



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Pál Magda - Serény György

MATEMATIKA FELADATTÁR I.
Bevezető sorozatok

Szerkesztette:
Antos Péter



Műegyetemi Kiadó, 2006

Szerzők:

Pál Magda (I-VII. fejezet)

Serény György (VIII. fejezet)

© Pál Magdolna, Serény György, 1982

(Tizedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **051386**



A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 10,5 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 6026 /06

TARTALOMJEGYZÉK

	Felelő- tok	Megol- dások
I. A matematikai logika elemei	7	69
II. Bizonyítási módszerek	14	71
III. Halmazelméleti alapfogalmak	16	74
IV. Számosság	21	76
V. Relációk, függvények	24	78
VI. Valós számok, egyenlőtlenségek	36	85
VII. Műveletek tulajdonságai	39	86
VIII. Számsorozatok	45	88
1. Alapfogalmak	45	88
2. Konvergenciavizsgálat	48	90
2.1 Explicite adott sorozatok	48	90
2.2 Rekurzív sorozatok	53	98
3. Vegyes feladatok	55	103
3.1 Konvergens sorozatok	55	103
3.2 Tetszőleges sorozatok	60	107

ELŐSZÓ

Ez a könyv, amelyet az olvasó a kezében tart, egy több kötetre tervezett Feladattár első része. A Feladattár készítőinek elsősorban az a célja, hogy jól használható segédeszközt adjanak a BME Villamosmérnöki Karán matematikát tanuló hallgatóknak az anyag elsajátításához, feladatmegoldó készségük fejlesztéséhez. Ezért a Feladattár nagymértékben alkalmazkodik a Karon előadásra kerülő anyag és a Kari matematika jegyzetek felépítéséhez és jelöléséhez.

A feladatok között egyaránt találhatók gyakorló jellegűek és komolyabb elmélyülést igénylők is. Sok feladat megoldását részletesen kidolgozva közöljük, másokét utmutatóval segítjük. A feladat sorszámát az előbbieknél egy négyzetbe, az utóbbiaknál egy körbe helyeztük. A feladatok eredményei, az utmutatók és a részletesen kidolgozott megoldások a kötet végén találhatók. Felkiáltójellel jelöltük meg azokat a feladatokat, amelyeket a téma iránt az átlagosnál jobban érdeklődő hallgatóknak szántunk.

Ezúton mondunk köszönetet kollegáinknak és azoknak a hallgatóknak, akik sok jó ötlettel és hasznos tanáccsal segítették munkánkat.

Kérjük, hogy észrevételeit juttassa el a kötet szerzőihez.

A Feladattár készítői

I. A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

Jelölések, definíciók: A tovább nem bontható állításokat elemi itéleteknek nevezzük. Minden logikai itélethez két logikai érték tartozhat, nevezetesen: igaz vagy hamis. Jelölésük: $\uparrow$ ill. $\downarrow$. A következtetésekből következtetünk premisszáknak, amire következtetünk konklúzióknak nevezzük. Egy következtetést akkor mondunk helyesnek, ha minden olyan esetben, amikor a premisszái igazak, akkor a konklúziója is igaz.

Logikai műveletek:

1.

	B	$\uparrow$	$\downarrow$
A	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

konjunkció: $A \wedge B$ akkor és csak akkor igaz, ha mind A mind B igaz.

2.

	B	$\uparrow$	$\downarrow$
A	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

diszjunkció: $A \vee B$ akkor és csak akkor igaz, ha A és B közül legalább az egyik igaz.

3.

A	$\neg A$
$\uparrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$\uparrow$

negáció: $\neg A$ akkor és csak akkor igaz, ha A hamis.

4.

	B	$\uparrow$	$\downarrow$
A	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

implikáció: $A \Rightarrow B$ akkor és csak akkor hamis, ha A igaz és B hamis.

1. A MATEMATIKAI LOGIKA-ELEMEI

5.

	B	
A	↑	↓
↑	↑	↓
↓	↓	↑

ekvivalencia: $A \iff B$ akkor és csak akkor igaz, ha A és B egyidejűleg igaz, vagy egyidejűleg hamis.

1. Írjuk le a logika műveleti jeleivel az alábbiakat!

- Nemcsak A, hanem B is.
 - A, pedig nem is. B.
 - Bár nem A, mégis B.
 - Sem A, sem B.
 - Nem igaz, hogy A és B.
 - Vagy nem A, vagy nem B.
 - B, feltéve, hogy A.
 - Nem A, hanem B.
 - Ha A, akkor nem B.
 - Ha A, akkor B, de ha nem A, akkor nem B.
 - Ha A, akkor B, de csak akkor.
 - Ha A akkor nem B, de ha nem A, akkor B.
 - Akkor A, ha nem B, de csak akkor.
 - Vagy A, vagy B, de nem mind a kettő.
 - A szükséges feltétele B-nek.
 - B elégséges feltétele A-nak.
 - A szükséges és elégséges feltétele B-nek.
 - B szükséges és elégséges feltétele A-nak.
2. A fenti állítások között vannak olyanok, amelyek ugyanazt jelentik, vagyis értéktáblázatuk megegyezik. Döntsük el, hogy hány különböző jelentésű van, és melyek jelentik ugyanazt.

3. Fejezzük ki szavakkal az alábbi műveleti jelekkel leírt állításokat!

- $A \wedge B \wedge C$
- $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg A \Rightarrow B$
- $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
- $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)$

Vannak-e közöttük egyező jelentésűek?

4. Nagybácsi mondja az unokaöccsének:

- Ha jeles lesz a bizonyítványod, kapsz egy kerékpárt.
- Akkor és csak akkor kapsz kerékpárt, ha jeles lesz a bizonyítványod. Mikor lesz szószegő a nagybácsi az a) és mikor a b) esetben?

I. A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

5. Értéktáblázat segítségével igazoljuk az alábbi azonosságokat!

- | | |
|--|---|
| a) $A \wedge B = B \wedge A$ | b) $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ |
| c) $A \vee B = B \vee A$ | d) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ |
| e) $\neg(\neg A) = A$ | f) $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ |
| g) $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ | h) $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ |
| i) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ | j) $A \Rightarrow B = \neg A \vee B$ |
| k) $A \Leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ | |
| l) $A \wedge A = A$ | m) $A \vee A = A$ |

6. Döntsük el, hogy helyesek-e az alábbi következtetések!

- Ha a gyilkosság áldozata otthon volt péntek este, akkor szólt a rádiója. Nem szólt a rádiója. Tehát nem volt otthon péntek este.
- Ha ma február 29-e van, akkor az idei évszám 4-gyel osztható. Az idei évszám nem osztható 4-gyel. Tehát ma nincs február 29-e.
- Ha beültem volna a szputnyikba, híres ember lennék. De nem ültem be a szputnyikba. Tehát nem vagyok híres ember.
- Ha Chaplin beült volna a szputnyikba, híres ember volna. De nem ült be a szputnyikba. Tehát nem híres ember.
- Ha Kis Péter beült volna a szputnyikba, híres ember volna. Kis Péter nem híres ember. Tehát nem ült be a szputnyikba.

7. Az előző feladat következtetéseit az alábbi következtetésformákkal írhatjuk le.

- $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
- $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A$
- $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$

a) A fenti következtetésformák közül melyek helyesek?

b) Igazoljuk, hogy a helyes következtetésformáknak megfelelő implikáció azonosan igaz.

8. Tekintsük az alábbi következtetéseket:

A, A elégséges feltétele B -nek.

- Tehát ha az A állítás hamis, akkor a B is.
- Tehát ha a B állítás hamis, akkor az A is.
- Tehát ha az A állítás igaz, akkor a B is.
- Tehát ha a B állítás igaz, akkor az A is.

B) A szükséges feltétele B -nek.

- Tehát ha az A állítás hamis, akkor a B is.
- Tehát ha a B állítás hamis, akkor az A is.
- Tehát ha az A állítás igaz, akkor a B is.
- Tehát ha a B állítás igaz, akkor az A is.

I. A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

- C) A szükséges és elégséges feltétele B -nek.
- a) Tehát ha az A állítás hamis, akkor a B is.
 - b) Tehát ha a B állítás hamis, akkor az A is.
 - c) Tehát ha az A állítás igaz, akkor a B is.
1. Állapítsuk meg, hogy a fenti következtetések közül melyek helyesek!
 2. Írjuk fel a nekik megfelelő következtetés formát!
 3. Az előbbiek közül, melyik következtetésformának megfelelő implikáció ill. ekvivalencia lesz azonosan igaz?
 4. Egy következtetésformát megfordíthatónak nevezünk, ha a következtetésforma és megfordítása, azaz a premissza és a konklúzió felcserélésével kapott következtetésforma is helyes. A fenti következtetések közül melyek megfordíthatóak?
9. a) Igazoljuk, hogy az olyan implikáció mindig azonosan igaz, amelynek az előtagja egy helyes következtetésforma premisszája, utótagja pedig ennek a következtetésformának a konklúziója.
- b) Az olyan következtetésforma mindig helyes, amelynek a premisszája egy azonosan igaz implikáció előtagja, konklúziója pedig ugyanennek az implikációnak az utótagja.
10. a) Az olyan ekvivalencia mindig azonosan igaz, amelynek az előtagja egy helyes megfordítható következtetésforma premisszája, utótagja pedig a konklúziója.
- b) Az olyan következtetésforma mindig helyes, amelynek a premisszája egy azonosan igaz ekvivalencia előtagja, konklúziója pedig ugyanennek az ekvivalenciának az utótagja.
11. Betörték egy áruházba. A nyomozás a következőket állapította meg:
 "Ha férfi a tettes, akkor kis termetű. Ha kis termetű, akkor az ablakon mászott be. Férfi a tettes, vagy legalábbis férfiruhát hordott. Ha férfiruhát hordott, és hiteles a szemtanu vallomása, akkor az ablakon mászott be."
- Mindezek után a helyszíni szemle megállapította, hogy a tettes nem az ablakon mászott be. Mit tudunk ezek alapján a tettesről mondani? Írjuk fel a feladat megoldása során alkalmazott következtetésformákat!
12. a) Határozzuk meg A és B logikai értékét úgy, hogy $(A \Rightarrow \perp) \Leftrightarrow (A \wedge \neg(B \wedge A))$ logikai értéke igaz legyen!
- b) Meghatározható-e C logikai értéke abból, hogy $A \Rightarrow (B \vee C)$ és $A \vee B \vee C$ logikai értéke igaz, B logikai értéke pedig hamis?
- c) Határozzuk meg A, B és C logikai értékét úgy, hogy $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg(C \wedge A))$ logikai értéke igaz, $C \wedge (B \Rightarrow \neg B)$ logikai értéke pedig hamis legyen!
- d) Írjuk fel a feladat megoldása során alkalmazott következtetésformákat!

I. A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

1. . Annak előgséges feltétele, hogy a $z = x(y - 1)$ szorzat nulla legyen az, hogy $x = 0$ és $y = 1$ teljesüljön. Tudjuk, hogy $x = 2$. Következik-e ebből, hogy z nem nulla?
14. Annak szükséges feltétele, hogy egy négyszög négyzet legyen az, hogy átlói merőlegesek legyenek egymásra.
 a) Mi ennek az állításnak a tagadása?
 b) Tudjuk, hogy egy adott négyszög átlói nem merőlegesek. Következik-e ebből, hogy a szóban forgó négyszög nem négyzet?
15. Mi az alábbi állítások tagadása:
 a) Az x, y, z változók egyike sem lehet egyenlő 1-gyel.
 b) x értéke legalább 3 .
 c) x értéke legfeljebb 3 .
 d) x értéke legfeljebb 5 és legalább 3 .
 e) x értéke pontosan 3 .
 f) x nagyobb mint 3 .
 g) x kisebb mint 3 .
 h) x nem egyenlő 3 -mal.
 i) "Vagy bolondok vagyunk s elveszünk egy szálig,
 Vagy ez a hitünk valóságra válik." Ady
 j) "Ha élet zengi be az iskolát,
 Az élet is derűs iskola lesz." Ady
 k) "Király vagyok, bírok nagy erővel,
 Ha nem adod, elveszem erővel." József Attila
 l) Ha a gyerek holnap még lázas lesz vagy erősen köhög, akkor kihívjuk az orvost.
 m) Akkor és csak akkor megyünk inoziba, ha holnap rossz idő lesz vagy pedig nem lesz jó műsor a TV-ben.
16. Hasonlítsuk össze az alábbi két következtetést! Helyesek-e? Mi a különbség köztük? Igaz-e a megfordításuk?
 a) Ha ez a lemez vasból van, akkor ezt a lemezt vonzza a mágnes.
 Tehát ha ezt a lemezt nem vonzza a mágnes, akkor ez a lemez nincs vasból.
 b) Ami vasból van azt vonzza a mágnes. Tehát amit nem vonz a mágnes, az nincs vasból.
17. "Minden ember halandó". Az alábbi mondatok közül melyiket fogadnánk el a fenti átfogalmazásának?
 a) x halandó.
 b) Ha x ember, x halandó.
 c) Minden x halandó .
 d) Bármilyen is az x , ha x ember, x halandó.
 e) Minden x -re: x halandó, ha x ember.

I. MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

18. Mi a logikai értéke az alábbi állításoknak? Jelölés: n egész szám, Tn : törzs szám, Pn : páros szám, Hn : 6-tal osztható egész szám.

a) minden x -re: x páros szám és x törzs szám.

Röviden: $\forall x(Px \wedge Tx)$.

b) minden x -re: x páros szám vagy x törzs szám.

Röviden: $\forall x(Px \vee Tx)$.

c) van olyan x , hogy x páros szám vagy x törzs szám.

Röviden: $\exists x(Px \vee Tx)$.

d) van olyan x , hogy x páros szám és x törzs szám.

Röviden: $\exists x(Px \wedge Tx)$.

e) $\forall x(Hx \Rightarrow Px)$

k) $\exists x(Hx \Rightarrow Px)$

f) $\forall x(Px \Rightarrow Hx)$

l) $\exists x(Hx \wedge Px)$

g) $\forall x(Px \Rightarrow \neg Hx)$

m) $\exists x(Hx \wedge \neg Px)$

h) $\forall x(\neg Px \Rightarrow \neg Hx)$

n) $\exists x(Px \wedge \neg Hx)$

i) $\forall x(Tx \Rightarrow Hx)$

o) $\exists x(Hx \wedge Tx)$

j) $\forall x(Tx \Rightarrow \neg Hx)$

p) $\exists x(Hx \Rightarrow Tx)$

19. Irjuk le logikai jelekkel az alábbi, egész számokra vonatkozó állításokat (melyek nem feltétlenül igazak)!

a) 6 páros

b) 9 páratlan

c) a páros

d) b páratlan

e) Minden egész szám páros.

f) Nem minden egész szám páros.

g) Minden egész szám páratlan.

h) Nem minden egész szám páratlan.

i) Minden egész szám páros vagy páratlan.

j) Minden egész szám páros is, páratlan is.

k) Ha m páros, akkor n páratlan.

l) Ha egy egész szám páros, akkor az 1-gyel nagyobb egész szám páratlan.

20. Hogyan írhatók le formulákkal az alábbi állítások, melyek valós számokra vonatkoznak? Jelöljük Qx -szel, hogy x racionális szám.

a) Vannak racionális számok.

b) Nem minden szám irracionális.

c) Vannak irracionális számok.

d) Nem minden szám racionális.

e) Minden számra igaz, hogy ha racionális, akkor nem irracionális.

f) Nincs olyan szám, amely ha racionális, akkor irracionális.

I. MATEMATIKAI LOGIKA ELEMELI

- g) Minden szám vagy racionális vagy irracionális.
- h) Nincs olyan szám, amelyre ne volna igaz, hogy vagy racionális vagy irracionális.

Melyik állítások fejezik ki ugyanazt más szavakkal? Melyek hamisak és melyek igazak?

21. Jelentse Px azt, hogy x páros szám.

- a) Mit írhatunk x helyébe, hogy Px -nek értelme legyen?
- b) Mit írhatunk x helyébe, hogy Px igaz legyen?

II. BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

1. A teljes indukció direkt, vagy indirekt bizonyítási módszer?
 2. Bizonyítsuk be teljes indukció segítségével az alábbi egyenlőtlenségeket, ill. egyenlőségeket!

(a) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = n^2(n+1)^2/4$

(b) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$

(c) Legyen $a^{[n]} = a(a-h)(a-2h)\dots(a-(n-1)h)$ és $a^{[0]} = 1$.
 Igazoljuk, hogy

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{[n-m]} b^{[m]}.$$

Vezessük le a feladat alapján a Newton-féle binomiális formulát:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} b^m.$$

- (d) Bizonyítsuk be a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n,$$

ahol $x_1, x_2, \dots, x_n$ azonos előjelű és -1 -nél nagyobb számok.

(e) $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > 2$, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$

(f) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, ha $n > 1$ természetes szám és $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

(g) $2!4!\dots(2n)! > ((n+1)!)^n$, ha $n > 1$ természetes szám.

II. BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

$$(h) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$(i) \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

$$n = 2, 3, \dots$$

$$(j) \quad n^{n+1} > (n+1)^n$$

$$n = 3, 4, 5, \dots$$

$$(k) \quad (2n)! < 2^{2n} (n!)^2$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

3. Állapítsuk meg, hogy mi a hiba az alábbi bizonyításban!

Állítás: Egy H halmazon egy asszociatív művelet van értelmezve, továbbá a és b H felcserélhető elemei, azaz $a \cdot b = b \cdot a$. Ekkor bármely két hatványuk is felcserélhető.

Bizonyítás: Szorozzuk meg az $a \cdot b = b \cdot a$ egyenlőséget jobbról

b^{n-1} -gyel, balról pedig a^{k-1} -gyel, ahol $n, k = 2, 3, \dots$.

Az asszociativitást felhasználva:

$$a^k b^n = a^{k-1} (ba) b^{n-1} = (a^{k-1} b) (ab^{n-1}).$$

Mivel a felcserélhető b^{n-1} -gyel, a^{k-1} pedig b^n -nel, kapjuk:

$$a^k b^n = a^{k-1} (b^n a) = b^n (a^{k-1} a) = b^n a^k.$$

4. Bizonyítsuk be indirekt módon az alábbi állítást! Három pozitív szám szorzata nagyobb 1-nél, az összegük pedig kisebb reciprokuk összegénél. Ekkor egyik szám sem lehet 1.

5. Adjunk direkt és indirekt bizonyítást is az alábbiakra!

a) Legyenek A, B, C olyan halmazok, amelyekre $A \subseteq B \subseteq C$.

Ekkor $(A - B) \cup (B - C) = \emptyset$.

b) Bármely természetes számot jelentsen is n , a

$$\frac{21n+4}{14n+3} \text{ tört sohasem egyszerűsíthető.}$$

6. Indirekt bizonyítási módszert alkalmazunk-e, ha az 5.a) feladat egyenlősége helyett az $(A - B) \cap (B - C) = X$ egyenlőséget igazoljuk (X az alaphalmaz). még pedig úgy, hogy a bizonyítás során csak a műveletek tulajdonságait használjuk ki?

III. HALMAZELMÉLETI ALAPFOGALMAK

1. Jelöljük

- A -val: a 2 -vel osztható egész számok halmazát,
B -vel: a 3 -mal osztható egész számok halmazát,
C -vel: a 4 -gyel osztható egész számok halmazát.

Képezzük páronként két-két halmaz egyesítését, közös részét (metszetét) és különbségét. Milyen számokból állnak a kapott halmazok?

2. Jelöljük

- M -mel: Magyarország lakóinak halmazát,
F -fel: a világ férfi lakóinak halmazát,
A -val: a világ analfabétáinak a halmazát.
Fejezzük ki ezekkel a halmazokkal a következőket:

- a) Az összes külföldi analfabétát.
b) Az összes analfabéta férfit.
c) A világ teljes férfi lakosságát és a magyarországi nőket.
d) Az írástudó magyar férfiakat.
e) Az írástudó magyar nőket.
f) A magyar analfabéta nőket és a külföldi írástudó férfiakat.

3. Bizonyítsuk be, hogy az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza!

4. Tudjuk, hogy $A \subsetneq B$. Milyen összefüggés van $\bar{A}$ és $\bar{B}$ között?

5. Milyen összefüggés van $A \cap B$ és A között? Milyen összefüggés van az előbbi két halmaz között, ha $A \subsetneq B$ ill. $B \subsetneq A$?

6. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

- a) $\bar{\bar{A}}$ b) $A \cup \bar{A}$ c) $A \cap \bar{A}$ d) $A \cup (A \cap B)$
e) $A \cap (A \cup B)$ f) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{A})$

7. Hogyan adhatók meg egyszerűbben az alábbi halmazok?

- a) $\overline{(A \cup B)}$ b) $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B})}$ c) $\overline{(A \cup B)}$ d) $\overline{(A \cap B)}$

8. Léteznek-e olyan A, B, és C halmazok, amelyekre

$A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ és $(A \cap B) - C = \emptyset$?

III. HALMAZELMÉLETI ALAPFOGALMAK

9. Igazoljuk, hogy

a) $A - B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset \Leftrightarrow$

$\bar{A} \cup B = E$, ahol E az alaphalmaz (a továbbiakban is).

c) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)$

d) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)$

e) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq (\bar{B} \cup C)$.

f) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} \subseteq C$

g) $(A - B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

h) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Rightarrow C \subseteq A$

i) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

d) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

k) $A \subseteq B \Rightarrow (A - C) \subseteq (B - C)$

l) $A \subseteq B \Rightarrow (C - B) \subseteq (C - A)$

m) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$

n) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$

o) $A = \bar{B} \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset) \wedge (A \cup B = E)$

p) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$

q) $(A - B) \cup (B - A) = C \Leftrightarrow (B - C) \cup (C - B) = A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (C - A) \cup (A - C) = B$

10. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt halmazok. Hozzuk egyszerűbb alakra az $[(A - B) \cap (B - C)] \cup (C - A)$ kifejezést!

11. Álljon fenn az A, B, C halmazokra az $A \supset B \supset C$ összefüggés. Hozzuk egyszerűbb alakra az

$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) - (A \cap B \cap C)$ kifejezést!

12. Melyik összefüggés igaz az alábbiak közül tetszőleges A, B és C halmazokra?

a) $(A \in B) \wedge (B \in C) \Rightarrow A \in C$

b) $(A \subseteq B) \wedge (B \in C) \Rightarrow A \in C$

c) $(A \cap B \subseteq \bar{C}) \wedge (A \cup C \subseteq B) \Rightarrow A \cap C = \emptyset$

d) $(A \neq B) \wedge (B \neq C) \Rightarrow A \neq C$

e) $(A \subseteq \overline{B \cup C}) \wedge (B \subseteq \overline{A \cup C}) \Rightarrow B \neq \emptyset$

III. HALMAZELEMÉLETI ALAPFOGALMAK

f) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$

g) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

- 13.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazokra:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1 \Rightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_n$$

- 14.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket! Milyen A, B halmazok esetén létezik megoldás?

a) $A \cup X = B \cap X, \quad A \cap X = C \cup X;$

b) $A - X = X - B, \quad X - A = C - X;$

c) $A \cap X = B - X, \quad C \cup X = X - A;$

d) $A \cap X = B, \quad A \cup X = C;$

e) $A - X = B, \quad X - A = C;$

f) $A - X = B, \quad A \cup X = C;$

- 15.** Igazoljuk az alábbi összefüggéseket! Tartalmazás esetén vizsgáljuk meg azt is, hogy milyen halmazokra áll fenn az egyenlőség!

a) $A \subseteq (A - B) \cup B$

b) $(A \cup B) - B \subseteq A$

c) $A - C \subseteq (A - B) \cup (B - C)$

d) $A - (A - B) = B - (B - A)$

e) $[A - (A - B)] - (A - C) = A \cap B \cap C$

f) $(A - C) \cap (B - D) = (A \cap B) - (C \cup D)$

g) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

h) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

i) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B = (A \cap C) - (B \cap C)$

j) $(A - B) \cup C = [(A \cup C) - B] \cup (B \cap C)$

k) $A \cap B \cap C = A - \{A - [B - (B - C)]\}$

l) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

m) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

- 16.** A, B és C halmazok. Keressük meg az alábbi összefüggések fennállásának szükséges és elégséges feltételét!

a) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A - B = B - A$

c) $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$

d) $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$

III. HALMAZELEMÉLETI ALAPFOGALMAK

- e) $(A - B) \cup (B - A) = F$
- f) $(A \cup B) \cap C = A$
- g) $(A \cup B) \cap C = C$
- h) $A - (B - C) = (A - C) - (B - C)$
- i) $(A - B) \cup C = A \cap B \cap C$

11. Legyen $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{x, y\}$.

- a) Adjuk meg az $(A \cup B) \times C$ szorzathalmaz elemeit!
- b) Mutassuk meg, hogy érvényesek a következő azonosságok tetszőleges A, B, C halmazok esetén!
 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) ;$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$$

- 12. a) Mit jelent az A és a B halmazok viszonyára nézve az, ha $(A \cap B) \times C = \emptyset$?
- b) Mikor üres halmaz az $(A - B) \times C$ szorzat?

19. Igaz-e általában, hogy

$$a) A \times B = B \times A ; \quad b) A \times (B \times C) = (A \times B) \times C ;$$

ahol A, B és C tetszőleges halmazok.

20. Igazoljuk, hogy ha A, B, C és D nem üresek, akkor

$$a) A \subseteq B \quad \text{és} \quad C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$$

$$b) A = B \quad \text{és} \quad C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$$

21. Igazoljuk, hogy

$$a) (A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

$$b) \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right) \times \left(\bigcap_{t \in T} B_t \right) = \bigcap_{t \in T} (A_t \times B_t)$$

22. Igazoljuk, hogy

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

Milyen A, B, C és D halmazokra áll fenn egyenlőség?

23. Igazoljuk, hogy

$$a) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$b) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$c) (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$$

III. HALMAZELEMÉLETI ALAPFOGALMAK

d) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

e) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

f) $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$, ahol $A \subseteq C$ és $B \subseteq D$

g) $E^2 - (A \times B) = [(E - A) \times E] \cup [E \times (E - B)]$,

h) $X \times Y - (A \times B) = [(X - A) \times Y] \cup [X \times (Y - B)]$,

ahol $A \subseteq X$ és $B \subseteq Y$

i) $(\bigcup_{k \in K} A_k) \times (\bigcup_{t \in T} B_t) = \bigcup_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$

j) $(\bigcap_{k \in K} A_k) \times (\bigcap_{t \in T} B_t) = \bigcap_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$

! 24. Legyen $A, B \neq \emptyset$ és $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$.
Igazoljuk, hogy $A = B = C = D$!

IV. SZÁMOSSÁG

1. Legyen az A alaphalmaz az egész számok halmaza, B pedig a páros számok halmaza. Egyenlő számosságu-e a két halmaz?
2. Mekkora az alábbi halmazok számossága?
 - a) 2 egész kitevőjű hatványainak a halmaza.
 - b) 2 racionális kitevőjű hatványainak a halmaza.
 - c) 2 valós kitevőjű hatványainak a halmaza.
3. Megegyezik-e a racionális számok Q halmazának és a $[0,1]$ intervallumbeli racionális számok halmazának a számossága?
4. Egyenlő számosságuak-e az alábbi halmazok?
 - a) A egy egyenes pontjainak a halmaza, B pedig egy egységsugarú félkör vonal pontjainak a halmaza.
 - b) A egy egységnyi hosszúságú szakasz pontjainak a halmaza, B pedig egy adott egyenes pontjainak a halmaza.
5. A H halmazt azok a $[0,1]$ intervallumbeli valós számok alkotják, amelyeknek végtelen tizedestört alakjában minden második tizedesjegy 0. Határozzuk meg H számosságát!
6. Megszámlálható-e az irracionális valós számok halmaza?
7. Mekkora az alábbi halmazok számossága?
 - A) A racionális számok $[a,b]$ intervalluma $a < b$ esetén.
 - B) a) Az (x,y) párok halmaza, ahol x és y egész szám.
b) Az (x,y) párok halmaza, ahol x és y racionális szám.
c) Az (x,y) párok halmaza, ahol x és y valós szám.
 - C) a) A sík egész koordinátájú pontjainak a halmaza.
b) A sík racionális koordinátájú pontjainak a halmaza.
c) A sík valós koordinátájú pontjainak a halmaza.
 - D) a) Az egész szám n -esek halmaza.
b) A racionális szám n -esek halmaza.
c) A valós szám n -esek halmaza.
8. Legyen A véges, B megszámlálhatóan végtelen, C pedig kontinuum számosságu halmaz. Mekkora az alábbi halmazok számossága?
 - a) $A - B$
 - b) $B - A$

IV. SZÁMOSSÁG

c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

d) $(A - B) \cap (A - C)$

e) $(C - A) \cup (C - B)$

9. Legyen az E alaphalmaz kontinuum számosságú. $A \subseteq E$ véges, $B \subseteq E$ megszámlálhatóan végtelen, $C \subseteq E$ kontinuum. Mekkora az alábbi halmazok számossága?

a) $\bar{C}$ b) $\bar{A}$ c) $\bar{B}$ d) $C \cap (\overline{A \cap C})$ e) $C \cup (\overline{A \cap C})$

f) $C \cap (\overline{A \cup C})$ g) $C \cup (\overline{A \cup C})$ h) $A \cup B \cup C$

i) $[(A - B) \cap (B - C)] \cup (C - A)$

j) $[(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)] - (A \cap B \cap C)$

!10. Igazoljuk, hogy $(0,1) \sim [0,1] \sim (0,1] \sim [0,1)$!

!11. Igazoljuk, hogy a valós számegyenes közöspont nélküli (a,b) , $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ intervallumai tetszőleges halmazának számossága megszámlálható!

!12. Igazoljuk, hogy ha A a valós számok részhalmaza, és létezik $\delta > 0$ úgy, hogy bármely két különböző A -beli x és y elemre $|x - y| \geq \delta$, akkor A megszámlálható!

!13. Igazoljuk, hogy megszámlálható halmaz összes véges részhalmazának a halmaza megszámlálható!

14. H a racionális számokból álló végtelen sorozatok halmaza (a sorozatban az elemek ismétlődhetnek). Vizsgáljuk meg, hogy mi a viszony H számossága és a racionális számok halmazának számossága között.

15. Igazoljuk, hogy az egész együtthatós legfeljebb negyedfoku polinomok halmaza megszámlálható!

16. Igazoljuk, hogy az egész együtthatós egyváltozós polinomok halmaza megszámlálható!

17. Legyen A azoknak a valós számoknak a halmaza, amelyek egész együtthatós egyváltozós polinomok gyökei, azaz algebrai számok. Igazoljuk, hogy A megszámlálható számosságú!

18. Bizonyítsuk be, hogy van olyan valós szám, amelyik nem algebrai!

!19. Legyen $A \supseteq A_1 \supseteq A_2$ és $A \sim A_2$. Igazoljuk, hogy $A \sim A_1$!

!20. Bizonyítsuk be, hogy véges halmaz egyetlen valódi részhalmazával sem ekvivalens!

!21. Igazoljuk, hogy egy halmaz akkor, és csak akkor végtelen, ha ekvivalens valamelyik valódi részhalmazával!

! 22. Bizonyítsuk be, hogy

- a) ha A végtelen és B megszámlálható, akkor $(A \cup B) \sim A$.
- b) ha A végtelen és nem megszámlálható, B megszámlálható, akkor $(A - B) \sim A$.

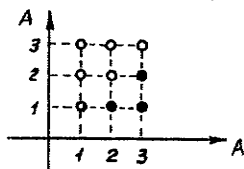
V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

1. A természetes számok halmazán értelmezett következő relációk milyen tulajdonságokkal rendelkeznek?

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| a) $a = b$, | b) $a \neq b$, |
| c) $a < b$, | d) $a \leq b$, |
| e) $a > b$, | f) $a \geq b$, |
| g) a osztója b -nek, | h) a valódi osztója b -nek, |
| i) a többszöröse b -nek. | |

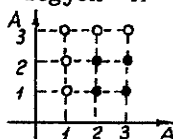
2. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria és tranzitivitás szempontjából az alábbi relációkat! Keressük meg az alaphalmaznak az adott reláció értelmében összehasonlíthatatlan elemeit is!

- a) Legyen T a természetes számok halmaza, $a, b \in T$.
 $aRb \iff b$ a -val osztva páros maradékot ad.
- b) Legyen V a valós számok halmaza, $a, b \in V$.
 aRb akkor és csak akkor, ha van olyan k egész szám, hogy $a - b = 2k$.
- c) Legyen T a természetes számok halmaza, $t_1, t_2 \in T$.
 $t_1 R t_2 \iff t_2 - t_1 = 4n$, ha létezik ilyen n egész szám.
- d) Legyen V a valós számok halmaza, $x, y \in V$.
 $xRy \iff x - y = 2$.
- e) Legyen V a valós számok halmaza, $a, b \in V$.
 aRb akkor és csak akkor, ha van olyan k pozitív egész szám, hogy $a - b = 2k + 1$.
- f) $a \equiv b \pmod{m}$, azaz a és b az m természetes számmal osztva ugyanazt a maradékot adja.
- g) Legyen V a valós számok halmaza. Defináljuk V részhalmazai között a következő relációt: $A R B$ akkor és csak akkor, ha $A \times B$ megszámlálható számosságú.
- h) Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ azaz

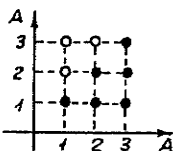


V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

- i) Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (2, 2)\}$



- j) Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$



3. Milyen alaphalmazon tranzitívek az alábbi relációk?

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| a) a fivére b -nek, | b) a testvére b -nek, |
| c) a osztálytársa b -nek, | d) a iskolatársa b -nek, |
| e) a apja b -nek, | f) a anyja b -nek. |

4. A valós számok halmazán definiáljuk az R relációt a következő módon:

$$aRb \iff (a - b) \text{ racionális szám.}$$

Igazoljuk, hogy R ekvivalencia reláció!

5. Legyen A a sík összes egyenesének a halmaza. Ekvivalencia relációk-e az alábbiak?

- egyenesek párhuzamossága;
- egyenesek merőlegessége;
- egyenesek metszése.

6. A síkidomok egybevágósága ill. hasonlósága ekvivalencia reláció-e?

7. Legyen N a természetes számok halmaza. Az N és N^2 halmazokon definiáljuk az R_m , Q és S relációkat a következő módon:

a) $(a, b) \in R_m \iff m \text{ osztója } a - b \text{-nek } (m > 0 \text{ egész})$;

b) $((a, b), (c, d)) \in Q \iff a + d = b + c$;

c) $((a, b), (c, d)) \in S \iff [(a \cdot d = b \cdot c) \text{ és } b \neq 0 \text{ és } d \neq 0] \text{ vagy } (a = c, b = 0, d = 0)$.

Igazoljuk, hogy R_m , Q és S ekvivalencia relációk!

8. Legyen E az egész számok halmaza. Értelmezzük E -n a következő relációt:

$$mRn \iff m + n \text{ páros szám } (m, n \in E).$$

(A 0 -t is páros számnak tekintjük) Vizsgáljuk meg, hogy a fenti reláció ekvivalencia reláció-e!

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

9. Egy 32 fős társaságban minden személy legfeljebb 10 emberrel fogott kezét. Igazoljuk, hogy akad köztük 3 személy, akik ugyanannyiszor fogtak kezét! Akad-e köztük 4 ilyen személy?
- ! 10. Adjunk meg olyan bináris relációt, mely
- a) reflexív, szimmetrikus és nem tranzitív ;
 - b) reflexív, antiszimmetrikus és nem tranzitív;
 - c) reflexív, tranzitív és nem szimmetrikus;
 - d) antiszimmetrikus, tranzitív és nem reflexív.
11. Legyen f tetszőleges $f : A \rightarrow B$ függvény és $Q = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$. Igazoljuk, hogy Q ekvivalencia reláció A -n!
- ! 12. Igazoljuk, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető az A halmaz összes osztályozásai és az A -n értelmezett ekvivalencia relációk között! (Az $\{A_i : i \in I\}$ halmazcsaládot A osztályozásának nevezzük, ha $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ és az A_i halmazok páronként diszjunktak.)
13. Igazoljuk, hogy minden olyan reláció, mely egyidejűleg szimmetrikus és antiszimmetrikus, tranzitív is!
- ! 14. Igazoljuk, hogy az A -n értelmezett ekvivalenciák bármely rendszereinek közös része is ekvivalencia reláció!
15. Legyen V a valós számok halmaza. Értelmezzük a $<$ és $\leq$ relációkat a szokásos módon. Igazoljuk, hogy
- a) $<$ antireflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és önmaga kivételével V minden eleme összehasonlítható a segítségével;
 - b) $\leq$ reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és V minden eleme összehasonlítható a segítségével.
- A továbbiakban az a) pont tulajdonságaival rendelkező minden relációt antireflexív teljes vagy lineáris rendezésnek nevezünk, a b) pont tulajdonságaival rendelkezőket pedig reflexív teljes rendezésnek.
16. Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathcal{P}(X)$ pedig X összes részhalmazának a halmaza. Igazoljuk, hogy
- a) $\subsetneq$ antireflexív, antiszimmetrikus és tranzitív $\mathcal{P}(X)$ -n
 - b) $\subseteq$ reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív $\mathcal{P}(X)$ -n. A továbbiakban az a) pont tulajdonságaival rendelkező minden relációt antireflexív részben rendezésnek, a b) pont tulajdonságaival rendelkező relációkat pedig reflexív részben rendezésnek nevezzük.
- ! 17. A számítógéppontban a kérdéses délután 5 gépkezelő volt szolgálatban. A gépterembe egyenként mentek be, hogy a gép munkáját ellenőrizzék. A gépterem ajtajánál fotocellás számláló volt elhelyezve, amely rögzítette, hogy milyen időpontban és hányan haladtak el előtte. A felügyelő az időpontok rögzítése alapján megállapította, hogy az utolsó előttinek

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

érkező személy felelős a gép hibás működéséért. Ezért meg kell állapítani az érkezési sorrendet. A kérdéses személyek nevét L, M, P, R, F betűkkel jelölte. A gyanúsítható személyek kihallgatásakor a következőket tudta meg:

"L előbb jött, mint P. Amikor P megjött, M már ott volt. F jött be legelőször. Amikor M bejött, R kabátja már a fogason lógott L M után érkezett." Ki a tettes?

18. Legyen A a sik egy adott sokszögével hasonló összes sokszög halmaza. Értelmezzük az R relációt a következő módon: bármely $a, b \in A$ esetén aRb jelentse azt, hogy a b sokszög teljes egészében az a sokszög belsejébe esik. Rendezési reláció-e az R reláció?
19. Ciklikus relációnak nevezzük az A, B és C elemek közt fennálló alábbi tulajdonságu relációt:

$$A R B, B R C \implies C R A.$$

Ciklikus relációk-e az ekvivalencia és rendezési relációk?

20. Állapítsuk meg, hogy az előző feladatokban szerelő relációk közül melyek rendezési relációk!
- ! 21. A Petőfi hid lezárásával egyidejűleg egyirányúsították a Bertalan utcát. Jelöljük A -val a Müegyetem rkp. és a Bertalan utca kereszteződési pontját, B -vel a Bertalan utca és a Sztoczek utcáért, C -vel pedig a Sztoczek utca és az Egri József utca metszéspontját. Az utépitők a B pontot lezárták, de az A -t nem. Kérdés, hogy elhajthat-e a C pontba az az autóvezető, aki az A pontban rátér a Bertalan utcára? A hatóságok és az utépitők együttesen milyen relációt hoztak létre az $\{A, B, C\}$ halmazon?
- További utvonalak egyirányúsításával és csomópontok lezárásával létrehozhatunk-e antireflexív teljes rendezést? Milyen tulajdonságu teljes rendezés esetén lehet eljutni az A pontból a C pontba?

22. Értelmezzük az R és Q relációkat az alábbi módon:

$$a) (a, b) R (c, d) \iff (a < b) \wedge (c < d)$$

$$b) (a, b) Q (c, d) \iff (a < b) \vee ((a = b) \wedge (c < d))$$

Rendezési relációkat értelmeztünk-e?

23. Három lány: Dóra, Hanna, Vera és három férfi: Balázs, Dénes és Tibor jó ismerősök és esküvőjüket is egyszerre akarják megtartani. Ki kit vesz el, ha tudjuk, hogy Tibor Dóra fivére, Tibor a férfiak, Vera a nők közül a legidősebb? Mindegyik párnál a partnerek korának összege ugyanaz a szám, pedig mind a hatan különböző koruak. Dénes és Hanna együtt annyi idős, mint Balázs és Dóra.

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

24. Egy kiállításról eltűnt egy értékes festmény. 8 gyanúsítottról a nyomozás a következőket állapította meg: A kérdéses időpontban András hangversenyre ment. Béla Olgával töltötte az estét. Csaba nem is látta Rozit. Panni moziban volt, Rozi viszont színházban. A társasághoz tartozik még Rezső és Sári. Mindegyik fiúnak egy-egy lánnyal volt közös programja. Az egyik pár kiállításon volt. Ki kivel volt és hol? Kik lehetnek a tettesek?

! 25. Legyen $R \subseteq A \times B$ tetszőleges reláció, továbbá $A_i \subseteq A$ és $R(A_i) = \{b \in B : \text{ha } \exists a_i \in A_i, \text{ hogy } a_i R b\}$, ahol $i = 1, 2$.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak!

- a) $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$ b) $R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$
c) $R(A_1 - A_2) = R(A_1) - R(A_2)$

26. A és B legyenek véges m ill. n elemű halmazok.

- a) Hány bináris reláció létezik az A és B halmazok elemei között?
b) Hány A-t B-be leképező függvény létezik?
c) Hány egy-egy értelmű A-t B-be leképező függvény létezik?
d) Milyen m és n esetén létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés A és B között?

! 27. Legyen N a természetes számok halmaza. Értelmezzük N-en az R relációt (azaz $R \subseteq N \times N$) a következőképp:

$$nRm \iff m = n + 1.$$

- a) R függvény-e, és ha igen, milyen tulajdonságokkal rendelkezik (szürjektív, injektív ill. bijektív-e¹)?
b) Határozzuk meg R^{-1} -t és állapítsuk meg, hogy függvény-e²?
c) Mi R ill. R^{-1} értelmezési tartománya és értékkészlete?
d) Teljesülnek-e R-re a 25. feladat egyenlőségei, ha $A_1 = B_1 = \{1\}$ és $A_2 = B_2 = N$.

28. Igazoljuk, hogy ha $A \subseteq B$, akkor $f(A) \subseteq f(B)$ tetszőleges f függvényre!

29. Igazoljuk, hogy tetszőleges f függvényre
 $f(A) = \emptyset \iff A \cap D_f = \emptyset$, ahol D_f az f értelmezési tartománya!

1. Az $f: X \rightarrow Y$ függvényt

- a) szürjektívnek nevezzük, ha $f(X) = Y$.
b) injektívnek nevezzük, ha $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$.
c) bijektívnek nevezzük, ha szürjektív is és injektív is.

2. Tetszőleges $R \subseteq A \times B$ reláció esetén R^{-1} a következő relációt jelenti:

$$(a, b) \in R^{-1} \iff (b, a) \in R.$$

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

30. Igazoljuk, hogy tetszőleges f függvényre

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

31. Igazoljuk, hogy tetszőleges f függvényre

a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B),$

b) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i),$

c) $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B),$

és ezek a tartalmazások csak egy-egy értelmű függvény esetén helyettesíthetők egyenlőséggel.

32. Igazoljuk, hogy ha $A \subseteq D_f$ és $B \subseteq f(D_f)$, akkor

a) $A \subseteq f^{-1}(f(A));$

b) $f(f^{-1}(B)) = B;$

c) $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B));$

d) $f(A) \cap B = \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) = \emptyset;$

e) $f(A) \subseteq B \iff A \subseteq f^{-1}(B).$

33. Igazoljuk, hogy ha f A -t B -be leképező függvény és g pedig B -t C -be képezi le, akkor $f \circ g$ A -t C -be leképező függvény!

34. Legyenek f és g függvények. Milyen feltételek esetén lesz

a) f^{-1} függvény, ahol f^{-1} az f inverz relációja;

b) $f \circ g$ egy-egy értelmű függvény?

35. Legyen $\varphi: A \rightarrow B$ kölcsönösen egyértelmű. Igazoljuk, hogy

a) φ^{-1} kölcsönösen egyértelmű B és A között;

b) $\varphi^{-1} \circ \varphi = I_B^1;$

c) $\varphi \circ \varphi^{-1} = I_A.$

36. Az E nem üres halmaz tetszőleges részhalmazára definiáljuk az alábbi függvényt:

$$H_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in A \\ 0 & \text{ha } x \in E - A. \end{cases}$$

¹ I_B -val jelöljük az egyenlőség relációt az B alaphalmazon:

$$(a, b) \in I_B \iff a = b, \text{ ahol } a, b \in B.$$

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

Igazoljuk, hogy

$$\boxed{a)} H_{A \cap B}(x) = H_A(x) \cdot H_B(x);$$

$$b) H_{A \cup B}(x) = H_A(x) + H_B(x) - H_A(x) \cdot H_B(x);$$

$$c) H_{A - B}(x) = H_A(x)(1 - H_B(x)).$$

!37. Legyen $R \subseteq A \times B$ tetszőleges reláció. Igazak-e az alábbi állítások $B_1, B_2 \subseteq B$ esetén?

$$a) R^{-1}(B_1 \cup B_2) = R^{-1}(B_1) \cup R^{-1}(B_2);$$

$$b) R^{-1}(B_1 \cap B_2) = R^{-1}(B_1) \cap R^{-1}(B_2);$$

$$c) R^{-1}(B_1 - B_2) = R^{-1}(B_1) - R^{-1}(B_2);$$

$$d) R^{-1}(B_1) \subseteq R^{-1}(B_2), \text{ ha } B_1 \subseteq B_2.$$

Igazak-e a fenti állítások, ha R speciálisan függvény ill. egy-egy értelmű függvény?

!38. Legyen $R_1 \subseteq A \times B$ és $R_2 \subseteq B \times C$. Defináljuk:

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) : \exists z (x, z) \in R_1 \text{ és } (z, y) \in R_2\}.$$

Jelöljük D_R -rel az R reláció értelmezési tartományát.

Igazoljuk, hogy

$$a) D_R = \emptyset \iff R = \emptyset \iff R(D_R) = \emptyset;$$

$$b) D_{R^{-1}} = R(D_R) \text{ és } R^{-1}(D_{R^{-1}}) = D_R;$$

$$c) D_{R_1 \circ R_2} = R_1^{-1}(R_1(D_{R_1}) \cap D_{R_2});$$

$$d) R_1 \circ R_2(D_{R_1 \circ R_2}) = R_2(R_1(D_{R_1}) \cap D_{R_2}).$$

!39. Igazoljuk, hogy tetszőleges bináris relációk esetén:

$$a) R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3;$$

$$b) (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1};$$

$$c) \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \circ Q = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ Q);$$

$$d) Q \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) = \bigcup_{i \in I} (Q \circ R_i);$$

$$e) Q \circ \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (Q \circ R_i);$$

$$f) \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) \circ Q \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ Q).$$

g) Igazoljuk, hogy az e) és f) pontokban a tartalmazás helyett nem írhatunk egyenlőséget!

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

! 40. Igazoljuk, hogy ha $R_1 \subseteq R_2$, akkor

$$a) Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2; \quad b) R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q; \quad c) R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}.$$

! 41. Igazoljuk a következő állításokat!

$$a) \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}; \quad b) \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}.$$

! 42. Válasszuk az X alaphalmazon egynél több elemének.

X -en az alábbi relációkat értelmezzük:

a nem egyenlőség relációt: $x N_x y \Leftrightarrow x \neq y$,

az egyenlőség relációt: $x I_x y \Leftrightarrow x = y$,

az identikus relációt: $R_x = X \times X$.

igazoljuk, hogy

$$R_x \circ (I_x \cap N_x) \neq (R_x \circ I_x) \cap (R_x \circ N_x).$$

! 43. Igaz-e minden $R \subseteq A \times B$ bináris relációra, hogy $R^{-1} = \bar{R}$, ahol $(x, y) \in \bar{R} \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B - R$?

! 44. Igazoljuk, hogy ahhoz, hogy az $R \subseteq A \times B$ reláció kölcsönösen egyértelmű legyen A és B között, szükséges és elégséges, hogy

$$R \circ R^{-1} = I_A \text{ és } R^{-1} \circ R = I_B \text{ legyen!}$$

45. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények és inverz relációjuk milyen tulajdonságokkal rendelkeznek!

$$a) y = x^2; \quad b) y = \sin(x); \quad c) y = -x^3; \quad d) y = 2x - x^2; \\ e) y = 2x/(1 + x^2); \quad f) y = x + [x].$$

! 46. Határozzuk meg R_R^{-1} -t, $R(I_R)$ -t, R^{-1} -t, $R \circ R$ -t, $R \circ R^{-1}$ -t és $R^{-1} \circ R$ -t az alábbi relációk esetén!

$$a) R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ és } x \text{ az } y \text{ osztója}\};$$

$$b) R = \{(x, y) : x, y \text{ valós szám és } x + y \leq 0\};$$

$$c) R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ és } y \text{ az } x \text{ osztója}\};$$

$$d) R = \{(x, y) : x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ és } y \geq \sin(x)\}.$$

! 47. Legyen R bináris reláció A -n. Igaz-e az, hogy $R = I_A$ akkor és csak akkor, ha $R \circ R_1 = R_1 \circ R = A$, ahol R_1 tetszőleges A -n értelmezett R_1 relációra!

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK₂

- !48. Igazoljuk, hogy az $R \subseteq A^2$ reláció akkor és csak akkor
- a) reflexív, ha $I_A \subseteq R$,
 - b) szimmetrikus, ha $R \subseteq R^{-1}$,
 - c) tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.
- !49. Igazoljuk, hogy az R_1 és R_2 ekvivalencia relációk $R_1 \cup R_2$ egyesítése akkor és csak akkor ekvivalencia reláció, ha $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$!
- !50. Igazoljuk, hogy ha R_1 és R_2 ekvivalencia relációk és $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, akkor $R_1 + R_2 = R_1 \circ R_2$, ahol $R_1 + R_2$ a legkisebb olyan ekvivalencia reláció, mely tartalmazza $R_1 \cup R_2$ -t! (Azaz minden ilyen tulajdonságának a közös része.)
51. Igazoljuk, hogy az R reláció az A halmazon akkor és csak akkor egyidejűleg ekvivalencia és reflexív részben rendezés, ha $R = I_A$!
- !52. Bizonyítsuk be, hogy ha R rendezés, akkor R^{-1} is ugyanolyan tulajdonságú rendezési reláció!
- !53. Igazoljuk, hogy ha R és S ugyanazon az A alaphalmazon ekvivalencia relációk, továbbá $R \circ S = S \circ R$, akkor $R \circ S$ is ekvivalencia reláció A -n!
- !54. Legyen R tetszőleges reláció az A alaphalmazon. Igazoljuk, hogy $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \dots$ tranzitív reláció, és az A alaphalmazon értelmezett bármely olyan tranzitív reláció tartalmazza, melynek R részhalmaza!
- !55. Legyen R tetszőleges reláció az A alaphalmazon. Igazoljuk, hogy $S = R \cup R^{-1} \cup I_A$ a legkisebb olyan reflexív és szimmetrikus reláció, mely tartalmazza R -t! (Legkisebb a 50. feladat értelmében.)
- !56. Legyen R tetszőleges reláció az A alaphalmazon. Határozzuk meg a legkisebb R -t tartalmazó ekvivalencia relációt A -n! (Legkisebb a 50. feladat értelmében.)
- !57. Bizonyítsuk be, hogy ha R és S ekvivalencia relációk, akkor $R \circ S$ reflexív, de nem szükségképpen szimmetrikus és tranzitív! Viszont, ha szimmetrikus, akkor tranzitív is.
- !58. Mutassuk meg, hogy ha R ekvivalencia reláció, akkor $T = R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \dots$ is az!

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

- !(59.) Igazoljuk, hogy ha az R_1 és R_2 relációk reflexívek, akkor az $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} és $R_1 \circ R_2$ relációk is!
- !(60.) Igazoljuk, hogy ha az R_1 és R_2 relációk antireflexívek, azaz segítségével az alaphalmaz egyetlen eleme sem hasonlítható össze önmagával, akkor az $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ és R_1^{-1} relációk is ilyen tulajdonságúak! Viszont az $R_1 \circ R_2$ szorzat nem szükségképp antireflexív.
- !(61.) Igazoljuk, hogy ha R_1 és R_2 szimmetrikus relációk, akkor az $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} és $R_1 \circ R_1^{-1}$ relációk is!
- !(62.) Igazoljuk, hogy az $R_1 \circ R_2$ szorzat akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$!
- !(63.) Legyen $R_1, R_2 \subseteq A^2$. Igazoljuk, hogy
- a) ha az R_1 és R_2 relációk antiszimmetrikusak, azaz aR_1b és bR_1a egyidejűleg csak $a = b$ esetén állhat fenn, akkor antiszimmetrikusak az $R_1 \cap R_2$ és R_1^{-1} relációk is.
 - b) az R_1 és R_2 antiszimmetrikus relációk $R_1 \cup R_2$ egyesítése akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha $R_1 \cap R_2^{-1} \subseteq I_A$.
- !(64.) a) Adjunk meg olyan bináris relációt, amely szimmetrikus tranzitív és nem reflexív!
- b) Igazoljuk, hogy ha R tranzitív és szimmetrikus reláció az A halmazon és $D_R \cup R(D_R) = A$, akkor R ekvivalencia!
- !(65.) Igazoljuk, hogy ha R ekvivalencia, akkor R^{-1} is az!
- !(66.) Legyen $R \subseteq A^2$. Igazoljuk, hogy
- $$R \text{ ekvivalencia} \iff (R \circ R^{-1}) \cup I_A = R !$$
- !(67.) Igazoljuk, hogy ha R_1 és R_2 ekvivalenciák A -n, akkor
- a) $R_1 \circ R_1 = A^2 \iff R_1 = A^2$;
 - b) $R_1 \circ R_2 = A^2 \iff R_2 \circ R_1 = A^2$.
- !(68.) Legyenek $<$ és $\leq$ az $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ halmazon a szokásos módon értelmezve. Igazoljuk, hogy $< \circ < \neq <$.
- $$\leq \circ < = <, \leq \circ \leq = \leq, \leq \circ \geq = N^2.$$

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

69. Igazoljuk, hogy I_A reflexív részben rendezés A -n!
- ! (70.) Mutassuk meg, hogy ha A és B reflexív részben rendezett halmazok és $f: A \rightarrow B$ olyan monoton függvény, mely kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít A és B között, akkor lehetséges, hogy f^{-1} nem monoton! Tekintsük azt az esetet, amikor B teljesen rendezett.
- ! (71.) Legyenek R és S az A halmaz teljes rendezései (tetszőleges sorrendben). Mikor lesz $R \circ S$ is ugyanilyen tulajdonságú lineáris rendezés?
- ! (72.) Legyen R_A reflexív részben rendezés az A halmazon, R_B pedig a B halmazon. Nevezzük az A és B reflexív részben rendezett halmazok Descartes szorzatának az $A \times B$ halmazt az alábbi R relációval:
- $$(a_1, b_1) R (a_2, b_2) \iff (a_1 R_A a_2 \text{ és } b_1 R_B b_2).$$
- a) Igazoljuk, hogy R reflexív részben rendezés $A \times B$ -n!
- b) Igaz-e az előbbi állítás antireflexív részben rendezésre vonatkozóan is?
- (73.) Legyen $f: A \times A \rightarrow A$ és minden $x, y, z \in A$ -ra $f(x, y) = f(y, x)$, $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$, $f(x, x) = x$.
Definiáljuk: $x R y \iff f(x, y) = x$. Igazoljuk, hogy
- a) R reflexív részben rendezés A -n;
- ! b) $f(x, y)$ x és y alsó határa az R relációra nézve!
- (74.) Létesítsünk lineáris rendezést az alábbi halmazokon:
- a) N^2 , ahol $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- b) komplex számok.
- (75.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges véges halmazt lehet lineárisan rendezni!
76. Igazoljuk, hogy ha R rendezés X -n és $A \subseteq X$, akkor $R \cap A^2$ ugyanolyan tulajdonságú rendezési reláció A -n!
- (77.) Legyen adott az M halmazon két művelet, $\cup$ és $\cap$, mely kielégíti az alábbi azonosságokat:
- $x \cup y = y \cup x$
 - $x \cap y = y \cap x$
 - $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$
 - $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup z$
 - $(x \cap y) \cup y = y$
 - $x \cap (x \cup y) = x$
- a) Igazoljuk, hogy tetszőleges $x, y \in M$ -re

$$x \cup y = y \iff x \cap y = x.$$

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

b) Definiáljuk: $xRy \Leftrightarrow x \cap y = x$. Igazoljuk, hogy az R reláció reflexív részben rendezés és az x és y elemek alsó ill. felső határa $x \cap y$ ill. $x \cup y$.

- ! **78.** Legyen M Bool-algebra $\cdot$ és $+$ műveletekre vonatkozóan. Definiáljuk: $aRb \Leftrightarrow a \cdot \bar{b} = 0$, ahol $\bar{b}$ b komplementere és $a \cdot 0 = 0$, $a + 0 = a$ minden $a \in M$ -re. Igazoljuk:
- Létezik M -nek legkisebb és legnagyobb eleme.
 - Minden $a \in M$ -re az $\bar{a}$ komplementer egyértelmű.
 - $b = \bar{a} \Leftrightarrow (a \cdot b = 0 \text{ és } a + b = 1)$, ahol 1 M legnagyobb eleme.

VI. VALÓS SZÁMOK, EGYENLŐTLENSÉGEK

1. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldást a száme egyenesen!

a) $5x + 3 \leq 2 - 4x$

b) $\frac{x-5}{2} - \frac{5}{6} \leq 1 - \frac{2-5x}{3}$

c) $4 - 3\left(\frac{2-5x}{4} - 2\right) < x$

d) $\frac{x-a}{3} + 4 > 1 - a$

e) $0 < 4 - 7x < 1$

f) $\frac{5x-1}{4} \leq x+1 < -2+2x$

g) $(x-4)(x-6) < 0$

h) $(3x+6)(5-3x) \leq 0$

i) $(2x-3)(4x-7) > 0$

j) $-3(x+1)(x+2) > 0$

k) $x^2 - 5x + 6 > 0$

l) $(5x-1)(3x-1) < (6x+1)(3x-1)$

m) $a^2 x^2 - 2x - 5 \leq 0$

n) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

o) $(x+1)(x+2)(x+3) > 0$

p) $(x-3)(x^2 - 4x - 12) > 0$

q) $(5x+1)(-x^2+9) < 0$

r) $(x-2)^2(x^2 - 5x - 6) < 0$

s) $-(3x-2)^{2n}(x^3 - 4x^2 - 21x) \geq 0$, ahol $n \geq 0$ egész szám

sz) $1 < x^2 < 4$

t) $4 < (2x+3)^2 < 9$

ty) $\frac{5}{4x+3} < 0$

u) $\frac{5}{4x-8} < 2$

v) $\frac{4x-1}{4x+1} < -1$

w) $\frac{(x-1)(x+2)}{x+3} < x-2$

x) $-3 < \frac{5}{4-x} < -1$

y) $-1 < \frac{x-1}{3-2x} < 2$

z) $\frac{\frac{x^2}{2} - 5x + 4}{x^2 - 6x - 7} > 0$

VI. VALÓS SZÁMOK, EGYENLŐTLENSÉGEK

2. Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket!

(a) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

(b) $|x + x_1 + \dots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)$

3. Oldjuk meg az alábbi abszolút értékes egyenlőtlenségeket!

a) $|2x + 3| < 2$

b) $|2 - x^2| > 3$

c) $|(2x - 6)(3x - 3)| < 6$

d) $|x + 1| + |4 - x| < 5$

e) $x + |x| < 4$

f) $x - |2x - 3| < 0$

g) $|x + 1| < 0,01$

h) $|x - 2| \geq 10$

i) $|x| > |x + 1|$

j) $|2x - 1| < |x - 1|$

k) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$

l) $|x + 2| - |x| > 1$

m) $||x + 1| - |x - 1|| < 1$

n) $|x(1 - x)| < 0,05$

4. Legyen a H alaphalmaz a valós számok halmaza. Mutassuk meg, hogy az m/n alakú törtekből álló számhalmazban, ahol m és n természetes számok, továbbá $m < n$, nincs sem legnagyobb, sem legkisebb elem! Határozzuk meg ennek a halmaznak az alsó- és felső határát!

5. Legyen a H alaphalmaz a valós számok halmaza, B pedig az $n/(n^2 + 1)$ alakú törtek halmaza, ahol n természetes szám. Van-e a B halmaznak legnagyobb ill. legkisebb eleme? Határozzuk meg ennek a halmaznak az alsó- ill. felső határát!

6. Legyen a H alaphalmaz a racionális számok halmaza, B pedig az $\{1/2, 2/3, 3/4, \dots, n/(n+1), \dots\}$ számhalmaz, ahol n természetes szám. Határozzuk meg B alsó és felső határát H -ban!

7. Legyen a H alaphalmaz a valós számok halmaza, B pedig az $r^2 < 2$ egyenlőtlenségnek eleget tevő racionális számok halmaza. Határozzuk meg B alsó és felső határát!

8. Legyen $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$, $B = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$. H mint 7.-ben.

Határozzuk meg az A és B halmazok felső és alsó határát!

9. Legyen a H alaphalmaz a valós számok halmaza, B pedig a valós számok tetszőleges $\{x_i : x_i \in H, i \in I\}$ részhalmaza. Vegyük ennek elemeit ellenkező előjellel, s az így adódó számok halmazát jelöljük $\{-x_i\}$ -vel ($i \in I$). Igazoljuk, hogy a) $\inf \{-x_i\} = -\sup \{x_i\}$,
b) $\sup \{-x_i\} = -\inf \{x_i\}$ ($i \in I$).

VI. VALÓS SZÁMOK, EGYENLŐTLENSÉGEK

10. Legyen a H alaphalmaz az egész számok halmaza.

$$A_1 = \{-3, -2, 0, 1\} \quad A_2 = \{-1, 0, 2\} \quad A_3 = \{-1, 0, 1\}$$

$$A_4 = \{-2, 0\} \quad A_5 = \{0, 2\}$$

Határozzuk meg az A_i és $A_i A_j = \{xy : x \in A_i, y \in A_j\}$ halmazok alsó és felső határát, ahol $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$!

- ! (11) Igazoljuk, hogy ha egy H részben rendezett halmazban az a és b elemeknek van legkisebb felső korlátjuk, akkor ez egyértelműen meg van határozva! Hasonló áll a legnagyobb alsó korlátra.

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

1. Legyen az alaphalmaz a természetes számok halmaza. Műveletek-e rajta az alábbiak? Ha igen, hány változósak, ha nem, választhatunk-e olyan alaphalmazt, melyben már műveletek lesznek?
a) összeadás; b) kivonás; c) szorzás; d) osztás; e) hatványozás.
2. Legyen az X alaphalmaz a pozitív valós számok halmaza, $a \in X$. Művelet-e ezen a halmazon $\pm \sqrt{a}$? Ha igen, hány változós?
3. Legyen az X alaphalmaz a logikai állítások halmaza, $A, B \in X$. Döntsük el, hogy műveletek-e az alábbiak, és ha igen, hány változósak:
a) $A \wedge B$; b) $A \vee B$; c) $\neg A$.
4. Legyen az X alaphalmaz egy tetszőleges Y halmaz összes részhalmazának a halmaza, $A, B \in X$. Döntsük el, hogy műveletek-e az alábbiak, és ha igen, hány változósak:
a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $\bar{A}$.
5. Legyen az A alaphalmaz a tér vektorainak a halmaza.
a) Minden vektorhoz rendeljük hozzá az abszolút értékét.
b) Minden $\underline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ és $\underline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektor párhoz az $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ valós számot.
Műveleteket értelmeztünk-e A -n, és ha igen, hány változósakat?
6. Legyen az X alaphalmaz az $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ alakú táblázatok, azaz mátrixok halmaza, ahol a és b tetszőleges valós számok. Definíáljuk:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)c & (a+b)d \\ (a+b)c & (a+b)d \end{pmatrix}.$$

a) A fenti művelet kommutatív-e, asszociatív-e?
b) Van-e közöttük olyan mátrix, amellyel bármely ilyen alakú mátrixot jobbról szorozva a bal oldali tényezőt kapjuk vissza, azaz van-e jobb egységelem?
! c) Van-e közöttük olyan, amellyel balról szorozva a jobb oldali tényezőt kapjuk vissza, azaz van-e bal egységelem?

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

- ! d) Ha létezik valamilyen típusu egységelem, lehet-e minden ilyen alaku mátrixhoz olyat találni, mellyel az adott mátrixot jobbról szorozva az egységelemet kapjuk, azaz van-e jobb inverz elem?
- ! e) Ha létezik valamilyen típusu egységelem, lehet-e minden ilyen alaku mátrixhoz olyat találni, mellyel az adott mátrixot balról szorozva az egységelemet kapjuk, azaz van-e bal inverz elem?
- ! f) Van-e köztük olyan, amellyel bármely ilyen alaku mátrixot jobbról, ill. balról szorozva a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot kapjuk?

7. Legyen az X alaphalmaz az $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alaku mátrixok halmaza, ahol a tetszőleges valós szám. Defináljuk

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Kommutativ-e, asszociativ-e a fenti művelet?

! b) Van-e jobb ill. bal egységelem?

! c) Létezik-e minden ilyen alaku mátrixnak jobb ill. bal inverze?

! 8. Legyen az A alaphalmaz a nem negatív i, j egész számokból alkotott $a = (i, j)$ párok halmaza. Defináljuk az alábbi műveleteket:

$$1. (i, j) * (k, \ell) = (i+k, 2^k \cdot j + \ell),$$

$$2. (i, j) * (k, \ell) = (i \cdot k, j \cdot \ell),$$

$$3. (i, j) * (k, \ell) = (1 + k - \min(j, k), j + \ell - \min(j, k)),$$

$$4. (i, j) * (k, \ell) = (i, \ell),$$

ahol $+$, $-$, $\cdot$, 2^k a valós számok körében bevezetett szokásos műveletek.

a) Kommutativok-e, asszociativok-e a fenti műveletek?

) Létezik-e jobb ill. bal egységelem?

c) Létezik-e az elemeknek bal ill. jobb inverze. Ha nem, megválasztható-e az alaphalmaz úgy, hogy létezzék?

9. Vizsgáljuk meg az alábbi műveleteket kommutativitás és asszociativitás szempontjából!

a) Az alaphalmaz $A = \{a, b\}$ két elemű és $a * a = a$, $a * b = b$, $b * a = a$ és $b * b = a$. Azaz $*$ műveleti táblája:

$*$	a	b
a	a	b
b	a	a

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

b) Az alaphalmaz $A = \{e, f, g, a\}$ négy elemű.

*	e	f	g	a
e	e	e	e	e
f	f	f	f	f
g	g	g	g	g
a	e	e	f	e

o	e	f	g	a
e	e	e	e	e
f	f	f	f	f
g	g	g	g	g
a	e	e	a	e

10. Legyen T a természetes számok halmaza. Az A alaphalmaz pedig az olyan kölcsönösen egyértelmű függvényeknek a halmaza, melyekre $D_f, f(D_f) \subseteq T$. A "o" művelet legyen a reláció szorzás.

a) Kommutatív-e, asszociatív-e ez a művelet?

! b) Igazoljuk, hogy az $e(n) = n$ függvény egységelem!

! c) Legyen $f(n) = n + 1$ és $g(n) = n - 1$. Mutassuk meg, hogy $f \circ g = e \neq g \circ f = h$ és $h \circ h = h$.

11. Legyen $X = \{0, 1\}$ két elemű halmaz, az alaphalmaz pedig $A = X \times X$. Definiáljuk: $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ -re

$$a * b = (\max(x_1, x_2), \min(y_1, y_2))$$

a) Készítsük el a "*" műveleti tábláját!

b) Kommutatív-e, asszociatív-e a művelet?

! c) Létezik-e egységelem?

! d) Vannak-e invertálható elemek?

12. Az egész számok körében definiáljuk az alábbi műveleteket:

1. $m * n = m^n$

2. $m * n = -n - m$

3. $m * n = m - n$

4. $m * n = m + n + m \cdot n$

5. $m * n = m + n - m \cdot n$

a) Kommutatív-e, asszociatív-e a fenti műveletek?

! b) Létezik-e jobb ill. bal egységelem?

! c) Vannak-e olyan elemek, melyeknek létezik jobb ill. bal inverze?

! d) Tekintsük az egész számokon értelmezett szokásos $\leq$ relációt. Monoton-e a fenti műveletek erre a relációra vonatkozóan, azaz $m \leq n$ -ből következik-e minden k egész számra, hogy $m * k \leq n * k$ és $k * m \leq k * n$?

13. Legyen az alaphalmaz a valós számok V halmaza. Definiáljuk $a, b \in V$ -re $a * b = 2a + 3b$.

a) Kommutatív-e, asszociatív-e a fenti művelet?

! b) Monoton-e a szokásos $\leq$ relációra nézve?

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

14. Legyen az A alaphalmaz a $[0,1]$ zárt intervallum. Defináljuk:
 $a * b = \min(a + b, 1)$.

- a) Kommutatív-e, asszociatív-e a fenti művelet?
- ! b) Létezik-e jobb ill. bal egységelem?
- ! c) Vannak-e olyan elemek, melyeknek létezik jobb ill. bal inverze?
- ! d) Monoton-e a szokásos $\leq$ relációra nézve?

15. Legyen az $A = \{a, b\}$ alaphalmaz két elemű. Értelmezzünk rajta két műveletet az alábbi azonosságokkal:

$$x, y \in A \quad x \cdot y = x \quad \text{és} \quad x + y = y.$$

- a) Kommutatív-e, asszociatív-e a fenti műveletek?
- ! b) Létezik-e rájuk vonatkozóan jobb ill. bal egységelem?
- ! c) Létezik-e rájuk vonatkozóan jobb ill. bal zéróelem?
- ! d) Vannak-e invertálható elemek?
- e) Disztributív-e egymásra vonatkozóan?
- ! f) Legyen $R = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$. Monoton-e az R relációra vonatkozóan?

! 16. Az alábbi halmazok mindegyikén két műveletet értelmezzünk

1. Legyen az A alaphalmaz az egész számokból álló (i, j) párok halmaza. A műveletek:

$$(i, j) * (k, t) = (i \cdot k, j \cdot t), \quad (i, j) \cdot (k, t) = (i+k, j+t).$$

2. Az alaphalmaz ugyanaz mint 1.-ben. A műveletek:

$$(i, j) * (k, t) = (i, t), \quad (i, j) \cdot (k, t) = (j, k).$$

3. Legyen az A alaphalmaz a nem negatív egész számok halmaza mod 3. A műveletek:

$$a * b = a \cdot b \mod 3, \quad a \cdot b = a + b \mod 3.$$

4. Legyen R a valós számok, N pedig az egész számok halmaza. Az $A = R \times N$ alaphalmazon értelmezzük az alábbi műveleteket:

$$(a, n) + (b, m) = (a+b, n+m),$$

$$(a, n) * (b, m) = (a \cdot b + n \cdot b + m \cdot a, n \cdot m).$$

(5) Legyen az A alaphalmaz az egész együtthatós egyváltozós polinomok halmaza. $a, b \in A$ -ra

$a + b$ a függvények összeadása: $a(x) + b(x)$,

$a \cdot b$ az összetett függvény képzés: $b(a(x))$.

6. Legyen az A alaphalmaz az $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmaza, ahol a és b tetszőleges valós számok. A műveletek:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix},$$

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.c-b.d & a.d+b.c \\ -a.d-b.c & a.c-b.d \end{pmatrix}.$$

- Kommutativak-e, asszociativak-e a műveletek?
- Vannak-e jobb ill. bal'egységelemek?
- Vannak-e jobb ill. balzéró elemek?
- Vannak-e invertálható elemek?
- Disztributív-e valamelyik művelet a másikkra nézve?

!17. Legyen az A alaphalmaz az $a + b \cdot \sqrt{2}$ alakú valós számok halmaza, ahol a és b racionális számok. Két műveletet értelmezünk:

$$(a + b \cdot \sqrt{2}) * (c + d \cdot \sqrt{2}) = a.c + 2.b.d + (a.d + b.c) \cdot \sqrt{2},$$

$$(a + b \cdot \sqrt{2}) \oplus (c + d \cdot \sqrt{2}) = a+c + (b+d) \cdot \sqrt{2}.$$

Definiáljuk $x, y \in A$ -ra, ahol $x = a + b \cdot \sqrt{2}$, $y = c + d \cdot \sqrt{2}$:

$$xR_1y \iff (a-c) + (d-b) \cdot \sqrt{2} \geq 0 \text{ a szokott értelemben,}$$

$$xR_2y \iff (a-c) + b.d \cdot \sqrt{2} \geq 0 \text{ a szokott értelemben.}$$

Igazoljuk, hogy

- mindkét művelet kommutatív és asszociatív,
- a $*$ művelet a $\oplus$ műveletre nézve disztributív,
- $1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ egységelem,
- $0 + 0 \cdot \sqrt{2}$ zéróelem,
- a zéróelem kivételével mindegyik elemnek van mindkét műveletre vonatkozóan egyértelmű inverze.
- Mind az R_1 mind az R_2 relációra nézve mindkét művelet mono-

ton

$$(xR_iy \text{ } i=1,2) \implies (\forall zR_i0 \text{ -ra } x*xzR_iyz \text{ és } \forall z \in A \text{ -ra}$$

$$x \oplus z R_i y \oplus z).$$

!18. Legyen egy A alaphalmazon két művelet $*$ és $+$ értelmezve az alábbi tulajdonságokkal:

- mindkét művelet kommutatív és asszociatív,
- a $*$ művelet disztributív a $+$ műveletre nézve,
- létezik olyan $e \in A$ elem, hogy $\forall a \in A$ -ra $e * a = a$,
- létezik olyan $0 \in A$ elem, hogy $\forall a \in A$ -ra $0 + a = a$ és $0 * a = 0$,
- A -n értelmezve van egy R reflexív teljes rendezési reláció, melyre mindkét művelet monoton, azaz $aRb \implies (\forall cR0 \text{ -ra } a*cRb*c \text{ és } \forall d \in A \text{ -ra } (a+d)R(b+d),$
- $\forall a \neq 0$ elemhez létezik olyan a^{-1} és $-a$ -val jelölt elemek, hogy $a * a^{-1} = e$ és $a + (-a) = 0$.

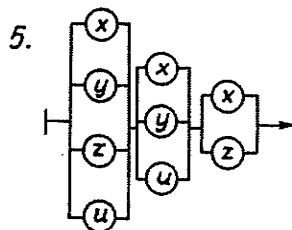
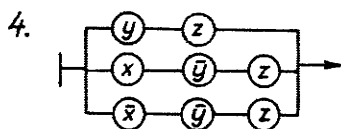
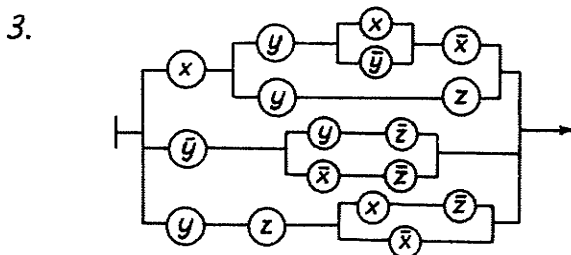
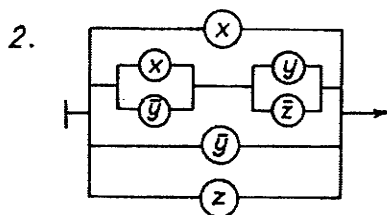
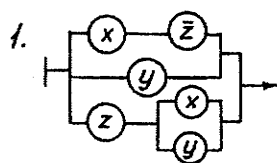
Igazoljuk, hogy ekkor $-e$ nem lehet négyzetelem, azaz nem létezik olyan $a \in A$ elem, melyre $a * a = -e$!

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

! 19. Az előző feladat állítását felhasználva igazoljuk, hogy a komplex számtestben nem lehet olyan R teljes rendezési relációt értelmezni, hogy a komplex számtest elrendezett testté váljék!

20. Legyen az A alaphalmaz egy áramforrás két sarka közé iktatható kapcsolók halmaza, mely tartalmaz minden kapcsolóval ellentett állású kapcsolót is, és van olyan kapcsoló is, amelyen át mindig folyik áram, és olyan is, melyen soha. Két műveletet értelmezzünk, a soros- és a párhuzamos kapcsolást.

- állapítsuk meg, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeznek ezek a műveletek!
- a műveletek tulajdonságait felhasználva egyszerűsítsük az alábbi kapcsolási rajzokat, ahol $\bar{x}$ -sal jelöljük az x kapcsolóval ellentétes működésű kapcsolót:



21. Állapítsuk meg, hogy az előző feladatokban szereplő algebrai struktúrák közül melyek félcsoportok, csoportok, gyűrűk ill. testek!

VIII. SZÁMSOROZATOK

1. ALAPFOGALMAK

- 1.** Állapítsuk meg, hogy az alábbi definíció ekvivalens-e az (a_n) sorozat konvergenciájának definíciójával!
Van olyan A szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ szám esetén minden n index esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

- 2.** Állapítsuk meg, hogy az alábbi definíciók valamelyike ekvivalens-e az (a_n) sorozat konvergenciájának definíciójával!

1. Van olyan A szám, hogy minden N természetes szám esetén van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy minden $n > N$ index esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

2. Van olyan A szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan N természetes szám, hogy minden $n \geq N$ index esetén

$$|a_n - A| \leq \varepsilon.$$

3. Van olyan A szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan n természetes szám, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

- 3.** Mely (a_n) sorozatokra áll fenn az alábbi állítások valamelyike?

1. Minden A szám esetén, minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N természetes szám, hogy minden $n > N$ index esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

2. Van olyan A szám és N természetes szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ szám esetén, minden $n > N$ indexre

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

4. Mely (a_n) sorozatok elégítik ki az alábbi követelményeket?

1. Minden A szám esetén van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy minden N természetes szám esetén van olyan $n > N$ index, melyre

$$|a_n - A| \geq \varepsilon.$$

2. Van olyan K szám, hogy minden N természetes szám esetén van olyan $n > N$ index, hogy

$$a_n < K.$$

3. Van olyan K szám, hogy minden N természetes szám esetén minden $n > N$ indexre fennáll, hogy

$$a_n < K.$$

5. Tegyük fel egy (a_n) sorozat kielégíti az alábbi követelmények egyikét.

1. Minden $K > 0$ szám esetén van olyan N természetes szám, hogy minden $n > N$ index esetén

$$|a_n| < K.$$

2. Minden N természetes szám esetén van olyan $K > 0$ szám, hogy minden $n > N$ index esetén

$$|a_n| < K.$$

Következik-e valamelyik esetben az, hogy (a_n) korlátos?

6. Definíció. Egy számsorozatot Cauchy-sorozatnak nevezünk, ha teljesül rá a Cauchy-féle konvergencia kritérium.

Legyen (a_n) sorozat az alábbi tulajdonsága:

minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan N természetes szám, hogy minden olyan n indexre, melyre $n > N$, fennáll, hogy

$$|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon.$$

1. Következik-e ebből, hogy (a_n) Cauchy-sorozat?
2. Ha (a_n) Cauchy-sorozat, kielégíti-e a fenti követelményt?

VIII. SZÁMSOROZATOK

! (7.) Ekvivalens-e valamelyik definíció a Cauchy-féle konvergencia kritériummal, ha igen melyik?

1. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan N természetes szám, hogy minden k természetes szám esetén, minden N -nél nagyobb n indexre fennáll, hogy

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

2. minden $\varepsilon > 0$ szám esetén minden k természetes számhoz van olyan N természetes szám, hogy minden N -nél nagyobb n indexre fennáll, hogy

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

8. Fogalmazzuk meg az alábbi definíciókat pozitív állítás formájában (ugy, hogy a definícióban ne szerepljen az a szó, hogy "nem").

- a) Divergens sorozatok
- b) Nem korlátos sorozatok
- c) Nem $+\infty$ -hez divergáló sorozatok
- d) Nem Cauchy-sorozatok.

9. 1. A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be az alábbi állításokat, és határozzunk meg egy $\varepsilon = 10^{-4}$ -hez tartozó küszöbindexet.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 = 0 \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - n^2}{8 + 2n^2} = -\frac{1}{2}$$

2. A $+\infty$ -hez való divergálás definíciója alapján bizonyítsuk be az alábbi állításokat, és határozzunk meg egy $K = 2000$ -hez tartozó küszöbindexet!

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 4n) = +\infty \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} = +\infty$$

3. A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozatok divergenssek!

$$\text{a) } a_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{b) } a_n = n^2 + (-1)^n \cdot n^2$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

2. KONVERGENCIAVIZSGÁLAT

10. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

1. Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,
és van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén
 $a_n \leq c_n \leq b_n$, akkor (c_n) is konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

2. Ha (a_n) konvergens sorozat és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ akkor $\forall k \in \mathbb{N}$
esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k,$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/k} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{1/k}.$$

3. Ha (a_n) konvergens sorozat, akkor létezik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|, \text{ és}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|.$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{a_n} \right| = +\infty.$$

2.1 Explicite adott sorozatok

Határozzuk meg az alábbi (a_n) sorozatok határértékét amennyiben az létezik!

11. 1. $a_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n - 1}$

2. $a_n = -\frac{3}{n^2}$

3. $a_n = n - n^2$

4. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$5. \quad a_n = 2 + 4n$$

$$6. \quad a_n = n^3 + (-1)^{n-1} \cdot n^3$$

$$7. \quad a_n = \frac{1}{2n+3}$$

$$8. \quad a_n = \frac{-4n^2 + 5}{5n^3 - 2n}$$

$$9. \quad a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 7n + 2}$$

$$10. \quad a_n = \frac{5n^2 - 2}{3n + 1}$$

$$11. \quad a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^5$$

$$12. \quad a_n = \sqrt[3]{\frac{2n^2 + 7n - 1}{16n^2 - 8n + 2}}$$

$$13. \quad a_n = \frac{\sqrt[3]{4n^2 + 3n}}{n + 2}$$

$$14. \quad a_n = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{1 - \frac{4}{n}}}, \quad n \neq 4$$

$$15. \quad a_n = \frac{\sqrt[4]{n+4}}{\sqrt[3]{n^2 + 2n - 3}}$$

$$16. \quad a_n = \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$$

$$17. \quad a_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$$

$$18. \quad a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(5n-1)^5}$$

$$19. \quad a) \quad a_n = (-1)^n \cdot \left(1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \right)$$

$$b) \quad b_n = \sqrt{a_n^2}$$

$$12. \quad 1. \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2}$$

$$2. \quad a_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{k}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$3. \quad a_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n}$$

$$4. \quad a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$$

$$13. \quad 1. \quad a_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!}$$

$$2. \quad a_n = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

$$3. \quad a_n = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$14. \boxed{1.} \quad a_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$$

$$2. \quad a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

$$3. \quad a_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$4. \quad a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$$

$$5. \quad a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$6. \quad a_n = n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

$$7. \quad a_n = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}$$

$$!15. 1. \quad a_n = \sqrt[3]{1 - n^3} + n$$

$$2. \quad a_n = \frac{\sqrt[k]{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \quad (k \in \mathbb{N} \text{ rögzített})$$

$$3. \quad a_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}}}$$

$$16. 1. \quad a_n = \frac{1}{4^n - 1}$$

$$2. \quad a_n = \frac{2^n - 4^n}{2^n + 4^n}$$

$$3. \quad a_n = n^2 + \frac{2}{4^n + 1}$$

$$4. \quad a_n = \frac{2n+3}{5n-1} \cdot \frac{3^n}{2^{2n}-1}$$

$$5. \quad a_n = \frac{\sqrt[n]{3}}{1 + 2\sqrt[n]{5}}$$

$$17. 1. \quad a_n = \frac{n^3}{2^n}$$

$$2. \quad a_n = \frac{n^2 - 8 \cdot 4^n}{n^2 + 6 \cdot 4^n}$$

$$3. \quad a_n = \sqrt[4]{\frac{2^n + 1}{n + 2^n}}$$

$$4. \quad a_n = \frac{1 + n^2 \cdot \sqrt[n]{3}}{2^n + 3^n}$$

$$18. \boxed{1.} \quad a_n = \sqrt[2n]{1 + \frac{1}{2n}}$$

$$2. \quad a_n = \sqrt[n]{n^2 + 100}$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$3. \quad a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n^2}}$$

$$4. \quad a_n = \sqrt[n]{n^{(1-n)}}$$

$$5. \quad a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n}}$$

$$6. \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

19. Állapítsuk meg, hogy mely a valós számok esetén van határértéke az alábbi (a_n) sorozatoknak, és számítsuk ki a megfelelő határértéket!

$$1. \quad a_n = \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right)^n$$

$$2. \quad a_n = \frac{1}{1 + a^{2n}}$$

$$3. \quad a_n = \frac{a^n}{1 + a^n} \quad (a \neq -1)$$

$$4. \quad a_n = \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$$

$$5. \quad a_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$$

$(a \neq 0)$

$$6. \quad a_n = \frac{a^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + a^{2n}}}$$

$(a \geq 0)$

$$! \quad 7. \quad a_n = \frac{a^n}{(1 + a)(1 + a^2) \dots (1 + a^n)}$$

$(a \geq 0)$

20. Legyen $0 < a < b < 1$.

Állapítsuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$1. \quad a_n = \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$$

$$2. \quad a_n = \frac{1}{a^n - b^n}$$

3. $b_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$ rögzítettek,

$$a_n = \sqrt[n]{b_1^n + b_2^n + \dots + b_k^n}$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben az létezik!

$$21. \textcircled{1.} a_n = \frac{n^3}{n!} \qquad 2. a_n = \frac{n^{10}}{\sqrt{n!}}$$

$$3. a_n = \frac{10^n}{n!} \qquad 4. a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\textcircled{5.} a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \textcircled{6.} a_n = \frac{n}{\sqrt{n!}}$$

$$22. \textcircled{1.} a_n = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{2n-1} \qquad 2. a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n$$

$$3. a_n = \left(\frac{n-3}{n-2} \right)^{5n} \qquad 4. a_n = \left(\frac{2n+8}{2n+5} \right)^{4n+8}$$

$$5. a_n = \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n \qquad 6. a_n = \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)^{2^n}$$

$$7. a_n = \left(\frac{2n+1}{n-1} \right)^n$$

$$23. \textcircled{1.} a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \qquad \textcircled{2.} a_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

$$\textcircled{3.} a_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right)^n \qquad \textcircled{4.} a_n = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^n$$

$$24. \textcircled{1.} a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \qquad 2. a_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$3. a_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2-1)} \qquad 4. a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$$

$$\textcircled{5.} a_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$\textcircled{6.} a) a_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) \qquad b) a_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

$$\textcircled{7.} a_n = \prod_{k=3}^n \left(1 - \frac{4}{k^2} \right)$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

25. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!

$$1. \quad a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

$$2. \quad a_n = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$$

$$3. \quad a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$$

$$4. \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$5. \quad a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$6. \quad a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$$

26. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából!

$$1. \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(0,5)^k}{k^2}$$

$$2. \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(1,1)^{-k}}{\sqrt{k}}$$

$$3. \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1-2k}{k+1}$$

$$4. \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$5. \quad a_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

2.2 Rekurzív sorozatok

27. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából, és ha van határértékük, számítsuk ki azt!

$$1. \quad a_1 = 1, \quad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{2} \quad (n \geq 2)$$

$$2. \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$3. \quad a_1 = 6, \quad a_n = 5 - \frac{6}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$4. \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2} \quad (n \geq 2)$$

$$5. \quad a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$6. \quad a_1 = -2, \quad a_n = (-1)^n a_{n-1} - 8 \quad (n \geq 2)$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$(7.) \quad a_1 = \sqrt{3}, \quad a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$8. \quad a_1 = -1, \quad a_n = -4 + 3a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$(9.) \quad a_1 = 1, \quad a_n = 1 - \frac{a_{n-1}}{2} \quad (n \geq 2)$$

$$(10.) \quad a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n-1}{n} \cdot a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$(11.) \quad a_1 = 5, \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1} + 5} \quad (n \geq 2)$$

$$(12.) \quad a_1 = 4, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 5}{6} \quad (n \geq 2)$$

$$(13.) \quad a_1 = 1, \quad a_n = n a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

28. Döntsük el az alábbi sorozatokról, hogy konvergensek-e, és ha igen állapítsuk meg határértéküket!

$$(1.) \quad \text{Legyen } 0 \leq c \leq \frac{1}{4} \text{ tetszőleges,}$$

$$a_1 = c, \quad a_n = c + a_{n-1}^2 \quad (n \geq 2)$$

$$! (2.) \quad \text{Legyen } c > 0 \text{ és } a_1 > 0 \text{ tetszőleges,}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}} \right) \quad (n \geq 2)$$

$$(3.) \quad \text{Legyen } c > 0 \text{ tetszőleges,}$$

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot c} \quad (n \geq 2)$$

$$(4.) \quad \text{Legyen } 0 < c < 1 \text{ tetszőleges,}$$

$$a_1 = c, \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2 \quad (n \geq 2)$$

! 29. Milyen a_1 érték mellett konvergensek az

$$a) \quad a_n = \frac{1}{4} (a_{n-1}^2 + a_{n-1}) \quad (n > 1)$$

és a

$$b) \quad a_n = 2 a_{n-1}^2 + a_{n-1} \quad (n > 1)$$

sorozatok, és mik a határértékek?

VIII. SZÁMSOROZATOK

! (30.) Legyen $b_1 = a$, $b_2 = b$,

$$b_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} + b_{n-2}) \quad (n \geq 3)$$

Bizonyítsuk be, hogy (b_n) konvergens és számítsuk ki a határértékét!

! 31. Legyenek $0 < b < a$ rögzített számok,

$$a_1 = a, \quad b_1 = b.$$

(1.) Legyen $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \geq 2),$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n \geq 2).$$

Bizonyítsuk be, hogy (a_n) és (b_n) konvergens,

$$\text{és } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(2.) Legyen $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \geq 2),$

$$b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \quad (n \geq 2).$$

Bizonyítsuk be, hogy (a_n) és (b_n) konvergenssek, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{ab}.$$

3. VEGYES FELADATOK

3.1 Konvergens sorozatok

! (32.) Bizonyítsuk be, hogy ha

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

! (33) Legyen $a_n > 0$, $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1} - a_n} < 1,$$

akkor (a_n) konvergens.

(34) Abból, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0,$$

következik-e, hogy (a_n) konvergens?

35. Legyen (a_n) pozitív tagú sorozat:

$$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \text{és}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

$$\text{akkor } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

b) Vizsgáljuk meg a) alapján a következő sorozatok határértékeit:

$$\text{b1. } a_n = a^n \quad a > 0 \text{ rögzített}$$

$$\text{b2. } a_n = \frac{n^k}{n!} \quad k \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$\text{b3. } a_n = \frac{a^n}{n!} \quad a > 0 \text{ rögzített}$$

$$\text{b4. } a_n = \frac{n^k}{n!} \quad a > 1 \text{ rögzített} \\ k \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$\text{b5. } a_n = \frac{n!}{n}$$

$$\text{b6. } a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

②. a) Bizonyítsuk be, hogy ha létezik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

$$\text{akkor} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

b) Vizsgáljuk meg a) alapján a következő sorozatok határértékeit:

$$\text{b1) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\text{b2) } a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^k} \quad k \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$\text{b3) } a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

③. a) Bizonyítsuk be, hogy ha létezik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1,$$

$$\text{akkor} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 0.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy ha létezik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = +\infty.$$

④. Mutassuk meg példákon keresztül, hogy

a) 1.a), 2.a) állítások nem fordíthatók meg

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ esetén semmit sem tudunk a

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n$ határértékről.

VIII. SZÁMSOROZATOK

36. Legyen $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. a) Ha van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén

$$a_n \leq b_n, \quad \text{és a}$$

$$c_n = \sum_{k=1}^n b_k \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ sorozat konvergens,}$$

$$\text{akkor a } d_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ sorozat is konvergens.}$$

b) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 0$, akkor a

$$d_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens.

$$2. \text{ a) Ha a } d_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$b) \text{ Ha a } d_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, akkor konvergens az

$$f_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

sorozat is.

37. 1. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

- Ha egy sorozat minden részsorozata konvergens, akkor minden részsorozatnak azonos a határértéke.
- Ha egy monoton sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor az egész sorozat konvergens.
- Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

VIII. SZÁMSOROZATOK

- ②. Bizonyítsuk be, hogy (a_n) konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ valamint}$$

(a_n) minden monoton részsorozata növekedő, akkor a sorozatnak csak véges sok A -nál nagyobb eleme van.

- ③. Lehetséges-e, hogy egy (a_n) sorozatnak nincs konvergens részsorozata, de $(|a_n|)$ konvergens?

- ! 4. Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyre

(a_{2k}) és (a_{2k-1}) konvergenssek,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = A, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = B.$$

Bizonyítsuk be, hogy

a) ha $A = B$, akkor (a_n) konvergens;

b) ha $A \neq B$, akkor (a_n) -nek

minden konvergens részsorozata vagy A -hoz, vagy B -hez konvergál;

- ④. ha (a_{3k}) is konvergens, akkor (a_n) konvergens.

5. Legyen (a_n) konvergens, $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ esetén, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot a_{4n^2+2} + 2a_{2n+3}) = 8. \text{ Határozzuk meg}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ értékét!}$$

6. Milyen halmazalgebrai összefüggés van az alulról nem korlátos sorozatok halmaza és azon sorozatok halmaza között, melyeknek van $-\infty$ -hez divergáló részsorozata?

- ! 38. Legyen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, azaz f a természetes számokon értelmezett olyan függvény, melynek értékei is természetes számok.

Legyen (a_n) konvergens sorozat.

Mit mondhatunk $(a_{f(n)})$ konvergenciájáról?

- ③9. Legyen $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

$$\text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

Igaz-e, hogy

$$a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén?}$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

40. ① Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

- a) Egy konvergens számsorozat elemei között mindig van vagy legnagyobb, vagy legkisebb elem.
- b) Egy $+\infty$ -hez tartozó sorozat alsó határa mindig tagja a sorozatnak.

② Igaz-e, hogy konvergens sorozatnak mindig van legnagyobb és legkisebb eleme is?

3.2 Tetszőleges sorozatok

41. Bizonyítsa be a következő állításokat!

- a) Ha (a_n) monoton növekedő, nem korlátos, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

- b) Ha (b_n) korlátos és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$$

- c) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$,

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty.$$

- d) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ és (b_n) korlátos, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

42. 1. Mit állíthatunk az $(a_n + b_n)$ és az $(a_n b_n)$ sorozatokról, ha

(a_n) konvergens és (b_n) divergens?

2. Legyen (a_n) és (b_n) divergens sorozat.

(a) Mit állíthatunk az $(a_n + b_n)$ és az $(a_n b_n)$ sorozatokról?

(b) Lehet-e $(a_n + b_n)$ és $(a_n - b_n)$ egyszerre konvergens?

! (c) Ha $a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor lehetnek-e az $(a_n b_n)$ és az $(a_n + b_n)$ sorozatok egyszerre konvergenssek?

VIII. SZÁMSOROZATOK

3. Legyen (a_n) , (b_n) két tetszőleges sorozat, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$$

a) Következik-e ebből, hogy valamelyik konvergens, és határértéke 0 ?

b) Következik-e ebből, hogy valamelyiknek van 0 -hoz tartó rész-sorozata ?

4. Legyen (a_n) , (b_n) két tetszőleges sorozat és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Következik-e ebből, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0 ?$$

5. a) Konstruáljunk olyan (a_n) és (b_n) sorozatot, melyekre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = +\infty$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 1.$$

b) Konstruálhatóak-e olyan sorozatok, melyekre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = +\infty$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1.$$

43. Adjunk példát olyan sorozatokra, melyeknek

- nincs torlódási értéke,
- pontosan három torlódási értéke van,
- egyetlen torlódási értéke van, de nem konvergens,
- végtelen sok torlódási értéke van,
- minden valós szám torlódási értéke.

VIII. SZÁMSOROZATOK

(44.) Konstruáljunk olyan sorozatot, melynek egy előre adott sorozat minden eleme torlódási értéke!

Mik lesznek az így konstruált sorozat torlódási értékei?

! 45. Definíció

A valós számok kibővített halmazán értjük azt a halmazt, mely a valós számhalmazból és a $+\infty$, $-\infty$ szimbólumokból áll, és amely megőrzi a valós számok eredeti rendezését, valamint minden x valós szám esetén

$$-\infty < x < +\infty.$$

Jelölése: $\tilde{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

(A valós számok halmazának jelölése: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.)

Definíció

Legyen $A, B \in \tilde{\mathbb{R}}$ és vagy $A \notin \mathbb{R}$ vagy $B \notin \mathbb{R}$.

Legyen $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a négy alapművelet bármelyike.

Legyen (a_n) és (b_n) két olyan $\mathbb{R}$ -beli sorozat, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

Amennyiben a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n m b_n)$ határérték független (a_n) és (b_n)

választásától, definiáljuk $A m B$ értékét az

$$A m B = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n m b_n) \in \tilde{\mathbb{R}} \quad \text{képlettel.}$$

Definíció

$\tilde{\mathbb{R}}$ -on konvergensnek nevezzük egy $\mathbb{R}$ -beli (a_n) sorozatot, ha $\mathbb{R}$ -ben konvergens, vagy $+\infty$ -hez, vagy $-\infty$ -hez divergál.

(1.) $\tilde{\mathbb{R}}$ mely A, B elemeire és melyik m alapműveletre alkalmazható a fenti második Definíció, melyekre nem?

Állításainkat fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be!

2. Milyen - a valós számok halmazán érvényes - műveleti azonosságok maradnak érvényben $\tilde{\mathbb{R}}$ -on?

3. Bizonyítsuk be, hogy

a) Minden sorozatból kiválasztható $\tilde{\mathbb{R}}$ -on konvergens részsorozat.

b) Monoton sorozat $\tilde{\mathbb{R}}$ -on konvergens.

! 46. Definíció

Azt mondjuk, hogy egy sorozatnak a $+\infty$ ($-\infty$) torlódási értéke, ha van $+\infty$ -hez ($-\infty$ -hez) divergáló részsorozata.

VIII. SZÁMSOROZATOK

Definíció

Legyen E egy tetszőleges (a_n) sorozat összes torlódási értékeinek

halmaza (beleértve a $+\infty$ -t és a $-\infty$ -t is).

Jelölje

$$\begin{aligned} \sup E &= \begin{cases} E \text{ legkisebb felső korlátja, ha } E \text{ felülről korlátos} \\ +\infty, \text{ ha } E \text{ felülről nem korlátos} \\ \text{vagy } +\infty \in E \\ -\infty, \text{ ha } E = \{-\infty\} \text{ vagy} \\ E = \emptyset \end{cases} \\ \inf E &= \begin{cases} E \text{ legnagyobb alsó korlátja, ha } E \text{ alulról korlátos} \\ -\infty, \text{ ha } E \text{ alulról nem korlátos} \\ \text{vagy } -\infty \in E \\ +\infty, \text{ ha } E = \{+\infty\} \text{ vagy} \\ E = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

valamint $\sup (a_n) = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ illetve $\inf (a_n) = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

- E nem üres
- E zárt (tartalmazza összes torlódási pontját)
- $\sup E \in E$,
 $\inf E \in E$.
- (a_n) akkor és csak konvergens $\tilde{\mathbb{R}}$ -on, ha E egy pontból áll.

②. Bizonyítsuk be, hogy

$$\inf (a_n) \leq \inf E \leq \sup E \leq \sup (a_n)$$

③. a) Bizonyítsuk be, hogy

képezve minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a

$b_k = \sup \{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$ számot, ezek sorozatára fennáll, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \sup E.$$

b) Tekintsük a következő állításokat:

- $B \in E$;
- ha $x > B$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n < x$.

Bizonyítsuk be, hogy e két állítás akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$B = \sup E.$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

4. Mondjuk ki, és bizonyítsuk be a 3. -ban kimondott állítások megfelelőit $\inf E$ -re is!

! (47.) 1. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

a) Ha $\lim a_n > -\infty$ és $\lim b_n > -\infty$, akkor

$$\lim (a_n + b_n) \geq \lim a_n + \lim b_n.$$

b) Ha $a_n \geq 0, b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

és $\lim a_n > 0, \lim b_n > 0$, akkor

$$\lim a_n \cdot \lim b_n \leq \lim (a_n b_n).$$

c) Ha $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

d) Ha $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

$$\lim a_n \cdot \lim \frac{1}{a_n} = 1,$$

akkor (a_n) konvergens.

e) $\lim (-a_n) = -\lim a_n$.

2. Mondjuk ki és bizonyítsuk be az 1.-ben szereplő állítások megfelelőit a $\limsup$ -ra vonatkozóan!

3. Mutassunk példákat, melyek esetén az 1.a), b), és a 2. a), b) -ban szereplő egyenlőtlenségek szigorú egyenlőtlenségek!

! 48. (1.) Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

a) Ha (a_n) konvergens, akkor tetszőleges (b_n) esetén

$$\overline{\lim} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim} b_n.$$

b) Ha tetszőleges (b_n) sorozat esetén fennáll, hogy

$$b1) \overline{\lim} (a_n + b_n) = \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n, \quad \text{vagy}$$

$$b2) \overline{\lim} (a_n b_n) = \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n$$

(feltéve, hogy $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ -re),

akkor (a_n) konvergens.

VIII. SZÁMSOROZATOK

2. Mit mondhatunk (a_n, b_n) -ről, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0 ?$$

! (49.) Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) korlátos sorozat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = 0,$$

akkor

az $E = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right]$ intervallum minden pontja torlódási

értéke a sorozatnak!

! (50.) Konvergens-e az alábbi sorozat?

$$a_1 = 0, \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \quad (n \geq 1)$$

Ha nem, határozzuk meg $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ és $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ értékét!

! (51.) 1. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

a) Ha (a_n) konvergens sorozat, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

b) Ha $(a_n), (b_n)$ olyan sorozatok, melyekre

$$b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = +\infty,$$

valamint létezik és véges a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

2. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a) \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot n}$$

$$b) \quad b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

ahol $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ létezik.

3. Bizonyítsuk be a következő állítást!

Ha (a_n) , (b_n) olyan sorozatok, amelyekre

$$b_{n+1} > b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$$

valamint $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ létezik és véges, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

4. a) Igaz-e:

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = A$ létezik, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A.$$

b) Bizonyítsuk be: $\forall m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{1+m}.$$

c) Igaz-e az 1.a) állítás megfordítása?

!52. Legyen (a_n) pozitív tagú sorozat:

$$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ -re.}$$

1. Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) konvergens, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

2. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ létezik és véges, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

b) Vizsgáljuk meg a) alapján az alábbi sorozatok határértékét:

$$\text{b1) } a_n = \sqrt[n]{n} \quad \text{b2) } a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{b3) } a_n = \sqrt[n]{n!}$$

3. a) Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C \neq 0,$$

$$\text{akkor } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

b) Bizonyítsuk be a) alapján, hogy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = C < 1, \text{ akkor}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

c) Vizsgáljuk meg a) alapján a következő határértékeket:

$$\text{c1) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$\text{c2) } a_n = \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^n \quad k \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$\text{c3) } a_n = \sqrt[n^k]{n} \quad k \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

MEGOLDÁSOK ÉS ÚTMUTATÁSOK

1. FEJEZET

1. a) $A \wedge B$ b) $A \wedge \neg B$ c) $\neg A \wedge B$ d) $\neg A \wedge \neg B$
 e) $\neg(A \wedge B)$ f) $\neg A \vee \neg B$ g) $A \Rightarrow B$ h) $\neg B \Rightarrow \neg A$
 i) $A \Rightarrow \neg B$ j) $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)$ k) $A \Leftrightarrow B$
 l) $(A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$ m) $(\neg B \Rightarrow A) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
 n) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ o) $B \Rightarrow A$ p) $B \Rightarrow A$

2. e, f, i; g, h; j, k, q, r; l, m, n; o, p; : 9 különböző

3. c) Ha A, akkor B, de ha nem A, akkor C.

4. a) Jeles lesz a bizonyítvány és nem ad kerékpárt.
 b) az a. -beli eseten kívül még: ha nem lesz jeles a bizonyítvány és vesz egy kerékpárt.

5. a) $A \wedge B$:

	B	↑	↓
A	↑	↑	↓
	↓	↓	↓

$B \wedge A$

	B	↑	↓
A	↑	↑	↓
	↓	↓	↓

tehát $A \wedge B = B \wedge A$

6. a) helyes b) helyes c) hibás
 d) hibás e) helyes

7. a) 1. helyes 2. hibás 3. helyes

- b) 1. Csak azt az esetet kell megnéznünk, amikor az előtag igaz. Ellenkező esetben az implikáció igaz függetlenül attól, hogy mi az utótag értéke. Az előtag csak akkor igaz, ha mind A mind B logikai értéke igaz. Ekkor pedig az utótag, B igaz.

8. A)

- a) hibás b) helyes c) helyes d) hibás
 B)
 a) helyes b) hibás c) hibás d) helyes
 C)
 a) helyes b) helyes c) helyes d) helyes

I. A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

2. pl. A) a) $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B$

3. a helyeseknek.

4. C) a) , C)b) , C)c) és C)d).

9. **a)** Ha a változók helyébe bármiféle logikai értéket írunk, két eset lehetséges:

1. az előtag (premissza) értéke igaz. Mivel a következtetésforma helyes, ezért a konklúzió értéke is igaz. Tehát az implikáció is igaz.

2. az előtag hamis. Ekkor az implikáció az utótagtól függetlenül mindig igaz.

b) Az a) -hoz hasonlóan igazolható.

10. a), b) a 9.a) -hoz hasonlóan igazolható.

11. A tettes nem volt férfi, nem volt kistermetű, férfiruhát hordott és a szemtanu vallomása nem volt hiteles. Következtetésformák:

$$[(K \Rightarrow A) \wedge \neg A] \Rightarrow \neg K ,$$

$$(F \vee R) \wedge \neg F) \Rightarrow R \quad \text{és}$$

$$[(R \wedge H) \Rightarrow A) \wedge \neg A \wedge R] \Rightarrow \neg H$$

12. a) $A = \uparrow$, $B = \uparrow$, b) $C = \uparrow$ c) $A = \uparrow$, $B = \uparrow$, $C = \downarrow$

d) a 11. feladathoz hasonlóan.

13. Nem.

14. a) átlói merőlegesek és nem négyzet

b) Igen.

15. a) Legalább az egyik változó értéke 1.

b) $x < 3$ c) $x > 3$ d) $x < 3$ vagy $x > 5$ e) $x \neq 3$

f) $x \leq 3$ g) $x \geq 3$ h) $x = 3$.

i) Hittünk nem válik valóra, és vagy nem vagyunk bolondok vagy nem veszünk el.

j) Élet zengi be az iskolát, de az élet nem lesz derűs iskola.

k) Vagy nem vagyok király, vagy nem bírok nagy erővel, vagy nem adód és ugyanakkor nem veszem el erővel.

l) Holnap a gyerek lázas lesz vagy erősen köhög, és az orvost mégsem hívjuk ki.

m) Vagy holnap moziba megyünk bár jó idő is lesz és jó műsor a TV-ben, vagy nem megyünk moziba, akkor amikor nem lesz jó idő vagy jó műsor a TV-ben.

16. Mind a kettő helyes. Különbség köztük, hogy amit a)-ban egy konkrét lemezről állítottunk, azt b) általánosabban, minden dologra vonatkozóan fejezi ki. Megfordítható következtetésformák.

II. BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

17. d) és e)

18. a) ↓ b) ↓ c) ↑ d) ↑ e) ↑ f) ↓ g) ↓ h) ↑ i) ↓ j) ↑ k) ↑ l) ↑
m) ↓ n) ↑ o) ↓ p) ↑

19. a) P6 b) $\neg P9$ c) Pa d) $\neg Pb$ e) $\forall x Px$ f) $\neg \forall x Px$
g) $\forall x \neg Px$ h) $\neg \forall x \neg Px$ i) $\forall x (Px \vee \neg Px)$ j) $\forall x (Px \wedge \neg Px)$
k) $Pm \Rightarrow \neg Pn$ l) $\forall x (Px \Rightarrow \neg P(x+1))$

20. a) $\exists x Qx$ b) $\neg \forall x \neg Qx$ c) $\exists x \neg Qx$ d) $\neg \forall x Qx$
e) $\forall x (Qx \Rightarrow \neg Qx)$ f) $\neg \exists x (Qx \Rightarrow \neg Qx)$ g) $\forall x (Qx \vee \neg Qx)$
h) $\neg \exists x \neg (Qx \vee \neg Qx)$

Ugyanazt fejezik ki: a), b) ill. c), d) ill. g), h)

21. a) Egész szám b) Páros szám

II. FEJEZET

1. Direkt

2. (a) $n = 1$ -re igaz. Az öröklődéshez az

$$n^2(n+1)^2 / 4 + (n+1)^3 = (n+1)^2(n+2)^2 / 4$$

egyenlőséget kell igazolni.

(b) $n = 1$ -re igaz. Be kell látni, hogy $2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$.

(c) $n = 1$ -re igaz: $(a+b)^{[1]} = a+b = b+a = b^{[1]}a^{[0]} + a^{[1]}b^{[0]}$.

Be kell látnunk, hogy

$$\left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{[n-m]} b^{[m]} \right) (a+b-nh) = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} a^{[n+1-m]} b^{[m]}.$$

$$\left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{[n-m]} b^{[m]} \right) (a+b-nh) = \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{[n-m]} b^{[m]} \right) (a-(n-m)h+b-mh) =$$

$$= a^{[n+1]} + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} a^{[n-m+1]} b^{[m]} + \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{[n-m]} b^{[m+1]} + b^{[n+1]}.$$

II. BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Vezessük be a $j = m-1$ jelölést az első, a $j = m$ jelölést a második szummában. Ekkor a kifejezés a következő alakú:

$$a^{[n+1]} + \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] a^{[n-j]} b^{[j+1]} + b^{[n+1]}.$$

Innen $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \frac{n!j + n!(n+1-j)}{j!(n+1-j)!} = \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j}$ miatt

következik az állítás. $h = 0$ esetén a binomiális formulát kapjuk.

- (d) $n = 1$ -re igaz. Az $(1 + x_1) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n$ indukciós feltételt szorozzuk meg $1 + x_{n+1} \geq 0$ -val:

$$\begin{aligned} (1 + x_1) \dots (1 + x_n)(1 + x_{n+1}) &= (1 + x_1 + \dots + x_n)(1 + x_{n+1}) = \\ &= 1 + x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + x_1 x_{n+1} + \dots + x_n x_{n+1} \geq \\ &\geq 1 + x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}, \end{aligned}$$

mivel azonos előjelű számok szorzata nem negatív.

(e) $\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 2$

a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján.

- (f) $n = 2$ -re igaz az állítás. Az indukciós feltételt szorozzuk meg

$(n+1)$ -gyel. Kapjuk: $(n+1)! < \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n}$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}}. \text{ Átrendezve } 2 < \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1}.$$

- (g) $n = 2$ -re igaz. Szorozzuk meg az indukciós feltételt $(2(n+1))!$ -sal. Azt kell igazolnunk, hogy

$$[(n+1)!]^n [(2n+2)!] > [(n+2)!]^{n+1}.$$

Átalakítva: $\frac{(n+3)(n+4) \dots (2n+2)}{(n+2)(n+2) \dots (n+2)} > 1.$

- (h) $n = 1$ -re igaz. Szorozzuk meg az indukciós feltételt

$$\frac{2n+1}{2n+2} \text{ -vel. Azt kell igazolnunk, hogy } \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

II. BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Átrendezve: $\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+3} < 2n+2 = \frac{(2n+1) + (2n+3)}{2}$.

- (j) $n = 2$ -re igaz az állítás. Adjunk az indukciós feltétel mindkét oldalához $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ -t. Azt kell igazolnunk, hogy

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}. \text{ Átrendezve: } \sqrt{n+1} > \sqrt{n}.$$

- (j) $n = 3$ -ra igaz az állítás. Szorozzuk meg az indukciós feltételt $(n+1)^{n+2}/n^{n+1}$ -gyel. Azt kell igazolnunk, hogy

$$(n+1)^{2n+2}/n^{n+1} \geq (n+2)^{n+1}. \text{ Átrendezve: } n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + 2n.$$

- (k) $n = 1$ -re igaz. Az indukciós feltételt szorozzuk meg $(2n+1) \cdot (2n+2)$ vel. Azt kell igazolnunk, hogy

$$2^{2n} (n!)^2 (2n+1)(2n+2) < 2^{2n+2} ((n+1)!)^2.$$

Átrendezve: $2n+1 < 2n+2$.

- (3) Azt használja fel a bizonyításban, amit bizonyítani kellene.

- (4) Jelöljük az szóban forgó számokat x, y, z -vel:

$$x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ és } xyz > 1.$$

Tegyük fel, hogy $z = 1$. Ekkor $1 < xy$ és $x + y < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, amiből $xy < 1$ következik, ami ellentmondás.

- (5) a) Tegyük fel, hogy

$$\emptyset \neq (A - B) \cup (B - C) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C}), \text{ de } A \cap \bar{B} = \emptyset \text{ és } B \cap \bar{C} = \emptyset,$$

ami ellentmondás; Direkt bizonyítás: $A \cap \bar{B} = \emptyset$ és $B \cap \bar{C} = \emptyset$ -ből következik. b) Indirekt: léteznek olyan $k > 1$, p és q természetes számok, melyekre $21n + 4 = kp$, $14n + 3 = kq$. Ebből $1 = 7n + 2 - 7n - 1 = k(3q - 2p)$ következik, ami ellentmondás.

$$\text{Direkt: } \frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3} \text{ amiből } \frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1}$$

következik.

6. Nem.

III. HALMAZELMÉLETI ALAPFOGALMAK

III. FEJEZET

1. Pl. $A \cup B = \{2 \text{ és } 3 \text{ közül legalább az egyikkel osztható egész számok}\}$.
2. a) $A - M$ b) $A \cap F$ c) $F \cup M$ d) $(F \cap M) - A$
e) $(M - F) - A$ f) $[(M \cap A) - F] \cup [F - (M \cup A)]$
4. $\bar{A} \neq \bar{B}$
5. $A \cap B \subseteq A$; ugyanaz.
6. a) A b) A alaphalmaz. c) $\emptyset$ d) A e) A f) $A \cup B$
7. a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $\bar{A} \cap \bar{B}$ d) $\bar{A} \cup \bar{B}$
8. Nem. Legyen $x \in A \cap B$; ekkor $x \notin C$. Így $x \in (A \cap B) - C$.
9. a) 1. $A - B \subseteq C$. Ekkor minden $x \in A$ -ra két eset lehetséges:
 α) $x \in B$, ekkor $x \in B \cup C$ β) $x \notin B$, ekkor $x \in A - B$ és ezért a feltétel értelmében $x \in C$, tehát $x \in B \cup C$, így $A \subseteq B \cup C$.
 2. $A \subseteq B \cup C$. Ekkor minden $x \in A$ -ra két eset lehetséges:
 α) $x \in B$, ekkor $x \notin A - B$. β) $x \notin B$, ekkor a feltétel értelmében $x \in C$ kell, hogy legyen. Mivel ekkor $x \in A - B$, így $A - B \subseteq C$.
10. C
11. $B - C$
12. c
13. Az $A_1 \subseteq A_i$ és $A_i \subseteq A_1$ $i = 1, 2, \dots, n$ tartalmazások csak úgy állhatnak fenn egyidejűleg, ha $A_1 = A_i$.
14. a) $C \subseteq A \subseteq B$ esetén $X = A$. b) u.a. mint a)
c) $B \cup C \subseteq \bar{A}$ esetén $B \cup C \subseteq X \subseteq \bar{A}$.
d) $B \subseteq A \subseteq C$ esetén $X = (C - A) \cup B$.
e) $B \subseteq A$ és $A \cap C = \emptyset$ esetén $X = (A - B) \cup C$.
f) $B \subseteq A \subseteq C$ esetén $X = C - B$.
15. d) I. Megoldás:
 igazolnunk kell, hogy 1. $A - (A - B) \subseteq B - (B - A)$ és
 2. $B - (B - A) \subseteq A - (A - B)$.
 1. Ha $x \in A - (A - B)$, akkor $x \in A$ és $x \notin (A - B)$, így $x \in B$.
 Ekkor $x \notin B - A$, és így $x \in B - (B - A)$.
 2. Ha $y \in B - (B - A)$, akkor $y \in B$ és $y \notin B - A$, így $y \in A$. Ekkor $y \notin A - B$, és így $y \in A - (A - B)$.

III. HALMAZELMÉLETI ALAPFOGALMAK

II. Megoldás:

A műveleti szabályokat, az $A - B = A \cap \bar{B}$ összefüggést és 7.c) -t felhasználva:

$$A - (A - B) = A - A \cap \bar{B} = A \cap \overline{A \cap \bar{B}} = A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

Hasonlóan:

$$B - (B - A) = B \cap A.$$

16. a) $B = A \cap \bar{C}$ b) $A = B$ c) $A \cap B = \emptyset$ d) $A = B$
 e) $B = \bar{A}$ f) $B \cap C \subseteq A \subseteq C$ g) $C \subseteq A \cup B$ h) $A = \emptyset$
 i) $A = \emptyset = C$.
17. a) $\{(a, x), (b, x), (c, x), (d, x), (a, y), (b, y), (c, y), (d, y)\}$
 (b) Bizonyítsuk be az elsőt: Legyen $x \in (A \cup B) \times C$. Ekkor $x = (y, z)$, ahol $y \in A \cup B$, $z \in C$. Ami szerint $y \in A$ vagy $y \in B$. Ez azt jelenti, hogy vagy $(y, z) \in A \times C$ vagy $(y, z) \in B \times C$. Tehát $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$. Fordítva, legyen $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Ekkor vagy $x \in A \times C$ vagy $x \in B \times C$. Ez azt jelenti, hogy az első esetben $y \in A$, $z \in C$, a második esetben $y \in B$, $z \in C$. Így $y \in A \cup B$ és $x = (y, z) \in (A \cup B) \times C$. Tehát $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$.
18. [a] Ha $C \neq \emptyset$, akkor $A \cap B = \emptyset$. b) vagy $C = \emptyset$ vagy $A \subseteq B$.
19. a) $A = \{1\}$, $B = \{b\}$ b) $(a, (b, c)) \neq ((a, b), c)$
20. a) Legyen $A \subseteq B$ és $C \subseteq D$, ekkor $x \in A$ és $y \in C$ esetén $x \in B$ és $y \in D$, tehát $(x, y) \in B \times D$. Fordítva, ha $u \notin B$, akkor $(u, v) \notin B \times D$, így semmilyen részhalmazának sem lehet eleme.
21. [a] Legyen $x = (y, z) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$. Ez azt jelenti, hogy $y \in A \cap B$ és $z \in C \cap D$, ezért $x \in A \times C$ és $x \in B \times D$. Fordítva, ha $x \in (A \times C) \cap (B \times D)$, akkor $y \in A \cap B$ és $z \in C \cap D$.
22. Legyen $x \in (A \times B) \cup (C \times D)$. Ekkor $x = (y, z)$ és vagy $y \in A$, $z \in B$ vagy $y \in C$, $z \in D$. Amiből $y \in A \cup C$, $z \in B \cup D$ és $x = (y, z) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ következik. Tehát a bizonyítandó tartalmazás fennáll. Az egyenlőség szükséges és elégséges feltétele: $[(C \subseteq A) \wedge (D \subseteq B)] \vee [(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)]$.
24. Legyen $a \in A$, $b \in B$. Ekkor $(a, b) \in A \times B$, ami azt jelenti, hogy $(a, b) \in C \times D$, azaz $a \in C$, $b \in D$. Másrészt $(b, a) \in B \times A$ -ból $(b, a) \in C \times D$ következik, azaz $b \in C$, $a \in D$. Ekkor $(a, a) \in C \times D$, ami azt jelenti, hogy $a \in B$. Hasonlóan, $(b, b) \in C \times D$, és ezért $b \in A$. Tehát $A = B$. Így $A \times B = C \times D$ és ebből a 20.b) feladat szerint $A = C$, $B = D$.

IV. SZÁMOSSÁG

IV. FEJEZET

1. Igen
2. a) Megszámlálható b) Megszámlálható c) Kontinuum
3. Igen.
4. a) Igen b) Igen.
5. Kontinuum.
6. Nem.
7. A) Megszámlálható
 B) a) Megszámlálható b) Megszámlálható c) Kontinuum
 C) a) Megszámlálható b) Megszámlálható c) Kontinuum
 D) a) Megszámlálható b) Megszámlálható c) Kontinuum
8. a) Véges b) Megszámlálhatóan végtelen
 c) Megszámlálható d) Véges e) Kontinuum
9. a) Legfeljebb kontinuum b) Kontinuum c) Kontinuum
 d) Kontinuum e) Kontinuum f) Véges
 g) Kontinuum h) Kontinuum i) Kontinuum
 j) Megszámlálható
10. Mindegyik kontinuum számossága.
11. Bármely (a, b) intervallumhoz található $a < c < b$ racionális szám.
12. Tetszőleges $x \in A$ pontnak feleltessük meg az $\left(x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2}\right)$ intervallumot, és használjuk fel a 11. feladat eredményét!
13. Racionális számok számosságához hasonlóan igazolható.
14. H számossága nagyobb.
15. Lásd 7.D.a)
16. Lásd 13. feladat $(a_1 x^{n_1} + \dots + a_{k+1} x^{n_{k+1}})$ úgy tekinthető, mint az $\{x, +, 0, 1, 2, \dots\}$ halmazból vett véges sorozat.)
17. Az előző feladatból következik, mivel minden polinomnak véges számú gyöke van.
18. A valós számok halmaza kontinuum számossága.
19. Legyen f egy-egy értelmű megfeleltetés A és A_2 között, továbbá $B_0 = A$, $B_1 = A_1$, $B_{n+2} = f(B_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).
 Ekkor $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$.

$$\begin{aligned}
A &= \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (B_i - B_{i+1}) \right] \cup \left[\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \right] = \\
&= \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (B_{2i} - B_{2i+1}) \right] \cup \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (B_{2i+1} - B_{2i+2}) \right] \cup \left[\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \right] \\
A_1 &= \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i - B_{i+1}) \right] \cup \left[\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \right] = \\
&= \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (B_{2i+2} - B_{2i+3}) \right] \cup \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (B_{2i+1} - B_{2i+2}) \right] \cup \left[\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \right] \\
f(B_{2i} - B_{2i+1}) &= B_{2i+2} - B_{2i+3} ,
\end{aligned}$$

azaz $(B_{2i} - B_{2i+1}) \sim (B_{2i+2} - B_{2i+3})$. Minthogy az összes $B_i - B_{i+1}$ halmaz $(i = 0, 1, \dots)$ és $\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$ páronként közöspont nélküli, ezért $A \sim A_1$.

[20.] Legyen $f(A) \subsetneq A$, ahol f egy-egy értelmű függvény, $a \in A - f(A)$. $a_0 = a$, $a_{i+1} = f(a_i)$ $i \geq 0$ -ra. Ekkor $a_i \neq a_j$, ha $i \neq j$.

Ez azt jelenti, hogy A a végtelen $\{a_0, a_1, \dots\}$ részhalmazt tartalmazza.

(21.) Legyen A végtelen és $B = \{b_0, b_1, \dots\}$ megszámlálható részhalmaza. Ekkor $A = B \cup (A - B) \sim (B - \{b_0\}) \cup (A - B) = A - \{b_0\}$.

[22.] a) Legyen A_1 az A megszámlálható részhalmaza. Ekkor $A_1 \cup B \sim A_1$.
Ezért

$$(A - A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A - A_1) \cup A_1 = A .$$

b) a) -ből következik, mert $A = (A - B) \cup B$ és $A - B$ végtelen.

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK
V. FEJEZET

1. a) Reflexív, szimmetrikus, tranzitív. b) Antireflexív, szimmetrikus, nem tranzitív. c) és e) Antireflexív, antiszimmetrikus, tranzitív. d) és f) Reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív. g) Reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív. h) Antireflexív, antiszimmetrikus, tranzitív. i) Reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív.
2. a) Reflexív, nem szimmetrikus. Összehasonlíthatatlan elemek, ha mindkét osztási maradék páratlan. Nem tranzitív. pl. $4R2$ és $2R3$, de $(4,3) \notin R$. b) Reflexív, szimmetrikus, tranzitív. c) Reflexív, szimmetrikus, tranzitív. d) Antireflexív, antiszimmetrikus, nem tranzitív. Összehasonlíthatatlan elemek, melyekre sem $x - y = 2$, sem $y - x = 2$ nem teljesül. e) Antireflexív, antiszimmetrikus, nem tranzitív. f) Reflexív, szimmetrikus, tranzitív. g) nem reflexív, szimmetrikus, tranzitív. V kontinuum számosságú részhalmazai egyetlen más részhalmazával sem hasonlíthatók össze. h) Antireflexív, antiszimmetrikus, tranzitív. Egyik elem sem hasonlítható össze önmagával. i) Nem reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív. Összehasonlíthatatlan elemek: 1,1 ill. 3,3. j) Reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív. Mindegyik elemhez lehet találni olyan elemet, mellyel összehasonlítható.
3. a) b) c) d) Bármely alaphalmazon. e) f) Semmilyen halmazon.
4. a) $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$, $a - b \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Q}$, $a - c = a - b + b - c$.
5. a) Igen. b) Nem c) Nem
6. Igen.
7. Pl. b) Nyilván szimmetrikus. Reflexív, mert $c = a$ és $d = b \Rightarrow a + d = a + b = b + c$. Tranzitív, mert $(a, b) \in Q(c, d)$ és $(c, d) \in Q(e, f) \Rightarrow a + d = b + c$ és $c + f = d + e \Rightarrow f - b = e - a \Rightarrow a + f = b + e$.
8. Igen.
9. A társaság tagjait aszerint soroljuk osztályokba, hogy hány emberrel fogtak kezét. 11 osztályt kapunk. $2 \cdot 11 < 32 < 3 \cdot 11$.
10. a) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, |x - y| \leq 1\}$. b) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \leq x^2\}$. c) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y\}$. d) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x < y\}$.
12. Az $\{A_i : i \in I\}$ osztályozáshoz rendeljük hozzá az $R = \{(x, y) : \text{létezik olyan } i \in I, \text{ hogy } x, y \in A_i\}$ relációt.

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

14. Legyen $\{R_i : i \in I\}$ ekvivalencia relációk egy rendszere. Be kell látnunk, hogy $\bigcap_{i \in I} R_i$ is ekvivalencia reláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Pl. szimmetrikus: Ha $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i \Rightarrow (a, b) \in R_i \quad \forall i \in I$.

Mivel mindegyik R_i ekvivalencia, így $(a, b) \in R_i \Rightarrow (b, a) \in R_i \quad \forall i \in I$.

Ezért $(b, a) \in \bigcap_{i \in I} R_i$.

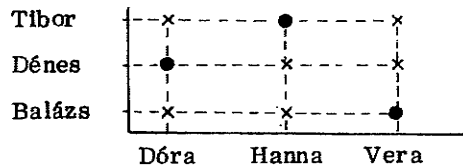
17. L.

18. Antireflexív részben rendezés.

19. Ekvivalencia igen, rendezés nem.

21. Nem juthat el. Létrehozhatunk.
Reflexív teljes rendezés esetén eljuthat.

23. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a nők és férfiak halmozának direkt szorzatát (Descartes). x -szel jelöljük, ha nem lehetnek házasságok, $\bullet$ -rel, ha igen. Tibor csak Hannát veheti el. Mivel Dóra fiatalabb mint Vera és Hanna a legfiatalabb, az életkorokra vonatkozó egyenlőségből következik, hogy Dénes csak Dórát veheti el, és így Balázs pedig Verát.



24. Béla, Olga, kiállítás; András, Sári, hangverseny; Csaba, Panni, mozi; Rezső, Rozi, színház.

25. a) igaz b) nem c) nem.

26. a) $2^{m \cdot n}$ b) n^m

c) Ha $n \geq m$ akkor $\binom{n}{m} m!$, ha $n < m$ nincs ilyen függvény

d) $m = n$ esetén

27. a) egy-egy értelmű függvény, injektív.

b) $nR^{-1}m \Leftrightarrow m = n - 1$, egy-egy értelmű függvény.

c) $D_R = N$, $D_{R^{-1}} = N - 1$.

d) Teljesülnek.

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

- 28.** Ha $x \in A$, akkor $x \in B$ és ezért $f(x) \in f(B)$.
- 29.** 28.-ből következik.
- 30.** 25.-ből következik.
- 31.** Legyen f nem egy-egy értelmű függvény. Ekkor léteznek olyan $a, b \in D_f$ elemek, hogy $a \neq b$ és $f(a) = f(b)$. Legyen $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. A fordított állítás nyilvánvaló. c) Ha $x \in f(A) - f(B)$, akkor létezik olyan $y \in A$, hogy $f(y) = x$ és $y \notin B$. Ilyen módon $x \in f(A - B)$. Ha f egy-egy értelmű függvény, akkor ha $x \in f(A - B)$, akkor létezik olyan $y \in A$ és $y \in \bar{B}$, hogy $f(y) = x$. Ilyen módon $x \in f(A)$. Nyilván $x \notin f(B)$, mivel f egy-egy értelmű függvény.
- 32.** Valódi tartalmazás csak akkor állhat fenn, ha f^{-1} nem függvény. Legyen $D_f = \{1, 2\}$, $f(D_f) = \{1\}$, $A = \{1\}$. Ekkor $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2\}$.
- 33.** A definícióból következik.
- 34.** a) f egy-egy értelmű függvény.
b) f és g egy-egy értelmű függvények, továbbá $f(D_f) \cap D_g = \emptyset$.
- 35.** A definícióból következik.
- 36.** **a)** $H_{A \cap B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow H_A(x) = 1$ és $H_B(x) = 1$.
- 37.** v.ö. 25. pl.
- 38.** **c)** $x \in D_{R_1 \circ R_2} \Leftrightarrow$ létezik olyan y , hogy $(x, y) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow$ létezik olyan y és z elemek, hogy $(x, z) \in R_1$ és $(z, y) \in R_2 \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $(x, z) \in R_1$ és $z \in D_{R_2} \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $(z, x) \in R_1^{-1}$, $z \in R_1(D_{R_1})$ és $z \in D_{R_2} \Leftrightarrow x \in R_1^{-1}(R_1(D_{R_1}) \cap D_{R_2})$. **d)** $x \in R_1 \circ R_2(D_{R_1 \circ R_2}) \Leftrightarrow$ létezik olyan y , hogy $(y, x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow$ létezik olyan y és z , hogy $(y, z) \in R_1$ és $(z, x) \in R_2 \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $z \in R_1(D_{R_1})$ és $(z, x) \in R_2 \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $z \in R_1(D_{R_1})$, $z \in D_{R_2}$ és $(z, x) \in R_2 \Leftrightarrow x \in R_2(R_1(D_{R_1}) \cap D_{R_2})$.
- 39.** **a)** $(x, y) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $(x, z) \in R_1$ és $(z, y) \in R_2 \circ R_3 \Leftrightarrow$ létezik olyan z , u , hogy $(x, z) \in R_1$, $(z, u) \in R_2$ és $(u, y) \in R_3$.

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

$\in R_3 \Leftrightarrow$ létezik olyan u , hogy $(x, u) \in R_1 \circ R_2$ és $(u, y) \in R_3 \Leftrightarrow (x, y) \in$

$\in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

[b] $(x, y) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $(y, z) \in R_1$ és $(z, x) \in R_2 \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $(x, z) \in R_2^{-1}$ és $(z, y) \in R_1^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

[c] $(x, y) \in \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \circ Q \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $(x, z) \in \bigcup_{i \in I} R_i$ és $(z, y) \in Q \Leftrightarrow$ létezik olyan z és $i \in I$, hogy $(x, z) \in R_i$ és $(z, y) \in Q \Leftrightarrow$ létezik olyan $i \in I$, hogy $(x, y) \in R_i \circ Q \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{i \in I} (R_i \circ Q)$.

[d] hasonlóan igazolható mint c.; [e] $(x, y) \in Q \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) \Leftrightarrow$ létezik olyan z , hogy $(x, z) \in Q$ és $(z, y) \in \bigcap_{i \in I} R_i \Leftrightarrow$ létezik olyan z ,

hogy $(x, z) \in Q$ és minden $i \in I$ -re $(z, y) \in R_i \Rightarrow$ minden $i \in I$ -re

$(x, y) \in Q \circ R_i \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap_{i \in I} (Q \circ R_i)$. [f] Hasonlóan igazolható mint

e.; [g] Pl. e): $R_1 = \{(1, 1)\}$, $R_2 = \{(0, 1)\}$, $Q = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

[42] A bal oldal = $\emptyset$, a jobb oldal = R_x .

[43] Ha $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, akkor ilyen R reláció nem létezik.

1. Legyen $x \in A \cap B$. Ekkor $(x, x) \in R \Leftrightarrow (x, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, x) \in \bar{R}$. Ami ellentmondás. 2. Legyen $A \cap B = \emptyset$. Minthogy $R^{-1} \subseteq B \times A$ és $\bar{R} \subseteq A \times B$ ezért $R^{-1} = \bar{R} = \emptyset$. Amiből $R = \emptyset$ és $R = A \times B$ következik, ami ellentmondás.

[44] Ha R kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés A és B között, akkor a 35 -ös feladtból következik. Fordítva, $D_R = A$, mivel $R \circ R^{-1} = I_A$, és $R(D_R) = B$, mivel $R^{-1} \circ R = I_B$. Ha $(x, z) \in R$ és $(x, y) \in R$, akkor $(y, z) \in R^{-1} \circ R$, ami azt jelenti, hogy $y = z$. Ha $(y, x) \in R$ és $(z, x) \in R$, akkor $(y, z) \in R \circ R^{-1}$, ami azt jelenti, hogy $y = z$.

45. a) egyértelmű, inverze kétértékű.
b) egyértelmű, inverze végtelen sokértékű.
c) egy-egy értelmű.
d) egyértelmű, inverze kétértékű.
e) egyértelmű, inverze kétértékű.
f) egy-egy értelmű.

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

46. a) $D_R = R(D_R) = N$, minthogy

$$(x, x) \in R \quad R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in N \text{ és } y \text{ az } x \text{ osztója}\}. R \circ R = R.$$

$R \circ R^{-1} = N^2$, minthogy $(x, y) \in R \circ R^{-1} \iff$ létezik olyan z , hogy x z osztója és y is z osztója. Ilyen z könnyen választható bármely két x és y természetes számhoz. Pl. $z = x \cdot y$. $R^{-1} \circ R = N^2$, minthogy $(x, y) \in R^{-1} \circ R \iff$ létezik olyan z , hogy z x -nek és y -nek is osztója. $z = 1$ tetszőleges x és y természetes számhoz megfelelő. c) a)-hoz hasonlóan kapható. b) $D_R = R(D_R) =$

$$= Q, \quad R^{-1} = R, \quad R \circ R = R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = Q^2. \quad d) \quad D_R = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad R(D_R) = \left[-1, \frac{\pi}{2}\right], \quad R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ és } x \geq \sin y\}, \quad R \circ R = \{(x, y) : \sin \sin x \leq y\}, \quad R \circ R^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2, \quad R^{-1} \circ R = \{(x, y) : x, y \in [-1, \frac{\pi}{2}]\}.$$

47. Ha $R = I_A$, akkor tetszőleges A -n értelmezett R_1 relációra

$(x, y) \in R \circ R_1 \iff$ létezik olyan z , hogy $(x, z) \in R$ és $(z, y) \in R_1$, de $(x, z) \in R$ csak $x = z$ esetén teljesül. Ilyen módon $R \circ R_1 = R_1$. Hasonlóan $R_1 \circ R = R_1$. Fordítva, legyen $R_1 = I_A$.

Ekkor, minthogy $R \circ R_1 = R_1$, így $R = I_A$.

49. $R_1 \cup R_2$ ekvivalencia $\Rightarrow R_1 \circ R_2 \subseteq$

$$(R_1 \cup R_2) \circ (R_1 \cup R_2) \subseteq R_1 \cup R_2, \quad R_1 \cup R_2 = (R_1 \circ I_A) \cup (I_A \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2.$$

Fordítva, legyen $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. Ekkor $R_2 \circ R_1 = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = (R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1 \cup R_2$, $(R_1 \cup R_2) \circ (R_1 \cup R_2) = (R_1 \circ R_1) \cup (R_2 \circ R_1) \cup (R_1 \circ R_2) \cup (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \cup R_2$, azaz $R_1 \cup R_2$ tranzitív. Szimmetriája és reflexivitása nyilvánvaló.

50. $R_1 \circ R_2$ ekvivalencia. Nyilván $R_1 \cup R_2 \subseteq R_1 \circ R_2$.

Legyen most $R_1 \cup R_2 \subseteq Q$ valamely Q ekvivalenciára. Ekkor $R_1 \circ R_2 \subseteq (R_1 \cup R_2) \circ (R_1 \cup R_2) \subseteq Q \circ Q \subseteq Q$.

52. $I_A \subseteq R \iff I_A \subseteq R^{-1}$, $(a, b) \in R \iff (b, a) \in R^{-1}$.

53. $I_A \subseteq R \subseteq R \circ S$ -ből látható, hogy $R \circ S$ reflexív. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R = R \circ S$ -ből következik, hogy $R \circ S$ szimmetrikus. Végül a tranzitivitást $(R \circ S) \circ (R \circ S) = R \circ S \circ R \circ S = R \circ R \circ S \circ S = R \circ S$ -ből kapjuk.

54. $T \circ T = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \right) \circ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \right) = \bigcup_{n=2}^{\infty} R^n \subseteq T$. Ha S olyan tranzitív reláció, melyre $R \subseteq S$, akkor minden i -re ($i \in \mathbb{N}$) $R^i \in S$ kell, hogy legyen. Ellenkező esetben S nem lehet tranzitív. Tehát $T \subseteq S$.

56. $\bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup I_A)^n$.

57. Jelöljük A -val az alaphalmazt. Mivel $I_A \subseteq R$ és $I_A \subseteq S$, ezért $I_A \subseteq R \circ S$ és $I_A \subseteq S \circ R$. Tehát mind $R \circ S$ mind $S \circ R$ reflexív.
 $(a, b) \in R \circ S \iff$ létezik olyan x , melyre $(a, x) \in R$ és $(x, b) \in S$.
Mivel mind R mind S ekvivalencia reláció, ezért szimmetrikusak is, így $(b, x) \in S$, $(x, a) \in S$. Tehát $(b, a) \in S \circ R$. Ezzel igazoltuk, hogy $(R \circ S)^{-1} = S \circ R$. $R \circ S$ szimmetriája azt jelenti, hogy $(R \circ S)^{-1} = S \circ R = R \circ S$, amiből az 53-as feladat értelmében $R \circ S$ tranzitivitása következik. Példa: $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (2, 3)\}$, $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, $R \circ S = A \times A - \{(1, 3)\}$.

58. Mivel R ekvivalencia reláció, ezért tranzitív, tehát $R \circ R \subseteq R$, amiből $T = R$ következik.
59. $I_A \subseteq R_1$ és $I_A \subseteq R_2$ miatt I_A részhalmaza a felsorolt halmazok mindegyikének.
60. $I_A \cap R_1 = \emptyset$ és $I_A \cap R_2 = \emptyset$ -ből következik. Viszont ha $(a, b) \in R_1$ és $(b, a) \in R_2$, akkor $(a, a) \in R_1 \circ R_2$.
61. $R_1^{-1} = R_1$ és $R_2^{-1} = R_2$ -ből következik.
62. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1$.
63. a) R antiszimmetrikus $\iff R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
b) $(R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$ és $R_1^{-1} \cap R_2 = (R_1 \cap R_2^{-1})^{-1}$.
64. a) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x, y > 0\}$.
b) $x \in A \implies (x, y) \in R$ vagy $(y, x) \in R$ valamely y -ra $\implies (x, y) \in R$ és $(y, x) \in R \implies (x, x) \in R$.
65. $R = R^{-1}$.

V. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

66. R ekvivalencia $\Rightarrow R^{-1} = R, R \circ R \subseteq R$,

$I_A \subseteq R$. Fordítva, $R \circ R^{-1}$ szimmetrikus tetszőleges R -re. Ezért R szimmetrikus és $R \circ R = R \circ R^{-1} \subseteq R$.

67. a) $R_1 = R_1 \circ R_1$ b) $A^2 = (A^2)^{-1} = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1$.

68. Pl. $0 < \neq <$: $1 < 2$, de $(1, 2) \notin < <$.

70. Legyen $A = \mathbb{N}$, és a részben rendezés: a osztója b -nek; $B = \mathbb{N}$ a szokásos $\leq$ rendezéssel, $f(x) = x$.

71. 1. R és S reflexív teljes teljes rendezés. Ebben az esetben akkor és csak akkor, ha $R = S$. Ha $R \neq S$, akkor létezik olyan x, y pár, hogy $(x, y) \in R, (x, y) \notin S$ vagy $(x, y) \in R, (x, y) \in S$. Az első esetben $(x, y) \in R \subseteq R \circ S, (y, x) \in S \subseteq R \circ S, x \neq y$. Hasonlóan látható be a második eset. Ha $R = S$, akkor $R \circ S = R$. 2. antireflexív esetben az $R = S$ feltételen kívül, meg kell követelni, hogy bármely két aRb elemhez lehessen találni olyan c elemet, amelyre aRc és cRb .

72. b) Igen.

73. a) Igazoljuk R tranzitivitását. $f(x, y) = x, f(y, z) = y \Rightarrow f(x, z) = f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) = f(x, y) = x$. Reflexivitás és antiszimmetria nyilvánvaló. b) $f(f(x, y), x) = f(x, f(x, y)) = f(f(x, x), y) = f(x, y)$. Hasonlóan, $f(f(x, y), y) = f(x, y)$. $f(z, x) = z, f(z, y) = z \Rightarrow f(z, f(x, y)) = f(f(z, x), y) = f(z, y) = z$.

74. a) Pl. $(m, n) R (u, v) \Leftrightarrow ((m < u) \text{ vagy } (m = u \text{ és } n \leq v))$.
b) $(a + bi) R (c + di) \Leftrightarrow ((a < c) \text{ vagy } (a = c \text{ és } b \leq d))$.

75. Egy-egy értelmű megfeleltetés létesíthető az n elemű halmaz és az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz között. $aRb \Leftrightarrow f(a) = i \leq j = f(b)$.

77. a) $(x \cup y = y \Rightarrow x \cap y = x \cap (x \cup y) = x$. A fordítottja hasonlóan látható be. b) xRx , minthogy $x \cup x = x \cup (x \cap (x \cup y)) = x$. $xRy, yRx \Rightarrow x = x \cup y = (x \cap y) \cup y = y$. $xRy, yRz \Rightarrow x = x \cap y = x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z = x \cap z$. $zRx, zRy \Rightarrow z = z \cap y = (z \cap x) \cap y = z \cap (x \cap y)$. $xRz, yRz \Rightarrow z = z \cup y = (z \cup x) \cup y = z \cup (x \cup y)$.

78. A definíciókon kívül alkalmazzuk a 77-es feladat azonosságait.

a) $0 = x \cdot \bar{x}, 1 = x + \bar{x}$ tetszőleges $x \in M$ -re.

b) Legyenek b és c az $a \in M$ elem komplementerei. $c = (a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c) = b + c$. Hasonlóan, $b = b + c = c$. c) $a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = (a \cdot b \cdot \bar{a}) + (a \cdot b \cdot \bar{b}) = 0$. $(a \cdot b) + (\bar{a} + \bar{b}) = (a + \bar{a} + \bar{b}) \cdot (b + \bar{a} + \bar{b}) = 1$.

VI. VALÓS SZÁMOK, EGYENLŐTLENSÉGEK

VI. FEJEZET

1. a) $x \leq \frac{-1}{9}$ b) $x \geq \frac{-22}{7}$ c) $x < \frac{-34}{11}$
- d) $x > -2a - 9$ e) $\frac{3}{7} < x < \frac{4}{7}$ f) $3 < x \leq 5$
- g) $4 < x < 6$ h) $x \leq -2$ vagy $x \geq \frac{5}{3}$
- i) $x < \frac{3}{2}$ vagy $x > \frac{7}{4}$ j) $-2 < x < -1$ k) $x > 3$ vagy $x < 2$
- l) $x > \frac{1}{3}$ vagy $x < -2$ m) $\frac{2 - \sqrt{4 + 20a^2}}{2a^2} \leq x \leq \frac{2 + \sqrt{4 + 20a^2}}{2a^2}$
- n) $-1 < x < 1$ vagy $x > 2$ vagy $x < -2$ o) $x > -1$ vagy $-3 < x < -2$
- p) $x > 6$ vagy $-2 < x < 3$ q) $x > 3$ vagy $-3 < x < \frac{-1}{5}$
- r) $-1 < x < 2$ vagy $2 < x < 6$ s) $x \leq -3$ vagy $0 \leq x \leq 7$
- sz) $1 < x < 2$ vagy $-2 < x < -1$ t) $\frac{-1}{2} < x < 0$ vagy $-3 < x < \frac{-5}{2}$
- ty) $x < \frac{-3}{4}$ u) $x > \frac{21}{8}$ vagy $x < 2$
- v) $\frac{-1}{4} < x < 0$ w) $x < -3$ x) $\frac{17}{3} < x < 9$
- y) $x > 2$ vagy $x < \frac{7}{5}$ z) $x > 7$ vagy $1 < x < 4$ vagy $x < -1$
2. (a) $|x - y|^2 \geq |x| - |y| \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq x^2 - 2|xy| + y^2 \iff |xy| \geq xy$
- (b) a)-ból az $y = - \sum_{i=1}^n x_i$ helyettesítéssel kapjuk.
3. a) $\frac{-5}{2} < x < \frac{-1}{2}$ b) $x > \sqrt{5}$ vagy $x < -\sqrt{5}$
- c) $2 - \sqrt{2} < x < 2$ vagy $2 < x < 2 + \sqrt{2}$
- d) Nincs megoldás e) $x < 2$
- f) $x > 3$ vagy $x < 1$ g) $-1,01 < x < -0,99$
- h) $x \geq 12$ vagy $x \leq -8$ i) $x < -0,5$
- j) $0 < x < \frac{2}{3}$ k) $-6 \leq x \leq 6$
- l) $x > -0,5$ m) $-0,5 < x < 0,5$

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

- n) $\frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10}$ vagy $\frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10}$
4. $0 < m < n \Leftrightarrow 0 < \frac{m}{n} < 1$. Továbbá $\frac{m}{n} < \frac{m+n}{2n} < 1$ és $0 < \frac{m}{2n} < \frac{m}{n}$.
5. A legnagyobb elem, ami egyben a felső határ: $\frac{1}{2}$. Legkisebb elem nincs. Alsó határ = 0.
6. $\inf B = 0,5$ $\sup B = 1$.
7. $\inf B = -2$, $\sup B = 2$.
8. $\inf A = \inf B = 0$, $\sup A = \sup B = 1$.
9. a) $x_1 \leq \sup \{x_i : i \in I\}$ és létezik olyan x_k , bármely $\varepsilon > 0$ -hoz, hogy $\sup \{x_i\} - \varepsilon < x_k$. A fenti egyenlőtlenségeket (-1) -gyel szorozva kapjuk a kívánt egyenlőségeket. b) Hasonlóan igazolható.
10. $3 = \sup A_1 A_2 = \inf A_1 \cdot \inf A_2$, $-6 = \inf A_1 \cdot \sup A_2 = \inf A_1 A_2$,
 $6 = \sup A_1 A_4 = \inf A_1 \cdot \inf A_4$, $-2 = \sup A_1 \cdot \inf A_4 = \inf A_1 A_4$,
 $2 = \sup A_1 A_5 = \sup A_1 \cdot \sup A_5$, $-6 = \inf A_1 \cdot \sup A_5 = \inf A_1 A_5$,
 $0 = \sup A_4 A_5 = \sup A_4 \cdot \inf A_5 = \sup A_4 \cdot \sup A_5 = \inf A_4 \cdot \inf A_5$,
 $-4 = \inf A_4 \cdot \sup A_5 = \inf A_4 A_5$.
11. Jelöljük H -ban a részben rendezési relációt R -rel. Ha c és d az a és b elemek legkisebb felső korlátjai, akkor aRd és bRd és dRc . Mivel c is legkisebb alsó korlát, cRd , amiből az antiszimetria miatt $c = d$ következik. Ez csak reflexív részben rendezésre igaz.

VII. FEJEZET

1. a) Igen b) Nem; egész számok c) Igen
d) Nem; a racionális számok a nulla kivételével
e) Igen
Mindegyik művelet kétváltozós a megfelelő alaphalmazon.
2. Nem
3. Műveletek. a) és b) kétváltozós, c) egyváltozós.
4. Igen. a) és b) kétváltozós, c) egyváltozós
5. Nem

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

6. a) Nem kommutatív, asszociatív b) Nincs
 c) Van: $\begin{pmatrix} x & 1-x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ d) $a + b \neq 0$ esetén van
 e) Nincs f) Van: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. a) Igen b) Igen c) Igen
8. 1. a) Nem kommutatív, asszociatív. b) $(0,0)$ egységelem
 c) Nem; $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ -n igen
 2. a) Igen b) $(1,1)$ egységelem
 c) Nem; $(\mathbb{Q} - \{0\}) \times (\mathbb{Q} - \{0\})$ - n igen
 3. a) Nem kommutatív, asszociatív b) $(0,0)$ egységelem
 c) Nem
 4. a) Nem kommutatív, asszociatív b) Nem
 c) Nem, nincs egységelem
9. a) Egyik sem b) Egyik sem kommutatív, $\times$ asszociatív, $\circ$ nem asszociatív
10. a) Nem kommutatív, asszociatív
 b) $e(f(x)) = f(x), \quad f(e(x)) = f(x)$
 c) $(n+1) - 1 = n; \quad D_h = 2, 3, \dots; \quad (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = (g \circ e) \circ f = g \circ f$
11. Vezessük be az $e = (0,1), a = (1,0), b = (1,1), c = (0,0)$ jelölést.
- a)
- | | | | | |
|----------|---|---|---|---|
| $\times$ | e | a | b | c |
| e | e | a | b | c |
| a | a | a | a | a |
| b | b | a | b | a |
| c | c | a | a | c |
- b) Igen c) Igen: e d) Igen: e
12. 1. a) Nem b) $n = 1$ jobbegységelem
 c) $n = 0$ minden elem jobbinverze, $m = 1$ balinverz d) N -en
 A természetes számokon művelet
 2. a) Igen b) Nem c) Nincs d) Nem
 3. a) Nem b) $n = 0$ jobbegységelem
 c) Minden elem inverze önmaga
 4. a) Igen b) $n = 0$ egységelem c) $n = 0$ d) Nem
 5. a) Igen b) $n = 0$ egységelem c) $n = 2$ d) Nem
13. a) Nem b) Igen
14. a) Igen b) $a = 0$ egységelem c) $a = 0$ d) Igen

VII. MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

15. a) Nem kommutatív, asszociatív
 b) $\cdot$ -ra vonatkozóan A minden eleme jobbégységelem, $+$ -ra vonatkozóan balégységelem.
 c) A minden eleme $\cdot$ -ra vonatkozóan bal-, $+$ -ra vonatkozóan jobb zéróelem.
 d) Mindegyik elemnek van $\cdot$ -ra vonatkozóan bal-, $+$ -ra vonatkozóan jobbinverze.
 e) Igen f) Igen
16. Lásd a 8. és a 12. feladatot.
 1. e) Igen 2. e) Nem 3.e) Igen 4.e) Igen
 5. e) $a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c)$, de
 $(b + c) \circ a \neq (b \circ a) + (c \circ a)$.
 6. e) Igen
17. A valós számokon értelmezett műveletek és rendezés tulajdonságaiból következik.
18. Tegyük fel, hogy

$$-aR0 \Rightarrow (a + (-a))Ka \Rightarrow 0Ra \Rightarrow 0K(a \neq a).$$

Hasonlóan látható be, hogy $aK0$ -ból is $OR(axa)$ következik.

19. $i^2 = -1$

20. a) Boole-algebra
 b) Jelöljük a soros kapcsolást "."-tal, a párhuzamost "+"-szal.
 1. $x+y$ 2. $x+\bar{y}+z$ 3. $(y \cdot z) + (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z})$ 4. z
 5. $x + ((y+u) \cdot z)$
21. Félcsoport: $1a, 1c, 3a, 3b, 4a, 4b, 6, 8/1, 8/2, 8/3, 8/4, 9b$ -ből $x, 10, 11, 12/2, 12/4, 12/5, 14$.
 csoport: $7, 8/1 \text{ } Q \times Q$ -n, $8/2 (Q - \{0\}) \times (Q - \{0\})$ -n.
 gyűrű: $16/1, 16/4$. test: $16/3, 16/6, 17, 18$. Bode algebra: 20.

VIII. FEJEZET

1. Nem ekvivalens: a feltételt csak az $a_n = \text{const. } \forall n \in \mathbb{N}$ feltételt kielégítő (azonos elemekből álló) sorozatok teljesítik, hiszen ha van $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$a_{n_1} \neq a_{n_2}, \text{ akkor a feltételben}$$

$$\epsilon = \frac{|a_{n_1} - a_{n_2}|}{3} \text{ választással}$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$3\varepsilon = |a_{n_1} - a_{n_2}| = |a_{n_1} - A + A - a_{n_2}| \leq |a_{n_1} - A| + |a_{n_2} - A| <$$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, azaz $3\varepsilon < 2\varepsilon$, ami ellentmondás.

- ②. 1. Nem ekvivalens: pl.
Az $a_n = (-1)^n$ sorozat $A = 0$ és $\varepsilon = 2$ mellett eleget tesz a feltételeknek, de nem konvergens.
2. Ekvivalens.
3. Nem ekvivalens: pl.

$a_n = n$ esetén $A = 1$, $n = 1$ minden $\varepsilon > 0$ -ra jó.

3. 1. Nincs ilyen sorozat.
2. Azokra a sorozatokra, melyeknek tagjai egy indextől kezdve azonosak.
4. 1. Divergens sorozatok.
2. Nem $+\infty$ -hez divergáló sorozatok.
3. Felülről korlátos sorozatok.

- ⑤. 1. Igen ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$)
2. Igen (a korlátosságra ekvivalens definíció).

6. 1. Nem. 2. Igen.

- ⑦. 1. Ekvivalens. 2. Nem:

pl. az $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ sorozat

nem teljesíti a Cauchy-kritériumot:

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

de tetszőleges rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+k} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k} \leq \frac{k}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

8. Például

- Ⓐ) egy (a_n) sorozat akkor és csak akkor divergens, ha minden A szám esetén van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy minden N természetes számhoz van olyan n természetes szám, hogy

$$n > N \quad \text{és} \quad |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

9. 1. a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Oldjuk meg az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget n -re! Most

$$A = 0, \quad a_n = \left(\frac{2}{n+1}\right)^2.$$

Az egyenlőtlenségek rendezésére vonatkozó állításokat felhasználva

$$0 \leq |a_n - 0| = \frac{4}{(n+1)^2} < \varepsilon$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$n > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - 1. \quad (1)$$

Mivel minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 < \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \left\lceil \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1,$$

ezért (1)-ből látható, hogy

$$N = \left\lceil \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N} \quad (2)$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén megfelelő küszöbindex.

Ha $\varepsilon = 10^{-4}$, akkor (2)-ből $N = 201$.

b) pl. $N = 200$

2. a) pl. $N = 200$

b) pl. $N = 4000$

11. 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

Megjegyzés: A megoldás során felhasználtuk, hogy $n \geq 1$, és azt a tényt, hogy konvergens sorozatok esetén a limeszképzés és az alaptműveletek felcserélhetőek.

VIII. SZÁMSOROZATOK

2. 0

13. 0

3. $-\infty$

14. $+\infty$

4. nem létezik

15. 0

5. $+\infty$

16. 1

6. nem létezik

17. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

7. 0

18. $\frac{1}{5^5}$

8. 0

19. a) nem létezik

9. $\frac{1}{2}$

b) 1 .

10. $+\infty$

11. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

12. $\frac{1}{2}$

12. 1. $\frac{1}{2}$

2. -1

3. 1

4. $-\frac{1}{2}$

13. 1. 0

2. 1

3. 0

14. 1. Miután $\sqrt{n^2 - 1} + n \neq 0$, szorozzuk meg

$$a_n - 1 = \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{\sqrt{n^2 - 1} + n} \text{ -nel, így}$$

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2 - 1} - n)(\sqrt{n^2 - 1} + n)}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = \frac{(n^2 - 1) - n^2}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = \frac{-1}{\sqrt{n^2 - 1} + n} .$$

Miután $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} + n) = +\infty$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 .$$

2. 0

4. 1

6. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{1}{2}$

5. $\frac{1}{2}$

7. $\frac{1}{2}$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$\textcircled{15.} \quad 1. \quad 0 \qquad 2. \quad \frac{1}{k} \qquad 3. \quad \frac{3}{2}$$

(Mindhárom esetben használható az alábbi azonosság:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\textcircled{16.} \quad 1. \quad 0 \qquad 3. \quad +\infty \qquad 5. \quad \frac{1}{2}$$

$$2. \quad -1 \qquad 4. \quad 0$$

$$\textcircled{17.} \quad 1. \quad 0 \qquad 2. \quad -\frac{4}{3} \qquad 3. \quad 1 \qquad 4. \quad 0$$

$$\textcircled{18.} \quad \boxed{1.} \quad \text{Egyrészt } b \geq a \geq 1 \text{ esetén } \forall n \in \mathbb{N}\text{-re}$$

$$\sqrt[n]{b} \geq \sqrt[n]{a} \geq 1.$$

Másrészt $n \geq 1$ miatt

$$1 \leq 1 + \frac{1}{2n} \leq 1 + 1 = 2.$$

Ezért

$$1 = \sqrt[2n]{1} \leq \sqrt[2n]{1 + \frac{1}{2n}} \leq \sqrt[2n]{2} < \sqrt[n]{2},$$

amiből

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ következik.

$$2. \quad 1 \qquad 3. \quad 1 \qquad 4. \quad 0$$

$$\textcircled{5.} \quad 1$$

$$\left(\sqrt[n]{n} \geq 1, \text{ ezért } a_n \text{ felírható} \right)$$

$$\sqrt[n]{n} = 1 + x_n; \quad x_n \geq 0 \text{ alakban.}$$

Ebből Bernoulli-egyenletlenséget használva

$$0 \leq x_n \leq \frac{n-1}{n^2}$$

$$6. \quad 1.$$

19. 1. Minden a -ra, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$$

2. Minden a -ra, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 1 & |a| < 1 \\ 1/2 & |a| = 1 \\ 0 & |a| > 1 \end{cases}$$

3. Minden $a \neq -1$ -re, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1/2 & a = 1 \\ 1 & |a| > 1 \end{cases}$$

4. Minden $a \neq -1$ -re, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1/2 & a = 1 \\ 0 & |a| > 1 \end{cases}$$

5. Minden $a \neq 0$ -ra, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -1 & |a| < 1 \\ 0 & |a| = 1 \\ 1 & |a| > 1 \end{cases}$$

6. Minden $a \geq 0$ -ra, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} a^2 & a > 2 \\ 2\sqrt{2} & a = 2 \\ 0 & 0 \leq a < 2 \end{cases}$$

(7.) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \forall a \geq 0$ esetén.

$$\left(0 \leq a_n \leq \frac{a^n}{1 + \frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow 0 \text{ ha } a \neq 1, \text{ és} \right.$$

$$\left. a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0, \quad \text{ha } a = 1 \right)$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$\underline{20.} \quad 1. \quad \frac{1-b}{1-a} \quad 2. \quad -\infty \quad 3. \quad \max \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

21. 1. Legyen $n > 3$. Ekkor

$$a_n = \frac{n^3}{(n-1)!n} = \frac{n^2}{(n-1)!} \leq \frac{n^2}{(n-3)(n-2)(n-1)} \leq \frac{n^2}{(n-3)^3}.$$

$$\text{Igy} \quad 0 \leq a_n \leq \frac{n^2}{(n-3)^3},$$

$$\text{de} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n-3)^3} = 0, \quad \text{ezért}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$2. \quad 0 \quad 3. \quad 0 \quad 4. \quad 0$$

$$\textcircled{5.} \quad 0 \quad \left(a_n = \frac{n!}{(n+1) \cdot \dots \cdot 2n} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{n+k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$\textcircled{6.} \quad \left(\text{Tetszőleges rögzített } k \in \mathbb{N}\text{-re} \right. \\ \left. n! \geq k^{n-k+1} \text{ minden } n > k \text{ esetén.} \right)$$

$$\text{Ebből } \sqrt[n]{n!} \geq k \cdot \sqrt[n]{k} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{k^k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k, \quad \text{azaz}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ esetén.})$$

22. 1. Jelöljük az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértékét e -vel.

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1} = \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{2n-1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n-1} = \\ = \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-3}.$$

$$\text{Mivel } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

(mert az e -t definiáló konvergens sorozat egy részsorozata),

$$\text{és } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-3} = 1,$$

$$\text{így } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2.$$

2. e	4. e^6	6. e
3. e^{-5}	5. 0	7. $+\infty$

23. (1.) $+\infty$

($\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$)

(2.) 0 .

($a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$)

(3.) 1

($\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$)

(4.) 1

($1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 3$)

24. [1.] $\frac{1}{k(k+1)}$ -et parciális törtekre bontva:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

így

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}.$$

Teljes indukcióval belátjuk, hogy

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$n = 1$ -re már láttuk.

Tegyük fel, hogy $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Ekkor

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1} \right) = \\ &= a_n + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Tehát

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$2. \quad \infty \qquad 3. \quad \frac{1}{4} \qquad 4. \quad \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad \frac{1}{2} \quad \left(a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \right)$$

$$(6) \quad a) \quad \infty \quad \left(a_n = n+1 \right)$$

$$b) \quad 0 \quad \left(\left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(1 + \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{k^2} \quad \text{és lásd 5.. vagy: } a_n = \frac{1}{n} \right)$$

$$(7) \quad \frac{1}{6} \quad \left(a_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n+2}{n}, \quad \text{ha } n \geq 5 \right)$$

25. 1. Növekvő, korlátos.
2. $a < 1$ esetén növekvő, $a > 1$ esetén csökkenő; mindkét esetben korlátos.
3. Csökkenő, korlátos.

VIII. SZÁMSOROZATOK

4. Növekvő, korlátos.
5. Csökkenő, korlátos.
6. Csökkenő, korlátos.

26. 1.
 $\alpha.) a_n - a_{n-1} = \frac{(0,5)^n}{n^2} > 0$, azaz

$$a_n > a_{n-1}, \text{ tehát } (a_n) \text{ mon. növő.}$$

$$\beta.) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(0,5)^k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n (0,5)^k = b_n;$$

(b_n) ugyanugy, ahogy (a_n) monoton növő, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (0,5)^k = \frac{0,5}{1 - 0,5} = 1.$$

Igy $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát (a_n) korlátos.

$\gamma.)$ Mivel (a_n) monoton növő és korlátos, így konvergens.

2. Konvergens, mert monoton növő és korlátos.

③ Divergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Jelölve $b_k = \frac{1-2k}{k+1}$, $b_k \rightarrow -2$, így van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $b_k < -1$, ha $k > N$. Ezért ha $n > N$, akkor

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^N b_k + \sum_{k=N+1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^N b_k - (n - N) = \\ &= \sum_{k=1}^N b_k + N - n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$

④ Divergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

(Nem tesz eleget a Cauchy-féle konv. feltételnek, hiszen

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n} = \\ &= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

VII. SZÁMSOROZATOK

azaz

$$a_{2n} - a_n > \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mellett.}$$

Mivel

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} > 0, \text{ azaz}$$

(a_n) monoton növekvő, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.)$$

(5.) Divergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$

($n > 3$ esetén)

$$a_n > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ (lásd előző pl.)}$$

27. [1.] Első megoldás

$\alpha.)$ Tegyük fel, hogy konvergens. Mivel nyilván

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$, ezért a sorozatot definiáló rekurziós formulából

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}}{2}.$$

Ebből a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ jelölés mellett

$$A = 1 + \frac{A}{2},$$

amiből

$$A = 2.$$

$$\beta.) a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad a_3 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

Teljes indukcióval belátjuk: a sorozat monoton növekedő.
Láthatjuk, hogy

$$a_1 < a_2.$$

VIII. SZAMSOROZATOK

Tegyük fel, hogy $a_n > a_{n-1}$, ekkor

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} > 1 + \frac{a_{n-1}}{2} = a_n,$$

azaz $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

γ.) Teljes indukcióval belátjuk, hogy a sorozat felülről korlátos. Belátjuk, hogy monoton növekvő. Ha felülről korlátos, akkor az α -ban kapott A felső korlát kell legyen.

Láthatjuk, hogy

$$a_1 < 2.$$

Tegyük fel, hogy $a_{n-1} < 2$, ekkor

$$a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{2} < 1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2,$$

azaz $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

Tehát beláttuk, hogy a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, így konvergens és ezért α -ból

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

Második megoldás

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Teljes indukcióval belátjuk, hogy

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

$$a_1 = \sum_{k=0}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1.$$

$$\text{Tegyük fel, hogy } a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

$$\text{így } a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \text{ amiből}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$(2) \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$$

$$(3) \quad a_n > 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{mon. csökkenő}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

$$(4) \quad 0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{mon. növekvő}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$(5) \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{mon. csökkenő}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$(6) \quad \text{Divergens: } |a_{2n} - a_{2n-1}| = 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(7) \quad a_n \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{mon. növekvő}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ (pedig az } A = -4 + 3A \text{ egyenlet megoldása } A = 2).$$

$$(9) \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$$

$$(10) \quad a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ (megjegyzés: a sorozat nem monoton)}$$

$$(11) \quad a_n > 1 + \sqrt{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{mon. csökkenő}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \sqrt{6}$$

$$(12) \quad a_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{mon. csökkenő}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$(13) \quad a_n = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

28. ①. Konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$

$(a_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \text{ monoton növekedő})$

②. Konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{c}$

$(a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}; (a_{n-1} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \text{ -ből következik, hogy}$

$\frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}}) \geq \sqrt{c} \quad \forall n \geq 2, \text{ azaz } a_n \geq \sqrt{c}, \text{ tehát alulról}$

korlátos, és ebből $a_n \geq \frac{c}{a_n}$, amiből következik, hogy (a_n) monoton csökkenő.)

③. Konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

$(c > 1 \text{ esetén } a_n \leq c \text{ és } (a_n) \text{ monoton növekedő, } c < 1 \text{ esetén } a_n \geq c \text{ és } (a_n) \text{ monoton csökkenő}).$

④. Konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$(a_n = a_{n-1}(1 - a_{n-1}), \text{ így ha}$

$0 < a_{n-1} < 1, \text{ akkor } 0 < a_n < 1, \text{ azaz korlátos. Mivel ekkor}$

$0 < 1 - a_{n-1} < 1, \text{ így } a_n < a_{n-1}).$

29. a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & -4 < a_1 < 3 \\ 3 & a_1 = 3 \text{ vagy } a_1 = -4 \\ +\infty & a_1 \notin [-4, 3] \end{cases}$$

(Ha valamely $N \in \mathbb{N}$ esetén

$\alpha) 0 \leq a_N < 3, \text{ akkor } 0 \leq a_n < 3, \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n > N \text{-re,}$

$\beta) -1 < a_N < 0, \text{ akkor } -1 < a_n < 0, \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n > N \text{-re,}$

$\gamma) -4 < a_N \leq -1, \text{ akkor } 0 \leq a_n < 3, \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n > N \text{-re,}$

$\delta) a_N = -4 \text{ vagy } a_N = 3, \text{ akkor } a_n = 3 \quad \forall n > N \text{-re,}$

$\epsilon) a_N \notin [-4, 3], \text{ akkor } a_n > 3, \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n > N \text{-re,}$

és ha konvergens, csak

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ vagy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \text{ lehet.})$

VII. SZÁMSOROZATOK

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -\infty & -\frac{1}{2} \leq a_1 \leq 0 \\ \infty & a_1 \notin \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases}$$

Ha valamely $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\alpha) \quad a_N > 0, \quad \text{akkor} \quad a_n > 0, \quad a_{n+1} > a_n \quad \forall n > N \text{-re,}$$

$$\beta) \quad a_N < -\frac{1}{2}, \quad \text{akkor} \quad a_n > 0, \quad a_{n+1} > a_n \quad \forall n > N \text{-re,}$$

és ha konvergens, csak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ lehet.)

30. Felhasználva, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

teljes indukcióval belátható, hogy $n \geq 2$ esetén

$$b_n = a_{n-2} a + c_{n-2} b,$$

ahol

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{és} \quad a_n = 1 - c_n.$$

Mivel

$$c_n \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

ezért

$$b_n \rightarrow \frac{a + 2b}{3}.$$

31. 1. Belátandó, hogy

$$1. \quad b \leq a_n \leq a \quad b \leq b_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{-re}$$

$$2. \quad a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{-re}$$

$$3. \quad a_n \geq a_{n+1} \quad b_n \leq b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{-re}$$

4. Indirekt. Az $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ feltételezésből ellentmondásra jutunk.

2. Belátandó, hogy

$$1. \quad b \leq a_n \leq a \quad b \leq b_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{-re,}$$

$$2. \quad a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{-re.}$$

VIII. SZAMSOROZATOK

$$3. \quad a_n \geq a_{n+1}, \quad b_n \leq b_{n+1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ -re

$$4. \quad a_n b_n = ab$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ -re

5. Indirekt. Az $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ feltételezésből ellentmondásra jutunk.

$$6. \quad ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^2$$

(32) $\alpha)$ (a_n) korlátos, hiszen ha pl. felülről nem az, akkor van olyan (a_{n_k}) részsorozata, amelyre $a_{n_k} \rightarrow -\infty$ és ekkor valójában $N \in \mathbb{N}$ -nel $\forall n_k > N$ -re $a_{n_k} > 0$

$$\text{és} \quad \frac{a_{n_k} - 1}{a_{n_k} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{a_{n_k}}}{1 + \frac{1}{a_{n_k}}} \longrightarrow 1 \neq 0.$$

Ugyanígy látható be az is, hogy (a_n) alulról korlátos.

$\beta)$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Mivel (a_n) korlátos, így van olyan $K > 0$, hogy

$$|a_n + 1| < K \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 1} \rightarrow 0, \quad \text{amiből következik, hogy van olyan } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy}$$

$$n > N \text{ esetén}$$

$$\left| \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \right| < \varepsilon / K, \quad \text{azaz } |a_n - 1| < \varepsilon / K \cdot |a_n + 1| < \varepsilon / K \cdot K = \varepsilon.$$

(33) Van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor

$$\sqrt[n]{a_{n+1} - a_n} < q < 1.$$

Ezért

$$0 < a_{n+1} - a_n < q^n,$$

ebből $\forall k \in \mathbb{N}$ -re

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$|a_{n+k} - a_n| \leq q^n \cdot \sum_{m=0}^{k-1} q^m.$$

Az $S_k = \sum_{m=0}^{k-1} q^m$ konvergens, (mert $|q| < 1$), így korlátos.

Tehát $\forall k \in \mathbb{N}$ -re $|a_{n+k} - a_n| \leq q^n \cdot L$, $|q| < 1$; ebből adódik, hogy (a_n) Cauchy-sorozat.

34. Nem (lásd a 7. példát).

35. 1. a) A feltételekből: van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy (a_n) monoton csökkenő $\forall n > N$ -re, alulról korlátos (mert pozitív, így konvergens).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \text{ akkor } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

$$\text{b) b1. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases} \quad \text{b2. } 0 \quad \text{b3. } 0$$

$$\text{b4. } \infty, \text{ (mert } \frac{1}{a_n} \rightarrow 0) \quad \text{b5. } 0 \quad \text{b6. } 0$$

2. a) A feltételekből: van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1 \quad \forall n > N \text{-re, így } 0 < a_n < q^n, \text{ amiből}$$

$$\text{(pl. b1. miatt)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\text{b) b1. } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow e, \text{ így } \sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} \rightarrow 1/e, \text{ amiből a) alapján}$$

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow 0, \text{ azaz } a_n \rightarrow \infty.$$

$$\text{b2. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 1/e & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases} \quad \text{teljes indukcióval.}$$

$$\text{b3. } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1, \text{ így } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0, \text{ amiből } a_n \rightarrow 0.$$

③ a) $a_n = \sqrt[n]{a_n} \rightarrow c < 1$, így 2. alapján

$$a_n \rightarrow 0.$$

b) $\frac{1}{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} \rightarrow c < 1$, így 2. alapján

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow 0, \text{ azaz } a_n \rightarrow +\infty.$$

④ a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0),$

mg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1/e$, $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$,
 $a \rightarrow a$.

③③. 1. a) Cauchy-féle konvergencia kritériummal, például $n > m$ esetén:

$$|d_n - d_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = \sum_{k=m+1}^n a_k \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = |c_n - c_m|,$$

így (c_n) konvergenciájából következik (d_n) konvergenciája.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 0$ -ból következik, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén

$$a_n \leq \frac{1}{2^n},$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1,$$

ami a)-val az állítást adja.

VIII. SZÁMSOROZATOK

2. a) Cauchy-konvergencia kritériumot $m = n-1$ ($n > 1$) -re alkalmazva adódik az állítás, mivel ekkor:

$$|d_n - d_m| = \sum_{k=m+1}^n a_k = \sum_{k=n}^n a_k = a_n.$$

- b) a)-val $a_n \rightarrow 0$, így van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n < 1$; $a_n \geq 0$ feltétel volt. Ezekből $0 \leq a_n^2 < a_n$, ha $n > N$, és az 1.a)-val az állítást adja.

37. (1) a) Indirekt feltevésből: két különböző határértékhez konvergáló részsorozatból kiválasztható divergens részsorozat.
 b) Indirekt feltevésből: pl. monoton növekedő esetben, ha nem konvergens, nem lehet korlátos, de akkor tetszőleges valós számnál kisebb elemei a sorozatnak csak véges sokan vannak.
 c) Ha nem korlátos, a nem korlátosság definíciójából. Ha korlátos, Bolzano-Weierstrass-tétel alapján van konvergens részsorozata, ebből pedig mindig kiválasztható monoton részsorozat.

- (2) Indirekt feltevással konstruálható monoton csökkenő részsorozat.
 (3) Nem, (a_n) -nek van vagy végtelen sok negatív, vagy végtelen sok nem negatív előjelű tagja; és a feltétel szerint az azonos előjelű tagokból alkotott végtelen részsorozat konvergens.

4. (c) a)-val elég belátni, hogy $A = B$.

Indirekt feltevással: $A \neq B$

$3(2m) = 2(3m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$, esetén így

$(a_{3(2m)})$ részsorozata (a_{2k}) -nak is és (a_{3k}) -nak is.

Ezért

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{3(2m)} = A.$$

Ugyanígy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{3(2m+1)} = B.$$

Igy ha $A \neq B$, akkor (a_{3k}) nem lehet konvergens.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

6. A két halmaz azonos.

38. 1. Ha f kölcsönösen egyértelmű, akkor

$(a_{f(n)})$ is konvergens.

2. Ha f nem kölcsönösen egyértelmű, akkor $(a_{f(n)})$ lehet konvergens, de lehet divergens is, pl.:

$$a_n = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad \begin{aligned} f(2k) &= 2k & k &= 1, 2, \dots \\ f(2k-1) &= 1 & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ekkor $(a_{f(n)})$ -nek van egy 0-hoz és egy 1-hez tartó részsorozata.

39. Nem: pl.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2n} \leq 1 + \frac{1}{n} = b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 < a_n = 1 + \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Azonban, ha (b_n) monoton növekvő, akkor

$$a_n \leq b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ -re.}$$

40. ① a) A határérték tetszőleges környezetén kívül csak véges sok elem van.

b) $+\infty$ -hez tartó sorozat tetszőleges eleménél kisebb elem csak véges sok van.

② Nem pl. szigorúan monoton növekvő konvergens sorozatnak csak legkisebb eleme van.

$$\left(\text{pl. } a_n = 1 - \frac{1}{n} \right)$$

42. 1. ∞) $(a_n + b_n)$ divergens.

3) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, akkor $(a_n b_n)$ divergens.

$$\text{Ha } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

és (b_n) korlátos, akkor $(a_n b_n)$ konvergens.

$$\text{Ha } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

és (b_n) nem korlátos, akkor

VIII. SZÁMSOROZATOK

(a_n, b_n) lehet konvergens: pl. ha $a_n = \frac{1}{n}$

$$b_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ -re,}$$

és lehet divergens: pl. ha $a_n = \frac{1}{n}$

$$b_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ -re.}$$

2. (a) Az összeg és a szorzat lehet konvergens is és divergens is.

pl. $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

$$(b_n) = (0, 1, 0, 1, \dots)$$

itt $(a_n + b_n)$ divergens,

$(a_n + (-a_n))$ konvergens,

$(a_n \cdot b_n)$ divergens,

$(a_n \cdot a_n)$ konvergens.

(b) Nem (hiszen ha $c_n = a_n + b_n$, $d_n = a_n - b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ -re,}$
akkor

$$\frac{c_n + d_n}{2} = a_n .)$$

(c) Nem (hiszen ekkor $c_n = (a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
is konvergens volna, ebből (mivel $(a_n b_n)$ konvergens)

$d_n = a_n^2 + b_n^2$ is az volna, amiből ugyanígy

$$e_n = a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2 = (a_n - b_n)^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ és vele}$$

$(a_n \geq b_n) \quad f_n = a_n - b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ is konvergens volna, de ez b) miatt lehetetlen).

Megjegyzés: Ha az $a_n \geq b_n$ kikötést nem tesszük, akkor lehet.

pl. $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

$$b_n = a_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

3. a) Nem. pl. $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$,

$$b_n = a_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

- b) Igen. (Ugyanis tegyük fel, hogy nincs.
Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, hogy véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével

$$|a_n b_n| > \varepsilon)$$

4. Nem. pl. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

5. a) $a_n = n$

$$b_n = -n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

b) Nem: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = +\infty$.

43. a) Tetsz. végtelenhez divergáló sorozat.

b) pl. $(-1, 0, 1, -1, 0, 1, \dots)$

c) pl. $(1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \dots)$

d) pl. $\left\{ \frac{k}{2^n}; n = 1, 2, \dots \quad k_n = 1, 2, \dots, 2^n \right\}$

e) Cantor átlós módszerrel rendezett racionális számok.

44. Legyen az adott sorozat (a_n) , és legyen (a_{nk}) minden rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén olyan, hogy $a_{nk} \rightarrow a_n$ (pl. $a_{nk} = a_n + \frac{1}{k}$).

Ekkor a kívánt sorozat Cantor-féle átlós módszerrel megszerkeszthető:

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, \dots)$$

A sorozat torlódási értékei az eredeti sorozat tagjain kívül az eredeti sorozat torlódási értékei is.

45. 1. Egy konvergens és egy $+\infty$ -hez divergáló sorozat tagjainak összegéből alkotott sorozat $+\infty$ -hez divergál, így a Definíció alkalmazható összeadás esetén

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{-re és } +\infty \text{-re, és}$$

$$x + \infty = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Analóg állítások felelnek meg az alábbi egyenlőségeknek, melyek alapján definiálható:

$$a) \cdot x + \infty = +\infty \quad x - \infty = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$b) \ x \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$x \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty$$

$$\frac{-\infty}{x} = -\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$$

$$c) \ x \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$x \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{x} = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < 0$$

$$d) \ (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$e) \ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Nem definiálható:

$$a) \ (+\infty) - (+\infty)$$

$$b) \ (-\infty) - (-\infty)$$

$$c) \ (+\infty) + (-\infty)$$

$$d) \ 0 \cdot (+\infty)$$

$$e) \ 0 \cdot (-\infty)$$

$$f) \ \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$g) \ \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$h) \ \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$i) \ \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$j) \ \frac{+\infty}{0}$$

$$k) \ \frac{-\infty}{0}$$

$$\text{mert } \underline{\text{pl.}} \quad a_n = n \quad b_n = n^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \rightarrow \infty$$

$$a) \ a_n - b_n \rightarrow -\infty,$$

$$b_n - a_n \rightarrow +\infty$$

$$b) \ (-a_n) - (-b_n) \rightarrow +\infty,$$

$$(-b_n) - (-a_n) \rightarrow -\infty$$

$$c) \ a_n + (-b_n) \rightarrow -\infty,$$

$$b_n + (-a_n) \rightarrow +\infty$$

$$d) \ \frac{1}{a_n} \cdot b_n \rightarrow +\infty,$$

$$\frac{1}{b_n} \cdot a_n \rightarrow 0$$

$$e) \ \frac{1}{a_n} \cdot (-b_n) \rightarrow -\infty,$$

$$\frac{1}{b_n} \cdot (-a_n) \rightarrow 0$$

$$f) \ \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0,$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow +\infty$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$\begin{array}{ll} \text{g)} \frac{a_n}{-b_n} \rightarrow 0, & \frac{b_n}{-a_n} \rightarrow -\infty \\ \text{h)} \frac{-a_n}{b_n} \rightarrow 0, & \frac{-b_n}{a_n} \rightarrow -\infty \\ \text{i)} \frac{-a_n}{-b_n} \rightarrow 0, & \frac{-b_n}{-a_n} \rightarrow +\infty \\ \text{j)} \frac{b_n}{\frac{1}{a_n}} \rightarrow +\infty, & \frac{b_n}{-\frac{1}{a_n}} \rightarrow -\infty \\ \text{k)} \frac{-b_n}{\frac{1}{a_n}} \rightarrow -\infty & \frac{-b_n}{-\frac{1}{a_n}} \rightarrow +\infty \end{array}$$

2. Az 1.-et felhasználva, minden olyan műveleti azonosság érvényben marad, amelyben szereplő műveletek a Definíció alapján értelmezhetők.

Például: $\forall a, b, c \in \tilde{\mathbb{R}}$ mellett,

ha $a \neq 0$, akkor $ab = ba$.

Vagy $\forall a, b, c \in \tilde{\mathbb{R}}$ mellett, ha $a, b, c > 0$, akkor

$$a(b + c) = ab + ac.$$

46. (2.) Indirekt. Pl. $\inf(a_n) > \inf E$, ebből (mivel 1.c) -vel $\inf E \in E$, így $\inf E$ torlódási értéke (a_n) -nek van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy
- $$a_{n_0} < \inf(a_n), \text{ ami ellentmondás.}$$

- (3) a) $\alpha)$ Szűkebb halmaz supremuma nem nagyobb, így (b_k) monoton csökken.

$\beta)$ $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k$ torlódási értéke (a_n) -nek, így

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k \leq \sup E$$

$\gamma)$ $\sup(a_n) \geq \sup E$ (lásd 2.)

$\delta)$ (a_n) és (a_{n+k}) torlódási értékei ugyanazok $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén, és az (a_{n+k}) sorozatra is igaz $\gamma)$ megfelelője, így

$$b_k = \sup(a_{n+k}) \geq \sup E \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ mellett,}$$

azaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k \geq \sup E$$

b)

$\alpha)$ ha $B = \sup E$, mivel E tartalmazza felső határát (lásd 1.c), $B \in E$ és felső határ, így (a_n) tetszőleges n torlódási

VIII. SZÁMSOROZATOK

értékére $p \leq B$, aminek ellentmondana az, ha a 2. tulajdonság nem teljesülne.

- β) ha teljesül az 1. tulajdonság, akkor, mivel így $B \in E$ és $\sup E$ az E felső határa, $\sup E \geq B$. Feltéve indirekte, hogy $\sup E > B$, a 2. tulajdonsággal $\sup E$ nem lehet (a_n) torlódási értéke, azaz $\sup E \notin E$, ami ellentmond annak, hogy E tartalmazza felső határát (lásd 1.c)).

4. a) Képezve a

$$c_k = \inf \{ a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \}$$

számokból álló sorozatot minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, fennáll, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \inf E$$

b) Egy D számra (lehet $-\infty$ is) a következő két állítás:

1. $D \in E$
2. Ha $x < D$ akkor van $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > x$,

akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$D = \inf E$$

Az állítások bizonyítása analóg a 3.-beli állítások bizonyításával.

- (47). 1. a) A $\lim a_n > -\infty$ és $\lim b_n > -\infty$ feltétel miatt a jobb oldal mindig értelmes. Indirekt feltevésből az $(a_n + b_n)$ sorozatnak van olyan torlódási értéke, amelyre

$$\lim (a_n + b_n) \leq c < \lim a_n + \lim b_n.$$

Miután c az $(a_n + b_n)$ torlódási értéke, ezért az $(a_n + b_n)$ sorozatnak van olyan $(a_{n_k} + b_{n_k})$ részsorozata, amelyre

$a_{n_k} + b_{n_k} \rightarrow c$. (a_n) -ből kiválasztható egy (a_{n_k}) , az ennek megfelelő (b_{n_k}) -ből pedig egy $(b_{n_k'})$ konvergens, vagy végtelenhez divergáló részsorozat; (a_{n_k}) $(b_{n_k'})$ -nek megfelelő részsorozata pedig $(a_{n_k'})$. Ekkor

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$\lim (a_{n_k} + b_{n_k}) = c.$$

Ezért

$$\begin{aligned} \lim a_n + \lim b_n &\leq \lim a_{n_k} + \lim b_{n_k} = \lim (a_{n_k} + b_{n_k}) = \\ &= c < \lim a_n + \lim b_n, \text{ ami ellentmondás.} \end{aligned}$$

b) Az előzőhöz teljesen hasonlóan bizonyítható.

($\lim a_n > 0$, $\lim b_n > 0$ feltétel miatt a bal oldal mindig értelmes.)

c) Indirekt feltevéssel $A = \lim a_n > \lim b_n = B$. Miután B torló-dási érték, (b_n) -ből kiválasztható egy (b_{n_k}) részsorozat, hogy $b_{n_k} \rightarrow B$, (a_n) -ből kiválasztható egy $(a_{n_k'})$ konvergens (vagy végtelenhez divergáló) részsorozat: $a_{n_k'} \rightarrow A'$.

Mivel $a_{n_k'} \leq b_{n_k}$, így

$$A \leq A' \leq B < A, \text{ ami ellentmondás.}$$

d) $\lim a_n > 0$. Indirekt feltevéssel: az (a_n) sorozatnak van olyan (a_{n_k}) és (a_{n_l}) részsorozata, amelyre $a_{n_k} \rightarrow A$, $a_{n_l} \rightarrow B$, és például $A < B$.

Tehát $\lim a_n \leq A < B$. De ekkor $\frac{1}{a_{n_k}} \rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B} \leftarrow \frac{1}{a_{n_l}}$, így

$$\lim \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{B} < \frac{1}{A}.$$

Ezért $\lim a_n \cdot \lim \frac{1}{a_n} < A \cdot \frac{1}{A} = 1$, ami ellentmondás.

e) A $(-a_n)$ sorozatnak van olyan $(-a_{n_k})$ részsorozata, hogy

$$-a_{n_k} \rightarrow \lim (-a_n), \text{ így } a_{n_k} \rightarrow -\lim (-a_n),$$

$$\text{amiből } \lim a_n \geq -\lim (-a_n).$$

Másrészt (a_n) -nek van olyan (a_{n_l}) részsorozata, hogy

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$a_{n_l} \rightarrow \lim a_n, \quad \text{így} \quad -a_{n_l} \rightarrow -\lim a_n,$$

$$\text{amiből } \lim (-a_n) \leq -\lim a_n, \quad \text{azaz } \lim a_n \leq -\lim (-a_n).$$

2. a) Ha $\lim a_n < +\infty$ és $\lim b_n < +\infty$, akkor

$$\lim (a_n + b_n) \leq \lim a_n + \lim b_n.$$

b) Ha $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\text{és } \lim a_n > 0, \quad \lim b_n > 0, \quad \text{akkor}$$

$$\lim a_n \cdot \lim b_n \geq \lim (a_n b_n).$$

c) Ha $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ -re, akkor

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

d) Ha $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ -re

$$\text{és } \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{a_n} = 1,$$

akkor (a_n) konvergens.

$$\text{e) } \lim (-a_n) = -\lim a_n$$

Az állítások bizonyítása analóg a $\lim \inf$ -re vonatkozóakkal.

3. 1.a) és 2.a) -hoz $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

$$b_n = a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.b) és 2.b) -hez $(a_n) = (1, 2, 1, 2, \dots)$

$$b_n = a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

48. ① a) 47. pl.-ből tudjuk, hogy

$$\lim (a_n + b_n) \leq \lim a_n + \lim b_n.$$

Másrészt (b_n) -nek van olyan (b_{n_k}) részsorozata, amelyre

$$b_{n_k} \rightarrow \lim b_n, \quad \text{és } (a_{n_k} + b_{n_k}) \text{ nyilván } (a_n + b_n) \text{ részsorozata.}$$

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$\lim (a_{n_k} + b_{n_k}) = \lim a_{n_k} + \lim b_{n_k} = \lim a_n + \overline{\lim} b_n,$$

$$\text{és } \lim (a_{n_k} + b_{n_k}) \leq \overline{\lim} (a_n + b_n),$$

azaz

$$\overline{\lim} (a_n + b_n) \geq \lim (a_{n_k} + b_{n_k}) = \lim a_n + \overline{\lim} b_n.$$

- b) Ha b1) áll fenn, akkor tekintve a $b_n = -a_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) sorozatot, a 47. pl.-ből.

$$\overline{\lim} b_n = \overline{\lim} (-a_n) = -\underline{\lim} a_n,$$

$$\text{így } \overline{\lim} (a_n - a_n) = 0 = \overline{\lim} a_n - \underline{\lim} a_n,$$

így a 46. pl.-val készen vagyunk.

- Ha b2) áll fenn, akkor tekintve a $b_n = \frac{1}{a_n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) sorozatot

$$\overline{\lim} (a_n \cdot \frac{1}{a_n}) = 1 = \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} \frac{1}{a_n},$$

amiből a 47. pl.-val készen vagyunk.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = +\infty$$

- (49.) a) az intervallum végpontjaira igaz, mert egy korlátos sorozat torlódási értékeinek halmaza korlátos zárt halmaz, így tartalmazza alsó és felső határát.
b) egy tetszőleges belső p pontot tekintve és indirekte feltéve, hogy az nem torlódási érték: van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\underline{\lim} a_k < p - \varepsilon < p + \varepsilon < \overline{\lim} a_k \quad (1), \text{ és } N_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy}$$

minden $n > N_0$ esetén $a_n < p - \varepsilon$ vagy $p + \varepsilon < a_n$; $|a_{n+1} - a_n| \rightarrow 0$, így van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, ha $n > N$.

Miután az $E_1 = (-\infty, p - \varepsilon]$ és az $E_2 = [p + \varepsilon, +\infty)$ intervallumokban a sorozatnak végtelen sok eleme van ((1) miatt), kell, hogy legyen olyan $k > N$, hogy

$$a_k \in E_1 \quad \text{és} \quad a_{k+1} \in E_2.$$

Ekkor azonban $|a_{k+1} - a_k| > \varepsilon$, ami ellentmondás.

VIII. SZÁMSOROZATOK

(50.) Nem. $\lim a_n = \frac{1}{2} \neq \overline{\lim} a_n = 1$

(teljes indukcióval:

$$a_{2n+1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad n \geq 1,$$

$$a_{2n} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad n \geq 2,$$

$$\text{így } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{1}{2},$$

amiből (más határértékhez konvergáló részsorozata nem lehet):

$$\lim a_n = \frac{1}{2},$$

$$\overline{\lim} a_n = 1.)$$

(51.) 1. a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $a_n \rightarrow A$, így van olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N_0$. Ebből, ha $n > N_0$, az

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{jelöléssel} \quad |S_n - A| < \varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_0} |a_k - A|.$$

Igy $\overline{\lim} |S_n - A| \leq \varepsilon$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt.

b) a)-hoz hasonlóan, ha

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow A, \quad \text{akkor} \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_0,$$

amiből az

$$S_n = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k}$$

jelöléssel

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$|S_n - A| \leq \frac{\sum_{k=1}^{N_0} \left| b_k \left(\frac{a_k}{b_k} - A \right) \right|}{\sum_{k=1}^n b_k} + \varepsilon \frac{\sum_{k=N_0+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n b_k}, \text{ ha } n > N_0, \text{ az}$$

amiből $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - A| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt.

$$2. a) a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ így } a_n \rightarrow 0$$

1.a) miatt.

b) b_n -re fennállnak a b) feltételei,

$$\frac{na_n}{n} = a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow A.$$

3. Alkalmazzuk 1.b) -t a)

$(a_{n+1} - a_n)$, $(b_{n+1} - b_n)$ sorozatokra.

4. a) Igen (3. -ből $b_n = n$ -el)

$$b) \text{ Az } a_n = 1^m + 2^m + \dots + n^m$$

$$b_n = n^{m+1}$$

jelöléssel

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^m}{(n+1)^{m+1} - n^{m+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1}, \text{ amiből}$$

3. -mal adódik az állítás.

c) Nem: pl. $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$ nem konvergens, pedig

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(52.) 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Ha $A > 0$, $0 < \varepsilon < A$ -hoz van olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$.

ha $n > N_0$, amiből a

VIII. SZÁMSOROZATOK

$$b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \text{ jelöléssel ha } n > N_0 :$$

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_{N_0}} \cdot \sqrt[n]{(A - \varepsilon)^{n-N_0}} < b_n < \sqrt[n]{a_1 \dots a_{N_0}} \cdot \sqrt[n]{(A + \varepsilon)^{n-N_0}} .$$

$$\text{Ebből} \quad |\overline{\lim} b_n - A| \leq \varepsilon ,$$

$$\text{és} \quad |\underline{\lim} b_n - A| \leq \varepsilon .$$

Ha $A = 0$, akkor az előbbi gondolatmenet csak felső becslést használva alkalmazható.

2. a) Alkalmazzuk 1.-et a $a_1 = b_1, a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} (n > 1)$ sorozatra!

$$\text{b) b1) } 1 \quad \text{b2) } e \left(b_n = a_n^{n-1}, \frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$$

b3. ∞ (b2) miatt).

3. a) 2.a)-ból, mert ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C \neq 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

b) 3.a)-ból: ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ lenne, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ lenne.

c) c1) mivel $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \rightarrow e$, 3.a) -ból

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}} \rightarrow 1 .$$

$$\text{c2) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 1/e & k = 1 \\ 1 & k > 1 \end{cases}$$

(ugyanis m -re való indukcióval igazolható $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén, hogy minden $0 < m \leq k$ -ra

$$\left(1 - \frac{1}{k} \right)^{n^{k-m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 .)$$

c3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ (k -ra vonatkozó teljes indukcióval.)