dy + \iint_T -Z(x, y, F_1(x, y)) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

E két kettős integrál közül az első felfogható a $\vec{v} = Z\vec{k}$ vektortér F_2 felület menti integráljának felfelé mutató felületi normális mellett, az XY paramétersíkban kettős integrállá átalakított formában. Második integrálunk ugyanakkor úgy tekinthető, mint a $\vec{v} = Z\vec{k}$ vektortér F_1 felület

menti, lefelé irányított felületi normálissal számított integráljának kettős integrállá alakított formája, azaz



$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \dots = \iint_{F_2} Z\vec{k} d\vec{f} + \iint_{F_1} Z\vec{k} d\vec{f}.$$

De másrészt az F felület az F_1 és F_2 felületdarabon kívül csak egy, a Z tengellyel párhuzamos alkotóju hengerfelületből állhat, s mivel ezen hengerfelület normálisára a $\vec{v} = Z\vec{k}$ vektortér vektorai merőlegesek, e hengerfelületre $Z\vec{k}$ felületmenti integrálja zérus. Irhatjuk tehát, hogy

$$\iint_{F_1} Z\vec{k} d\vec{f} + \iint_{F_2} Z\vec{k} d\vec{f} = \iint_F Z\vec{k} d\vec{f},$$

vagyis

$$(*) \quad \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \iint_F Z\vec{k} d\vec{f}.$$

Teljesen hasonlóan adódik:

$$(**) \quad \iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = \iint_F X\vec{i} d\vec{f},$$

$$(***) \quad \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz = \iint_F Y\vec{j} d\vec{f},$$

ahol az adódó felületmenti integrálokat kifelé mutató felületi normálissal kell számítani. A $(\mathbf{x})$, $(\mathbf{xx})$ és $(\mathbf{xxx})$ összefüggések összeadásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iint_F X \bar{i} \, d\bar{\mathbf{f}} + \iint_F Y \bar{j} \, d\bar{\mathbf{f}} + \iint_F Z \bar{k} \, d\bar{\mathbf{f}} = \\ &= \iint_F \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) \, d\bar{\mathbf{f}}, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

A most tárgyalt speciális esetből következtethetünk a Gauss-Osztrogradszkij-tétel érvényességére minden olyan V térrész esetében is, amely az itteni típusu térrészekből rakható össze úgy, hogy az egymással fedésbe kerülő felültreészekben a felületi normálisok irányításai ellentétesek legyenek. A gyakorlatban csak ilyen térrészekkel dolgozunk.

Az előző fejezetben egy elégséges feltételt adtunk arra nézve, hogy egy $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}})$ vektortér divergenciája a P pontban létezzék. Azt mondtuk, hogy ha $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}})$ koordinátáinak parciális deriváltjai folytonosak a P pontra rázsugorodó zárt $F_1, \dots, F_n, \dots$ felület által határolt térrészekben, akkor az (1) definícióban szereplő hányadosok sorozatának van határértéke, ezt a határértéket $[\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}]_{(P)}$ -vel jelöltük.

Valóban, jelentse F_n a P pontra rázsugorodó zárt felületsorozat egy tagját, K_n az F_n felület által bezárt térrészt, V_n pedig ezen térrész térfogatának mérőszámát. Mivel $P \in K_n$, a tett folytonossági kikötések mellett $(\xi, \eta, \zeta) \in K_n$ esetén

$$\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(\xi, \eta, \zeta)} = \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)} + \eta(\xi, \eta, \zeta),$$

ahol $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow P$ esetén $\eta \rightarrow 0$.

Mivel azonban $\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)}$ állandó, a Gauss-Osztro-

gradszkij-tétel értelmében írhatjuk:

$$\begin{aligned}
\iint_{F_n} (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) d\bar{f} &= \iiint_{K_n} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
&= \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)} \iiint_{K_n} dx dy dz + H_n = \\
&= \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)} V_n + H_n,
\end{aligned}$$

ahol

$$H_n = \iiint_{K_n} \gamma dx dy dz.$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$|H_n| \leq \varepsilon V_n,$$

mihelyt K_n beleesik P -nek olyan környezetébe, amelyben $|\gamma| < \varepsilon$.

Átosztva $V_n \neq 0$ -val, adódik:

$$(2) \quad \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)} = \frac{1}{V_n} \iint_{F_n} (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) d\bar{f} - \frac{H}{V_n}.$$

Ha mármost az F_n felületeknek P pontra rázsugorodó sorozatát tekintjük, az ezeknek megfelelő $\frac{1}{V_n} \iint_{F_n} (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) d\bar{f}$ sorozatok biz-

tosan konvergensek, és határértékük $\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)}$, hiszen a tett kikötések mellett $\left| \frac{H}{V_n} \right| \rightarrow 0$, s így a (2) összefüggésből az állítás adódik.

A Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével könnyen belátható, hogy a $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$ vektortérnek bármely mérhető felszínü, irányítható zárt F felületre vonatkozó felületmenti integrálja kifelé irányított felületi normális

mellett az F felület által bezárt K térrész térfogatának háromszorosával egyenlő.

Ugyanis

$$\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

és így a Gauss-Osztrogradszkij-tétel értelmében

$$\iint_F \vec{r} \, d\vec{f} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{r} \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_K dx \, dy \, dz = 3V.$$

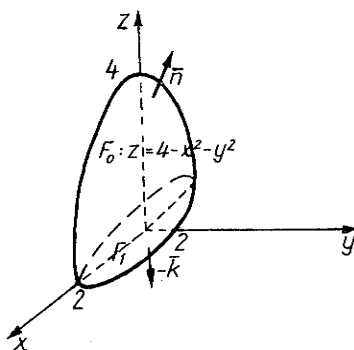
Ha pl. F egy $R = 2$ sugaru gömbfelület, akkor

$$\iint_F \vec{r} \, d\vec{f} = 3 \frac{4 \cdot 2^3 \tilde{n}}{3} = 32 \tilde{n}.$$

Néha nyílt felületekre vonatkozó felületmenti integrálok kiszámítására is alkalmazhatjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt. Ha ugyanis a nyílt felületet alkalmas felülettel (leginkább sikkal) kiegészítve zárt felületet nyerünk, erre alkalmazhatjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt, eredeti felületünkre az integrál értékét pedig úgy nyerjük, hogy az átalakítással nyert hármas integrál értékéből levonjuk a kiegészítő felületre (sikra) vonatkozó felületmenti integrál értékét.

Pl. számítsuk ki a

$$\vec{v} = (x-y)\vec{i} + yz\vec{j} + (x^2-yz)\vec{k}$$



vektorfüggvény felületmenti integrálját az $F_0: z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z > 0$ részére felfelé mutató felületi normális mellett. Az F_0 felületet az XY síkban fekvő F_1 síklemezzel ($F_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$) kiegészítve zárt felületre jutunk, vagyis a Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazva

$$\begin{aligned} \iint_{F_0} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f} + \iint_{F_1} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f} &= \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz, \text{ illetve} \end{aligned}$$

$$\iint_{F_0} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} = \iiint_V \operatorname{div} \bar{v} dx dy dz - \iint_{F_1} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f}$$

ahol F_0 -t felfelé mutató, F_1 -et lefelé mutató normálissal kell vennünk, ekkor ugyanis az $F_0 + F_1$ felület normálisa éppen a Gauss-Osztrogradskij tétel követelményeinek megfelelően kifelé mutató normális lesz.

Hármas integrálunkat hengerkoordinátás transzformációval célszerű kiszámítani, mivel pedig F_1 az XY síkban fekszik, s így pontjaiban $z = 0$, továbbá F_1 normálisa $-\bar{k}$, adódik:

$$\begin{aligned} \iint_{F_0} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} &= \iiint_V (1+z-y) dx dy dz - \iint_{F_1} [(x-y)\bar{i} + x^2\bar{k}] (-\bar{k}) dx dy = \\ &= \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^{-r^2+4} (1+z-r\sin\varphi)r dz \right) d\varphi dr - \iint_{F_1} (-x^2) dx dy = \\ &= \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left((r-r^2\sin\varphi)(-r^2+4) + \frac{(-r^2+4)^2}{2} r \right) d\varphi dr + \\ &+ \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 \cos^2\varphi d\varphi dr = \\ &= 2\pi \int_{r=0}^2 \left(-r^3 + 4r + \frac{r^5}{2} - 4r^3 + 8r + \frac{r^3}{2} \right) dr = \\ &= 2\pi \left[12 \frac{r^2}{2} - \frac{9}{2} \frac{r^4}{4} + \frac{1}{2} \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^2 = 2\pi (24 - 18 + \frac{16}{3}) = \frac{34}{3} 2\pi \approx 71. \end{aligned}$$

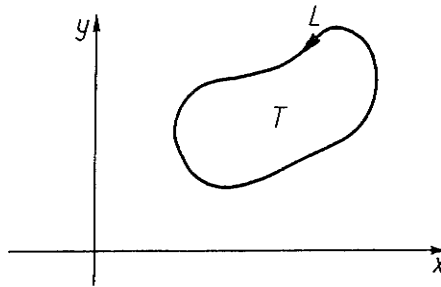
(A számolás során felhasználtuk, hogy mivel F_1 épp az XY paraméter-síkban fekvő síklap, a felületi integrált kettős integrállá átalakítva az integrációs tartomány is F_1 lesz; ezen integrált polárkoordinátás transzformációval számítva ki, mivel $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ és $\cos 2\varphi$, ill. $\sin\varphi$ -nek $[0, 2\pi]$ -ben vett integrálja zérus, a kettős integrálok számítása során az őket szorzóként tartalmazó tagok kiesnek.)

b) Az un. síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tétel a következő állítást mondja ki:

Legyen T mérhető területű tartomány, ennek L határgörbéje szakaszonként folytonosan differenciálható paraméteres előállítású, a $p(x, y)$ és $q(x, y)$ függvények T -ben és T -nek L határán, $p(x, y)$ és $q(x, y)$ parciális deriváltjai pedig T -ben folytonosak. Ekkor

$$\iint_T \left(\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_L (-q(x, y) dx + p(x, y) dy),$$

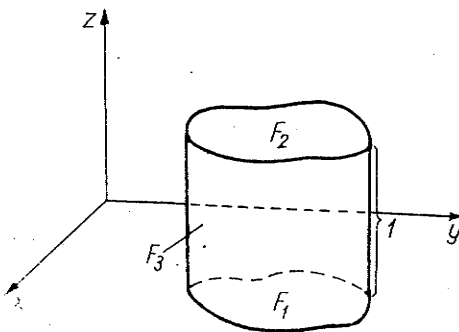
ahol az L görbén pozitív irányu befutással kell integrálnunk.



Bizonyítás

Tételünket az általános Gauss-Osztrogradszkij-tételből abban a speciális esetben nyerjük, ha azt a

$$\vec{v} = p(x, y) \vec{i} + q(x, y) \vec{j}$$



vektortérre és olyan V térrészre alkalmazzuk, amely a T tartomány fölé emelt, a Z tengellyel párhuzamos alkotóju egységnyi magasságú henger. Ekkor ugyanis egyrészt (először a z szerinti integrálást végezve el)

$$\begin{aligned}
\iiint_V \operatorname{div} \bar{v} \, dx \, dy \, dz &= \iint_T \left(\int_{z=0}^1 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dz \right) dx \, dy = \\
&= \iint_T \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) z \right]_{z=0}^1 dx \, dy = \\
&= \iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy.
\end{aligned}$$

Másrészt, az általános Gauss-Osztrogradszkij-tételben szereplő felületmenti integrált (kifelé mutató felületi normálissal) átalakítva, az ábrán látható módon az F henger alaplapját F_1 -gyel, fedőlapját F_2 -vel, palástját pedig F_3 -mal jelölve

$$\begin{aligned}
\iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} &= \iint_F (p\bar{i} + q\bar{j}) \, d\bar{f} = \iint_{F_1} (p\bar{i} + q\bar{j}) \, d\bar{f} + \iint_{F_2} (p\bar{i} + q\bar{j}) \, d\bar{f} + \\
&+ \iint_{F_3} (p\bar{i} + q\bar{j}) \, d\bar{f} = \iint_{F_3} (p\bar{i} + q\bar{j}) \, d\bar{f},
\end{aligned}$$

mivel az F_1 , ill. F_2 felületek kifelé mutató normálisa $\bar{k}$, ill. $-\bar{k}$ irányába mutat, így e felületmenti integrálok kettős integrállá történő átalakításánál az integranduszok zérusnak adódnak.

A visszamaradó F_3 felületre vonatkozó felületmenti integrált az L görbe menti integrállá fogjuk átalakítani. Az F_3 palást egyenletét az

$$\bar{r}(t, v) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + v\bar{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad 0 \leq v \leq 1$$

paraméteres alakban adhatjuk meg, ahol

$$\begin{aligned}
x &= x(t), \\
y &= y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,
\end{aligned}$$

az L görbe paraméteres egyenletrendszere. Mivel

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{y} \bar{i} - \dot{x} \bar{j}$$

(a t paraméter szerinti deriváltat jelöltük ponttal), és ha az L görbét pozitívan járjuk körül, azaz ha T balkéz felé esik, akkor ez valóban a feltevésnek megfelelően a térrészből kifelé mutató normálisirányításnak megfelelő, nyerjük:

$$\begin{aligned} \iint_{F_3} (p\bar{i} + q\bar{j}) d\bar{f} &= \iint_{T'} [p(x(t), y(t))\bar{i} + q(x(t), y(t))\bar{j}] (\dot{y}\bar{i} - \dot{x}\bar{j}) dt dv = \\ &= \int_{t=\alpha}^{\beta} \int_{v=0}^1 [p(x(t), y(t)) \dot{y} - q(x(t), y(t)) \dot{x}] dv dt = \\ &= \int_{t=\alpha}^{\beta} \left[(p(x(t), y(t)) \dot{y} - q(x(t), y(t)) \dot{x}) v \right]_{v=0}^1 dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (-q(x(t), y(t)) \dot{x} + p(x(t), y(t)) \dot{y}) dt. \end{aligned}$$

Ez utóbbi integrálunk azonban nem más, mint a $\bar{v} = -q\bar{i} + p\bar{j}$ vektortér L görbe menti integráljának közös integrállá átalakított formája, azaz

$$\iint_{F_3} (p\bar{i} + q\bar{j}) d\bar{f} = \dots = \int_L (-q\bar{i} + p\bar{j}) d\bar{r} = \int_L -q(x, y) dx + p(x, y) dy.$$

Egyrészt tehát azt az eredményt nyertük, hogy

$$\begin{aligned} (3) \quad \iiint_V \operatorname{div} \bar{v} dx dy dz &= \iiint_V \operatorname{div} (p\bar{i} + q\bar{j}) dx dy dz = \\ &= \iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

másrészt

$$(4) \quad \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = \iint_F (p\bar{i} + q\bar{j}) \, d\bar{f} = \\ = \int_L -q(x,y) \, dx + p(x,y) \, dy,$$

azaz az általános Gauss-Osztrogradszkij-tétel értelmében (3) és (4) baloldalainak fennálló egyenlőségéből következik, hogy

$$\iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_L -q \, dx + p \, dy,$$

amit bizonyítani akartunk.

A síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tételt a

$$p(x,y) = x, \quad q(x,y) = y$$

függvényekre alkalmazva a mérhető területű T tartomány területét szolgáló újabb képletre juthatunk (e terület ugyanis nyilván egyenlő

$$\iint_T 1 \, dx \, dy \text{ értékével}).$$

Mivel $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 1 + 1 = 2$, a T tartomány területét t -vel jelölve

$$\iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy = 2 \iint_T dx \, dy = 2t = \int_L -y \, dx + x \, dy,$$

azaz

$$t = \frac{1}{2} \int_L -y \, dx + x \, dy.$$

c) Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt a

$$\bar{v} = U \operatorname{grad} V = U \frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + U \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} + U \frac{\partial V}{\partial z} \bar{k}$$

vektor-vektorfüggvényre. Legyenek tehát U elsőrendű és V másodrendű parciális deriváltjai folytonosak a vizsgált mérhető felszínü, zárt F felületen és az általa bezárt K térrészben. Ekkor

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \bar{v} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ &= U \Delta V + \operatorname{grad} U \operatorname{grad} V.\end{aligned}$$

Az F felületre (kifelé mutató felületi normális mellett) és az F felület által bezárt K térrészre a Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazva adódik:

$$\begin{aligned}\iiint_K \operatorname{div} \bar{v} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_K (U \Delta V + \operatorname{grad} U \operatorname{grad} V) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = \iint_F v_n \, df = \iint_F \bar{v} \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \, df = \\ &= \iint_F U \operatorname{grad} V \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \, df = \iint_F U \frac{\partial V}{\partial n} \, df,\end{aligned}$$

(az átalakítások során $\bar{v}(\bar{r}) \cdot \bar{n}$ normálissal vett felületmenti integrálját átalakítottuk $\bar{v} \cdot \bar{n}$ irányu vetületének $v_n = \bar{v} \cdot \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$ -nak felszín szerinti integráljává, majd felhasználtuk azt a tényt, hogy valamely $V(x, y, z)$ skalár-tér $\bar{n}$ irányu deriváltját $\frac{\partial V}{\partial n}$ -et $\operatorname{grad} V$ és az $\bar{n}$ irányu egységvektor skaláris szorzata szolgáltatja), azaz

$$(5) \quad \iiint_K (U \Delta V + \operatorname{grad} U \operatorname{grad} V) \, dx \, dy \, dz = \iint_F U \frac{\partial V}{\partial n} \, df.$$

Az (5) összefüggést szokás Green-tételnek nevezni.

A Green-tételnek egy másik, szimmetrikus alakját az (5) összefüggésből a következő gondolatmenettel nyerhetjük:

Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt speciálisan a

$$\bar{v} = V \operatorname{grad} U$$

vektor-vektorfüggvényre. Ekkor az (5) -ből U és V szerepcseréjével adódó

$$(6) \quad \iiint_K (V \Delta U + \text{grad } U \text{ grad } V) dx dy dz = \iint_F V \frac{\partial U}{\partial n} df$$

összefüggésre jutunk. (5) -ből kivonva (6) -ot adódik:

$$(7) \quad \iiint_K (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = \iint_F (U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}) df.$$

A (7) összefüggést szokás szimmetrikus Green-tételnek nevezni. (E tétel-nél tehát U és V másodrendű parciális deriváltjainak folytonosságát kell kikötnünk a vizsgált F felületen és az általa bezárt K térrészben.)

Ez a tétel főleg az un. potenciálméleti vizsgálatokban játszik fontos szerepet.

Ha ugyanis a vizsgált vektortér potenciálos ($\vec{v} = -\text{grad } \varphi$) és ismerjük a vektortér divergenciáját ($\text{div } \vec{v} = g$), akkor mivel $\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi$, a vektortér φ potenciálja a

$$-\Delta \varphi = g$$

Poisson-egyenlet megoldásaként adódik.

Számítsuk ki először e Poisson-egyenlet megoldását alkalmas végesben fekvő V térrészben.

Jelöljük x, y, z -vel azon P pont koordinátáit, melyben a φ potenciált keressük, ξ, η, ζ -val pedig a változó (futó) pont koordinátáit. Tegyük fel, hogy a P pont a V térrésznek a belsejében fekszik; vegyünk fel a P pont mint középpont körül egy kicsiny r_0 sugaru gömbfelületet, melyet F_0 -lal, az általa határolt zárt térrészt V_0 -lal jelöljük. E V_0 térrészt V -ből elhagyva, a visszamaradó $V - V_0$ térrészre, valamint a V -t határoló F felületre és V_0 -át határoló F_0 felületre (ezek határolják V - V_0 -át), az ismeretlen φ potenciálfüggvényre és a

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} = \frac{1}{r}$$

függvényre írjuk fel a szimmetrikus Green-tételt (7). Mivel a $V - V_0$ térrész minden pontjában ψ értelmezve van és

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} = \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{x-\xi}{r^3} + \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{y-\eta}{r^3} + \frac{\partial}{\partial\zeta} \frac{z-\zeta}{r^3} = \\ &= \frac{2(\xi-x)^2 - (\eta-y)^2 - (\zeta-z)^2}{r^5} + \frac{2(\eta-y)^2 - (\zeta-z)^2 - (\xi-x)^2}{r^5} + \\ &+ \frac{2(\zeta-z)^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}{r^5} = 0,\end{aligned}$$

(7) értelmében

$$\begin{aligned}\iiint_{V-V_0} -\frac{1}{r} \Delta\varphi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta &= \iint_F \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df + \iint_{F_0} \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) df - \\ (8) \quad &- \iint_{F_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df,\end{aligned}$$

ahol a jobb oldalon szereplő két utolsó felületmenti integrálban a zárt felületből kifelé irányított normális radiális, a V_0 gömb középpontja felé irányított normálist jelent.

Vizsgáljuk meg a fenti integrálok határértékét, ha az F_0 gömbfelület a P pontra rázsugorodik, vagyis, ha $r_0 \rightarrow 0$. φ és $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ folytonossága esetén e függvények V -ben korlátosak, azaz

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| < K, \quad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(x, y, z) + \varepsilon'$$

és így

$$\left| \iint_{F_0} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df \right| \leq \frac{1}{r_0} K \iint_{F_0} df = \frac{1}{r_0} K \cdot 4\pi r_0^2 \tilde{n} = 4\pi \tilde{n} K r_0 \rightarrow 0,$$

ha $r_0 \rightarrow 0$. Teljesen hasonlóképpen, mivel

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \text{grad } \frac{1}{r} \cdot \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = -\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} \cdot \left(-\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \right)$$

$(\bar{r} = (\xi - x)\bar{i} + (\eta - y)\bar{j} + (\zeta - z)\bar{k})$, az F_0 gömbfelület $P(x, y, z)$ pont felé irányított normálisa tehát $\bar{n} = -\bar{r}$)

$$\begin{aligned} \iint_{F_0} \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df &= \iint \varphi \frac{1}{r_0^2} df = \\ &= \iint_{F_0} \varphi(P) \frac{1}{r_0^2} df + \iint \varepsilon' \frac{1}{r_0^2} df = \varphi(P) \frac{1}{r_0^2} 4r_0^2 \pi + H, \end{aligned}$$

ahol $H \rightarrow 0$, ha $r_0 \rightarrow 0$, mivel φ feltételezett folytonossága miatt tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon_1 > 0$ mellett $|\varepsilon'(\xi, \eta, \zeta)| < \varepsilon_1$, ha már r_0 elég kicsiny (vagyis (ξ, η, ζ) már elég közel fekszik (x, y, z) -hez), ekkor pedig

$$|H| = \left| \iint_{F_0} \varepsilon' \frac{1}{r_0^2} df \right| < \varepsilon_1 \frac{1}{r_0^2} 4r_0^2 \pi = 4\pi \varepsilon_1,$$

ami épp az állítást adja.

Mivel tehát $r_0 \rightarrow 0$ esetén (8) jobboldala - és így a baloldala is - véges határértékhez tart, konvergens az

$$\iiint_V -\frac{1}{r} \Delta \varphi d\xi d\eta d\zeta$$

improprius integrál, és

$$(9) \quad \iiint_V -\frac{1}{r} \Delta \varphi d\xi d\eta d\zeta = \iint_F \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df + 4\pi \varphi(P).$$

Belátható, hogy ha a P pont a V térrészt határoló F felületen fekszik, akkor hasonló okoskodással

$$\iiint_V -\frac{1}{r} \Delta \varphi d\xi d\eta d\zeta = \iint_F \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df + 2\pi \varphi(P),$$

illetve ha P a V térrészen kívül fekszik

$$\iiint_V -\frac{1}{r} \Delta \varphi d\xi d\eta d\zeta = \iint_F \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df$$

adódik.

Ha a vizsgált φ potenciál mármost a $-\Delta \varphi = g$ Poisson-egyenletnek tesz eleget, a (9) összefüggés ennek figyelembevételével $\varphi(P)$ -t a következőképpen adja meg:

$$(10) \quad \varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{g}{r} d\xi d\eta d\zeta - \frac{1}{4\pi} \iint_F \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df + \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df.$$

(E képletben az első integrál térbeli eloszlás, a második φ nyomatékú kettős réteg, a harmadik pedig $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ felületi sűrűségű egyszerű réteg potenciálját szolgáltatja.)

Ha V az egész teret jelenti és az első és másodrendű parciálisai-val együtt folytonosnak feltételezett φ potenciál $r \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart ($\varphi = o(1)$), $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ pedig r -rel szorozva is 0-hoz tart $r \rightarrow \infty$ esetén ($\frac{\partial \varphi}{\partial n} = o(\frac{1}{r})$), akkor a (10) képlet jobboldalán álló két utolsó integrál $r \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart, s így a φ potenciál értékét a következő hármas integrál szolgáltatja:

$$(11) \quad \varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Ha ui. pl. F R sugaru gömbfelület, akkor

$$\left| \iint_F \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df \right| = \left| \iint_F \varphi \frac{1}{R^2} df \right| < o(1) \frac{4R^2 \pi}{R^2} = 4\pi o(1),$$

$$\left| \iint_F \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df \right| = \left| \iint_F \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df \right| < \frac{1}{R} o\left(\frac{1}{R}\right) 4R^2 \pi = 4\pi \frac{o\left(\frac{1}{R}\right)}{\frac{1}{R}}$$

ahol a korábbi definíció értelmében eredményeink épp azt fejezik ki, hogy a fenti integrálok abszolút értéke $R \rightarrow \infty$ esetében 0-hoz tart.

Belátható, hogy a $g(\xi, \eta, \zeta)$ függvényre tett megfelelő megszorítások mellett a (11) -gyel definiált függvény valóban megoldása a

$$\Delta \varphi = -g$$

Poisson-egyenletnek.

Vektor-vektorfüggvény rotációja. Vektorpotenciál

a) Jelentsenek $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ a P pontot belsejükben vagy határukon tartalmazó zárt felületeket; tegyük fel, hogy e felületek mérhető felszínűek és irányíthatók, az általuk bezárt térrészek mérhető térfogatúak, és hogy a fenti sorozat tagjai a P pontra zsugorodnak rá.

Legyen a $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvény folytonos az $F_1, F_2, \dots, \dots, F_n, \dots$ felületeken. A felületek által bezárt térrészek térfogatát $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ -nel jelölve kifelé irányított felületi normális mellett

$$\frac{- \iint_{F_1} \vec{v} \times d\vec{f}}{V_1}, \quad \frac{- \iint_{F_2} \vec{v} \times d\vec{f}}{V_2}, \quad \dots, \quad \frac{- \iint_{F_n} \vec{v} \times d\vec{f}}{V_n}, \quad \dots$$

sorozat határértékét - amennyiben ez létezik, véges, és a felosztássorozat választásától független - a $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvény P pontbeli rotációjának nevezzük és így jelöljük:

$$(1) \quad \left[\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \right]_{(P)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{- \iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{f}}{V_n}.$$

(A $\vec{v}(\vec{r})$ függvényre és az F_n felületekre tett feltevések mellett az (1) definícióban szereplő vektorértékű felületmenti integrálok léteznek.)

Az (1) definíciót rot $\vec{v}$ Ignatowsky-féle definíciójának szokás nevezni. E definíció koordinátainvariáns, vagyis a felvett koordinátarendszertől független.

Belátható, hogy ha $\vec{v}(\vec{r})$ parciális deriváltjai is folytonosak a P pont környezetében, akkor az (1) határérték létezik. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

b) Legyen

$$\vec{v} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

a $P(x_0, y_0, z_0)$ pont H környezetében értelmezett és koordinátáinak elsőrendű parciális deriváltjaival folytonos függvény. Legyen a

$$K = \left\{ (x, y, z): x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z \right\}$$

halmaz H -nak részhalmaza: $K \subset H$.

Tétel

$$\vec{v}(\vec{r}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad \text{rotációja}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k},$$

ill. a korábban már bevezetett szimbolikus ∇ vektor segítségével felírva:

$$(2) \quad \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás

Speciálisan az előbb definiált K halmazt határoló hasábfelületre, ill. ilyenek $P \in K$ -ra rázsugorodó sorozatára fogjuk felírni $\vec{v}(\vec{r})$ vektorértékű felületmenti integrálját, majd meghatározni az (1) definícióban szereplő határértéket. Amennyiben a definícióban szereplő határérték létezik, speciális felületekből álló sorozatunk esetében az adódó határérték csak az (1) definícióban szereplővel egyezhet meg.

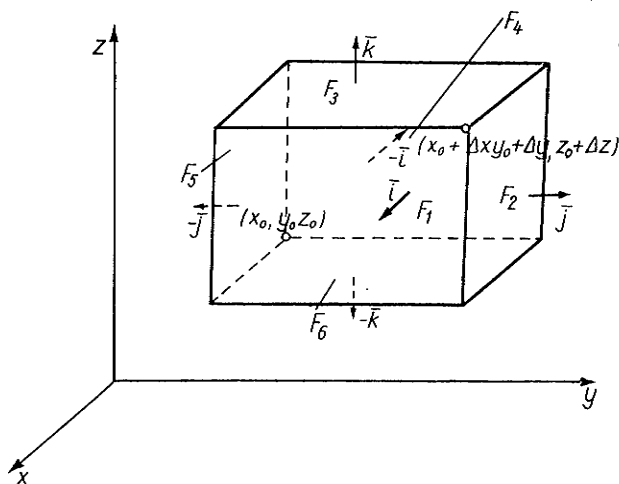
Az ábrából látható, hogy

$$F_1 = \{ (x, y, z): x = x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z \}, \quad F_1 \text{ normálisa } +\vec{i},$$

$$F_4 = \{ (x, y, z): x = x_0, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z \}, \quad F_4 \text{ normálisa } -\vec{i},$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= \{(x, y, z): y=y_0+\Delta y, x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x, z_0 \leq z \leq z_0+\Delta z\}, & F_2 \text{ normálisa } +\bar{j}, \\
F_5 &= \{(x, y, z): y=y_0, x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x, z_0 \leq z \leq z_0+\Delta z\}, & F_5 \text{ normálisa } -\bar{j}, \\
F_3 &= \{(x, y, z): z=z_0+\Delta z, x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x, y_0 \leq y \leq y_0+\Delta y\}, & F_3 \text{ normálisa } +\bar{k}, \\
F_6 &= \{(x, y, z): z=z_0, x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x, y_0 \leq y \leq y_0+\Delta y\}, & F_6 \text{ normálisa } -\bar{k}.
\end{aligned}$$

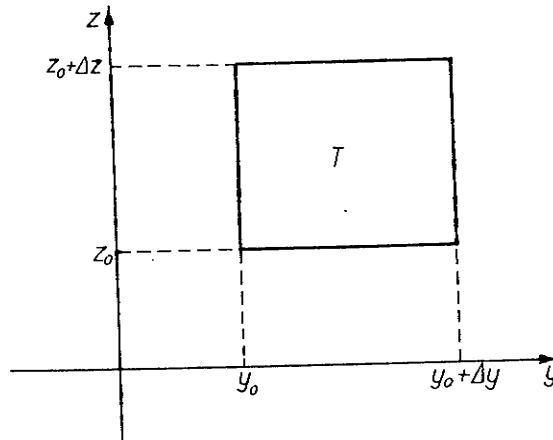
E normális-irányításokkal az $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6$ felületből kifelé irányított normálist kaptunk.



Számítsuk ki az F_1 és F_4 felületekre vonatkozó vektorértékű felületmenti integrálok összegét:

$$\begin{aligned}
& - \iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} = - \iint_T \bar{v}(x=x_0+\Delta x, y, z) \times \bar{i} dy dz + \\
& + \iint_T \bar{v}(x=x_0, y, z) \times \bar{i} dy dz,
\end{aligned}$$

ahol T -vel az YZ sík megfelelő (l. ábra) tartományát jelöltük. Tekintettel arra, hogy



$$\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ X & Y & Z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = Z \bar{\mathbf{j}} - Y \bar{\mathbf{k}},$$

az F_1 és F_4 lapokra vonatkozó felületmenti integrálok összege

$$\begin{aligned} - \iint_{F_1} \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}} - \iint_{F_4} \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}} &= \iint_T - (Z(x_0 + \Delta x, y, z) - Z(x_0, y, z)) \bar{\mathbf{j}} dy dz + \\ &+ \iint_T (Y(x_0 + \Delta x, y, z) - Y(x_0, y, z)) \bar{\mathbf{k}} dy dz. \end{aligned}$$

A két kettős integrálban szereplő függvényekre a Lagrange-féle középpérték-tételt alkalmazva (ez a tett kikötések mellett Z és Y parciális deriváltjainak létezése, Z és Y folytonossága - megtehető)

$$Z(x_0 + \Delta x, y, z) - Z(x_0, y, z) = \frac{\partial Z}{\partial x} (x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y, z) \Delta x, \quad 0 \leq \vartheta_1 \leq 1,$$

$$Y(x_0 + \Delta x, y, z) - Y(x_0, y, z) = \frac{\partial Y}{\partial x} (x_0 + \vartheta_2 \Delta x, y, z) \Delta x, \quad 0 \leq \vartheta_2 \leq 1,$$

adódik!

$$\begin{aligned}
-\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} &= \iiint_T \left[-\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_1^x \Delta x, y, z)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_2^x \Delta x, y, z)} \bar{k} \right] \Delta x dy dz = \\
&= \int_{z=z_0}^{z_0 + \Delta z} \left(\int_{y=y_0}^{y_0 + \Delta y} \left[\dots \right] \Delta x dy \right) dz.
\end{aligned}$$

Először a belső, majd a külső integrálra az integrálszámítás középérték-tételét alkalmazva

$$\begin{aligned}
-\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} &= \int_{z=z_0}^{z_0 + \Delta z} \left\{ -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_1^x \Delta x, y_0 + v_3^y \Delta y, z)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_2^x \Delta x, y_0 + v_4^y \Delta y, z)} \bar{k} \right\} \Delta x \Delta y dz = \\
&= \left\{ -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_1^x \Delta x, y_0 + v_3^y \Delta y, z_0 + v_5^z \Delta z)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_2^x \Delta x, y_0 + v_4^y \Delta y, z_0 + v_6^z \Delta z)} \bar{k} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z = \\
&= \left\{ -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(P_1)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(P_2)} \bar{k} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

(v_1^x és v_2^x -höz hasonlóan $v_3^y, v_4^y, v_5^z, v_6^z$ értéke is 0 és 1 között fekszik).

Teljesen hasonlóan adódik:

$$\begin{aligned}
-\iint_{F_2} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_5} \bar{v} \times d\bar{f} &= \left\{ -\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{(P_3)} \bar{k} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{(P_4)} \bar{i} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z, \\
-\iint_{F_3} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_6} \bar{v} \times d\bar{f} &= \left\{ -\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(P_5)} \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{(P_6)} \bar{j} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z,
\end{aligned}$$

ahol $P_3, P_4, P_5, P_6 \in K$.

Az (1) definícióban szereplő integrál:

$$\begin{aligned}
\frac{-\iint_F \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}}}{V} &= \frac{-\iint_{F_1} \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}} - \iint_{F_4} \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}} - \iint_{F_2} \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}} - \iint_{F_5} \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}} - \iint_{F_3} \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}} - \iint_{F_6} \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \\
&= - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{(P_1)} \bar{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_{(P_2)} \bar{\mathbf{k}} - \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)_{(P_3)} \bar{\mathbf{k}} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_{(P_4)} \bar{\mathbf{i}} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \right)_{(P_5)} \bar{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right)_{(P_6)} \bar{\mathbf{j}}.
\end{aligned}$$

A tett folytonossági kikötések mellett, ha az F felületek a P pontra rázsugorodnak, azaz $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \rightarrow P$ a fenti parciális deriváltak e deriváltak P -ben felvett helyettesítési értékéhez konvergálnak, azaz

$$\begin{aligned}
[\text{rot } \bar{\mathbf{v}}]_{(P)} &= \lim \frac{-\iint_F \bar{\mathbf{v}} \times d\bar{\mathbf{f}}}{V} = \\
&= \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{\mathbf{k}} \right]_{(P)},
\end{aligned}$$

amint állítottuk.

Az $\bar{\mathbf{e}}$ egységvektorral megadott tengely körül ω szögsebességgel forgó merev test sebességi vektorterét a

$$\bar{\mathbf{v}} = \omega (\bar{\mathbf{e}} \times \bar{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{c}} \times \bar{\mathbf{r}}$$

vektortér állítja elő, ahol a

$$\bar{\mathbf{c}} = \omega \bar{\mathbf{e}}$$

vektort, vagyis a forgástengely irányába mutató és a forgás szögsebességének mérőszámával egyenlő nagyságú vektort a szögsebesség vektorának neveztük.

Számítsuk ki e vektortér rotációját.

$$\bar{v} = \bar{c} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar{i}(c_2 z - c_3 y) - \bar{j}(c_1 z - c_3 x) + \bar{k}(c_1 y - c_2 x).$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{v} = \nabla \times \bar{v} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_2 z - c_3 y & c_3 x - c_1 z & c_1 y - c_2 z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(c_1 + c_1) - \bar{j}(-c_2 - c_2) + \bar{k}(c_3 + c_3) = 2\bar{c}. \end{aligned}$$

Azt látjuk tehát, hogy $\text{rot } \bar{v}$ a szögsebesség vektorának kétszeresét szolgáltatja. A $\text{rot } \bar{v}$ vektor tehát ekkor a vizsgált test forgómozgásáról ad képet, ez indokolja elnevezését.

Természetesen beszélhetünk olyan vektorterek rotációjáról is, ahol a $\text{rot } \bar{v}$ vektor nem bír e geometriai jelentéssel.

Az egységnyi pontszerű töltés elektrosztatikus terét előállító

$$\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$$

függvény rotációja

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{E} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}\left(-\frac{3zy}{|\bar{r}|^5} + \frac{3yz}{|\bar{r}|^5}\right) - \bar{j}\left(-\frac{3zx}{|\bar{r}|^5} + \frac{3xz}{|\bar{r}|^5}\right) + \bar{k}\left(-\frac{3xy}{|\bar{r}|^5} + \frac{3yx}{|\bar{r}|^5}\right) = 0. \end{aligned}$$

Általában, ha egy vektortér egy skalártér gradienseként állítható elő, akkor feltéve e skalártér másodrendű parciális deriváltjainak folytonos-

ságát, a vektortér mindig rotációmentes (azaz rotációja 0-val egyenlő).

$$\text{rot grad } u = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) - \bar{j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) +$$

$$+ \bar{k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

Az itt közölt állítás a vizsgált térrészre tett bizonyos kikötések mellett meg is fordítható. Alkalmas térrészben rotációmentes vektortér skalártér gradienseként állítható elő (potenciálos). Ezen állítás pontosabb megfogalmazására és igazolására a következő fejezetben térünk ki.

c) Könnyen igazolhatók az alábbi összefüggések:

$$\text{rot } (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \text{rot } \bar{v}_1 + \text{rot } \bar{v}_2,$$

$$\text{rot } (c\bar{v}) = c \text{ rot } \bar{v},$$

ha $\bar{v}$ kétszer differenciálható:

$$\text{div rot } \bar{v} = 0,$$

és

$$\text{rot rot } \bar{v} = \text{grad div } \bar{v} - (\Delta X\bar{i} + \Delta Y\bar{j} + \Delta Z\bar{k}),$$

ahol $\bar{v} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$, és az utóbbi zárójeles kifejezést szokás még röviden $\Delta \bar{v}$ -vel is jelölni.

Mivel fenti harmadik összefüggésünk értelmében $\text{div rot } \bar{v} = 0$, felmerül az a kérdés, hogy lehet-e a divergencia mentes vektortereket egy másik vektortér rotációjaként előállítani. Tehát

$$\text{div } \bar{V} = 0 \quad \text{esetében igaz-e, hogy} \quad \bar{V} = \text{rot } \bar{v}$$

Az ilyen $\bar{\mathbf{v}}$ vektorteret a divergenciamentes $\bar{\mathbf{v}}$ vektortér vektorpotenciáljának nevezik.

Adott divergenciamentes vektortérhez általában lehet divergenciamentes vektorpotenciált találni. Ha ugyanis

$$\bar{\mathbf{v}} = \text{rot } \bar{\mathbf{v}} \quad \text{és} \quad \text{div } \bar{\mathbf{v}} = 0,$$

akkor $\bar{\mathbf{v}}$ rotációjának ismeretében a vektorpotenciál koordinátáinak meghatározásához egy-egy Poisson-egyenletet kell megoldanunk (akárcsak az előző fejezetben részletezett módon a potenciálos - tehát rotációmentes - vektortér divergenciájának ismeretében a potenciál - pontosabban skalárpotenciál - meghatározásánál).

Legyen ugyanis

$$\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = p(x, y, z) \bar{\mathbf{i}} + q(x, y, z) \bar{\mathbf{j}} + s(x, y, z) \bar{\mathbf{k}}.$$

Ekkor

$$p\bar{\mathbf{i}} + q\bar{\mathbf{j}} + s\bar{\mathbf{k}} = \text{rot rot } \bar{\mathbf{v}} = \text{grad div } \bar{\mathbf{v}} - \Delta \bar{\mathbf{v}} = - \Delta \bar{\mathbf{v}} =$$

$$= - \Delta X \bar{\mathbf{i}} - \Delta Y \bar{\mathbf{j}} - \Delta Z \bar{\mathbf{k}},$$

azaz a vektorpotenciál koordinátái a következő egyenleteket kell hogy ki-
elégítsék:

$$\Delta X = - p(x, y, z),$$

$$\Delta Y = - q(x, y, z),$$

$$\Delta Z = - s(x, y, z).$$

Ezen egyenleteket az egész térben $X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial n}, \frac{\partial Y}{\partial n}, \frac{\partial Z}{\partial n}$ -re tett alkalmas kikötések mellett megoldva, hasonló gondolatmenettel, mint amivel az előbbi fejezet (11) képletére jutottunk adódik:

$$X(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{p(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Y(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{q(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Z(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{s(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

illetve eredményeinket összefoglalva:

$$(3) \quad \bar{v}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \operatorname{rot} \bar{v}(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

és ezzel speciális esetben a vektorpotenciál meghatározására szolgáló integrálra jutottunk.

d) Tegyük fel, hogy a $\bar{v}(\bar{r}) = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$ vektor-vektorfüggvény koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak a zárt F felületen és az általa határolt V térrészben, F -en pedig csupán $\bar{v}(\bar{r})$ folytonos. Legyen F mérhető felszínű és irányítható, V mérhető térfogatu; jelentsen $\bar{n} = n_1\bar{i} + n_2\bar{j} + n_3\bar{k}$ a zárt V térrészből kifelé irányított normális egységvektort. A tett feltevések mellett mármost a következő integráltétel mondható ki:

$$(4) \quad -\iint_F \bar{v}(\bar{r}) \times d\bar{f} = \iint_F d\bar{f} \times \bar{v}(\bar{r}) = \iiint_V \operatorname{rot} \bar{v} dx dy dz.$$

Bizonyítás

A vizsgált vektorértékű felületmenti integrál átalakítható a $\bar{v}(\bar{r})$ vektortér $\bar{n}$ felületi normális egységvektorral vett vektoriális szorzatának felszín szerinti integráljává (lásd a vektorértékű felületmenti integrál definícióját):

$$\begin{aligned} -\iint_F \bar{v}(\bar{r}) \times d\bar{f} &= \iint_F d\bar{f} \times \bar{v}(\bar{r}) = \iint_F \bar{n} \times \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} = \\ &= \left(\iint_F (Zn_2 - Yn_3) d\bar{f} \right) \bar{i} + \left(\iint_F (Xn_3 - Zn_1) d\bar{f} \right) \bar{j} + \left(\iint_F (Yn_1 - Xn_2) d\bar{f} \right) \bar{k}. \end{aligned}$$

Az egyes zárójelekben álló felszín szerinti integrálok azonban úgy is felfoghatók, mint a $(Z\bar{j} - Y\bar{k})$, $(X\bar{k} - Z\bar{i})$, $(Y\bar{i} - X\bar{j})$ vektorfüggvények skálárértékű felületmenti integráljai, tehát:

$$-\iint_F \bar{v} \times d\bar{f} = \left(\iiint_F (Z\bar{j} - Y\bar{k}) d\bar{f} \right) \bar{i} + \left(\iiint_F (X\bar{k} - Z\bar{i}) d\bar{f} \right) \bar{j} + \left(\iiint_F (Y\bar{i} - X\bar{j}) d\bar{f} \right) \bar{k}.$$

Az itt szereplő integrálok mindegyikére a Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazva adódik:

$$\begin{aligned} -\iint_F \bar{v} \times d\bar{f} &= \left(\iiint_V \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dx dy dz \right) \bar{i} + \left(\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dy dz \right) \bar{j} + \\ &+ \left(\iiint_V \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy dz \right) \bar{k} = \iiint_V \text{rot } \bar{v} \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

A (4) tétel értelmében könnyen beláthatjuk, hogy $\bar{v}(\bar{r})$ -re, ill. a $\bar{v}(\bar{r})$ vektortér koordinátáinak parciális deriváltjaira tett folytonossági kikötések mellett a $[\text{rot } \bar{v}]_{(P)}$ vektor definíciójában (1) szereplő határérték valóban létezik. Ha ugyanis F_n a P pontot belsejében tartalmazó zárt felület, amely a P pontra rázsugorodó $F_1, F_2, \dots$ felületsorozatnak már elég távoli tagja, akkor $\text{rot } \bar{v}$ feltételezett folytonossága miatt az F_n felülettel határolt K_n térrészben

$$\text{rot } \bar{v} = [\text{rot } \bar{v}]_{(P)} + \bar{\eta}, \quad \text{ahol a } P \text{ pontban } \lim \bar{\eta} = \lim \eta = 0.$$

A (4) tétel alkalmazásával azonban

$$\begin{aligned} -\iint_{F_n} \bar{v}(\bar{r}) \times d\bar{f} &= \iiint_{K_n} \text{rot } \bar{v} \, dx \, dy \, dz = \\ &= [\text{rot } \bar{v}]_{(P)} \iiint_{K_n} dx \, dy \, dz + \bar{h} = \end{aligned}$$

$$= \left[\text{rot } \bar{v} \right]_{(P)} \cdot V_n + \bar{h},$$

ahol V_n -nel jelöltük az F_n felület által bezárt K_n térrész térfogatának mérőszámát és adott $\varepsilon > 0$ mellett

$$|\bar{h}| = \left| \iiint_{K_n} \bar{\eta} \, dx \, dy \, dz \right| < \varepsilon \cdot V_n, \text{ ha } K_n \text{ a } P \text{ pont alkalmas kör-}$$

nyezetébe esik.

Eredményünket átrendezve írhatjuk tehát:

$$(5) \quad \left[\text{rot } \bar{v} \right]_{(P)} = \frac{1}{V_n} \iint_{F_n} d\vec{f} \times \bar{v} - \frac{\bar{h}}{V_n}.$$

Ha mármost az F_n felületek a P pontra rázsugorodnak, akkor a fentiek értelmében $\left| \frac{\bar{h}}{V_n} \right| \rightarrow 0$, vagyis az (5) jobboldalán álló integrálok konvergens vektorsorozatot alkotnak, amint azt állítottuk.

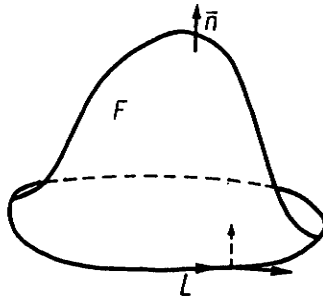
Stokes tétele. Potenciálkeresés

a) Stokes tétele

Ha $\bar{v}(\bar{r})$ és koordinátáinak parciális deriváltjai folytonosak a mérhető felszínű, irányítható F felületdarabon és annak rektifikálható L görbével megadott határán, akkor

$$(1) \quad \iint_F \text{rot } \bar{v} \, d\vec{f} = \int_L \bar{v} \, d\vec{r},$$

ahol az L görbe befutásának irányát és az F felület felületi normálisának irányát úgy hangoljuk össze, hogy az L görbe befutási irányába mutató érintővektor, az erre merőleges, a görbe belseje felé mutató vektor, és a felületi normális jobbrendszeret alkosson.



Bizonyítás

Miután $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ esetében

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot } X\vec{i} + \text{rot } Y\vec{j} + \text{rot } Z\vec{k},$$

és így

$$\iint_F \text{rot } \vec{v} \, d\vec{f} = \iint_F \text{rot } X\vec{i} \, d\vec{f} + \iint_F \text{rot } Y\vec{j} \, d\vec{f} + \iint_F \text{rot } Z\vec{k} \, d\vec{f},$$

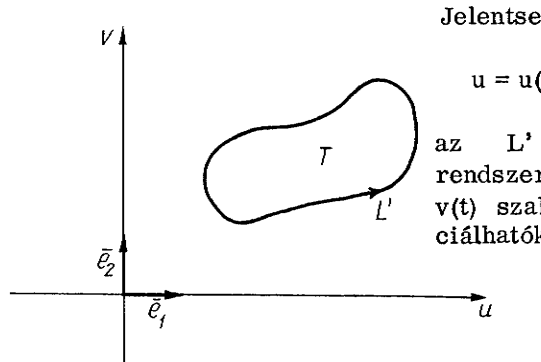
$$\int_L \vec{v} \, d\vec{r} = \int_L X\vec{i} \, d\vec{r} + \int_L Y\vec{j} \, d\vec{r} + \int_L Z\vec{k} \, d\vec{r},$$

az alábbiakban csak a

$$\iint_F \text{rot } X\vec{i} \, d\vec{f} = \int_L X\vec{i} \, d\vec{r}$$

összefüggést fogjuk bizonyítani, a két másik megfelelő összefüggés bizonyítása teljesen hasonló, ezen összefüggések igaz voltából pedig a Stokes-tétel következik.

A tétel bizonyításának egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy az F felület egyenletét $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ alakban adhatjuk meg, az F felületnek feleljen meg az UV paramétersík T tartománya. Legyen T normáltartomány, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ koordinátáinak pedig u és v szerinti második parciális deriváltjai is legyenek folytonosak T belsejében és T -nek L' határán.



Jelentse

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

az L' görbe paraméteres egyenletrendszerét és tegyük fel, hogy $u(t)$ és $v(t)$ szakaszonként folytonosan differenciálhatók, ha $\alpha \leq t \leq \beta$.

Mivel

$$\text{rot } X \bar{i} = \nabla \times X \bar{i} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial z} \bar{j} - \frac{\partial X}{\partial y} \bar{k}$$

és a tétel szövegének megfelelően irányított felületi normális:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \bar{k},$$

$\text{rot } X \bar{i}$ felületmenti integrálja így alakítható át kettős integrállá:

$$\begin{aligned} \iint_T \text{rot } X \bar{i} \, d\bar{f} &= \iint_T \left(\frac{\partial X}{\partial z} \bar{j} - \frac{\partial X}{\partial y} \bar{k} \right) \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) du \, dv = \\ &= \iint_T \left(\frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du \, dv. \end{aligned}$$

A továbbiakban az $\iint_L X \bar{I} d\bar{r}$ görbementi integrált alakítjuk át több lépésben

kettős integrállá, amely integrálnak legutóbb nyert kettős integrálunkkal való azonosságát kimutatva állításunkat igazoltuk.

Miután az L görbe egyenlete

$$\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

adódik:

$$\begin{aligned} \int_L X \bar{I} d\bar{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} X(\bar{r}(u(t), v(t))) \bar{I} \dot{\bar{r}}(u(t), v(t)) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} X(\bar{r}(u(t), v(t))) \bar{I} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} X(\bar{r}(u(t), v(t))) \bar{I} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \bar{j} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \bar{k} \right) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(X(\bar{r}(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + X(\bar{r}(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

A legutóbb nyert integrál azonban úgy is felfogható, mint a

$$\bar{v} = X \frac{\partial x}{\partial u} \bar{e}_1 + X \frac{\partial x}{\partial v} \bar{e}_2$$

vektortérnek ($|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$) a paraméterértékek síkjában fekvő T tartomány L' határgörbéjére vonatkozó görbementi integrálja, a t paraméter szerinti közös integrállá átalakított formája:

$$\int_L X \bar{I} d\bar{r} = \dots = \int_{L'} X \frac{\partial x}{\partial u} du + X \frac{\partial x}{\partial v} dv.$$

Alkalmazzuk erre a görbementi integrálra a síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tételt:

$$\begin{aligned}
\int_{L'} X \frac{\partial x}{\partial u} du + X \frac{\partial x}{\partial v} dv &= \iint_T \left(\frac{\partial \left(X \frac{\partial x}{\partial v} \right)}{\partial u} - \frac{\partial \left(X \frac{\partial x}{\partial u} \right)}{\partial v} \right) du dv = \\
&= \iint_T \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - X \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) du dv = \\
&= \iint_T \left(\frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv
\end{aligned}$$

mivel feltevésünk értelmében

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.$$

Mint látható, integrálunk a felületmenti integrál átalakításával nyert ket-tős integrállal megegyezik, és ezzel állításunkat igazoltuk.

b) Jelentsenek speciálisan $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots$ a P ponton áthaladó síkfelületeket, melyeknek határgörbéje $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$. Tegyük fel, hogy az F_k felületek, ill. az L_k görbék a P pontra rázsugorodó sorozatot alkotnak, vagyis az L_k görbe pontjainak P -től mért távolsága 0 -hoz tart.

Mivel valamely vektortérnek adott $\bar{n}$ normálisú síklapra vonatkozó skalárértékű felületmenti integrálja ugy is felfogható, mint a vektortér $\bar{n}$ irányú vetületének ugyanazon síklapra vonatkozó felszín szerinti integrálja, rot $\bar{v}$ folytonosságának feltételezése mellett, ha az F_k síklap, ill. annak L_k határgörbéje már beleesik a P pont elég kicsiny környezetébe, írható:

$$\begin{aligned} \iint_{F_k} \operatorname{rot} \bar{v} d\bar{f} &= \iint_{F_k} (\operatorname{rot} \bar{v})_n d\bar{f} = \left[(\operatorname{rot} \bar{v})_n \right]_{(P)} \iint_{F_k} d\bar{f} + H = \\ &= \left[+\operatorname{rot} \bar{v} \right]_{(P)} f_k + H, \end{aligned}$$

ahol f_k -val az F_k síklap területének (felszínének) mérőszámát jelöltük, és

$$(\operatorname{rot} \bar{v})_n = \left[(\operatorname{rot} \bar{v})_n \right]_{(P)} + \eta,$$

ahol $(x, y, z) \rightarrow P$ esetében $\eta \rightarrow 0$. H -ra tehát a következő becslés adható: adott $\varepsilon > 0$ mellett

$$H = \left| \iint_{F_k} \eta(x, y, z) d\bar{f} \right| \leq \varepsilon \cdot f_k,$$

és előbb nyert összefüggésünkben még $\left| \frac{H}{f_k} \right|$ is tetszőlegesen kicsinnyé tehető, ha F_k a P pont alkalmas környezetébe esik.

A Stokes tétel értelmében azonban

$$\iint_{F_n} \operatorname{rot} \bar{v} d\bar{f} = \int_{L_n} \bar{v} d\bar{r},$$

azaz

$$\left[(\operatorname{rot} \bar{v})_n \right]_{(P)} f_n + H = \int_{L_n} \bar{v} d\bar{r},$$

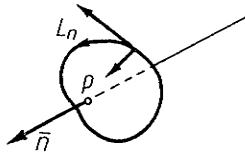
vagyis

$$\left[(\operatorname{rot} \bar{v})_n \right]_{(P)} = \frac{\int_{L_n} \bar{v} d\bar{r}}{f_n} - \frac{H}{f_n},$$

ahol $\frac{H}{f_n}$ tetszőlegesen kicsiny. Ezt másképp úgy is írhatjuk, hogy

$$(2) \quad \left[(\operatorname{rot} \vec{v})_n \right]_{(P)} = \lim \frac{\int_{L_n} \vec{v} d\vec{r}}{f_n}$$

ahol az L_n határgörbéjü $\vec{n}$ normálisú síklap felszíne f_n , az L_n görbe befutási irányába mutató érintővektor, az erre merőleges, a zárt L_n görbe



belseje felé mutató vektor és $\vec{n}$ jobbrendszert alkot, a lim pedig azt jelenti, hogy $\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}$ irányu vetületének P pontbeli értékét a jobboldalon álló hányadosok P -re rázsugorodó L_n görbékre vonatkozó sorozatának határértéke szolgáltatja. A (2) képletet $\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}$ irányu komponensét megadó Ignatowsky-féle formulának nevezik. A (2)-ben szereplő határérték $\vec{v}$ -re, F_n -re, L_n -re a

Stokes-tétel kimondásakor tett feltevések mellett - az előbbi okoskodás értelmében - létezik.

Ez utóbbi előállításból is levezethetők $\operatorname{rot} \vec{v}$ derékszögű koordinátáinak értékei, feltéve, hogy $\vec{v}(\vec{r})$ -re, az L_n görbékre, valamint az általuk bezárt $\vec{n}$ normálisú síklapokra a Stokes-tétel kimondásakor tett feltevések teljesülnek.

Számítsuk ki a (2) határérték értékét speciálisan a P pontra rázsugorodó $A_n B_n C_n$ háromszögek sorozatára, ahol ezen háromszög-lapok normális egységvektora

$$(\kappa) \quad \vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

és a háromszög csucsai

$$A_n(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n), \quad B_n(x_n, y_n + \Delta y_n, z_n), \quad C_n(x_n, y_n, z_n + \Delta z_n).$$

Jelöljük az $A_n B_n C_n$ háromszög területét a kívánt befutási irányban L_n -nel. A háromszöget az $x = x_n, y = y_n, z = z_n$ síkra levetítve, a vetület-háromszögek csucspontjai, ill. kerületük az ábrán jelzett befutási iránnyal:

$$O_n(x_n, y_n, z_n), \quad B_n(x_n, y_n + \Delta y_n, z_n), \quad C_n(x_n, y_n, z_n + \Delta z_n); \quad L_{n1},$$

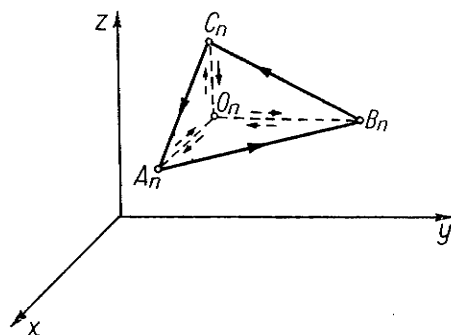
$$0_n(x_n, y_n, z_n), \quad C_n(x_n, y_n, z_n + \Delta z_n), \quad A_n(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n); \quad L_{n_2},$$

$$0_n(x_n, y_n, z_n), \quad A_n(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n), \quad B_n(x_n, y_n + \Delta y_n, z_n); \quad L_{n_3}.$$

Nyilvánvalóan fennáll:

$$\int_{L_n} \bar{v} d\bar{r} = \int_{L_{n_1}} \bar{v} d\bar{r} + \int_{L_{n_2}} \bar{v} d\bar{r} + \int_{L_{n_3}} \bar{v} d\bar{r},$$

mivel a jobboldalon szereplő integrálokban az $A_n B_n$, $B_n C_n$, $C_n A_n$ éleken kívül szereplő $0_n A_n$, $0_n B_n$, $0_n C_n$ éleket kétszer, ellentétes irányítással futjuk be, s így az ezen élek menti integrálok az összevonás során kiesnek.



$$\bar{v} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}$$

esetében mármost a síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazva a $\bar{v}$ koordinátáira tett folytonossági kikötések mellett

$$\int_{L_{n_1}} \bar{v} d\bar{r} = \int_{L_{n_1}} (Y dy + Z dz) = \iint_{T_{n_1}} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz \approx \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right)_{(P)} t_{n_1}$$

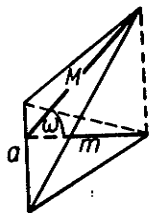
(az L_{n_1} görbe ugyanis az YZ síkkal párhuzamos $x = x_n$ egyenletű síkban fekszik). Hasonlóképpen írható

$$\int_{L_{n_2}} \bar{v} d\bar{r} = \int_{L_{n_2}} (Z dz + X dx) = \iint_{T_{n_2}} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz \approx \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{(P)} t_{n_2},$$

$$\int_{L_{n_3}} \bar{v} d\bar{r} = \int_{L_{n_3}} X dx + Y dy = \iint_{T_{n_3}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \approx \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)_{(P)} t_{n_3},$$

ahol T_{n_1} , T_{n_2} , T_{n_3} -mal az L_{n_1} , L_{n_2} , L_{n_3} görbe által bezárt tartományt, e háromszögek területét pedig t_{n_1} , t_{n_2} , t_{n_3} -mal jelöltük. E háromszögek az $A_n B_n C_n \Delta$ vetületei, az $x = x_n$, $y = y_n$, $z = z_n$ síkra. Könnyen belátható, hogy a T területű háromszög és annak t területű vetület-háromszöge esetében fennáll a

$$t = T \cos \omega$$



összefüggés, ahol ω a két háromszög síkja által bezárt szög. (Az ábráról leolvasható, hogy ha az eredeti és a vetületháromszögnek egy közös éle van - ami most vizsgált feladatunknál fennáll - a háromszögek magasságaira fennáll

$$m = M \cos \omega,$$

azaz

$$t = \frac{am}{2} = \frac{aM \cos \omega}{2} = T \cos \omega.)$$

Ennek figyelembevételével az $A_n B_n C_n$ háromszög területét f_n -nel jelölve, mivel (κ) értelmében e háromszöglapnak a vetület-háromszögek síkjával bezárt szögei α , β ill. γ , adódik:

$$\int_{L_n} \bar{v} d\bar{r} \approx \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) f_n \cos \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) f_n \cos \beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) f_n \cos \gamma \right]_{(P)}$$

azaz

$$\frac{\int_{L_n} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}}{f_n} \approx \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \gamma \right]_{(P)}$$

ahol a közelítéseknek elkövetett hibák 0 -hoz tartanak, ha az L_n görbét a P pontra rázsugorítjuk.

Ha a vizsgált $A_n B_n C_n$ háromszög speciálisan az $x = x_n$ síkban fekszik, akkor e sík normális egységvektora

$$\bar{n} = \bar{i}$$

lévén ($\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$)

$$\lim \frac{\int_{L_n} \bar{v} d\bar{r}}{f_n} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right),$$

ha az $A_n B_n C_n \Delta$ az $y = y_n$ síkban fekszik

$$\bar{n} = \bar{j},$$

$$\lim \frac{\int_{L_n} \bar{v} d\bar{r}}{f_n} = \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right),$$

ha pedig az $A_n B_n C_n \Delta$ a $z = z_n$ síkban fekszik

$$\bar{n} = \bar{k},$$

$$\lim \frac{\int_{L_n} \bar{v} d\bar{r}}{f_n} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

és ezen $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vektorokra vett vetületekből felírt

$$\bar{a} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{k}$$

vektornak $\bar{n} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$ irányu vetülete valóban

$$\bar{a}\bar{n} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \gamma =$$

$$= \lim \frac{\int_{L_n} \bar{v} d\bar{r}}{f_n},$$

vagyis $\bar{a}$ a (2)-ben megadott rot $\bar{v}$ vektorral egyenlő.

c) Mint már említettük, ha a $\bar{v}(\bar{r})$ vektortérnek van potenciálja, akkor

$$\bar{v} = \text{grad } u = - \text{grad } \phi ,$$

és amennyiben $\bar{v}$ koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak a tér vizsgált tartományában, ott

$$\text{rot } \bar{v} = \text{rot grad } u = \text{rot}(-\text{grad } \phi) = \bar{0} ,$$

azaz e térrészben $\bar{v}$ rotációmentes.

Szintén említettük már, hogy ez az állítás bizonyos mértékig meg is fordítható, ill. pontosabban a következő mondható:

Tegyük fel, hogy a $\bar{v}(\bar{r})$ vektortér rotációmentes a térnek egy bizonyos V részében. A vonalmenti integrál, potenciál fejezetben elmondottak értelmében tudjuk, hogy a vektortérnek a V térrészben van potenciálja, ha a kérdéses térrészben futó bármely zárt L görbe mentén

$$\int_L \bar{v} d\bar{r} = 0.$$

Ha mármost a kérdéses térrészben fekvő bármely zárt L görbéhez sikerül olyan F felületet találni, amely mentén felületmenti integrál számítható, ugyancsak a kérdéses V térrészben fekszik, s határa éppen az L görbe, akkor az L görbére és az F felületre alkalmazhatjuk a Stokes-tételt:

$$\int_L \bar{v} d\bar{r} = \iint_F \text{rot } \bar{v} d\bar{f} = \iint_F \bar{0} d\bar{f} = 0,$$

ebben az esetben van tehát a vektortérnek potenciálja.

Előbbi okoskodásunk jogosultsága a V térrésznek azon tisztán geometriai természetű tulajdonságán mulik, hogy lehet-e benne minden zárt L görbéhez a kívánt tulajdonságú felületet találni. Minthogy a görbementi integrál tetszőleges pontossággal megközelíthető a görbébe beírt törtvonalmenti integrállal, azért megelégedhetünk itt avval is, hogy minden zárt görbe helyett minden zárt törtvonalhoz lehessen megfelelő irányítható poliéderfelületet találni. Az ilyen tulajdonságú térrészekre a következő elnevezést vezetjük be:

Definíció

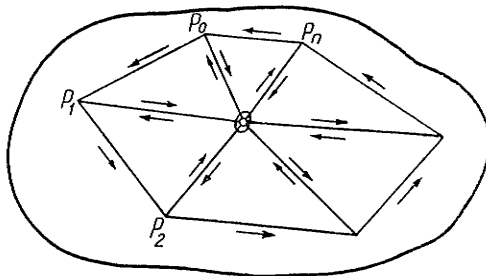
Az olyan V térrészt, amelyben minden benne futó törtvonalhoz található olyan benne fekvő irányítható poliéderfelület, amelynek az adott törtvonal a határgörbéje, egyszeresen összefüggő térrésznek nevezik.

Ilyen egyszeresen összefüggő térrész például egy gömb belseje, vagy általánosabban minden konvex térrész.

Definíció

Egy K térrész konvex, ha bármely két pontjával együtt az azokat összekötő egyenesszakasz pontjait is tartalmazza.

Az az állítás, hogy minden konvex térrész egyszeresen összefüggő, nyilvánvaló, mert ha $P_0, P_1, \dots, P_n$ a konvex térrész pontjai, és ha O a konvex térrész egy további pontja, akkor az $OP_0P_1, OP_1P_2, \dots, OP_{n-1}P_n, OP_nP_0$ háromszöglapok egy, a konvex térrészben fekvő irányítható poliéderfelületet adnak meg, amelynek a $P_0P_1 \dots P_nP_0$ törtvonal a határgörbéje.



A fenti definíciók értelmében az egész tér egyszeresen összefüggő. Az egész tér egy pontjának elhagyása után is egyszeresen összefüggő marad.

Nem egyszeresen összefüggő pl. a térből egy egyenes pontjainak elhagyása után visszamaradó térrész (az egyenest "megkerülő" törtvonalakhoz nem lehet megfelelő felületet találni).

Az egyszeresen összefüggő térrészek a következőképp is jellemezhetők:

egyszeresen összefüggő a tartomány (térrész, vagy speciálisan síkrész), ha a tartományban haladó minden zárt görbét a tartományon belül egy pontra lehet összehuzni. Pl. az $\vec{r} = (3 + 2 \cos t) \cos v \vec{i} + (3 + 2 \cos t) \sin v \vec{j} + 2 \sin t \vec{k}$ torusfelület által határolt végesben fekvő tartomány nem egyszeresen összefüggő, mert pl. az $\vec{r} = 3 \cos v \vec{i} + 3 \sin v \vec{j}$ körvonalat nem lehet a toruson belül egy pontra összehuzni.

Előbbi okoskodásaink eredményét tehát a következő tételben foglalhatjuk össze:

Valamely egyszeresen összefüggő V térrészben a folytonosan differenciálható $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvénynek akkor és csak akkor van potenciálja, ha ott rotációmentes.

Amennyiben e feltétel teljesül, akkor a potenciált a

$$\phi(\vec{r}) = -u(\vec{r}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{v} d\vec{r} + c$$

képlet szolgáltatja (a vonalmenti integrálásnál az integrálás útja az egyszeresen összefüggő V térrészben az $\vec{a}$ helyzetvektoru ponttól az $\vec{r}$ helyzetvektoru pontig futó tetszőleges görbe).

Ha az a térrész, amelyben $\vec{v}$ rotációmentes, nem egyszeresen összefüggő, akkor e térrészben általában nem lehet $\vec{v}$ -hez potenciált találni. Ha a kérdéses térrésznek valamely egyszeresen összefüggő részére szorítkozunk, pl. egy pontja körül felvett elég kicsiny sugarú gömb belsejére, akkor abban már van a vektortérnek potenciálja.

Pl. az

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

elektrosztatikus tér az egész térből a $P(0,0,0)$ pont kirekesztésével nyert egyszeresen összefüggő tartományban rotációmentes, van tehát potenciálja, és e potenciál - amint azt korábban már ki is számítottuk -

$$\phi = \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

Egy végtelen hosszú vezető mágneses terét - a vezetőt a Z tengelybe helyezve - a

$$\vec{H} = -\frac{y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$$

vektortér állítja elő. E vektortér csak az egész térnek a Z tengely pontjainak elhagyása után visszamaradó részében (ez már nem egyszeresen összefüggő tartomány) van értelmezve. Az $x > 0$ térrész azonban már konvex (tehát egyszeresen összefüggő), itt már van potenciálja a vektortérnek, mégpedig

$$\phi = - \int_{(1,0)}^{(x,y)} \bar{H} d\bar{r} = - \int_{y=0}^y \frac{x}{x^2+y^2} dy = - \frac{1}{x} \int_{y=0}^y \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} dy =$$

$$= - \arctg \frac{y}{x} .$$

A ϕ potenciálfüggvény az $x < 0$ térrészben is potenciálfüggvénye $\bar{H}$ -nak, az $x = 0$ síkban azonban elveszti értelmét. Az $x = 0$ síkban is van azonban potenciál (az $y = 0$ egyenes kivételével) mégpedig $\arctg \frac{x}{y}$, ez viszont az $y = 0$ síkban nincs értelmezve. Olyan függvényt, amely a Z tengely pontjai kivételével mindenütt potenciálja a megadott vektortérnek, nem sikerül találnunk.

d) Előbbi eredményeink felhasználásával megoldható most már a következő feladat:

valamely T síkrészben meg vannak adva a folytonos parciálisokkal rendelkező $p(x,y)$ és $q(x,y)$ függvények. Kérdés, van-e T-ben olyan $u(x,y)$ függvény, melyre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x,y),$$

és ha van, hogyan határozható meg? (Kétváltozós kvadratura feladat.)

Jelöljük V-vel a T fölé emelt hengerszerű térrészt. Legyen T egyszeresen összefüggő. (akkor a V térrész is egyszeresen összefüggő lesz). Mínt hogy a V térrészben a

$$\bar{v} = p\bar{i} + q\bar{j}$$

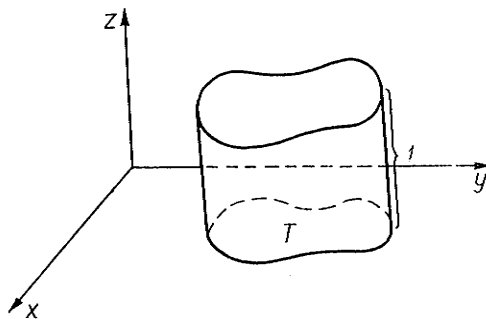
vektortér abban az esetben rotációmentes, ha T-ben

$$(x) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$(\text{rot } \bar{v} = \nabla \times \bar{v} = \bar{k} \left(-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)),$$

azért egyszeresen összefüggő T esetén a (x) összefüggés fennállásából következik, hogy V-ben van olyan $u(x,y,z)$ függvény, melyre

$$\text{grad } u = \bar{v},$$



azaz

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

hiszen a tett feltevések mellett az rotációmentes tér potenciálos, $u(x, y, z)$ -vel pedig a potenciál (-1) -szeresét jelöltük. A fenti harmadik egyenlőség miatt azonban u nem függ z -től, azaz $u = u(x, y)$. Ez a függvény feladatunk megoldása. Ha viszont van a feladatnak megoldása, akkor $-u(x, y)$ nyilván az egész V térrészben potenciálja $\bar{v}(\bar{r})$ -nek, s azért teljesül a $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ reláció. Vagyis ahhoz, hogy az egyszeresen összefüggő T síkrészben folytonos parciálisokkal rendelkező $p(x, y)$ és $q(x, y)$ függvényekhez található legyen olyan $u(x, y)$ függvény, amelyre T -ben mindenütt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y)$$

érvényes, szükséges és elégséges, hogy T -ben fennálljon a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

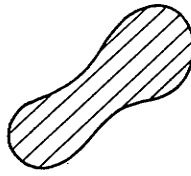
kapcsolat. Ha ez teljesül, akkor

$$u(x, y) = \int_{\bar{a}}^{\bar{r}} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_{(\alpha, \beta)}^{(x, y)} p(x, y) dx + q(x, y) dy + C,$$

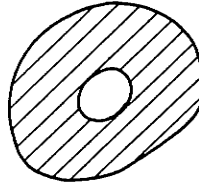
ahol $\bar{a} = \alpha \bar{i} + \beta \bar{j}$ a T síkrész tetszőleges rögzített pontja, az integrál az (α, β) és (x, y) pontokat összekötő tetszőszerinti T -ben haladó görbe mentén vehető.

Az egyszeresen összefüggő síkbeli tartománynak még a következő jellemzései is megadhatók:

Egy korlátos síkbeli tartomány egyszeresen összefüggő, ha határa egy darabból áll. Ha egy síkbeli tartomány határa több különálló darabból áll, akkor többszörösen összefüggő.



*egyszeresen
összefüggő
síkbeli tartomány*



*töbszörösen
összefüggő
síkbeli tartomány*

Pl. egy önmagát nem metsző zárt görbe belsejéből álló síkbeli tartomány egyszeresen összefüggő.

Egyszeresen összefüggő egy síkbeli tartomány, ha minden benne futó egyszerű zárt görbével (Jordan-görbével) együtt a görbe belsejében fekvő pontokat is tartalmazza.

e) Az előző fejezetben említettük, hogy a rotációmentes vektorterek egy skalárpotenciálból (annak negatív gradienseként), a divergenciamentes vektorterek pedig alkalmas differenciálhatósági kikötések mellett egy vektorpotenciálból (annak rotációjaként) származtathatók. Egy tetszőleges vektortérre a következőt mondhatjuk ki:

Tetszőleges folytonosan differenciálható $\vec{v}(\vec{r})$ vektortér felbontható egy $\vec{v}_1$ divergenciamentes és egy $\vec{v}_2$ rotációmentes vektortér összegére.

Legyen ugyanis pl.

$$\operatorname{div} \vec{v} = g, \quad \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{a},$$

akkor, ha

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

és

$$(\star) \quad \operatorname{rot} \vec{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v}_2 = g$$

akkor a

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_2$$

vektortér divergenciamentes lesz, rotációja pedig megegyezik $\vec{v}$ rotációjával:

$$\operatorname{div} \bar{v}_1 = \operatorname{div} (\bar{v} - \bar{v}_2) = \operatorname{div} \bar{v} - \operatorname{div} \bar{v}_2 = g - g = 0,$$

$$\operatorname{rot} \bar{v}_1 = \operatorname{rot} (\bar{v} - \bar{v}_2) = \operatorname{rot} \bar{v} - \operatorname{rot} \bar{v}_2 = \bar{a} - 0 = \bar{a}.$$

Az (κ) tulajdonsággal rendelkező vektorteret úgy állíthatjuk elő, hogy a $-\Delta \phi = g$ Poisson-egyenlet megoldásaként előállítjuk potenciálfüggvényét, majd $\bar{v}_2$ -t ennek negatív gradienseként.

f) A vektor-vektorfüggvények c. fejezetben megadtuk a deriválttenzor definícióját. A $\bar{v}(\bar{r}) = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$ vektor-vektorfüggvényt akkor mondjuk differenciálhatónak, ha megváltozása így volt írható:

$$(*) \quad \bar{v}(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) - \bar{v}(\bar{r}_0) = \bar{A} \Delta \bar{r} + \bar{\varepsilon} \Delta \bar{r},$$

ahol az $\bar{\varepsilon}$ tenzor mátrixának minden eleme $|\Delta \bar{r}| \rightarrow 0$ esetében 0-hoz tart, az $\bar{A}$ derivált-tenzor mátrixa pedig:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ezen $\bar{A}$ mátrixot egy szimmetrikus és egy antimetrikus mátrix összegére bontva fel, a nekik megfelelő szimmetrikus és antimetrikus tenzorok skalárinvariánsa, ill. vektorinvariánsa

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{v}$$

ill

$$\bar{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{k} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v}.$$

Ha mármost (κ) -ban eltekintünk a kicsiny Δr esetében az első tag mellett elhanyagolható utolsó tagtól, és az $\bar{A}$ deriválttenzort $\bar{A}_s$ szimmetrikus és $\bar{A}_a$ antimetrikus részének összegére bontjuk, akkor

$$(xx) \quad \bar{v}(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) \approx \bar{v}(\bar{r}_0) + \bar{A}_s \Delta \bar{r} + \bar{A}_a \Delta \bar{r}$$

adódik. Ezt az eredményt a következőképpen szemléltethetjük:

Irja le $\bar{v}(\bar{r})$ egy áramló folyadék sebességi vektorterét. Ekkor (xx) értelmében a folyadék vizsgált darabjának mozgása jó közelítéssel három mozgásból tehető össze. (xx) jobb oldali első tagja nem tartalmazza $\Delta \bar{r}$ -et, ez tehát valamennyi vizsgált részecskére közös, úgyhogy a vizsgált folyadékrész $\bar{v}(\bar{r}_0)$ sebességű merev testszerű haladó mozgását mutatja. A harmadik tag $\bar{c} \times \Delta \bar{r}$ alakban is írható (c $\bar{A}$, ill. $\bar{A}_a$ vektorinvariánsa), eszerint ez a tag azt mutatja, hogy a vizsgált folyadékdarab merev testszerű forgó mozgást is végez, melynek szögsebesség vektora $\bar{c}$. (Ezért nevezzük a derivált tenzor vektorinvariánsának kétsz eresét $\text{rot } \bar{v}$ -nek.) Igazolható, hogy a $\bar{v}(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r})$ sebesség közelítő értékét szolgáltatató képlet középső tagja arra mutat, hogy a folyadékdarab alakváltozást szenved, az $\bar{A}_s$ szimmetrikus tenzor (azaz az $\bar{A}$ tenzor) skalárinvariánsa a térfogatváltozás sebességét, a folyadék szétáramlásának gyorsaságát méri, ezt a vektortér divergenciájának nevezzük.

Skalár-vektorfüggvény gradiensének Ignatowsky-féle definíciója

a) A Gauss-Osztrogradszkij-tétel következményeként a következő nevezetes integráltétel vezethető le (un. gradiens-tétel):

Tétel

Legyen F egy mérhető felszíni, irányítható, zárt felület, $\bar{n}$ az F felület által bezárt mérhető térfogatu V térrészből kifelé mutató normális egységvektor. Legyen $u(\bar{r})$ és $\text{grad } u(\bar{r})$ folytonos V-ben és ennek F határán. Ekkor

$$\iiint_V \text{grad } u \, dx \, dy \, dz = \iint_F u(\bar{r}) \, d\bar{f}.$$

Bizonyítás

$\bar{n} = n_1 \bar{i} + n_2 \bar{j} + n_3 \bar{k}$, ($|\bar{n}| = 1$) mellett alakítsuk át a tételben szereplő felületmenti integrált felszín szerinti integrállá:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \iint_F u(\vec{r}) \, d\vec{f} = \iint_F (u(\vec{r})\vec{n}) \, d\vec{f} = \\ &= \left(\iint_F u(\vec{r})n_1 \, d\vec{f} \right) \bar{i} + \left(\iint_F u(\vec{r})n_2 \, d\vec{f} \right) \bar{j} + \left(\iint_F u(\vec{r})n_3 \, d\vec{f} \right) \bar{k} .\end{aligned}$$

Az utóbbi három integrál úgy is felfogható, mint az $u(\vec{r})\bar{i}$, $u(\vec{r})\bar{j}$ és $u(\vec{r})\bar{k}$ vektorfüggvények skalárértékű felületmenti integrálja:

$$\bar{I} = \left(\iint_F (u\bar{i}) \, d\vec{f} \right) \bar{i} + \left(\iint_F (u\bar{j}) \, d\vec{f} \right) \bar{j} + \left(\iint_F (u\bar{k}) \, d\vec{f} \right) \bar{k} .$$

Alkalmazzuk külön-külön az itt szereplő zárt F felületre vonatkozó felületmenti integrálokra a Gauss-Osztrogradszkij-tételt. Mivel

$$\operatorname{div} (u\bar{i}) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \operatorname{div} (u\bar{j}) = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \operatorname{div} (u\bar{k}) = \frac{\partial u}{\partial z},$$

adódik:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \iint_F u(\vec{r}) \, d\vec{f} = \left(\iiint_V \frac{\partial u}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \right) \bar{i} + \left(\iiint_V \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy \, dz \right) \bar{j} + \\ &+ \left(\iiint_V \frac{\partial u}{\partial z} \, dx \, dy \, dz \right) \bar{k} = \iiint_V \operatorname{grad} u \, dx \, dy \, dz,\end{aligned}$$

amint állítottuk.

b) Az előbbi tételből könnyen adódik $\operatorname{grad} u(\vec{r})$ P pontbeli értékét szolgáltató koordináta-invariáns Ignatowsky-féle definíciója.

Jelentsenek $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ a P pontra rázsugorodó zárt felületeket, $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ pedig a fenti felületek által bezárt térrészek térfogatának mérőszámát. Ha az F_i felületek mérhető felszíniük és irányíthatók, $u(\vec{r})$ pedig parciális deriváltjaival együtt folytonos az F_i felületeken valamint az általuk bezárt mérhető térfogatu K_i térrészekben (K_i térfogatát jelölje V_i), akkor kifelé irányított felületi normálissal számolva az

$$\frac{\iint_{F_1} u(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_1}, \quad \frac{\iint_{F_2} u(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_2}, \quad \dots, \quad \frac{\iint_{F_n} u(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_n}, \quad \dots$$

sorozat konvergencia és limesze:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\iint_{F_n} u(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_n} = \left[\text{grad } u(\vec{r}) \right]_{(P)}.$$

A tett feltevések mellett ugyanis ha F_n már eléggé rázsugorodik P -re, akkor az F_n felület által bezárt térrészt K_n -nel jelölve:

$$\iint_{F_n} u(\vec{r}) \, d\vec{f} = \iiint_{K_n} \text{grad } u(\vec{r}) \, dx \, dy \, dz = \left[\text{grad } u(\vec{r}) \right]_{(P)} V_n + \bar{H},$$

ahol $\text{grad } u$ folytonossága révén

$$\text{grad } u = \left[\text{grad } u \right]_{(P)} + \bar{\eta},$$

és a P pontban $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\eta} = 0$, $\bar{H}$ pedig $\bar{\eta}$ integrálásból adódó hibatag.

Ha K_n már beleesik P alkalmas környezetébe, akkor tetszőleges

$\varepsilon > 0$ mellett

$$|\bar{H}| = \left| \iiint_{K_n} \bar{\eta}(\vec{r}) \, dx \, dy \, dz \right| \leq \varepsilon \iiint_{K_n} dx \, dy \, dz = \varepsilon \cdot V_n.$$

Előbbi eredményünkből $V_n \neq 0$ -val átosztva tehát írhatjuk:

$$\left[\text{grad } u(\vec{r}) \right]_{(P)} = \frac{1}{V_n} \iint_{F_n} u(\vec{r}) \, d\vec{f} - \frac{\bar{H}}{V_n},$$

ahol

$$\left| \frac{\bar{H}}{V_n} \right| \rightarrow 0$$

Ez azonban éppen azt jelenti, hogy P -re rázsugorodó F_n zárt felületekre az (1) határérték létezik, ezt akartuk bizonyítani.

$[\operatorname{div} \bar{v}]_{(P)}$, ill. $[\operatorname{rot} \bar{v}]_{(P)}$ -nek az előző fejezetben megadtuk az Ignatowsky-féle koordináta-invariáns definícióját, majd ebből ki is számítottuk az XYZ derékszögű koordinátarendszerben $\bar{v} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}$ divergenciájának és rotációjának értékét. Az ott követett okoskodásokhoz hasonló okoskodással adódik (1) -ből a korábban más úton már levezetett

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$$

számítási utasítás. Ennek részletezésére itt nem térünk ki.

c) $\operatorname{div} \bar{v}$, $\operatorname{rot} \bar{v}$ és $\operatorname{grad} u$ kiszámítására szolgáló képleteinket az un. nabla-szimbolikával könnyen megjegyezhetjük:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$$

mellett

$$(2) \quad \operatorname{div} \bar{v} = \nabla \bar{v}, \quad \operatorname{rot} \bar{v} = \nabla \times \bar{v}, \quad \operatorname{grad} u = \nabla u.$$

Vezessük be a szimbolikus ∇ vektor koordinátainvariáns definíciójaként a

$$(3) \quad [\nabla]_{(P)} = \lim \frac{\frac{\iint_{F_n} d\bar{f}}{F_n}}{V_n}$$

jelölést, ahol $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ a P pontra rázsugorodó zárt felületeket jelentenek kifelé mutató felületi normálissal, $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ az

ezen felületek által bezárt térrész térfogatának mérőszáma. A formális (2) összefüggések alapján a (3) -ban definiált ∇ vektor segítségével könnyen felírhatjuk (ill. megjegyezhetjük magunknak) $[\operatorname{grad} u]_{(P)}$,

$[\operatorname{div} \bar{v}]_{(P)}$, $[\operatorname{rot} \bar{v}]_{(P)}$ koordináta-invariáns, Ignatowsky-féle definícióját:

$$\begin{aligned}
[\text{grad } u]_{(P)} &= \lim \frac{\frac{\iint_{F_n} u(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_n}}{V_n}, \\
[\text{div } \vec{v}]_{(P)} &= \lim \frac{\frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f}}{V_n}}{V_n}, \\
[\text{rot } \vec{v}]_{(P)} &= \lim \frac{\frac{\iint_{F_n} d\vec{f} \times \vec{v}(\vec{r})}{V_n}}{V_n} = \lim \frac{\frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{f}}{V_n}}{V_n}.
\end{aligned}$$

Általános (görbevonalu) koordináták

Ha egy pont helyzetét a térben három adat (lehetőleg kölcsönösen) egyértelműen meghatározza, akkor ezeket a pont koordinátáinak nevezzük. Az a tény, hogy a pont helyzetét három adat, mondjuk q_1, q_2, q_3 (pl. a pont gömbi koordinátái - a szokásos jelöléssel r, ϑ, φ) egyértelműen meghatározza abban nyilvánul meg, hogy a pontnak valamely XYZ derékszögű koordinátarendszerbeli koordinátái kifejezhetők, mint a q_1, q_2, q_3 változók (paraméterek) függvényei:

$$\begin{aligned}
x &= x(q_1, q_2, q_3), \\
y &= y(q_1, q_2, q_3), \\
z &= z(q_1, q_2, q_3),
\end{aligned}
\tag{1}$$

az

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3) \vec{i} + y(q_1, q_2, q_3) \vec{j} + z(q_1, q_2, q_3) \vec{k}$$

helyzetvektorokkal is jellemezhetjük a tér pontjait. Az új q_1, q_2, q_3 változók rendszerét általánosságban görbevonalu koordinátarendszernek nevezzük, melynél a koordinátavonalak egyenletei:

$$\begin{aligned}
 x &= x(q_1, b, c), \\
 (2) \quad y &= y(q_1, b, c), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, b, c), \\
 z &= z(q_1, b, c),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x(a, q_2, c), \\
 (3) \quad y &= y(a, q_2, c), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(a, q_2, c), \\
 z &= z(a, q_2, c),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x(a, b, q_3), \\
 (4) \quad y &= y(a, b, q_3), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(a, b, q_3), \\
 z &= z(a, b, q_3),
 \end{aligned}$$

ahol a, b, c állandókat jelentenek.

A továbbiakban feltesszük, hogy az (1) jobboldalán álló függvények folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkeznek.

A koordinátavonalak érintővektorai:

$$(5) \quad \bar{a}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

az érintő egységvektorok:

$$(6) \quad \bar{e}_i = \frac{\bar{a}_i}{|\bar{a}_i|}, \quad i = 1, 2, 3.$$

A görbevonali koordinátarendszer ortogonális, ha

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 = \bar{a}_3 \bar{a}_1 = 0.$$

Az alábbiakban többnyire csak ortogonális koordinátarendszereket fogunk vizsgálni.

Az (1) görbevonali koordinátarendszer koordinátafelületeinek egyenletei:

$$\begin{aligned}
 x &= x(q_1, q_2, c), \\
 (7) \quad y &= y(q_1, q_2, c), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, c), \\
 z &= z(q_1, q_2, c),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x(q_1, b, q_3), \\
 (8) \quad y &= y(q_1, b, q_3), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, b, q_3), \\
 z &= z(q_1, b, q_3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x(a, q_2, q_3), \\
 (9) \quad y &= y(a, q_2, q_3), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(a, q_2, q_3), \\
 z &= z(a, q_2, q_3),
 \end{aligned}$$

ahol a, b, c állandók.

E koordinátafelületek normálisait úgy definiáljuk, hogy azok a koordinátavonalak (5) -ben felírt $\bar{a}_i$ érintővektorainak reciprokok vektorhármását alkossák. Az

$$(10) \quad \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = D$$

jelöléssel ($D \neq 0$)

$$(11) \quad \bar{r} = \bar{r}(a, q_2, q_3) \text{ normálisa: } \bar{n}_1 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}}{D} = \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{D},$$

$$(12) \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, b, q_3) \text{ normálisa: } \bar{n}_2 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}}{D} = \frac{\bar{a}_3 \times \bar{a}_1}{D},$$

$$(13) \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, c) \text{ normálisa: } \bar{n}_3 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}}{D} = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{D}.$$

(Az $\bar{n}_1$ normálisból $\bar{n}_2$ és $\bar{n}_3$ ciklikus cserével is nyerhető.) $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ és $\bar{n}_3$ létezését a $D \neq 0$ feltétel biztosítja.

Mivel $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ és $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ reciprok vektorhármast alkot, segítségével adott $\bar{v}$ vektor érintő, ill. normális irányu koordinátái könnyen meghatározhatók:

$$(14) \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \bar{a}_i = v_1 \bar{a}_1 + v_2 \bar{a}_2 + v_3 \bar{a}_3 \quad \text{esetén} \quad v_i = \bar{v} \bar{n}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(15) \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i = c_1 \bar{n}_1 + c_2 \bar{n}_2 + c_3 \bar{n}_3 \quad \text{esetén} \quad c_i = \bar{v} \bar{a}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ha a vizsgált görbevonalu koordinátarendszer ortogonális, akkor a koordinátafelületek normálisai és a koordinátavonalak érintővektorai között egyszerű összefüggés áll fenn:

$$(16) \quad \bar{n}_i = \frac{\bar{a}_i}{|\bar{a}_i|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Mivel ugyanis ortogonális rendszer esetében

$$D = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = |\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2| \cdot |\bar{a}_3|$$

és pl. $\bar{a}_2 \times \bar{a}_3$ az $\bar{a}_1$ vektor irányába mutató $|\bar{a}_2| |\bar{a}_3|$ nagyságu vektor

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{D} = \frac{|\bar{a}_2| |\bar{a}_3|}{|\bar{a}_1| |\bar{a}_2| |\bar{a}_3|} \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|} = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|^2}.$$

Hasonlóképpen vezethető le ortogonális rendszer esetében $\bar{n}_2$ és $\bar{n}_3$ -nak a (16) képletben felírt értéke.

Irjuk fel néhány gyakrabban előforduló görbevonalu koordinátarendszer esetében az (1) transzformációs formulákat, vizsgáljuk meg, mik lesznek e koordinátarendszer koordinátavonalai és koordinátafelületei, irjuk fel a koordinátavonalak érintővektorait, a koordinátafelületek normálisait, vizsgáljuk meg a rendszer ortogonalitását.

a) Gömbi koordinátarendszer

Az

$$q_1 = R, \quad q_2 = u, \quad q_3 = v$$

jelöléssel a transzformációs formulák:

$$x = R \sin u \cos v,$$

$$y = R \sin u \sin v, \quad \text{ill. } \vec{r} = R \sin u \cos v \vec{i} + R \sin u \sin v \vec{j} + R \cos u \vec{k},$$

$$z = R \cos u,$$

(R , u , és v jelentését lásd az ábrán).

A koordinátafelületek:

$$R = a$$

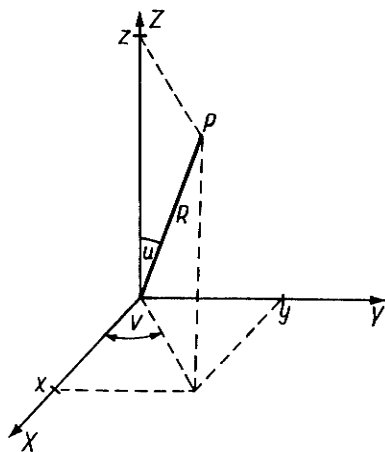
$0(0, 0, 0)$ középpontú koncentrikus gömbfelületek,

$$u = b$$

Z tengelyű forgáskupfelületek, melyeknek csúcsa az $0(0, 0, 0)$ pontban fekszik,

$$v = c$$

Z tengelyből kiinduló, az XY síkra merőleges félsíkok.



A koordinátavonalak ezek áthatási görbéi, vagyis

$$\vec{r} = \vec{r}(R, b, c) \quad \text{egyenletű félegyenesek,}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(a, u, c) \quad \text{egyenletű félkörívek,}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(a, b, v) \quad \text{egyenletű az } XY \text{ síkkal párhuzamos síkban fekvő körvonalak.}$$

Ezen koordinátavonalak érintői:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \frac{d\vec{r}(R, b, c)}{dR} = \left[\frac{\partial \vec{r}(R, u, v)}{\partial R} \right]_{\substack{u=b, \\ v=c}} = \\ &= \left[\sin u \cos v \vec{i} + \sin u \sin v \vec{j} + \cos u \vec{k} \right]_{\substack{u=b, \\ v=c}}, \end{aligned}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{r}(a, u, c)}{du} = \left[\frac{\partial \vec{r}(R, u, v)}{\partial u} \right]_{\substack{R=a, \\ v=c}} =$$

$$= \left[R \cos u \cos v \bar{i} + R \cos u \sin v \bar{j} - R \sin u \bar{k} \right]_{\substack{R=a, \\ v=c,}}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 &= \frac{d\bar{r}(a, b, v)}{dv} = \left[\frac{\partial \bar{r}(R, u, v)}{\partial v} \right]_{\substack{R=a, \\ u=b}} = \\ &= \left[-R \sin u \sin v \bar{i} + R \sin u \cos v \bar{j} \right]_{\substack{R=a, \\ u=b.}} \end{aligned}$$

Mivel

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 = \bar{a}_3 \bar{a}_1 = 0,$$

a rendszer ortogonális.

A későbbiekben szükségünk lesz még a következő eredményekre:

$$|\bar{a}_1| = \sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u} = \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} = 1,$$

$$\begin{aligned} |\bar{a}_2| &= \sqrt{R^2 \cos^2 u \cos^2 v + R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u} = \\ &= \sqrt{R^2 (\cos^2 u + \sin^2 u)} = R, \end{aligned}$$

$$|\bar{a}_3| = \sqrt{R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \cos^2 v} = \sqrt{R^2 \sin^2 u} = R \sin u$$

mivel $0 < u < \tilde{n}$ esetén $\sqrt{\sin^2 u} = |\sin u| = \sin u$. Ebből következik a rendszer ortogonalitására való tekintettel, hogy

$$D = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = R^2 \sin u$$

és a koordinátafelületek normálisai:

$$\bar{n}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{n}_2 = \frac{\bar{a}_2}{R^2}, \quad \bar{n}_3 = \frac{\bar{a}_3}{R^2 \sin^2 u}.$$

b) Hengerkoordinátarendszer

A szokásos

$$q_1 = R, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

jelöléssel a transzformációs formulák:

$$x = R \cos \varphi,$$

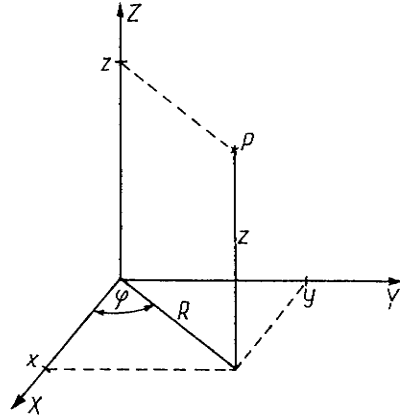
$$y = R \sin \varphi, \quad \text{ill.} \quad \vec{r} = R \cos \varphi \vec{i} + R \sin \varphi \vec{j} + z \vec{k},$$

$$z = z$$

(R, φ , és z jelentését lásd az ábrán).

A koordinátafelületek:

$$R = a$$



Z tengelyű, ill. a Z tengellyel párhuzamos alkotóju egyenes körhenger-felületek,

$$\varphi = b$$

Z tengelyből kiinduló, az XY síkra merőleges félsíkok,

$$z = c,$$

az XY síkkal párhuzamos síkok.

A koordinátavonalak ezek áthatási görbéi, vagyis

$\vec{r} = \vec{r}(R, b, c)$ egyenletű az XY síkkal párhuzamos síkban fekvő, a Z tengelyből kiinduló félegyenesek,

$\vec{r} = \vec{r}(a, \varphi, c)$ egyenletű az XY síkkal párhuzamos síkban fekvő körvonalak,

$\vec{r} = \vec{r}(a, b, z)$ egyenletű Z tengellyel párhuzamos egyenesek.

Ezen koordinátavonalak érintői:

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{r}(R, b, c)}{dR} = \left[\frac{\partial \vec{r}(R, \varphi, z)}{\partial R} \right]_{\substack{\varphi=b, \\ z=c}} = [\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}]_{\substack{\varphi=b, \\ z=c}},$$

$$\bar{a}_2 = \frac{d\bar{r}(a, \varphi, c)}{d\varphi} = \left[\frac{\partial \bar{r}(R, \varphi, z)}{\partial \varphi} \right]_{\substack{R=a, \\ z=c}} = \left[-R \sin \varphi \bar{i} + R \cos \varphi \bar{j} \right]_{\substack{R=a, \\ z=c}},$$

$$\bar{a}_3 = \frac{d\bar{r}(a, b, z)}{dz} = \left[\frac{\partial \bar{r}(R, \varphi, z)}{\partial z} \right]_{\substack{R=a \\ \varphi=b}} = \bar{k}.$$

Mivel

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 = \bar{a}_3 \bar{a}_1 = 0,$$

a rendszer ortogonális, és tekintettel arra, hogy

$$\begin{aligned} |\bar{a}_1| &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \\ |\bar{a}_2| &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi} = R, \\ |\bar{a}_3| &= 1, \end{aligned}$$

adódik:

$$D = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = R,$$

a koordinátafelületek normálisai pedig:

$$\bar{n}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{n}_2 = \bar{a}_2 \frac{1}{R^2}, \quad \bar{n}_3 = \bar{a}_3.$$

c) Általános hengerkoordináta-rendszer

A transzformációs formulák:

$$x = q_1 f(q_2) + c_1 q_3,$$

$$y = q_1 g(q_2) + c_2 q_3, \quad \text{ill.} \quad \bar{r} = q_1 \bar{r}_1(q_2) + q_3 \bar{v}, \quad \text{ahol} \quad \bar{v} = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k},$$

$$z = q_1 h(q_2) + c_3 q_3 \quad \bar{r}_1(q_2) = f(q_2) \bar{i} + g(q_2) \bar{j} + h(q_2) \bar{k}.$$

A koordinátafelületek:

$$q_1 = a : \bar{r} = a \bar{r}_1(q_2) + q_3 \bar{v} \quad \text{hengerfelületek,}$$

$$q_2 = b : \bar{r} = q_1 \bar{d} + q_3 \bar{v} \quad \text{síkok,}$$

$$q_3 = e : \bar{r} = q_1 \bar{r}_1(q_2) + e\bar{v} \quad \text{kupfelületek.}$$

A hengerkoordinátarendszerek általában nem ortogonálisak. Pl. az

$$x = u a \cos t,$$

$$y = u b \sin t,$$

$$z = z$$

($q_1 = u$, $q_2 = t$, $q_3 = z$) elliptikus henger-koordinátarendszer esetében a koordinátavonalak érintő-vektorai:

$$\bar{a}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = a \cos t \bar{i} + b \sin t \bar{j},$$

$$\bar{a}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = -u a \sin t \bar{i} + u b \cos t \bar{j},$$

$$\bar{a}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \bar{k},$$

és mivel

$$\bar{a}_1 \bar{a}_3 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 = 0,$$

de

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = -u a^2 \sin t \cos t + u b^2 \sin t \cos t \neq 0,$$

ha $a \neq b$, a rendszer ezen kikötés mellett nem ortogonális.

A további tárgyalások leegyszerűsítése érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

$$(17) \quad \bar{a}_i \bar{a}_j = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} = g_{ij} = g_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

speciálisan

$$(18) \quad |\bar{a}_i|^2 = \bar{a}_i \bar{a}_i = g_{ii} \quad (i = 1, 2, 3),$$

ill. az

$$(19) \quad |\bar{a}_i| = H_i \quad \text{jelöléssel} \quad |\bar{a}_i|^2 = H_i^2.$$

A gradiens kiszámítása görbevonalu koordinátarendszerben

Egy skalártér gradiensét legelőször úgy definiáltuk, mint a skalárvektorfüggvény differenciálhányadosát, vagyis az $u(\vec{r})$ függvény megváltozásának főrészében (a du differenciálban) szereplő "arányossági tényező"-t:

$$\Delta u = u(\vec{r} + d\vec{r}) - u(\vec{r}) = a d\vec{r} + \bar{\varepsilon} d\vec{r},$$

és ha itt $|\bar{\varepsilon}| \rightarrow 0$, ha $|d\vec{r}| \rightarrow 0$, akkor $u(\vec{r})$ differenciálható, és

$$\vec{a} = \text{grad } u = \frac{du}{d\vec{r}}.$$

Teljesen hasonlóképpen

$$(1) \quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$$

esetében

$$u(\vec{r}) = u(q_1, q_2, q_3)$$

megváltozása

$$\Delta u = u(\vec{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3 + \Delta q_3)) - u(\vec{r}(q_1, q_2, q_3)),$$

ezen megváltozás főrésze

$$(2) \quad du = \text{grad } u d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial q_i} \Delta q_i.$$

Mivel azonban (1) megváltozása

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3 + \Delta q_3) - \vec{r}(q_1, q_2, q_3),$$

ennek főrésze

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \Delta q_i = \sum_{i=1}^3 \vec{a}_i \Delta q_i,$$

ezen összefüggésből $d\vec{r}$ érintőirányu koordinátái

$$\Delta q_i = d\vec{r} \cdot \vec{n}_i.$$

Ezen eredményünket (2) -be behelyettesítve adódik:

$$du = \text{grad } u \, d\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial q_i} \bar{n}_i \right) d\vec{r},$$

azaz

$$(3) \quad \begin{aligned} \text{grad } u &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial q_i} \bar{n}_i = \\ &= \frac{\partial u}{\partial q_1} \bar{n}_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2} \bar{n}_2 + \frac{\partial u}{\partial q_3} \bar{n}_3. \end{aligned}$$

Ha tehát görbevonalu koordinátarendszerben a ∇ vektort így definiáljuk:

$$(4) \quad \nabla = \bar{n}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \bar{n}_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \bar{n}_3 \frac{\partial}{\partial q_3},$$

akkor a (3) képlet most is

$$\text{grad } u = \nabla u$$

alakban jegyezhető meg a legkönnyebben.

A (3) képletet ortogonális rendszer esetében az

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{a}_i}{|\bar{a}_i|^2} = \frac{\bar{a}_i}{H_i^2} = \frac{\bar{e}_i}{H_i}$$

jelölés felhasználásával még a következő alakban is felírhatjuk:

$$\text{grad } u = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial u}{\partial q_i} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \bar{e}_i.$$

A divergencia kiszámítása görbevonalu ortogonális koordinátarendszerben

a) A P pontra rázsugorodó mérhető felszínű, zárt, irányítható F_n felületeken, ill. az általuk bezárt V_n térfogatu térrészekben folytonos

$\vec{v}(\vec{r})$ vektorfüggvény esetében, $\vec{v}(\vec{r})$ koordinátáinak parciális deriváltjairól is feltételezve a folytonosságot beláttuk, hogy kifelé mutató felületi normális mellett

$$[\operatorname{div} \vec{v}]_{(P)} = \lim_{F_n} \frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}}{V_n}.$$

E határértéket először speciálisan derékszögű hasábok esetére kiszámítva jutottunk $\operatorname{div} \vec{v}$ derékszögű koordinátás kiszámítására szolgáló képletünkre.

Vizsgáljuk most a tér azon (q_1, q_2, q_3) pontjainak K halmazát, melyekre

$$q'_1 \leq q_1 \leq q'_1 + \Delta q_1,$$

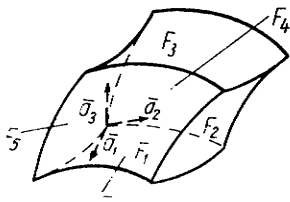
$$q'_2 \leq q_2 \leq q'_2 + \Delta q_2,$$

$$q'_3 \leq q_3 \leq q'_3 + \Delta q_3.$$

E pontok egy görbevonalu hasáb belsejében, ill. határán helyezkednek el, amely a P pontot tartalmazza és amelynek oldalai

$$\begin{aligned} F_1 : \vec{r} &= \vec{r}(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3), \\ F_2 : \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q'_2 + \Delta q_2, q_3), \\ F_3 : \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2, q'_3 + \Delta q_3), \\ F_4 : \vec{r} &= \vec{r}(q'_1, q_2, q_3), \\ F_5 : \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q'_2, q_3), \\ F_6 : \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2, q'_3), \end{aligned} \quad (1)$$

egyenletű felületek.



Tegyük fel, hogy $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ első és másodrendű parciális deriváltjai (vagyis az $\vec{a}_i$ vektorok parciális deriváltjai is), valamint a vizsgált $\vec{v}(\vec{r})$ vektortér koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak a fenti K halmaz pontjaiban. Ekkor $\vec{v}(\vec{r})$ -nek az (1)-beli F_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

felületeken létezik a felületmenti integrálja, továbbá, ha $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$ már elég kicsiny, tetszőleges $P_k \in K$ pontra

$$\left[\bar{a}_i \right]_{(P_k)} \approx \left[\bar{a}_i \right]_{(P)}, \quad \bar{v}(P_k) \approx \bar{v}(P), \quad (P \in K),$$

ahol a közelítésnél elkövetett hiba $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3 \rightarrow 0$ esetében 0-hoz tart. $(\bar{a}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3.)$

E feltevések mellett a K halmaz pontjaival megadott görbevonali hasáb térfogatát olyan egyenesvonali hasáb térfogatával közelíthetjük meg, melynek élvektorai

$$\begin{aligned} \bar{r}(q'_1 + \Delta q_1, q'_2, q'_3) - \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3) &\approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \Delta q_1 = \\ &= \bar{a}_1(P_1) \Delta q_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}(q'_1, q'_2 + \Delta q_2, q'_3) - \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3) &\approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \Delta q_2 = \\ &= \bar{a}_2(P_2) \Delta q_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3 + \Delta q_3) - \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3) &\approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \Delta q_3 = \\ &= \bar{a}_3(P_3) \Delta q_3 \end{aligned}$$

(itt $0 \leq \nu_1 \leq 1, 0 \leq \nu_2 \leq 1, 0 \leq \nu_3 \leq 1$, azaz $P_1 \in K, P_2 \in K, P_3 \in K$).

A vizsgált görbevonali hasáb térfogata tehát közelítőleg

$$(2) \quad V \approx \left| \bar{a}_1(P_1) \bar{a}_2(P_2) \bar{a}_3(P_3) \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \right| \approx \left| \underbrace{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3}_D \right|_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

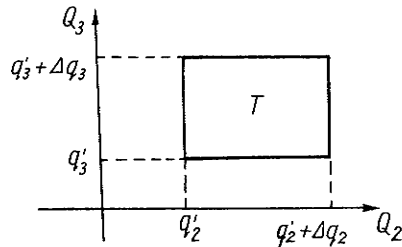
ahol a közelítésnél elkövetett hiba még $\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$ -mal osztva is 0-hoz tart $\Delta q_1 \rightarrow 0$, $\Delta q_2 \rightarrow 0$, $\Delta q_3 \rightarrow 0$ esetében.

A $\vec{v}(\vec{r})$ vektor-vektorfüggvénynek a fenti görbevonalu hasáb-felületre vonatkozó felületmenti integrálját kifelé mutató felületi normálissal a következőképpen számíthatjuk ki.

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f} = \left(\iint_{F_1} \vec{v} d\vec{f} + \iint_{F_4} \vec{v} d\vec{f} \right) + \left(\iint_{F_2} \vec{v} d\vec{f} + \iint_{F_5} \vec{v} d\vec{f} \right) + \left(\iint_{F_3} \vec{v} d\vec{f} + \iint_{F_6} \vec{v} d\vec{f} \right),$$

ahol az F_1 , ill. F_4 lapnak $\vec{a}_1$, ill. $-\vec{a}_1$, F_2 és F_5 -nek $\vec{a}_2$ és $-\vec{a}_2$, F_3 és F_6 -nak $\vec{a}_3$ és $-\vec{a}_3$ irányu a kívánt irányításu normálisa.

T-vel jelölve a q_2, q_3 paramétersík $q'_2 \leq q_2 \leq q'_2 + \Delta q_2$, $q'_3 \leq q_3 \leq q'_3 + \Delta q_3$ tartományát, mivel $\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = D \vec{n}_1$, adódik:



$$\begin{aligned} & \iint_{F_1} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f} + \iint_{F_4} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f} = \\ & = \iint_T \vec{v}(\vec{r}(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)) D(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) \vec{n}_1(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) dq_2 dq_3 - \\ & - \iint_T \vec{v}(\vec{r}(q'_1, q_2, q_3)) D(q'_1, q_2, q_3) \vec{n}_1(q'_1, q_2, q_3) dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

Az integrálok különbségét az integrálandó függvények különbsége integráljaként felírva, a tett folytonossági kikötések mellett a következő közelítések végezhetőek el:

$$\begin{aligned}
& (\bar{v}\bar{n}_1 D)_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} - (\bar{v}\bar{n}_1 D)_{(q'_1, q_2, q_3)} = \\
& = \left[\frac{\partial (\bar{v}\bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} \Delta q_1 \approx \left[\frac{\partial (\bar{v}\bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1,
\end{aligned}$$

ahol $P \in K$ az a rögzített pont, amelyben $\text{div } \bar{v}$ értékét ki akarjuk számítani. Ez azonban azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}
\iint_{F_1} \bar{v} d\bar{f} + \iint_{F_4} \bar{v} d\bar{f} & \approx \left[\frac{\partial (\bar{v}\bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1 \iint_T dq_2 dq_3 = \\
& = \left[\frac{\partial (\bar{v}\bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3,
\end{aligned}$$

ahol a közelítésnél elkövetett hiba még $\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$ -mal osztva is 0-hoz tart $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3 \rightarrow 0$ esetében.

Teljesen hasonlóan adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\iint_{F_2} \bar{v} d\bar{f} + \iint_{F_5} \bar{v} d\bar{f} & \approx \left[\frac{\partial (\bar{v}\bar{n}_2 D)}{\partial q_2} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3, \\
\iint_{F_3} \bar{v} d\bar{f} + \iint_{F_6} \bar{v} d\bar{f} & \approx \left[\frac{\partial (\bar{v}\bar{n}_3 D)}{\partial q_3} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3.
\end{aligned}$$

Eredményeinket összefoglalva

$$\frac{\iint_F \bar{v} d\bar{f}}{V} \approx \frac{1}{|(D)_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3|} \left[\frac{\partial (\bar{v}\bar{n}_1 D)}{\partial q_1} + \frac{\partial (\bar{v}\bar{n}_2 D)}{\partial q_2} + \right.$$

$$+ \left. \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_3 D)}{\partial q_3} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_i D)}{\partial q_i} \right]_{(P)}$$

Ha mármost olyan görbevonalu hasábokat vizsgálunk, amelyek a P pontra rázsugorodnak, akkor ezek sorozatára a fenti közelítésnél elkövetett hiba zérushoz tart (ilyen hasábok sorozatára ugyanis szükségképpen $\Delta q_1 \rightarrow 0$, $\Delta q_2 \rightarrow 0$, $\Delta q_3 \rightarrow 0$), vagyis

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{div} \bar{v} \right]_{(P)} &= \lim \frac{\iint \bar{v} \, d\bar{f}}{V} = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_i D)}{\partial q_i} \right]_{(P)} = \\ (3) \quad &= \frac{1}{|D|} \left[\frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_1 D)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_2 D)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_3 D)}{\partial q_3} \right]_{(P)}. \end{aligned}$$

A (3) képlet tetszőleges nem-ortogonális rendszer esetében is érvényes.

A (3) képletet jobbsodrású ortogonális rendszer esetében könnyen felírhatjuk még további két alakban.

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \bar{a}_i$$

esetén

$$\bar{v}\bar{n}_i = v_i,$$

vagyis

$$(4) \quad \operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(v_i D)}{\partial q_i} = \frac{1}{|D|} \left[\frac{\partial(v_1 D)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 D)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 D)}{\partial q_3} \right].$$

Felhasználva azonban a

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = |\bar{a}_i| = H_i$$

jelölést

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 b_i \bar{e}_i$$

esetén, mivel $\bar{e}_i = \frac{\bar{a}_i}{H_i}$, $\bar{e}_i H_i = \bar{a}_i$, azaz

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 b_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{H_i} (H_i \bar{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{H_i} \bar{a}_i.$$

A (4) képletbe v_i helyébe $\frac{b_i}{H_i}$ -t téve

$$(5) \quad \operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{b_i}{H_i} D \right) =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (b_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (b_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (b_3 H_1 H_2) \right\}.$$

b) Ha a $\bar{v}$ vektor a reciprok rendszerben, vagyis normális irányu összetevőkkel van megadva:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i,$$

akkor előző eredményeinkből igen könnyen vehetjük le $\operatorname{div} \bar{v}$ ortogonális rendszerben való kiszámítására szolgáló képletünket. Ekkor ugyanis

$$\bar{v} \bar{n}_1 D = D(c_1 \bar{n}_1^2 + c_2 \bar{n}_2 \bar{n}_1 + c_3 \bar{n}_3 \bar{n}_1) = Dc_1 \bar{n}_1^2 = Dc_1 \frac{|\bar{a}_2 \times \bar{a}_3|^2}{D^2} =$$

$$= c_1 \frac{H_2^2 H_3^2}{D},$$

mivel a feltételezett ortogonalitás miatt $\bar{n}_2 \bar{n}_1 = \bar{n}_3 \bar{n}_1 = 0$, $|\bar{a}_2 \times \bar{a}_3|^2 = |\bar{a}_2|^2 |\bar{a}_3|^2 = H_2^2 H_3^2$. Hasonlóképpen adódik:

$$\bar{v} \bar{n}_2 D = c_2 \frac{H_3^2 H_1^2}{D}, \quad \bar{v} \bar{n}_3 D = c_3 \frac{H_1^2 H_2^2}{D},$$

míg végül, eredményeinket összefoglalva írhatjuk:

$$\begin{aligned}
 \text{div} \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i &= \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} & 0 \\ H_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{D} c_1 \\ 0 & H_2^2 & 0 & \frac{1}{D} c_2 \\ 0 & 0 & H_3^2 & \frac{1}{D} c_3 \end{vmatrix} = \\
 (6) \quad &= \frac{1}{|D|} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{D} c_1 H_2^2 H_3^2 \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{D} c_2 H_3^2 H_1^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{D} c_3 H_1^2 H_2^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Anélkül, hogy ezt levezetnénk, felírjuk nem-ortogonális rendszer esetében a $\text{div } \bar{v}$ kiszámítására szolgáló képletet:

$$\begin{aligned}
 \text{div} \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i &= \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{1}{D} c_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{1}{D} c_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{1}{D} c_3 \end{vmatrix} \cdot (g_{ik} = \bar{a}_i \bar{a}_k) \\
 (7) \quad &
 \end{aligned}$$

Fenti képleteink segítségével igen könnyen be lehet pl. látni, hogy az egységnyi pontszerű töltés elektrosztatikus tere divergenciamentes. Gömbi koordinátarendszer esetében ugyanis

$$\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} = \frac{\bar{a}_1}{R^2},$$

(lásd 6. fejezet a)), vagyis

$$\text{div } \bar{E} = \frac{1}{R^2 \sin u} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{R^2 \sin u}{R^2} \right) = 0.$$

c) Külön foglalkozni szeretnénk a Δ operátor (Laplace-operátor) megadásával, ill.

$$\Delta U = \nabla^2 U = \text{div grad } U$$

felírásával általános görbevonalu, majd speciálisan gömbi- és hengerkoordináta-rendszerben.

A grad U vektort normális irányu összetevőkkel felírva

$$\text{grad } U = \nabla U = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \bar{n}_i = \frac{\partial U}{\partial q_1} \bar{n}_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \bar{n}_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3} \bar{n}_3.$$

(6) értelmében ortogonális rendszer esetében

$$(8) \quad \Delta U = \text{div} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \bar{n}_i = \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} & 0 \\ H_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ 0 & H_2^2 & 0 & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ 0 & 0 & H_3^2 & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{vmatrix},$$

$(H_i = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = |\bar{a}_i|, i = 1, 2, 3),$ ill. (7) értelmében nem-ortogonális rendszer esetében:

$$(9) \quad \Delta U = \text{div} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \bar{n}_i = \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{vmatrix},$$

ahol $g_{ik} = \bar{a}_i \bar{a}_k$, $i, k = 1, 2, 3$.

Speciálisan gömbi koordinátarendszer esetében tehát a korábban már kiszámított $|\bar{a}_i| = H_i$ ($i = 1, 2, 3$), ill. $D = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3$ érték felhasználásával

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \Delta U &= \frac{1}{R^2 \sin u} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R^2 \sin u} \frac{\partial U}{\partial R} \\ 0 & R^2 & 0 & \frac{1}{R^2 \sin u} \frac{\partial U}{\partial u} \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 u & \frac{1}{R^2 \sin u} \frac{\partial U}{\partial v} \end{vmatrix} = \dots = \\
 &= \frac{1}{R^2 \sin u} \left\{ 2R \sin u \frac{\partial U}{\partial R} + R^2 \sin u \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \cos u \frac{\partial U}{\partial u} + \right. \\
 &\quad \left. + \sin u \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Korábbi eredményeinket felhasználva, hengerkoordináták esetében

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \Delta U &= \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \\ 0 & R^2 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \dots = \\
 &= \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial U}{\partial R} + R \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + R \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Például gömbi koordinátarendszerben látható be legkönnyebben, hogy az

$$U = \frac{1}{|\vec{r}|}$$

skalár-vektorfüggvény kielégíti a Laplace-egyenletet. Gömbi koordinátákban ugyanis (az előbbi jelölésekkel)

$$U = \frac{1}{R},$$

és így

$$\Delta U = \frac{1}{R^2 \sin u} \left(2R \sin u \left(-\frac{1}{R^2} \right) + R^2 \sin u \left(\frac{2}{R^3} \right) \right) = 0.$$

A rotáció kiszámítása görbevonalu ortogonális koordinátarendszerben

A $\bar{v}(\bar{r})$ vektortér P pontbeli rotációjának meghatározására a következő koordinátainvariáns definíciót adtuk meg:

$$[\text{rot } \bar{v}]_{(P)} = \lim_{F \rightarrow V} \frac{\iint_F d\bar{f} \times \bar{v}}{V} = \lim_{F \rightarrow V} \frac{-\iint_F \bar{v} \times d\bar{f}}{V},$$

ahol F -fel a P pontra rázsugorodó felületeket jelöltük, az ezen felületek által bezárt térrész térfogatát jelölte V , az F felületekről feltettük, hogy mérhető felszíneük és irányíthatók, az általuk bezárt térrész mérhető köbtartalma, a felületmenti integrálokat pedig kifelé irányított normálissal kellett számítani.

Bebizonyítottuk, hogy amennyiben $\bar{v}(\bar{r})$ koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak a P pont környezetében, a fenti határérték mindig létezik.

Számítsuk ki most ezt a határértéket speciális P -re rázsugorodó zárt felületek, görbevonalu hasábok esetében.

Legyen $P(q'_1, q'_2, q'_3)$, és P valamely H környezetében legyen $\bar{r}(q_1, q_2, q_3)$ első és másodrendű parciális deriváltjaival, $\bar{v}(\bar{r})$ pedig koordinátáinak parciális deriváltjaival együtt folytonos.

Jelentse K a tér azon pontjainak halmazát, melyekre

$$q'_1 \leq q_1 \leq q'_1 + \Delta q_1,$$

$$q'_2 \leq q_2 \leq q'_2 + \Delta q_2,$$

$$q'_3 \leq q_3 \leq q'_3 + \Delta q_3,$$

ahol $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$ már olyan kicsiny, hogy $K \subset H$.

A K tartományt határoló görbevonalu hasáb az előző fejezetben már szerepelt, ott meg is adtuk e görbevonalu hasábot határoló F_1, F_2 ,

F_3, F_4, F_5, F_6 felületek egyenletét. E hasáb térfogatának közelítő értéke az ottani (2) formula értelmében

$$V \approx \left| \begin{matrix} [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3] \\ (P) \end{matrix} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \right| = \left| \begin{matrix} (D) \\ (P) \end{matrix} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \right|,$$

míg a hasábot határoló F_i lapoknak a zárt térrészből kifelé mutató normálisai

az F_1 lap esetében $\bar{a}_2 \times \bar{a}_3 = \bar{n}_1 D = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|^2} D$, a $(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$,

az F_4 lap esetében $-(\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = -\bar{n}_1 D = -\frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|^2} D$, a (q'_1, q_2, q_3) ,

paraméterértékek mellett, az F_2 és F_5 , ill. az F_3 és F_6 lapok esetében pedig a felületi normális a fentiből ciklikus cserével nyerhető. Nyilvánvalóan fennáll:

$$\frac{\iint_F \bar{v} \times d\bar{f}}{V} = - \frac{\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_2} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_5} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_3} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_6} \bar{v} \times d\bar{f}}{V}.$$

Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} = I$$

$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i$ esetében a q_2, q_3 paramétersík megfelelő tartományát

T -vel jelölve: $T = \{(q_2, q_3): q'_2 \leq q_2 \leq q'_2 + \Delta q_2, q'_3 \leq q_3 \leq q'_3 + \Delta q_3\}$

$$\begin{aligned} I &= \iint_T \left\{ [c_2 \bar{n}_2 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} + [c_3 \bar{n}_3 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} \right\} dq_2 dq_3 + \\ &+ \iint_T \left\{ [c_2 \bar{n}_2 \times (-\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)]_{(q'_1, q_2, q_3)} + [c_3 \bar{n}_3 \times (-\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)]_{(q'_1, q_2, q_3)} \right\} dq_2 dq_3 = \\ &= \iint_T \left\{ [-c_2 \bar{a}_3]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} + [c_3 \bar{a}_2]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[c_2 \bar{a}_3 \right]_{(q'_1, q_2, q_3)} - \left[c_3 \bar{a}_2 \right]_{(q'_1, q_2, q_3)} \} dq_2 dq_3 \approx \\
& \approx \iint_T \left\{ - \left[\frac{\partial (c_2 \bar{a}_3)}{\partial q_1} \right]_{(q'_1, q_2, q_3)} + \left[\frac{\partial (c_3 \bar{a}_2)}{\partial q_1} \right]_{(q'_1, q_2, q_3)} \right\} \Delta q_1 dq_2 dq_3 \approx \\
& \approx \left\{ - \left[\frac{\partial (c_2 \bar{a}_3)}{\partial q_1} \right]_{(P)} + \left[\frac{\partial (c_3 \bar{a}_2)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \right\} \Delta q_1 \iint_T dq_2 dq_3 = \\
& = \left[- \frac{\partial (c_2 \bar{a}_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (c_3 \bar{a}_2)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 .
\end{aligned}$$

A számolás során a következő átalakítást végeztük:

$$\bar{n}_2 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = \bar{n}_2 \times \bar{n}_1 D = \frac{\bar{a}_2}{|\bar{a}_2|^2} \times \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|^2} D = - \frac{\bar{a}_3}{|\bar{a}_3|} \frac{1}{|\bar{a}_2|} \frac{1}{|\bar{a}_1|} D = - \bar{a}_3 ,$$

$$\text{ill. } \bar{n}_3 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = \dots = \bar{a}_2, \quad \bar{n}_1 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = 0,$$

a közelítéseket pedig $c_2 \bar{a}_3$ és $c_3 \bar{a}_2$ és ezek parciális deriváltjainak feltételezett folytonossága miatt végezhetjük el.

Hasonlóképpen adódik:

$$\begin{aligned}
\iint_{F_2} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_5} \bar{v} \times d\bar{f} & \approx \left[- \frac{\partial (c_3 \bar{a}_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (c_1 \bar{a}_3)}{\partial q_2} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 , \\
\iint_{F_3} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_6} \bar{v} \times d\bar{f} & \approx \left[- \frac{\partial (c_1 \bar{a}_2)}{\partial q_3} + \frac{\partial (c_2 \bar{a}_1)}{\partial q_3} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 .
\end{aligned}$$

Eredményeinket összefoglalva tehát $\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$ -mal rövidítve adódik

$$- \frac{\iint_F \bar{v} \times d\bar{f}}{V} \approx \frac{\left(\frac{\partial (c_2 \bar{a}_3)}{\partial q_1} - \frac{\partial (c_3 \bar{a}_2)}{\partial q_1} + \frac{\partial (c_3 \bar{a}_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial (c_1 \bar{a}_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (c_1 \bar{a}_2)}{\partial q_3} - \frac{\partial (c_2 \bar{a}_1)}{\partial q_3} \right)}{|D|} \Bigg|_{(P)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{|D|} \left\{ \frac{\partial c_2}{\partial q_1} \bar{a}_3 + c_2 \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial q_1} - \frac{\partial c_3}{\partial q_1} \bar{a}_2 - c_3 \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial q_1} + \frac{\partial c_3}{\partial q_2} \bar{a}_1 + c_3 \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q_2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial c_1}{\partial q_2} \bar{a}_3 - c_1 \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial q_2} + \frac{\partial c_1}{\partial q_3} \bar{a}_2 + c_1 \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial c_2}{\partial q_3} \bar{a}_1 - c_2 \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q_3} \right\} \right)_{(P)} = \\
&= \left(\frac{1}{|D|} \left\{ \bar{a}_1 \left(\frac{\partial c_3}{\partial q_2} - \frac{\partial c_2}{\partial q_3} \right) - \bar{a}_2 \left(\frac{\partial c_3}{\partial q_1} - \frac{\partial c_1}{\partial q_3} \right) + \bar{a}_3 \left(\frac{\partial c_2}{\partial q_1} - \frac{\partial c_1}{\partial q_2} \right) \right\} \right)_{(P)}
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy a tett folytonossági kikötések mellett fennáll

$$\frac{\partial \bar{a}_3}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_3 \partial q_1} = \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q_3},$$

ill. hasonlóképpen:

$$\frac{\partial \bar{a}_2}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial q_2} = \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial q_3}.$$

Be lehet bizonyítani, hogy az okoskodás során végzett közelítéseknel elkövetett hibák a görbevonalu hasábok P -re való rázsugorodásakor, amikor is szükségképpen $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3 \rightarrow 0$, 0-hoz tartanak, és így előbbi eredményünket determináns-alakban felírva adódik:

$$\text{rot } \bar{v} = \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ahol $\bar{v} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i$, amit bizonyítani akartunk.

E képlet akkor is helyesen adja meg $\text{rot } \bar{v}$ értékét, ha a rendszer nem ortogonális, ekkor azonban a képlet levezetése lényegesen bonyolultabb.

A fenti képletből a $\text{rot } \bar{v}$ derékszögű koordinátás alakját szolgáltatató ismert képlet azonnal adódik.

Gömbi koordináták esetében (a korábban már használt jelölésekkel)

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \frac{1}{R^2 \sin u} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (c_i = \bar{v} \bar{a}_i).$$

E képlet felhasználásával könnyen belátható az egységnyi pontszerű töltés elektrosztatikus terének rotációmentessége.

$$\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} = \frac{1}{R^2} \bar{a}_1$$

esetében ugyanis $c_1 = \bar{E} \bar{a}_1 = \frac{1}{R^2}$, $c_2 = \bar{E} \bar{a}_2 = 0$, $c_3 = \bar{E} \bar{a}_3 = 0$

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \frac{1}{R^2 \sin u} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{1}{R^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hengerkoordináták esetében ugyancsak a korábban már használt jelöléssel:
vel:

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (c_i = \bar{v} \bar{a}_i).$$

IRODALOMJEGYZÉK

1. Dr. Fenyő István—Dr. Frey Tamás: Matematika villamosmérnököknek
2. Dr. Pach Zs.Pálné—Dr. Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis

TARTALOMJEGYZÉK

Egyparaméteres vektor-skalárfüggvény	3
Kétparaméteres vektor-skalárfüggvények	17
Skalár-vektorfüggvények	38
Vektor-vektorfüggvények; tenzorok	47
Vonalmenti integrál. Potenciál	59
Felületi integrál	75
Vektor-vektorfüggvény divergenciája	85
Gauss-Osztrogradszkij-tétel, síkbeli Gauss- -Osztrogradszkij-tétel, Green-tétel	93
Vektor-vektorfüggvény rotációja. Vektorpotenciál	103
Stokes tétele. Potenciálkeresés	120
Skalár-vektorfüggvény gradiensének Ignatowsky-féle definíciója	137
Általános (görbevonalu) koordináták	141
A gradiens kiszámítása görbevonalu koordináta-rendszerben ...	150
A divergencia kiszámítása görbevonalu ortogonális koordináta-rendszerben	151
A rotáció kiszámítása görbevonalu ortogonális koordináta- rendszerben	161
Irodalomjegyzék	167