

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Benkő Pálné - Diószegi Ferencné - Serény György

MATEMATIKA FELADATTÁR
II.

**Valós egyváltozós függvények
differenciál- és integrálszámítása**

Szerkesztette:
Antos Péter



Műegyetemi Kiadó, 2002.

Írta:

Serény György (I. fejezet)
Benkő Pálné (II. fejezet)
Diószegi Ferencné (III. fejezet)

(Nyolcadik utánnnyomás)

Azonosító: **051387**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Hajdu István

Terjedelem: 27,7 (A/5) ív

Nyomta és kötötte:

Műegyetemi Nyomda

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0142-02

TARTALOMJEGYZÉK

	Feladat	Megoldás
I. Egyváltozós függvények alapvető tulajdonságai.		
Határérték, folytonosság	5	121
1. Alapfogalmak	5	121
1.1 Értelmezési tartomány, értékészlet . . .	5	121
1.2 Monotonitás	5	123
1.3 Korlátosság, szélsőérték	7	125
1.4 Konvexitás-konkávitás, párosság-páratlan- ság, periodicitás	10	129
1.5 Műveletek függvények körében	11	130
1.6 Invertálhatóság	13	137
1.7 Határérték, folytonosság, egyenletes folytonosság	15	142
2. Gyakorló feladatok függvények tulajdonságainak vizsgálatára	22	150
2.1 Elemi tulajdonságok	22	150
2.2 Határértékszámítás	27	174
2.3 Folytonosságvizsgálat	46	190
2.4 Függvények ábrázolása, folytonos függvények speciális tulajdonságai	54	209
3. Vegyes feladatok	57	223
II. Differenciálszámítás	63	236
1. Differenciálhányados. Differenciálhatóság. Formális deriválás. Magasabbrendű derivál- tak. Összetett és inverz függvény deriváltja	63	236
2. A differenciálhányados és a differenciál geometria és fizikai alkalmazásai	70	244
3. L'Hospital szabály	72	247
4. Taylor-polinom	75	252
5. Közéértéktételek (Rolle, Lagrange, Cauchy) .	76	255
6. Függvényvizsgálat	78	257
7. Szöveges szélsőértékfeladatok	84	274
8. Egyenletek közelítő megoldása	84	275
9. Paraméteresen és polárkoordinátás alakban adott görbék és deriváltjaik	85	277

	Feladat	Megoldás
10. Vegyes feladatok	89	282
III. Integrálszámítás	93	287
1. Határozatlan integrál	93	287
1.1 Alapintegrálokra visszavezethető feladatok	93	287
1.2 Trigonometrikus szorzat integrálok	94	288
1.3 $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx$ alakú integrálok	94	289
1.4 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ alakú integrálok	95	290
1.5 $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$ alakú integrálok ...	95	291
1.6 Teljes négyzetté kiegészítve alapintegrálokra visszavezethető feladatok	96	291
1.7 Parciális integrálás	96	291
1.8 Racionális törtfüggvények integrálása ...	97	294
1.9 Integrálás helyettesítéssel	97	295
1.10 Vegyes feladatok	99	298
2. Határozott integrál	100	300
3. Változó felső határu határozott integrál (integrál függvény)	108	308
4. Improprius integrál	111	311
5. Az integrálszámítás alkalmazásai	114	313
5.1 Területszámítás	114	313
5.2 Ívhossz-számítás	116	315
5.3 Forgástestek térfogata	118	316

I. EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. ALAPFOGALMAK

1.1 Értelmezési tartomány, értékészlet

1. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékészletét!

1. a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

8. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{xn+1}{n} \right)^n$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

9. a) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k$

2. $f(x) = 3-x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

3. $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$

10. a) $f(x) = \frac{x}{3}$, ha x osztható 3-mal

4. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{ha } x \text{ osztható } 3 \text{ -mal} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

5. $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

11. a) $f(x) = x$ b) $f(x) = (\sqrt{x})^2$

6. $f(x) = \frac{1}{[x]}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2}$

7. $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sign}x}$

12. $f(x) = y$ akkor és csak akkor ha $y^3 + x^3 = 1$.

1.2 Monotonitás

2. 1. Legyen $E \subset \mathbb{R}$.

a) Mely $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre igaz az, hogy:

minden $x, y \in E$ esetén ha $f(x) < f(y)$ akkor $x < y$.

b) Mely $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre igaz az, hogy: minden $x, y \in E$ esetén fennáll, hogy vagy $f(x) < f(y)$ vagy $x \leq y$,

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI HÁTÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában (nem használva a "nem" szót) azt a tulajdonságot, hogy egy függvény egy H halmazon nem monoton.

3. Definíció. Egy H halmazt a legbővebb - valamilyen kiszemelt F tulajdonsággal rendelkező - halmaznak neveztünk, ha rendelkezik az F tulajdonsággal és nincsen olyan H' - F tulajdonsággal rendelkező - halmaz, hogy $H \subset H'$, $H \neq H'$.

1. Bizonyítsuk be, hogy egy függvény akkor és csak akkor monoton egy I intervallumon, ha annak minden részintervallumán monoton.

2. Legyen f monoton az (a,b) és (c,d) intervallumokon. Mi következik ebből f monotonitására nézve az $(a,b) \cup (c,d)$ halmazon, ha (a) $a < c < b < d$; illetve

$b) a < b < c < d$ és f monoton növekvő (a,b) -n is, (c,d) -n is.

! (3) Legyen f értelmezve az I intervallumon és legyen x_0 egy belső pontja I -nek, melytől az I_1, I_2 x_0 -ban zárt intervallumokra osztja.

Bizonyítsuk be, hogy ha f szigorúan monoton csökkenő az I_1 -en és szigorúan monoton növekvő az I_2 -ön akkor I_1 és I_2

két legbővebb intervallum, melyeken f monoton.

4. Legyen f monoton csökkenő az $[a,b]$ és monoton növekvő a $[b,c]$ intervallumon ($a < b < c$). Következik-e ebből, hogy f nem monoton az $[a,c]$ intervallumon?

4. 1. Keresünk az alábbi függvények esetén az értelmezési tartományban olyan legbővebb részintervallumokat (lásd 3. pl. Definíció) - ha léteznek ilyenek -, melyeken az adott függvény monoton.

$$(a) f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$e) f(x) = x^2 + ax + b \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

2. Van-e olyan $\delta > 0$ szám, amelyre az $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ függvény az egész $(0, \delta)$ intervallumon monoton?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1.3 Korlátosság, szélsőérték

5. a) Megválaszolható-e egyértelműen az alábbi kérdés:

Korlátos-e az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény?

- b) Ekvivalens-e az alábbi definíció az f függvény felülről való korlátosságának definíciójával: Van olyan M szám, hogy $f(x) < M$
 c) Létezik-e legbővebb olyan intervallum, (lásd 3. pl. Definíció) melyen az alábbi függvények korlátosak?

$$1. f(x) = x^2 \qquad 2. f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

6. 1. Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Ekvivalensek-e az alábbi állítások?

1. Van olyan m és M szám, hogy minden $x \in E$ esetén $m \leq f(x) \leq M$.
2. Van olyan $K > 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén $|f(x)| \leq K$.
3. Van olyan $K > 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén $|f(x)| < K$.

b) Ekvivalens-e az alábbi állítások valamelyike f E -n való korlátosságának definíciójával?

1. Van olyan $x_1, x_2 \in E$, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

2. Minden $x \in E$ esetén van olyan $K > 0$, hogy $|f(x)| < K$.

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában (nem használva a "nem" szót) azt a tulajdonságot, hogy egy függvény nem korlátos egy E halmazon!

7. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ és $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. a) $\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x)$

b) $\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x)$

2. a) $\sup_{x \in E} (-f(x)) = -\inf_{x \in E} f(x)$ b) $\inf_{x \in E} (-f(x)) = -\sup_{x \in E} f(x)$

3. Mutassuk meg, hogy 1.-ben \leq helyett nem állhat $=$!

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

8. **Definíció.** Egy függvényt értelmezési tartományának egy pontjában lokálisan korláatosnak mondunk, ha e pontnak van olyan S környezete, hogy f korlátos $S \cap D_f$ -en.

1. a) Legyen f lokálisan korlátos egy tetszőleges intervallum minden pontjában. Következik-e, hogy f korlátos az egész intervallumon?
- b) Legyen f lokálisan korlátos egy zárt intervallum minden pontjában. Következik-e, hogy f korlátos az egész intervallumon?
2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x = \frac{m}{n}, & n > 0, \\ m, n \in \mathbb{N}, & \text{relatív prímek} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény egyetlen pontban sem lokálisan korlátos!

9. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket az adott intervallumokon! Adjuk meg a függvények megfelelő intervallumbeli supremumát és infimumát, ill. maximumát és minimumát is, amennyiben ezek léteznek!

1. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ a) $I = (1, \infty)$ b) $I = [2, 4]$

2. $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ a) $I = (-\infty, \infty)$ b) $I = (-1, 2]$

3. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ a) $I = [0, \infty)$ b) $I = (-\infty, -1)$

c) $I = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

10. Igazoljuk, hogy az $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ függvény az egész számegeyenesen korlátos.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

11. Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$.

- a) Minden $\delta > 0$ szám esetén van olyan $x \in (a, b)$, hogy $|x - x_0| < \delta$ és $f(x) \leq f(x_0)$.
- b) Van olyan $\delta > 0$ szám, hogy van olyan $x \in (a, b)$, hogy $|x - x_0| < \delta$ és $f(x) \leq f(x_0)$.
- c) Van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a, b)$ esetén ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$.
- d) Minden $\delta > 0$ szám és minden $x \in (a, b)$ esetén ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$.

1. Mutassunk példát a fenti tulajdonságokat kielégítő függvényekre!
2. Következik-e valamelyik tulajdonságból az, hogy a függvénynek lokális maximuma van x_0 -ban?
3. Következik-e abból, hogy a függvénynek lokális maximuma van x_0 -ban az, hogy valamelyik tulajdonsággal rendelkezik?

12.

1. Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon ($a < b$) szigorúan monoton növekedő. Következik-e ebből, hogy a függvény
 - a) korlátos az (a, b) intervallumon?
 - b) felveszi maximumát az (a, b) intervallumon?
2. Lehet-e egy függvénynek egy pontban egyszerre lokális maximuma és minimuma?
3. Lehet-e egy függvénynek egy intervallum minden pontja lokális maximuma?
4. Legyen $I_1 \subset \mathbb{R}$, $I_2 \subset \mathbb{R}$ tetszőleges valódi^(*) intervallumok, \bar{I}_1, \bar{I}_2 a megfelelő azonos végponttal rendelkező zárt intervallumok és $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \{a\}$. Legyen $f: \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ monoton csökkenő I_1 -en, monoton növekvő I_2 -n. Következik-e, hogy f -nek lokális szélsőértéke van a -ban?^(**) van belső pontja)

13.

1. Legyen $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Bizonyítsuk be, hogy $x=1$ -ben a függvénynek lokális maximuma, $x=-1$ -ben lokális minimuma van.

2. Legyen $f(x) = (x-1)^2 (x-2)^2$.

Bizonyítsuk be, hogy az $x=1$ és $x=2$ pontok a függvénynek lokális minimumhelyei!

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

14. Keressük meg az alábbi függvények összes lokális szélsőértékhelyeit!

a) $f(x) = (x^2 - 4)^2 + 2$;

b) $f(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ rögzített;

c) $f(x) = |x-1|$;

d) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

1.4 Konvexitás - konkávitás, párosság - páratlanság, periódicitás

15. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény konvex az $[a, b]$ intervallumon, akkor tetszőleges $x_1, x_2 \in [a, b]$ esetén

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

2. Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor konvex az $[a, b]$ intervallumon, ha itt $-f$ konkáv.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^2$ függvény konvex a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

16. Az alábbi függvények közül melyek párosak, páratlanok vagy periodikusak? A periodikusak esetében - ha lehetséges - adjuk meg a legkisebb periódust!

1. $f(x) = x^2 - x$

9. $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$

2. $f(x) = x \operatorname{sign} x$

10. $f(x) = x \sqrt{x^2 - 1}$

3. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

11. $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 1}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$

12. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 1$

5. $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

13. $f(x) = \frac{\cos 2x}{x^4}$

6. $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$

14. $f(x) = x^3 \cos x + \sin^2 x$

7. $f(x) = \sin^2 \frac{x}{\pi}$

15. a) $f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{3} x + \sin^2 \frac{\pi}{4} x$

8. $f(x) = x - [x]$

b) $f(x) = \sin \frac{\pi}{3} x + \sin \frac{\pi}{4} x$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

17. ① Lehet-e egy függvény egyszerre páros és páratlan?
2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, páros és f szigoruan monoton növekedő a $(-a, 0)$ intervallumban, akkor f szigoruan monoton csökkenő a $(0, a)$ intervallumban.
18. a) Létezik-e olyan f periodikus függvény melynek értelmezési tartományára fennáll, hogy $\mathbb{R} \setminus D_f \neq \emptyset$?
! ② Ha létezik ilyen f , lehet-e úgy kiterjeszteni az egész valós számegegyenesre, hogy periodikus maradjon, azaz van-e olyan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodikus függvény ($D_g = \mathbb{R}$), amelyre
 $g(x) = f(x)$, ha $x \in D_f$?

1.5 Műveletek függvények körében

19. Lgyen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Vizsgáljuk meg milyen következtetéseket lehet levonni értelmezési tartományukon a

$-f$, $\frac{1}{f}$, $f+g$, $f \cdot g$, $f \circ g$, $g \circ f$ függvények viselkedésére vonatkozóan, ha értelmezési tartományukon

1. a) f és g korlátos
② f és g nem korlátos
③ f korlátos g nem korlátos.
2. a) f és g monoton növekedő
② f monoton csökkenő, g monoton nőő.
3. a) f és g páros
b) f és g páratlan
c) f páros g páratlan.

- ②0. Tegyük fel, hogy az (a, b) -n értelmezett f és g valós függvényeknek lokális maximumuk van az $x_0 \in (a, b)$ pontban.

Mit mondhatunk $-f$, $\frac{1}{f}$, $f+g$, $f \circ g$ viselkedéséről x_0 -ban?

- ②1. Határozzuk meg $f(x)$ -et, mint x algebrai kifejezését, ha

a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

b) $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

22. Legyen $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) \quad \forall n > 1$ esetén, ahol

$$a) f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$b) f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Határozzuk meg $f_n(x)$ -et, mint x és n algebrai kifejezését!

23. Határozzuk meg szakaszonként algebrai kifejezéseként az fof, fog, gof, gog összetett függvényeket, ha

$$1. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ x & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$3. f(x) = \text{sign } x$$

$$\alpha) g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\gamma) g(x) = x(1-x^2)$$

$$\beta) g(x) = 1+x^2$$

$$\delta) g(x) = 1+x - [x]$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ egész} \\ x & \text{ha } x \text{ nem egész} \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$5. f(x) = x+x^2$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ páros egész} \\ -1 & \text{ha } x \text{ páratlan egész} \end{cases}$$

$$6. f(x) = -|x| \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 2-x & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 2-x & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

1.6 Invertálhatóság

- ! (24.) Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges.
Legyen $H \subset E$ olyan, hogy H -n f kölcsönösen egyértelmű, azaz, tetszőleges $x_1, x_2 \in H$ esetén

$$\text{ha } f(x_1) = f(x_2), \text{ akkor } x_1 = x_2 .$$

$$\text{Legyen } f(H) = \{ y \in \mathbb{R}_f : \exists x \in H, \text{ hogy } f(x) = y \} .$$

Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. Egyetlen olyan $g: f(H) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény van, melyre

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in H .$$

2. Az alábbi két állítás ekvivalens:

a) $g: f(H) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, hogy $g(f(x)) = x \quad \forall x \in H$

b) $g: f(H) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in H$ és $\forall y \in f(H)$ esetén $g(y) = x$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = y$

3. Bármely $g: f(H) \rightarrow H$ esetén $g(f(x)) = x \quad \forall x \in H$ akkor és csak akkor, ha $f(g(y)) = y \quad \forall y \in f(H)$

- (25.) Bizonyítsuk be a következő állításokat!

1. Ha f invertálható H -n, akkor f^{-1} is invertálható $f(H)$ -n, és

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \quad \forall x \in f(H) .$$

2. Invertálható függvények összetett függvénye is invertálható, azaz ha g invertálható H -n, f invertálható $g(H)$ -n, akkor $f \circ g$ is invertálható H -n, és

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) \quad \forall x \in (f \circ g)(H) .$$

3. Ha $f \circ g$ invertálható H -n, akkor g invertálható H -n, f pedig $g(H)$ -n.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

26. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Melyek igazak, és melyek hamisak az alábbi állítások közül?
(Az állításokban szereplő tulajdonságok mindegyike az egész $[a, b]$ -re vonatkozik.)
- f monotonitása szükséges feltétele invertálhatóságának.
 - f monotonitása elégséges feltétele invertálhatóságának.
 - Ha f szigoruan monoton, akkor invertálható.
 - Ha f invertálható és monoton akkor szigoruan monoton.
 - Ha f invertálható I_1 -en és I_2 -n ($I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervallumok) akkor invertálható $I_1 \cup I_2$ -n is.

27. Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, f kölcsönösen egyértelmű.
Melyek igazak, és melyek hamisak az alábbi állítások közül?
- Ha f korlátos E -n, akkor inverze korlátos $f(E)$ -en.
 - Ha f szigoruan monoton növekedő E -n, akkor inverze szigoruan monoton növekedő $f(E)$ -en.
 - Legyen $E = [-a, a]$ ($a > 0$).
 - Ha f páros, akkor inverze is páros.
 - Ha f páratlan, akkor inverze is páratlan.

28. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f = R_f = \mathbb{R}$; $A, B \subset \mathbb{R}$.

Definíció szerint legyen:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in B \} \text{ és}$$

$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : \text{van } x \in A \text{ melyre } f(x) = y \}.$$

Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B)$

2. $f^{-1}(f(A)) \supset A$

3. Van olyan f függvény és $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, hogy

$$f^{-1}(f(A)) \neq A.$$

29. Az összes alábbi függvény esetén keressünk az értelmezési tartományban olyan legbővebb részhalmazokat (lásd 3. pl. Definíció) - ha léteznek ilyenek - melyeken a függvény invertálható és amelyek egyesítése az értelmezési tartomány.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Adjuk meg a megfelelő inverz függvényeket is!

1. a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

4. $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

5. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

6. $f(x) = (x^2-9)^2 - 1$

3. $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

7. $f(x) = x^2+ax+b \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$

1.7 Határérték, folytonosság, egyenletes folytonosság

30. (1.) Legyen $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

Tegyük fel: van olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|f(x)-A| < \varepsilon$, akkor $|x-x_0| < \delta$.

Következik-e ebből az, hogy f -nek van határértéke x_0 -ban.

! 2. a) Legyen $E \subset \mathbb{R}$ $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Tegyük fel, hogy van olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta < 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén, ha $|f(x)-A| < \varepsilon$, akkor $|x-x_0| < \delta$.

Milyen tulajdonságot definiál ez a meghatározás?

b) Mutassunk példát olyan mindenütt értelmezett függvényre, melyre fennáll, és olyanra, melyre nem áll fenn valamely pontban ez a tulajdonság.

(31.) Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Milyen összefüggés van a függvény $-\infty$ -beli határértékének létezése és az alábbi tulajdonság között:

minden A szám esetén van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy minden K szám esetén van olyan $x < K$ szám, hogy $f(x) - A > \varepsilon$

! 32. Legyen $x_0 \in (a,b)$, $A \in \mathbb{R}$.

Ekvivalens-e az alábbi tulajdonságok valamelyike azzal, hogy az $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az A szám a határértéke x_0 -ban?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén nem minden $\delta > 0$ számhoz van olyan $x \in (a, b)$, hogy

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. Nincs olyan $\varepsilon > 0$ szám, melyhez ne lenne olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a, b)$ esetén vagy $|x - x_0| \geq \delta$ vagy $|f(x) - A| < \varepsilon$ fenn ne álljon.

3. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén nem minden $\delta > 0$ számhoz van olyan $x \in (a, b)$, hogy

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

!33. Legyen $x_0 \in (a, b)$.

Mely $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: Van olyan K szám, hogy minden $\delta > 0$ szám esetén van olyan $x \in (a, b)$ szám, hogy $x_0 < x < x_0 + \delta$ és $f(x) < K$.

Mutassunk példát olyan függvényre, (ha ilyen létezik) mely kielégíti a fenti definíciót és nem korlátos (a, b) -n.

!34. Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$.

Tekintsük az alábbi tulajdonsággal rendelkező függvényeket:

Van olyan A és $\delta > 0$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $x \in (a, b)$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

1. Igazak-e az alábbi következtetések?

(a) Ha f rendelkezik a fenti tulajdonsággal, akkor van határértéke x_0 -ban.

b) Ha f -nek van határértéke x_0 -ban, akkor rendelkezik a fenti tulajdonsággal.

2. Mutassunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre!

35. 1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty.$$

(b) Igaz-e az állítás megfordítása?

(2.) Abból, hogy az $f(x)$ függvény x_0 -ban nem lokálisan korlátos (lásd 8. pld Definíció) következik-e, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$?

(3.) Abból, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$

következik-e, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

4. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ akkor és csak akkor teljesül,

ha $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - A) = 0$.

36. Adjunk példát egy-egy olyan függvényre, - ha vannak ilyenek - melyeknek

1. nincs határértéke a 0-ban, de létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$;

2. van határértéke a 0-ban, de nem létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$.

37. Vizsgáljuk meg a határérték definíciója alapján, hogy léteznek-e az alábbi határértékek! Ha igen, állapítsuk meg értéküket is!

1. a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2)$

4. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1}$

2. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (|x| - x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| - x)$

5. a) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{(x-1)^2}$

3. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{(x-1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{3+x}$

6. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

7. a) $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$

8. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$

9. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \operatorname{sign}^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} |x|$

10. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \right]$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{[x]}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \right]$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\dot{1}}{[x]}$

11. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$

13. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racionális} \\ x^2, & x \text{ irracionális} \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

! (38.) Legyen $x_0 \in (a, b)$.

Az alábbi definíciók közül melyik ekvivalens az $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli folytonosságának definíciójával?

a) Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén nem minden $\delta > 0$ számhoz van olyan $x \in (a, b)$, hogy

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

b) Van olyan $\varepsilon > 0$ szám, melyhez nincsen olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a, b)$ esetén

$$\text{ha } |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

c) Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén nem minden $\delta > 0$ számhoz van olyan $x \in (a, b)$, hogy

$$|x - x_0| < \delta \text{ és } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

d) Van olyan A szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a, b)$ esetén, ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

39. Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ és $E \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Tegyük fel, hogy minden $\varepsilon \in E$ esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x \in (a, b)$, $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Milyen tulajdonságu E halmaz esetén következik ebből a tulajdonságból az, hogy f folytonos x_0 -ban?

40. Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$.

Tegyük fel, hogy minden $\delta > 0$ szám esetén van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy ha

$$x \in (a, b) \text{ és } |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

1. Milyen tulajdonságot definiál a fenti meghatározás?

2. Mondjunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre.

3. Következik-e egy függvény x_0 -beli folytonossága abból, ha rendelkezik a fenti tulajdonsággal?

41. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Tegyük fel, hogy minden $x, y \in [a, b]$ és minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $|f(x) - f(y)| < \delta$ akkor $|x - y| < \varepsilon$

Mit mondhatunk ekkor az f függvényről?

42. 1. Bizonyítsuk be, hogy: ha f folytonos egy $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor van olyan az egész \mathbb{R} -en folytonos g függvény, hogy $f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ esetén.

2. Igaz-e 1. állítása az (a, b) nyílt intervallumon folytonos f függvény esetén is?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

43. Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$.

Hogyan függ össze az alábbi két tulajdonság f -nek x_0 -beli folytonosságával?

a) $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x_0+h) - f(x_0-h)| = 0$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x_0+h) - f(x_0)| = 0$

44. Legyen f tetszőleges valós függvény.

Hogyan függ össze az alábbi két tulajdonság?

a) Van olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy f folytonos $[a, \infty)$ -en.

b) f -nek van határértéke ∞ -ben.

45. Legyen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített.

1. Mit mondhatunk az $f+g$ és az $f \cdot g$ függvények x_0 -beli folytonosságáról, ha

a) f folytonos, g nem folytonos x_0 -ban;

b) f és g egyike sem folytonos x_0 -ban?

2. Igaz-e, hogy ha f^2 folytonos $E \subset \mathbb{R}$ -en, akkor f is az?

46. Legyen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített.

Mit mondhatunk fog x_0 -beli folytonosságáról, ha

a) g folytonos x_0 -ban, de f nem folytonos $g(x_0)$ -ban;

b) g nem folytonos x_0 -ban, de f folytonos $g(x_0)$ -ban;

c) g nem folytonos x_0 -ban, f nem folytonos $g(x_0)$ -ban.

47. Vizsgáljuk meg a folytonosság definíciója alapján az alábbi függvények folytonosságát a megadott pontokban, illetve intervallumokon.

1. a) $f(x) = x^2$ $(0, \infty)$

b) $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ $x_0=0$

2. $f(x) = ax+b$ $(-\infty, \infty)$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ $(0, \infty)$

4. $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ irrac.} \\ 0 & x \text{ rac.} \end{cases}$ a) $x_0 = 1$
b) $x_0 = 0$

5. $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0, \infty)$

6. $f(x) = [x]$ $(0, 2)$

7. $f(x) = x^3$ $(-\infty, \infty)$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

52. Vizsgáljuk meg a definíció alapján az alábbi függvényeket egyenletes folytonosság szempontjából a megadott intervallumokon!

1. a) $f(x) = x \quad (-\infty, \infty)$

b) $f(x) = x^2 \quad (-\infty, \infty)$

2. $f(x) = \sqrt{x} \quad [1, \infty)$

3. $f(x) = x^3$

a) $(0, \infty)$

b) $(0, 1)$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$

a) $(0, 2)$

b) $(1, 2)$

5. $f(x) = \cos \frac{1}{x} \quad (0, 1)$

2. GYAKORLÓ FELADATOK FÜGGVÉNYEK
TULAJDONSÁGAINAK VIZSGÁLATÁRA

2.1 Elemi tulajdonságok

53. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{x}$

2. $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sin \frac{1}{x}} - 1}$

3. $f(x) = \sqrt{\ln \frac{1+x}{1-x}}$

4. $f(x) = \frac{1}{1+2^{x-x}}$

5. $f(x) = \ln \left(\arccos(\arctg x) - \frac{\pi}{2} \right)$

6. $f(x) = \ln (e^{c \cdot s x} - 1)$

7. $f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(\arcsin(x-1))}$

8. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sh}(1 - e^{\operatorname{arch}^2 x})}$

9. $f(x) = \frac{1}{1 + [\operatorname{ch} x]}$

10. $f(x) = \sqrt[3]{\ln \sqrt{|x|} - 1}$

11. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\sqrt{\arccos x}}}$

12. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

54. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékészletét!

$$1. f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

$$2. f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$$

$$3. f(x) = \arccos(\ln x)$$

$$4. f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 1}$$

$$5. f(x) = \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)$$

$$6. f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x}$$

$$7. f(x) = \ln(\arccos e^x)$$

$$8. f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ch} \frac{1}{x}\right)}$$

$$9. f(x) = \sqrt{\frac{1}{1 - \operatorname{th} x}}$$

$$10. f(x) = e^{\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}\right)}$$

$$11. f(x) = \operatorname{sh} \sqrt{\frac{x}{1 - |x|}}$$

$$12. f(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$13. f(x) = \frac{1}{1-x^3}$$

55.

Állapítsuk meg $f(H)$ -t az alábbi esetekben!

$$1. f(x) = \ln \sin x \quad H = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$2. f(x) = \operatorname{ch}(x+2)^2 \quad H = [-3, -1)$$

$$3. f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad H = (-\infty, 1)$$

$$4. f(x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) \quad H = (-\infty, 0)$$

$$5. f(x) = e^{\operatorname{sign}(\cos x)} \quad H = [1, \infty)$$

56. Értelmezési tartományuk mely legbővebb részintervallumaiban (lásd 3. pl. Def.) monotonok az alábbi függvények?

$$1. f(x) = \frac{1}{1 - |\ln x|}$$

$$2. f(x) = 1 - \operatorname{sh} \frac{1}{1+x^4}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$3. f(x) = e^{\sin^2 x}$$

$$⑤. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x^2}{1-x}$$

$$4. f(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{\operatorname{ch}(x^2 - 1) - 1}$$

57. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket abból a szempontból, hogy a megadott halmazokon

1. korlátosak-e,

2. felveszik-e minimumukat, illetve maximumukat,

3. van-e lokális szélsőértékük!

Ha léteznek, adjuk meg a megfelelő supremumokat és infimumokat, illetve maximumokat és minimumokat, valamint a lokális szélsőértékek helyeit!

$$①. f(x) = \sin x(1 - \sin x), [-\pi, \pi] \quad 3. f(x) = \arccos \sqrt{1-x^2}, D_f$$

$$2. f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{1+|\ln|x||} & x \neq 0 \end{cases}$$

a) D_f

a) D_f

b) $(-\infty, 1)$

b) $[1, \infty)$

c) $(1, \infty)$

$$5. f(x) = \sqrt[3]{1-e^{-x}}$$

d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

a) D_f

e) $(2, 3)$

b) $[0, \infty)$

⑤8. Vizsgáljuk meg, invertálhatóak-e az alábbi függvények a megadott intervallumokon!

$$1. f(x) = \arccos \sqrt{x^2(1-x^2)}$$

$$2. f(x) = e^x + x \quad (-\infty, \infty)$$

a) $[0, 1]$

$$3. f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

b) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

a) $(0, 1]$ b) $(0, 2]$ c) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

c) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{1+\sqrt{\ln(1+x)}}, D_f$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

59. (1.) a) Hány olyan mindennütt értelmezett $y = f(x)$ függvény van, mely kielégíti az $y + \ln y = x^3$ függvényegyenletet?
 ! b) Hány olyan $[0, \infty)$ -en értelmezett $y = f(x)$ folytonos függvény van, mely kielégíti az $y^2 + chy = x+1$ függvényegyenletet?
 2. a) Mely c valós számok esetén van megoldása (és ekkor hány) az $\operatorname{sh}x + x + c = 0$ egyenletnek $(-\infty, \infty)$ -en?
 b) Mely c valós számok esetén van megoldása (és ekkor hány) az $x \operatorname{tg} x = c$ egyenletnek $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -en?

60. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Adjunk meg az értelmezési tartományban olyan legbővebb részhalmazokat (lásd 3. pl. Def.) minden egyes esetben, amelyeken az adott függvény invertálható, és az inverz függvény megadható szakaszonként elemi függvényekből alpműveletekkel, illetve összetett függvény képzéssel előálló függvényként! Adjuk meg az inverz függvényt és értékkészletét!

a) 1. $f(x) = \cos e^{(x+2)^2}$ 7. $f(x) = \arcsin (\operatorname{th}(x-1)^4)$

2. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} + 1$ 8. $f(x) = \arccos \frac{4x}{1+x^2}$

3. $f(x) = \sqrt{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)}$ 9. $f(x) = (\operatorname{ch}(x+1)-2)^2$

4. $f(x) = \frac{1}{1+\sin 2x}$ 10. $f(x) = \log_2 x^3$

5. $f(x) = e^{\ln^3(x-1)}$ 11. $f(x) = \ln(16-x^2) + 3$

6. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 12. $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$

b) 1. $f(x) = e^{-x|x|}$ 3. $f(x) = \begin{cases} x & -\infty < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x & 4 < x < \infty \end{cases}$

2. $f(x) = \operatorname{arctg} |\ln x|$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI,
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \sqrt{1-x} & 0 < x < 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \\ -\cos \frac{\pi(x-2)}{2} & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$(5.) f(x) = x + [x] \quad (x \geq 0)$$

$$! c) (1.) f(x) = e^{2x} - e^x$$

$$(2.) f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x$$

$$(3.) f(x) = \operatorname{sh}^2 x - 3\operatorname{sh} x + 2$$

(61.) 1. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, és adjuk meg a függvényeket szakaszonként algebrai függvények segítségével!

$$a) 1. f(x) = \cos(\arccos x) \quad 7. f(x) = \operatorname{tg}(\arcsin x)$$

$$2. f(x) = \arcsin(\sin x) \quad 8. f(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x)$$

$$3. f(x) = \sin(\arccos x) \quad 9. f(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)$$

$$4. f(x) = \arcsin(\cos x) \quad 10. f(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x)$$

$$5. f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \quad 11. f(x) = \operatorname{arch}(\operatorname{ch} x)$$

$$6. f(x) = \sin(\operatorname{arctg} x)$$

$$b) 1. f(x) = \sin(2 \arcsin x) \quad 3. f(x) = \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$2. f(x) = \cos(\arcsin \sqrt{1-x^2})$$

2. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat!

$$1. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{tetsz. } x \in [-1, 1] \text{ -re}$$

$$2. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{tetsz. } x \in (-1, 1) \text{ -re}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ha $x > 0$

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ ha $x < 0$

2.2 Határértékszámítás

62. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

1. Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ létezik, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ is létezik és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

2. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \infty.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \infty.$$

3. Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C > 0$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty.$$

4. Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ és $g(x)$ korlátos x_0 valamely S környe-

zetében, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

5. Ha létezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén lé-

tezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^k$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{1/k}$ és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^k = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^k, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{1/k} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{1/k}. \quad (2)$$

6. Ha létezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, valamint van x_0 -nak

egy olyan S környezete, hogy

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in S, \text{ akkor } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

(63.) Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

Legyen $f: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ($E_1 \subset \mathbb{R}$) tetszőleges.

1. Ha $x_0 \in (a, b)$ és van olyan $g: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($E_2 \subset \mathbb{R}$) E_2 -n folyto-

nos és invertálható függvény, hogy $D_f \supset R_g \supset (a, b)$, akkor, ha

létezik a $\lim_{y \rightarrow g^{-1}(x_0)} f(g(y))$, akkor létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ is, és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{y \rightarrow g^{-1}(x_0)} f(g(y)).$$

2. Ha létezik a $\lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)$, akkor létezik a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + \sqrt{x}}}{3 \sqrt[3]{9 - \sqrt{x}}}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\left(\frac{x}{x^2 + 2} \right)^3 - 1 \right)$$

$$67. \quad \boxed{1.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{3x^2 + 5}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{6x^2 + 2x - 1} \right)^2$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 7x - 5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4x + 5}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{2x}}} + 1 \right)^3$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 2x^2}{6x^3 + 1}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 6x^2 + 1}{3x + 1}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x+2}{4x-1}}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n (x^k + 1)}{(nx)^n + 1}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x+5} \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x+5} \sqrt[5]{x+1}}$$

$$\frac{n+1}{2}$$

$$10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x^2+1}}$$

$$18. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x+1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \right)$$

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{4x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x \sqrt{2x + 1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x \sqrt{2x + 1}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

68. ① Legyenek $s(x)$ és $n(x)$ polinomok, $f(x) = \frac{s(x)}{n(x)}$ és x_0 $s(x)$ -nek k_1 , $n(x)$ -nek k_2 multiplicitású gyöke. (Utóbbi feltétel azt jelenti, hogy $s(x)$ és $n(x)$ felírható $s(x) = (x-x_0)^{k_1} \hat{s}(x)$ ill. $n(x) = (x-x_0)^{k_2} \hat{n}(x)$ alakban, ahol $\hat{s}(x_0) \neq 0$, $\hat{n}(x_0) \neq 0$.)

Használjuk a formális $c \cdot \infty$, $c = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ jelölést!

Bizonyítsuk be, hogy a fenti feltételek mellett:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k_2 > k_1 \text{ és } k_2 - k_1 \text{ páros} \\ \text{sign } \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \infty & \text{ha } k_2 > k_1 \text{ és } k_2 - k_1 \text{ páratlan} \\ \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} & \text{ha } k_1 = k_2 \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

valamint ha $k_2 > k_1$ és $k_2 - k_1$ páratlan, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \text{sign} \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\text{sign} \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \infty$$

2. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)^2}{x - 3}$

③ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x^2 - 9)^4}$

2. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x^2 - 9)^3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{(x^2 - 9)^3}$

Vizsgáljuk meg léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

69. a) ① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2(x+3)}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$

7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - x - 2}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^3-1} \right)$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+3)}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x}$

13. 3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$

12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$

13. 1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - x - 6}$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x - 6}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+x)^4}{x}$

! (b) 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x-1}$, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ rögzített

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 2x + 1}{x^m - 2x + 1}$, $m > 2, n, m \in \mathbb{N}$ rögzített

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzített

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzített

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzített

70. 1. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x-1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x-1)^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 2}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[5]{\frac{\frac{1}{3} + 1}{x + 1}}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1} + 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right)$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} + x}{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - x}}$$

$$8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1}$$

$$\underline{71.} \text{ a) } \textcircled{1.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{b) 1.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x \right)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt{x-4}}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$7. \text{ 1. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$$

$$\textcircled{2.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2+1} + x)$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$5. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^4} \left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1} \right)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2} \right)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x} \right)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x \right)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right)$$

! c) 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzített

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzített

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzített

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right), \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 + 1})^n}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{(x+a_1) \dots (x+a_n)} - x \right), \quad a_i \in \mathbb{R} \quad i=1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \dots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

72. Vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi függvények esetén a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

határértékek, és ha igen mivel egyenlők!

$$1. \boxed{1.} f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{2x}}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$2. f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$5. f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1 - e^{\frac{2}{x}}}$$

$$3. f(x) = \frac{e^{2x}}{1 - e^x}$$

$$6. f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{x}{1+x}}}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$7. f(x) = \frac{x}{1 - e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$9. f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$$

$$8. f(x) = \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{1 + 2e^{\frac{1}{x}}}$$

$$2. 1. f(x) = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{th} \frac{1}{x}}$$

$$3. f(x) = \frac{1 + \operatorname{th} \frac{1}{x}}{1 + \operatorname{th} x}$$

$$2. f(x) = \frac{\operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} 2x}$$

$$4. f(x) = \frac{x \operatorname{th}^2 x}{1 + x^2 \operatorname{th} x}$$

$$3. 1. f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$$3. f(x) = \frac{x}{\sin \frac{1}{x}}$$

$$\textcircled{2} f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

73. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

$$1. \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$$

$$7. 1. \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln e^x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$8. 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2e^x + 3e^{2x}}{1-e^x + e^{2x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2e^x + 3e^{2x}}{1-e^x + e^{2x}}$$

$$9. 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x - 1} + 2 \ln x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x - 1} + 2 \ln x}$$

$$10. 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+2x^2+3x^3)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{\ln(1+2x^2+3x^3)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+x^2}{1+2x^2+3x^3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+x^2+x^3}{1+2x^2+3x^3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}$$

$$\textcircled{11.} \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2x}}$$

$$\textcircled{12.} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(1 - \sqrt{1-e^x})$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2ch2x-chx-2chx})$$

74. Állapítsuk meg, mely a valós számok esetén léteznek - és ekkor mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \cos^x a$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a - x^{-a}}{x^a + x^{-a}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x$$

$$\textcircled{3.} \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{1+a^x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+a^{2ax}}{1+e^{ax}}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

75. Felhasználva, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, vizsgáljuk meg léteznek-e és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

a) ①. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ fix
 $a \neq 0$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

②. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$ fix
 $b \neq 0$

⑦. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

③. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

⑨. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

b) 1. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\arcsin bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$
 $b \neq 0$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (1 - \cos \frac{1}{x})$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$

2. ①. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

⑧. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

! 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$

! 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$

⑪. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

12. 1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

13. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$ fix

14. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$

15. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$

16. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x}$

18. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\arcsin x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} x}$

19. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \sin x - \ln x)$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln \sin \frac{1}{x} + \ln x)$

76. 1. Felhasználva, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ bizonyítsuk be, hogy

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ($a > 0$ fix)

2. Felhasználva 1. 1. eredményét vizsgáljuk meg: léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

A. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} ax}{x}$ $a \in \mathbb{R}$ rögzített

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{rögzített} \\ b \neq 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arth} x}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sh} \frac{1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arth} \frac{1}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsh} x}{x}$$

$$B. 1. 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arth} ax}{\operatorname{arsh} bx} \quad a, b \in \mathbb{R} \\ b \neq 0 \quad \text{rögzített}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\operatorname{ch} \frac{1}{x} - 1 \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{arsh} x}{2x + \operatorname{arth} x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\operatorname{ch} x}}{x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a}$$

3. Felhasználva az 1.-ban szereplő határértékeket, vizsgáljuk meg: léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlők az alábbi határértékek!

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{rögzített}$$

$$\textcircled{2}. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}, \quad a > 0 \quad \text{rögzített}$$

$$\textcircled{3}. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(x + e^{x^{\frac{1}{x}}} \right)$$

$$6. 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^3 + x + 1)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$$

$$! 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \quad a > 0, b > 0 \text{ rögzített}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$\textcircled{11}. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x - 1}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$! 12. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \quad a > 0 \text{ rögzített}$$

$$! 13. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}$$

$$! 14. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, \quad a > 0 \text{ rögzített}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[x]{a} - 1 \right), \quad a > 0 \text{ rögzített}$$

77. 1. \textcircled{a} Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges f valós függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén, ha van x_0 -nak olyan S környezete, hogy $S \subset D_f$

és $f(x) > 0$, ha $x \in S$, valamint létezik a véges

$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)$, akkor létezik $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ is, és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

b) Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az a)-ban kimondott állítás megfelelőjét a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határértékre vonatkozóan!

2. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

①. $\lim_{x \rightarrow 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

! 8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

②. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

! 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a > 0$,
 $b > 0$
rögzített

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x$, $a \in \mathbb{R}$
rögzített

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x}}$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-2} \right)^{5x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

! 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

! 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^x \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right)$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x}$

! 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x+1}{x}}$

78. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{arth} bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$ fix
 $b \neq 0$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \operatorname{ch} x) \cdot \sin(x \operatorname{sh} x)}{x^3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$
 $b \neq 0$
rögzített

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}$, $a \in \mathbb{R}$
rögzített

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^2}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2a+x}{a+x}$ ($a \in \mathbb{R}$ fix)

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2+1}{x-2} \right)^{x^2}$

11. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)$

! (13.) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^{x^4}$

15. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

(2.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

17. $f(x) = \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{1-x}$

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(18.) 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{2x+2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x^2} \right)^{x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^x$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2^x} \right)^{\frac{1}{x}}$

20. 1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$(21.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} \quad (22.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\arctg x - \frac{\pi}{2})$$

(79.) Az alábbi függvények esetén állapítsuk meg, léteznek-e olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy fennálljon

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

Ha léteznek ilyenek, határozzuk meg őket!

1. $f(x) = x^2 + 1$

2. a) $f(x) = \frac{(2x)^2 + 1}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{2-3x}{3+2x}$ c) $f(x) = \frac{4x}{1+3x^3}$

3. a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

5. a) $f(x) = \arctg x$ b) $f(x) = x \arctg x$

6. $f(x) = \sqrt[3]{c^3 - x^3}$ ($c \in \mathbb{R}$ fix)

80. A. Vizsgáljuk meg, konvergensek-e az alábbi számsorozatok, és ha igen mi a határértékük!

a) 1. $a_n = n \sin \frac{1}{n}$

5. $a_n = \cos^n \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$ $x \in \mathbb{R}$ rögzített

2. $a_n = \frac{n^2 \operatorname{arsh} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n+1}$

6. $a_n = \left(\frac{a-1}{a} \sqrt[n]{b} \right)^n$, $a > 1$,
rögzített $b > 0$

3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n+1}$ ($n > 1$)

7. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n$

4. $a_n = n^2 (\ln(n^2 + 1) - 2 \ln n)$

8. $a_n = \frac{\ln n}{n}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$\textcircled{9}. a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$! \text{ b) } \textcircled{1}. a_n = \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right)$$

$$\textcircled{2}. 1. a_n = \sin \left(\pi \cdot \sqrt{n^2 + n} \right)$$

$$2. a_n = \sin^2 \left(\pi \cdot \sqrt{n^2 + n} \right)$$

$$\textcircled{3}. 0 < a_1 < \frac{\pi}{2} \text{ rögzített, } a_n = \sin a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

! B. Állapítsuk meg konvergensek-e az alábbi sorozatok!

$$\textcircled{1}. a_1 > 0 \text{ rögzített, } a_n = \operatorname{arctg} \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$2. a_1 > 1 \text{ rögzített, } a_n = \frac{1 + \ln a_{n-1}}{\ln a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$\textcircled{3}. a_1 > 0 \text{ rögzített, } a_n = a_{n-1} + e^{\frac{n}{n+1}} \quad (n \geq 2)$$

2.3 Folytonosságvizsgálat

81. Állapítsuk meg, hol értelmezettek, hol folytonosak és hol nem folytonosak az alábbi függvények!

Az értelmezési tartományba, vagy annak határára eső nem folytonossági pontok esetén állapítsuk meg

1. a függvény határértékét (ha létezik),
2. a függvény jobb- illetve bal oldali határértékét (ha létezik),
3. a szakadások jellegét.

Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$ -ben, illetve a $-\infty$ -ben (ha létezik)!

$$\textcircled{a} f(x) = 1 + \operatorname{th} \frac{1-2x^2}{1+x}$$

$$\text{b) } 1. f(x) = \operatorname{sign} x^3$$

$$2. f(x) = \operatorname{sign} x^4$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. $f(x) = [x]$
3. $f(x) = \frac{1}{x} \cdot [x]$
- c) 1. $f(x) = x^3 + 2x - \sqrt{x} + 1$
2. 1. $f(x) = \frac{x}{x-2}$
2. $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$
3. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$
4. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$
5. 1. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{2(x-2)}$
2. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{2|x-2|}$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}}$
7. $f(x) = \frac{(\sqrt[4]{x+1})(\sqrt[4]{x-1})}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}}$
8. $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$
9. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}$
10. $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|} + \frac{1}{|x-3|} + \frac{1}{x-3}$
- d) 1. $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$
2. $f(x) = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}$
3. $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^3}$
4. $f(x) = \frac{1+x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2 + \operatorname{arctg}^2 x}$
5. $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
6. $f(x) = \frac{1+x+e^x}{2+e^x - e^{2x}}$
7. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{-x^2}$
8. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{|x-2|}}$
9. $f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{1}{1-2x}}$
10. $f(x) = \operatorname{th} \ln \frac{1}{|1-x|}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$11. \quad f(x) = \operatorname{tg} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$(20.) \quad f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$$

$$12. \quad f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$$

$$21. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$13. \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$22. \quad f(x) = e^{-e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$14. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-e^{-x^2}}}$$

$$23. \quad f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$$

$$15. \quad f(x) = \sqrt[3]{1-\operatorname{sign}^2 x}$$

$$24. \quad f(x) = \sqrt[3]{1-e^{-\sin x}}$$

$$16. \quad f(x) = \frac{1}{1-2^{-x}}$$

$$(25.) \quad f(x) = \frac{2x}{x-\sin x}$$

$$17. 1. \quad f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$$

$$26. \quad f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x(x+1)^2}$$

$$2. \quad f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$27. \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$$

$$3. \quad f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$28. \quad f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{1}{1+2 \frac{2-x}{x-1}}$$

$$(18.) \quad f(x) = (1 + \sin x)^{x^2}$$

$$19. \quad f(x) = \operatorname{sign} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)$$

$$29. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{(x^2+1)x}$$

$$30. \quad f(x) = \sqrt{1 - \ln(x-1)^2}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI,
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$e) 1. \quad f(x) = \begin{cases} \ln x^2 & -\infty < x \leq -1 \\ \operatorname{arth} x & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{e^{x^2-1}} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2-2x} & 1 \leq x < \infty, x \neq 2 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 & 2 \leq x < 3 \\ 1+e^{-\frac{1}{x-3}} & 3 < x < \infty \end{cases}$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+\pi}{2x} & x \leq -\pi \\ \frac{|\sin x|}{x} & -\pi < x < \pi, x \neq 0 \\ (1+\sin \frac{1}{x-\pi})(1+e^{\frac{1}{\pi-x}}) & x > \pi \end{cases}$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{arch} x & |x| > 1 \\ \frac{\sin \pi x}{x-x} & |x| < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} - x & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{\ln(x-2)} & x > 2, x \neq 3 \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{ha } x \notin \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ 0 & \text{ha } x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{x} & x < -1 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & 0 < x < 1 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & 1 < x \leq 2 \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{x-5} & 2 < x < 5 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 5 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{1}{5-x} & x > 5 \end{cases}$$

$$f) \quad 1. \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad 3. \quad f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x+e^{xt}}{1+e^{xt}} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$2. \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad 4. \quad f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

82. Adjunk példát olyan függvényre, mely elemi függvényekből összetett függvény képzéssel és alpműveletekkel áll elő és:

1. csak egész x -ekre értelmezett,
2. csak pozitív egész x -ekre értelmezett,
3. csak egy adott $a \in \mathbb{R}$ pontban értelmezett,
4. sehol sem értelmezett,
5. egy előre adott $a \in \mathbb{R}$ pontnak sem olyan S_1 környezete nincs, hogy $S_1 \setminus \{a\} \subset D_f$, sem olyan S_2 környezete, hogy $S_2 \cap D_f = \emptyset$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. nem korlátos egy adott (a,b) intervallumban, de nem áll fenn sem $\lim_{x \rightarrow x_0^+} |f(x)| = \infty$, sem $\lim_{x \rightarrow x_0^-} |f(x)| = \infty$ egyetlen $x_0 \in (a,b)$ pontra sem.
2. korlátos egy adott (a,b) intervallumban, de egy adott $x_0 \in (a,b)$ esetén
- α) nem létezik a véges vagy végtelen $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ határértékek egyike sem, illetve
- β) nem létezik a véges vagy végtelen $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, de $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ létezik és véges.
3. α) nem létezik a véges vagy végtelen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ határértékek egyike sem, illetve
- β) nem létezik a véges vagy végtelen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, de a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ létezik és véges.
4. Adott $a, b \in \mathbb{R}$ -re egy adott $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b$.

83. Adjunk példát olyan függvényre, mely

1. Racionális törtfüggvény és
1. megszüntethető szakadása van $x=0$ -ban és $x=-1$ -ben, nullahelye van $x=1$ -ben, másodfajú szakadása $x=2$ -nél úgy, hogy $\lim_{x \rightarrow 2^+} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} = \infty$, valamint
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
2. Nullahelye van $x=-1$ -ben és $x=2$ -ben, megszüntethető szakadása $x=3$ -ban, másodfajú szakadása $x=0$ -ban és $x=-2$ -ben, úgy hogy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \infty$, valamint
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. Elemi függvényekből alapműveletekkel, illetve összetett függvényképzéssel áll elő, és

1. ugrása van $x=0$ -ban és $x=1$ -ben, úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2,$$

megszüntethető szakadása van $x=-2$ -ben, és másodfajú szakadása van $x=2$ -ben, valamint

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

2. korlátos, véges sok pont kivételével mindenütt értelmezett, másodfajú szakadása van $x=0$ -ban, ugrása $x=1$ -ben, úgy hogy

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

84. Hogyan kell az alábbi függvények definíciójában szereplő $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ konstansokat megválasztani, hogy a megfelelő függvények mindenütt folytonosak legyenek?

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a+x & x \geq 0 \end{cases} \quad 5. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2 x - a}{x} & x < 0 \\ \sin^2 \frac{\pi(x+b)}{2} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & x \leq 0 \\ a \operatorname{sh} x + b & x > 0 \end{cases}$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \frac{x^2 + a \sin 2x}{x} & x > 0 \end{cases}$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a \ln \left(\frac{(x+1)^2}{2} + 1 \right)}{x+1} & x < -1 \\ \operatorname{arsh} (x-b^2) & x \geq -1 \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{x-1}{\ln(\operatorname{arctg}(x-1)+1)-x+1} & x < 1 \\ 2ax + b & x \geq 1 \end{cases}$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} a \cdot \operatorname{th} \frac{e^{x+1}-a}{x+1} & x < -1 \\ -a & x \geq -1 \end{cases}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} & x \leq 1 \\ \frac{2^{x-a}-1}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

85. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az fog összetett függvényeket, ha

$$1. \quad a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ \pi & x = 0 \end{cases}$$

$$3. \quad a) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{\ln|x|}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{1}{\ln|x|}, \quad g(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$4. \quad f(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} \cdot \left(\left(2 - \frac{2}{\pi} \right) x^2 - x + \frac{2}{\pi} \right), \quad g(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \left(1 + \left(\frac{1}{\ln 2} - 1 \right) x \right), \quad g(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$6. \quad f(x) = \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$7. \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$$a) f(x) = e^{-x^2} - 1 \quad b) f(x) = e^{x(x^2+x-1)} \quad c) f(x) = g(x)$$

2.4 Függvények ábrázolása, folytonos függvények speciális tulajdonságai

86. Ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvényeket alapvető jellemzőik (értelmezési tartomány, folytonossági-, monotonitási intervallumok, lokális szélsőérték helyek, szakadások, határértékek a szakadási helyeken és a végtelenben) vizsgálatával segítségével! (konvexitás, konkávitás vizsgálatot nem szükséges végezni)

- | | | | |
|-------------------------|---|---|---|
| a) 1. | $f(x) = x [x]$ | $\delta) f(x) = \frac{ x }{1+x}$ | |
| 2. | $f(x) = \sqrt{x - [x]}$ | $\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$ | |
| b) 1. | $f(x) = x+3 + x-2 $ | $\textcircled{1} \quad f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}$ | |
| 2. | $\alpha) f(x) = x^2 - 1$ | $\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{\frac{x}{1-x^2}}$ | |
| | $\beta) f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ | $\textcircled{3} \quad f(x) = \arctg^2\left(\frac{x}{1 + \sqrt{3x}}\right)$ | |
| $\textcircled{3} \quad$ | $f(x) = (x-x_1)(x-x_2); x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
rögzített | $\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{1}{\text{ch}(x-1) + \ln(x-1)^2}$ | |
| 4. | $\alpha) f(x) = \frac{1}{1+x}$ | 3. | $f(x) = \arctg^2\left(\frac{x}{1 + \sqrt{3x}}\right)$ |
| | $\beta) f(x) = \frac{1}{1+ x }$ | 5. | $f(x) = \sqrt{2e^{-\frac{1}{x}} - 1}$ |
| | $\gamma) f(x) = \frac{x}{1+x}$ | | |

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$6. \alpha) f(x) = \operatorname{th} \frac{e^{-x^2}}{|x|}$$

$$9. f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\beta) f(x) = \operatorname{th} \frac{e^{-x^2}}{x}$$

$$10. \alpha) f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$7. f(x) = |\ln^2(x-1) - 1|$$

$$\beta) f(x) = e^{-\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$8. \alpha) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$11. f(x) = \operatorname{tg} \left(\pi \frac{x^2}{x+1} \right)$$

$$\beta) f(x) = \frac{1 + 2e^{-\frac{1}{x}}}{2 + e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$12. f(x) = \frac{1}{1 + 2\sin(\operatorname{arctg} x)}$$

$$13. f(x) = \sin \left(\pi e^{\frac{1}{x}} \right)$$

87.

1. Hány megoldása van az
 - a) $x \ln x + \ln x + c = 0$ ($c \in \mathbb{R}$ rögzített) egyenletnek az $(1, \infty)$ intervallumon, és a
 - b) $x \operatorname{th} x = c(x+1)$ ($c \in \mathbb{R}$ rögzített) egyenletnek a $(-1, \infty)$ intervallumon?
(A megoldások száma c függvénye!)
2. Van-e nullahelyük az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokon?
 - a) 1. $f(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^5$
 2. $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$ $I = (-\infty, \infty)$
 - b) $f(x) = x^n - x^{n-1} - 1$ $(n \in \mathbb{N}$ rögzített) $I = [1, 2]$
 - c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-a} + \frac{x^4+1}{x-b}$ $(a, b \in \mathbb{N}$ rögzített, $a < b$) $I = (a, b)$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

88. 1. Van-e lokális szélsőértéke az alábbi függvényeknek a $(-\infty, \infty)$ intervallumban?

Ha van, adjunk meg egy korlátos intervallumot, mely tartalmaz lokális szélsőérték helyet!

a) $f(x) = x^4 + 2x - 1$! c) $f(x) = (x-1)(x^5 - 2x - 1)$

b) $f(x) = x^3 + 1$ d) $f(x) = 1 + (x^2 - x - 2)(x^2 - 3x + 2)$

2. Felveszik-e minimumukat az alábbi függvények a megadott intervallumon?

a) $f(x) = \frac{\sin x^2}{|x|}$ c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$I = (0, 1)$

$I = [0, 1]$

b) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{|x|}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^3}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$I = (0, 2\pi)$

$I = [0, 1]$

89. Vizsgáljuk meg egyenletes folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket a megadott intervallumokon!

1. a) $f(x) = \sin x$, $(-\infty, \infty)$

b) $f(x) = \sin x^2$, $(-\infty, \infty)$

2. a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $(0, 1)$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, $[-1, 1]$

3. a) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$, $(0, 1)$

b) $f(x) = x \cdot \sin \frac{\pi}{x}$, $(0, 1)$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

90. Adjunk példát olyan függvényre, mely
1. a) folytonos egy (a,b) intervallumon, és itt
 1. nem korlátos;
 2. korlátos, de nem veszi fel sem maximumát, sem minimumát;
 3. felveszi maximumát és minimumát is;
 - b) nem folytonos egy (a,b) intervallumon, de felveszi maximumát és minimumát is;
 - c) folytonos és korlátos egy $[a, \infty)$ intervallumon, de itt
 1. nem veszi fel maximumát;
 2. nem veszi fel sem maximumát, sem minimumát;
 2. a) folytonos egy (a, ∞) intervallumon, csak itt van értelmezve, de nem vesz fel minden - két függvényértéke közé eső - értéket;
 - b) nem folytonos $[a,b]$ -n de felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket;
 3. a) folytonos, de nem egyenletesen folytonos egy (a,b) intervallumon;
 - b) folytonos és korlátos, de nem egyenletesen folytonos egy (a,b) intervallumon;
 - c) nem folytonos egy $[a,b]$ intervallumon, de egyenletesen folytonos (a,b) -n;
 - d) folytonos, nem korlátos, de egyenletesen folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon;
 - e) folytonos, korlátos, de nem egyenletesen folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon.

3. VEGYES FELADATOK

91. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ és van x_0 -nak olyan

$$S \subset D_f \text{ környezete, melyben } s = \inf_{x \in S} f(x) > 0 \text{ akkor}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, POLYTONOSSÁG

- ②. Legyenek f, g tetszőleges valós függvények, $x_0 \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy x_0 -nak van olyan $S \subset D_f$ környezete, melyre $f(x) > 0$, ha $x \in S$.
Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$.

Vizsgáljuk meg a $h(x) = f(x)g(x)$ függvény határértékét az alábbi esetekben:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ és
- és:
1. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$

92. ①. Legyen $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növény.

a) Bizonyítsuk be, hogy

1. ha f korlátos, akkor létezik a véges $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$;
2. ha f nem korlátos, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

b) Igaz-e: f akkor és csak akkor korlátos ha létezik a véges $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

2. Mondjuk ki és bizonyítsuk be 1. a)-beli állításokat egy (a, b) korlátos intervallumra vonatkozólag.

93. ①. Bizonyítsuk be, hogy az $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek egy $x_0 \in (a, b)$ -ben akkor és csak akkor van határértéke, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden olyan $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén, melyre

$$0 < |x_1 - x_0| < \delta \text{ és } 0 < |x_2 - x_0| < \delta,$$

$$\text{fennáll, hogy } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

2. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a fenti tételt végtelenben vett határérték esetére!

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

94. 1. Legyen $y_0 \in \mathbb{R}$ és g szigorúan monoton y_0 egy S környezetében. Igazak-e az alábbi állítások? ($D_f \supset R_g$)

a) Ha létezik $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ és $\lim_{y \rightarrow y_0^+} g(y) = x_0$,

akkor létezik $\lim_{y \rightarrow y_0^+} f(g(y))$, és $\lim_{y \rightarrow y_0^+} f(g(y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

(b) Ha létezik $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ és $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = x_0$, akkor létezik

$\lim_{y \rightarrow y_0} f(g(y))$, és $\lim_{y \rightarrow y_0} f(g(y)) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

2. Igaz-e: Ha $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \infty$ és nem létezik $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, akkor

nem létezik $\lim_{y \rightarrow y_0} f(g(y))$ sem ($D_f \supset R_g, y_0 \in \mathbb{R}$).

! 3. Bizonyítsuk be, hogy ha f értelmezve van és g folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon, $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (véges

vagy végtelen) nem létezik, akkor nem létezik a $\lim_{y \rightarrow \infty} f(g(y))$ (véges vagy végtelen) sem ($D_f \supset R_g$).

4. Legyen $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ és $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Alkalmazható-e $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ számításához az összetett függvények határértékére vonatkozó tétel?

5. Milyen kapcsolat van az összetett függvények határértékére vonatkozó tétel és azon tétel (un. Átviteli elv) között, mely kapcsolatot teremt a sorozatok és függvények határértéke között. (Ha x_0 -nak van olyan S környezete, hogy $S \setminus \{x_0\} \subset D_f$ akkor:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ akkor és csak akkor teljesül, ha tetszőleges

$(x_n) \subset D_f, x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

95. Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon és létezik a véges $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, akkor f korlátos $[a, \infty)$ -en!

! 96. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. Ahol f és g folytonosak, ott $\varphi(x) = \min \{f(x), g(x)\}$ és $\psi(x) = \max \{f(x), g(x)\}$ is folytonos.
2. Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor az

$$m(x) = \inf_{t \in [a, x]} f(t) \text{ és az } M(x) = \sup_{t \in [a, x]} f(t) \text{ szintén folytonosak } [a, b] \text{-n.}$$

! 97. Bizonyítsuk be, hogy ha a mindenütt értelmezett, $x = 0$ -ban folytonos f függvényre fennáll, hogy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ akkor } f(x) = a \cdot x \text{ (} a \in \mathbb{R} \text{ rögzített)}$$

alaku.

98. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. Ha f folytonos a $[0, \infty)$ intervallumon, továbbá $f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x=0$, és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$; akkor f nem lehet monoton $[0, \infty)$ -en.
2. Ha $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ és $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, akkor f nem lehet monoton (a, b) -n.
- ! 3. Ha f monoton $[a, b]$ -n, és felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket, akkor f folytonos $[a, b]$ -n.

99. 1. Igaz-e, hogy, ha $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ és f $(a, x_0]$ -on monoton növekvő, (x_0, b) -n monoton csökkenő, akkor x_0 -ban lokális szélsőértéke van?

2. Legyen f folytonos az egész \mathbb{R} -en. Bizonyítsuk be, hogy
 - a) két lokális minimuma között mindig van egy lokális maximuma;
 - b) ha f páros függvény, és monoton $[0, \infty)$ -en, akkor $x=0$ -ban lokális szélsőértéke van;

! c) ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ akkor f felveszi abszolút minimumát \mathbb{R} -en.

! 3. a) Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon és létezik a véges $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, akkor vagy minimumát,

vagy maximumát felveszi $[a, \infty)$ -en.

- b) Igaz-e a) állítása ha nem tesszük fel, hogy létezik a véges $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, de feltesszük, hogy f korlátos $[a, \infty)$ -en?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy p polinomnak $x_0 \in \mathbb{R}$ n -szeres multiplicitású gyöke, akkor
- a) páros n esetén x_0 -ban lokális szélsőértéke van;
 - b) páratlan n esetén x_0 -ban előjelet vált, azaz van $\delta > 0$, hogy ha $0 < x - x_0 < \delta$, akkor $p(x) > 0$, és ha $0 < x_0 - x < \delta$, akkor $p(x) < 0$, vagy fordítva.
5. Bizonyítsuk be, hogy zárt intervallum folytonos képe zárt intervallum (azaz, hogy ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor $f([a, b]) = [c, d]$).

100

1. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:
- a) Ha f folytonos az egész \mathbb{R} -en, és léteznek a véges, vagy végtelen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ határértékek, akkor f felvesz minden olyan értéket, mely szigorúan a fenti két határérték közé esik.
 - b) Ha f folytonos (a, b) -n és léteznek a véges, vagy végtelen $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ határértékek, akkor f felvesz minden olyan értéket, mely szigorúan a fenti két határérték közé esik.
 - c) Minden páratlan fokszámú polinomnak van valós gyöke.
 - d) Ha f folytonos $[a, b]$ -n és $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ tetszőlegesen, akkor van olyan $c \in [a, b]$, melyre

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

- e) Ha f folytonos az $[a, b]$ -n és $f([a, b]) = [a, b]$, akkor van olyan $c \in [a, b]$, hogy $f(c) = c$.
 - f) Ha f folytonos $[0, \infty)$ -en, $f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x=0$, akkor vagy $f(x) > 0 \forall x \in (0, \infty)$, vagy $f(x) < 0 \forall x \in (0, \infty)$.
2. Milyen összefüggés van a Bolzano-tétel és az alábbi állítás között? Ha $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és f folytonos az I -n, akkor tetszőleges $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, és $c \in (f(x_1), f(x_2))$ közé eső szám esetén van olyan $x \in [x_1, x_2]$, hogy $f(x) = c$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

- ! (101) Legyen f folytonos egy (a,b) intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy
- ha valamely $x_0 \in (a,b)$ esetén $f(x_0) = 0$, de $f(x) > 0$ tetszőleges $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$ -ra, akkor f nem invertálható egyetlen olyan (c,d) intervallumon sem, melyre $x_0 \in (c,d) \subset (a,b)$.
 - ha f invertálható (a,b) -n, akkor szigoruan monoton.
- ! (102) 1. Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonos, szigoruan monoton, korlátos függvény (a,b) -n akkor $f((a,b))$ nyílt intervallum.
2. Igaz marad-e az állítás, ha a monotonitást nem követeljük meg?
- ! (103) Definíció.
Egy függvényt egy H halmazon folytonossá tehetőnek nevezünk, ha ott legfeljebb véges sok pontban megváltoztatva az értékét H -n folytonos függvényt kapunk.
- Bizonyítsuk be, hogy korlátos intervallumon egyenletesen folytonos függvény korlátos.
 - Bizonyítsuk be, hogy egy - az $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett, (a,b) -n folytonos f függvény akkor és csak akkor egyenletesen folytonos az (a,b) nyílt intervallumon, ha folytonossá tehető $[a,b]$ -n.
- ! (104) 1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény folytonos az $[a, \infty)$ intervallumon ($a \in \mathbb{R}$ rögzített) és létezik a véges $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határérték, akkor f egyenletesen folytonos az $[a, \infty)$ intervallumon!
b) Igaz-e 1. azon megfordítása, hogy ha egy függvény egyenletesen folytonos az $[a, \infty)$ intervallumon, akkor létezik a véges $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határérték?
- Bizonyítsuk be, hogy korlátos, egyenletesen folytonos függvények szorzata is egyenletesen folytonos!
 - Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges I intervallumon folytonos, korlátos és monoton függvény ott egyenletesen folytonos.
- (105) 1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha adott egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és egy $x_0 \in I$ pont, és egy I -n értelmezett függvény egyenletesen folytonos az I azon x_0 -ban zárt I_1, I_2 részintervallumain, melyekre x_0 az I -t osztotta, akkor a függvény egyenletesen folytonos az egész I -n.
b) Fennáll-e a) állítása, ha nem kötjük ki, hogy I_1, I_2 x_0 -ban zárt?
- Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = \sqrt{x}$ egyenletesen folytonos egész értelmezési tartományán.

II. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

1. DIFFERENCIÁLHÁNYADOS. DIFFERENCIÁLHATÓSÁG. FORMÁLIS DERIVÁLÁS. MAGASABBRENDŰ DERIVÁLTAK. ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

1. A differenciálhányados definíciója alapján határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját a megadott x_0 helyen!

1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 5$ 3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_0 = 3$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$ 4. $f(x) = e^x$, $x_0 = -1$

5. $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

2. 2. A differenciálhányados definíciója alapján határozzuk meg $f'(x)$ derivált értékét mindazon x értékekre, amelyekre létezik!

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \sqrt{x}$

5. $f(x) = \frac{1}{2x}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

6. $f(x) = \sin 2x$

3. Igazoljuk a differenciálhányados definíciójának felhasználásával, hogy az $f^2(x)$ függvény differenciálható mindazokon a helyeken, ahol $f(x)$ differenciálható! Határozzuk is meg $f^2(x)$ deriváltfüggvényét!

4. Legyen f értelmezve $x = a$ egy környezetében. Tekintsük a következő állításokat:

A. Létezik a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = A_1$ véges határérték.

B. Létezik a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A$ véges határérték.

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

C. Az f függvény a és $a + h$ helyekhez tartozó megváltozása a következő alakban adható meg:

$$\Delta f = f(a + h) - f(a) = Ah + \varepsilon h, \text{ ahol } A \text{ } h\text{-től független}$$

(csak a -tól függő) állandó és $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$.

Következik-e A.-ből B., B.-ből A., A.-ből C., C.-ből A., B.-ből C., ill. C.-ből B.?

5. A differenciálási szabályok felhasználásával deriváljuk az alábbi függvényeket és állapítsuk meg, hogy a derivált függvény x mely értékeire van értelmezve!

$$1. \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$8. \quad f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$$

$$2. \quad f(x) = \left(3 - \frac{1}{x}\right)^3$$

$$9. \quad f(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x)^3$$

$$10. \quad f(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x)^x$$

$$\boxed{3.} \quad f(x) = \sqrt{\frac{3 + 5x}{3 - 5x}}$$

$$11. \quad f(x) = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln^2 x$$

$$4. \quad f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

$$12. \quad f(x) = (\operatorname{sh} 3x) \sqrt{6x + 5}$$

$$5. \quad f(x) = \operatorname{arc} \sin \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$13. \quad f(x) = \ln(x^2 - 1) \cdot \operatorname{arth} \frac{x}{3}$$

$$6. \quad f(x) = e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2} + \ln(3x+1)$$

$$14. \quad f(x) = \log_3 x + \ln 3 + 3^x + x^3 + x^x$$

$$7. \quad f(x) = 10^x + \lg x$$

6. Az alábbi egyenletek mindegyike egy $y = f(x)$ függvényt ad meg (implícit módon) az adott (x_0, y_0) pont egy környezetében:

$$\boxed{1.} \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = \sqrt{3}$$

$$2. \quad xy - y^2 - 3 = 0, \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 3$$

$$3. \quad e^{2x+y} + \sin(x+2y) = e^{\frac{\pi}{4}} + 1, \quad x_0 = 0; \quad y_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Határozzuk meg e függvények x_0 -beli deriváltját.

7. Határozzuk meg az alábbi magasabbrendű deriváltakat!

$$\boxed{1.} \quad f(x) = \sin^2 x + \sin x \operatorname{ch} x, \quad f^{(5)} = ?$$

$$2. \quad f(x) = \cos x, \quad f^{(33)} = ?$$

$$3. \quad f(x) = x^2 \sin x, \quad f^{(100)} = ?$$

$$4. \quad f(x) = x e^x, \quad f^{(n)} = ?$$

$$5. \quad f(x) = x^2 e^{ax}, \quad f^{(n)} = ?$$

$$6. \quad f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(n)} = ?$$

$$7. \quad f(x) = \frac{1 \cdot x}{1 \cdot x}, \quad f^{(n)} = ?$$

$$8. \quad f(x) = x^n e^x, \quad f^{(n)} = ?$$

8. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket, hogy az $x = 0$ helyen:

a) folytonosak-e

b) differenciálhatók-e. Jelölje $f'_+(a)$ az f függvény a -beli jobb oldali, $f'_-(a)$ az f függvény a -beli baloldali deriváltját. Határozzuk meg - amennyiben létezik - $f'(0)$, illetve $f'_+(0)$ és $f'_-(0)$ értékét!

$$\textcircled{1.} \quad f(x) = |x|$$

$$\textcircled{2.} \quad f(x) = x|x|$$

$$\boxed{3.} \quad f(x) = |\sin x|$$

$$4. \quad f(x) = x^2(x + |x|)$$

$$5. \quad f(x) = \cos^2 \sqrt{x}$$

$$6. \quad f(x) = \sqrt{x^2(x+3)^2}$$

$$7. \quad f(x) = e^{-|x|}$$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

13. Mutassunk példát olyan folytonos függvényre, amely az $x = 1$, $x = 2$ és $x = 3$ helyen nem differenciálható!

$$14. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \left(\frac{\pi}{x} \right) \right|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

a) Mutassuk meg, hogy az $x = 0$ pont tetszőleges környezetében található olyan hely, ahol f nem differenciálható, $x = 0$ -ban mégis deriválható a függvény!

b) Folytonos-e $f'(x)$ az $x = 0$ helyen?

$$15. \quad f(x) = |x - 2|^3$$

Határozzuk meg az $f'(x)$ és az $f''(x)$ függvényeket!
Létezik-e $f'''(2)$?

16. Hol differenciálható egyszer, ill. kétszer az

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{ha } x < 1 \\ (x-2)^2 + 2, & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ (x-4)^2 - 2, & \text{ha } 2 \leq x \end{cases} \quad \text{függvény?}$$

17. Legyen $\varphi(x)$ mindenütt folytonos függvény.

a) Differenciálható-e az $x = a$ pontban az

$$f(x) = (x - a)\varphi(x) \quad \text{függvény?}$$

b) Legyen $g(x) = |x-a|\varphi(x)$. Határozzuk meg a $g'_-(a)$ bal és $g'_+(a)$ jobboldali differenciálhányadosokat! Milyen feltételt kell teljesítenie $\varphi(x)$ -nek - a fenti tulajdonságán kívül -, hogy g deriválható legyen a -ban?

18. Differenciálható-e, és ha igen, hányszor az $f(x) = |(x-a)|^n$ ($n > 0$ egész) függvény az $x = a$ helyen?

19. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ páros függvény és $f'(0)$ létezik, akkor $f'(0) = 0$.

20. Legyen f differenciálható $(-\infty, +\infty)$ -ben. Igazoljuk, hogy

a) ha $f(x)$ páros, akkor $f'(x)$ páratlan függvény;

b) ha $f(x)$ páratlan, akkor $f'(x)$ páros függvény;

c) ha $f(x)$ periodikus, akkor $f'(x)$ is periodikus és $f'(x)$ periódusa megegyezik $f(x)$ periódusával.

21. Igazoljuk Darboux tételét: Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ -ben differenciálható és $f'(a) \neq f'(b)$, akkor $f'(x)$ az intervallum belsejében minden olyan értéket felvesz, amely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé esik.

22. Megadhatók-e olyan függvények, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételek valamelyikének?

- a) f mindentütt differenciálható, csak az x_0 helyen nem;
 b) f differenciálható az x_0 helyen, de annak egyetlen környezetében sem differenciálható.

23. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ ha } x \leq x_0 \\ ax + b & , \text{ ha } x > x_0 . \end{cases}$$

Hogyan kell az a és b együtthatók értékét megválasztani, hogy $f(x)$ differenciálható legyen az $x = x_0$ helyen?

24. Állíthatjuk-e, hogy az $f(x) = g(x) + h(x)$ összegfüggvény nem differenciálható az $x = x_0$ pontban, ha:

- a) $g(x)$ differenciálható x_0 -ban, de $h(x)$ nem;
 b) $g(x)$ és $h(x)$ egyike sem differenciálható x_0 -ban?

Indokoljuk meg válaszunkat!

25. Állíthatjuk-e, hogy az $f(x) = g(x)h(x)$ szorzat nem differenciálható az $x = x_0$ pontban, ha:

- a) $g(x)$ differenciálható x_0 -ban, de $h(x)$ nem;
 b) $g(x)$ és $h(x)$ egyike sem differenciálható x_0 -ban.

Indokoljuk meg válaszunkat!

26. Mit állíthatunk az $f(x) = g(h(x))$ összetett függvény x_0 -beli differenciálhatóságáról, ha:

- a) $g(x)$ differenciálható az $x = h(x_0)$ pontban, de $h(x)$ nem differenciálható x_0 -ban.
 b) $g(x)$ nem differenciálható a $h(x_0)$ helyen, de $h(x)$ differenciálható x_0 -ban.
 c) $g(x)$ nem differenciálható a $h(x_0)$ pontban és $h(x)$ sem differenciálható x_0 -ban.
 d) $g(x)$ differenciálható a $h(x_0)$ pontban és $h(x)$ differenciálható x_0 -ban.

Indokoljuk meg válaszunkat!

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

- ! (27.) Az I intervallumban legyen az f függvény kétszer deriválható és $f'(x) \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy az $f(I)$ intervallumban

$$[f^{-1}(y)]'' = -\frac{f''(f^{-1}(y))}{[f'(f^{-1}(y))]^3} !$$

2. A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS ÉS A DIFFERENCIÁL GEOMETRIAI ÉS FIZIKAI ALKALMAZÁSAI

28. Irjuk fel az alábbi görbék érintőjének és normálisának egyenletét az adott x_0 értékhez tartozó pontban!

1. $y = \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 2$

(2) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$, $x_0 = \frac{1}{2}$

3. $y = (x+1) \sqrt[3]{3-x}$ a) $x_0 = -1$, b) $x_0 = 2$, c) $x_0 = 3$

29. Határozzuk meg az alábbi görbék esetében azokat a pontokat, amelyekben a görbe érintője párhuzamos a megadott egyenletű egyenessel! Irjuk fel e pontokban az érintő egyenletét!

1. $y = x^3 + 1$, $y = 3x - 1$

2. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$, $y = -\frac{1}{2}x$

3. $x^2 + y^2 = 25$, $3x - 4y + 7 = 0$

4. $y = \sin x + \cos x$, x tengely

30. Határozzuk meg az alábbi görbék metszési szögét!

1. $y = \sin x$, $y = \cos x$

2. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

3. $y^2 = 4x - x^2$, $x^2 + y^2 = 8$

4. $y = \ln x$, x tengely

31. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 - y^2 = a$ és az $xy = b$ (a, b állandó) hiperbolaseregek ortogonálisok, azaz az egyik sereg minden görbéje derékszögben metszi a másik sereg valamennyi görbét!
($x \neq 0$, $y \neq 0$)

32. Legyen $f(x) > 0$ mindenütt differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy az $y_1 = f(x)$ és az $y_2 = f(x)e^{-x^2}$ görbék metszéspontjában érintőik megegyeznek!

33. Igaz-e, hogy az alábbi görbék mindegyikének origóbelli érintője az $y = x$ egyenes?

$y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$,

$y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{arsh} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{arth} x$.

34. Van-e vízszintes érintője, vagy félérintője az alábbi függvények görbéjének?

a) $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

b) $f(x) = x \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$

35. Bizonyítsuk be, hogy az $y = ax^2$ parabola tetszőleges pontjában húzott érintője az x tengelyt az érintési pont abszcisszájának felénél metszi!

36. Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az $y = a(x-3)^2 + b$ parabola az y tengelyt $\frac{\pi}{4}$ szögben messe, csúcspontja pedig az $y = x$ egyenesen legyen!

37. Bizonyítsuk be, hogy az $xy = 1$ hiperbola bármely pontjában húzott érintője, az x tengely és az y tengely mindig azonos területű háromszöget határol!

38. Határozzuk meg az $s = s(t)$ ut-idő függvény által leirt pontmozgás sebességét és gyorsulását az adott t_0 időpontban)

a) $s = \ln(t^2 + 1)$, $t_0 = 2$

b) $s = 3t^2 + 6t$, $t_0 = 0$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

39. Irjuk fel az alábbi függvények differenciálját!

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

3. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$

40. a) Irjuk fel az $f(x) = x^3$ függvény értékének Δf megváltozását (ha a független változó $x = x_0$ -ról $x = x_0 + h$ -ra változik) $\Delta f = A \Delta x + \varepsilon \Delta x$ alakban főrészt és elenyésző rész összegként, és mutassuk meg, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0$!

b) Számítsuk ki közelítőleg $f(x) = x^3$ értékét az $x_1 = 0,99$ pontban az $f(1) = 1$ összefüggés felhasználásával!

41. Egy kocka térfogata $V = 1000 \text{ dm}^3$.

- a) Mennyivel változik közelítően a térfogata, ha éleit 1 cm-rel növeljük?
 b) Közelítően hány cm-rel kell az élek hosszát növelni, hogy a térfogata 10 dm^3 -rel növekedjék?

42. A nehézségi gyorsulás g értékét 2 m hosszú matematikai inga 400 lengésének mért idejéből, $400 T = 1135 \text{ sec}$ -ből akarjuk meghatározni. Hány % bizonytalanságot okoz g meghatározásában az, hogy a lengések össz-idejét $0,5 \text{ sec}$ pontossággal tudtuk mérni?

43. Egy gömb sugarát 1%-kal növeljük. Közelítőleg hány %-kal nő a térfogat?

44. Hány dm-rel kell növelni egy 1000 liter térfogatú gömb sugarát, hogy térfogata közelítően 10 literrel növekedjék?

3. L'HOSPITAL SZABÁLY

45. Határozzuk meg - amennyiben létezik - az alábbi határértékeket! Állapítsuk meg, hogy melyeknél nem vezet célra, ill. nem célszerű a L'Hospital szabály alkalmazása. (Minden esetben állapítsuk meg a

határozatlan kifejezést típusát: $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $(\infty - \infty)$; $(0 \cdot \infty)$; (0^0) ; (0^∞) ; (1^∞)

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$(12.) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} \quad (n > 0 \text{ egész})$$

$$(3.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$$

$$(13.) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} \quad (n \text{ pozitív egész, } a > 0 \text{ valós})$$

$$(4.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arth} x}{\sin^3 x}$$

$$(14.) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} x\right)}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)}$$

$$(6.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x + b^x}{b^x + x^n} \quad (n \text{ pozitív egész, } 0 < a < b \text{ valós})$$

$$(7.) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 (e^{3x} + 3^x)$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e}{2}}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{ctg}(\pi x)$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

$$(19.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0)$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

$$\textcircled{22.} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} (\ln x) \cdot \ln(1-x)$$

$$\boxed{23.} \quad \lim_{x \rightarrow -0} (1-2^x)^{\sin x}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right]^{\ln x}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^x$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{x}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$$

$$31. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$32. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}}$$

$$33. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x$$

$$34. \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$$

46. Léteznek-e az alábbi határértékek? Alkalmazható-e a L'Hospital szabály?

$$\boxed{1.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x^a e^{\sin x}}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x e^{\sin x}}$$

! 47. a) Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ kétszer differenciálható x_0 -ban, akkor:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2} = f''(x_0).$$

b) Adjunk példát arra, hogy a baloldali határérték létezhet akkor is, ha f nem differenciálható kétszer x_0 -ban.

4. TAYLOR-POLINOM

48. Becsüljük meg az alábbi közelítés hibáját az adott intervallumban!

$$\textcircled{1.} \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$2. \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad |x| \leq \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3.} \quad \operatorname{sh} x \approx x + \frac{x^3}{3!}, \quad |x| \leq \frac{1}{3}$$

49. Milyen x -ek esetén használható 0,001 pontossággal a

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{közeltés?}$$

50. a) Irjuk fel az alábbi függvények adott x_0 helyéhez tartozó, adott fokszámu Taylor polinomját!

$$1. \quad y = x^3, \quad x_0 = 1, \quad T_1(x)$$

$$2. \quad y = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad T_1(x)$$

b) Számítsuk ki $(0,99)^3$ és $\cos 28^\circ$ közelítő értékét a fenti Taylor polinomok segítségével, és becsüljük meg a közelítés hibáját!

51. Irjuk fel az alábbi függvények adott fokszámu Taylor-polinomját az $x = 1$ helyen! Becsüljük meg a Taylor-polinom és a függvény eltérését az adott intervallumban!

$$a) \quad y = x^5 + e^{x-1}, \quad T_5(x), \quad x \in [0; 2]$$

$$\textcircled{b)} \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad T_2(x), \quad x \in [1; 1,25]$$

52. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 e^x$ függvény 10. deriváltját az $x = 0$ helyen!

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

53. Számítsuk ki a) e értékét 10^{-5} pontossággal,
 b) $\sqrt{5}$ értékét 10^{-4} pontossággal!

54. Bizonyítsuk be, hogy

$$\boxed{\text{a)}} \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad \text{ha } x \geq 0$$

$$\text{b)} \quad 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, \quad \text{ha } x > 0.$$

55. Adjunk meg a $\sin x$ függvényt az $x_0 = 0$ helyen közelítő Taylor polinomok közül egy olyant, amely a $[0,1]$ intervallumon 10^{-2} -nél kisebb hibával közelít!

5. KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEK (ROLLE, LAGRANGE, CAUCHY)

56. Alkalmazható-e az alábbi függvényekre az adott intervallumokban a Rolle tétel? Ha igen, határozzuk meg olyan ξ helyet, melyre $f'(\xi) = 0$.

$$1. \quad f(x) = x^2 - 4x, \quad 0 \leq x \leq 4;$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in (-1,1) \\ 0, & \text{ha } x = -1 \text{ és } x = 1, \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\textcircled{3.} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$4. \quad f(x) = |\arctg x|, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{5.} \quad f(x) = \ln x (1 - \ln x), \quad 1 \leq x \leq e$$

57. Határozzuk meg a deriválás elvégzése nélkül a

$$p(x) = (x - 2,1)(x - 2,3)(x - 2,5)(x - 2,7)$$

polinom deriváltjának gyökei $0,1$ -nél kisebb hibával!

58. Legyen $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$, ahol az $f(x)$ függvény differenciálható $[-1, 1]$ -ben. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{dg}{dx}$ -nek létezik legalább egy zérus helye $(-1, 1)$ -ben!

59. Alkalmazható-e az alábbi függvényekre a megadott intervallumokban a Lagrange-féle középértéktétel? Ha igen, határozzunk meg olyan ξ értékeket, melyekre $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$$1. \quad f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$2. \quad f(x) = \arctg x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$3. \quad f(x) = |\arctg x| \quad \text{(a) } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \text{b) } 0 \leq x \leq 1$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} + \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 0$$

60. Legyen $f(x)$ differenciálható (a, b) -ben. Igaz-e, hogy van olyan $c \in (a, b)$, amelyre $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$? Ha igaz, bizonyítsuk be, ha nem igaz, mutassunk ellenpéldát!

61. Igazoljuk hogy az $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ függvényekre a $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumban alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, és határozzunk meg olyan ξ értéket, amelyre:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{g\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

62. Bizonyítsuk be, hogy:

$$1. \quad |\sin a - \sin b| \leq |a - b|, \quad \text{ahol } a, b \text{ tetszőleges;}$$

$$2. \quad \frac{a-b}{\cos^2 b} < \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b < \frac{a-b}{\cos^2 a}, \quad \text{ahol } 0 < b < a < \frac{\pi}{2};$$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

3. $\operatorname{tg} x - 1 < 2x - \frac{\pi}{2}$, ha $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

4. $(y-x)\cos y < \sin y - \sin x < (y-x)\cos x$, ha $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$;

5. $\left| \frac{\cos a - \cos b}{\sin a - \sin b} \right| < 1$ ha $0 < a < b < \frac{\pi}{4}$.

!63. Bizonyítsuk be, hogy az

$f(x) = (x^2 - 1)^{10}$ függvény tizedik deriváltjának 10 különböző gyöke van $(-1, 1)$ -ben!

64. a) Legyen $p(x)$ n -edfoku polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha a $p(x) = 0$ egyenletnek n különböző valós gyöke van, akkor van $p'(x) = 0$ -nak legalább $(n-1)$ különböző valós gyöke!

b) Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x = 0$ egyenletnek az $x_0 > 0$ szám gyöke, akkor az

$n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1 = 0$ egyenletnek van x_0 -nál kisebb pozitív gyöke!

!65. Legyen $f(x)$ folytonos $[a, b]$ -ben és differenciálható (a, b) -ben; $f(x_k) = 0$, ha $k=1, 2, \dots, n$ és $x_k \in (a, b)$, továbbá $f(a) > 0$ és $f'(a) > 0$.

Mutassuk meg, hogy az $f'(x)$ deriváltfüggvénynek legalább n darab nullahelye van (a, b) -ben!

!66. a) Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ folytonos $[a, b]$ -ben és differenciálható $[a, c]$ -ben és $(c, b]$ -ben, akkor $f'(x)$ -nek nem lehet megszüntethető szakadása $x = c$ -ben!

b) Lehet-e $f'(x)$ -nek más jellegű szakadása?

67. Igazoljuk, hogy ha f differenciálható és f' korlátos az I intervallumban, akkor f egyenletesen folytonos I -n!

6. FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

68. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyekben a következő függvények szigorúan monoton növekedők, illetve csökkenők:

1. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 7$

5. $f(x) = x^2 - \ln x^2$

2. $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$

6. $f(x) = \ln \frac{x^2}{(1+x)^3}$

3. $f(x) = x^2 + 2 \cos x$

7. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$

4. $f(x) = x + \sin x$

8. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

69. Állapítsuk meg az $f(x) = x^2 + 2 \ln(\cos x)$ függvény értelmezési tartományát! Bizonyítsuk be, hogy a függvény szigorúan monoton fogyó $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban!

70. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ és $g(x)$ $[a, b]$ -ben folytonos, (a, b) -ben differenciálható, és $f'(x) > g'(x)$ $a < x < b$ esetén, akkor $f(b) - f(a) > g(b) - g(a)$.

71. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ $[a, b]$ -ben folytonos, (a, b) -ben differenciálható, és létezik olyan m állandó, hogy

$$f'(x) > m \quad (a < x < b), \text{ akkor } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > m.$$

72. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény lokálisan növekedő az $x = 0$ pontban, de e pont egyetlen $(-\varepsilon, \varepsilon)$ környezetében sem monoton növekedő! ($\varepsilon > 0$) Vázoljuk a függvény grafikonját!

73. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőérték helyeit!

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

2. $f(x) = |x| \ln |x|$

74. Meghatározható-e a k állandó értéke úgy, hogy az $f(x) = x + ke^{-kx}$ függvénynek az $x = 0$ helyen

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

- a) lokális maximuma,
 b) lokális minimuma,
 c) inflexiós pontja
 legyen?

!75. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek az $x = 0$ helyen lokális minimuma van, pedig e pontban az első differenciálhányados nem vált előjelet.

76. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} (\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x}) & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|(2 + \cos \frac{1}{x}) & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

- a) Differenciálhatók-e a fenti függvények $x = 0$ -ban?
 b) Van-e lokális szélsőértékük $x = 0$ -ban?

!77. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $f(x)$ függvény görbéje az $x_0 = 0$ pontbeli érintője fölött halad, bár nincs az $x_0 = 0$ pontnak olyan környezete, ahol a függvény alulról konvex lenne. Vázoljuk a függvény grafikonját!

78. Határozzuk meg az alábbi függvények maximális, illetve minimális értékét az adott intervallumokban!

1. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$

2. $f(x) = \sin 2x - x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

79. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, ahol az $f(x) = 3x + \cos x$ függvény görbéje alulról konvex, illetve konkáv! Hol van inflexiós pontja e függvénynek?

80. Határozzuk meg az alábbi függvények lineáris aszimptotáinak egyenletét!

1. $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$

3. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x^2}}$

2. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

4. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x}$

81. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvényeket!

1. $f(x) = 2x^2 - x^3$

11. $f(x) = x^x, (x > 0)$

2. $f(x) = 2x^2 - x^4$

12. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

13. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

4. $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

14. $f(x) = x \ln|x|$

5. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

15. $f(x) = x^2 \ln x$

16. $f(x) = (|x|-1)\ln(|x|-1)$

6. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$

17. $f(x) = |x| - \ln(1+x-|x|)$

18. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

7. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x$

19. $f(x) = \ln |\sin x|$

8. $f(x) = e^{-x^2}$

20. $f(x) = e^x \cos x$

21. $f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}$

9. $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$

22. $f(x) = \arccos \frac{1}{1-x}$

10. $f(x) = x^2 e^{-x}$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

82. Határozzuk meg az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat legnagyobb tagját!

83. Határozzuk meg az alábbi görbék lineáris aszimptotáit

$x \rightarrow \pm\infty$ esetén (a konstans)!

a) $x^4 - y^4 = a^2$

b) $x^3 + y^3 = a^3$

84. Vizsgáljuk meg és ábrázoljuk vázlatosan az alábbi görbéket!

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

b) $x(y^2 + 1) = 1$

85. 1. Igaz-e az alábbi állítás:

Ha $f(x)$ folytonos $[a, b]$ -ban és $f(a)f(b) < 0$, akkor pontosan egy olyan $\xi \in (a, b)$ van, amelyre $f(\xi) = 0$. Ha nem igaz, akkor fogalmazzuk át a tételt úgy, hogy igaz legyen!

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenletnek pontosan egy valós gyöke van:

$$x^5 + 2x^3 - 4 = 0 .$$

86. Legyen

$$f(x) = (x + 1) \sqrt[3]{x} .$$

a) Differenciálható-e $f(x)$ a $[-1, 1]$ intervallumban?

b) Van-e a függvénynek legnagyobb értéke $[-1, 1]$ -ben?

c) Invertálható-e $f(x)$ az adott intervallumban?

87. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket!

1. $e^x > 1 + x$, ha $x \neq 0$

2. $\ln x < x - 1$ ha $x \neq 1$ és $x > 0$

$$\textcircled{3.} \quad \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad (0 < b < a)$$

$$\textcircled{4.} \quad \frac{2}{\pi} x < \sin x < x, \quad \text{ha } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\textcircled{88.}$ Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ konvex $[a, b]$ -ben, akkor tetszőleges

$$x_1, x_2 \in [a, b] \text{ esetén } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

$\textcircled{89.}$ Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{a) } e^x + e^y > 2e^{\frac{x+y}{2}}, \quad \text{ha } x \neq y;$$

$$\text{b) } x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \quad \text{ha } x > 0, y > 0, x \neq y.$$

$\boxed{90.}$ Legyen f folytonos, ha $x \geq 0$ és $f(0) = 0$.
Létezzék $f'(x)$ és legyen f' monoton növő, ha $x > 0$. Mutassuk meg, hogy az $\frac{f(x)}{x}$ függvény monoton növő $x > 0$ esetén!

$\boxed{91.}$ Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$, ha $p > 1$ rögzített valós szám és $0 \leq x \leq 1$.

92. Van-e lokális szélsőértéke, illetve inflexió pontja az $x = 0$ pontban az alábbi függvényeknek?

$$\textcircled{\text{a)}} \quad f(x) = x^4 e^{2x}$$

$$\text{b) } g(x) = x^3 e^{2x}$$

$$\text{c) } h(x) = x^n e^{-x^2} \quad (n > 0 \text{ egész})$$

$$\textcircled{93.} \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

Bizonyítsuk be, hogy a fenti függvények az $x = 0$ helyen akárhány-szor differenciálhatók és $f(x)$ -nek lokális minimuma van, $g(x)$ -nek pedig nincs ebben a pontban lokális szélsőértéke, bár

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

7. SZÖVEGES SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK

94. Osszuk fel 12-t két részre úgy, hogy a részek
a) szorzata maximális legyen,
b) négyzetösszege minimális legyen!
95. Határozzuk meg azt a legnagyobb térfogatu hengert, amelynél a tengelymetszet kerülete 10 egység!
96. Egy folyó partján egy 3200 m^2 területű, téglalap alakú telket akarunk elkeríteni a lehető legrövidebb kerítéssel. A folyó partján nem állítunk kerítést. Hogyan válasszuk a téglalap oldalait?
97. V térfogatu, négyzet alapu felül nyitott tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkora legyenek az oldalélek?
98. Adott F felszíni, zárt egyenes körhengerek közül melyiknek legnagyobb a térfogata?
99. Egy r sugaru körbe írható derékszögű négyszögek közül melyiknek legnagyobb a területe?
100. Adott R sugaru körlemezéből mekkora nyílásszögű körcikket kell kivágnunk, hogy maximális térfogatu tölcseért kapjunk?
101. Egy tó partjától 300 m-re tartózkodunk egy csónakban. A parton, a csónakból a partra bocsátott merőleges talppontjától 1000 m-re van az állomás. Elérhetjük-e a 21 perc múlva induló vonatot, ha a vízben a csónakkal percenként 48 m-t, a parton pedig percenként 60 m-t tudunk megtenni?

8. EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSA

102. Igazoljuk, hogy alkalmazható a Newton féle érintő módszer az $x^x = 10$ egyenlet gyökének meghatározására! Határozzuk meg a gyököt közelítőleg!

103. a) Bizonyítsuk be, hogy az $x^5 + 2x^3 + x - 1 = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van és alkalmazható a Newton módszer a gyök közelítő meghatározására! Honnan célszerű az eljárást indítani?

b) Határozzuk meg a gyököt közelítőleg!

104. Határozzuk meg az $x = \operatorname{tg} x$ egyenlet legkisebb pozitív gyökét közelítőleg! Alkalmazható-e az iteráció?

105. Határozzuk meg az alábbi egyenletek valós gyökeit közelítőleg!

1. $4x^4 + 2x^3 - 3x - 5 = 0$

2. $3x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

3. $10x = e^x$

4. $2x = \cos x$

5. $\sin x = \ln x$

9. PARAMÉTERESEN ÉS POLÁRKOORDINÁTÁS ALAKBAN ADOTT GÖRBÉK ÉS DERIVÁLTJAİK

106. Irjuk fel az $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ körvonal paraméteres egyenletrendszerét, paraméterként a futó pontot a kör középpontjával összekötő szakasz t irányszögét használva.

107. Küszöböljük ki a t paramétert az alábbi egyenletrendszerekből, és állapítsuk meg, milyen görbét határoznak meg az egyes egyenletrendszerek!

1. $x = a \cos t$, ahol $a, b > 0$ constans ,
 $y = b \sin t$ $0 \leq t < 2\pi$

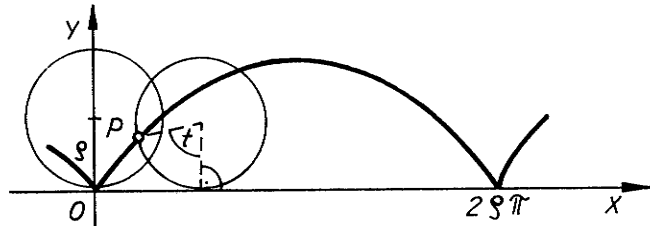
2. $x = a \operatorname{ch} t$, ahol $a, b > 0$ constans
 $y = b \operatorname{sh} t$ $-\infty < t < +\infty$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

$$3. \quad \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^2 \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$4. \quad \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

- 108.** a) Írjuk fel a cikloisnak, azaz annak a görbének a paraméteres egyenletrendszerét, amelyet egy egyenes mentén csúszásmentesen gördülő körvonal egy kiszemelt pontja leír. Jelöljük a kör sugarát ϱ -val, az egyenest, amely mentén gördül, válasszuk az x tengelynek, s a kiindulópontban a kör az origóban érintse az x tengelyt. A kör origóbeli P pontjának pályáját írjuk le. A t paraméter választása az ábrán látható.



37. ábra

- (b) Számítsuk ki a ciklois $P(x,y)$ pontbeli érintőjének iránytangensét! Adjunk módszert az érintő megszerkesztésére!
- (109) Írjuk fel az $\left. \begin{aligned} x &= \sin t - t \cos t \\ y &= \cos t + t \sin t \end{aligned} \right\}$ egyenletrendszerrel adott görbe $t = \frac{\pi}{4}$ paraméterű pontjában az érintő és a normális egyenletét!
- 110.** a) Igazoljuk, hogy bármely $y = f(x)$ alakban megadott görbe átírható paraméteres alakba!
 b) Igaz-e, hogy bármely paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe átírható $y = f(x)$ alakba?

$$\boxed{111.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Vizsgáljuk meg az } x = t^3 + 2t^2 + 3 \\ y = t^3 + 3t + 5 \end{array} \right\} \text{ alakban megadott görbét}$$

a $t = -2$ paraméterű pont környezetében!

Megjegyzés a 112-121. feladatokhoz: Az alábbiakban a polárkoordináta-rendszert és a derékszögű koordináta-rendszert úgy helyezzük egymásra, hogy az origó egybeessen a pólussal, a polártengely pedig az x tengely pozitív felével.

112. Írjuk fel az alábbi görbék polárkoordinátás egyenletét!

1. $x = a$ egyenes

2. $y = b$ egyenes

3. $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, ($a > 0$ konstans)

113. Adjuk meg az alábbi görbék egyenletét derékszögű koordináta-rendszerben, és állapítsuk meg milyen görbéről van szó!

1. $r = \frac{4}{\cos \varphi}$! 3. $r = \frac{4}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$

2. $r = 6 \cos \varphi$! $\boxed{4.}$ $r = \frac{1}{\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2}$

Határozzuk meg a görbe egy paraméteres alakját!

114. a) Írjuk fel a kardoid polárkoordinátás alakját! E görbe úgy keletkezik, hogy egy kör érintőire a kör kerületének egy rögzített pontjából merőlegeseket bocsátunk, a kardoid e merőlegesek talppontjainak mértani helye. Jelöljük a kör sugarát φ -val, a kört helyezzük úgy el, hogy átmérője a polártengelyen, a rögzített pont a pólusban legyen.

$\boxed{b)}$ Határozzuk meg a kardoid azon paraméteres alakját, amikor paraméternek a polárszöget választjuk, valamint a görbe azon érintőinek egyenletét, amelyek párhuzamosak a polártengellyel!

!115. Milyen görbét határoznak meg az alábbi polárkoordinátás alakban adott függvények? Írjuk fel a görbék paraméteres egyenletrendszerét paraméternek a polárszöget választva, valamint a görbék adott pontbeli érintőjének egyenletét!

$\textcircled{1.}$ $r = 3\varphi$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

$$2. \quad r = e^{3\varphi}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$3. \quad r = \frac{1}{\varphi}, \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$4. \quad r = 2 \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$5. \quad r = 2 \cos \varphi, \quad \varphi_0 = 0$$

!116. Bizonyítsuk be az alábbi állítást:

Legyen egy g görbe polárkoordinátás egyenlete $r = r(\varphi)$. Ha az $r(\varphi)$ függvény differenciálható és $r' \neq 0$, akkor g egy P pontjához tartozó r rádiuszvektor és a P -beli érintő által bezárt ω szögre fennáll: $\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'}$.

!117. Igazoljuk, hogy az $r = a e^{k\varphi}$ ($a > 0$, $k \neq 0$ konstansok) logaritmikus spirális bármely P pontjához tartozó rádiuszvektor és érintő által bezárt szög állandó! Ábrázoljuk a spirális!

!118. Igazoljuk, hogy az $r = \frac{a}{\varphi}$ ($a > 0$ konstans) hiperbolikus spirális aszimptotája az $y = a$ egyenes!

119. Bizonyítsuk be, hogy az $r = 2 \cos \varphi$ és az $r = 2 \sin \varphi$ görbék derékszögben metszik egymást!

!120. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát! Milyen görbék határoznak meg a függvények?

$$1. \quad r = \cos \varphi$$

$$4. \quad r = \sqrt{\cos 4\varphi}$$

$$2. \quad r = \sqrt{\cos \varphi}$$

$$5. \quad r = \sqrt{\cos n\varphi} \quad (n > 0 \text{ egész})$$

$$3. \quad r = \sqrt{\cos 2\varphi}$$

!121. A lemniszkáta azon pontok mértani helye, amelyeknek 2 adott ponttól való távolságainak szorzata egyenlő a 2 adott pont féltávolságának négyzetével.

a) Irjuk fel a lemniszkáta egyenletét polárkoordinátás alakban, a 2 pontot az x tengelyen az origóra szimmetrikusan helyezve el!

b) Vázoljuk fel a görbét!

c) Irjuk fel a görbe egyenletét derékszögű koordináták segítségével!

122. Differenciálhatók-e az alábbi függvények az $x = 1$ pontban?

$$\textcircled{a)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1+2^{x-1}}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^{x-1} - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

!123. a) Bizonyítsuk be, hogy ha f differenciálható az $[a, +\infty)$ intervallumon, és léteznek a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ véges határértékek, akkor $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

b) A $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ feltételből következik-e, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ véges?

124. Határozzuk meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy az

$$y = \frac{m}{|x|} \quad (|x| > c) \text{ görbedarabot kiegészítve az } y = p + q x^2 \quad (|x| \leq c) \text{ parabolaívvel sima (azaz folytonos és minden pontban érintővel rendelkező) görbét kapjunk!}$$

125. Mutassuk meg, hogy az $y = y(x)$ függvény, amelyet az

$$\left. \begin{aligned} x &= 2t + t \\ y &= 5t^2 + 4t|t| \end{aligned} \right\} \text{ egyenletrendszer definiál, differenciálható } x = 0$$

esetén, azonban a derivált nem számítható a $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)}$ formulával!

!126. $\arctg \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Határozzuk meg $y'(x)$ értékét az $(1, 0)$ pontban!

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

!127. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1+x}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) függvény lineáris aszimptotáját!

!128. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot, és ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvényeket!

$$1. \quad f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \qquad 2. \quad f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x}$$

129. Legyen a $\varphi(x)$ függvény n -szer differenciálható $x = a$ -ban. Határozzuk meg

$$\left[\frac{d^n (x-a)^n \varphi(x)}{dx^n} \right]_{x=a} \quad \text{értékét!}$$

!130. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\boxed{a)} \quad \left[x^{20} \cos x \right]_{x=0}^{(40)} = \frac{40!}{20!};$$

$$b) \quad (x^n e^{-x})^{(n)} = e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n!)^2 x^k}{(k!)^2 (n-k)!};$$

$$c) \quad \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n)} = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

131. Bizonyítsuk be, hogy a $p(x) = \prod_{k=0}^{10} (x-k)$ polinom deriváltjára

$$p'(n) = (-1)^n n! (10-n)!, \quad (n=0, 1, 2, \dots, 10).$$

!132. Legyen $p_n(x) = x^n - x^{n-1} - 1$ ($n=2, 3, \dots$).

a) Bizonyítsuk be, hogy a $p_n(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van az $[1, 2]$ intervallumban: ξ_n (tetszőleges $n = 2, 3, \dots$ esetén)!

b) Igazoljuk, hogy a ξ_n gyökök monoton fogyó sorozatot alkotnak!

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

133. Milyen c valós szám esetén van az alábbi egyenleteknek egy, illetve két megoldása?

a) $x \ln x = c$

b) $x e^{-x} = c$

134. Legyen f értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$, és tegyük fel, hogy $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad \forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy $f = \text{állandó!}$

135. Bizonyítsuk be, hogy $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign } x$ bármely $x \neq 0$ valós szám esetén!

136. Legyen $f(x) = e^{-x|x|}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy f invertálható $(-\infty, +\infty)$ -ben, és adjuk meg f^{-1} -et!

b) Hol folytonos és hol differenciálható f^{-1} ?

137. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket!

a) $e^x < 1 + (e-1)x$, ha $0 < x < 1$

b) $\cos x > 1 - \frac{2}{\pi} x$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) $\left| \frac{4}{\pi} x \right| \leq |\arctg x| \leq |x|$, ha $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

d) $x - \frac{x^3}{3} < \arctg x$, ha $x > 0$

e) $\text{tg } x > x + \frac{x^3}{3}$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$

f) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

g) $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$, ha $0 < y < x$ és $p > 1$

138. Hol konvex az $f(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ függvény a $(0, +\infty)$ intervallumon?

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

!139. a) Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény nem korlátos az (a, b) intervallumon, akkor f' sem lehet korlátos (a, b) -n!

b) Igaz-e a tétel megfordítása?

!140. Bizonyítsuk be, hogy ha f kétszer differenciálható, és $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$ esetén, akkor $\forall \xi \in (a, b)$ -hez található olyan

$$c, d \in (a, b), \text{ hogy } f'(\xi) = \frac{f(c) - f(d)}{c - d}.$$

!141. Legyen az f és a g függvény legalább 3-szor differenciálható a

$[2, +\infty)$ intervallumban, $f^{(k)}(2) = g^{(k)}(2)$, ha $k=0, 1, 2$, és

$f^{(3)}(x) > g^{(3)}(x)$, ha $x > 2$. Igazoljuk, hogy $f(x) > g(x)$, ha $x > 2$!

III. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

1. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

1. Igazoljuk, hogy a $F(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$ függvény az $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ függvény egyik primitív függvénye, a $F(x) + c$ függvénysereg pedig $f(x)$ határozatlan integrálja a $(-|a|, |a|)$ intervallumon.

2. Keressük meg az $f(x) = 3x^2$ függvény azon primitív függvényét, amelynek görbéje illeszkedik a $P(2, 6)$ pontra.

3. Irjuk fel az $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ függvény azon integrálgörbéjének egyenletét, amely átmegy a $P(1, 1)$ ponton.

4. Adjuk meg azon görbesereg $y = F(x) + C$ alakú egyenletét, amelynek görbéihez vont érintő iránytangense tetszőleges x helyen: $y' = \operatorname{ctg} x$.

5. Irjuk fel azon görbe $y = F(x) + c_0$ alakú egyenletét, melynek érintője az x helyen $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$ iránytangensű, s amely átmegy a $P(\frac{\pi}{4}, 1)$ ponton.

A következő feladatokban adjuk meg a primitív függvényeket és azok értelmezési tartományát is. (6-132)

1.1. Alapintegrálokra visszavezethető feladatok

6. $\int \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2} dx$

7. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$

8. $\int \sqrt{x \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x}} dx$

9. $\int \frac{x^6}{x^2 + 1} dx$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

$$\underline{10.} \quad \int \frac{-2}{5x^2 + 5} dx$$

$$\underline{11.} \quad \int \left(\frac{x^2 - 1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\boxed{\underline{12.}} \quad \int \frac{x+1}{x-1} dx$$

$$\underline{13.} \quad \int \frac{2x+3}{x-2} dx$$

$$\underline{14.} \quad \int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$

$$\underline{15.} \quad \int (\cos 4x - \sin \frac{x}{5}) dx$$

$$\underline{16.} \quad \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$\underline{17.} \quad \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} dx$$

$$\textcircled{\underline{18.}} \quad \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$$

$$\underline{19.} \quad \int (3 \operatorname{sh} x - 2 \operatorname{ch} 3x) dx$$

$$\textcircled{\underline{20.}} \quad \int \operatorname{th}^2 x dx$$

$$\underline{21.} \quad \int \frac{1}{e^{3-x}} dx$$

$$\underline{22.} \quad \int \frac{e^{2x} + 1}{e^{3x}} dx$$

$$\textcircled{\underline{23.}} \quad \int \frac{1 - e^{\frac{x}{2}}}{1 + e^{\frac{x}{2}}} dx$$

$$\underline{24.} \quad \int e^{3x} \operatorname{ch} 5x dx$$

$$\underline{25.} \quad \int e^x \operatorname{sh} x dx$$

1.2. Trigonometrikus szorzat integrálok

$$\textcircled{\underline{26.}} \quad \int \cos 5x \cdot \cos 7x dx$$

$$\textcircled{\underline{27.}} \quad \int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$$

$$\textcircled{\underline{28.}} \quad \int \operatorname{cs}^2 \frac{x}{2} dx$$

$$\textcircled{\underline{29.}} \quad \int \sin^2 (1-2x) dx$$

$$\textcircled{\underline{30.}} \quad \int \sin^4 x dx$$

1.3. $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx$ alakú integrálok

$$\underline{31.} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-5x}} dx$$

$$\underline{32.} \quad \int \frac{2x-5}{\sqrt[3]{(x^2-5x+10)^7}} dx$$

$$\boxed{33.} \int \frac{5x^2}{5-4x^3} dx$$

$$\boxed{34.} \int \cos^3 x dx$$

$$35. \int \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$36. \int \sin 3x \cdot \sqrt{1-\cos 3x} dx$$

$$37. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$38. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$$

$$39. \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\operatorname{arc} \sin x}} dx$$

$$40. \int \sqrt{\frac{\operatorname{ar} \operatorname{sh} x}{1+x^2}} dx$$

$$41. \int \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt[3]{\operatorname{sh} x}} dx$$

$$42. \int e^x \cdot \sqrt{1+e^x} dx$$

$$43. \int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} dx$$

$$44. \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$$

1.4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ alakú integrálok

$$45. \int \operatorname{tg} x dx$$

$$46. \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$47. \int \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} dx$$

$$48. \int \frac{x-3}{x^2-6x+27} dx$$

$$49. \int \frac{x}{1-2x} dx$$

$$50. \int \frac{9x^2}{4x^3+5} dx$$

$$51. \int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx$$

$$\boxed{52.} \int \frac{e^x(\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x)}{\operatorname{ch} 3x} dx$$

1.5. $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$ alakú integrálok

$$53. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$$

$$54. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

$$55. \int x \cdot \sin x^2 dx$$

$$57. \int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} dx$$

$$56. \int \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$58. \int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$$

1.6. Teljes négyzetté kiegészítve alapintegrálokra visszavezethető feladatok

$$59. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 6}$$

$$61. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 1}$$

$$63. \int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$$

$$60. \int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 23}$$

$$62. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 40}}$$

$$64. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}$$

1.7. Parciális integrálás

$$\textcircled{65.} \int x \sin 2x dx$$

$$67. \int (2x - x^2) \operatorname{sh} x dx$$

$$\textcircled{69.} \int \ln(x^2 + 1) dx$$

$$\textcircled{71.} \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$$

$$\textcircled{73.} \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$$

$$\textcircled{75.} \int \operatorname{arc} \sin x dx$$

$$77. \int \operatorname{arch} x dx$$

$$66. \int x \cos^2 x dx$$

$$\textcircled{68.} \int (3x - 5) e^{2x+3} dx$$

$$70. \int \ln^2 x dx$$

$$\textcircled{72.} \int x^5 \cdot e^{x^2} dx$$

$$\boxed{74.} \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$76. \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$$

$$\boxed{78.} \int e^{3x} \cdot \cos 5x dx$$

79. $\int \cos x \cdot \operatorname{sh} x \, dx$

80. $\int \frac{\sin x}{e^{2x}} \, dx$

1.8. Racionális törtfüggvények integrálása

81. $\int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x - 3} \, dx$

82. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 16}$

83. $\int \frac{x - 3}{x^3 - x} \, dx$

84. $\int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x + 1} \, dx$

85. $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} \, dx$

86. $\int \frac{2x^5 - 3x^2}{1 + 3x^3 - x^6} \, dx$

87. $\int \frac{2x^2 - 5}{(x-2)(x-1)(x+1)} \, dx$

88. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$

89. $\int \frac{x - 5}{(x+1)(x-2)^2} \, dx$

90. $\int \frac{x^2 \, dx}{1 - x^4}$

1.9. Integrálás helyettesítéssel

$\int R\left(x^{\frac{a}{b}}, \dots, x^{\frac{k}{l}}\right) \, dx$ alakú irracionális
integrálok racionalizálása:

91. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}}$

92. $\int \frac{dx}{x(1 - \sqrt{x})}$

93. $\int x \cdot \sqrt[4]{x+3} \, dx$

94. $\int (x-3) \sqrt[5]{x+1} \, dx$

95. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$

96. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt{x}} \, dx$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

Racionális törtfüggvények integráljára vezető helyettesítések:

$$\boxed{97.} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$$

$$\underline{98.} \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

$$\textcircled{99.} \int \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^{x+3}} dx$$

$$\underline{100.} \int \frac{e^x}{\text{sh}^2 x} dx$$

$$\boxed{101.} \int \frac{1}{\sin x} dx$$

$$\underline{102.} \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\underline{103.} \int \frac{1}{1 - \sin x} dx$$

$$\underline{104.} \int \frac{1}{2 - \cos x} dx$$

$$\underline{105.} \int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

$$\underline{106.} \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$$

$$\underline{107.} \int \frac{1}{\sin x + \text{tg} x} dx$$

$$\boxed{108.} \int \frac{1}{1 + \text{tg} x} dx$$

$$\underline{109.} \int \frac{1}{1 - \text{tg}^2 x} dx$$

$$\boxed{110.} \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

R ($\sqrt{ax^2 + bx + c}$) integrálja:

$$\boxed{111.} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$\boxed{112.} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$$

$$\textcircled{113.} \int \sqrt{x^2 + 6x + 10} dx$$

$$\textcircled{114.} \int \sqrt{1 + 2x - x^2} dx$$

$$\textcircled{115.} \int \sqrt{2x^2 + 8x + 5} dx$$

$$\underline{116.} \int \sqrt{5x^2 - 7} dx$$

$$\underline{117.} \int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 2}} dx$$

$$\textcircled{118.} \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx$$

1.10. Vegyes feladatok

119. $\int (x - 3) \operatorname{tg} (x^2 - 6x + 7) dx$

120. $\int \frac{x \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

121. $\int \sin \sqrt{x} dx$

122. $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

123. $\int \sin (2x-1) \operatorname{ch}(3x + 2) dx$

124. $\int \frac{2x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx$

125. $\int \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^2 dx$

126. $\int \frac{3x - 5}{2x^2 - 12x + 23} dx$

127. $\int \operatorname{arc} \cos \frac{1}{x} dx$

128. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$

129. $\int \frac{1}{\sin^2 (3x - 2)} dx$

130. $\int \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} dx$

131. $\int \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx$

132. $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1 + e^x}} dx$

A primitív függvények számítással történő meghatározásainak gyakorlásával párhuzamosan célszerű megismerkedni a Bronstejn-Szemengyajev: Matematikai Zsebkönyv c. munkájában található integráltáblázat használatával is (426. old.-474. old.). Az alábbiakban megadjuk a feladattár néhány feladatának számát, melyeknél ajánljuk, hogy az integráltáblázat segítségével is keressük meg a primitív függvényt: III/1.: 26, 29, 59, 63, 67, 77, 78, 91, 92, 98, 103, 106, 108, 111, 117.

INTEGRÁLSZÁMITÁS

2. HATÁROZOTT INTEGRÁL

Állapítsuk meg az alábbi végtelen sorok összegét határozott integrál segítségével:

$$\boxed{133.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$$

$$\underline{134.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} \right]$$

$$\underline{135.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right]$$

$$\underline{136.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} \right]$$

$$\underline{137.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} \quad (m > 0)$$

$$\underline{138.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(1 + \frac{k}{n})}{n}$$

Számítsuk ki az alábbi határozott integrálok értékét az integrálási szakasz megfelelő felosztásával integrál-közelítő összeg határértékeként:

$$\textcircled{139.} \quad \int_0^a x^k dx \quad (a \neq 0, k \neq -1, \text{ egyenletes szakaszbeosztással})$$

$$\boxed{140.} \quad \int_a^b x^k dx \quad (a, b > 0, k \neq -1; \text{ mértani sorozat szerint változó osztópontok alkalmazásával})$$

$$\boxed{141.} \quad \int_a^b \frac{1}{x} dx \quad (\text{az előző feladat speciális esete } k = -1\text{-re})$$

$$\boxed{142.} \quad \int_0^1 e^x dx \quad (\text{egyenletes felosztással})$$

$$\boxed{143.} \quad \int_a^b \sin x dx \quad (\text{egyenletes felosztással})$$

Állapítsuk meg, hogy integrálhatók-e a következő függvények a megadott intervallumon:

$$\boxed{144.} \quad f(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\left| \sin \frac{\pi}{x} \right|}; \quad x \in [-a^2, a^2]$$

$$\textcircled{145.} \quad f(x) = \begin{cases} \text{sg} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right) & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0; \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\boxed{146.} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ ha } x \text{ irracionális} \\ x & , \text{ ha } x \text{ racionális}; \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\boxed{147.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ ha } x = 0 \\ \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], & \text{ ha } x \neq 0; \quad x \in [0, a^2] \end{cases}$$

$$\boxed{148.} \quad f(x) = \frac{d}{dx} \left(\text{arc tg } \frac{1}{2x} \right); \quad x \in [-1, 1].$$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

149. a) Legyen $f(x) + g(x)$ integrálható $[a, b]$ -ben. Következik-e ebből $f(x)$ és $g(x)$ $[a, b]$ -beli integrálhatósága?
 b) Legyen $f(x) \cdot g(x)$ integrálható $[a, b]$ -ben. Következik-e ebből, hogy $f(x)$ és $g(x)$ is integrálható $[a, b]$ -ben?
 c) Legyen $|f(x)|$ integrálható $[a, b]$ -ben. Következik-e ebből, hogy $f(x)$ integrálható $[a, b]$ -ben?

150. a) Igazoljuk, hogy ha $\int_a^b f(x) dx$ létezik, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, ahol f folytonos.

b) Igazoljuk, hogy ha $\int_a^b f(x) dx$ létezik, akkor $[a, b]$ minden belső részintervallumában van f -nek folytonossági helye.

c) Igazoljuk, hogy ha $\int_a^b f(x) dx$ létezik, $f(x) \geq 0$, és $[a, b]$ -n ill. egy $\xi \in (a, b)$ folytonossági helyen $f(\xi) > 0$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

d) Legyen $f(x)$ integrálható $[a, b]$ -ben. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x)$

minden $[a, b]$ -beli folytonossági pontjában $f(x) = 0$.

151. Legyen $f(x)$ korlátos és monoton függvény a $[0, 1]$ intervallumban. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(A $\varphi(x) = o(\psi(x))$, $x \in X$ (nagyordó) kifejezés azt jelöli, hogy létezik olyan A állandó, melyre $|\varphi(x)| \leq A |\psi(x)|$ minden $x \in X$ -re.)

Döntsük el, léteznek-e a következő integrálok;
indokoljuk meg válaszunkat:

152. a) $\int_0^2 f(x) dx$; b) $\int_0^2 |f(x)| dx$; c) $\int_0^2 f^2(x) dx$;

$$\text{ahol } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

153. $\int_{-2}^2 (\operatorname{sg} x) x^2 \cos x dx$

154. $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{|x|} e^{-x^2} dx$

155. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{1}{x} dx$

156. $\int_{-1}^0 \frac{x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} dx$

157. $\int_0^1 f(x) dx$, ahol $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = \frac{1}{m} \\ x & \text{egyébként } (m > 0, \text{ egész}). \end{cases}$

Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

158. $1 - \frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

$$\boxed{159.} \quad 0 < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx \leq 1$$

$$\boxed{160.} \quad \frac{4\pi}{3} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \frac{1}{2} \cos x} \leq 4\pi$$

$$\textcircled{161.} \quad 0 < \int_0^1 \frac{x^7}{3\sqrt[3]{1+x^6}} dx < \frac{1}{8}$$

$$\textcircled{162.} \quad \frac{1}{3} < \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} dx < \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\textcircled{163.} \quad 0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{164.} \quad \left| \int_0^1 \frac{\cos cx}{x+1} dx \right| \leq \ln 2 \quad (c \text{ tetszőleges valós szám})$$

$$\textcircled{165.} \quad \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{1}{x} dx \right| < \pi$$

$$\boxed{166.} \quad \text{Adjunk alsó és felső becslést } \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a^2} \operatorname{tg} x dx \text{ értékére.}$$

$$\boxed{167.} \quad \text{Vizsgáljuk meg, hogy } f(x) = x^x \text{ integrálható-e } [0,1] \text{-ben; ha igen, adjunk alsó és felső becslést az integrál értékére.}$$

168. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ differenciálható, konkáv függvény $[a, b]$ -ben, akkor

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét:

169. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$

170. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

171. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$

172. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$

173. $\int_0^1 \arccos x dx$

174. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$

175. $\int_0^2 f(x) dx$, ahol $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

176. $\int_0^1 f(x) dx$, ahol $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq t \\ t \frac{1-x}{1-t}, & \text{ha } t < x \leq 1 \end{cases}$

177. $\int_{-2}^2 \sqrt{1 - 2|x| + x^2} dx$

178. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

179. $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$

180. $\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

$$\boxed{181.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\underline{182.} \int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$\textcircled{183.} \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}} dx$$

$$\underline{184.} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

Alkalmazható-e a Newton-Leibniz formula az alábbi integrálok kiszámításánál:

$$\underline{185.} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arcsin \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\underline{186.} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 2^x} \right) dx$$

Magyarázzuk meg, hogy az alábbi integrálok esetében az x változó megadott helyettesítése miért vezet hamis eredményre:

$$\underline{187.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad x = \frac{1}{t}$$

$$\underline{188.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = t$$

$$\boxed{189.} \int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^2} dx, \quad x = \sin t$$

$\textcircled{190.}$ Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ folytonos $[a, b]$ -ben, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a+(b-a)x) dx.$$

!191. Igazoljuk, hogy ha $a > 0$, akkor

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx .$$

Rekurziós formulák segítségével számítsuk ki a következő, n -től mint paramétertől függő integrálokat.

($n > 0$ egész)

!192.
$$I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx \quad (m > 0)$$

!193.
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx$$

!194.
$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat, amelyekben az integrandus korlátos, szakadásos függvény:

195.
$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx$$

196.
$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$$

197.
$$\int_0^2 [e^x] dx$$

198.
$$\int_1^{n+1} \ln [x] dx \quad (n > 0, \text{ egész})$$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

3. VÁLTOZÓ FELSŐ HATÁRÚ HATÁROZOTT INTEGRÁL (INTEGRÁLFÜGGVÉNY)

Határozzuk meg az alábbi deriváltakat:

$$199. \text{ a) } \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx \quad (a \text{ áll.})$$

$$\text{b) } \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx \quad (b \text{ áll.})$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx \quad (a \text{ és } b \text{ áll.})$$

$$200. \frac{d}{dx} \int_x^{2x} \ln(1+t) dt \quad (x > 0)$$

$$201. \frac{d}{dx} \int_x^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$202. \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$$

203. Mutassuk meg, hogy ha u nem függ v -től, akkor

$$\frac{d}{du} \int_u^v \sin x^2 dx + \frac{d}{dv} \int_u^v \sin x^2 dx = \int_u^v \cos x dx .$$

204. Igazoljuk, hogy $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin 2t}{t} dt$ kielégíti az $x \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} = 8x \cos 2x^2$ differenciálegyenletet.

205. Milyen folytonos függvényekre áll fenn az alábbi egyenlőség ?

$$\int_1^x y(x) dx = 2y - 1 .$$

206. Legyen $f(x) > 0$, folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy $x \geq 0$ esetén

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt} \text{ növekvő függvény.}$$

207. a) Hogyan kell "a" értékét megválasztani, hogy

$$f(x) = \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$$

folytonos függvény legyen?

b) Differenciálható-e a $g(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ függvény?

208. Vizsgáljuk meg, hogy az

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2 + t - 2}{t^2 + 1} dt \text{ függvénynek léteznek-e a } [0, \sqrt{3}] \text{ inter-}$$

vallumban helyi szélsőértéke.
Amennyiben igen, határozzuk meg.

INTEGRÁLSZÁMITÁS

209. Legyen $f(x) = \int_0^x t^2 \arcsin t \, dt$.

a) Milyen pozitív x -ekre differenciálható $f(x)$?

b) Irjuk fel a függvény $x_0 = \frac{1}{2}$ pontbeli érintőegyenésének egyenletét.

c) Határozzuk meg $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 \arcsin t \, dt}{x}$ értékét.

210. Legyen $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ 2x^2, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Adjuk meg a $[-1, 2]$ intervallumhoz tartozó integrálfüggvényt.

211. Legyen $f(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ x-1, & \text{ha } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Adjuk meg a $[0, 3]$ intervallumhoz tartozó integrálfüggvényt. Állapítsuk meg, hogy ez a $[0, 3]$ mely pontjaiban folytonos, ill. differenciálható.

Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

212. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 \, dt}{x}$

213. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) \, dt}{x^2}$

$$\boxed{214.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

$$\underline{215.} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\operatorname{tg} x \int_0^{\sqrt{\sin x}} \sqrt{\sin t} dt}$$

4. IMPROPRIUS INTEGRÁL

Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét, amennyiben konvergensek:

$$\boxed{216.} \quad \int_0^{\infty} e^{-4x} dx$$

$$\underline{217.} \quad \int_0^{\infty} e^{6x} dx$$

$$218. \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\underline{219.} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx$$

$$\underline{220.} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\underline{221.} \quad \int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} dx$$

$$\underline{222.} \quad \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$\underline{223.} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx$$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

$$\textcircled{224.} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$\textcircled{226.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+3x^2} dx$$

$$\textcircled{228.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\underline{225.} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\underline{227.} \int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx$$

$$\textcircled{229.} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$$

Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét, amennyiben konvergensek:

$$\textcircled{230.} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\underline{231.} \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

$$\underline{232.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\underline{233.} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$\underline{234.} \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\underline{235.} \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$\underline{236.} \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\underline{237.} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

$$\textcircled{238.} \int_0^3 \frac{dx}{x-1}$$

$$\underline{239.} \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\underline{240.} \int_0^1 \ln^n x dx$$

$$\textcircled{241.} \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{e^{bx}} dx$$

$$\textcircled{242.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Vizsgáljuk meg a következő integrálok konvergenciáját:

$$243. \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$\textcircled{244.} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx$$

$$\textcircled{245.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\textcircled{246.} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$$

$$247. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x + \sqrt{1+x^2})^m}; \quad (m > 1)$$

$$248. \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(-x+b)}}; \quad (b > a)$$

$$249. \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} dx$$

$$250. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

$$\textcircled{251.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x}$$

$$\textcircled{252.} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$253. \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$254. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}$$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

$$! 255. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}}$$

5. AZ INTEGRÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI

5.1. Területszámítás

Készítsünk vázlatot, majd határozzuk meg az alábbi görbék által határolt síktartomány geometriai területét:

256. $y = 4 - x^2$ és $y = 0$

257. $y = \frac{1}{x}$ és $y = 2,5 - x$

258. $y = x(x-1)$ és $y = 3x$

259. $y = \sin x$ és $y = \frac{2}{\pi} x$

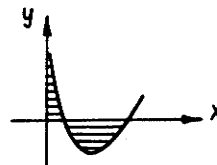
260. $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$ és $x + y = 1$

261. $y = x^2 + 2x$ és $y = 4 - x^2$

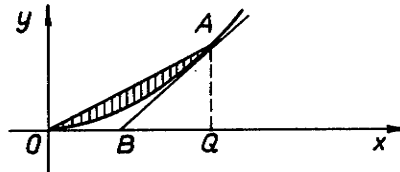
262. $y = x^4$ és $y = 3x^2 - 2$

263. $x = y^2$ és $x = \frac{3}{4} y^2 + 1$

264. Határozzuk meg az $y = x^2 - 4x + 3$ függvény görbéje és a koordinát tengelyek által bezárt véges területet.

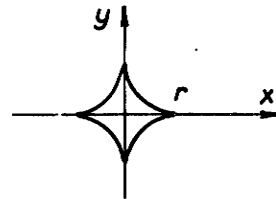


265. Határozzuk meg azt a területet, amelyet az y -tengely, az $y = \sqrt{x}$ görbe, valamint annak $x_0 = 4$ abszcisszájú pontjához tartozó érintője határol.
266. Határozzuk meg az $y = x(1-x)$ parabola, továbbá az $x_0 = 0$ és $x_1 = 2$ abszcisszájú pontjában húzott érintők által határolt területet.
267. Határozzuk meg az $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ görbék által bezárt idom területét.
268. Állapítsuk meg, milyen területű részekre bontja az $x^2 + y^2 = 16$ kört az $y^2 = 6x$ parabola.
269. Igazoljuk, hogy a bevonalkázott parabolaszélet területe $\frac{2}{3}$ -része a hur, az x -tengely és az érintő által határolt $OAB\Delta$ területének!



270. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ görbe $x > 0$ darabja és a görbe aszimptotája által bezárt terület nagyságát.
271. Számítsuk ki az $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$ paraméteres görbe alatti területet a $0 \leq t \leq 2$ határok között.
272. Számítsuk ki az $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott ellipszis területét.
273. Mekkora az $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumhoz tartozó íve alatti terület?

274. Mekkora az $\begin{cases} x = r \cos^3 t \\ y = r \sin^3 t \end{cases}$



asztroid területe?

INTEGRÁLSZÁMITÁS

275. Kiszámítandó egy teljes ciklois-ív alatti terület!

A ciklois egyenletrendszere:

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t).$$

276. Mekkora az $x = \cos 2t, y = \cos t$ egyenletrendszertől parabola és az y -tengely közé eső síkrész területe?

277. Mekkora az $r = 2a \cos \varphi$ görbe $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ íve alatti terület?

278. Számítsuk ki az $r = e^{\frac{\varphi}{2}}$ logaritmikus spirális $0 \leq \varphi \leq \pi$ íve által meghatározott szektortartomány területét!

279. Számítsuk ki az $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemnikszkát $\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ íve által meghatározott szektortartomány területét!

280. Határozzuk meg az $r = 4$ sugarú kör $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemnikszkátán kívül eső részének területét!

281. Határozzuk meg az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemnikszkát $r = 2$ körön kívül eső részének területét!

282. Mekkora az

$$r^2 = \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

poláregyenletű görbe $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ íve által meghatározott szektortartomány területe?

283. Határozzuk meg φ_0 értékét úgy, hogy az $r = 2\varphi$ archimedesi spirális $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ íve által meghatározott szektortartomány területe 20 területegység legyen.

5.2. Ívhossz-számítás

Számítsuk ki az alábbi görbék megadott intervallumhoz tartozó íveinek hosszát:

284. $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$

285. $y = \ln(1-x^2)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

286. $y = 1 - \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

287. $y = e^x$, $\ln 2 \leq x \leq \ln 3$

288. $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 1$

289. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = \operatorname{ch} x$ görbe 0-tól x -ig terjedő ívének hossza 15 egység legyen!

290. Számítsuk ki az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ egyenlettel megadott görbe (asztroid) teljes ívhosszát!

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerekkel megadott görbék ívhosszát:

291.
$$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases} , \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

292.
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{8} \sin 2t \end{cases} , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

293. Számítsuk ki a ciklois egy teljes ívének hosszát!

294.
$$\begin{aligned} x &= (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t , \\ y &= (2-t^2) \cos t + 2t \sin t , \quad 0 \leq t \leq \pi \end{aligned}$$

Határozzuk meg az alábbi polárkoordinátás egyenletekkel megadott görbék ívhosszát:

295. $r = a \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; ($a > 0$)

296. $r = 2a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; ($a > 0$)

297. $r = \frac{1}{\varphi}$, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$

298. $r = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

5.3. Forgástestek térfogata

Forgassuk meg az alábbi görbeveket az x -tengely körül és számítsuk ki a keletkező forgástestek térfogatát:

299. $y = \frac{1}{x}$, a) $1 \leq x \leq 3$, b) $1 \leq x < \infty$

300. $1 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $1 \leq x \leq 4$

301. $y = 1 + \cos \frac{x}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

302. $y = x e^x$, a) $0 \leq x \leq 1$, b) $-\infty < x \leq 0$.

Számítsuk ki az alábbi egyenletekkel megadott görbevek y -tengely körül megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát:

303. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

304. $y = \ln x$, $0,5 \leq y \leq 1,5$

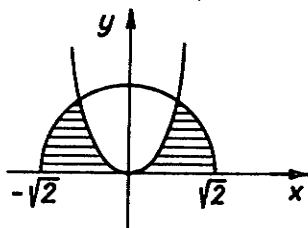
305. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$, $2 \leq y \leq 4$

306. $y = e^x$, $1 \leq y \leq 2$

307. Az $y = x^2$ görbe y -tengely körüli megforgatásával keletkező tartályban 2 egység magasságig folyadék van. Mennyire emelkedik a szabad folyadékfelszín, ha térfogategységni folyadékot töltünk még hozzá?

308. Az $y = x^{3/2}$ görbe (Neil-féle parabola) $y \geq 0$ ágának $0 \leq x \leq a$ ívét megforgatjuk mindkét tengely körül. Milyen "a" érték mellett lesz a megfelelő két forgástest térfogata egyenlő?

309. Messük el az $x^2 + y^2 = 2$, $y \geq 0$ félkört az $y = x^2$ parabolával. Számítsuk ki az ábrán bevonalkázott síktartomány x -tengely körüli megforgatásával nyert test térfogatát!

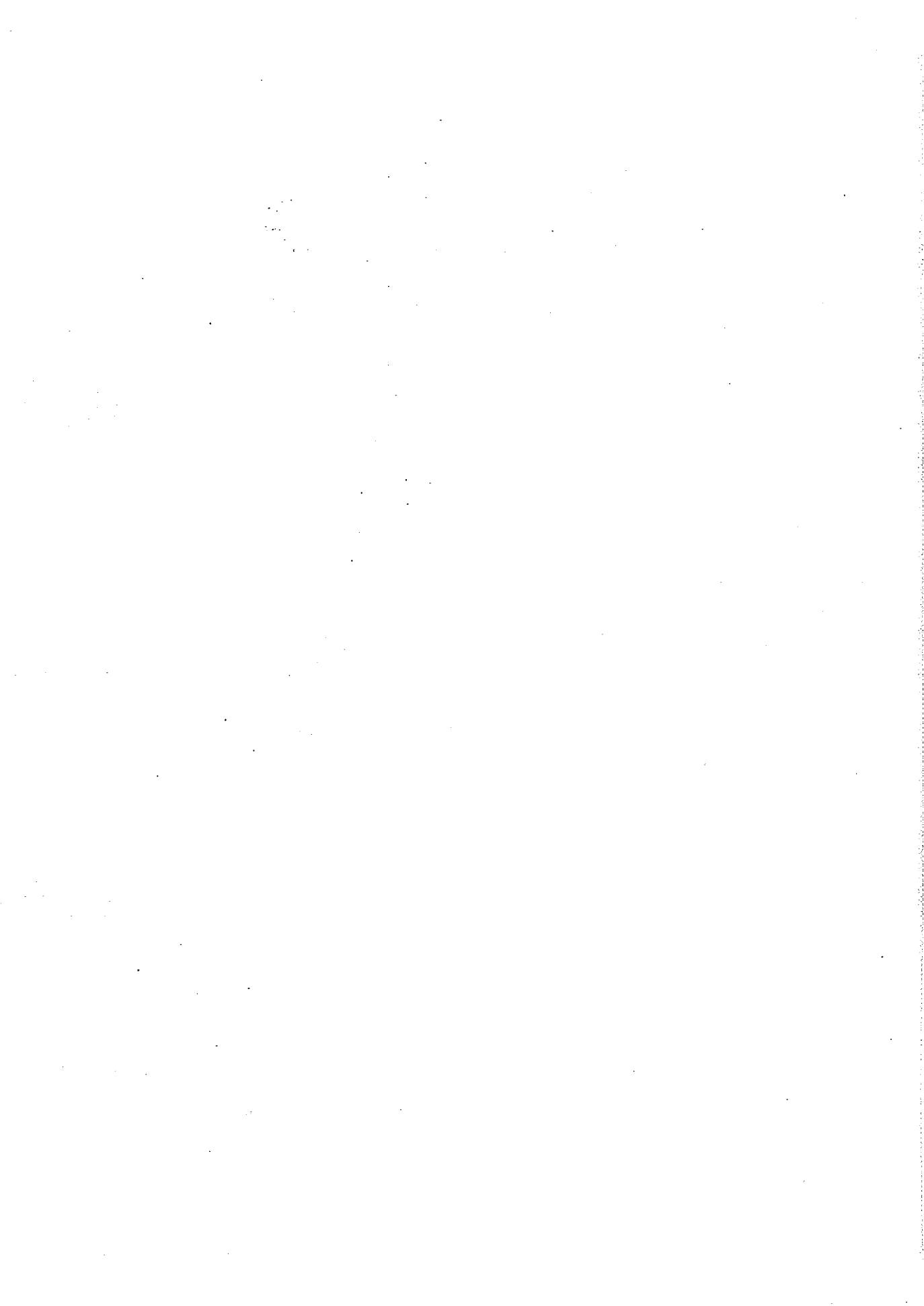


Határozzuk meg az alábbi görbevek x -tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát:

$$\underline{310.} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{311.} \quad \begin{cases} x = c^2 \cos^3 t \\ y = -\frac{c^2}{2} \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{312.} \quad \begin{cases} x = t - \operatorname{th} t \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq t_0$$



MEGOLDÁSOK ÉS ÚTMUTATÁSOK

I. FEJEZET

1. 1.

- a) 1. Értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ hiszen a 0 kivételével minden számra értelmezett az osztás.
2. Értékkészlet. Kérdés: mely y valós számok esetén van olyan $x \in D_f$, hogy

$$y = \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

(1) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$x = \frac{1}{y} - 1 \quad (2)$$

Mivel

(2) jobb oldala minden $y \neq 0$ valós számra értelmezett, így az értékkészlet:

$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- b) 1. Értelmezési tartomány.
Mivel a nevező mindig pozitív, és tetszőleges pozitív számmal való osztás értelmezett: $D_f = \mathbb{R}$.
2. Értékkészlet. Ugyanúgy, ahogy a)-ban, azt vizsgáljuk, hogy mely $y \in \mathbb{R}$ számok esetén van $x \in D_f$, hogy

$$y = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

(3) akkor és csakis akkor áll fenn, ha

$$x^2 = \frac{1}{y} - 1 \quad (4)$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Mivel $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, (4)-ből az adódik, hogy csak olyan y valós számok lehetnek az értékkészlet elemei, melyekre

$$\frac{1}{y} - 1 \geq 0 \quad (5)$$

azaz $0 < y \leq 1$.

Minden ilyen y eleme az értékkészletnek, mert (5)-tel (4) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$x = \pm \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$, azaz minden $y \in (0, 1)$ esetén két olyan x is van, melyekre $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, és $x = 0$ esetén $y = 1$.

Tehát $R_f = (0, 1]$.

2. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (-\infty, 3]$

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

4. $D_f = [-3, 3]$, $R_f = [0, 3]$

5. $D_f = [-1, 0) \cup [1, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$

6. $D_f = \mathbb{R} \setminus [0, 1)$, $R_f = \left\{ \frac{1}{n} : n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \right\}$

7. $D_f = [0, \infty)$, $R_f = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$

8. $D_f = (-1, 1]$, $R_f = \{0, e\}$

9. a) $D_f = (-1, 1)$, $R_f = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

10. a) $D_f = \{ 3k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$,

$R_f = \{ k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$

b) $D_f = \mathbb{R}$,

$R_f = \{ k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$

11. a) $D_f = R_f = \mathbb{R}$

c) $D_f = \mathbb{R}, R_f = [0, \infty)$

b) $D_f = R_f = [0, \infty)$

12. $D_f = R_f = \mathbb{R}$

2.

1. a) E -n monoton növekvő függvények.

b) E -n szigorúan monoton csökkenő függvények.

2. Van olyan $x_1, x_2 \in H$, hogy $x_1 < x_2$ és $f(x_1) < f(x_2)$,

valamint olyan $x_3, x_4 \in H$, hogy $x_3 < x_4$ és $f(x_3) > f(x_4)$.

3.

2. (a) f monoton $(a, b) \cup (c, d)$ -n

ha $a < x < c$ és $b < y < d$, akkor (például ha f monoton növekvő)

$$f(x) \leq f(c) \leq f(b) \leq f(y),$$

a többi eset triviális

b) f akkor és csak akkor monoton, ha

$$\sup_{x \in (a, b)} f(x) \text{ és } \inf_{x \in (c, d)} f(x) \text{ léteznek, és}$$

$$\sup_{x \in (a, b)} f(x) \leq \inf_{x \in (c, d)} f(x).$$

(3) Ha volna olyan $I' \subset I$, melyen f monoton és pl. $I_1 \subset I'$,

$I_1 \neq I'$, akkor kellene lennie olyan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ pontok-

nak, hogy $x_1, y_1 \in I' \cap I_1$, $x_2, y_2 \in I' \cap I_2$ és $x_1 < y_1$,

$x_2 < y_2$; de a feltételből: $f(x_1) > f(y_1)$ és $f(x_2) < f(y_2)$, ami

ellentmond annak, hogy f az I' -n monoton.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

4. Nem.

$$\text{pl. } f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad a = -1, b=0, c=1$$

(Ha szigorú monotonitást követelünk meg, akkor igen.)

4. 1. **a)** $D_f = [-1, 1]$

Ha $0 \leq x < y \leq 1$, akkor

$$1 \geq \sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-y^2} \geq 0.$$

Tehát ha $0 \leq x < y \leq 1$, akkor $f(x) > f(y)$. Ugyanígy látható be, hogy ha $-1 \leq x < y \leq 0$, akkor $f(x) < f(y)$. Ezért vég-eredményben: a függvény $[-1, 0]$ -án szigorúan monoton növekvő és $[0, 1]$ -en szigorúan monoton csökkenő, és 3. pl. 3. alapján ezek legbővebb ilyen intervallumok.

Megjegyzés. Az eredmény megkapható abból is, hogy ha

$$\begin{aligned} x, y \in D_f, \text{ akkor } f(x) - f(y) &= \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = \\ &= \frac{(1-x^2) - (1-y^2)}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}} = \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

E kifejezés előjelét vizsgálva az előbbi eredményt kapjuk.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ha $x, y \in D_f$, akkor

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1} = \frac{y-x}{(x-1)(y-1)}, \text{ azaz ha } y > x, \text{ akkor}$$

$$f(x) - f(y) > 0, \text{ ha } x, y \in (-\infty, 1) \text{ vagy } x, y \in (1, \infty).$$

Az, hogy ezek a legbővebb ilyen intervallumok, abból következik, hogy $f(x) < 0$, ha $x < 1$, és $f(x) > 0$, ha $x > 1$.

c) $(-\infty, -1)$ -en és $(-1, \infty)$ -en szigorúan monoton csökken.

Ha $x, y \in D_f$.

$$f(x) - f(y) = \frac{y^3 - x^3}{(1+x^3)(1+y^3)}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI

HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

d) $(-\infty, 0]$ -n szigoruan monoton csökkenő, $[0, \infty)$ -en szigoruan monoton növekedő.

e) $(-\infty, -\frac{a}{2}]$ -en szigoruan monoton csökken, $[-\frac{a}{2}, \infty)$ -en szigoruan monoton nő.

2. Nincs (a függvény az $x_0=0$ tetszőleges környezetében felveszi a +1 és a -1 értéket is).

5. a) Nem: nincs egyértelmű válasz, mert pl. az $[1, 2]$ intervallumon korlátos, de a $(0, 1]$ intervallumon nem.

b) Nem: a korlátosság ténye függ a tekintett halmaztól is (lásd a) pont), nem pusztán a függvény tulajdonsága.

c) 1. Nem: $(-\infty, \infty)$ -en nem korlátos, de $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén $[a, b]$ -n Igen.

2. Igen: a $[0, \infty)$ -en korlátos és tetszőleges $\alpha < 0$ esetén az (α, ∞) -en már nem.

6. 1. a) Igen.

b) Nem: 1-hez: a korlátosságból nem következik, hogy a függvény fel is veszi maximumát és minimumát; 2. pedig fennáll minden E -n értelmezett függvényre.

2. Minden K valós számhoz van olyan $x \in E$, hogy $|f(x)| > K$.

7. 1. a) Mivel $f(x) \leq \sup_{x \in E} f(x) \quad \forall x \in E$ -re, és $g(x) \leq \sup_{x \in E} g(x)$

$$\forall x \in E\text{-re, így } f(x) + g(x) \leq \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x)$$

$$\forall x \in E\text{-re. Ebből látszik, hogy } \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x) \text{ felső}$$

korlátja $f(x) + g(x)$ -nek, tehát nem lehet $\sup_{x \in E} (f(x)+g(x))$ -nél kisebb.

b) Hasonlóan a)-hoz.

2. a) $f(x) \geq \inf_{x \in E} f(x) \quad \forall x \in E$ -re, így $-f(x) \leq -\inf_{x \in E} f(x) \quad \forall x \in E$ -

$$\text{re, tehát } \sup_{x \in E} (-f(x)) \leq -\inf_{x \in E} f(x).$$

Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy

$$\sup_{x \in E} (-f(x)) < -\inf_{x \in E} f(x). \text{ Ekkor } -\sup_{x \in E} (-f(x)) > \inf_{x \in E} f(x),$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

de akkor van olyan $x_0 \in E$ hogy $-\sup_{x \in E} (-f(x)) > f(x_0) \geq$

$\geq \inf_{x \in E} f(x)$, amiből $\sup_{x \in E} (-f(x)) < -f(x_0)$: ellentmondás.

b) a)-ból $-f(x)$ helyettesítéssel.

3. pl. $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\sin x$.

8. 1. a) Nem pl. $y = \frac{1}{x}$, $I = (0,1)$

b) Igen: Heine-Borel lefedési tétel miatt.

Minden ponthoz választva egy környezetet, amelyben lokálisan korlátos, ezekből kiválasztható véges sok, melyek uniója lefedí az egész intervallumot, és amelyekhez tartozó korlátok közül a legnagyobb jó az egész intervallumon.

2. Ha pl. x_0 -ban f lokálisan korlátos volna, akkor x_0 -nak lenne olyan

$S(x_0)$ környezete, hogy $x \in S(x_0)$, $x = \frac{m}{n}$ esetén

$f(x) = n < K$ (1) teljesülne. Ha $x \in S(x_0)$ akkor $|x| \leq L$ valamely L -re azaz

$$|x| = \left| \frac{m}{n} \right| = \frac{|m|}{n} \leq L \text{ így } |m| \leq n \cdot L \leq K \cdot L$$

azaz csak olyan racionális számok eshetnek $S(x_0)$ -ba melyek számlálója abszolút értékben kisebb $K \cdot L$ -nél és melyeknek nevezője K -nél kisebb ((1) miatt). Ilyen törtből azonban csak véges sok van, ellentmondásban azzal, hogy tetszőleges valós szám tetszőleges környezetében végtelen sok racionális szám van.

9. 1. a) 1. Felülről nem korlátos. Ugyanis: Legyen $K > 0$ tetszőleges valós.

$$\frac{1}{(1-x)^2} > K \text{ akkor és csak akkor, ha}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{K}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{K}} \quad (1)$$

Igy $\forall K > 0$ esetén $y = 1 + \frac{1}{2\sqrt{K}}$ -ra fennáll, hogy

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

egyrészt $y \in (1, \infty)$, másrészt (1) miatt

$$f(y) = \frac{1}{(1-y)^2} > K .$$

Azaz tetszőleges $K > 0$ és ebből közvetlenül adódóan tetszőleges K valós esetén van olyan $y \in (1, \infty)$, hogy $f(y) > K$, ami a korlátosság definíciójával összevetve állításunk igazolása.

2. Alulról korlátos, hiszen $\frac{1}{(1-x)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

3. $\inf_{x \in (1, \infty)} f(x) = 0$ Ugyanis: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges

$$\frac{1}{(1-x)^2} < \varepsilon \quad \text{akkor és csak akkor ha} \quad |x-1| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (3)$$

Mivel $x \in (1, \infty)$ esetén $x-1 > 0$, így ha $x > 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,

akkor egyrészt $x \in (1, \infty)$, másrészt (3)-ból

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} < \varepsilon , \text{ ami (2)-vel az állítást adja.}$$

4. Nincs olyan $x \in (1, \infty)$ melyre $f(x) = \inf_{x \in (1, \infty)} f(x) = 0$,

hiszen egy tört akkor és csak akkor 0, ha a számlálója az.
b) Mivel $f(x)$ monoton csökkenő $(1, \infty)$ -en, így

$$\max_{x \in [2, 4]} f(x) = f(2) = 1 ,$$

$$\min_{x \in [2, 4]} f(x) = f(4) = \frac{1}{9} .$$

2. a) $\max_{x \in (-\infty, \infty)} f(x) = f(0) = 1$, $\inf_{x \in (-\infty, \infty)} f(x) = 0$, nem veszi fel.

b) $\max_{x \in (-1, 2]} f(x) = f(0) = 1$, $\min_{x \in (-1, 2]} f(x) = f(2) = \frac{1}{17}$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. a) $\sup_{x \in [0, \infty)} f(x) = 1$, nem veszi fel, $\min_{x \in [0, \infty)} f(x) = f(0) = 0$.

b) $\sup_{x \in (-\infty, -1)} f(x)$ nem létezik: $f(-\infty, -1)$ -en felülről nem korlátos.

$\inf_{x \in (-\infty, -1)} f(x) = 1$, nem veszi fel.

c) $\sup_{x \in (1, -\frac{1}{2})} f(x) = -1$, nem veszi fel.

$\inf_{x \in (-1, -\frac{1}{2})} f(x)$ nem létezik: $f(-1, -\frac{1}{2})$ -en alulról nem korlátos.

10. Ha $|x| \leq 1$, akkor $|f(x)| = f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} \leq 1+x^2 \leq 1+1 = 2$.

Ha $|x| \geq 1$, akkor $|f(x)| = f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} \leq \frac{1+x^2}{x^4} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} \leq 1+1 = 2$.

Igy $|f(x)| \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ -re.

11. 1. a) b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ ratió} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irratió} \end{cases} \quad x_0 = 0, a = -1, b = 1$

b)-hez $\delta = \frac{1}{2}$

c) d) $f(x) = -x^2 \quad x_0 = 0, a = -1, b = 1$

2. A c)-ből és a d)-ből.

3. Az a) b) és c) tulajdonság következik.

- 12.**
1. a) Igen. b) Nem.
 2. Igen: ha a pont egy környezetében konstans.
 3. Igen: ha az egész intervallumon konstans.
 4. Ha $a \in I_1 \cap I_2$ igen, egyébként nem:

pl.: $f(x) = \text{sign}x \quad I_2 = (-\infty, 0], \quad I_1 = (0, \infty), \quad a=0$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

13. 1. a) $f(1) = \frac{1}{2}$, és mivel $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, így

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- b) $f(-1) = -\frac{1}{2}$, és mivel $(x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, így

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. $f(1) = f(2) = 0 < f(x) \quad \forall x \neq 1, x \neq 2$ esetén.

14. a) 1. $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, esetén és $f(2) = f(-2) = 2$,

így $x = 2$ és $x = -2$ lokális minimumhelyek és egyben az egész számsíakra vonatkozó abszolút minimumhelyek is.

2. Ha $|x| \leq 2$, akkor $0 \leq (4-x^2)^2 \leq 16$, azaz $f(x) \leq 18$, és $f(0) = 18$, így $x = 0$ lokális maximumhely.

Az egész értelmezési tartományon nem abszolút maximumhely, mert pl. $f(4) = 146 > f(0) = 18$.

3. Belátható, hogy f a $(-\infty, -2)$ és a $(0, 2)$ intervallumokon szigorúan monoton csökkenő, illetve a $(-2, 0)$ és $(2, \infty)$ intervallumokon szigorúan monoton növekedő, így lokális szélsőértékek csak a már megállapított helyeken ($x = -2, x = 0$ és $x = 2$) lehet.

- b) $x = -\frac{a}{2}$ minimum

(lásd 4. e) és 12. 4.)

- c) $x = 1$ minimum.

- d) $x = 0$ minimum. (Lásd 4.1.d) és 12.4. példákat.)

15. 1. Mutassuk meg, hogy az $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ pont rajta van

az $(x_1, f(x_1))$ -et és $(x_2, f(x_2))$ -t összekötő húr.

3. Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x < x_2$. Ekkor

$$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) - f(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}(x-x_1) - x^2 =$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
 HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG
 $= (x-x_1)(x_2-x) > 0$, tehát

$$x_1 < x < x_2 \text{ esetén } f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x-x_1).$$

16. 1. Egyik sem.
 2. Páros.
 3. Páratlan.
 4. Páros, periodikus: minden racionális szám periódusa.
 5. Páros.
 6. Periodikus, periódus 2π .
 7. Páros, periodikus, periódus: π^2 .
 8. Periodikus, periódus: 1.
 9. Páratlan, periodikus, periódus: 1.
 10. Páratlan.
 11. Páros, periodikus, periódus: π .

(Megjegyzés: csak az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

helyeken van értelmezve!)

12. $f(x) = 2$ páros, periodikus: periódusa minden pozitív valós szám.
 13. Páros.
 14. Egyik sem.
 15. a) Páros, periodikus, periódusa: 12.
 b) Páratlan, periodikus, periódusa: 24.

17. (1) Akkor és csak akkor, ha $f(x) = 0 \quad \forall x \in D_f$.

18. a) Van: pl. $f(x) = \sqrt{\sin x}$

$$(b) \text{ Igen, pl. } g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in D_f \\ 1, & \text{ha } x \notin D_f \end{cases}$$

hiszen ha f periódusa p , akkor $g(x) = g(x+p) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1),
 mert ha $x \in D_f$, akkor (1) következik f periodikus voltából; ha
 $x \notin D_f$, akkor $g(x) = 1$ és $x+p \notin D_f$ (hiszen ha indirekte pl.
 $x+p \in D_f$ volna, akkor mivel f periodikus: $(x+p)-p = x \in D_f$
 volna), így $g(x+p) = 1 = g(x)$.

19. 1. a) $-f, f+g, f \cdot g, f \circ g, g \circ f$ korlátos; ha $\inf_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| > 0$, akkor
 $\frac{1}{f}$ korlátos, egyébként nem.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

ⓑ) fog, gof lehet korlátos is, nem is: pl. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

esetén $f \circ f \equiv 0$ és $f \circ (-f) \equiv f$;

$f+g$, $f \cdot g$ lehet korlátos is, nem is:

pl. $f(x) = x$, $g(x) = -x$ esetén $f+g$ korlátos, $f \cdot g$ nem.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = x \text{ esetén}$$

$f+g$ nem korlátos, $f \cdot g$ igen;

$-f$ nem korlátos, $\frac{1}{f}$ -re ua., mint a)-ban.

Ⓒ) $-f$, fog korlátos; ha $\inf_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| > 0$, akkor $\frac{1}{f}$ korlátos, egyébként nem.

$f+g$ nem korlátos; $f \cdot g$, gof lehet korlátos is, nem is:

$$\text{pl.: } f(x) = 1, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ esetén}$$

$f \cdot g$ nem korlátos, gof korlátos ($f \circ g \equiv 1$),

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} & x \neq k \cdot \pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases} \text{ esetén}$$

$f \cdot g$ korlátos ($|(f \cdot g)(x)| \leq 1$), gof nem korlátos.

2. ⓐ) $-f$ monoton csökkenő; $f+g$, fog, gof monoton növekedő, $f \cdot g$ lehet akár nem monoton is:

$$\text{pl.: } f(x) = \text{sign } x, \quad g(x) = x \text{ esetén} \\ (f \cdot g)(x) = |x| \text{ nem monoton;}$$

$\frac{1}{f}$ monoton csökken tetsz. $H \subset D_f$ -en, melyen f előjeltartó $x \in H$ esetén $f(x) \neq 0$.

ⓑ) $-f$ mon. nő; $\frac{1}{f}$ mon. nő tetsz. $H \subset D_f$ -en, melyen f előjeltartó $x \in H$ esetén $f(x) \neq 0$; fog, gof monoton csökkenő, $f+g$, $f \cdot g$ lehet akár nem monoton is:

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

pl. $f(x) = -\operatorname{sign} x$, $g(x) = \operatorname{sign}(x+1)$

$$f+g(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 & x = -1 \\ 2 & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (f \cdot g)(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ 1 & -1 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

3. a) mind páros

b) $-f$, $\frac{1}{f}$, $f+g$, fog , gof páratlan, $f \cdot g$ páros

c) $-f$, $\frac{1}{f}$, gof , fog páros, $f \cdot g$ páratlan, $f+g$ általában sem páros sem páratlan.

20. 1. - f -nek lok. minimuma van.

2. Ha $f(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{1}{f}$ -nek lok. minimuma van.

3. $f+g$ -nek lok. maximuma van.

④ $f \cdot g$ -nek lehet lok. maximuma, lok. minimuma, és lehet, hogy nincs egyáltalában szélsőértéke, pl.

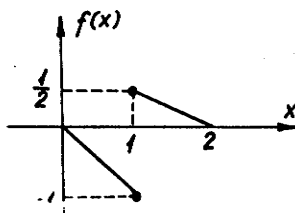
a) Legyen $f(x) = -x^2$, $g(x) = -x^2+1$, $x_0 = 0$, $a = -1$, $b = 1$.

Ekkor $h(x) = (f \cdot g)(x) = x^4 - x^2$ -nek $x_0 = 0$ lok. maximumhelye.

b) Legyen $f(x) = g(x) = -x^2$, $x_0 = 0$, $a = -1$, $b = 1$.

Ekkor $(f \cdot g)(x) = x^4$ -nek $x_0 = 0$ lok. minimumhelye.

c) Legyen $f(x) = g(x) = \begin{cases} -x & 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{x}{2} & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ $a=0$, $b=2$.



EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Ennek $x_0 = 1$ nyilván lok. maximumhelye, de a

$$h(x) = (f \cdot g)(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ (1 - \frac{x}{2})^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

függvénynek $x_0 = 1$ -ben nincs lokális szélsőértéke: ha

$$\frac{1}{2} < x < 1, \text{ akkor } h(x) = x^2 > \frac{1}{4} = h(1), \text{ és ha}$$

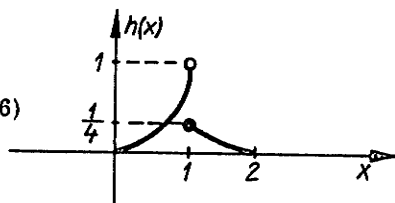
$$1 < x < 2, \text{ akkor } h(x) = (1 - \frac{x}{2})^2 < \frac{1}{4} = h(1). \text{ (lásd 1. ábra)}$$

21. a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$(x+1 = y$ helyettesítéssel)

$$f(y) = (y-1)^2 - 3(y-1) + 2 = y^2 - 5y + 6$$

b) $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$



1. ábra

$(\frac{x}{1+x} = y$ helyettesítéssel)

22. a) $f_{3k}(x) = x, f_{3k+1}(x) = f_1(x), f_{3k+2}(x) = \frac{x-1}{x}$

tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén.

b) $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+n \cdot x^2}}$

(mindkét esetben bizonyítsunk teljes indukcióval)

23. ①. a) $y = f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad (1), \quad z = f(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y & y > 0 \end{cases}$

$$z = f(y) = f(f(x)) = \begin{cases} 0 & f(x) \leq 0 \\ f(x) & f(x) > 0 \end{cases} \quad (2).$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(1)-ből $f(x) \leq 0$, ha $x \leq 0$ és $f(x) > 0$, ha $x > 0$.

Igy (2)-ből

$$z = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ f(x) & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad (3),$$

de ugyancsak (1)-ből, ha $x > 0$, akkor $f(x) = x$, így (3)-ból

$$z = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} = f(x).$$

Tehát $D_{f \circ f} = D_f = \mathbb{R}$, $f \circ f = f$.

b) $D_{f \circ g} = D_g = \mathbb{R}$, $f \circ g = 0$

c) $D_{g \circ f} = D_f = \mathbb{R}$, $g \circ f = g$

d) $D_{g \circ g} = D_g = \mathbb{R}$, $g \circ g = 0$

2. Megoldásvázlat:

a) $\mathbb{R}_f \subset D_f$, így $D_{f \circ f} = D_f = \mathbb{R}$,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^2(x) + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2.$$

b) $\mathbb{R}_g \subset D_f$, így $D_{f \circ g} = D_g = [-1, \infty)$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) + 1 = (\sqrt{x+1})^2 + 1 = (x+1) + 1 = x+2.$$

c) $\mathbb{R}_f \subset D_g$, így $D_{g \circ f} = D_f = \mathbb{R}$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 1} = \sqrt{(x^2 + 1) + 1} = \sqrt{x^2 + 2},$$

d) $\mathbb{R}_g \subset D_g$, így $D_{g \circ g} = D_g = [-1, \infty)$,

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{g(x) + 1} = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1}.$$

3. $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$, $f \circ f = f$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$\alpha)$ a) $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(f \circ g)(x) = \text{sign } x = f(x)$, ha $x \neq 0$.

b) $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(g \circ f)(x) = \text{sign } x = f(x)$, ha $x \neq 0$.

c) $D_{g \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(g \circ g)(x) = x$

$\beta)$ a) $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$, $f \circ g = 1$

b) $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

c) $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$, $(g \circ g)(x) = x^4 + 2x^2 + 2$

$\gamma)$ a) $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$,

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ -1 & -1 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$$

b) $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$, $g \circ f = 0$

c) $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$, $(g \circ g)(x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$

$\delta)$ a) $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$, $f \circ g = 1$

b) $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$, $g \circ f = f \circ g = 1$

c) $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$, $g \circ g = g$

4. a) $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$, $f \circ f = f$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$b) D_{f \circ g} = [0, \infty), (f \circ g)(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ négyzetszám} \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x \text{ nem négyzetszám} \end{cases}$$

$$c) D_{g \circ f} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{-k\} \cup [0, \infty), (g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ egész} \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x \text{ nem egész} \end{cases}$$

$$d) D_{g \circ g} = [0, \infty), (g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$$

$$5. a) D_{f \circ f} = \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$$

$$b) D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ egész}\}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \text{ páros egész} \\ 0, & \text{ha } x \text{ páratlan egész} \end{cases}$$

$$c) D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ egész}\}, g \circ f = 1$$

$$d) D_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ egész}\}, g \circ g = -1$$

$$6. a) D_{f \circ f} = \mathbb{R}, f \circ f = f$$

$$b) D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, (f \circ g)(x) = -\sqrt{x} = -g(x)$$

$$c) D_{g \circ f} = \{0\}, g \circ f = 0$$

$$d) D_{g \circ g} = [0, \infty), (g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$$

$$7. a) D_{f \circ f} = (0, 2), f \circ f = f$$

$$b) D_{f \circ g} = (0, 2), f \circ g = f$$

$$c) D_{g \circ f} = (0, 2), (g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ rac. és } 0 < x \leq 1 \text{ vagy} \\ & \text{ha } x \text{ irrac. és } 1 < x < 2 \\ 2-x, & \text{ha } x \text{ rac. és } 1 < x < 2 \text{ vagy} \\ & \text{ha } x \text{ irrac. és } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$d) D_{g \circ g} = \mathbb{R}, (g \circ g)(x) = x$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

8. a) $D_{f \circ f} = (0, \infty)$, $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$

b) $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(f \circ g)(x) = |x|$

c) $D_{g \circ f} = (0, \infty)$, $(g \circ f)(x) = x$

d) $D_{g \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(g \circ g)(x) = x^4$

24. 1. Indirekt módon: legyen $g_1 \neq g_2$ és $g_1(f(x)) = x = g_2(f(x))$

$\forall x \in H$ (1)

Legyen $y \in f(H)$ tetszőleges. Ekkor van olyan $x \in H$, amelyre $y = f(x)$. Így (1)-ből $g_1(y) = g_2(y)$.

Mivel $y \in f(H)$ tetszőleges volt, ezért $g_1 = g_2$.

2. - Álljon fenn a) és legyen $y \in f(H)$ tetszőleges. Ekkor van $x_0 \in H$, hogy $f(x_0) = y$ legyen.

Ha $g(y) = x$, akkor ezzel és a)-val $g(f(x_0)) = x$ illetve $g(f(x_0)) = x_0$, azaz $x = x_0$, tehát $f(x) = y$.

Álljon fenn a) és legyen $x \in H$ tetszőleges. Ha $f(x) = y$, akkor ezzel és a)-val $g(f(x)) = g(y)$ illetve $g(f(x)) = x$, azaz $g(y) = x$.

- Álljon fenn b) és legyen $x \in D_f$ tetszőleges, ekkor

$f(x) = y \in f(H)$ és b)-vel $g(y) = x$.

Így $g(f(x)) = g(y) = x$.

3. - Legyen $g(f(x)) = x \quad \forall x \in H$.

Legyen $y \in f(H)$ tetszőleges, ekkor van $x \in H$, hogy $y = f(x)$ legyen, így $g(y) = g(f(x)) = x$ és $f(g(y)) = f(x) = y$.

- Legyen $f(g(y)) = y \quad \forall y \in f(H)$.

Legyen $x \in H$ tetszőleges, ekkor $f(x) \in f(H)$, így

$f(g(f(x))) = f(x)$, de f kölcsönösen egyértelmű H -n, ezért $g(f(x)) = x$.

25. 1. a) Ha f kölcsönösen egyértelmű H -n, akkor f^{-1} is az $f(H)$ -n.

b) Mivel tetszőleges g függvény H -beli inverzére (ha létezik):

$$g^{-1}(g(x)) = x \quad \forall x \in H,$$

így

$$(f^{-1})^{-1}(x) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(f(x))) = ((f^{-1})^{-1} \circ f^{-1})(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in H.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. a) Ha g kölcsönösen egyértelmű H -n, illetve f $g(H)$ -n, akkor $f \circ g$ kölcsönösen egyértelmű H -n.

$$b) (g^{-1} \circ f^{-1})((f \circ g)(x)) = g^{-1}(f^{-1}(f(g(x)))) = g^{-1}(g(x)) = x,$$

és lásd 24. példa 1.-et.

3. a) Tegyük fel, hogy g nem invertálható H -n: van olyan $x_1, x_2 \in H, x_1 \neq x_2$, hogy $g(x_1) = g(x_2)$.

$$\text{Akkor } (f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_2),$$

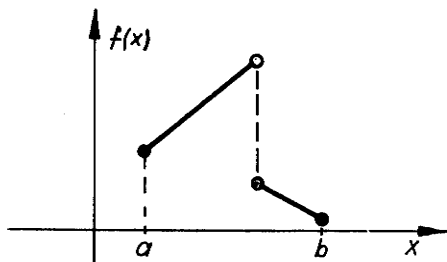
azaz $f \circ g$ nem invertálható H -n, ellentmondás.

b) a)-ból tehát g invertálható H -n, 1.-ből g^{-1} is a $g(H)$ -n, a feltétel szerint $f \circ g$ is invertálható H -n, és mivel nyilván $g^{-1}(g(H)) = H$ így 2.-ből $(f \circ g) \circ g^{-1}$ invertálható $g(H)$ -n, és persze $((f \circ g) \circ g^{-1})(x) = f(x) \quad \forall x \in g(H)$.

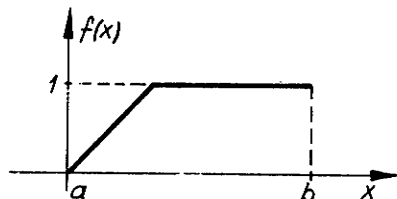
26.

a) Nem igaz, pl.

b) Nem igaz, pl.



2. ábra

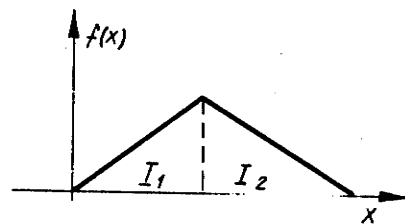


3. ábra

c) Igaz.

d) Igaz.

e) Nem igaz, pl. (4. ábra)



4. ábra

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

27. 1. a) Nem igaz (pl. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $E = (0, \infty)$)

b) Igaz. (Indirekt: van olyan $y_1 < y_2$, hogy $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$.)

Mivel f szigoruan monoton növő, ezért

$$y_2 = f(f^{-1}(y_2)) < f(f^{-1}(y_1)) = y_1.$$

2. a) Nem igaz: ha f páros, akkor nem kölcsönösen egyértelmű E -n.

b) Igaz.

$$(f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y))$$

28. 1. $x \in \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B) \iff x \notin f^{-1}(B) \iff f(x) \notin B \iff f(x) \in \mathbb{R} \setminus B \iff$
 $\iff x \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B).$

3. Legyen $f(x) = |x|$, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, ekkor

$$f(A) = A \text{ és } f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R} \neq A.$$

29. 1. a) $y = \frac{1}{x-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = \frac{1+y}{y}$. Így a

függvény az egész $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ -en kölcsönösen egyértelmű
- ezért invertálható -, és az inverz:

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x}, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. $y = \frac{1}{x^2-1}$ akkor és csak akkor

teljesül, ha $x^2 = \frac{1+y}{y}$, azaz vagy ha $x = \sqrt{\frac{1+y}{y}}$ (1), vagy ha

$$x = -\sqrt{\frac{1+y}{y}} \quad (2).$$

Ezért egyrészt $R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{1+y}{y} \geq 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus (-1, 0]$ (3).

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

másrészt egyetlen pozitív és egyetlen negatív $x \in D_f$ van egy

adott $y \in R_f$ -hez, hogy $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ legyen, ha $y \neq -1$

($y = -1$ -re $x = 0$).

Az $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ jelöléssel a megoldás a

következő:

1. a függvény invertálható a $H_1 = D_f \cap \mathbb{R}^+$ halmazon, itt

$$\text{inverze } f_1^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x}},$$

és $D_{f_1^{-1}} = f(H_1) = \mathbb{R} \setminus (-1, 0]$, hiszen (1)-ből és (3)-ből

leolvasható, hogy $f(H_1) = R_f$.

2. a függvény invertálható a $H_2 = D_f \setminus \mathbb{R}^+$ halmazon, itt

$$\text{inverze } f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{x}},$$

és $D_{f_2^{-1}} = f(H_2) = \mathbb{R} \setminus (-1, 0]$,

hiszen (2)-ből és (3)-ból látható, hogy $f(H_2) = R_f$.

3. Nyilván $H_1 \cup H_2 = D_f$.

4. Marad az a kérdés, hogy vajon H_1, H_2 az értelmezési tartomány legbővebb olyan részhalmazai-e, melyeken a függvény invertálható.

$$\text{Fennáll, hogy } f(x) - f(y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \quad (4).$$

Tekintsünk egy olyan $H \subset D_f$ halmazt, hogy például

$$H_1 \subset H, H_1 \neq H.$$

Ekkor van $x \neq 0; x, -x \in H$, amiből $x \neq -x$, és (4)-ből $f(x) - f(-x) = 0$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
 HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG
 Tehát f H -n nem kölcsönösen egyértelmű. Ugyanigy lát-
 ható be, hogy H_2 -nél sincs bővebb halmaz, melyen a függ-
 vény invertálható volna.

1. Megjegyzés. Egyébként (4)-ből leolvasható az is, hogy a
 függvény $(-\infty, -1)$ -en és $(-1, 0]$ -n szigorúan monoton
 növekvő, illetve, hogy $[0, 1)$ -en és $(1, \infty)$ -en szigorúan
 monoton csökkenő, így, mivel ezenkívül $f(x) > 0$, ha
 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ és $f(x) < 0$, ha $x \in (-1, 1)$,
 ebből is kiadódik, hogy invertálható H_1 -en és H_2 -n.

2. Megjegyzés. A megoldás nem egyértelmű. A kívánt tulaj-
 donságuk pl. a $H_1 = (-\infty, -1) \cup [0, 1)$ és a
 $H_2 = (-1, 0] \cup (1, \infty)$ halmazok is.

$$2. 1. [-1, 1], f_1^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{2x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$D_{f_1}^{-1} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$2. \mathbb{R} \setminus (-1, 1), f_2^{-1}(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x^2}}{2x}, \quad D_{f_1}^{-1} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$$

$$3. 1. [-1, 0), f_1^{-1}(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \quad D_{f_1}^{-1} = [0, \infty)$$

$$2. [1, \infty), f_2^{-1}(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \quad D_{f_2}^{-1} = [0, \infty)$$

(Megjegyzés: Vegyük észre, hogy míg pl. $g(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ -re

$D_g = \mathbb{R}$, addig $D_{f_1}^{-1} = [0, \infty) \neq \mathbb{R}$!

hiszen $f([-1, 0)) = [0, \infty)$)

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ -en invertálható,

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}, \quad D_f^{-1} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

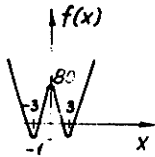
5. $D_f = [-3, 3]$

1. $[0, 3]$, $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$, $D_{f_1^{-1}} = [0, 3]$

2. $[-3, 0]$, $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{9-x^2}$, $D_{f_2^{-1}} = D_{f_1^{-1}}$

6. 1. $[3, \infty)$, $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9 + \sqrt{x+1}}$, $D_{f_1^{-1}} = [-1, \infty)$

2. $[0, 3]$, $f_2^{-1}(x) = \sqrt{9 - \sqrt{x+1}}$, $D_{f_2^{-1}} = [-1, 80]$



3. $[-3, 0]$, $f_3^{-1}(x) = -\sqrt{9 - \sqrt{x+1}}$, $D_{f_3^{-1}} = [-1, 80]$

4. $(-\infty, -3]$, $f_4^{-1}(x) = -\sqrt{9 + \sqrt{x+1}}$, $D_{f_4^{-1}} = [-1, \infty)$

7. 1. $(-\infty, -\frac{a}{2}]$, $f_1^{-1}(x) = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y-b}$

$$D_{f_1^{-1}} = \left[b - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \infty \right)$$

2. $[-\frac{a}{2}, \infty)$, $f_2^{-1}(x) = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y-b}$

$$D_{f_2^{-1}} = \left[b - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \infty \right)$$

30. (1.) Nem, a feltétel minden f függvényre fennáll: $\delta = |b-a|$ jó mindig.

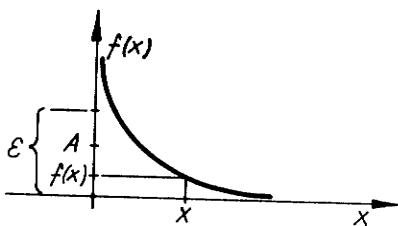
2. a) Ha $H \subset f(E)$ korlátos, akkor $f^{-1}(H)$ is az. (Illetve ha f invertálható, akkor: f^{-1} korlátos halmazon korlátos.)

b) Legyen pl. $f(x) = x$, $E = \mathbb{R}$ és $x_0 = 0$. Ekkor $A = 0$ megfelelő, hiszen ha $|f(x)| < \varepsilon$ akkor $|x| < \varepsilon$, azaz minden $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = \varepsilon$ jó.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Az $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ -re nem áll fenn $E = \mathbb{R}$

és $x_0 = 0$ esetén: A-t bár-
hogyan választva az $|A|$ -nél
nagyobb ε -okhoz nincs
megfelelő δ .
(ha $f(x) \rightarrow 0$ $|f(x) - A| < \varepsilon$
de $x \rightarrow \infty$).



5. ábra

31. Ha egy függvényre fennáll az említett tulajdonság, akkor nem léte-
het határértéke a $-\infty$ -ben, de ha nincs határértéke a $-\infty$ -ben
abból nem következik, hogy fennáll az említett tulajdonság:

pl. legyen $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ rac.} \\ 0 & x \text{ irrac.} \end{cases}$ $A = K = 0$ -val: minden

$\varepsilon > 0$ esetén minden $x < K$ -ra $f(x) - A < \varepsilon$, hiszen
 $x - 0 = x < 0 < \varepsilon$, ill. $0 - 0 = 0 < \varepsilon$.

32. 1. Nem: a tulajdonság pont azt jelenti, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - A| = \infty$
2. Igen.
3. Igen.

33. Minden olyan (a, b) -n értelmezett függvény, melyre nem igaz, hogy
 x_0 -ban a jobb oldali határértéke $+\infty$.

pl. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \frac{1}{|x|} \notin \mathbb{N} \\ 0 & \frac{1}{|x|} \in \mathbb{N} \end{cases}$ $a = -1, b = 1, x_0 = 0$ (pl. $K = 1$ jó.)

34. 1. (a) Nem igaz (lásd 2.-beli $f(x)$ -nek nincs határértéke x_0 -ban, de
fennáll rá az említett tulajdonság).
b) Igaz.

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{|x|} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ $a = -1, b = 1, x_0 = 0$.

(pl. $A = 1$ jó.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

35. 1. (b) Nem, pl. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \text{ rac.} \\ -\frac{1}{x} & x \text{ irrac.} \end{cases} \quad a = 0$

(2.) Nem, pl. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \text{ irrac.} \\ 0 & x \text{ rac.} \end{cases} \quad x_0 = 0$

(3.) Nem, pl. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0$, de nem létezik $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

36. 1. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rac.} \\ 0 & x \text{ irrac.} \end{cases}$

2. Ilyen nincs.

37. [1.] a) Állítás: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2) = 6$

Ugyanis legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{10} \right\}$. (1)

Ekkor ha $|x-2| < \delta$, akkor

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \text{ így } -4 - \delta < 4 - \delta < x+2 < 4 + \delta$$

$$\text{tehát } |x+2| < 4 + \delta < 4,5 < 5$$

$$\text{Ezzel jelölve } f(x) = x^2 + 2, |f(x) - 6| = |x^2 - 4| = |x+2| |x-2| < 5|x-2|$$

$$\text{azaz (1)-ből } |f(x) - 6| \leq 5 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ ha } |x-2| < \delta$$

b) Állítás: Az $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$ jelöléssel

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ nem létezik.}$$

u. is:

$$\infty) 0 \leq f(x) < 1 \text{ így nem lehet } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \text{ vagy}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

β) Indirekt, tegyük fel $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A, |A| < \infty$ (1)

Legyen $\varepsilon = 0,2$ ekkor (1)-el van $\delta > 0$ hogy minden

$0 < x < \delta$ és $0 < y < \delta$ esetén

$$|f(x)-f(y)| = |f(x)-A+A-f(y)| \leq |f(x)-A| + |f(y)-A| <$$

$$< 0,2 + 0,2 = 0,4 \quad (2)$$

De legyen n pozitív egész olyan, hogy $n > \frac{1}{\delta}$, ekkor

$$x = \frac{1}{n} < \delta \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{n+0,5} < \delta, \text{ de}$$

$$|f(x)-f(y)| = \left| \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} \right] - \left(\frac{1}{n+0,5} - \left[\frac{1}{n+0,5} \right] \right) \right| = |0-0,5| =$$

$$= 0,5 > 0,4$$

ami ellentmond (2)-nek.

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 2. a) 0 | 6. a) 2 | 10. a) ∞ |
| b) ∞ | b) ∞ | b) nem létezik |
| 3. a) $-\infty$ | c) 0 | c) 0 |
| b) 1 | 7. a) nem létezik | d) 0 |
| c) $-\frac{1}{2}$ | b) 2 | 11. a) nem létezik |
| d) ∞ | c) 1 | b) 0 |
| 4. a) nem létezik | 8. a) nem létezik | c) nem létezik |
| b) ∞ | b) 1 | d) 0 |
| c) $-\infty$ | c) -1 | 12. a) nem létezik |
| 5. a) ∞ | 9. a) nem létezik | b) nem létezik |
| b) ∞ | b) 1 | 13. a) 1 |
| c) ∞ | | b) nem létezik |

38.

b) és c) nem:

b) pont azt jelenti, hogy f nem folytonos x_0 -ban,

c) -t viszont egyetlen olyan függvény sem elégíti ki, mely x_0 -ban értelmezve van.

a) és d) igen

(d)-ből következik, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, másrészt mivel $\forall \delta > 0$

esetén $0 = |x_0 - x_0| < \delta$, ezért minden $\varepsilon > 0$ -ra

$|f(x_0) - A| < \varepsilon$, ami csak úgy lehet, ha $f(x_0) = A$.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

39. $\inf E = 0$

40. 1. Korlátosság.

2. $f(x) = x$ (tetsz. $a < b$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ mellett $\varepsilon = \delta$ jó).

3. Nem, pl. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rac.} \\ 0 & x \text{ irrac.} \end{cases} \quad a = -1, b = 1, x_0 = 0.$

($\varepsilon = 2$ minden $\delta > 0$ -ra jó.)

41. Invertálható és folytonos

1. Kölcs. egyértelmű: ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \delta \text{ tesz. } \delta > 0\text{-ra, így } |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

tetsz. $\varepsilon > 0$ esetén, azaz $x_1 = x_2$.

2. Ha létezik inverz, a megadott tulajdonság az inverz függvény egyenletes folytonosságának definíciója.

3. Ha f^{-1} folytonos akkor f is az.

42. 1. Legyen $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in [a, b] \\ f(a) & \text{ha } x < a \\ f(b) & \text{ha } x > b \end{cases}$

2. Nem, pl. ha $f(x) = \frac{1}{x}$, akkor f folytonos $(0, 1)$ -en, de bárhogy

is definiáljuk $g(x)$ -et, ha $g(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, 1)$ esetén, akkor

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ nem lehet véges.

43. 1. Ha f folytonos, akkor mindkét tulajdonság fennáll.

2. Az a) tulajdonságból még az sem következik, hogy létezik a

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$: pl. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rac.} \\ 0 & x \text{ irrac.} \end{cases} \quad a = -1, b = 1, x_0 = 0.$

3. A b) tulajdonságból következik a függvény folytonossága.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

44.

Sehogy:

1. Ha f folytonos egy $[a, \infty)$ -en, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ lehet véges, végtelen, és lehet, hogy nem létezik:

pl. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ nem létezik.

2. Ha f -nek van határértéke ∞ -ben, akkor lehet folytonos egy $[a, \infty)$ -en: pl. $f(x) = e^{-x}$; de lehet, hogy nincs olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy f folytonos legyen $[a, \infty)$ -en:

pl. $f(x) = \frac{\text{sign}(\sin x)}{x}$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$).

45.

1. a) $f+g = h$ nem folytonos (hiszen ellenkező esetben $g = h-f$ folytonos volna).

Ha $f(x_0) \neq 0$, akkor $h = f \cdot g$ nem folytonos (hiszen ellenkező esetben $g = \frac{h}{f}$ folytonos volna).

Ha $f(x_0) = 0$ és x_0 -ban g lokálisan korlátos, (lásd 8. pl. Def.) akkor $f \cdot g$ folytonos x_0 -ban.

Ha $f(x_0) = 0$ és g nem lokálisan korlátos x_0 -ban, akkor $f \cdot g$ lehet folytonos x_0 -ban:

pl. $x_0 = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,

és lehet nem folytonos x_0 -ban, pl. $x_0 = 0$,

$f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

b) Mind $f+g$ mind $f \cdot g$ lehet folytonos is, lehet nem folytonos is x_0 -ban:

pl. $f(x) = \text{sign } x$, $g(x) = \begin{cases} \text{sign } x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

esetén $f+(-f)$ folytonos, $f+f$ nem folytonos
 $g \cdot g$ folytonos, $f \cdot g$ nem folytonos x_0 -ban

2. Nem

$$\text{pl. } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases} \quad E = (-\infty, \infty)$$

46. fog mindhárom esetben lehet folytonos és lehet nem folytonos x_0 -ban: pl.

$$\text{a) Ha } x_0 = 0, \quad g(x) = x^2 \quad \text{és} \quad f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \text{sign } x,$$

akkor $f_1 \circ g = 1$ folytonos, $f_2 \circ g = \text{sign}^2 x$ nem folytonos $x_0 = 0$ -ban. (ha pl. $g(x) = x$, akkor $f_2 \circ g = f_2$ -nek még határértéke sem létezik $x_0 = 0$ -ban)

$$\text{b) Ha } x_0 = 1, \quad g(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ -x & x < 1 \end{cases} \quad \text{és} \quad f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x, \quad \text{akkor}$$

$(f_1 \circ g)(x) = x^2$ folytonos, $f_2 \circ g = g$ nem folytonos $x_0 = 1$ -ben.

$$\text{c) Ha } x_0 = 0, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad f_1(x) = g(x), \quad f_2(x) = \text{sign } x,$$

akkor $(f_1 \circ g)(x) = x$ folytonos, $f_2 \circ g = f_2$ nem folytonos $x_0 = 0$ -ban.

47. 1. a) Folytonos, ugyanis legyen $x_0 \in (0, \infty)$ tetszőleges és $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

$$\text{Legyen } \delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3x_0}, x_0 \right\} > 0 \quad (1).$$

Ha $|x - x_0| < \delta$, mivel (1)-el ekkor $x_0 \geq \delta$

így $-x_0 \leq -\delta < x - x_0 < \delta \leq x_0$ azaz

$$0 < \delta \leq x_0 < x + x_0 < 3x_0$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
 HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG
 amiből $|x+x_0| < 3x_0$ (2), így (1) és (2)-vel ha $|x-x_0| < \delta$

$$|f(x)-f(x_0)| = |x^2-x_0^2| = |x+x_0| \cdot |x-x_0| < 3x_0 \delta \leq \frac{\varepsilon}{3x_0} \cdot 3x_0 = \varepsilon .$$

b) Nem folytonos, ugyanis

$f(0) = 0$ és $f(x) = 1$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ mellett, így pl.

$\varepsilon = 0,5$ esetén tetszőleges $\delta > 0$ -hoz van olyan

$|x| < \delta$, hogy $|f(x) - f(0)| > 0,5$.

2. Folytonos

7. Folytonos

3. Folytonos

8. a) Folytonos

4. a) Nem folytonos

b) $x_0=0$ -ban nem folytonos

b) Folytonos

9. a) Nem folytonos

5. Folytonos

b) Folytonos.

6. $x_0=1$ -ben nem folytonos

48. a) ha $x = \frac{m}{n}$, akkor pl. $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ -hez nincs megfelelő $\delta > 0$, mert minden racionális szám tetszőleges környezetében van irracionális szám.

b) ha x irrac., akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n} < \varepsilon$, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, és x tetszőleges korlátos környezetébe csak véges sok $\frac{1}{n}$ - nál kisebb nevezőjű racionális szám eshet.

Megjegyzés: Egyébként b) mintájára bel ható, hogy $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, azaz f szakadása minden racionális helyen megszüntethető.

49. 1. a)-ból nem: csak az, hogy az egész (a,b) -n folytonos, b) az egyenletes folytonosság definíciója.

2. Van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy minden $\delta > 0$ szám esetén van olyan $x, y \in (a,b)$, hogy $|x-y| < \delta$ és $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

50. 1. Nem: pl. $f(x) = x$ egyenletesen folytonos $(-\infty, \infty)$ -en.

2. Nem: pl. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ folytonos és korlátos, de nem egyenletesen folytonos $(0,1)$ -en (lásd 89.pl. 3. a).

3. Igen.

51. a) és c) igaz, b) nem: pl. $f(x) = x$ egyenletesen folytonos \mathbb{R} -en, de $(f \cdot f)(x) = f^2(x) = x^2$ már nem. Ellenben ha a függvények korlátosak (vagy korlátos intervallumon tekintjük őket, mert ha ott egyen-

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

letesen folytonos akkor korlátos: lásd 103. pl. 1.) akkor a szorzat is egyenletesen folytonos: lásd 104. pl. 2.

52. 1. a) Egyenletesen folytonos

Ugyanis: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, a $\delta = \varepsilon$ választás megfelelő, mert tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x)-f(y)| = |x-y| < \varepsilon, \text{ ha } |x-y| < \varepsilon.$$

b) Nem egyenletesen folytonos.

Ugyanis: Legyen $\delta > 0$ tetszőleges és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan, hogy $x > \frac{1}{\delta}$ valamint $y = x + \frac{\delta}{2}$.

$$\text{Ekkor } |x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

$$\begin{aligned} \text{és } |f(x)-f(y)| &= |x^2-y^2| = |x+y| \cdot |x-y| = (x+y) |x-y| = \\ &= \left(2x + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{\delta}{2} > \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1. \end{aligned}$$

Azaz $\varepsilon = 1$ -hez minden $\delta > 0$ esetén van $x, y \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)-f(y)| > 1$, pedig $|x-y| < \delta$.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| 2. Egyenletesen folytonos | 4. a) nem egyenletesen folyt. |
| 3. a) nem egyenletesen folytonos | b) egyenletesen folytonos |
| b) egyenletesen folytonos | 5. nem egyenletesen folytonos. |

53. 1. $[0, 1)$

2. $\forall x \in (-\infty, \infty)$

ha $x \neq 0, x \neq \frac{1}{k \cdot \pi} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$

3. $[0, 1)$

4. $(0, \infty)$

5. $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

6. $\forall x \in \mathbb{R}$, hogy ha

$$(4k-1) \frac{\pi}{2} < x < (4k+1) \frac{\pi}{2}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

7. $(0, 2) \setminus \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}$

8. $\{1\}$

9. \mathbb{R}

10. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

11. \mathbb{R}

12. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

54. 1. a) $D_f = \mathbb{R}$ mert $0 < e^{-x^2} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ -re, így

$$1 > 1 - e^{-x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ -re.} \quad (1)$$

b) (1)-ből $0 \leq f(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (2), és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ (3),

hiszen az összetett függvény határértékére vonatkozó tétellel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \text{ -ből: } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} = \infty.$$

c) Állítás: $f(x)$ tetszőleges 0 és 1 közötti értéket felvesz.
Ugyanis: Legyen $0 < c < 1$.

(2) és (3) miatt: van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $c < f(x) < 1$.

f folytonos az egész \mathbb{R} -en, így folytonos a $[0, x]$ -en is, Bolzano tétellel felveszi a $0 < c < f(x)$ értéket is.

Mivel $f(0) = 0$, az előbbiekből azt kapjuk, hogy $[0, 1) \subset R_f$.

Másrészt (2)-ből $R_f \subset [0, 1)$, így $R_f = [0, 1)$.

$$2. D_f = \bigcup_{k=0}^{\infty} [4k^2 \cdot \pi^2, (4k^2 + 4k + 1) \pi^2] \quad R_f = [0, 1]$$

$$3. D_f = \left[\frac{1}{e}, e \right] \quad R_f = [0, \pi]$$

$$4. D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \quad R_f = \{0\}$$

$$5. D_f = (0, 1) \quad R_f = (-\infty, \infty)$$

$$6. D_f = \left[-\frac{1}{3}, 1 \right] \quad R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$7. D_f = (-\infty, 0) \quad R_f = \left(-\infty, \ln \frac{\pi}{2} \right)$$

$$8. D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad R_f = \left(\frac{1}{1 + \frac{\pi}{4}}, \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2}} \right)$$

$$9. D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \right)$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

10. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $R_f = (0, 1]$
 11. $D_f = (-\infty, -1) \cup [0, 1)$ $R_f = (0, \infty)$
 12. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 13. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

55. 1. $(-\infty, 0]$ 4. $(0, \frac{\pi}{2})$
 2. $[1, \text{ch}1)$ 5. $\{\frac{1}{e}, 0, e\}$
 3. $(-1, \frac{1}{2})$

56. 1. a) $\frac{1}{1-x}$ a $(-\infty, 1)$ és az $(1, \infty)$ -en monoton növő.

b) $|\ln x|$ monoton csökken a $(0, 1]$ -ben, és monoton nő az $[1, \infty)$ -en, ugyanis

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } \ln x \geq 0, \text{ azaz ha } x \geq 1 \\ -\ln x, & \text{ha } \ln x < 0, \text{ azaz ha } 0 < x < 1 \end{cases}$$

és $\ln x$ monoton növő $(0, \infty)$ -en.

c) Mivel monoton növő függvények összetett függvénye monoton nő, illetve monoton növő és csökkenő függvények összetett függvénye monoton csökken, a) és b)-ből $f(x)$ monoton nő, ha

$$|\ln x| < 1 \text{ vagy } |\ln x| > 1 \quad (1)$$

$$\text{és } x > 1 \quad (2)$$

(1) akkor és csak akkor áll fenn, ha $\frac{1}{e} < x < e$ vagy $x > e$ vagy $x < \frac{1}{e}$, így ebből (2)-vel: $f(x)$ monoton nő, ha

$1 \leq x < e$ és ha $x > e$ (3). Ugyanígy $f(x)$ monoton csökken, ha $\frac{1}{e} < x < e$ vagy $x > e$ vagy $x < \frac{1}{e}$ és $0 < x \leq 1$,

amiből: $f(x)$ monoton csökken ha $0 < x < \frac{1}{e}$ illetve $\frac{1}{e} < x < 1$.

Összefoglalva tehát

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

	$0 < x < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < x \leq 1$	$1 \leq x < e$	$x > e$
$f(x)$	csökken	csökken	nő	nő

Az, hogy ezek legbővebb olyan intervallumok, melyeken a függvény monoton, következik egyrészt abból, hogy

$$0 < x < \frac{1}{e} \quad \text{és} \quad x > e \quad \text{esetén} \quad f(x) < 0,$$

$$\text{míg} \quad \frac{1}{e} < x < e \quad \text{esetén} \quad f(x) > 0,$$

másrészt a 3. pl. 3.-ból.

2. $(-\infty, 0]$ -n monoton csökkenő, $[0, \infty)$ -en monoton növény.

3. Minden $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ esetén

a $\left[k \cdot \pi, (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right]$ -n monoton növény, és

a $\left[(2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \cdot \pi \right]$ -n monoton csökkenő.

4. A $(-\infty, -1)$ -en és az $(1, \infty)$ -en monoton csökkenő,

a $(-1, 1)$ -en monoton növény.

⑤. A $(-\infty, -1)$ -en és a $(-1, 0]$ -n monoton csökkenő, a $[0, 1)$ -en és az $(1, \infty)$ -en monoton növény.

$$\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1+y^2}{1-y^2} = 2 \frac{x^2 - y^2}{(1-x^2)(1-y^2)} \right).$$

57. ①. Korlátos, $\inf_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) = \min_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) = \max_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$$

Lokális maximuma van az $x = \frac{\pi}{6}$ és az $x = 5 \frac{\pi}{6}$ pontokban.

Lokális minimuma van az $x = \pm \frac{\pi}{2}$ pontokban.

A $g(x) = x(1-x)$ jelöléssel

$$1. |g(x)| \leq 2, \quad \text{ha} \quad |x| \leq 1 \quad \text{és} \quad g(-1) = -2.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. Vagy a 4. pl. 1. e)-ből, vagy mivel

$$g(x) - g(y) = (x-y)(1 - (x+y)), \text{ látható, hogy } x \leq \frac{1}{2} \text{-re } g(x)$$

monoton nő, $x \geq \frac{1}{2}$ -re monoton csökken. Így egyrészt:

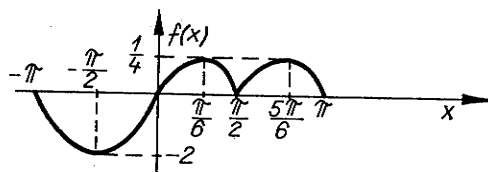
a) $0 \leq g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, ha $0 \leq x \leq 1$, és

$g(x) < 0$, ha $x < 0$;

másrészt:

b) $\sin x$ monoton szakaszai alapján belátható, hogy $f(x)$ a

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ -ban és a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ -ban monoton nő, valamint a $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ és $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ -ben monoton csökken.



6. ábra

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) alulról korlátos, $\inf f(x) = 0$, nem veszi fel, nincs lokális szélsőértéke.

b) alulról korlátos, $\inf_{x \in (-\infty, 1)} f(x) = 1$, nem veszi fel,

c) korlátos $\inf_{x \in (1, \infty)} f(x) = 0$, $\sup_{x \in (1, \infty)} f(x) = 1$,

egyiket sem veszi fel.

d) korlátos, $\inf_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f(x) = \min_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f(x) = f(0) = 2$,

$$\sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f(x) = \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

e) korlátos, $\inf_{x \in (2,3)} f(x) = f(2) = \frac{1}{2}$, $\sup_{x \in (2,3)} f(x) = f(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

egyiket sem veszi fel az intervallumon.

3. $D_f = [-1, 1]$

Korlátos, $\sup f(x) = \max f(x) = f(1) = f(-1) = \frac{\pi}{2}$,

$\inf f(x) = \min f(x) = f(0) = 0$,

lokális minimuma van $x = 0$ -ban.

4. $D_f = \mathbb{R}$

a) Korlátos, $\sup f(x) = \max f(x) = f(1) = f(-1) = 1$,

$\inf f(x) = \min f(x) = f(0) = 0$,

lokális maximuma van az $x = +1$ -ben,

lokális minimuma van az $x = 0$ -ban.

b) Korlátos, $\sup_{x \in [1, \infty)} f(x) = \max_{x \in [1, \infty)} f(x) = f(1) = 1$,

$\inf_{x \in [1, \infty)} f(x) = 0$, nem veszi fel.

Lokális szélsőértéke nincs.

5. $D_f = \mathbb{R}$

a) Felülről korlátos, $\sup f(x) = 1$, nem veszi fel.

Lokális szélsőértéke nincs.

b) Korlátos $\sup_{x \in [0, \infty)} f(x) = 1$, nem veszi fel,

$\inf_{x \in [0, \infty)} f(x) = \min_{x \in [0, \infty)} f(x) = f(0) = 0$.

58. 1. a) Nem
b) Nem
c) Igen

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(Mivel a függvény a $\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ és a $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ intervallum-
ban szig. monoton csökken, valamint a $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$ és az

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ intervallumban szig. mon. nő

$(x^2(1-x^2) - y^2(1-y^2) = (x^2-y^2)(1-(x^2+y^2)))$ és folytonos, így
egyetlen olyan I nyílt intervallumban sem invertálható,

melyre $-\frac{1}{\sqrt{2}} \in I$ vagy $\frac{1}{\sqrt{2}} \in I$ (lásd 101. pl. a)), de a

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ -ben szigorúan monoton nő.)

2. Igen (mindenütt szigorúan monoton növény).
3. a) Igen
b) Nem
c) Nem

(Mivel $f(x) > 0$, ha $x \neq 1$ és $f(x) = 0$, ha $x = 1$ és f
folytonos, így egyetlen olyan I nyílt intervallumban sem inver-
tálható, melyre $1 \in I$ (lásd 101. pl. a)).
De a $(0,1]$ -en szigorúan monoton csökken.)

4. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ -n invertálható.

(pl. az $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = \frac{x}{x+1}$, $f_3(x) = \ln x$, $f_4(x) = \sqrt{x}$

invertálható függvények összetett függvénye:

$$f_2 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_1 = f,$$

és lásd 25. pl. 2.)

59. (1.) a) Egyetlen.

(A $g(y) = \sqrt[3]{y + \ln y}$ $(0, \infty)$ -en szigorúan monoton, így
invertálható, valamint $R_g = \mathbb{R}$.)

Igy 24. pl. 1. -el egyetlen $y = f(x)$ van

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(a $g(y)$ inverze), hogy $x = g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x) + \ln f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
azaz $f(x) + \ln f(x) = x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.)

b) Pontosán kettő.

A $g(y) = y^2 + \operatorname{chy}^{-1}$ jelöléssel

1. $g(y)$ akkor és csak akkor 0, ha $y = 0$ (hiszen $g(0) = 0$
és $\operatorname{chy} > 1$ ha $y \neq 0$).

2. $R_g = [0, \infty)$

3. $g(y)$ invertálható (mert szigorúan monoton) $[0, \infty)$ -en és
 $(-\infty, 0]$ -n, itt folytonos, tehát egyetlen folytonos
 $f_1: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ függvény van,

$$\text{hogy } g(f_1(x)) = x \quad \forall x \in [0, \infty),$$

$$\text{és } f_1(x) > 0 \text{ ha } x > 0 \quad (1)$$

és egyetlen folytonos $f_2: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ van,

$$\text{hogy } g(f_2(x)) = x \quad \forall x \in [0, \infty),$$

$$\text{és } f_2(x) < 0, \text{ ha } x < 0 \quad (2)$$

(mellesleg: $f_2 = -f_1$).

4. Tegyük fel, hogy van folytonos $f_3: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, hogy

$$g(f_3(x)) = x \quad \forall x \in [0, \infty). \quad (3)$$

Ekkor $f_3(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$.

Igy $f_3(x)$ folytonossága miatt vagy $f_3(x) > 0$

$$\forall x \in (0, \infty) \text{ vagy } f_3(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \infty),$$

amiből (1)- és (2)-vel látható, hogy vagy $f_3 = f_2$ vagy
 $f_3 = f_1$.

2. a) Minden $c \in \mathbb{R}$ esetén egyetlen.

b) Minden $c > 0$ esetén pontosán kettő, $c=0$ -ra csak $x=0$.

ÉGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

60. a) 1, Megoldás.

$$1. D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = [-1, 1]$$

2. Mivel a $\cos x$ függvény inverzén, $\arccos x$ -en, definíció szerint a $[0, \pi]$ -hez tartozó inverzét értjük, $f(x)$ invertálhatóságához 25. pl. 3. alapján fenn kell állnia:

$$0 \leq e^{(x+2)^2} \leq \pi \tag{1}$$

Mivel egyrészt a bal oldali egyenlőtlenség mindig teljesül ($e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$), másrészt $\ln x$ monoton növekvő függvény, így (1). akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$-2 - \sqrt{\ln \pi} \leq x \leq \sqrt{\ln \pi} - 2 \tag{2}$$

Mivel az e^x kölcsönösen egyértelmű mindenütt, és az $(x+2)^2$ kölcsönösen egyértelmű

egyrészt a $[-2, \infty)$

másrészt a $(-\infty, -2]$

intervallumon így, miután invertálható függvények összetett

függvénye invertálható (lásd 25. pl. 2.), az $e^{(x+2)^2}$ függvény kölcsönösen egyértelmű egyrészt $x \geq -2$, másrészt $x \leq -2$

esetén. Ezt (2)-vel összevetve a $\cos e^{(x+2)^2}$ függvény

$$\text{invertálható egyrészt az } I_1 = [-2, -2 + \sqrt{\ln \pi}] \tag{3}$$

$$\text{másrészt az } I_2 = [-2 - \sqrt{\ln \pi}, -2] \tag{4}$$

intervallumon.

3. Az inverzhez az inverz függvény definíciója segítségével jutunk.

A megengedett intervallumokon $\cos e^{(x+2)^2} = y$ akkor és csak akkor teljesül, ha $e^{(x+2)^2} = \arccos y$, ami akkor és csak

$$\text{akkor igaz, ha } (x+2)^2 = \ln \arccos y \tag{5}$$

a) ha $x \geq -2$, (5) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$x = \sqrt{\ln \arccos y} - 2 .$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Igy az inverz itt $f_1^{-1}(x) = \sqrt{\ln \arccos x - 2}$.

Ennek értelmezési tartományát a következőképpen állítjuk elő: az inverz függvény definíciójából: ha f H -n invertálható, a H -hoz tartozó inverzére

$$D_{f^{-1}} = f(H),$$

ezért $D_{f_1^{-1}}$ a (3)-beli intervallum f szerinti képe,

Mivel $f(x) = \cos e^{(x+2)^2}$ folytonos, és mivel $(x+2)^2$ az $x \geq -2$ esetben monoton nő, e^x monoton nő, $\cos x$ monoton csökken, tehát $f(x)$ monoton csökken (lásd 19. pl. 2.), így $-2 \leq x \leq -2 + \sqrt{\ln \pi}$ akkor és csak akkor, ha

$$\cos 1 \geq f(x) \geq \cos \pi = -1, \text{ azaz } D_{f_1^{-1}} = [-1, \cos 1].$$

És valóban ellenőrizhető, hogy az

$$f(x) = \sqrt{\ln \arccos x - 2}$$

mint elemi függvények összetett függvénye értelmezve van a $[-1, \cos 1]$ intervallumon, mert egyrészt mivel $\cos 1 < 1$, ezért $[-1, \cos 1] \subset D \arccos x$, másrészt ha $x \leq \cos 1$, akkor $\arccos x \geq 1$, így $\ln \arccos x \geq 0$.

b) Ugyanúgy, ahogy a)-ban csináltuk, az f invertálható a $[-2 - \sqrt{\ln \pi}, -2]$ intervallumon és itt inverze

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\ln \arccos x - 2}$$

$$D_{f_2^{-1}} = [-1, \cos 1].$$

4. Az, hogy I_1, I_2 két legbővebb halmaz, amin a függvény invertálható, következik abból, hogy egyrészt 2. miatt bármely olyan $H \subset D_f$ -re, melyen f invertálható:

$$H \subset [-2 - \sqrt{\ln \pi}, -2 + \sqrt{\ln \pi}] = H_0$$

(lásd (2)),

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
 HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

másrészt, ha $H \subset H_0$ olyan, hogy például $I_1 \subset H$,
 $I_1 \neq H$, akkor egy $x \in H$ $x \notin I_1$ esetén kell, hogy
 $x \in I_2$ teljesüljön ($I_1 \cup I_2 = H_0 \supset H$), ekkor
 $-2 - \sqrt{\ln \pi} \leq x \leq -2$, de így az $y = -4-x$ -re
 $-2 \leq y \leq -2 + \sqrt{\ln \pi}$, azaz $y \in I_1 \subset H$. Vagyis
 $x, y \in H$, $y = -4-x$, $y \neq x$ ($x \notin I_1$, $y \in I_1$) és
 $f(x) = \cos e^{(x+2)^2} = \cos e^{(y+2)^2} = f(y)$, azaz f H -n nem
 kölcsönösen egyértelmű. Ugyanígy látható be, hogy I_2 -nél
 sincs bővebb halmaz, melyen f invertálható volna.

5. Összefoglalva:

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{\ln(\arccos x) - 2}$$

$$D_{f_1}^{-1} = [-1, \cos 1]$$

$$R_{f_1}^{-1} = [-2, -2 + \sqrt{\ln \pi}]$$

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\ln(\arccos x) - 2}$$

$$D_{f_2}^{-1} = D_{f_1}^{-1}$$

$$R_{f_2}^{-1} = [-2 - \sqrt{\ln \pi}, -2]$$

$$2. D_f = \mathbb{R} \setminus \left[-1, \frac{1}{2}\right], R_f = \mathbb{R} \setminus \{1 - \ln \sqrt{2}\},$$

f invertálható egész D_f -en:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{2(x-1)} + 1}{2e^{2(x-1)} - 1}, \quad D_f^{-1} = R_f.$$

$$3. D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} < x \leq \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{4}} \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\},$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$R_f = [0, \infty)$. Invertálható a $(\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}]$ intervallumon, az

$$\text{inverz } f^{-1}(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}},$$

$$D_f^{-1} = [0, \infty), \quad R_f^{-1} = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right].$$

4. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq (4k-1) \frac{\pi}{4} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$,

$R_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Invertálható a $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ intervallumon,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1-x}{x},$$

$$D_f^{-1} = \left[\frac{1}{2}, \infty\right), \quad R_f^{-1} = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

5. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$, $R_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Invertálható az egész D_f -en,

$$f^{-1}(x) = e^{\sqrt[3]{\ln x}} + 1, \quad D_f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \quad R_f^{-1} = D_f.$$

6. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (\operatorname{tg}(-1), \operatorname{tg} 1]$.

Invertálható a pozitív, illetve a negatív valós féltengelyen:

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{arctg} x}{1 + \operatorname{arctg} x}}, \quad D_{f_1}^{-1} = (\operatorname{tg}(-1), \operatorname{tg} 1],$$

$$R_{f_1}^{-1} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1 - \operatorname{arctg} x}{1 + \operatorname{arctg} x}}, \quad D_{f_2}^{-1} = (\operatorname{tg}(-1), \operatorname{tg} 1],$$

$$R_{f_2}^{-1} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$7. D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Invertálható az $[1, \infty)$ és a $(-\infty, 1]$ intervallumon:

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt[4]{\operatorname{arthsinx} + 1},$$

$$D_{f_1}^{-1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad R_{f_1}^{-1} = [1, \infty),$$

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt[4]{\operatorname{arthsinx} + 1},$$

$$D_{f_2}^{-1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad R_{f_2}^{-1} = (-\infty, 1].$$

$$8. D_f = (-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, \infty),$$

$$R_f = [0, \pi].$$

Invertálható egyrészt a $H_1 = (-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, \infty)$ halmazon, itt

$$f_1^{-1}(x) = \frac{2}{\cos x} + \frac{\sqrt{4 - \cos^2 x}}{\cos x},$$

$$D_{f_1}^{-1} = [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \quad R_{f_1}^{-1} = H_1,$$

másrészt a $H_2 = [-2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}]$ halmazon, itt

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\cos x} - \frac{\sqrt{4 - \cos^2 x}}{\cos x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$D_{f_2}^{-1} = [0, \pi], \quad R_{f_2}^{-1} = H_2.$$

(Megj.: lásd 29. pl. 2.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

9. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$. Invertálható az

1. $I_1 = (-\infty, -\operatorname{arch} 2 - 1]$ -en, itt

$$f_1^{-1}(x) = -\operatorname{arch}(\sqrt{x} + 2) - 1,$$

$$D_{f_1^{-1}} = [0, \infty), \quad R_{f_1^{-1}} = I_1 .$$

2. $I_2 = [-\operatorname{arch} 2 - 1, -1]$ -n, itt

$$f_2^{-1}(x) = -\operatorname{arch}(-\sqrt{x+2}) - 1,$$

$$D_{f_2^{-1}} = [0, 1], \quad R_{f_2^{-1}} = I_2 .$$

3. $I_3 = [-1, \operatorname{arch} 2 - 1]$ -n, itt

$$f_3^{-1}(x) = \operatorname{arch}(-\sqrt{x+2}) - 1,$$

$$D_{f_3^{-1}} = [0, 1], \quad R_{f_3^{-1}} = I_3 .$$

4. $I_4 = [\operatorname{arch} 2 - 1, \infty)$ -en, itt

$$f_4^{-1}(x) = \operatorname{arch}(\sqrt{x} + 2) - 1,$$

$$D_{f_4^{-1}} = [0, \infty), \quad R_{f_4^{-1}} = I_4 .$$

10. $D_f = (0, \infty)$, $R_f = \mathbb{R}$. Az egész D_f -en invertálható:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2^x}, \quad D_f^{-1} = \mathbb{R}, \quad R_f^{-1} = (0, \infty).$$

11. $D_f = (-4, 4)$, $R_f = (-\infty, \ln 4 + 3)$. Invertálható az

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. $I_1 = (-4, 0]$ -n, itt

$$f_1^{-1}(x) = -\sqrt{4 - e^{x-3}}, \quad D_{f_1}^{-1} = (-\infty, \ln 4+3),$$

$$R_{f_1}^{-1} = I_1.$$

2. $I_2 = [0, 4)$ -en, itt

$$f_2^{-1}(x) = \sqrt{4 - e^{x-3}}, \quad D_{f_2}^{-1} = D_{f_1}^{-1} = R_f, \quad R_{f_2}^{-1} = I_2.$$

$$12. D_f = (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\}, \quad R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Invertálható az egész D_f -en,

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{1-x}}, \quad D_f^{-1} = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad R_f^{-1} = (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\}.$$

b) ① Mivel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{ha } x \geq 0 \\ e^{x^2} & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = (0, \infty).$$

Mivel e^{-x^2} kölcsönösen egyértelmű $x \geq 0$ esetén, és e^{x^2} kölcsönösen egyértelmű $x \leq 0$ esetén, valamint e^x kölcsönösen egyértelmű:

$$e^{-x^2} = e^{y^2} \quad \text{akkor és csak akkor ha } -x^2 = y^2, \text{ azaz } x = y = 0,$$

így $f(x)$ az egész D_f -en invertálható, és az inverz

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\ln \frac{1}{x}}, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ -\sqrt{\ln x}, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

$$D_f^{-1} = (0, \infty), \quad R_f^{-1} = \mathbb{R}.$$

$$2. D_f = (0, \infty), \quad R_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Invertálható a $(0, 1]$ -en, itt

$$f_1^{-1}(x) = e^{-\operatorname{tg} x}, \quad D_{f_1}^{-1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad R_{f_1}^{-1} = (0, 1],$$

valamint az $[1, \infty)$ -en, itt

$$f_2^{-1}(x) = e^{\operatorname{tg} x}, \quad D_{f_2}^{-1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad R_{f_2}^{-1} = [1, \infty).$$

3. $D_f = R_f = \mathbb{R}$. Mindenütt invertálható:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \leq x \leq 16 \\ \log_2 x, & \text{ha } 16 < x < \infty, \end{cases}$$

$$D_f^{-1} = R_f^{-1} = \mathbb{R}.$$

4. $D_f = (-\infty, 4]$, $R_f = [-1, \infty)$. Invertálható az

1. $I_1 = (-\infty, 1]$ -en, itt

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ \ln \frac{1}{x}, & \text{ha } 1 \leq x < \infty, \end{cases}$$

$$D_{f_1}^{-1} = [0, \infty), \quad R_{f_1}^{-1} = I_1.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. $I_2 = [1, 3]$ -on, itt

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} 2 \left(1 + \frac{1}{\pi} \arccos(-x) \right), & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ x+1 & , \text{ ha } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$D_{f_2}^{-1} = [-1, 1], \quad R_{f_2}^{-1} = I_2.$$

3. $I_3 = [3, 4]$ -en, itt

$$f_3^{-1}(x) = 2 \left(1 + \frac{1}{\pi} \arccos(-x) \right),$$

$$D_{f_3}^{-1} = [0, 1], \quad R_{f_3}^{-1} = I_3.$$

$$5. D_f = [0, \infty), \quad R_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} [2k, 2k+1).$$

Az egész D_f -en invertálható:

$$f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{2},$$

$$D_f^{-1} = \left\{ x \geq 0 : [x] \text{ páros} \right\} = R_f,$$

$$R_f^{-1} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \right\}.$$

$$(f(x) = y = x+k \quad k \leq x < k+1,$$

$$\text{amiből } x = y-k \quad 2k \leq y < 2k+1)$$

c) ① 1. $D_f = \mathbb{R}$

$$2. y = e^{2x} - e^x \text{ -ből } z = e^x \quad (1)$$

helyettesítéssel z -ben másodfoku egyenletre jutunk, melyből

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}} \quad (2), \quad \text{igy a függvény invertálható a}$$

$z \geq \frac{1}{2}$ illetve $z \leq \frac{1}{2}$ intervallumokon, azaz, ha

$e^x \geq \frac{1}{2}$ illetve $e^x \leq \frac{1}{2}$, ami az $\ln x$ monotonitása miatt,

és mert $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, akkor és csak akkor teljesül,

ha $x \geq \ln \frac{1}{2}$ illetve $x \leq \ln \frac{1}{2}$.

Miután $f(x)$ folytonos az egész \mathbb{R} -en, és a fentiek szerint invertálható az

$$I_1 = \left[\ln \frac{1}{2}, \infty \right) \quad \text{és az} \quad I_2 = \left(-\infty, \ln \frac{1}{2} \right] \quad (3)$$

intervallumokon, így ezeken monoton (lásd 101. pl. b)-vel

analog tételt \mathbb{R} -re). Mivel $\ln \frac{1}{4} < \ln \frac{1}{2} < 0$ és

$$f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad f(0) = 0,$$

$$f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16},$$

azaz

$$f\left(\ln \frac{1}{4}\right) > f\left(\ln \frac{1}{2}\right) \quad \text{és} \quad f(0) > f\left(\ln \frac{1}{2}\right),$$

ezért I_1 -en monoton csökkenő és I_2 -n monoton növény.

(Megjegyzés.)

Ez az eredmény megkapható 4. pl. 1. e)-ből is hiszen a

$g(z) = z^2 - z$ jelöléssel $f(x) = g(e^x)$, és $g(x)$ az idézett

példa szerint $z \leq \frac{1}{2}$ -re szigoruan monoton csökkenő,

$z \geq \frac{1}{2}$ -re szigoruan monoton növény, valamint, mivel e^x min-

denütt szigoruan monoton növény, és szigoruan monoton növény függvények összetett függvénye szigoruan monoton növény, egy

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

szigoruan monoton növő és egy szigoruan csökkenő függvény összetett függvénye szigoruan monoton csökkenő, és szigoruan monoton függvény invertálható. Most a szigoruan monotonitásból következtettünk az invertálhatóságra, míg az előbb - a folytonosság felhasználásával - fordítva.)

$$\text{Ebből következik, hogy } f\left(\ln \frac{1}{2}\right) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

$$\text{Ezzel } \inf R_f = f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}. \quad (5)$$

Másrészt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ és f folytonos, így ezzel és

$$(5)\text{-tel } R_f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right).$$

3. (1), (2) és (3)-ból: f invertálható I_1 -en, és itt

$$f_1^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right),$$

$$D_{f_1}^{-1} = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right), \quad R_{f_1}^{-1} = \left[\ln \frac{1}{2}, \infty\right) = I_1, \quad \text{illetve}$$

I_2 -n, és itt

$$f_2^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right),$$

$$D_{f_2}^{-1} = \left[-\frac{1}{4}, 0\right), \quad R_{f_2}^{-1} = \left(-\infty, \ln \frac{1}{2}\right] = I_2.$$

$$\textcircled{2}. D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

(R_f -hez:

a $z = \sin^2 x$ helyettesítéssel az $y(z) = z^2 - z + 1$ polinomhoz jutunk. Miután folyt. függvények összetett függvényeiről van szó és $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, azt kell megnéznünk, melyek $y(z)$ szélsőértékei a $[0, 1]$ -ben.

Ugyanugy ahogy az 1. példánál tettük, abból, hogy $y(z)$ $z \leq \frac{1}{2}$ és $z \geq \frac{1}{2}$ -re invertálható, adódik, hogy minimuma van

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$z = \frac{1}{2}$ -ben és maximuma az intervallum szélein.)

Invertálható az alábbi intervallumokban

1. $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ -en, itt

$$f_1^{-1}(x) = -\arcsin \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}},$$

$$D_{f_1}^{-1} = \left[\frac{3}{4}, 1\right] = R_f, \quad R_{f_1}^{-1} = I_1.$$

2. $I_2 = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ -n, itt

$$f_2^{-1}(x) = -\arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}},$$

$$D_{f_2}^{-1} = \left[\frac{3}{4}, 1\right] = R_f, \quad R_{f_2}^{-1} = I_2.$$

3. $I_3 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ -n, itt

$$f_3^{-1}(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}},$$

$$D_{f_3}^{-1} = R_f, \quad R_{f_3}^{-1} = I_3.$$

4. $I_4 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ -n, itt

$$f_4^{-1}(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}},$$

$$D_{f_4}^{-1} = R_f, \quad R_{f_4}^{-1} = I_4.$$

③ $D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right).$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(R_f -hez: $z = \operatorname{sh} x$ helyettesítéssel az $y(z) = z^2 - 3z + 2$ polinomhoz jutunk. 14. pl. b)-ből ennek minimuma $z = \frac{3}{2}$ -ben van és $y(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$, valamint $R_{\operatorname{sh}x} = \mathbb{R}$.) Invertálható az

1. $I_1 = (-\infty, \operatorname{arsh} \frac{3}{2}]$ -en, itt

$$f_1^{-1}(x) = \operatorname{arsh} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2} \right),$$

$$D_{f_1}^{-1} = R_f, \quad R_{f_1}^{-1} = I_1.$$

2. $I_2 = [\operatorname{arsh} \frac{3}{2}, \infty)$ -en, itt

$$f_2^{-1}(x) = \operatorname{arsh} \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2} \right),$$

$$D_{f_2}^{-1} = R_f, \quad R_{f_2}^{-1} = I_2.$$

61. 1. a) 1. $D_f = [-1, 1]$, $f(x) = x$.

($\cos x$ a $[0, \pi]$ -n $\arccos x$ inverze)

2. $D_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases},$$

és $f(x+2k\pi) = f(x)$ tetszőleges $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ -re.
Vagy másképpen

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{ha } (4k-1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (4k+1)\frac{\pi}{2} \\ (2k+1)\pi - x & \text{ha } (4k+1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (4k+3)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(α) $\arcsin x$ a $\sin x$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ -hez tartozó inverze:
definíció szerint

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (1)$$

β) Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin x = \sin(\pi - x) \quad (2)$$

és ha $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ akkor $(\pi - x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Igy (1)- és (2)-vel:

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x,$$

$$\text{ha } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \quad (3)$$

γ) $\sin x$ 2π szerint periodikus és valamely $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ -re

$$x - 2k\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Ezzel a k -val tehát felhasználva (1) és (3)-at:

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2k\pi)) =$$

$$= \begin{cases} x - 2k\pi & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x - 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - (x - 2k\pi) & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x - 2k\pi \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} .$$

$$3. D_f = [-1, 1],$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

4. $D_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases},$$

és $f(x+2k\pi) = f(x)$ tetsz. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ -ra.

($\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ és lásd 2.)

5. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$,

$f(x) = x$ ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ és $f(x+k\pi) = f(x)$

tetsz. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ -ra.

(vagy másképp $f(x) = x - k\pi$ ha $x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

tetsz. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ -ra.)

(az eljárás analóg a 2.-belivel).

6. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$(\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R})$

7. $D_f = (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R})$

8. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

9. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

$$(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

10. $D_f = \{ x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \}$, $f(x) = x$.

11. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

b) 1. $f(x) = 2x \sqrt{1-x^2}$, ha $x \in [-1,1]$.

$$(\sin 2x = 2 \sin x \cos x)$$

2. $f(x) = |x|$, ha $x \in [-1,1]$.

$$(\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ így}$$

$$\cos(\arcsin \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2})$$

3. $f(x) = |x|$, ha $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

$$(\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$$

2. 1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Ebből $x = \arcsin y$ helyette-

sitéssel $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = y$, ha $y \in [-1,1]$,

tehát $\frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y$, ha $y \in [-1,1]$.

2. 1. a) 7.-ből $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1,1)$ (1).

Másrészt 1.a) 5.-ből, ha $x \in (-1,1) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, így (1)-ből $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} y} \quad \forall y \neq 0, y = \operatorname{arctg} x$ helyettesítéssel:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \quad (2).$$

Ha $x > 0$, akkor $0 < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, amiből

$$-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \text{ tehát 1. a)5. és (2)-ből}$$

$$\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

U.így kapjuk, ha $x < 0$ (1. a)5.-ben ilyenkor $k = 1$), hogy

$$\operatorname{arctg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x - \pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$\text{azaz } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

(63.)

1. Jelöljük $f(g(y)) = h(y)$. A feltétel szerint létezik a

$\lim_{y \rightarrow g^{-1}(x_0)} h(y)$ (1). Mivel g^{-1} folytonos (a, b) -n, ezért létezik

$\lim_{x \rightarrow x_0} g^{-1}(x) = g^{-1}(x_0)$ (2), és mivel invertálható is, így szigorúan monoton (lásd 101. pl. b)) (3).

Igy (1)-, (2)-, (3)-mal h -ra és g^{-1} -re fennállnak az összetett

függvény határértékére vonatkozó tétel feltételei, és mivel

$h(y) = f(g(y))$ és $h(g^{-1}(x)) = f(g(g^{-1}(x))) = f(x)$, így létezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{y \rightarrow g^{-1}(x_0)} f(g(y))$.

2. Legyen $\varepsilon > 0$ tetsz. Feltétel szerint van $A \in \mathbb{R}$ és $\delta > 0$, hogy $\left| f\left(\frac{1}{y}\right) - A \right| < \varepsilon$, ha $0 < y < \delta$ (1).

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Legyen $x > \frac{1}{\delta}$, ekkor $0 < \frac{1}{x} < \delta$, és ezzel és (1)-gyel

$$|f(x) - A| = \left| f\left(\frac{1}{x}\right) - A \right| < \varepsilon.$$

64. 1. nem létezik
2. 1
3. 1
4. nem létezik
5. nem létezik
6. 0
7. ∞

8. nem létezik

(9.) $1 \left(\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \right)$

(10.) $1 \left(x-1 \leq [x] \leq x \right)$

65. 1. a) Mivel a $g(x) = x$ folytonos, ezért az $f(x) = x^2 - 2x + 2$ mint folytonos függvények szorzatösszege mindenütt folytonos,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1.$$

b) Ha $x < 0$, akkor $x^3 + 2x^2 - 1 = x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$, és könnyen

beláthatóan $x^3 \rightarrow -\infty$, valamint $\frac{2}{x}, -\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$,

(63. pl. 2. mintájára), így $1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \rightarrow 1$. Mivel fenn-

áll (62. pl. 3. mintájára), hogy ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ és

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = c > 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot g(x) = -\infty$, így

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1) = -\infty.$$

2. ∞

3. $-\infty$

4. ∞

5. ∞

6. 14

7. ∞

8. ∞

9. ∞

10. $-\infty$

- (66.) a) 1. 0
2. -1

3. $\sqrt{\frac{1}{2}}$
4. 0

5. 1

6. $-\frac{26}{27}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(Algebrai tört kifejezések folytonosak mindenütt, ahol a nevező nulla és a $2n$ -edik gyökvonások argumentuma nem negatív.)

67. **1.** Ha léteznek a megfelelő határértékek, akkor az alpműveletek a határértékképzés sorrendjével felcserélhetők:

$x > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{3x^2 + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{5}{x^2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2}} = \frac{1 - 0 - 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. 1.

11. $\frac{1}{9}$

18. a) $\frac{1}{2}$

3. 0

12. $-\infty$

4. 0

13. 8

(b) $-\frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + 1} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$

5. 0

14. -1

6. ∞

15. 1

7. $-\infty$

8. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

16. $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$

19. 4

20. a) $\sqrt{2}$

9. $\frac{1}{3}$

17. $n - \frac{n(n+1)}{2}$

b) 0

c) ∞

10. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

21. ∞

b) ∞

68. 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{k_1 - k_2}$

2. 1. 0

2. a) ∞

b) $-\infty$

(3) nem létezik ($\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$)

4. 6

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

69. a) 1. Mivel mind a számlálónak, mind a nevezőnek gyöke az $x = 1$, így mindkettőben szerepel az $x-1$ gyöktényező.
Igy, ha $x \neq 1$, akkor

$$\frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} = \frac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x - 3}$$

Az utóbbi kifejezés folytonos az $x = 1$ -ben, így

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} = 1$$

2. $-\frac{1}{2}$

11. 10

3. $\frac{1}{2}$

12. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

4. 0

13. 1. nem létezik

5. nem létezik

2. $\frac{1}{5}$

6. $-\infty$

3. nem létezik

7. ∞

4. $\frac{1}{2}$

8. 1

5. 0

9. nem létezik

14. -1

10. 6

(b) 1. $\frac{n(n+1)}{2}$

(Teljes indukcióval igazolható: $\forall x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x - n = (x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \dots + (n-1)x + n)(x-1)$$

2. $\frac{n-2}{m-2}$

(Teljes indukcióval igazolható: $\forall x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x - 1)(x-1) = x^n - 2x + 1)$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. $\frac{nm(n-m)}{2}$

(A számláló kettőnél magasabbfoku tagjai x^2 -el osztva is 0-hoz tartanak.)

4. $\frac{m}{n}$

(Teljes indukcióval igazolható: $\forall x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

5. $\frac{n(n+1)}{2}$

(Teljes indukcióval belátható: $\forall x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x^{n+1} - (n+1)x + n = (x^n + x^{n-1} + \dots + x - n)(x-1)$$

és lásd 1. Utmutatását.)

- | | | | |
|------------|----------------|----------------|----------------|
| <u>70.</u> | 1. a) 2 | 4. $5\sqrt{3}$ | 6. 2 |
| | b) nem létezik | $-\sqrt{3}$ | 7. 1 |
| | 2. 2 | | 8. a) ∞ |
| | 3. 5 | 5. 1 | b) $-\infty$ |

71. a) 1. Mivel $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, így, ha $a+b \neq 0$, akkor

$$a-b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}. \quad \text{Mivel } \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \neq 0, \text{ így}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - x^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- | | | |
|------------------|------------------|--|
| 2. $\frac{1}{2}$ | 5. $\frac{1}{2}$ | 7. 1. 0 |
| 3. 1 | 6. 0 | (2.) $-\frac{1}{2}$ (x=-y helyettesítés) |
| 4. 3 | | |

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

ⓑ) Teljes indukcióval igazolhatóak:

$$\alpha) a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

β) 1. -ből $b=-b$ helyettesítéssel páratlan n -re:

$$a^{2k+1} - b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \dots + b^{2k}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

1. 0 4. $\frac{7}{36}$ (itt α)-beli $n = 12$) 7. $\frac{2}{3}$

2. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{112}{27}$ (itt α)-beli $n=6$) 8. 0

3. $\frac{5}{3}$ 6. $\frac{4}{3}$ 9. $\frac{3}{2}$

10. (itt α)-beli $n=6$)

11. $-\frac{1}{4}$

$$(x(\sqrt{x^2+2x} - 2 \cdot \sqrt{x^2+x} + x) = x((\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x}) + (x - \sqrt{x^2+x})))$$

12. $\frac{1}{2}$ ($x = y^6$ helyettesítés)

c) 1. $\frac{1}{n}$ 3. $\frac{n}{m}$ 5. $\frac{1-n}{n}$ 7. 2^n

2. $\frac{1}{n}$ 4. $\frac{a+b}{2}$ 6. $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

6. $\frac{na-mb}{mn}$

ⓑ) $\frac{1}{n!}$

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \cdot \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \cdot \dots \cdot \frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$$

és lásd 1.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

72. 1. 1. a) Ha $x > 0$, akkor $e^{2x} > 1$, azaz $e^{2x} - 1 > 0$, és mivel

$$e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1, \text{ ezért } \frac{1}{1 - e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty, \text{ amiből}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty, \text{ hiszen } e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \text{ (mivel } e^x \text{ min-}$$

denített folytonos, és $e^0 = 1$).

b) ugyanugy ahogy a)-ban $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$, hiszen $e^{2x} < 1$,
ha $x < 0$.

$$c) f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} \cdot \frac{1}{e^{-2x} - 1} = e^{-x} \frac{1}{e^{-2x} - 1},$$

és mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$, így

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^2 = (\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x})^2 = 0 \quad (1), \text{ ezért}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \frac{1}{e^{-2x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} - 1} = 0 \cdot \frac{1}{0 - 1} = 0. \end{aligned}$$

d) Mivel $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ugyanugy, ahogy (1)-et kaptuk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} &= 0, \text{ és így } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 - e^{2x}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x}{1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}} = \frac{0}{1 - 0} = 0. \end{aligned}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0$ | 6. $\infty, 0, 0, 1$ |
| 3. $-\infty, \infty, -\infty, 0$ | 7. $0, 0, \infty, \infty$ |
| 4. $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ | 8. $\frac{1}{2}, 0, \infty, -\infty$ |
| 5. $\infty, 0, \infty, -\infty$ | 9. $-1, 1, -\infty, \infty$ |

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 2. 1. $0, 0, \infty, \infty$ | 3. $2, 0, \frac{1}{2}, \infty$ |
| 2. $0, 0, \infty, -\frac{1}{2}$ | 4. $0, 0, 0, 0$ |

3. 1. nem létezik, nem létezik, $0, 0$

② 0 ($|\operatorname{arcsin} \frac{1}{x}| \leq |x|$), $0, 1$ ($y = \frac{1}{x}$ helyettesítés), 1

3. nem létezik, nem létezik, ∞, ∞

73. ① $1 \cdot 1 \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} = \frac{\ln e^x + \ln(1+e^{-x})}{x} \right)$

2. 0

② $\frac{\ln 3}{\ln 2} \left(\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\ln 3^x + \ln(1+3^{-x})}{\ln 2^x + \ln(1+2^{-x})} \right)$

③ $\ln 2 \left(x - \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = x - \ln e^x - \ln \left(\frac{1+e^{-2x}}{2} \right) \right)$

- | | | | | |
|---------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| 4. $-\frac{\pi}{2}$ | 7. 1. $\frac{\pi}{2}$ | 8. 1. 3 | 10. 1. $\frac{2}{3}$ | 4. $-\infty$ |
| 5. $\frac{\pi}{3}$ | 2. $-\frac{\pi}{2}$ | 2. 1 | 2. 1 | 5. 1. $\frac{1}{3}$ |
| 6. $-\frac{\pi}{4}$ | 3. $-\frac{\pi}{2}$ | 9. 1. $\frac{1}{3}$ | 3. $\frac{3}{2}$ | 6. ∞ |
| | | 2. 1 | | |

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$(11) 0 \left(\left| x \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2}} \right| \leq |x| \right)$$

$$(12) \frac{1}{2} \left(e^{-x}(1 - \sqrt{1-e^x}) = e^{-x} \frac{e^x}{1 + \sqrt{1-e^x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \right)$$

13. $-\frac{1}{4}$

74. 1. $\forall a > 0$ -ra (a^x csak pozitív alapra értelmezett)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & a = 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

2. $\forall a > 0$ -ra (lásd 1.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & a = 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

(3) $\forall a > 0$ -ra (lásd 1.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < a \leq 1 \\ a & a > 1 \end{cases}$$

($x > 0$ - ra

$$1 \leq \sqrt[x]{1+a^x} \leq \sqrt[x]{2} = 2^{\frac{1}{x}}, \text{ ha } 0 < a < 1, \text{ és}$$

$$a = \sqrt[x]{a^x} \leq \sqrt[x]{1+a^x} \leq \sqrt[x]{a^x + a^x} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot a, \text{ ha } a > 1.)$$

4. Ha $\cos a > 0$ (lásd 1.), azaz ha

$$a \in \left((4k-1) \frac{\pi}{2}, (4k+1) \frac{\pi}{2} \right) \text{ valamely } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{-ra,}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ, TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0 & a \neq 2k\pi \\ 1 & a = 2k\pi \end{cases} \quad \text{valamely } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots -ra$$

5. $\forall a \in \mathbb{R} -re \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \text{sign } a$

6. $\forall a \in \mathbb{R} -re \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} a & a \leq 0 \\ a^2 & a > 0 \end{cases}$

7. $\forall a \in \mathbb{R} -re \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \text{sign } a$

75. a) (1.) a ($ax = y$ helyettesítés)

(2.) $\frac{a}{b} \left(x \neq 0: \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \right)$

(3.) 1 ($x - \frac{\pi}{2} = y$ helyettesítés)

4. 1

5. 0

6. 1

(7.) 1 ($x = \sin y$ helyettesítés)

(9.) $x = \frac{1}{y}$ helyettesítés)

10. 1

b) 1. 1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{2}$

2. (1.) $\frac{1}{2} \left(\frac{\text{tg}x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$

2. $\frac{1}{2}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. $-\frac{1}{4}$

7. $\frac{1}{3}$

4. $\sqrt{2}$

⑧. $\frac{1}{4}$ (lásd 2.1.)

5. 0

9. $-\frac{1}{12}$

6. $\frac{a}{b}$

10. $\frac{3}{2}$

⑪. $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})$

⑫. 1. 1 ($y = \frac{\pi}{2} - x$ helyettesítés és $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - y) = \frac{1}{\operatorname{tg} y}$)

2. $\frac{2}{\pi}$ ($1 - x = y$ helyettesítés és $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin z$)

13. $\cos a$

14. $-\frac{1}{2}$

⑮. $\frac{\pi}{2}$ (lásd a) 4.)

16. $-\frac{1}{2}$

17. 1

⑰. 1. 1 ($x = \operatorname{arcsin} y$ helyettesítés után: $\frac{\operatorname{arctg} y}{\operatorname{arcsin}(\operatorname{arcsin} y)} =$

$$= \frac{\frac{\operatorname{arctg} y}{\operatorname{arcsin} y}}{\frac{\operatorname{arcsin}(\operatorname{arcsin} y)}{\operatorname{arcsin} y}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1)$$

2. 1 (ugyanugy ahogy 1.)

19. 1. 0

2. 0

76. 1. ①. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, így $\frac{\operatorname{sh} x}{x} = e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}$.

Miután e^x mindenütt folytonos, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = e^0 = 1$.

(1)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
 HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG
 $y = 2x$ helyettesítéssel (ez megengedett helyettesítés, hiszen
 $y = 2x$ mindenütt folytonosan invertálható: lásd 63. pl. 1.):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1, \text{ így (1)-ből}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

② a) $x = e^y - 1$ folytonosan invertálható megengedett helyettesítéssel:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{y}{e^y - 1} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1.$$

b) a)-ből $x = -y$ helyettesítéssel

c) a)-ből $x+1 = y$ helyettesítéssel

③ a) $a > 0$, így $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$, amivel $\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} =$

$$= \ln a \cdot \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}, \text{ és ebből } y = x \ln a \text{ helyettesítéssel}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

② A. 1. a 3. 0 5. 1 7. 1

2. $\frac{a}{b}$ 4. 1 6. 1 8. 1

B. 1. 1. $\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{1}{4}$ 4. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{a}{b}$ 5. cha

(A trigonometrikus és hiperbolikus függvényekre fennálló
 analóg azonosságok alapján a feladatok megoldása analóg
 a 75. pl. a) 1., 2., 5., 6., 7., 8., illetve
 b) 1., 3., 6., 7., 13. feladatainak megoldásával.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. 1. a

$$\textcircled{2.} \frac{1}{a} \left(x-a = y \text{ helyettesítéssel } \frac{\ln(a+y)-\ln a}{y} = \frac{\ln\left(1 + \frac{y}{a}\right)}{y} \right)$$

$$\textcircled{3.} 2 \left(\ln(x+e^x) \right)^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{\frac{x}{e^x}} \cdot e^x$$

4. $\frac{1}{2}$

6. 1. - 1

7. 1

9. e^a

5. $\frac{2}{9}$

2. $\frac{1}{2}$

8. $\ln \frac{a}{b}$

10. a-b

$$\textcircled{11.} a \left(\frac{x^a-1}{x-1} = \frac{e^{a \cdot \ln x}-1}{x-1} \text{ ha } x > 0. y = x-1 \text{ helyettesítéssel} \right)$$

$$\frac{e^{a \cdot \ln(y+1)}-1}{y} = \frac{e^{a \cdot \ln(y+1)}-1}{a \cdot \ln(y+1)} \cdot \frac{a \cdot \ln(y+1)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} a$$

12. $a^a (\ln a - 1)$

13. 1

14. $a^a \cdot (\ln a + 1)$

15. $\ln a$

77. 1. $\textcircled{a)}$ Mivel $\ln x$ az e^x inverze, ha $f(x) > 0$, akkor

$$f(x) = e^{\ln f(x)} \quad (\text{lásd 24. pl. 2.}).$$

Ebből mivel e^x mindenütt folytonos és szigorúan monoton, az összetett függvény határértékére vonatkozó tétellel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)}$$

b) Tetszőleges f valós függvény esetén, ha van $a \in \mathbb{R}$, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $f(x) > 0$ ha $x > a$, valamint létezik a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x), \text{ akkor létezik a } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ is, és}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x)}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

A bizonyítás gondolatmenete analóg az a)-beli állítás bizonyításának gondolatmenetével.

2. (1.) e^2 (lásd 1. a) és 76. pl. 3. 3.)

(2.) $\frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{\ln \cos \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1 - \sin^2 \sqrt{x})}{\sin^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} \right)$ ha $x > 0$)

3. \sqrt{ab} 4. e 5. e 6. 1 7. e^{-2} 8. $\frac{1}{e}$

9. 1 10. e^{2a} 11. e^{-5} 12. e 13. e^2 14. e^2

78. 1. $\frac{a}{b}$ 2. 1 3. 1 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ 6. $2 \frac{a}{b}$

7. -1 8. 1 9. a 10. 3 11. $-\ln 2$ 12. $\ln 8$

(13.) 1 ($x > 0$ esetén az $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ megengedett helyettesítéssel:

$$x \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = y \cdot \frac{\arccos y}{\sqrt{1 - y^2}}, \text{ amiből } y = \cos z \text{ helyettesítéssel}$$

(ez megengedett: $0 < y < 1$) $y \cdot \frac{\arccos y}{\sqrt{1 - y^2}} = \cos z \cdot \frac{z}{\sin z} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1$)

14. 0

15. 1. 0

(2.) nem létezik

($x = \frac{1}{y}$ helyettesítéssel $\left| \frac{1}{y \cdot \sin \frac{1}{y}} \cdot \frac{\sin y}{y} \right| \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty$, mert

$y \sin \frac{1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$, de $\lim_{y \rightarrow 0^+} \text{sign}(y \cdot \sin \frac{1}{y})$ nem létezik)

16. 1 17. 1. $\frac{1}{2}$ 2. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 3. 1

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(18.) 1. $e^2 \left((2x+2)(\ln(2x+3)) - \ln(2x+1) \right) = 2(x+1) \left(\ln(x + \frac{3}{2}) - \ln(x + \frac{1}{2}) \right),$

$y = \frac{1}{x}$ helyettesítéssel:

$$2(1+y) \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{3}{2} y \right)}{y} - \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2} y \right)}{y} \right) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 2$$

2. $0 \left(x^2 \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty : \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{2} < 0 \right)$

3. $\infty \left(x \ln \left(2 - \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty : \ln \left(2 - \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ln 2 > 0 \right)$

19. e 20. 1. ∞ 2. 0

(21.) $0 \left(\ln \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ln \frac{3}{2} \text{ és } \frac{x^3}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty \right)$

(22.) $-1 \left(\arctg x - \frac{\pi}{2} = -\arctg \frac{1}{x} \text{ ha } x > 0 \text{ (lásd 61 pl. 2. 3. a))} \right)$

(79.) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik a

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ és a $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$, így:

1. Nincs megfelelő a,b

4. $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$

2. a) $a = 4$, $b = -4$

5. a) $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$

b) $a = 0$, $b = -\frac{3}{2}$

b) $a = \frac{\pi}{2}$, $b = -1$ (lásd 78. pl. 22.)

c) $a = b = 0$

3. a) Nincs megfelelő a,b

6. $a = -1$

b) $a = b = 0$

$b = 0$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

80. A. a) ①. Az $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ jelöléssel a 72. pl. 3.2.-ből

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, ezért tetszőleges (b_n) sorozatra, melyre

$b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, fennáll:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \sin \frac{1}{b_n} = 1.$$

A példában $b_n = n$ sorozat választással tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1.$$

2. 1 3. e 4. 1 5. $e^{-\frac{x}{2}}$ 6. $\sqrt[a]{b}$ 7. e

⑧. $0 \left(\frac{\ln n}{n} = \ln \sqrt[n]{n} \right)$

⑨. Nem konvergens: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k} = 2$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k+2} = 0.$$

b) ①. 0

$$\left(\sqrt{n^2+1} = \left(\sqrt{n^2+1} - n \right) + n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} + n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + n \right)$$

$$\text{Igy } \sin \left(\pi \sqrt{n^2+1} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} + n \pi \right) =$$

$$= \sin \left(\pi \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \right) \cos n \pi + \cos \left(\pi \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \right) \sin n \pi$$

②. 1. Nem létezik. (lásd b) 1.)

2. 1 (lásd b) 1.)

③. 0

(Tetszőleges $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ esetén a $\sin x$ függvény definíciójából $0 < \sin x < x$ (1), így teljes indukcióval bizonyítható,

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ (2), azaz a sorozat korlátos, és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1} < a_n$ azaz a sorozat monoton csökkenő. Így (a_n) konvergencia és a definíció összefüggéséből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{-ra fenn kell álljon } \sin A = A \quad (3).$$

Miután (2)-ből $0 \leq A \leq \frac{\pi}{2}$ így (1) miatt csak $A = 0$ eléghető ki (3)-at.)

B. (1.) Konvergencia.

(Az $\arctg \frac{x}{1+x}$ függvény a 19. pl. 2. a) alapján monoton növekedő $(0, \infty)$ -ben.

Másrészt $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg \frac{x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$. Ha monoton növekedő függvénynek létezik véges határértéke a végtelenben akkor az felső korlátja, így $\forall x > 0$ esetén

$$0 < \arctg \frac{x}{1+x} \leq \frac{\pi}{4}.$$

Fentiekből teljes indukcióval bizonyítható, hogy (a_n) monoton növekedő és felülről korlátos).

2. Konvergencia.

(3.) Nem konvergencia.

($\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n-1}| = e$ így nem lehet Cauchy sorozat).

81. [a] Miután $f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezett folytonos függvényekből összeadással, kivonással, szorzással, osztással és összetett függvényképzéssel áll elő, így értelmezett és folytonos minden olyan $x \in \mathbb{R}$ helyen, ahol a nevezőkben szereplő függvények nem nullák, tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ és f folytonos D_f -en.

A függvény tehát nem folytonos az $x = -1$ pontban.

α) A függvény viselkedése $x = -1$ -ben.

$$\text{Mivel } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-2x^2}{1+x} = -\infty \text{ (lásd 68. pl. 1.), ezért az}$$

összetett függvény határértékére vonatkozó tétellel, felhasználva, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th } x = -1$, adódik, hogy

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(1 + \operatorname{th} \frac{1-2x^2}{1+x} \right) = 0 .$$

Hasonlóan adódik, hogy $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \operatorname{th} \frac{1-2x^2}{1+x} \right) = 2 .$

Azaz $f(x)$ -nek $x = -1$ -ben ugrása van.

β) A függvény viselkedése a végtelenben.

Az eddigiekhez hasonlóan összetett függvény határértékére vonatkozó tételt felhasználva:

$$\frac{1-2x^2}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty, \text{ így}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \text{ Ugyanígy kapható, hogy } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 .$$

b) 1. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$ ugrás,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 .$$

2. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$ megszüntethető szakadás, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 .$$

2. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos, ha $x \neq k$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Az $x = k$ helyeken ugrás:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k) = k, \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = k-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty .$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos, ha $x \neq k$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Az $x = k$, $k \neq 0$ helyeken ugrás:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = 1 - \frac{1}{k}.$$

Az $x = 0$ -ban másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

c) 1. $D_f = [0, \infty)$, folytonos $(0, \infty)$ -en és $x = 0$ -ban jobbról folytonos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ nem létezik.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ nem létezik.}$$

2. 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f -en.

$x = 2$ -ben másodfajú szakadás.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f -en.

$x = 2$ -ben másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, folytonos D_f -en.

$x = \pm 2$ -ben másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f -en.

$x = 2$ -ben másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty .$$

5. 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f -en.

$x = 2$ -ben megszüntethető szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty .$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f -en.

$x = 2$ -ben ugrás:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 , \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2 ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty .$$

6. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \setminus \{9\}$,

folytonos $D_f \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$ -ban jobbról folytonos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} , \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ nem létezik;} ,$$

$x=9$ -ben másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \infty ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ nem létezik.}$$

7. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \setminus \{1\}$, folytonos $D_f \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$ -ban jobbról folytonos:

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ nem létezik.}$$

$x = 1$ -ben megszüntethető szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ nem létezik.}$$

8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, folytonos, D_f -en, $x=1$ -ben megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -8$;

$x = 2$ -ben másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

9. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \setminus \{2\}$, folytonos $D_f \setminus \{1\}$ -en, $x = 1$ -ben jobbról folytonos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ nem létezik.}$$

$x = 2$ -ben megszüntethető szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ nem létezik.}$$

10. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, folytonos D_f -en.

$$x = 2\text{-ben ugrás: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1.$$

$x = 3$ -ban másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

d) 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$.

$x = 1$ -ben ugrás:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} .$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, folytonos D_f -en.

$x = \pm 1$ ugrás:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$x = 1$ -ben másodfajú szakadás:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nem létezik.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ nem létezik.

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

$(|x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}| \leq \frac{\pi}{2} \cdot x$ tetsz. $x \neq 0$ esetén;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

6. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$, folytonos D_f -en.

$x = \ln 2$ -ben másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

(a nevező e^x másodfoku kifejezése)

7. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty.$$

$x = 2$ -ben megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

9. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left((0,1) \cup \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right)$, folytonos $D_f \setminus \{0,1\}$ -en.

$x = 0$ -ban balról és $x = 1$ -ben jobbról folytonos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \frac{3}{\pi}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{3}{2\pi} \quad \text{és}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{nem létezik.}$$

$x = -\frac{1}{2}$ -ben másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{6}{\pi}.$$

10. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, folytonos D_f -en.

$x = 1$ -ben megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

11. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\ln \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}} \right\} \right) \right)$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{nem létezik.}$$

$x_k = \frac{1}{\ln \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}}$ helyeken ($k=1, 2, 3, \dots$) másodfajú szakadás:

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \operatorname{tg} 1.$$

12. Nincs értelmezve az $x_k = (4k-1) \frac{\pi}{4}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ és az

$$y_k = (2k-1) \frac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ pontokban.}$$

Mindentűt másutt értelmezve van és folytonos.

Az x_k pontokban másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) = -\infty.$$

Az y_k pontokban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow y_k} f(x) = 0$.

A $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

13. $D_f = (-1, 1)$, folytonos D_f -en.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

és $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ nem létezik.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

14. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos D_f -en. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos $D_f \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$ -ban megszüntethető szakadása van: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

16. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

17. 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban másodfajú szakadás: nem létezik sem

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ sem $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

18. Mindentütt értelmezett, ahol $x \neq (4k-1) \frac{\pi}{2}$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Értelmezési tartományán folytonos.

Az $x_k = (4k-1) \frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontokban megszüntethető szakadása van: $\lim_{x \rightarrow x_k} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

$(h(x) = f(x)^{g(x)})$ esetén $D_h = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ és

$h(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

19. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az $x_k = \frac{1}{k}$ $k = \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$ helyek kivételével folytonos.

Az $x=0$ -ban másodfajú szakadás:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nem létezik.

Az x_k helyeken ugrás: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2n}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2n+1}^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2n+1}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2n}^+} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

(20) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, folytonos D_f -en.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nem létezik,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

(lásd 18. Utm.)

21. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban ugrása van: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

22. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban ugrása van: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{e}$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

23. Az $x_k = \frac{1}{k\pi}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, és az $x = 0$ helyek kivételével mindenütt értelmezve van és folytonos. Az $x = 0$ helyen másodfajú szakadás: nem létezik a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \quad \text{az } x_k = \frac{1}{k\pi} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ helyeken}$$

másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{(2n+1)\pi^-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2n\pi^+}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{(2n+1)\pi^+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2n\pi^-}} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

24. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos D_f -en.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ és } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ nem létezik.}$$

- (25) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$$x = 0\text{-ban másodfajú szakadás: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

$$(x \neq 0 \text{ esetén } f(x) = \frac{2}{1 - \frac{\sin x}{x}} \text{ és } \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1)$$

26. Az $x = 0$, $x = -1$ és $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ helyek kivételével értelmezett és folytonos. Az $x = 0$ -ban megszüntethető szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Az $x = -1$ -ben másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

Az $x_k = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontokban másodfajú szakadás:

ha $k \geq 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) = \infty$,

ha $k < 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

27. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, folytonos D_f -en.

Az $x = -2$ -ben másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

Az $x = 0$ -ban másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

Az $x = 2$ -ben megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

28. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban ugrás: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{9}{5}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{1}{5}$.

$x = 1$ -ben ugrás: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{5}{3}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$.

29. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

30. $D_f = [1 - \sqrt{e}, 1 + \sqrt{e}] \setminus \{1\}$, folytonos az $(1 - \sqrt{e}, 1 + \sqrt{e}) \setminus \{1\}$ -ben. A D_f két végpontján jobbról, illetve balról folytonos, mivel nem létezik a

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow (1 - \sqrt{e})^-} f(x) \text{ és a } \lim_{x \rightarrow (1 + \sqrt{e})^+} f(x), \text{ és } \lim_{x \rightarrow (1 - \sqrt{e})^+} f(x) = \\ & = \lim_{x \rightarrow (1 + \sqrt{e})^-} f(x) = f(1 - \sqrt{e}) = f(1 + \sqrt{e}) = 0. \end{aligned}$$

$x = 1$ -ben másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$.

A $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

- e) 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos a $D_f \setminus \{-1, 0, 1\}$ -en.

$x = -1$ -ben másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

$x = 0$ -ban ugrás: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = e$.

$x = 1$ -ben ugrás: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$.

$x = 2$ -ben másodfajú szakadás $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \setminus \{3\}$, folytonos a $D_f \setminus \{0, 1, 3\}$ -ban.

$x = 0$ -ban jobbról folytonos, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nem létezik.

$x = 1$, $x = 3$ -ban megszüntethető szakadás:

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

③. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, \pi\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$ -ban ugrás: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

$x = \pi$ -ben másodfajú szakadás:

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$ nem létezik, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

($\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$ -hez: $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin \frac{1}{x - \pi}$ nem létezik)

④. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, folytonos D_f -en.

$x = -1$ -ben másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{\sin(\pi(-1))}{(-1)^2 - (-1)} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$.

$x = 0$ -ban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\pi$.

$x = 1$ -ben másodfajú szakadás:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\pi$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

($\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ -hez: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{x - x}$ meghatározható $y = x - 1$ helyet-

tesztéssel:

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$\frac{\sin \pi x}{x(x-1)} = \frac{\sin \pi (y+1)}{y(y+1)} = \frac{\sin \pi y \cdot \cos \pi + \sin \pi \cdot \cos \pi y}{y(y+1)} =$$

$$= - \frac{\sin \pi y \cdot 1}{y \cdot y+1})$$

5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, folytonos $D_f \setminus \{-1, 2\}$ -n.

$$x = -1\text{-ben ugrás: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$x = 2\text{-ben ugrás: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{\pi}{4} - 2.$$

$x = 3$ -ban másodfajú szakadás:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

6. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos, ha $x = k$, $k = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$; mindenütt másutt másodfajú szakadás; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

7. $D_f = \mathbb{R}$.

Az $x = k$, $k = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$ helyek kivételével mindenütt folytonos, az $x_k = k$, $k = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$ helyeken másodfajú szakadása van: $\lim_{x \rightarrow x_k} f(x) = \infty$.

A $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nem létezik.

8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, folytonos $D_f \setminus \{0, 2\}$ -n.

$$x = -1\text{-ben ugrás: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{3}.$$

$x = 0$ -ban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$x = 1$ -ben megszüntethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

$x = 2$ -ben ugrás:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\frac{\pi}{6}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

f) 1. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x > -1 \}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2}(x-1) & x > 1, \end{cases}$$

amiből látható, hogy f folytonos D_f -en, $x = -1$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ nem létezik;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ nem létezik.}$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & |x| > 1, \end{cases}$$

amiből: f folytonos $D_f \setminus \{1\}$ -en.

$x = -1$ -ben és $x = 1$ -ben ugrás:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. $D_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} ,$$

amiből látható, hogy f folytonos $D_f \setminus \{0\}$ -n,

$x = 0$ -ban ugrás: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

4. $D_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases} ,$$

amiből látható, hogy f folytonos D_f -en.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

82. 1. $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$

4. $f(x) = \ln(-x^2)$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{\cos^2 \pi x - 1}}{\sqrt{x}}$

5. $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{x-a}}$

3. $f(x) = \sqrt{e^{-(x-a)^2} - 1}$

2. 1. $f(x) = \sin \frac{1}{x-a} \cdot e^{\frac{1}{x-a}}$

β) $f(x) = \sin e^{-\frac{1}{x-x_0}}$

2. α) $f(x) = \sin e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}$

3. α) $f(x) = \cos x$

β) $f(x) = e^{-x} \cos x$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

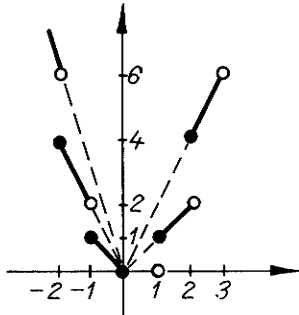
7. a) $D_{\text{fog}} = \mathbb{R}$ -en folytonos.

b) $D_{\text{fog}} = \mathbb{R}$,

folytonos az $x = -1, x = 0, x = 1$ pontokban, mindenütt másutt másodfajú szakadása van.

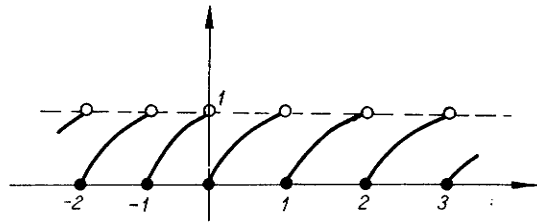
c) $D_{\text{fog}} = \mathbb{R}$ -en folytonos ($(\text{fog})(x) \equiv x$)

86. a) 1.



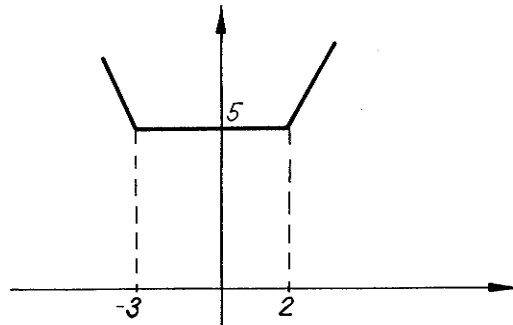
7. ábra

2.



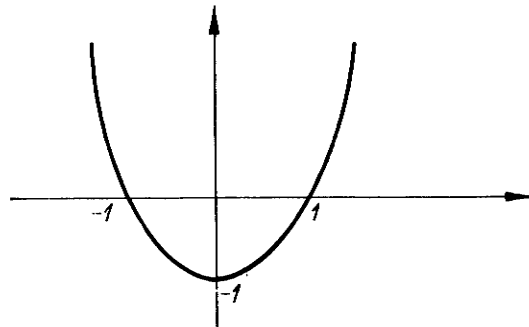
8. ábra

b) 1.



9. ábra

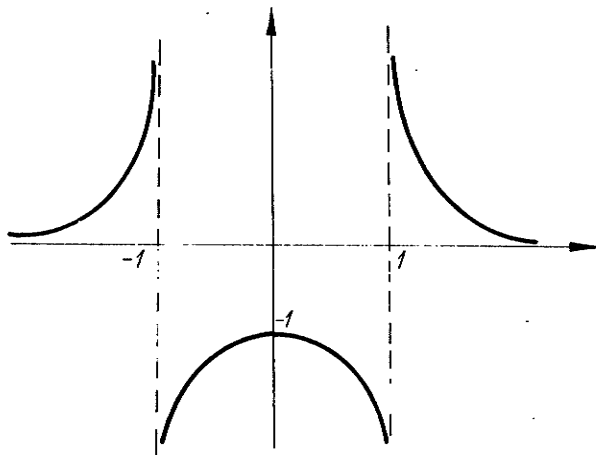
α)



10. ábra

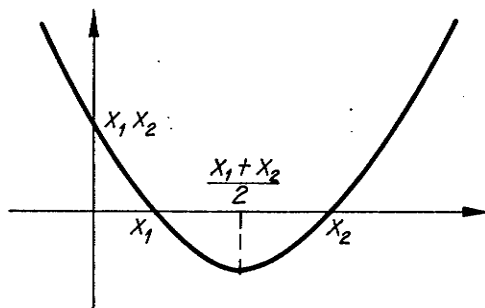
EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

β)



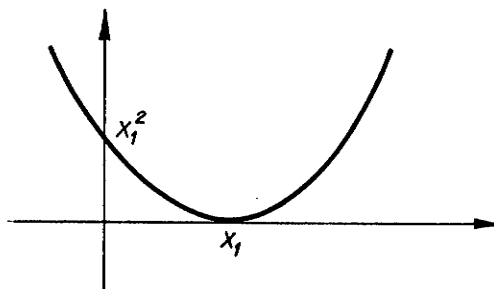
11. ábra

③. 1. ha $x_1 \neq x_2$, pl. $0 < x_1 < x_2$:



12. ábra

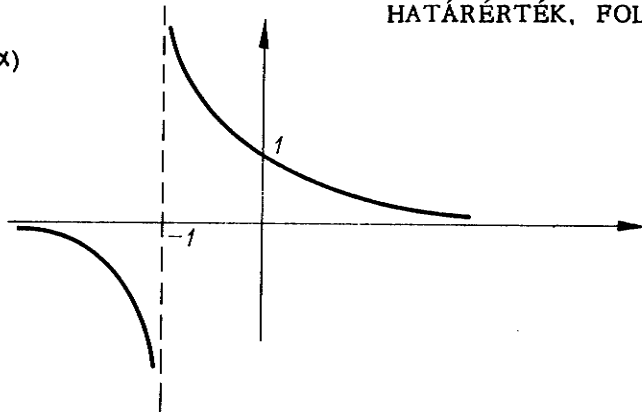
$$(x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + x_1 \cdot x_2$$



13. ábra

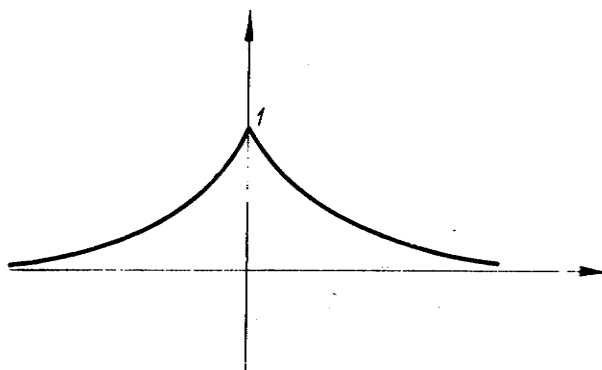
EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

4. α)



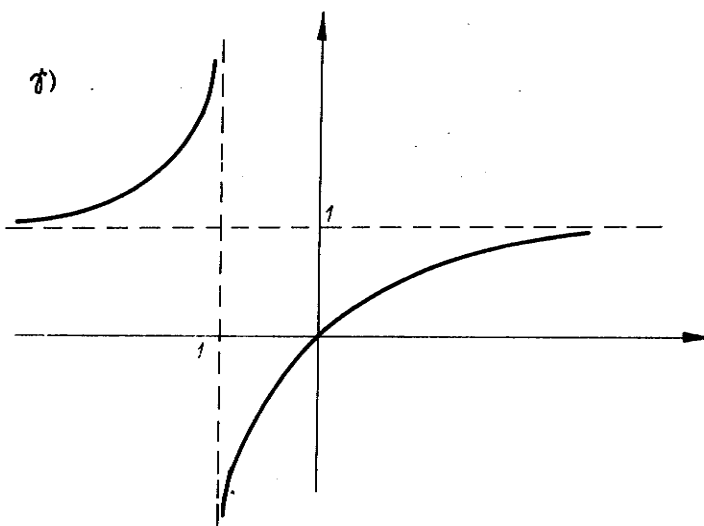
14. ábra

β)



15. ábra

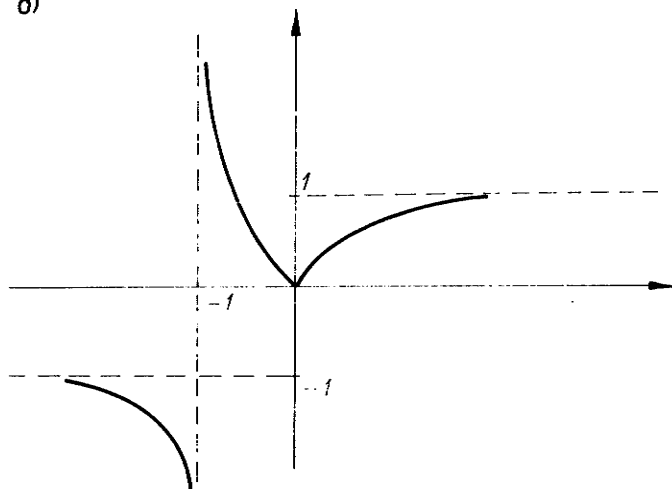
γ)



16. ábra

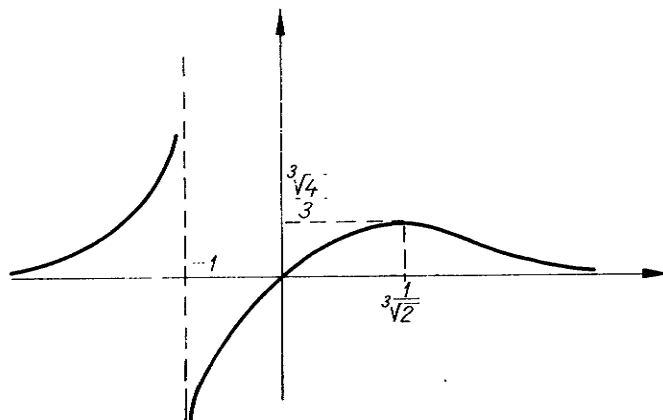
EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

δ)



17. ábra

5.)



18. ábra

$$\text{(Ha } x, y \in D_f: f(x) - f(y) = \frac{(x-y)(1-xy(x+y))}{(x^3+1)(y^3+1)})$$

így leolvasható, hogy ha $x > y$, akkor

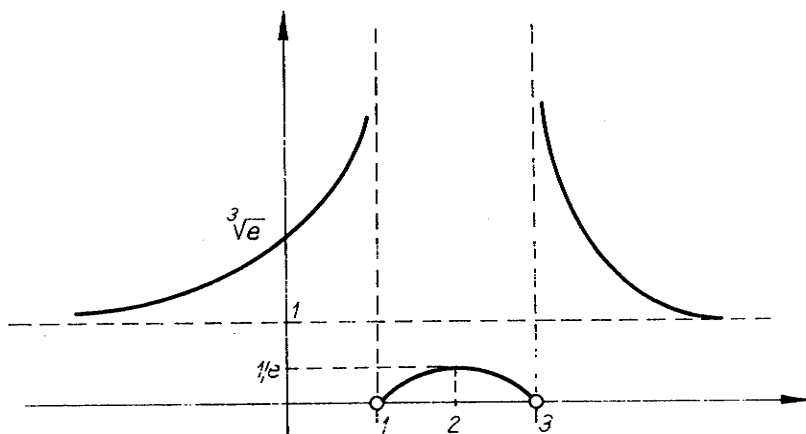
EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. ha $x_1 = x_2$, pl. $x_1 > 0$:

$$f(x)-f(y) \begin{cases} > 0 & x, y < -1 \\ > 0 & -1 < x, y \leq 0 \\ > 0 & 0 < x, y \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ < 0 & x, y \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \end{cases}$$

amiből $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \in D_f$ miatt $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ lokális maximum)

c) ①.

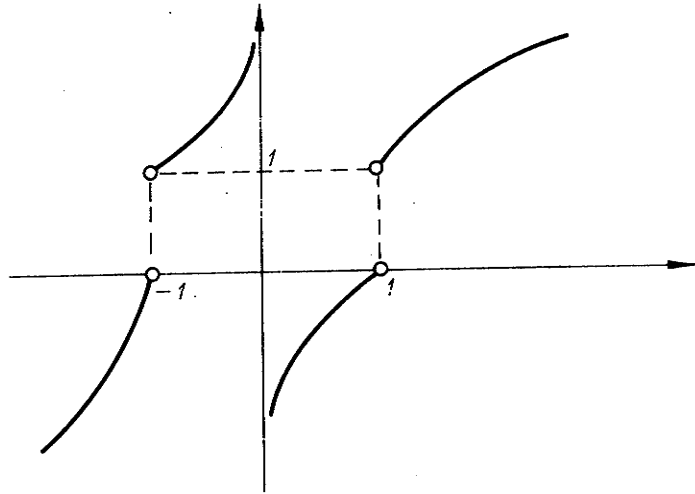


19. ábra

(lokális maximum helyéhez: lásd b) 3.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2.



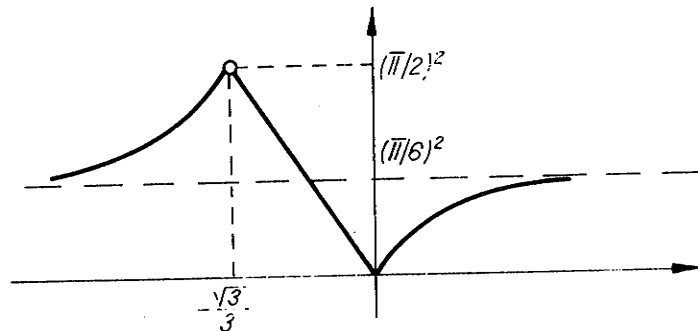
20. ábra

($g(x) = \frac{x}{1-x^2}$ monotonitásához:

$$\text{ha } x, y \in D: f(x) - f(y) = (x-y) \cdot \frac{1+xy}{(1-x^2)(1-y^2)}$$

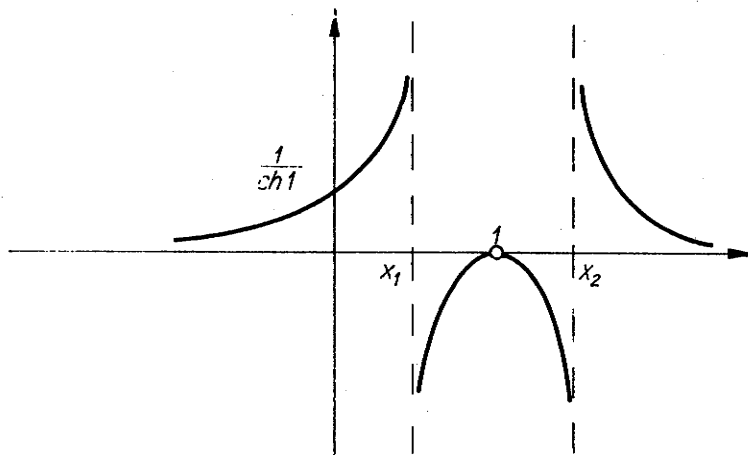
amiből ha $x > y$: $f(x) - f(y) > 0$ akkor,
ha $x, y < -1$ vagy ha $-1 < x, y < 1$ (ekkor $-1 < x \cdot y < 1$
is fennáll) vagy ha $x, y > 1$)

3.



21. ábra

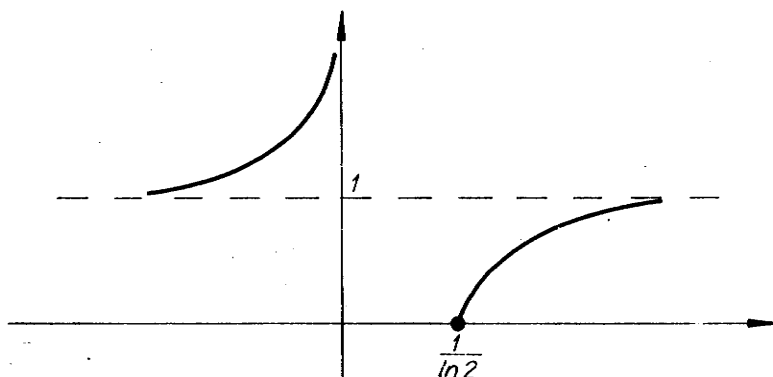
4.



22. ábra

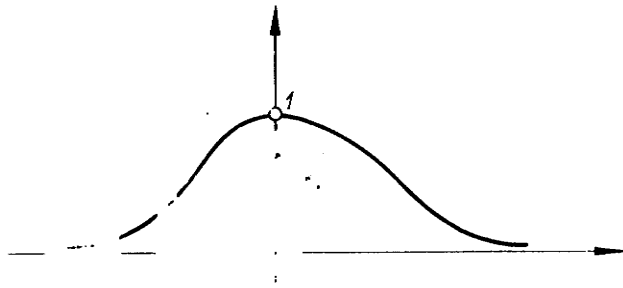
(Mivel $g(x) = ch(x-1) + \ln(x-1)^2$ folytonos $[0,1)$ -en és $g(0) = ch(-1) > 0$, valamint $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$, így van olyan $0 < x_1 < 1$, amelyre $g(x_1) = 0$. Ugyanígy van olyan $1 < x_2 < \infty$, amelyre $g(x_2) = 0$. A monoton szakaszokhoz: $ch(x-1)$ és $\ln(x-1)^2$ azonos intervallumokon azonos jelleggel szigorúan monotonok.)

5.



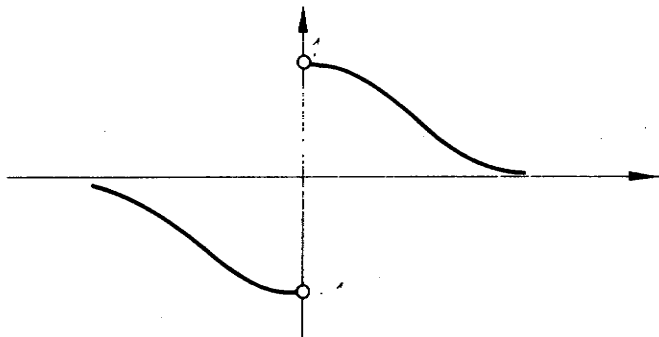
23. ábra

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
 HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG
 6. α)



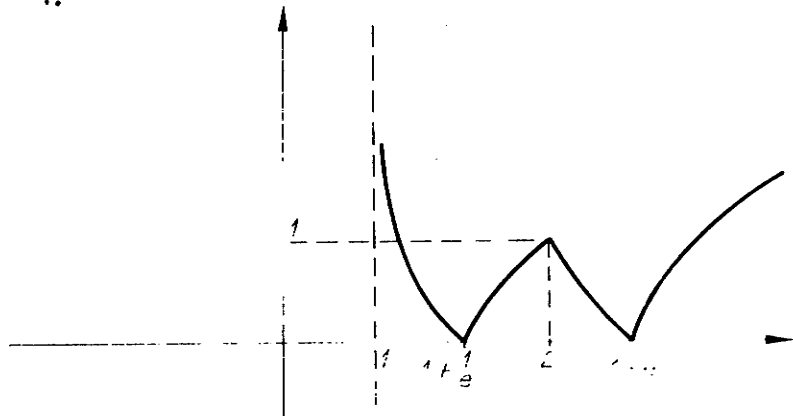
24. ábra

β)



25. ábra

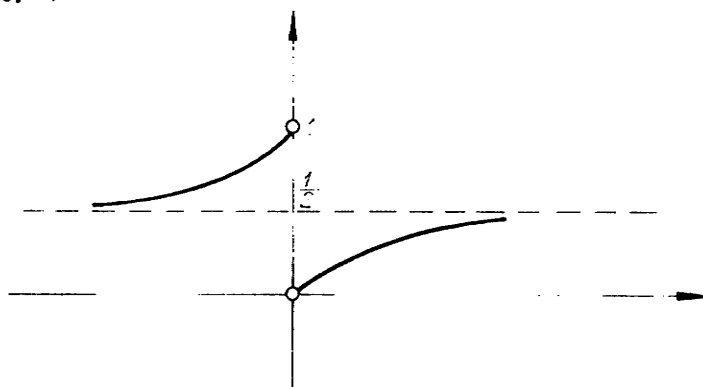
7.



26. ábra

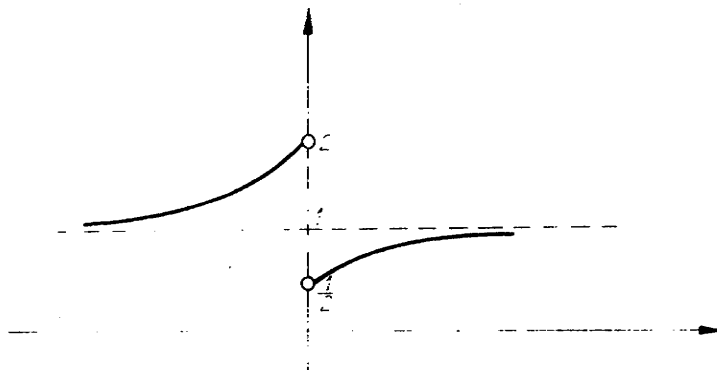
EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

8. α)



27. ábra

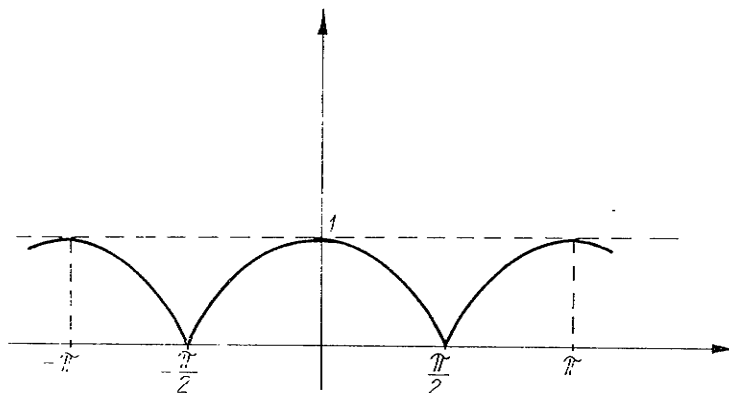
β)



28. ábra

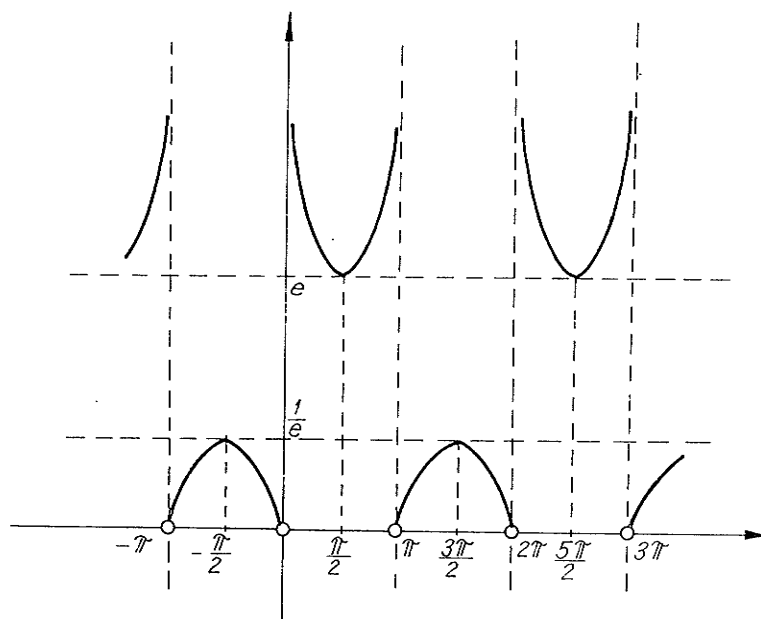
EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
 HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

9.



29. ábra

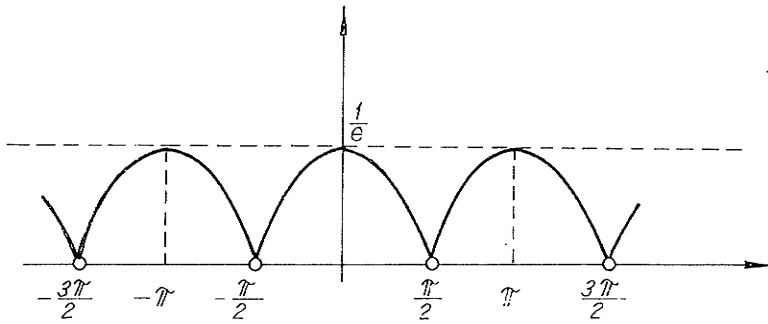
10. α)



30. ábra

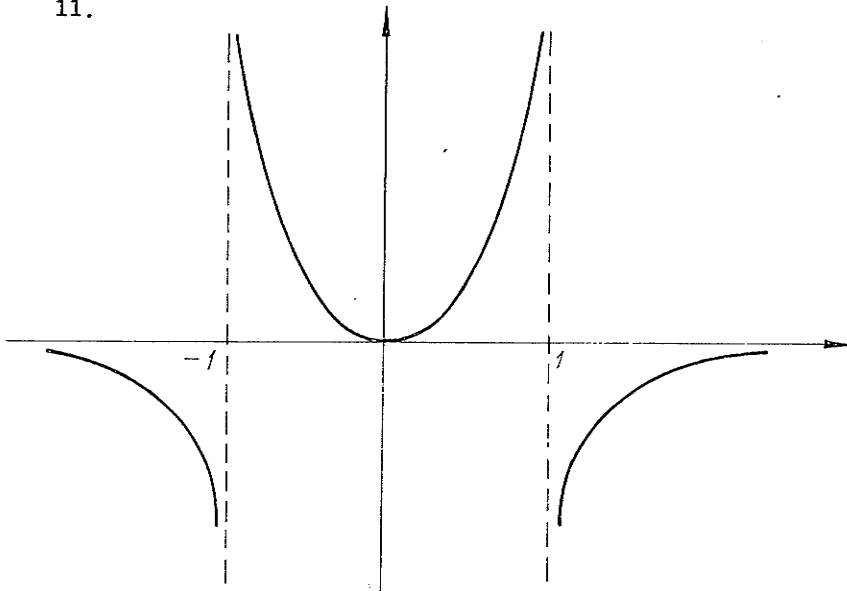
EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
 HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(β)



31. ábra

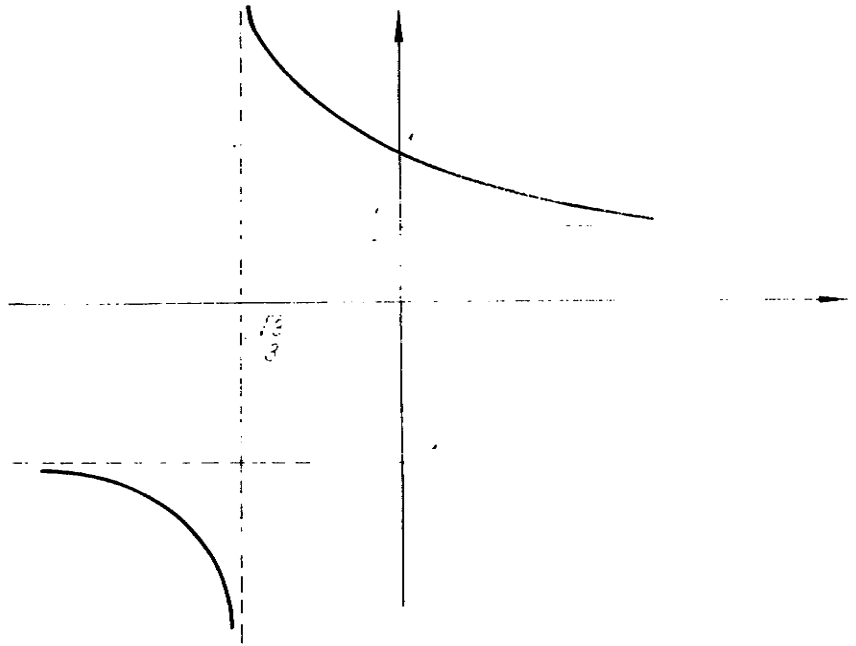
11.



32. ábra

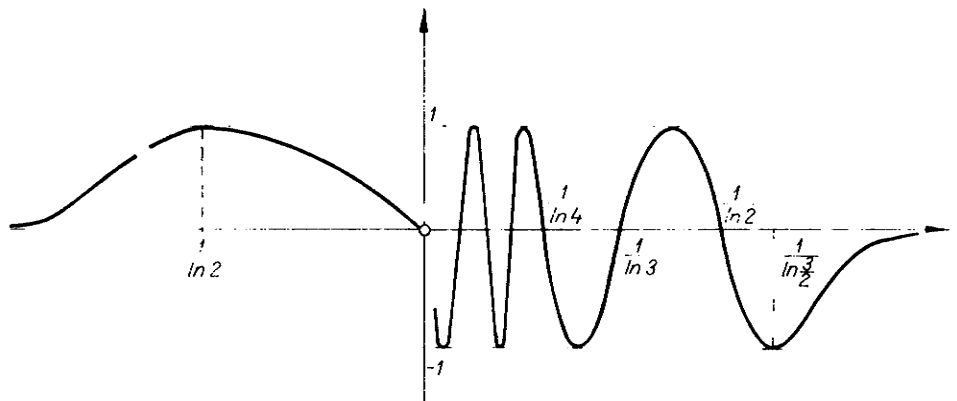
EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

12.



33. ábra

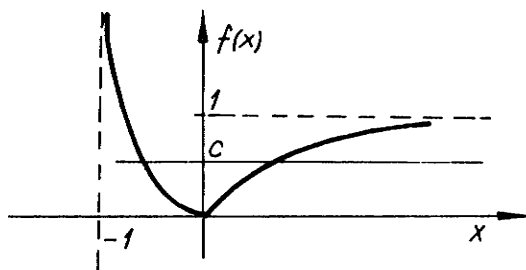
13.



34. ábra

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

87. 1. a) Tetszőleges $c < 0$ esetén pontosan egy megoldás, $c \geq 0$ esetén nincs megoldás.
 $(f(x) = -(x+1) \ln x$ szigorúan monoton és folytonos $(1, \infty)$ -en, és $R_f = (-\infty, 0)$)
- b) Tetszőleges $0 < c < 1$ esetén pontosan két megoldás; $c = 0$ és $c > 1$ esetén pontosan egy megoldás; $c < 0$ esetén nincs megoldás.
 $(f(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \ln x$ $(-1, \infty)$ -en folytonos; $(0, \infty)$ -en szigorúan monoton növekvő és $f((0, \infty)) = (0, 1)$, valamint $(-1, 0)$ -n szigorúan monoton csökkenő, $f((-1, 0)) = (0, \infty)$ és $f(0) = 0$;



35. ábra

2. a) 1. Van ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ és f folytonos $(-\infty, \infty)$ -en.)
2. Nincs ($f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)
- b) Van (f folytonos, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2^{n-1} - 1 \geq 0$)
- c) Van ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$, f folytonos (a, b) -n.)

88. 1. a) $(-2, 2)$ -ben lokális minimum.
 $(f(-2) = 11, f(2) = 19, f(0) = -1$, tehát $f(0) < f(-2)$,
 $f(0) < f(2)$, és valahol felveszi minimumát $[-2, 2]$ -ben.)
- b) Nincs ($f(x)$ szigorúan monoton \mathbb{R} -en)
- c) $(1, 2)$ -ben lokális minimum.

(A $g(x) = x^5 - 2x - 1$ függvényre
 $g(1) = -2 < 0$,
 $g(2) = 27 > 0$,

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

így van nullahelye $(1,2)$ -ben, $f(x)$ -nek van nullahelye $x = 1$ -ben, így $(1,2)$ -ben kell legyen lok. szélsőérték. Ez minimum (vagy ha több van" szerepelnie kell közöttük minimumnak is), mert g folytonos, $g(1) < 0$ miatt van $x = 1$ -nek olyan S környezete, hogy $g(x) < 0$, ha $x \in S$, így ha $x > 1$, $x \in S$, akkor $f(x) < 0$.)

- d) $(-1,1)$ -ben lokális minimum, $(1,2)$ -ben lokális maximum, $x = 2$ -ben lokális minimum.

$$(f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)^2 + 1)$$

2. a) Nem. $(f(x) > 0 \quad \forall x \in I, \inf_{x \in I} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0)$

b) Igen ($x = \pi$ -ben)

c) Nem (lásd a))

d) Igen ($f(x)$ folytonos az I zárt intervallumon)

89. 1. a) Egyenletesen folytonos. ($[0, 4\pi]$ -ben folytonos és 4π szerint periodikus)
b) Nem egyenletesen folytonos.

$$(\text{Ha } x_k = \sqrt{k}\pi, \quad y_k = \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2}}, \text{ akkor}$$

$$|x_k - y_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0; \quad x_k, y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty, \quad |\sin x_k^2 - \sin y_k^2| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N})$$

2. a) Egyenletesen folytonos

$$(g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad [0,1] \text{-ben}$$

folytonos, így itt egyenletesen folytonos, de akkor egyenletesen folytonos a $(0,1) \subset [0,1]$ -ben, és $f(x) = g(x)$, ha $x \in (0,1)$)

- b) Nem egyenletesen folytonos (Nem folytonos: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$)

3. a) Nem egyenletesen folytonos

$$(\text{Ha } x_k = \frac{1}{k}, \quad y_k = \frac{2}{2k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ akkor}$$

$$x_k, y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{és} \quad \left| \sin \frac{\pi}{x_k} - \sin \frac{\pi}{y_k} \right| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N})$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

b) Egyenletesen folytonos.

$$(g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ folytonos } [0,1] \text{-ben, így itt}$$

egyenletesen is folytonos, tehát $(0,1) \subset [0,1]$ -ben is, és

$$f(x) = g(x), \text{ ha } x \in (0,1).$$

90. 1. a) 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0,1)$ -en

2. $f(x) = x$ $(0,1)$ -en

3. $f(x) = \sin x$ $(-\pi, \pi)$ -n

b) $f(x) = \text{sign } x$ $(-1,1)$ -en

c) 1. $f(x) = 1 - e^{-x}$ $[0, \infty)$ -en

2. $f(x) = (1 - e^{-x}) \cdot \sin x$ $[0, \infty)$ -en

2. a) Ilyen $f(x)$ nincs (lásd 100 pl. 2.)

b) $f(x) = x - [x]$ tetszőleges olyan $[a,b]$ -n, melyre valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n, n+1 \in [a,b]$

3. a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0,1)$ -en

b) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ $(0,1)$ -en (lásd 89. pl. 3. a) Utm.)

c) $f(x) = \text{sign } x$ $[0,1]$ -en

d) $f(x) = x$ $[0, \infty)$ -en

e) $f(x) = \sin x^2$ $[0, \infty)$ -en (lásd 89. pl. 1. b) Utm.)

91. (2.) Jelöljük $H = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ és (π) -gal azokat az eseteket, melyben

H értéke függ a konkrét f, g választásától.

a) Miután $f(x) > 0$, ha $x \in S$, így $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ miatt $a \geq 0$ mindig.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
GÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$1. \quad H = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 0 & a < 1 \\ (\pi) & a = 1 \end{cases}$$

$$2. \quad H = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ \infty & a < 1 \\ (\pi) & a = 1 \end{cases}$$

$$3. \quad H = \begin{cases} a^b & a \neq 0 \quad b \neq 0 \\ 0 & a = 0 \quad b > 0 \\ \infty & a = 0 \quad b < 0 \\ 1 & a \neq 0 \quad b = 0 \\ (\pi) & a = 0 \quad b = 0 \end{cases}$$

$$b) \quad H = \begin{cases} \infty & b > 0 \\ 0 & b < 0 \\ (\pi) & b = 0 \end{cases}$$

∞) $h(x) = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ és e^x mindenütt folytonos, így $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$

meghatározható $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln f(x)$ segítségével, felhasználva

ennek kiszámításához 1.-et.

A (π) esetek. Legyen $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tetszőleges, és $x_0 = 0$

- Az a) 1. esethez legyen $f(x) = c^{x^2}$ és $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{Ekkor } a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} c^{x^2} = 1,$$

$$\text{és } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

$$\text{és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (c^{x^2})^{\frac{1}{x}} = c, \text{ ami függ } c\text{-től.}$$

- Az a) 2. esethez legyen $f(x) = c^{-x^2}$ és $g(x) = -\frac{1}{x}$.

Ugyanúgy ahogy az előbb, kapjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = c$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

- Az a) 3. esethez legyen $f(x) = \left(\frac{1}{1+c^2}\right)x^{\frac{1}{2}}$ és $g(x) = x^2$.

$$\text{Ekkor } a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+c^2}\right)x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\text{és } b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

$$\text{és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left(\frac{1}{1+c^2}\right)^{x^2} \right]^{x^2} = \frac{1}{1+c^2}, \text{ függ } c\text{-től.}$$

- A b) esethez: hasonlóan az előbbiekhöz, legyen

$$f(x) = (1+c^2)^{\frac{1}{x^2}} \text{ és } g(x) = x^2.$$

Ugyanugy, ahogy az előbb, kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

$$\text{és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = 1+c^2, \text{ függ } c\text{-től.}$$

92. (1.) a) 1. Létezik az $s = \sup_{x \in [a, \infty)} f(x)$, melynek definíciójából, és a

monoton növekedésből: $\forall \varepsilon > 0$ -hoz van $x \in [a, \infty)$, hogy
tetsz. $y > x$ esetén $s - \varepsilon < f(x) \leq f(y) \leq s$

2. Mivel f alulról mindenképpen korlátos: $f(x) \geq f(a)$

$\forall x \in [a, \infty)$, így felülről nem korlátosság és monotonitás
miatt: $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén van $x \in [a, \infty)$, hogy minden
 $y > x$ esetén $f(y) \geq f(x) > K$.

b) Igen 1.-ben pont ezt bizonyítottuk.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. a) 1. Ha az (a, b) -n monoton növekvő f függvény korlátos, akkor léteznek a véges $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ határértékek.
2. Ha f alulról nem korlátos, akkor $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$,
ha f felülről nem korlátos, akkor $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$.

93. (1.) a) Tegyük fel: létezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Ekkor

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A|.$$

b) Tegyük fel: fennáll a kívánt tulajdonság, és legyen

$(x_n) \subset (a, b)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$ tetszőleges^(*), ekkor

$(f(x_n))$ Cauchy sorozat, és nem létezik olyan

$(x_n), (y_n) \subset (a, b)$, amelyre $x_n \neq x_0$, $y_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$,

$y_n \rightarrow x_0$, és amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$, mert

akkor

$$z_n = \begin{cases} x_n & n = 2k \\ y_n & n = 2k+1 \end{cases} \quad \text{-re}$$

$z_n \rightarrow x_0$, $z_n \neq x_0$ de $(f(z_n))$ nem konvergens.

2. Például $+\infty$ -re: $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ esetén a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ véges határérték akkor és csak akkor létezik, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x_1, x_2 > K$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

(*) Itt és a továbbiakban is használjuk az alábbi rövidített írásmódot:
 $(x_n) \subset H$ jelöli a következő állítást: (x_n) olyan sorozat, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in H$

94. 1. a) Igaz.

b) Nem, hiszen ha pl. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $g(y) = y$, $x_0 = 0$,

akkor $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$, de nem létezik

$\lim_{y \rightarrow 0} f(g(y))$.

2. Nem, hiszen

pl. ha $f(x) = \sin \pi x$, $g(y) = \left[\frac{1}{|y|} \right]$, $y_0 = 0$,

akkor $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \infty$, nem létezik $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, de létezik a

$\lim_{y \rightarrow 0} f(g(y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin \pi \cdot \left[\frac{1}{|y|} \right] = 0$.

3. Van $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow \infty$ hogy nem létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ véges, vagy végtelen határérték (1).

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, g folytonos: van $K \in \mathbb{R}$, $x_0 > a$, hogy az -

(x_0, ∞) intervallumon g felvesz minden K -nál nagyobb értéket, tehát van $(y_n) \subset (x_0, \infty)$, hogy valamely küszöbindextől kezdve

$g(y_n) = x_n$;

g folytonossága és $x_n \rightarrow \infty$ miatt $y_n \rightarrow \infty$, és (1)-től

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(y_n))$ véges vagy végtelen nem létezik.

$n \rightarrow \infty$

4. Nem: $g(x)$ a 0 minden környezetében felveszi a 0-t az

$x = \frac{1}{k\pi}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ helyeken. Valóban:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ($|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$),

de mivel

$f(g(x)) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \quad x \neq \frac{1}{k\pi} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ 1 & \end{cases}$

egyébként, így nem létezik $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$,

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

hiszen ha $x_k = \frac{1}{k\pi} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, akkor

$\lim_{k \rightarrow \infty} f(g(x_k)) = 1$, és ha $y_k = \frac{1}{(4k+1) \cdot \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, akkor

$\lim_{k \rightarrow \infty} f(g(y_k)) = 0$ ($f(g(y_k)) = y_k$).

5. Ekvivalensek egymással: az Átviteli elvvel bizonyítható az összetett függvények határértékére vonatkozó tétel, míg előbbi az utóbbinak azon speciális esete, mikor $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ($y_0 = \infty$) alakú függvényekre szorítkozunk.

95. Van $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x) - A| < |A|$, ha $x > K$,

azaz $|f(x)| < 2|A|$ ha $x > K$ (1).

Ha $K < a$: készen vagyunk.

Ha $K > a$: f folytonos $[a, K]$ -n így ott korlátos, (1)-ből tehát korlátos $[a, K] \cup (K, \infty) = [a, \infty)$ -en is.

96. 1. Csak $\varphi(x)$ -re.

Könnyen látható, hogy tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén, ha $a < b$, $c < d$, akkor $\min\{a, c\} < \min\{b, d\}$, hiszen $\min\{a, c\} \leq a < b$ és $\min\{a, c\} \leq c < d$.
Másképp ugyanígy látható, hogy tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ -re

$\min\{a+b, c+b\} \leq \min\{a, c\} + b$, hiszen

$\min\{a+b, c+b\} \leq a+b$, $\min\{a+b, c+b\} \leq c+b$, így

$\min\{a+b, c+b\} - b \leq a$, $\min\{a+b, c+b\} - b \leq c$.

Ezért mivel f, g folytonosságából $\forall \varepsilon > 0$ esetén van $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$,

$g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$, így

$\min\{f(x_0), g(x_0)\} - \varepsilon < \min\{f(x), g(x)\} < \min\{f(x_0), g(x_0)\} + \varepsilon$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. Csak $m(x)$ jobb oldali folytonosságára:

Legyen $x_0 \in (a, b]$ (az $x_0 = a$ eset triviális), f felveszi

infinumát $[a, x_0]$ -on: van $z \in [a, x_0]$, hogy $f(z) = m(x_0)$. Két eset van:

a) $z \in [a, x_0)$. Ekkor, ha $z < x < x_0$, mivel bővebb halmaz infimuma nem nagyobb és $z \in [a, x]$, ezért

$$f(z) = m(x_0) \leq m(x) \leq f(z), \text{ azaz } m(x_0) = m(x), \text{ ha } z < x < x_0.$$

b) $z = x_0$. Ekkor ugyanugy, ahogy az előbb $\forall x \in [a, x_0]$ -ra:

$$m(x_0) = f(x_0) \leq m(x) \leq f(x), \text{ de } f \text{ folytonos}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0), \text{ így } m(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} m(x_0).$$

97.

1. Belátjuk: f mindenütt folytonos, ugyanis $f(0) = f(0+0) =$

$= f(0)+f(0)$ miatt $f(0) = 0$, így, mivel ha $x \rightarrow x_0$, akkor

$(x-x_0) \rightarrow 0$, tehát $f(x-x_0) = f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$, azaz $f(x) \rightarrow f(x_0)$.

2. Belátjuk: f homogén, azaz $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén $f(cx) = c f(x)$;

ugyanis, egyrészt mivel $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, így

$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, másrészt ha $k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$f(kx) = f(x+x+\dots+x) = f(x)+\dots+f(x) = k \cdot f(x) \quad (1)$, amivel

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ esetén:

$$f(y) = f\left(k \cdot \frac{y}{k}\right) = k \cdot f\left(\frac{y}{k}\right), \text{ azaz } \frac{1}{k} f(y) = f\left(\frac{y}{k}\right). \quad (2).$$

(1)- és (2)-vel tetszőleges r racionális esetén $f(rx) = rf(x) \quad (3)$.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen, van $(r_n) \subset \mathbb{R}$,

$r_n \rightarrow c$, r_n racionális; mivel 1.-ből f mindenütt folytonos, így

(3)-mal $f(r_n x) \rightarrow f(cx)$, másrészt $r_n f(x) \rightarrow c f(x)$ és

$f(r_n x) = r_n f(x)$. Ezekkel $f(cx) = c f(x)$.

3. Legyen $x \neq 0$ 2.-vel $\frac{1}{x} \cdot f(x) = f\left(\frac{x}{x}\right) = f(1) = \text{const.}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

98. 1. Vagy $\forall x > 0$ esetén $f(x) > 0$, és van $y > x$, hogy $f(y) < f(x)$, vagy u. így, ha $\forall x > 0$ -ra $f(x) < 0$.
2. $\forall x \in (a, x_0)$ esetén van $y \in (x_0, b)$, hogy $f(y) > f(x)$ és van $z \in (x_0, y)$, hogy $f(z) > f(y)$.
3. Legyen pl. f monoton növény, és indirekte tegyük fel például, hogy van $x_0 \in [a, b)$, $\varepsilon > 0$, $x_n \rightarrow x_0$, $x_0 < x_n < b$, hogy $\forall N \in \mathbb{N}$ esetén van $n > N$, amelyre $f(x_n) - f(x_0) > \varepsilon$ (1).
Legyen $\varepsilon_0 = \min \{ f(b) - f(x_0), \varepsilon \}$, feltételből kell lennie $x \in [a, b]$ -nek, hogy

$$f(x_0) < f(x) < f(x_0) + \varepsilon_0 \leq f(x_0) + \varepsilon \quad (2),$$

és monoton növény miatt ekkor $x_0 < x$.

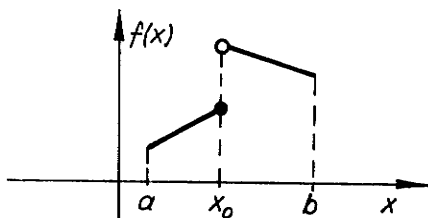
De $x_n \rightarrow x_0$, $x_n > x_0$ miatt van $N \in \mathbb{N}$, hogy tetszőleges $n > N$ esetén $x_0 < x_n < x$ (3).

Legyen $n > N$ olyan, mely kielégíti (1)-et, így (3)-ból monotonitással és (1)- illetve (2)-vel:

$$f(x_n) < f(x) < f(x_0) + \varepsilon < f(x_n),$$

ami ellentmondás. Ugyanigy vizsgálhatjuk a bal oldali határértékeket is.

99. 1. Nem, pl.



36. ábra

Ha f folytonos (a, b) -n akkor igaz, hiszen egyrészt $f(x) \leq f(x_0)$, ha $x \in (a, x_0]$ (1), másrészt, ha volna $y \in (x_0, b)$, hogy $f(y) > f(x_0)$, akkor Bolzano tétellel volna $x_0 < z < y$, amelyre $f(y) > f(z) > f(x_0)$, ellentmondásban f monoton csökkenésével (x_0, b) -n.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. a) Legyen x_0, y_0 két lokális minimumhely, $I = [x_0, y_0]$.

Ha f constans egy $I' \subset I$ intervallumon, készen vagyunk. Ha nem, akkor f felveszi I -n maximumát, melynek helye nem lehet sem x_0 , sem y_0 , mert itt lokális minimumok vannak.

b) f például monoton nő $[0, \infty)$ -en, ekkor $f(0) \leq f(x)$, ha $x > 0$ (2), és ha $y < 0$ $-y = x > 0$ jelöléssel

$$f(y) = f(-y) = f(x) \geq f(0) \quad (2) \text{ miatt.}$$

c) Van $k_1 > 0$, hogy $f(x) > f(0) \quad \forall x > k_1$,
és $k_2 < 0$, hogy $f(x) > f(0) \quad \forall x < k_2$. (3)

f $[k_1, k_2]$ -n felveszi minimumát egy x_0 -ban, így

$f(x_0) \leq f(x)$, ha $x \in [k_1, k_2]$, valamint (3)-mal ($0 \in [k_1, k_2]$)

$f(x_0) \leq f(0) < f(x)$, ha $x \notin [k_1, k_2]$.

3. a) 95. pl.-ből f korlátos, létezik $\sup_{x \in [a, \infty)} f(x)$,

$\inf_{x \in [a, \infty)} f(x)$, és van $(x_n), (y_n) \subset [a, \infty)$ konvergens, vagy végtelenhez divergáló sorozat, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup_{x \in [a, \infty)} f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \inf_{x \in [a, \infty)} f(x) \quad (4).$$

Ha $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty$, mivel létezik a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

így (4)-ből $\sup_{x \in [a, \infty)} f(x) = \inf_{x \in [a, \infty)} f(x)$,

azaz f constans, tehát minden pontban felveszi minimumát is, és maximumát is. Ha pl. $x_n \rightarrow x_0$, f folytonossága miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

azaz (4)-ből $\sup_{x \in [a, \infty)} f(x) = f(x_0)$.

b) Nem, pl. $f(x) = (1 - e^{-x}) \cdot \sin x$ $[a, \infty)$ -ben

4. a) $p(x) = (x - x_0)^{2k} \cdot p_{2k}(x)$,

$p_{2k}(x)$ folytonos, $p_{2k}(x_0) \neq 0$, így van x_0 -nak olyan S környezete, hogy $p_{2k}(x) > 0$, ha $x \in S$, vagy $p_{2k}(x) < 0$, ha $x \in S$. Másrészt $p(x_0) = 0$, és $(x - x_0)^{2k} > 0$, ha $x \neq x_0$, így vagy $p(x) \geq 0 = p(x_0)$, ha $x \in S$, vagy $p(x) \leq 0 = p(x_0)$, ha $x \in S$.

b) $p(x) = (x - x_0)^{2k+1} \cdot p_{2k+1}(x)$

Ugyanugy, ahogy a)-nál: van x_0 -nak egy olyan környezete, ahol p_{2k+1} előjeltartó, és $(x - x_0)^{2k+1}$ x_0 -ban előjelet vált.

5. f $[a, b]$ -n felveszi M maximumát és m minimumát, valamint minden közójük eső értéket, így $f([a, b]) = [m, M]$.

100

1. a) Legyen pl. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < c < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Ekkor a határérték

definíciójából: van $x, y \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) < c < f(y)$; $[x, y]$ -on alkalmazható a Bolzano tétel.

b) Ugyanugy látható be, ahogy a)

c) Ha $p(x)$ páratlan, akkor

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty, \quad \text{és lásd a).}$$

d) f $[a, b]$ -n felveszi M maximumát $x_1 \in [a, b]$ -ben, m minimumát $x_2 \in [a, b]$ -ben, így

$$f(x_2) = m = \frac{mn}{n} \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \frac{Mn}{n} = M = f(x_1),$$

és $[x_1, x_2]$ -re (vagy $[x_2, x_1]$ -re) alkalmazható a Bolzano-tétel.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

e) Legyen $x_1 \in [a, b]$ tetszőleges, és $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2} \quad \forall n > 1$.

Ha pl. $f(x_1) - x_1 > 0$ (1) - feltéve, hogy $x_n \leq f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

$(x_n) \subset [a, b]$ monoton növő sorozat; mivel korlátos, így konvergens és c határértékére fenn kell állnia: $c \in [a, b]$,

$c = \frac{c + f(c)}{2}$, amiből $c = f(c)$. Ha (2) nem áll fenn, akkor van

$x_m \in [a, b]$, hogy $f(x_m) - x_m < 0$, így (1)-ből Bolzano-tétellel: van $c \in [a, b]$, hogy $f(c) - c = 0$. A másik eset ugyanígy vizsgálható.

f) Ha lenne $x \in (0, \infty)$, hogy $f(x) > 0$, és $y \in (0, \infty)$, hogy $f(y) < 0$, akkor Bolzano-tétellel kellene lennie $z \in (0, \infty)$ -nek: $f(z) = 0$.

2. Ekvivalens a Bolzano-tétellel:

α) Bolzano tétel ennek azon speciális esete, mikor $I = [a, b]$ korlátos zárt intervallum és $x_1 = a, x_2 = b$.

β) Ha a Bolzano tétel fennáll, alkalmazható az $[x_1, x_2]$ zárt, korlátos intervallumra.

101. a) $x_0 \in (c, d) \cap (a, b)$, így van olyan $S = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq \varepsilon\}$

környezete, hogy $S \subset (c, d) \cap (a, b)$.

Legyen $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : -\varepsilon + x_0 \leq x \leq x_0\}$, és

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon\}$.

Mivel S_1, S_2 zárt intervallumok, f folytonos itt és $f(x) > 0$,

ha $x \neq x_0$, így $\max_{x \in S_1} f(x) > 0, \max_{x \in S_2} f(x) > 0$.

Legyen pl.: $0 < \max_{x \in S_1} f(x) \leq \max_{x \in S_2} f(x)$.

Ekkor f minden $[0, \max_{x \in S_1} f(x)]$ értéket felvesz S_1 -en és

S_2 -n is, azaz nem kölcsönösen egyértelmű $S = S_1 \cup S_2$ -n, így

(mivel $S \subset (c, d)$) (c, d) -n sem.

b) Indirekte tegyük fel, hogy nem szigorúan monoton, ekkor van olyan

$x_1 < x_2 < x_3$ ($x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$), hogy pl.:

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$f(x_1) < f(x_2), \quad f(x_2) \geq f(x_3).$$

Legyen pl. $f(x_1) \leq f(x_3)$, ezzel $f(x_1) \leq f(x_3) \leq f(x_2)$, f folytonos (a,b) -n, $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in (a,b)$, így $[x_1, x_2]$ -re alkalmazható a Bolzano tétel: van olyan $x_0 \in [x_1, x_2]$, hogy

$f(x_0) = f(x_3)$. De $x_1 \leq x_0 \leq x_2 < x_3$, így $x_0 \neq x_3$, azaz f nem kölcsönösen egyértelmű, nem invertálható. (A többi eset hasonlóan vizsgálható).

- (102) 1. pl. legyen f monoton növény. Léteznek a $c = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (1),
 $d = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ véges határértékek (lásd 92. pl. 2.), és fennáll
 $c < f(x) < d \quad \forall x \in (a,b)$ (2). (Ellenkező esetben ugyanis pl. ha volna $x \in (a,b)$, $c \geq f(x)$, akkor rögzített $y_0 \in (a,x)$ -el fennáll $\forall y \in (a,y_0)$ -ra, hogy $f(y) < f(y_0) < f(x) \leq c$, ami ellentmond (1)-nek.)

$$\text{Legyen } g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ c & x = a \\ d & x = b \end{cases}$$

(2)-ből és $f(a,b)$ -n való szigorú monotonitásából g szigorúan monoton $[a,b]$ -n, valamint folytonos itt, így $g([a,b]) = [g(a), g(b)] = [c,d]$. A szigorú monotonitás miatt kölcsönösen egyértelmű is, tehát $g((a,b)) = (c,d)$, de $g(x) = f(x)$, ha $x \in (a,b)$, így $f((a,b)) = (c,d)$.

2. Nem. Pl. $\sin((0,4\pi)) = [-1,1]$

- (103) 1. Legyenek a tekintett korlátos intervallum végpontjai:

$$-\infty < a < b < \infty.$$

Tegyük fel indirekte, hogy f például felülről nem korlátos, ekkor van $(x_n) \subset (a,b)$, $x_n \rightarrow x_0 \in [a,b]$ sorozat, hogy

$$f(x_n) \rightarrow \infty \quad (1). \text{ Másrészt } f \text{ egyenletes folytonossága és } (x_n)$$

konvergenciája miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van $N \in \mathbb{N}$, hogy $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, ha $n, m > N$, azaz $(f(x_n))$ Cauchy sorozat, ami ellentmond (1)-nek.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. a) Tegyük fel, hogy f egyenletesen folytonos (a,b) -n, és indirekte tegyük fel, hogy például nem létezik a véges $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Mivel 1.-ből f korlátos (a,b) -n, ekkor van $(x_n), (y_n) \subset (a,b)$,

$$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow a, \text{ hogy } f(x_n) \rightarrow A, f(y_n) \rightarrow B, A \neq B.$$

Ebből az adódik, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \frac{A-B}{2}, \text{ ha } n > N,$$

ami $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ miatt ellentmond f egyenletes folytonosságának.

- b) Tegyük fel, hogy f folytonossá tehető $[a,b]$ -n.

$$\text{Legyen } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \neq a, x \neq b \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) & \text{ha } x = a \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) & \text{ha } x = b \end{cases}$$

Ekkor g folytonos $[a,b]$ -n, így ott egyenletesen folytonos, ezért egyenletesen folytonos $(a,b) \subset [a,b]$ -n is, de $f(x) = g(x)$, ha $x \in (a,b)$.

- 104) 1. a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $\frac{\varepsilon}{4}$ -hez van olyan $K > a$, hogy $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{4}$, ha $x \geq K$ (1). Mivel f folytonos $[a, K]$ -n, így ott egyenletesen folytonos, azaz $\frac{\varepsilon}{4}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ ha $|x - y| < \delta$, $\forall x, y \in [a, K]$ (2).

Legyen $x, y \in [a, \infty)$, $|x - y| < \delta$.

Ekkor, ha

1. $x, y \in [a, K]$, akkor $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (2) miatt,

2. $x, y \in [K, \infty)$, akkor $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1) miatt,

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

3. $x \in [a, K]$, $y \in [K, \infty)$, akkor

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(K)| + |f(y)-f(K)|,$$

és mivel ilyenkor $x, K \in [a, K]$

illetve $K, y \in [K, \infty)$, így hivatkozhatunk 1. és 2.-re.

b) Nem, pl. $f(x) = x$ egyenletesen folyt. $[1, \infty)$ -en és

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, illetve $f(x) = \sin x$ egyenletesen folyt.

$[1, \infty)$ -en (lásd 89. 1. a) pl.), és nem létezik sem véges, sem végtelen határértéke a végtelenben.

$$2. f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y) = f(x)(g(x)-g(y)) + g(y)(f(x)-f(y))$$

3. Legyen pl. f monoton növény,

a) ha I korlátos: f folytonossá tehető \bar{I} -n (\bar{I} az I -vel azonos végpontu zárt intervallum) (lásd 103. pl. Def., illetve 92. pl. 2.), így egyenletesen folytonos \bar{I} -n, tehát $I \subset \bar{I}$ -n is;

b) ha I nem korlátos, pl.-ul $I = [a, \infty)$: létezik a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(lásd 92. pl. 1. a)) és ebből 1. a)-val f egyenletesen folytonos I -n.

c) a többi eset ugyanígy vizsgálható.

105) 1. b) Nem: hiszen ekkor az sem biztos, hogy f folytonos I -n:
pl. $f(x) = \text{sign } x$, $x_0 = 0$, $I = [-1, 1]$.

2. $[0, 1]$ -en folytonos,

$$[1, \infty)\text{-re: } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| \leq |x - y|$$

és lásd 1. a).

II. FEJEZET

$$\begin{aligned} \underline{1.} \quad \boxed{1.} \quad f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10+h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (10+h) = 10 \end{aligned}$$

2. $-\frac{1}{9}$ 3. $-\frac{1}{16}$ 4. $\frac{1}{e}$ 5. -3 .

2. 1. $-\frac{1}{3\sqrt{x^2}}$ ($x \neq 0$), 2. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ($x > 0$).

3. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 1] - (x^2 - 1)}{h(\sqrt{(x+h)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{32xh + h^2}{h(\sqrt{(x+h)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1})} =$
 $= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, ($|x| > 1$).

4. $-\frac{1}{2}$, ($x \neq 0$). 5. $-\frac{2}{3}$, ($x \neq 0$).

6. $2 \cos 2x$.

3. $2f(x) f'(x)$

4. B. f a -beli differenciálhatóságának definíciója.

A \nRightarrow B. pl. $f(x) = |x|$ a = 0 -ban $A_1 = 0$, A nem létezik.

B. \Rightarrow A. $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \right) = 2f'(a)$,

ha f differenciálható az a helyen. B \Leftrightarrow C. Így A. \nRightarrow C.,
de C. \Rightarrow A.

5. 1. $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$, ($x > 0$). 2. $3(3 - \frac{1}{x})^2 \frac{1}{x^2}$, ($x \neq 0$).

3. Alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$f = \sqrt{\varphi}$; $\varphi(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{3 + 5x}{3 - 5x}$.

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

Az $f = \sqrt{\varphi}$ differenciálható φ szerint, ha $\varphi > 0$, azaz $-\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}$, és a hatványfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{1}{2} \varphi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}.$$

A $\varphi = \frac{u}{v} = \frac{3+5x}{3-5x}$ differenciálható x szerint, ha $v = 3-5x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{5}$, és a hányados deriválási szabályát alkalmazva:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{5(3-5x) + 5(3+5x)}{(3-5x)^2} = \frac{30}{(3-5x)^2}.$$

Igy $f(x)$ differenciálható $(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$ -ben, és az összetett függvény deriválási szabálya (láncszabály) szerint:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \left(\frac{df}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi = \frac{3+5x}{3-5x}} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \right) \Big|_{\varphi = \frac{3+5x}{3-5x}} \cdot \frac{30}{(3-5x)^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3+5x}{3-5x}}} \cdot \frac{30}{(3-5x)^2} = \frac{15}{\sqrt{3-5x} (\sqrt{3+5x})^3}. \end{aligned}$$

4. $\frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$5. f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & \text{ha } x > 0 \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

6. $\frac{2x}{1+x^4} \cdot e^{\operatorname{arctg} x^2} + \frac{3}{3x+1}, \quad \left(x > -\frac{1}{3}\right).$

$10^x \ln 10 + \frac{1}{x \ln 10}, \quad (x > 0).$

8. $\operatorname{tg}^3 x, \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right)$.

9. $\frac{6(\operatorname{arctg} 2x)^2}{1 + (2x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

10. $(\operatorname{arctg} 2x)^x \left[\ln(\operatorname{arctg} 2x) + \frac{2x}{(1 + 4x^2)\operatorname{arctg} 2x} \right], \quad (x > 0)$.

11. $\frac{-\ln^2 x}{x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} + \frac{2 \ln x}{x} \arcsin \frac{1}{x}, \quad (x > 1)$.

12. $3(\operatorname{ch} 3x) \sqrt{6x + 5} + \operatorname{sh} 3x \cdot \frac{3}{\sqrt{6x+5}}, \quad (x > -\frac{5}{6})$.

13. $\frac{2x}{x^2 - 1} \operatorname{arth} \frac{x}{3} + \ln(x^2 - 1) \frac{1}{3 \left[1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2\right]}, \quad (1 < |x| < 3)$.

14. $\frac{1}{x \ln 3} + 3^x \ln 3 + 3x^2 + x^x (\ln x + 1), \quad (x > 0)$.

6. 1. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$(x^2 + y^2(x))' = 2x + 2y(x) y'(x) = 0. \text{ Innen } y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

Az $x_0 = 1$ és $y_0 = \sqrt{3}$ értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$y'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. $\frac{3}{2}$

3. -2 .

7. 1. Az $f_1(x) = \sin^2 x$ és $f_2(x) = \sin x \operatorname{ch} x$ jelöléssel

$$f^{(5)}(x) = f_1^{(5)}(x) + f_2^{(5)}(x).$$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

$$f_1^{(5)}(x) = (2 \sin x \cos x)^{(4)} = (\sin 2x)^{(4)} = 2^4 \sin 2x = 16 \sin 2x.$$

A Leibnitz formulát alkalmazva

$$f_2^{(5)}(x) = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (\sin x)^{(5-k)} (\cos x)^{(k)} = \cos x \operatorname{ch} x + 5 \sin x \operatorname{sh} x +$$

$$+ 10 (-\cos x) \operatorname{ch} x + 10 (-\sin x) \operatorname{sh} x + 5 \cos x \cdot \operatorname{ch} x +$$

$$+ \sin x \operatorname{sh} x = -4 (\cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x).$$

Ezért $f^{(5)}(x) = 16 \sin 2x - 4(\cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x)$.

2. $-\sin x$ 3. $x^2 \sin x - 200x \cos x - 9900 \sin x$.

4. $e^{ax} (n+x)$

5. $e^{ax} \left[a^n x^2 + 2n x a^{n-1} + n(n-1) a^{n-2} \right]$.

6. $(-1)^n \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

7. $f(x) = \frac{1+x}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}$; $f^{(n)}(x) = 2 \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

8. $e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

8. a) Az 5. kivételével minden függvény folytonos $x = 0$ -ban, mert teljesül, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

5. Jobbról folytonos.

b) **1.** Nem, mert $f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1$.

2. $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$.

3. Nem, mert $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sin h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sin h}{h} = 1$;

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|\sin h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-\sin h}{h} = -1, \text{ és}$$

így $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

4. $f'(0) = 0$

5. Jobbról differenciálható és

$$f'_+(0) = -1.$$

6. Nem, mert $f'_+(0) = 3 \neq f'_-(0) = -3$.

7. Nem, mert $f'_+(0) = -1$; $f'_-(0) = +1$.

8. Nem, mert a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$ határérték nem léte-

zik ($h \rightarrow +0$ esetén $+\infty$, $h \rightarrow -0$ esetén $-\infty$).

9. Nem, mert a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{1}{h}$ határérték nem

létezik, $f'_+(0)$ és $f'_-(0)$ sem létezik.

10. Differenciálható, és $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos \frac{1}{h} = 0$, mivel

$$\left| \cos \frac{1}{h} \right| \leq 1.$$

11. Nem, $f'_+(0) = \frac{\pi}{2}$; $f'_-(0) = -\frac{\pi}{2}$.

12. Igen, és $f'(0) = 1$.

13. Nem, mert $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = 1$.

9. 1. a) Igen b) Igen, és $f'(0) = 0$.

$$c) f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

$f'(x)$ nem folytonos, mert $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ nem létezik.

d) $f''(0)$ nem létezik, mert $f'(x)$ nem folytonos $x = 0$ -ban.

2. a) b), c), d) Igen.

10. a) $n > 0$ b) $n > 1$ c) $n > 2$ d) $n > 3$.

11. a) $n > 0$, m tetszőleges b) $n > 1$, m tetszőleges

c) $n > m + 1$.

- 12.
1. Mindenütt folytonos, $x = 0$ -ban nem differenciálható.
 2. Mindenütt folytonos, $x = -1$ -ben nem differenciálható.
 3. és 4. Mindenütt folytonos és differenciálható.
 5. Mindenütt folytonos, $x = +1$ -ben nem differenciálható.
 6. Mindenütt folytonos, nem differenciálható $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) helyeken.
 7. Csak $x = 0$ -ban folytonos, sehol sem differenciálható.
 8. Csak $x = 0$ -ban folytonos és differenciálható.

13. $f = |x-1| + |x-2| + |x-3|$.

14. a) $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) helyeken nem differenciálható,

de $f'(0) = 0$.

b) Nem.

15. $f' = 3(x-2)|x-2|$; $f'' = 6|x-2|$. Nem létezik $f'''(2)$.

16. Minden $x \neq 2$ -re egyszer és minden $x \neq 1, x \neq 2$ kétszer differenciálható.

17. a) Igen, mert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a) \varphi(x)}{x-a} =$

$= \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a)$ létezik és véges.

$$\begin{aligned} \text{b) } g'_+(a) &= \varphi(a), \quad g'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{|x-a| \varphi(x) - 0}{x-a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a-0} [-\varphi(x)] = -\varphi(a). \quad g'(a) \text{ csak akkor létezik, ha} \end{aligned}$$

$$g'_+(a) = g'_-(a). \text{ Ezért } \varphi(a) = -\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a) = 0.$$

18. Ha n páros, akkor akárhányszor; ha n páratlan, akkor $(n-1)$ -szer.

19. Legyen $g(x) = f(x) - f(0)$, ekkor $g'(0) = f'(0)$ és

$$g(0) = 0. \quad g'_+(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(h)}{h} = A,$$

$$g'_-(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(-h)}{-h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(h)}{-h} = -A \text{ és}$$

$$A = g'_+(0) = g'(0) = g'_-(0) = -A. \text{ Így } A = -A, \text{ azaz}$$

$$A = 0 \Rightarrow g'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

20. a) $f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$

b) $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$

c) $f(x + T) = f(x) \Rightarrow f'(x + T) = f'(x)$

21. Ha $f'(x)$ folytonos $[a, b]$ -ben, akkor Bolzano tételéből következik az állítás. De a tétel akkor is igaz, ha $f'(x)$ nem folytonos. Legyen C valamely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé eső érték pl. $f'(a) < C < f'(b)$. A $\varphi(x) = Cx - f(x)$ függvény folytonos $[a, b]$ -ben. Így a Weierstrass-tétel szerint létezik $\xi \in [a, b]$, ahol $\varphi(x)$ a legnagyobb értékét veszi fel. De $\varphi'(a) = C - f'(a) > 0$ és $\varphi'(b) = C - f'(b) < 0$ miatt $\varphi(x)$ az a helyen lokálisan növény, b helyen fogyó, így a -tól jobbra felvesz $\varphi(a)$ -nál nagyobb, b -től balra $\varphi(b)$ -nél nagyobb függvényértéket. Ezért $[a, b]$ belsejében van az a ξ hely, ahol φ a legnagyobb értékét veszi fel, és itt $\varphi'(\xi) = C - f'(\xi) = 0$. Tehát $f'(\xi) = C$, $\xi \in (a, b)$.

22. a) $f = |x|$, $x_0 = 0$.

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

$$b) f = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}, \quad x_0 = 0.$$

23. $a = 2x_0, \quad b = -x_0^2.$

24. a) Igen b) Nem.

25. a) Nem, pl. $g(x) = x, \quad h(x) = |x|, \quad x_0 = 0$ (lásd 8. 2.)

b) Nem, pl. $g(x) = h(x) = |x|, \quad x_0 = 0.$

26. a), b), c) Semmit, az összetett függvény lehet differenciálható is, meg nem is. (Pl. a) $g(x) = x^2$ és $h(x) = |x|$; b) $g(x) = |x|$ és $h(x) = x^2$; c) $g(x) = 2x + |x|$ és $h(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$.
Az ezekből képzett $f(x) = g(h(x))$ függvény differenciálható $x_0 = 0$ -ban.

d) Differenciálható x_0 -ban.

27. Az inverz $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, a reciprok és az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva:

$$[f^{-1}(y)]'' = -\frac{1}{[f'(f^{-1}(y))]^2} \cdot \frac{f''(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(y))}.$$

28. 1. Érintő: $y = -2x + 7$; normális: $y = \frac{1}{2}x + 2$.

2. $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1-x)^2}} \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$, így $y'(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Érintő: $y - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$, azaz

$y - \frac{\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$; normális $y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)$.

3. a) Érintő: $y = \sqrt[3]{4(x+1)}$; normális: $y = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}(x+1)$.

b) $y = 3$; $x = 2$. c) $x = 3$; $y = 0$.

29. 1. $x = \pm 1$, $y = 3x - 1$, $y = 3x + 3$.

2. $P_1\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $P_2\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, $y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-3)$,

$y + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1)$.

3. $P_1(-3, 4)$, $P_2(3, -4)$, $y - 4 = \frac{3}{4}(x + 3)$ és $y + 4 = \frac{3}{4}(x-3)$

4. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $y = \sqrt{2}$ és $y = -\sqrt{2}$.

30. **1.** Az $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) helyeken metszik egymást,

$$x = \frac{\pi}{4} \text{-nél } y'_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg} \alpha ,$$

$$y_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg} \beta ; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = 2\sqrt{2}$$

$\alpha - \beta = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \approx 70^\circ 30'$. Máshol is ilyen szögben metszik egymást.

2. $P_1(0, 0)$ -ban $\frac{\pi}{2}$, $P_2(1, 1)$ -ben $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} \approx 37^\circ$.

3. $P_1(2, 2)$ -nél $\frac{\pi}{4}$, $P_2(2, -2)$ is $\frac{\pi}{4}$.

4. $y'(1) = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

31. $x^2 - y^2 = a$ miatt $2x - 2yy' = 0$, innen $y' = \frac{x}{y} = m_1$, $xy = b$ miatt $y + xy' = 0$, innen $y' = -\frac{y}{x} = m_2$. Mivel tetszőleges (x, y) esetén $m_1 m_2 = -1$, így valóban merőlegesek.

32. $x = 0$ -ban metszik egymást és $y'_1(0) = f'(0)$;

$$y'_2(0) = \left[f'(x)e^{-x^2} + f(x)e^{-x^2}(-2x) \right]_{x=0} = f'(0). \text{ Így}$$

$$y'_1(0) = y'_2(0) = f'(0).$$

33. Igaz, $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$ minden függvénynél.

34. a) Létezik vízszintes érintő az $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$,
($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) helyeken.

b) az $x = \frac{\pi}{5}$ helyen érintő, $x = 0$ -ban jobb oldali félérintő van.

35. $y - ax_0^2 = 2ax_0(x - x_0)$ és $y = 0$ metszése $x = \frac{x_0}{2}$ -nél van.

36. $a = -\frac{1}{6}$, $b = 3$.

37. A hiperbola egy tetszőleges $(a, \frac{1}{a})$ pontjában az érintő egyenlete $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{2}(x-a)$. Ennek $x = 0$ -val való metszéspontja

$$P_1 \left(0, \frac{2}{a} \right), y = 0\text{-val való metszéspontja } P_2(2a, 0). T = \frac{1}{2} \frac{2}{a} \cdot 2a = 2.$$

38. a) $v(2) = s'(2) = \frac{4}{5}$; $a(2) = s''(2) = -\frac{6}{25}$.

b) $v(0) = 6$, $a(0) = 2 \ln 3$.

39. 1. $df = -\frac{1}{2} dx$ 2. $\frac{dx}{x^2 - 1}$ 3. $(3x^2 + \frac{3}{4}) dx$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

4. l'H-t alkalmazva: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1-x^2}}{3 \sin^2 x \cos x}$. Ez ismét $\left(\frac{0}{0}\right)$ alaku,

de l'H-t gépiesen tovább alkalmazni nem célszerű. Egyszerűbb alakra hozva:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{3(1-x^4)\sin^2 x \cos x} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1-x^4)\cos x} \right].$$

Alkalmazzuk a szorzat határértékére vonatkozó szabályt és a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \text{ összefüggést. Így}$$

$$-\frac{2}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -\frac{2}{3}.$$

5. $-\frac{2}{\pi}$ 6. l'H nem alkalmazható, mert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ nem létezik, ut. a szám-}$$

lálónak nincs határértéke. (π létezik ugyan a $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$,

mert $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Mivel a szorzat egyik tényezője korlátos, a másik 0-hoz tart, így $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. De $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ nem létezik.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mégis létezik: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) =$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

(Itt alkalmaztuk a π megjegyzést és a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ összefüggést.)

7. l'H közvetlenül nem vezet célra, mert a

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \text{ határértékhez jutnánk.}$$

Ismét alkalmazva l'H-t $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$ -t kapnánk, tehát egyre

bonyolultabb kifejezés lenne, a nevezőben x egyre magasabb hatványkitevőre kerülne. De $u = \frac{1}{x}$ helyettesítéssel:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u}$$

határérték kiszámítása l'H -lal egyszerű $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^u} = 0$.

8. 0 9. 0 10. $a^a (\ln a - 1)$ 11. $\ln \frac{a}{b}$

12. l'H n-szeri alkalmazása után: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x^n} = 0$.

13. $a > 1$ esetén n-szer alkalmazva l'H: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0$;
 $0 < a < 1$ esetén $+\infty$.

14. l'H nem vezet célra: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \dots$, mert itt minden határérték $\frac{\infty}{\infty}$ típusu.

Másképp okoskodva:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

15. e^{2a} 16. $1 < b$ esetén 1 ; $1 \geq b$ esetén közvetlenül adódik a
 0 határérték. 17. 0 18. $\frac{1}{\pi}$

(19.) Közös nevezőre hozva és l'H kétszeri alkalmazása után:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{\sin x + 2x \sin 2x + x^2 \cos 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{1 + 4 \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x + \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cos 2x} = -\frac{1}{3}$$

20. $\frac{1}{2}$ 21. $\frac{1}{2}$

(22.) Alakítsuk a $0 \cdot \infty$ típus $\frac{\infty}{\infty}$ típusúra, majd l'H-t alkalmazzuk:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\left(-\frac{1}{\ln x}\right) \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \ln^2 x}{1-x} = \dots = 0.$$

(23.) Alkalmazzuk az $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ összefüggést, így

$$(1-2^x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(1-2^x)}. \text{ A kitevőben levő } 0 \cdot \infty \text{ típusú kife-}$$

$$\text{jezést } \frac{\infty}{\infty} \text{ alakra hozzuk: } \lim_{x \rightarrow -0} \sin x \ln(1-2^x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\ln(1-2^x)}{\frac{1}{\sin x}}, \text{ majd alkalmazzuk l'H-t: } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\frac{1}{1-2^x} (-2^x) \ln 2}{-\frac{\cos x}{2 \sin^2 x}}.$$

Egyszerűbb alakra hozva, a szorzat határértékére vonatkozó szabályt alkalmazva és a második tényező határértékét l'H-lel

$$\text{számolva } \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{-2^x \ln 2}{\cos x}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin^2 x}{2^x - 1} =$$

$$= -\ln 2 \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2 \sin x \cos x}{2^x \ln 2} = 0 \text{ a kitevő határértéke.}$$

$$\text{Tehát } \lim_{x \rightarrow -0} (1-2^x)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow -0} e^{\sin x \ln(1-2^x)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow -0} \sin x \ln(1-2^x)} = e^0 = 1. \text{ (Itt felhasználtuk az } e^u$$

$$\text{függvény folytonosságát: } \lim_{u \rightarrow a} e^u = e^a \text{.)}$$

24. 1 25. 0 26. $\frac{1}{e}$ 27. 1 28. 1 29. e

30. e^a 31. $e^{-\frac{1}{6}}$ 32. $\frac{1}{e}$ 33. 1

34. $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$, $(a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ egész})$.

46. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$, mert $|\sin x| \leq 1$,

és így $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$ (lásd 45. 6. π megjegyzést). l'H nem alkalmazható, mert a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ határérték nem létezik.

2. a határérték nem létezik.

3. $a \leq 1$ esetén nem létezik (lásd 2.), $a > 1$ esetén létezik és 0.

47. a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{2h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{2h} + \frac{f'(x_0) - f'(x_0-h)}{2h} \right] =$$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} + \frac{f'(x_0-h) - f'(x_0)}{-h} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [f''(x_0) + f''(x_0)] = f''(x_0), \text{ ahol az első lépésben a } \frac{g(h)}{h^2}$$

függvény határértékének kiszámításánál a l'H-t alkalmaztuk.

$$b) f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

és általában minden olyan $f(x)$ páratlan függvény $x_0 = 0$ esetén, amelyre $f(0) = 0$ és $x_0 = 0$ -ban kétszer nem differenciálható.

$$\text{Ekkor } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(h) - 2 \cdot 0}{h^2} = 0.$$

(Felhasználtuk, hogy f páratlan, azaz $f(-h) = -f(h)$)

48. (1.) $R_n(x) = \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

2. $\frac{1}{3840} < 3 \cdot 10^{-4}$ (3.) $|R_4(x)| = \frac{ch^\xi}{5!} |x|^5 \leq \frac{ch}{5!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \leq 4 \cdot 10^{-5}$

49. $|x| < 0,3$

(50.) a) és b) 1. $x_0 = 1$ körüli elsőrendű Taylor polinom a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + \frac{6\xi}{2!} (x-1)^2, \quad (0,99 < \xi < 1)$$

$0,99^3 \approx 1 - 3 \cdot 0,01 = 0,97$. Mivel az elhagyott maradéktag pozitív, a számított közelítőérték a valódi értéknél kisebb. A hiba

$$|H| = |R_1| = \left| 3 \xi (0,01)^2 \right| < 3 \cdot 10^{-4}. \text{ Tehát}$$

$0,9700 < 0,99^3 < 0,9703$, azaz $0,99^3 = 0,970$ 3 tizedesre pontos.