BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Benkő Pálné - Diószegi Ferencné - Serény György

MATEMATIKA FELADATTÁR
II.

Valós egyváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása

Szerkesztette:
Antos Péter

Műegyetemi Kiadó, 2002.

Írta:

Serény György (I. fejezet)
Benkő Pálné (II. fejezet)
Diószegi Ferencné (III. fejezet)

(Nyolcadik utánnyomás)

Azonosító: **051387**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Hajdu István
Terjedelem: 27,7 (A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0142-02

TARTALOMJEGYZÉK

I. EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. ALAPFOGALMAK

1.1 Értelmezési tartomány, értékkészlet

1. Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

$\boxed{1.}$ a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

2. $f(x) = 3-x^2$

3. $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$

4. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

5. $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

6. $f(x) = \frac{1}{[x]}$

7. $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sign} x}$

8. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{xn+1}{n}\right)^n$

9. a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=o}^{n} x^k$

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

10. a) $f(x) = \frac{x}{3}$, ha x osztható 3-mal

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{ha } x \text{ osztható 3-mal} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

11. a) $f(x) = x$ b) $f(x) = (\sqrt{x})^2$

c) $f(x) = \sqrt{x^2}$

12. $f(x) = y$ akkor és csak akkor ha $y^3+x^3 = 1$.

1.2 Monotonitás

2. 1. Legyen $E \subset \mathbb{R}$.

a) Mely $f: E \to \mathbb{R}$ függvényekre igaz az, hogy: minden $x, y \in E$ esetén ha $f(x) < f(y)$ akkor $x < y$.

b) Mely $f: E \to \mathbb{R}$ függvényekre igaz az, hogy: minden $x, y \in E$ esetén fennáll, hogy vagy $f(x) < f(y)$ vagy $x \leq y$,

2. Fogalmazzuk meg pozitiv állitás formájában (nem használva a "nem" szót) azt a tulajdonságot, hogy egy függvény egy H halmazon nem monoton.

3. Definició. Egy H halmazt a legbővebb - valamilyen kiszemelt F tulajdonsággal rendelkező - halmaznak nevezünk, ha rendelkezik az F tulajdonsággal és nincsen olyan H' - F tulajdonsággal rendelkező - halmaz, hogy $H \subset H'$, $H \neq H'$.

1. Bizonyitsuk be, hogy egy függvény akkor és csak akkor monoton egy I intervallumon, ha annak minden részintervallumán monoton.
2. Legyen f monoton az (a,b) és (c,d) intervallumokon. Mi következik ebből f monotonitására nézve az $(a,b)\cup(c,d)$ halmazon, ha a) $a < c < b < d$; illetve
   b) $a < b < c < d$ és f monoton növő (a,b)-n is, (c,d)-n is.
3. ! Legyen f értelmezve az I intervallumon és legyen x_0 egy belső pontja I-nek, mely azt I_1, I_2 x_0-ban zárt intervallumokra osztja.
   Bizonyitsuk be, hogy ha f szigoruan monoton csökkenő az I_1-en és szigoruan monoton növekedő az I_2-ön akkor I_1 és I_2 két legbővebb intervallum, melyeken f monoton.
4. Legyen f monoton csökkenő az [a,b] és monoton növő a [b,c] intervallumon $(a < b < c)$. Következik-e ebből, hogy f nem monoton az [a,c] intervallumon?

4. 1. Keressünk az alábbi függvények esetén az értelmezési tartományban olyan legbővebb részintervallumokat (lásd 3. pl. Definició) - ha léteznek ilyenek -, melyeken az adott függvény monoton.

$\boxed{a)}$ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e) $f(x) = x^2+ax+b$ $a,b \in \mathbb{R}$ rögzitett

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$

2. Van-e olyan $\delta > 0$ szám, amelyre az $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$ függvény az egész $(0, \delta)$ intervallumon monoton?

1.3 Korlátosság, szélsőérték

5. a) Megválaszolható-e egyértelműen az alábbi kérdés:

Korlátos-e az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény?

b) Ekvivalens-e az alábbi definíció az f függvény felülről való korlátosságának definíciójával: Van olyan M szám, hogy $f(x) < M$

c) Létezik-e legbővebb olyan intervallum, (lásd 3. pl. Definíció) melyen az alábbi függvények korlátosak?

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

6. 1. Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$.

a) Ekvivalensek-e az alábbi állítások?

1. Van olyan m és M szám, hogy minden $x \in E$ esetén $m \leq f(x) \leq M$.
2. Van olyan $K > 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén $|f(x)| \leq K$.
3. Van olyan $K > 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén $|f(x)| < K$.

b) Ekvivalens-e az alábbi állítások valamelyike f E-n való korlátosságának definíciójával?

1. Van olyan $x_1, x_2 \in E$, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.
2. Minden $x \in E$ esetén van olyan $K > 0$, hogy $|f(x)| < K$.

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában (nem használva a "nem" szót) azt a tulajdonságot, hogy egy függvény nem korlátos egy E halmazon!

7. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ és $f, g: E \to \mathbb{R}$.
Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. a) $\sup\limits_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup\limits_{x \in E} f(x) + \sup\limits_{x \in E} g(x)$

b) $\inf\limits_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf\limits_{x \in E} f(x) + \inf\limits_{x \in E} g(x)$

2. a) $\sup\limits_{x \in E} (-f(x)) = -\inf\limits_{x \in E} f(x)$ b) $\inf\limits_{x \in E} (-f(x)) = -\sup\limits_{x \in E} f(x)$

3. Mutassuk meg, hogy 1.-ben $\leq$ helyett nem állhat $=$!

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

!8. **Definíció.** Egy függvényt értelmezési tartományának egy pontjában **lokálisan korlátosnak** mondunk, ha e pontnak van olyan S környezete, hogy f korlátos $S \cap D_f$-en.

1. a) Legyen f lokálisan korlátos egy tetszőleges intervallum minden pontjában. Következik-e, hogy f korlátos az egész intervallumon?

   b) Legyen f lokálisan korlátos egy zárt intervallum minden pontjában. Következik-e, hogy f korlátos az egész intervallumon?

2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{ha } x \text{ racionális, } x = \frac{m}{n},\ n > 0, \\ & m, n \in \mathbb{N},\ \text{relatív prímek} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény egyetlen pontban sem lokálisan korlátos!

9. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket az adott intervallumokon! Adjuk meg a függvények megfelelő intervallumbeli supremumát és infinumát, ill. maximumát és minimumát is, amennyiben ezek léteznek!

1. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ a) $I = (1, \infty)$ b) $I = [2, 4]$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ a) $I = (-\infty, \infty)$ b) $I = (-1, 2]$

3. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ a) $I = [0, \infty)$ b) $I = (-\infty, -1)$ c) $I = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

10. Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ függvény az egész számegyenesen korlátos.

11. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

a) Minden $\delta > 0$ szám esetén van olyan $x \in (a,b)$, hogy $|x-x_0| < \delta$ és $f(x) \leq f(x_0)$.

b) Van olyan $\delta > 0$ szám, hogy van olyan $x \in (a,b)$, hogy $|x-x_0| < \delta$ és $f(x) \leq f(x_0)$.

c) Van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$.

d) Minden $\delta > 0$ szám és minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$.

1. Mutassunk példát a fenti tulajdonságokat kielégítő függvényekre!
2. Következik-e valamelyik tulajdonságból az, hogy a függvénynek lokális maximuma van x_0-ban?
3. Következik-e abból, hogy a függvénynek lokális maximuma van x_0-ban az, hogy valamelyik tulajdonsággal rendelkezik?

12. 1. Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumon $(a < b)$ szigoruan monoton növekedő. Következik-e ebből, hogy a függvény
a) korlátos az (a,b) intervallumon?
b) felveszi maximumát az (a,b) intervallumon?
2. Lehet-e egy függvénynek egy pontban egyszerre lokális maximuma és minimuma?
3. Lehet-e egy függvénynek egy intervallum minden pontja lokális maximuma?
4. Legyen $I_1 \subset \mathbb{R}$, $I_2 \subset \mathbb{R}$ tetszőleges valódi(*) intervallumok, $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ a megfelelő azonos végponttal rendelkező zárt intervallumok és $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \{a\}$. Legyen $f: \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő I_1-en, monoton növő I_2-n. Következik-e, hogy f-nek lokális szélsőértéke van a-ban? ((*) van belső pontja)

13. 1. Legyen $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Bizonyitsuk be, hogy $x=1$-ben a függvénynek lokális maximuma, $x=-1$-ben lokális minimuma van.

2. Legyen $f(x) = (x-1)^2 (x-2)^2$.

Bizonyitsuk be, hogy az $x=1$ és $x=2$ pontok a függvénynek lokális minimumhelyei!

14. Keressük meg az alábbi függvények összes lokális szélsőértékhelyeit!

$\boxed{a)}$ $f(x) = (x^2-4)^2+2$;

b) $f(x) = x^2 + ax + b$, $a,b \in \mathbb{R}$ rögzitett;

c) $f(x) = |x-1|$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

1.4 Konvexitás - konkávitás, párosság - páratlanság, periódicitás

15. 1. Bizonyitsuk be, hogy ha az f függvény konvex az $[a,b]$ intervallumon, akkor tetszőleges $x_1, x_2 \in [a,b]$ esetén

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

2. Bizonyitsuk be, hogy f akkor és csak akkor konvex az $[a,b]$ intervallumon, ha itt $-f$ konkáv.

3. Bizonyitsuk be, hogy az $f(x) = x^2$ függvény konvex a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

16. Az alábbi függvények közül melyek párosak, páratlanok vagy periodikusak? A periodikusak esetében - ha lehetséges - adjuk meg a legkisebb periódust!

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $f(x) = x \operatorname{sign} x$
3. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
4. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$
5. $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$
6. $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$
7. $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{\pi}$
8. $f(x) = x - [x]$
9. $f(x) = x - [x] - \dfrac{1}{2}$
10. $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$
11. $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 1}$
12. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 1$
13. $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{x^4}$
14. $f(x) = x^3 \cos x + \sin^2 x$
15. a) $f(x) = \sin^2 \dfrac{\pi}{3} x + \sin^2 \dfrac{\pi}{4} x$

    b) $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{3} x + \sin \dfrac{\pi}{4} x$

17. 1. Lehet-e egy függvény egyszerre páros és páratlan?
2. Bizonyitsuk be, hogy ha $f: (-a,a) \to \mathbb{R}$, páros és f szigoruan monoton növekedő a $(-a,o)$ intervallumban, akkor f szigoruan monoton csökkenő a (o,a) intervallumban.

18. a) Létezik-e olyan f periodikus függvény melynek értelmezési tartományára fennáll, hogy $\mathbb{R} \setminus D_f \neq \emptyset$?

! b) Ha létezik ilyen f, lehet-e ugy kiterjeszteni az egész valós számegyenesre, hogy periodikus maradjon, azaz van-e olyan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus függvény $(D_g = \mathbb{R})$, amelyre

$$g(x) = f(x)\ , \quad \text{ha } x \in D_f\,?$$

1.5 Müveletek függvények körében

19. Lgyen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Vizsgáljuk meg milyen következtetéseket lehet levonni értelmezési tartományukon a

$-f$, $\frac{1}{f}$, $f+g$, $f \cdot g$, $f \circ g$, $g \circ f$ függvények viselkedésére vonatkozóan, ha értelmezési tartományukon

1. a) f és g korlátos
   b) f és g nem korlátos
   c) f korlátos g nem korlátos.
2. a) f és g monoton növekedő
   b) f monoton csökkenő, g monoton növő.
3. a) f és g páros
   b) f és g páratlan
   c) f páros g páratlan.

20. Tegyük fel, hogy az (a,b)-n értelmezett f és g valós függvényeknek lokális maximumuk van az $x_o \in (a,b)$ pontban.
Mit mondhatunk $-f$, $\frac{1}{f}$, $f+g$, $f \circ g$ viselkedéséről x_o-ban?

21. Határozzuk meg $f(x)$-et, mint x algebrai kifejezését, ha

a) $f(x+1) = x^2-3x+2$ b) $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

22. Legyen $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ $\forall n > 1$ esetén, ahol

a) $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$ b) $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Határozzuk meg $f_n(x)$-et, mint x és n algebrai kifejezését!

23. Határozzuk meg szakaszonként algebrai kifejezésekként az fof, fog, gof, gog összetett függvényeket, ha

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant o \\ x & \text{ha } x > o \end{cases}$

   $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant o \\ -x^2 & \text{ha } x > o \end{cases}$

2. $f(x) = x^2+1$ $g(x) = \sqrt{x+1}$

3. $f(x) = \operatorname{sign} x$

   α) $g(x) = \frac{1}{x}$ γ) $g(x) = x(1-x^2)$

   β) $g(x) = 1+x^2$ δ) $g(x) = 1+x-[x]$

4. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ egész} \\ x & \text{ha } x \text{ nem egész} \end{cases}$

   $g(x) = \sqrt{x}$

5. $f(x) = x+x^2$

   $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ páros egész} \\ -1 & \text{ha } x \text{ páratlan egész} \end{cases}$

6. $f(x) = -|x|$ $g(x) = \sqrt{x}$

7. $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } o < x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 2-x & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$

1.6 Invertálhatóság

! (24.) Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$ tetszőleges.
Legyen $H \subset E$ olyan, hogy H-n f kölcsönösen egyértelmü, azaz, tetszőleges $x_1, x_2 \in H$ esetén

ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $x_1 = x_2$.

Legyen $f(H) = \{ y \in R_f : \exists\, x \in H, \text{ hogy } f(x) = y \}$.

Bizonyitsuk be az alábbi állitásokat!

1. Egyetlen olyan $g: f(H) \to \mathbb{R}$ függvény van, melyre

$$g(f(x)) = x \qquad \forall x \in H .$$

2. Az alábbi két állitás ekvivalens:
   a) $g: f(H) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $g(f(x)) = x \ \forall x \in H$
   b) $g: f(H) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in H$ és $\forall y \in f(H)$ esetén $g(y) = x$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = y$
3. Bármely $g: f(H) \to H$ esetén $g(f(x)) = x \ \forall x \in H$ akkor és csak akkor, ha $f(g(y)) = y \ \forall y \in f(H)$

(25.) Bizonyitsuk be a következő állitásokat!

1. Ha f invertálható H-n, akkor f^{-1} is invertálható $f(H)$-n, és

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \qquad \forall x \in H .$$

2. Invertálható függvények összetett függvénye is invertálható, azaz ha g invertálható H-n, f invertálható $g(H)$-n, akkor $f \circ g$ is invertálható H-n, és

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) \qquad \forall x \in (f \circ g)(H) .$$

3. Ha $f \circ g$ invertálható H-n, akkor g invertálható H-n, f pedig $g(H)$-n.

26. Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.
Melyek igazak, és melyek hamisak az alábbi állitások közül?
(Az állitásokban szereplő tulajdonságok mindegyike az egész $[a,b]$-re vonatkozik.)
a) f monotonitása szükséges feltétele invertálhatóságának.
b) f monotonitása elégséges feltétele invertálhatóságának.
c) Ha f szigoruan monoton, akkor invertálható.
d) Ha f invertálható és monoton akkor szigoruan monoton.
e) Ha f invertálható I_1-en és I_2-n ($I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervallumok) akkor invertálható $I_1 \cup I_2$-n is.

27. Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$, f kölcsönösen egyértelmü.
Melyek igazak, és melyek hamisak az alábbi állitások közül?
1. a) Ha f korlátos E-n, akkor inverze korlátos $f(E)$-en.
   b) Ha f szigoruan monoton növekedő E-n, akkor inverze szigoruan monoton növekedő $f(E)$-en.
2. Legyen $E = [-a, a]$ $(a > o)$.
   a) Ha f páros, akkor inverze is páros.
   b) Ha f páratlan, akkor inverze is páratlan.

28. Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D_f = R_f = \mathbb{R}$; $A, B \subset \mathbb{R}$.
Definició szerint legyen:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in B \} \quad \text{és}$$

$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : \text{van } x \in A \text{ melyre } f(x) = y \} .$$

Bizonyitsuk be az alábbi állitásokat!

1. $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B)$

2. $f^{-1}(f(A)) \supset A$

3. Van olvan f függvény és $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, hogy

$$f^{-1}(f(A)) \neq A .$$

[illegible] Az összes alábbi függvény esetén keressünk az értelmezési tartományban olyan legbővebb részhalmazokat (lásd 3. pl. Definició) - ha léteznek ilyenek - melyeken a függvény invertálható és amelyek egyesitése az értelmezési tartomány.

Adjuk meg a megfelelő inverz függvényeket is!

$\boxed{1.}$ a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

3. $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

4. $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$

5. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

6. $f(x) = (x^2-9)^2 - 1$

7. $f(x) = x^2+ax+b$ $a,b \in \mathbb{R}$ rögzitett

1.7 Határérték, folytonosság, egyenletes folytonosság

30. 1. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

Tegyük fel: van olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|f(x)-A| < \varepsilon$, akkor $|x-x_0| < \delta$.

Következik-e ebből az, hogy f-nek van határértéke x_0-ban.

! 2. a) Legyen $E \subset \mathbb{R}$ $f: E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Tegyük fel, hogy van olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta < 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén, ha $|f(x)-A| < \varepsilon$, akkor $|x-x_0| < \delta$.

Milyen tulajdonságot definiál ez a meghatározás?

b) Mutassunk példát olyan mindenütt értelmezett függvényre, melyre fennáll, és olyanra, melyre nem áll fenn valamely pontban ez a tulajdonság.

31. Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Milyen összefüggés van a függvény $-\infty$ -beli határértékének létezése és az alábbi tulajdonság között:
minden A szám esetén van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy
minden K szám esetén van olyan $x < K$ szám, hogy
$f(x) - A > \varepsilon$

! 32. Legyen $x_0 \in (a,b)$, $A \in \mathbb{R}$.

Ekvivalens-e az alábbi tulajdonságok valamelyike azzal, hogy az $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ függvénynek az A szám a határértéke x_0-ban?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. Minden $\varepsilon > o$ szám esetén nem minden $\delta > o$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$o < |x-x_o| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

2. Nincs olyan $\varepsilon > o$ szám, melyhez ne lenne olyan $\delta > o$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén vagy $|x-x_o| \geq \delta$ vagy $|f(x) - A| < \varepsilon$ fenn ne álljon.
3. Minden $\varepsilon > o$ szám esetén nem minden $\delta > o$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$0 < |x-x_o| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

! **33.** Legyen $x_o \in (a,b)$.

Mely $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ függvények rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: Van olyan K szám, hogy minden $\delta > o$ szám esetén van olyan $x \in (a,b)$ szám, hogy $x_o < x < x_o + \delta$ és $f(x) < K$.

Mutassunk példát olyan függvényre, (ha ilyen létezik) mely kielégíti a fenti definiciót és nem korlátos (a,b)-n.

! **34.** Legyen $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_o \in (a,b)$.

Tekintsük az alábbi tulajdonsággal rendelkező függvényeket: Van olyan A és $\delta > o$ szám, hogy minden $\varepsilon > o$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy $0 < |x-x_o| < \delta$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

1. Igazak-e az alábbi következtetések?
   a) Ha f rendelkezik a fenti tulajdonsággal, akkor van határértéke x_o-ban.
   b) Ha f-nek van határértéke x_o-ban, akkor rendelkezik a fenti tulajdonsággal.
2. Mutassunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre!

35. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, akkor

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty .$$

   b) Igaz-e az állitás megforditása?

2. Abból, hogy az $f(x)$ függvény x_o-ban nem lokálisan korlátos (lásd 8. pld Definició) következik-e, hogy $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$?

3. Abból, hogy $\lim\limits_{x \to x_o} (f(x) - g(x)) = 0$

következik-e, hogy $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$?

4. Bizonyitsuk be, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$.

36. Adjunk példát egy-egy olyan függvényre, - ha vannak ilyenek - melyeknek

1. nincs határértéke a 0-ban, de létezik a $\lim\limits_{n \to \infty} f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$;
2. van határértéke a 0-ban, de nem létezik a $\lim\limits_{n \to \infty} f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$.

37. Vizsgáljuk meg a határérték definiciója alapján, hogy léteznek-e az alábbi határértékek! Ha igen, állapitsuk meg értéküket is!

$\boxed{1.}$ a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2+2)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)$

2. a) $\lim\limits_{x \to \infty} (|x| - x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (|x| - x)$

3. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3+1)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (3x^3-2)$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x+1}{3+x}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2-2x+1)$

4. a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{1}{x-1}$

5. a) $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{1}{(x-1)^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

6. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2}{1+x}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x^2}$

7. a) $\lim\limits_{x\to 2} [x]$

b) $\lim\limits_{x\to 2+} [x]$

c) $\lim\limits_{x\to 2-} [x]$

8. a) $\lim\limits_{x\to o} \text{sign}x$

b) $\lim\limits_{x\to o+} \frac{|x|}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to o-} \frac{|x|}{x}$

9. a) $\lim\limits_{x\to o} \frac{1}{1-\text{sign}^2 x}$

b) $\lim\limits_{x\to o} \text{sign}\ |x|$

10. a) $\lim\limits_{x\to o+} \left[\frac{1}{x}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to o+} \frac{1}{[x]}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{[x]}$

11. a) $\lim\limits_{x\to o} \sin\frac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to o} x\sin\frac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \cos x$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\cos x}{x}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

13. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racionális} \\ x^2, & x \text{ irracionális} \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

! 38. Legyen $x_o \in (a,b)$.

Az alábbi definiciók közül melyik ekvivalens az $f: (a,b)\to\mathbb{R}$ függvény x_o-beli folytonosságának definiciójával?

a) Minden $\varepsilon > o$ szám esetén nem minden $\delta > o$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$|x-x_o| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - f(x_o)| \geq \varepsilon .$$

b) Van olyan $\varepsilon > 0$ szám, melyhez nincsen olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén

ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

c) Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén nem minden $\delta > 0$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$|x-x_0| < \delta$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

d) Van olyan A szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén, ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

39. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ és $E \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Tegyük fel, hogy minden $\varepsilon \in E$ esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x \in (a,b)$, $|x-x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Milyen tulajdonságu E halmaz esetén következik ebből a tulajdonságból az, hogy f folytonos x_0-ban?

!40. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

Tegyük fel, hogy minden $\delta > 0$ szám esetén van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy ha

$x \in (a,b)$ és $|x-x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

1. Milyen tulajdonságot definiál a fenti meghatározás?
2. Mondjunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre.
3. Következik-e egy függvény x_0-beli fonytonossága abból, ha rendelkezik a fenti tulajdonsággal?

!41. Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
Tegyük fel, hogy minden $x,y \in [a,b]$ és minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $|f(x)-f(y)| < \delta$ akkor $|x-y| < \varepsilon$
Mit mondhatunk ekkor az f függvényről?

42. 1. Bizonyitsuk be, hogy: ha f folytonos egy $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor van olyan az egész $\mathbb{R}$-en folytonos g függvény, hogy $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ esetén.
2. Igaz-e 1. állitása az (a,b) nyilt intervallumon folytonos f függvény esetén is?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

43. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

Hogyan függ össze az alábbi két tulajdonság f-nek x_0-beli folytonosságával?

a) $\lim\limits_{h \to 0} |f(x_0+h) - f(x_0-h)| = 0$

b) $\lim\limits_{h \to 0} |f(x_0+h) - f(x_0)| = 0$

44. Legyen f tetszőleges valós függvény.
Hogyan függ össze az alábbi két tulajdonság?
a) Van olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy f folytonos $[a, \infty)$-en.
b) f-nek van határértéke ∞-ben.

45. Legyen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített.

1. Mit mondhatunk az $f+g$ és az $f \cdot g$ függvények x_0-beli folytonosságáról, ha
   a) f folytonos, g nem folytonos x_0-ban;
   b) f és g egyike sem folytonos x_0-ban?
2. Igaz-e, hogy ha f^2 folytonos $E \subset \mathbb{R}$-en, akkor f is az?

46. Legyen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített.

Mit mondhatunk $f \circ g$ x_0-beli folytonosságáról, ha

a) g folytonos x_0-ban, de f nem folytonos $g(x_0)$-ban;

b) g nem folytonos x_0-ban, de f folytonos $g(x_0)$-ban;

c) g nem folytonos x_0-ban, f nem folytonos $g(x_0)$-ban.

47. Vizsgáljuk meg a folytonosság definiciója alapján az alábbi függvények folytonosságát a megadott pontokban, illetve intervallumokon.

$\boxed{1.}$ a) $f(x) = x^2$ $\quad (0, \infty)$

b) $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ $\quad x_0 = 0$

2. $f(x) = ax+b$ $\quad (-\infty, \infty)$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (0, \infty)$

4. $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ irrac.} \\ 0 & x \text{ rac.} \end{cases}$ $\quad$ a) $x_0 = 1$ b) $x_0 = 0$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad (0, \infty)$

6. $f(x) = [x]$ $\quad (0,2)$

7. $f(x) = x^3$ $\quad (-\infty, \infty)$

8. a) $f(x) = |x| \quad (-\infty, \infty)$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\text{sign}x} \quad (-\infty, \infty)$

9. $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ rac.} \\ -x & x \text{ irrac.} \end{cases}$

a) $x_0 = 1$

b) $x_0 = 0$

! 48. Bizonyitsuk be, hogy az alábbi függvény minden irracionális x helyen folytonos és minden racionális x helyen szakadása van:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ ha } x = \dfrac{m}{n}, \text{ m és n relativ prim egészek, } n > o. \\ 0, \text{ ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

49. Legyen $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$.

1. Következik-e az alább megadott tulajdonságok valamelyikéből, hogy f egyenletesen folytonos (a,b)-n?

a) Minden $x_0 \in (a,b)$ esetén minden $\varepsilon > o$ szám esetén van olyan $\delta > o$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|x-x_0| < \delta$, akkor

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

b) Minden $\varepsilon > o$ szám esetén van olyan $\delta > o$ szám, hogy minden $x_0 \in (a,b)$ és $x \in (a,b)$ esetén ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Fogalmazza meg pozitiv állítás formájában (nem használva azt a szót, hogy "nem") azt, hogy f nem egyenletesen folytonos (a,b)-n.

50. Igazak-e az alábbi állítások?

1. Ha egy függvény nem korlátos egy halmazon akkor ott nem lehet egyenletesen folytonos.
2. Ha egy függvény folytonos és korlátos egy halmazon, akkor ott egyenletesen folytonos.
3. Ha egy függvény egyenletesen folytonos egy intervallumon, akkor egyenletesen folytonos annak minden részintervallumán is.

51. Igazak-e a következő állítások?
Egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon egyenletesen folytonos függvények
a) összege
b) szorzata
c) összetett függvénye
is egyenletesen folytonos I-n.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

52. Vizsgáljuk meg a definíció alapján az alábbi függvényeket egyenletes folytonosság szempontjából a megadott intervallumokon!

1. a) $f(x) = x \qquad (-\infty, \infty)$

   b) $f(x) = x^2 \qquad (-\infty, \infty)$

2. $f(x) = \sqrt{x} \qquad [1, \infty)$

3. $f(x) = x^3$

   a) $(0, \infty)$

   b) $(0, 1)$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$

   a) $(0, 2)$

   b) $(1, 2)$

5. $f(x) = \cos\frac{1}{x} \qquad (0, 1)$

2. GYAKORLÓ FELADATOK FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAINAK VIZSGÁLATÁRA

2.1 Elemi tulajdonságok

53. Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{x}$

2. $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^{\sin\frac{1}{x}} - 1}}$

3. $f(x) = \sqrt{\ln\frac{1+x}{1-x}}$

4. $f(x) = \frac{1}{1+2^{x^{-x}}}$

5. $f(x) = \ln\left(\arccos(\operatorname{arctg} x) - \frac{\pi}{2}\right)$

6. $f(x) = \ln\left(e^{\cos x} - 1\right)$

7. $f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2(\arcsin(x-1))}$

8. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sh}(1-e^{\operatorname{arch}^2 x})}$

9. $f(x) = \frac{1}{1+[\operatorname{ch} x]}$

10. $f(x) = \sqrt[3]{\ln\sqrt{|x|-1}}$

11. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\sqrt{\arccos x}}}$

12. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

54. Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

$\boxed{1.}$ $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$

2. $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

3. $f(x) = \arccos (\ln x)$

4. $f(x) = \sqrt{\sin^2 x-1}$

5. $f(x) = \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)$

6. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

7. $f(x) = \ln (\arccos e^x)$

8. $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ch}\, \frac{1}{x^2}\right)}$

9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1-\mathrm{th}x}}$

10. $f(x) = e^{\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}\right)}$

11. $f(x) = \mathrm{sh}\sqrt{\dfrac{x}{1-|x|}}$

12. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$

55.
Állapitsuk meg $f(H)$-t az alábbi esetekben!

1. $f(x) = \ln \sin x$ $\qquad H = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

2. $f(x) = \mathrm{ch}\, (x + 2)^2$ $\qquad H = [-3, -1)$

3. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ $\qquad H = (-\infty, 1)$

4. $f(x) = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right)$ $\qquad H = (-\infty, 0)$

5. $f(x) = e^{\,\mathrm{sign}(\cos x)}$ $\qquad H = [1, \infty)$

56. Értelmezési tartományuk mely legbővebb részintervallumaiban (lásd 3. pl. Def.) monotonok az alábbi függvények?

$\boxed{1.}$ $f(x) = \dfrac{1}{1-|\ln x|}$

2. $f(x) = 1-\mathrm{sh}\, \dfrac{1}{1+x^4}$

3. $f(x) = e^{\sin^2 x}$

5. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

4. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sign} x}{\operatorname{ch}(x^2-1)-1}$

57. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket abból a szempontból, hogy a megadott halmazokon
1. korlátosak-e,
2. felveszik-e minimumukat, illetve maximumukat,
3. van-e lokális szélsőértékük!

Ha léteznek, adjuk meg a megfelelő supremumokat és infinumokat, illetve maximumokat és minimumokat, valamint a lokális szélsőértékek helyeit!

1. $f(x) = \sin x(1-\sin x)$, $[-\pi, \pi]$

2. $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$

   a) D_f

   b) $(-\infty, 1)$

   c) $(1, \infty)$

   d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

   e) $(2, 3)$

3. $f(x) = \arccos \sqrt{1-x^2}$, D_f

4. $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{1+|\ln|x||} & x \neq 0 \end{cases}$

   a) D_f

   b) $[1, \infty)$

5. $f(x) = \sqrt[3]{1-e^{-x^3}}$

   a) D_f

   b) $[0, \infty)$

58. Vizsgáljuk meg, invertálhatóak-e az alábbi függvények a megadott intervallumokon!

1. $f(x) = \arccos \sqrt{x^2(1-x^2)}$

   a) $[0, 1]$

   b) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

   c) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

2. $f(x) = e^x + x$ $(-\infty, \infty)$

3. $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$

   a) $(0, 1]$ b) $(0, 2]$ c) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(1+x)}}{1+\sqrt{\ln(1+x)}}$, D_f

59. 1. a) Hány olyan mindenütt értelmezett $y = f(x)$ függvény van, mely kielégiti az $y + \ln y = x^3$ függvényegyenletet?

! b) Hány olyan $[0, \infty)$-en értelmezett $y = f(x)$ folytonos függvény van, mely kielégiti az $y^2 + \mathrm{ch}\,y = x+1$ függvényegyenletet?

2. a) Mely c valós számok esetén van megoldása (és ekkor hány) az $\mathrm{sh}\,x + x + c = 0$ egyenletnek $(-\infty, \infty)$-en?

b) Mely c valós számok esetén van megoldása (és ekkor hány) az $x\,\mathrm{tg}\,x = c$ egyenletnek $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en?

60. Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Adjunk meg az értelmezési tartományban olyan legbővebb részhalmazokat (lásd 3. pl. Def.) minden egyes esetben, amelyeken az adott függvény invertálható, és az inverz függvény megadható szakaszonként elemi függvényekből alapmüveletekkel, illetve összetett függvény képzéssel előálló függvényként! Adjuk meg az inverz függvényt és értékkészletét!

a) $\boxed{1.}$ $f(x) = \cos e^{(x+2)^2}$

2. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}} + 1$

3. $f(x) = \sqrt{\ln\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{1}{x}\right)}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin 2x}$

5. $f(x) = e^{\ln^3(x-1)}$

6. $f(x) = \mathrm{tg}\,\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

7. $f(x) = \arcsin\left(\mathrm{th}(x-1)^4\right)$

8. $f(x) = \arccos\dfrac{4x}{1+x^2}$

9. $f(x) = (\mathrm{ch}(x+1)-2)^2$

10. $f(x) = \log_2 x^3$

11. $f(x) = \ln(16-x^2) + 3$

12. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$

b) 1. $f(x) = e^{-x|x|}$

2. $f(x) = \mathrm{arctg}\,|\ln x|$

3. $f(x) = \begin{cases} x & -\infty < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x & 4 < x < \infty \end{cases}$

4. $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \sqrt{1-x} & 0 < x < 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \\ -\cos \frac{\pi(x-2)}{2} & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

5. $f(x) = x + [x] \qquad (x \geq 0)$

! c) 1. $f(x) = e^{2x} - e^{x}$

2. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x$

3. $f(x) = \operatorname{sh}^2 x - 3\operatorname{sh} x + 2$

61. 1. **Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, és adjuk meg a függvényeket szakaszonként algebrai függvények segítségével!**

a) 1. $f(x) = \cos(\arccos x)$

2. $f(x) = \arcsin(\sin x)$

3. $f(x) = \sin(\arccos x)$

4. $f(x) = \arcsin(\cos x)$

5. $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

6. $f(x) = \sin(\operatorname{arctg} x)$

7. $f(x) = \operatorname{tg}(\arcsin x)$

8. $f(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x)$

9. $f(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)$

10. $f(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x)$

11. $f(x) = \operatorname{arch}(\operatorname{ch} x)$

b) 1. $f(x) = \sin(2 \arcsin x)$

2. $f(x) = \cos(\arcsin \sqrt{1-x^2})$

3. $f(x) = \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

2. **Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat!**

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ tetsz. $x \in [-1,1]$ -re

2. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ tetsz. $x \in (-1,1)$ -re

3. a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ha $x > 0$

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ ha $x < 0$

2.2 Határértékszámitás

62. Bizonyitsuk be a következő állitásokat!

1. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ létezik, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|$ is létezik és

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right| .$$

2. a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \to x_0} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = \infty .$$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \to \infty} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = \infty .$$

3. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C > 0$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, akkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty .$$

4. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ és $g(x)$ korlátos x_0 valamely S környezetében, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

5. Ha létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^k$ és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{1/k}$ és

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^k = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^k, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{1/k} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{1/k}. \tag{2}$$

6. Ha léteszik a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, valamint van x_0-nak egy olyan S környezete, hogy

$f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in S$, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

63. Bizonyitsuk be az alábbi állításokat!
Legyen $f\colon E_1 \to \mathbb{R}$ $(E_1 \subset \mathbb{R})$ tetszőleges.

1. Ha $x_0 \in (a,b)$ és van olyan $g\colon E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_2 \subset \mathbb{R})$ E_2-n folytonos és invertálható függvény, hogy $D_f \supset R_g \supset (a,b)$, akkor, ha létezik a $\lim\limits_{y \to g^{-1}(x_0)} f(g(y))$, akkor létezik a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ is, és } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{y \to g^{-1}(x_0)} f(g(y)).$$

2. Ha létezik a $\lim\limits_{y \to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$, akkor létezik a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ és

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{y \to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Vizsgáljuk meg, léteznek-e az alábbi határértékek! Amelyik létezik, azt határozzuk meg!

64.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x^2$
3. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sign} x)^2$
4. $\lim\limits_{x\to 0} [x]$
5. $\lim\limits_{x\to 0} [x]^2$
6. $\lim\limits_{x\to 0} [x^2]$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} [x]$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{x}\right]$
9. $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$
10. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{[x]}$

65.

$\boxed{1.}$ a) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-2x+2)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3+2x^2-1)$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2-4)$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^5+4x^2+1)$
4. $\lim\limits_{x\to \infty} (x^3-2x+3)$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^4+4x+2)$
6. $\lim\limits_{x\to 2} (x^3+3x)$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{\sqrt{x}+1}$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2-1}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty} (x-5\sqrt{x})$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}\right)$

66.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x^3+2x-1}{(x-1)(x-2)}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\frac{3x^2+x+1}{6x^2+2x+1}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$

5. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{9-\sqrt{x}}}$

6. $\lim_{x \to 2} \left(\left(\frac{x}{x^2+2} \right)^3 - 1 \right)$

67. $\boxed{1.}$ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2x-2}{3x^2+5}$

2. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+7x-5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4x+5}$

4. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5-2x^2}{6x^3+1}$

5. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3-1}$

6. $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^5-6x^2+1}{3x+1}$

7. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2x+2}{x+1}$

8. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{3x+2}{4x-1}}$

9. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x-1}}{3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}+1}$

10. a) $\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x^2+1}}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x+1}}$

11. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2}{6x^2+2x-1} \right)^2$

12. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

13. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}} + 1 \right)^3$

14. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

15. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

16. $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

17. $\lim_{x \to \infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(x^k+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$

18. a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{x}\right)^2\right)$

20. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sqrt{4x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1} + x\sqrt{2x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1} + x\sqrt{2x+1}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1} + 1}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$

68. 1. Legyenek $s(x)$ és $n(x)$ polinomok, $f(x) = \dfrac{s(x)}{n(x)}$ és x_0 $s(x)$-nek k_1, $n(x)$-nek k_2 multiplicitású gyöke. (Utóbbi feltétel azt jelenti, hogy $s(x)$ és $n(x)$ felírható $s(x) = (x-x_0)^{k_1}\hat{s}(x)$ ill. $n(x) = (x-x_0)\hat{n}(x)$ alakban, ahol $\hat{s}(x_0) \neq 0$, $\hat{n}(x_0) \neq 0$.

Használjuk a formális $c.\infty$, $c = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ jelölést!

Bizonyítsuk be, hogy a fenti feltételek mellett:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} 0 & \\ \operatorname{sign}\dfrac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)}\cdot\infty & \text{ha } k_2 > k_1 \text{ és } k_2-k_1 \text{ páros} \\ \text{nem létezik} & \text{ha } k_2 > k_1 \text{ és } k_2-k_1 \text{ páratlan} \\ \dfrac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} & \text{ha } k_1 = k_2 \end{cases}$$

valamint ha $k_2 > k_1$ és k_2-k_1 páratlan, akkor

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \operatorname{sign}\frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)}\cdot\infty, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = -\operatorname{sign}\frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)}\cdot\infty$$

2. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)^2}{x-3}$

2. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x^2-9)^3}$

   b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{(x^2-9)^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x^2-9)^4}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

Vizsgáljuk meg léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

69. a) $\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x+4}{x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+3)}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2(x+3)}$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+9x^2+27x+27}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^3-1}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

13. 1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

13. 3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-x-6}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+x)^4}{x}$

! b) 1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-2x+1}{x^m-2x+1}$, $m > 2, n, m \in \mathbb{N}$ rögzitett

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzitett

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzitett

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

70. 1. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{(x-1)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(1+\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-2}$

4. $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[5]{\dfrac{\frac{1}{x^3}+1}{x+1}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0+} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}+x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-x}}$

8. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-1}$

71. a) $\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x-1}}$

7. 1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

! b) 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

5. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

! c) 1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzitett

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$, $a,b\in\mathbb{R}$ rögzitett

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ rögzitett

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $n,m\in\mathbb{N}$, $a,b\in\mathbb{R}$ rögzitett

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$ rögzitett

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)\dots(x+a_n)}-x\right)$, $a_i\in\mathbb{R}$ $i=1,2,\dots n$, $n\in\mathbb{N}$ rögzitett

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}$ rögzitett

72. Vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi függvények esetén a

$$\lim_{x\to 0+}f(x),\quad \lim_{x\to 0-}f(x),\quad \lim_{x\to\infty}f(x),\quad \lim_{x\to -\infty}f(x)$$

határértékek, és ha igen mivel egyenlőek!

1. $\boxed{1.}$ $f(x)=\dfrac{e^x}{1-e^{2x}}$

2. $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

3. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1-e^x}$

4. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

5. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{2}{x}}}$

6. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^x}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{1-e^{-\frac{1}{x}}}$

8. $f(x) = \dfrac{x+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{1}{x}}}$

9. $f(x) = \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$

2\. 1. $f(x) = \dfrac{\text{th}x}{\text{th}\,\frac{1}{x}}$

2\. $f(x) = \dfrac{\text{th}x}{1-\text{th}2x}$

3\. $f(x) = \dfrac{1+\text{th}\,\frac{1}{x}}{1+\text{th}x}$

4\. $f(x) = \dfrac{x\text{th}^2 x}{1+x^2\,\text{th}x}$

3\. 1. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

2\. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$

3\. $f(x) = \dfrac{x}{\sin\frac{1}{x}}$

73. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1\. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

2\. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

2\. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

3\. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\ln\text{ch}x)$

4\. $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$

5\. $\lim\limits_{x\to\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

6\. $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arcctg}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

7\. 1. $\lim\limits_{x\to1-} \text{arctg}\,\dfrac{1}{1-x}$

2\. $\lim\limits_{x\to1+} \text{arctg}\,\dfrac{1}{1-x}$

3\. $\lim\limits_{x\to2} \text{arctg}\,\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$

8. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+2e^x+3e^{2x}}{1-e^x+e^{2x}}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+2e^x+3e^{2x}}{1-e^x+e^{2x}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{1+x^2}{1+2x^2+3x^3}$

9. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x-1}+2\ln x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{1+x^2+x^3}{1+2x^2+3x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x-1}+2\ln x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$

10. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+2x^2+3x^3)}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt[3]{\cos\dfrac{1}{x^2}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2+x^3)}{\ln(1+2x^2+3x^3)}$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1-\sqrt{1-e^x})$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{2\mathrm{ch}2x-\mathrm{ch}x}-2\mathrm{ch}x)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$

74. Állapitsuk meg, mely a valós számok esetén léteznek - és ekkor mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+a^x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos^x a$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^a-x^{-a}}{x^a+x^{-a}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{1+a^{2x}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{th}\,ax$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{1+a^x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a+a^2e^{ax}}{1+e^{ax}}$

75. Felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, vizsgáljuk meg léteznek-e és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

a) 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$, $a\in\mathbb{R}$ fix, $a\neq 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, $a,b\in\mathbb{R}$ fix, $b\neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$

4. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi - x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

b) 1. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

2. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} ax}{\arcsin bx}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

! 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

! 10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$

12. 1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$

2. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

13. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$ fix

14. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x} - \sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}$

15. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$

16. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\arcsin (x+2)}{x^2 + 2x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x}$

18. 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} (\sin x)}{\arcsin x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} x}$

19. 1. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln \sin x - \ln x)$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln \sin \frac{1}{x} + \ln x)$

76. 1. Felhasználva, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ bizonyítsuk be, hogy

$\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$

2. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln (1-x)}{x} = -1$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(a > 0$ fix$)$

2. Felhasználva 1. 1. eredményét vizsgáljuk meg: léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

A. 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} ax}{x}$ $a \in \mathbb{R}$ rögzített

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}$ $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ rögzített

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x-1}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh} x}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arth} x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty} x \operatorname{sh} \frac{1}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty} x \operatorname{arth} \frac{1}{x}$

B. 1. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(\operatorname{ch} \frac{1}{x} - 1\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\operatorname{ch} x}}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arth} ax}{\operatorname{arsh} bx}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ rögzített

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - \operatorname{arsh} x}{2x + \operatorname{arth} x}$

5. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x-a}$

3. Felhasználva az 1.-ban szereplő határértékeket, vizsgáljuk meg: léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ rögzített

2. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$, $a > 0$ rögzített

3. $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$

6. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^3+x+1)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$

! 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, $a > 0$, $b > 0$ rögzitett

9. $\lim\limits_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$ rögzitett

10. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$, $a, b \in \mathbb{R}$ rögzitett

11. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x - 1}$, $a \in \mathbb{R}$ rögzitett

! 12. $\lim\limits_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$, $a > 0$ rögzitett

! 13. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - 1}{x-1}$

! 14. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^x - a^a}{x-a}$, $a > 0$ rögzitett

15. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt[x]{a} - 1\right)$, $a > 0$ rögzitett

77. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges f valós függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén, ha van x_0-nak olyan S környezete, hogy $S \subset D_f$ és $f(x) > 0$, ha $x \in S$, valamint létezik a véges $\lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x)$, akkor létezik $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ is, és

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x)}$$

b) Fogalmazzuk meg és bizonyitsuk be az a)-ban kimondott állítás megfelelőjét a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ határértékre vonatkozóan!

2. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

! 3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$ rögzitett

4. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[\sin x]{1+\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$

! 8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}x}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$, $a\in\mathbb{R}$ rögzitett

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^{5x}$

! 12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

! 13. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg}^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)$

! 14. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

78. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{arth} bx}$, $a,b\in\mathbb{R}$ fix, $b\neq 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x\operatorname{ch}x)\cdot\sin(x\operatorname{sh}x)}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$ rögzített

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$, $a\in\mathbb{R}$ rögzített

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln\cos x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{2a+x}{a+x}$ ($a\in\mathbb{R}$ fix)

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\log_x 2$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

! 13. $\lim\limits_{x\to\infty} x\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$

15\. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

2\. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

17. $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

1\. $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$

2\. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

3\. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

18\. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{2x+2}$

2\. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{2x^2}\right)^{x^2}$

3\. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{2^x}}\right)^{2^{\frac{1}{x}}}$

20\. 1. $\lim\limits_{x\to 0+} (1+\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$

2\. $\lim\limits_{x\to 0+} (1-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$ 22. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2})$

79. Az alábbi függvények esetén állapitsuk meg, léteznek-e olyan $a,b\in\mathbb{R}$ számok, hogy fennálljon

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$$

Ha léteznek ilyenek, határozzuk meg őket!

1. $f(x)=x^2+1$

2. a) $f(x)=\dfrac{(2x)^2+1}{x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{2-3x}{3+2x}$ c) $f(x)=\dfrac{4x}{1+3x^3}$

3. a) $f(x)=\sin x$ b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

4. $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

5. a) $f(x)=\operatorname{arctg}x$ b) $f(x)=x\operatorname{arctg}x$

6. $f(x)=\sqrt[3]{c^3-x^3}$ ($c\in\mathbb{R}$ fix)

80. A. Vizsgáljuk meg, konvergensek-e az alábbi számsorozatok, és ha igen mi a határértékük!

a) $\boxed{1.}$ $a_n=n\sin\dfrac{1}{n}$

2. $a_n=\dfrac{n^2\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1}$

3. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n+1}$ $(n>1)$

4. $a_n=n^2(\ln(n^2+1)-2\ln n)$

5. $a_n=\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ $x\in\mathbb{R}$ rögzitett

6. $a_n=\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$, $a>1$, $b>0$ rögzitett

7. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

8. $a_n=\dfrac{\ln n}{n}$

9. $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

! b) 1. $a_n = \sin\left(\pi \sqrt{n^2+1}\right)$

2. 1. $a_n = \sin\left(\pi \cdot \sqrt{n^2+n}\right)$

2. $a_n = \sin^2\left(\pi \cdot \sqrt{n^2+n}\right)$

3. $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}$ rögzitett, $a_n = \sin a_{n-1}$ $(n \geq 2)$

! B. Állapitsuk meg konvergensek-e az alábbi sorozatok!

1. $a_1 > 0$ rögzitett, $a_n = \operatorname{arctg} \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$

2. $a_1 > 1$ rögzitett, $a_n = \frac{1+\ln a_{n-1}}{\ln a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$

3. $a_1 > 0$ rögzitett, $a_n = a_{n-1} + e^{\frac{n}{n+1}}$ $(n \geq 2)$

2.3 Folytonosságvizsgálat

81. Állapitsuk meg, hol értelmezettek, hol folytonosak és hol nem folytonosak az alábbi függvények!
Az értelmezési tartományba, vagy annak határára eső nem folytonossági pontok esetén állapitsuk meg
1. a függvény határértékét (ha létezik),
2. a függvény jobb- illetve bal oldali határértékeit (ha létezik),
3. a szakadások jellegét.
Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$ -ben, illetve a $-\infty$ -ben (ha létezik)!

$\boxed{a)}$ $f(x) = 1+\operatorname{th} \frac{1-2x^2}{1+x}$

b) 1. 1. $f(x) = \operatorname{sign} x^3$ 2. $f(x) = \operatorname{sign} x^4$

2. $f(x) = [x]$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \cdot [x]$

c) 1. $f(x) = x^3+2x-\sqrt{x}+1$

2\. 1. $f(x) = \frac{x}{x-2}$

2\. $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$

3\. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

4\. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

5\. 1. $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{2(x-2)}$

2\. $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{2|x-2|}$

6\. $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}}$

7\. $f(x) = \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$

8\. $f(x) = \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$

9\. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

10\. $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|} + \frac{1}{|x-3|} + \frac{1}{x-3}$

d) 1. $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$

2\. $f(x) = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}$

3\. $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^3}$

4\. $f(x) = \frac{1+x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2+\operatorname{arctg}^2 x}$

5\. $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

6\. $f(x) = \frac{1+x+e^x}{2+e^x-e^{2x}}$

7\. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{-x^2}$

8\. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{|x-2|}}$

9\. $f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{1}{1-2x}}$

10\. $f(x) = \operatorname{th} \ln \frac{1}{|1-x|}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

11. $f(x) = \operatorname{tg} e^{-\frac{1}{x}}$

12. $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$

13. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-e^{-x^2}}}$

15. $f(x) = \sqrt[3]{1-\operatorname{sign}^2 x}$

16. $f(x) = \frac{1}{1-2^{-x}}$

17. 1. $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^2}$

2. $f(x) = x \sin \frac{1}{x^2}$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

18. $f(x) = (1+\sin x)^{x^2}$

19. $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$

20. $f(x) = x^{e^{\frac{1}{x}}}$

21. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

22. $f(x) = e^{-e^{-\frac{1}{x}}}$

23. $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$

24. $f(x) = \sqrt[3]{1-e^{-\sin x}}$

25. $f(x) = \frac{2x}{x-\sin x}$

26. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x(x+1)^2}$

27. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$

28. $f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{1}{1+2^{\frac{2-x}{x-1}}}$

29. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)(x^2+1)}{x}$

30. $f(x) = \sqrt{1-\ln(x-1)^2}$

e) 1. $$f(x) = \begin{cases} \ln x^2 & -\infty < x \leqslant -1 \\ \operatorname{arth} x & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{e^{x^2-1}} & 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-2x} & 1 \leqslant x < \infty, \quad x \neq 2 \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 2-x & 1 < x \leqslant 2 \\ (x-2)^2 & 2 \leqslant x < 3 \\ 1+e^{-\frac{1}{x-3}} & 3 < x < \infty \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\pi}{x^2} & x \leqslant - < \pi \\ \dfrac{|\sin x|}{x} & -\pi < x < \pi, \quad x \neq 0 \\ \left(1+\sin \dfrac{1}{x-\pi}\right)\left(1+e^{\frac{1}{\pi-x}}\right) & x > \pi \end{cases}$$

4. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcth} x & |x| > 1 \\ \dfrac{\sin \pi x}{x^2-x} & |x| < 1, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

5. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x+1} & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x+1} & -1 < x \leqslant 0 \\ \dfrac{\pi}{4} - x & 0 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{\ln(x-2)} & x > 2, \quad x \neq 3 \end{cases}$$

6. $$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{ha } x \notin \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ 0 & \text{ha } x \notin \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{x} & x < -1 \\ \dfrac{x}{\operatorname{sign} x} & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \dfrac{x}{\operatorname{sign} x} & 0 < x < 1 \\ \dfrac{x}{\operatorname{sign} x} & 1 < x \leq 2 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{x-5} & 2 < x < 5 \\ -\dfrac{\pi}{2} & x = 5 \\ \dfrac{\pi}{2} \operatorname{th} \dfrac{1}{5-x} & x > 5 \end{cases}$$

f) 1. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

3. $f(x) = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{x + e^{xt}}{1 + e^{xt}} \quad (t \in \mathbb{R})$

2. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{1 + x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

4. $f(x) = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)} \quad (t \in \mathbb{R})$

82. Adjunk példát olyan függvényre, mely elemi függvényekből összetett függvény képzéssel és alapmüveletekkel áll elő és:

1. 1. csak egész x-ekre értelmezett,
   2. csak pozitiv egész x-ekre értelmezett,
   3. csak egy adott $a \in \mathbb{R}$ pontban értelmezett,
   4. sehol sem értelmezett,
   5. egy előre adott $a \in \mathbb{R}$ pontnak sem olyan S_1 környezete nincs, hogy $S_1 \setminus \{a\} \subset D_f$, sem olyan S_2 környezete, hogy $S_2 \cap D_f = \emptyset$.