

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Pach Zsigmond Pálné

MATEMATIKAI FELADATTÁR
VII.

Komplex függvénytan

Szerkesztette:
Antos Péter



Műegyetemi Kiadó, 2002.

Szerkesztette:

Antos Péter

Szerző:

Dr. Pach Zs. Pálné

(Negyedik utánnomás)

Azonosító: **051413**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Hajdu István

Terjedelem: 42,4 (A/5) fv

Nyomta és kötötte:

Műegyetemi Nyomda

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 189/02

FELADATOK

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN ELŐKÉSZÍTÉSE

1.§ KOMPLEX SZÁMOK ÉS SZÁMHALMAZOK

1.1 KOMPLEX SZÁMSÍK; RIEMANN-FÉLE SZÁMGÖMB

1. Határozzuk meg a

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -1; \quad z_3 = j; \quad z_4 = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

pontok képeit a Riemann gömbön!

2. Határozzuk meg a z sík

- a) origóra szimmetrikus,
- b) valós tengelyre tükrös,
- c) egységgörre inverz

pontpárjának képét a Riemann gömbön.

3. Határozzuk meg az

- a) $\arg z = \alpha$ félegyenes,
- b) $|z| = R$ kör

gömbi képét!

4. A Riemann gömbön hol helyezkednek el a komplex sík

- a) $|z| < 1$; $|z| = 1$; $|z| > 1$,
- b) $\operatorname{Re} z > 0$; $\operatorname{Re} z < 0$,
- c) $\operatorname{Im} z > 0$; $\operatorname{Im} z < 0$

összefüggésekkel jellemzett pontjai?

5. Legyenek z_1^* és z_2^* a komplex sík z_1 és z_2 pontjainak gömbi képpontjai; É a $z = \infty$ -nek megfelelő északi pólus. Igazoljuk, hogy

$$\angle z_1^* z_2^* \text{ és } \angle z_1 z_2$$

hasonló háromszögek.

⑥ Határozzuk meg a komplex sík z_0 középpontú, R sugarú köre gömbi képének sugarát!

1.2 KOMPLEX SZÁMHALMAZOK - SÍKBELI PONTHALMAZOK

7. Számítsuk ki

$$f(n) = \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^n$$

értékét, ha $n = 1, 2, 3, 4$ és igazoljuk, hogy

$$f(n+4) = -f(n)$$

8. Adjuk meg az alábbi komplex számhalmazok torlódási pontjait!

- $\frac{1}{m} + \frac{j}{n}$, (m és n természetes számok)
- $z = 1 + (j)^n \frac{n}{n+1}$, ($n = 1, 2, \dots$)
- $|z| < 1$,
- $|z| > 0$,
- az egységgörbő belsejébe eső összes, $z = x + jy$ nem valós számok halmaza,
- azon $z = x + jy$ számok halmaza, ahol x és y racionális.

9. Legyen H mindazon $a + jb$ komplex számok halmaza (" a " és " b " racionális szám), amelyek a $0; 1; 1+j; j$ csúspontú négyzetben vannak.

- H korlátos halmaz-e?
- Határozzuk meg H határpontjainak halmazát!
- H zárt halmaz-e?
- Határozzuk meg H belső pontjait!
- H nyílt halmaz-e?
- H összefüggő halmaz-e?
- H tartomány-e?

10. Az $\text{Im } z \geq 0$ félsík pontjaiból hagyjuk el a $z = 0$ és a $z = \pm \frac{1}{n}$; $n = 1, 2, \dots$ pontokat.

- A fennmaradó pontok H halmaza tartomány-e?
- Határozzuk meg H határpontjait!
- Határpont-e $\frac{j}{2}$?
- Egyszeresen összefüggő tartomány-e H ?

11. Tartományok-e az alábbi egyenlőtlenségekkel definiált síkbeli ponthalmazok?

a) $|z^2 - 1| \leq 1,$

b) $\cos \varphi < r < 2 \cos \varphi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

(ez utóbbiban r és φ polárkoordináták).

12. Döntsük el, hogy a komplex sík

$$|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$$

egyenlőtlenséggel definiált ponthalmaza

a) korlátos-e;

b) összefüggő-e;

c) zárt-e?

13. Korlátosak-e, nyíltak-e, összefüggők-e az alábbi összefüggésekkel jellemzett ponthalmazok?

a) $|\operatorname{Re} z| < 2$

b) $|z - 4| > 3,$

c) $|z - 1 + 3j| \leq 1,$

d) $|\operatorname{Im} z| > 1,$

e) $\operatorname{Re} z > 0,$

f) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}; \quad z \neq 0.$

1.3 GÖRBÉK ÉS TARTOMÁNYOK A KOMPLEX SÍKON

14. Adjuk meg a komplex sík alábbi görbeseregeinek az x és y Descartes-koordinátákkal kifejezett egyenletét!

a) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = c, \quad (-\infty < c < \infty)$

b) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = c, \quad (\quad " \quad)$

c) $\operatorname{Re} z^2 = c, \quad (\quad " \quad)$

d) $\operatorname{Im} z^2 = c, \quad (\quad " \quad)$

e) $\arg \frac{z-1}{z+1} = \alpha, \quad (-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$

f) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \lambda \quad (\lambda > 0)$

15. Írjuk fel z és $\bar{z}$ segítségével az

a) $x^2 - y^2 = 1$

b) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1$

c) $x^2 - 4y - 4 \geq 0$

összefüggéseket!

16. A komplex sík mely görbéit jellemzik az alábbi összefüggések?

a) $|z - z_1| = |z - z_2|$;

b) $|z - z_1| = k |z - z_2|$; $k \neq 1$

c) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2\lambda$; $\lambda > 0$

d) $\bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$;

ahol $z_1, z_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ rögzített komplex számok, k és λ valós konstansok.

17. A komplex sík mely tartományait jellemzik az

a) $-\pi < \arg z < \pi$; $|z| > 2$,

b) $|2z + 3| > 4$,

c) $1 < |z - 2j| < 2$,

d) $\operatorname{Im} z^2 > 0$,

e) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$.

f) $|z - 4| > |z|$

összefüggések?

18. A komplex sík mely ponthalmazait - görbéit és tartományait - jellemzik az

a) $|z - 2| - |z + 2| > 3$,

b) $|z - 2| + |z + 2| = 5$,

c) $0 < \operatorname{Re} jz < 1$,

d) $\operatorname{Im} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$,

$$e) \operatorname{Re} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0,$$

$$f) |z| + \operatorname{Re} z \leq 1$$

összefüggések?

19. Legyen a, b , tetszőleges komplex, α tetszőleges valós állandó. Határozzuk meg az alábbi összefüggéseket kielégítő pontok geometriai helyét!

$$a) \operatorname{Re} (az + b) = \alpha$$

$$b) |z - a| + |z - b| = \alpha$$

$$c) 0 \leq \arg \frac{z-j}{z+j} < \frac{\pi}{4}$$

$$d) |2z| > |1 + z^2|$$

20. A komplex sík egy görbeserege

$$a) |z^2 - 1| = \lambda; \quad (\lambda > 0)$$

$$b) |z^2 + az + b| = \lambda; \quad (\lambda > 0)$$

összefüggéssel adott.

Állapítsuk meg, hogy λ milyen értékei mellett lesznek a görbesereg elemei összefüggő görbék és milyen értékei mellett esnek szét két görbére.

2.§ KOMPLEX SZÁMSOROZATOK ÉS SOROK

2.1 SZÁMSOROZATOK

[21]. Igazoljuk, hogy

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2jn}}{n^3 + 1} = 0,$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+3j} - \frac{jn}{n+6} \right) = 1 - j,$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{1+j}{2} \right)^n \right] = 0,$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} nj^n \text{ nem létezik.}$$

22. A határérték-műveletek felhasználásával állapítsuk meg az

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{jn^2 - jn + 1 - 3j}{(2n + 4j - 3)(n - j)},$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n + 3j)(n - j)}{jn^2 - 3n + 4 - j} \right|,$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 2j} - \sqrt{n + j}),$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} [n (\sqrt{n + 2j} - \sqrt{n + j})]$$

határértékeket!

23. Határozzuk meg az

$$a) z_n = \left(\frac{j+1}{\sqrt{\pi}}\right)^n,$$

$$b) z_n = \frac{jn}{n^2 + 1},$$

$$c) z_n = \frac{jn + n^2}{n^2 + j},$$

$$d) z_n = e^{-\frac{1}{n^2 + j}}$$

számsorozatok határértékét.

24. Legyen $A > 0$ valós szám.

a) Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq -A$$

létezéséhez szükséges és elégséges, hogy létezzen a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \neq 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n$$

$(-\pi < \arg z_n < \pi)$ határérték.

[b]. Mikor lesz a (z_n) sorozat határértéke azonos a $(|z_n|)$ sorozatával?

[25]. Legyen a (z_n) komplex elemű számsorozat egy tör-
lődési pontja z_0 . Igazoljuk, hogy a (z_n) sorozatból kivá-
lasztható z_0 -hoz konvergáló (z_{n_k}) részsorozat!

[26]. Igazoljuk, hogy ha (z_n) egy konvergens komplex
számsorozat, amelynek határértéke z_0 , akkor a sorozat elemei-
nek tetszőleges átrendezésével nyert (z_n^*) sorozat is konver-
gens, és határértéke z_0 .

[27]. a) Igazoljuk, hogy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z_0|.$$

b) Adjunk példát arra, amikor egy komplex elemű
 (z_n) számsorozat divergens, de az elemek abszolút értékeiből
alkotott számsorozat konvergens!

28. Legyen (z_n) és (z_n^*) két komplex számsorozat. Döntsük
el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek
hamisak:

a) ha (z_n) és (z_n^*) konvergens,

akkor: $(z_n + z_n^*)$ is konvergens;

b) ha (z_n) és (z_n^*) divergens,

akkor: $(z_n + z_n^*)$ is divergens;

c) ha $(z_n + z_n^*)$ konvergens,

akkor: (z_n) és (z_n^*) is konvergens;

d) ha $(z_n + z_n^*)$ konvergens,

akkor: vagy (z_n) , vagy (z_n^*) konvergens;

e) ha $(z_n + z_n^*)$ divergens,

akkor: (z_n) és (z_n^*) is divergens;

f) ha $(z_n + z_n^*)$ divergens,

akkor vagy (z_n) , vagy (z_n^*) divergens

Az igaz állításokat bizonyítsuk be, a hamisakra adjunk ellenpéldát!

29. a) Igazoljuk, hogy a komplex elemű (z_n) számsorozatnál a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad (\neq \infty)$$

feltételből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = z_0.$$

b) Érvényes-e az állítás $z_0 = \infty$ esetére is?

30. Igazoljuk, hogy komplex elemű számsorozatok esetén a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad (\neq \infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^* = z_0^* \quad (\neq \infty)$$

feltételekből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + \dots + z_n z_n^*}{n} = z_0 \cdot z_0^*$$

31. Igazoljuk, hogy komplex elemű számsorozat esetén, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad (\neq \infty),$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{1} z_1 + \binom{n}{2} z_2 + \dots + \binom{n}{n} z_n}{2^n} = z_0$$

(32). Igazoljuk, hogy

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + j \sin y) ,$$

ahol $z = x + j y$;

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} [n (\sqrt[n]{z} - 1)] = \ln r + j \varphi + 2k \pi j$$

ahol $r = |z|$; $\varphi = \arg z$ és $k = 0, 1, 2, \dots$

2.2 SZÁMSOROK

[33]. Állapítsuk meg, hogy konvergensek-e az

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+jn)^2}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+jn}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (1+jn)$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3} + j)^n}{5^{n/2}}$$

komplex tagú számsorok!

(34). Rögzített $z \in \mathbb{C}$ mellett vizsgáljuk meg, hogy a

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arg(z+jn)}{1+jn}$$

sorok divergensek-e?

[35]. Legyen z_0 egy tetszőleges komplex szám, amelyre $|z_0| < 1$. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_0^k = \frac{1}{1-z_0} .$$

36. Igazoljuk az alábbi sorok konvergenciáját és határozzuk meg összegüket!

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{2^k} ;$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} (-3)^{-k} e^{jk\frac{\pi}{2}} ;$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{2}j)^k}{4^{k/2}} ;$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} \cdot e^{jk\frac{\pi}{2}} .$$

37. Vizsgáljuk konvergencia és abszolút konvergencia szempontjából az alábbi komplex tagú számsorokat!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^n}{n^2} ;$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^n \ln n}{n^2 + 1} ;$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right) ;$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^n + 1}{\sqrt{n^3}} ;$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} ; |z| < 1 .$$

38. Állapítsuk meg, hogy konvergens, abszolút konvergens, vagy divergens a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor, ha:

$$a) a_n = \frac{n}{(2j)^n} ,$$

$$b) a_n = \frac{n!}{(jn)^n},$$

$$c) a_n = e^{jn},$$

$$d) a_n = \frac{e^{jn}}{n},$$

$$e) a_n = \frac{e^{jn\varphi}}{n},$$

$$f) a_n = \frac{e^{jn}}{n^2},$$

$$g) a_n = \frac{j}{n} e^{j \cdot \frac{\pi}{n}},$$

$$h) a_n = \frac{\cos jn}{2^n},$$

$$i) a_n = \frac{n \sin jn}{3^n},$$

$$j) a_n = \frac{(1+j)^n}{n}.$$

[39]. Igazoljuk, hogy ha a komplex tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens és $|\arg a_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, akkor a sor abszolút konvergens!

(40). Igazoljuk, hogy ha a konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tagjai a komplex sík egy π -nél határozottan kisebb szögterébe esnek, akkor a sor abszolút konvergens!

[41]. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ két konvergens komplex tagú sor. Igazoljuk, hogy ha $\operatorname{Re} a_n \geq 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ sor is konvergens!

(42). Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ komplex tagú sor konvergens és összege S , akkor az

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n}{n(n+1)}$$

sor is konvergens és összege S .

43. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ komplex tagú sor konvergens és összege S , akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left[\binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \dots + \binom{n}{n} a_n \right]$$

sor is konvergens és összege S .

44. Igazoljuk, hogy a komplex tagú

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

sorok konvergenciájából következik a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_n & b_n^q \end{pmatrix}; \quad (q > 0 \text{ egész szám})$$

sor konvergenciája!

45. Legyen $0 < a < b$. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a + j n^b}$$

sor akkor és csak akkor konvergens, ha $b > 1$.

(46). Legyen

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

és

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

két tetszőleges számsorozat. Alkalmazva az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n; \quad (n = 0, 1, \dots)$$

jelölést, igazoljuk, hogy tetszőleges $n \geq 0$ és $p \geq 1$ egész szám esetén

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k b_k) = \left[\sum_{k=n+1}^{n+p} s_k (b_k - b_{k+1}) \right] - s_n b_{n+1} + s_{n+p} b_{n+p+1}$$

(Abel transzformáció).

(47). Legyen (a_n) komplex elemű, (b_n) valós elemű számsorozat, $b_n > 0$ minden n -re.

Igazoljuk, hogy akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ komplex tagú sor részletösszegei korlátosak legyenek és a (b_n) sorozat monoton csökkenőleg a 0-hoz tartson. (Dirichlet-tétel).

(48). Legyen (a_n) komplex elemű, (b_n) valós elemű számsorozat.

Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens és a (b_n) sorozat monoton és korlátos legyen. (Abel-tétel).

[49]. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ komplex tagú sor s_n részletösszegeiből képzett

$$\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}} \right) \quad (*)$$

sorozat korlátos; a pozitív elemű (b_n) valós számsorozat monoton csökkenő;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot b_n) = 0; \quad (**)$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (b_n - b_{n+1}) \quad (***)$$

sor konvergens.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$$

komplex tagú sor konvergens!

[50]. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ egy konvergens vagy divergens komplex tagú végtelen sor, amelynek n -edik részletösszege s_n , továbbá (b_n) egy olyan komplex elemű számsorozat, hogy az

$$(s_n \cdot b_{n+1})$$

számsorozat és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n (b_n - b_{n+1})$$

sor konvergens. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$$

sor is konvergens.

KOMPLEX VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPFOGALMAI

1.§ KOMPLEX FÜGGVÉNY ÉS RELÁCIÓ

ÖSSZETETT FÜGGVÉNY, INVERZ FÜGGVÉNY

1. Határozzuk meg az alábbi komplex függvények értelmezési tartományát:

$$a) f(z) = \frac{z}{z^3 - j} ; \quad (z = x + j y)$$

$$b) f(z) = y^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot 3^n \cdot x^n) \right] + j \frac{x}{y(1-y)} ,$$

$$c) f(z) = \frac{\ln y}{x+4} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} x ,$$

$$d) f(z) = \frac{x}{(y-4)^2} \int_0^{\infty} 2^{xt} dt + j \sin x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} y^n$$

2. Állapítsuk meg, hogy hány rétvű függvényt, ill. relációt értelmeznek az alábbi összefüggések:

$$a) f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} ,$$

$$b) f(z) = \sqrt{(4-z)(z^2 + 4)} ,$$

$$c) f(z) = \sqrt[3]{\frac{z^2 + 2}{z^2 - 2}} ,$$

$$d) f(z) = \frac{3}{z} - \frac{\bar{z}}{j + z} ,$$

$$e) f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 4)^2} ,$$

3. Határozzuk meg, hogy a

$$w = z^2$$

függvény mire képezi le az

- a) $x = c$ egyeneseket,
- b) $y = c$ "
- c) $x = y$ "
- d) $|z| = R$ köröket,
- e) $\arg z = \alpha$ félegyeneseket.

és mik a z síkbeli "ősképei" az

- f) $u = c$,
- g) $v = c$,

egyeneseknek ($w = u + j v$)?

4. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z}$$

függvény mire képezi le az

- a) $x = c$ egyeneseket,
- b) $y = c$ "
- c) $|z| = R$ köröket,
- d) $\arg z = \alpha$ félegyeneseket,
- e) $|z - 1| = 1$ kört

és mik a z síkbeli "ősképei" az

- f) $u = c$,

és

- g) $v = c$,

egyeneseknek.

5. Határozzuk meg - amennyiben léteznek - az f o g és g o f összetett függvényeket az alábbi esetekben:

a) $f = \sqrt{g}$
 $g = j + 3z$

b) $f = g^2 + j g$
 $g = \bar{z} + \frac{1}{z}$

$$c) \quad f = \frac{z}{4 + z^2}$$

$$g = |z| + z^2$$

6. Írjuk fel - amennyiben léteznek - az alábbi függvények inverzét! Állapítsuk meg az inverz függvények értelmezési tartományát és döntsük el, hogy ott függvényt; vagy relációt értelmeznek-e:

$$a) \quad f(z) = (2z - j)^3,$$

$$b) \quad g(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

$$c) \quad h(z) = \frac{1}{4z + 3jz-1}.$$

2.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

7. Legyenek b , c és z_0 rögzített komplex állandók. Igazoljuk, hogy

$$a) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} c = c,$$

$$b) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0,$$

$$c) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (b z + c) = b z_0 + c,$$

$$d) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c,$$

$$e) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0,$$

$$f) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0,$$

$$g) \quad \lim_{z \rightarrow 2j} (2x + jy^2) = 4j,$$

$$h) \lim_{z \rightarrow 1-j} [x + j (2x + y)] = 1 + j ,$$

$$i) \lim_{z \rightarrow j} \frac{z^2 + 1}{z-j} = 2 j .$$

8. Állapítsuk meg az alábbi határértékeket:

$$a) \lim_{z \rightarrow 1+j} \frac{z^2 - z + 1 - j}{z^2 - 2z + 2} ,$$

$$b) \lim_{z \rightarrow j} \frac{z - j}{z^3 - 3jz^2 - 3z + j} ,$$

$$c) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^4 + 1}{-jz^4 + 1} .$$

9. Igazoljuk, hogy:

$$a) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 e^z}{\bar{z}} = 0 ,$$

$$b) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - z} = \infty ,$$

$$c) \lim_{z \rightarrow j} |z| = 1 ,$$

$$d) \lim_{(x+jy) \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x+y)}{x+y} + j (y^2+1) \right] = 1 + j ,$$

$$e) \lim_{(x+jy) \rightarrow 0} \frac{e^x \sin y + j e^y \cos x}{y} = \infty ,$$

$$\textcircled{f) \lim_{(x+jy) \rightarrow 0} \frac{x(\cos y - 1) + j y \sin x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 .}$$

10. A határérték-műveletek felhasználásával állapítsuk meg az alábbi határértékeket:

$$a) \lim_{z \rightarrow z_0} z^n, \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

$$b) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^n}; \quad z_0 \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

$$c) \lim_{z \rightarrow j} \frac{jz^3 - 1}{z + 1},$$

$$d) \lim_{z \rightarrow j} \frac{z^2 + 1}{j(z^4 - 1)},$$

$$e) \lim_{z \rightarrow 2e} j \frac{\pi}{3} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16},$$

$$f) \lim_{z \rightarrow -2j} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2 - 2z + 4}.$$

11. Állapítsuk meg az alábbi határértékeket:

$$a) \lim_{z \rightarrow 2j} (jz^4 + 3z^2 - 10j),$$

$$b) \lim_{z \rightarrow e} j \frac{\pi}{4} \frac{z^2}{z^4 + z + 1},$$

$$c) \lim_{z \rightarrow j/2} \frac{(2z-3)(4z+j)}{(jz-1)^2},$$

$$d) \lim_{z \rightarrow j} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1},$$

$$e) \lim_{z \rightarrow 1+j} \left(\frac{z-1-j}{z^2-2z+2} \right)^2.$$

Minden egyes esetben ismertessük a kiszámítás során felhasznált tételeket!

12. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (\operatorname{Re} z)^2 < \operatorname{Im} z < 2(\operatorname{Re} z)^2, \\ 0 & \text{minden más } z\text{-re} \end{cases}$$

függvénynek a

$$\{z \mid \operatorname{Im} z = \alpha \operatorname{Re} z\} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

halmazra szorítkozva a $z = 0$ pontban létezik határértéke, egyébként azonban a

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$$

határérték nem létezik.

13. Válasszuk ki az

$$f(z) = \sqrt{z^2 + 3}$$

reláció azon ágát, amelyen $f(0) = \sqrt{3}$, és igazoljuk, hogy

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sqrt{z^2 + 3} - 2}{z - 1} = \frac{1}{2}.$$

14. Igazoljuk, hogy ha $f(z)$ értelmezett a z_0 pont egy környezetében és

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad (A \neq 0, A \neq \infty)$$

létezik, akkor

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = \infty.$$

3.8 KOMPLEX FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA ÉS EGYENLETES FOLYTONOSSÁGA

15. Legyen

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + 4}{z - 2j} & \text{ha } z \neq 2j \\ 3 + 4j & \text{ha } z = 2j \end{cases}$$

Folytonos-e a függvény a $z = 2j$ pontban? Indokoljuk állításunkat!

16. Vizsgáljuk meg az $f(z) = 0$ pontban az

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}$$

függvényt határérték és folytonosság szempontjából!

17. Állapítsuk meg az alábbi függvények határértékét azokban a pontokban, ahol azok nem folytonosak!

a) $f(z) = \frac{z - 1}{z^2 - z - 2},$

b) $f(z) = \frac{2z - 3}{z^2 + 2z + 2},$

c) $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^4 - 16},$

18. Legyen $z \neq 0$ esetén

$$f_1(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{1 + |z|},$$

$$f_2(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|},$$

$$f_3(z) = \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|},$$

$$f_4(z) = \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z^2|},$$

$$f_5(z) = \frac{(\operatorname{Re} z^2)^2}{|z^2|},$$

és legyen $z = 0$ esetén mind az öt függvény értéke 0. Az így értelmezett függvények közül melyek folytonosak és melyek nem?

19. Helyettesítsünk az előző feladat mind az öt függvényébe $\operatorname{Re} z$ helyett $\operatorname{Im} z$ -t és válaszoljunk az ott feltett kérdésekre!

20. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 1}$$

függvény a $|z| \leq 1$ körtartományon 4 pont kivételével mindenütt folytonos! Határozzuk meg ezeket a pontokat!

21. Igazoljuk, hogy

$$a) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 + 9}$$

folytonos és korlátos a $|z| \leq 2$ tartományon

$$b) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 3z + 2}$$

folytonos a $|z| > 2$ tartományon.

22. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = 3z - 2$$

függvény egyenletesen folytonos a $|z| \leq 10$ tartományon!

23. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

függvény

a) nem egyenletesen folytonos a $|z| \leq 1$

tartományon;

b) egyenletesen folytonos az $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$

tartományon.

24. Döntsük el, hogy folytonos, illetve egyenletesen folytonos-e a $|z| < 1$ körtartományon az

$$a) f(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$b) f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

függvény!

25. Folytonos, illetve egyenletesen folytonos-e az

$$a) f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{z^2}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvény a $|z| \leq R$ tartományon;

$$b) g(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$$

függvény a $0 < |z| \leq R$; $|\arg z| \leq \frac{\pi}{6}$ körszektorban?

26. Igazoljuk, hogy a $w = e^{\frac{1}{z}}$ függvény

$$a) a) \quad 0 < |z| \leq 1; |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$$

félkörtartományon korlátos, de nem folytonos;

b) az a)-beli félkörtartomány belsejében

folytonos, de nem egyenletesen folytonos;

$$c) a) \quad 0 < |z| \leq 1; |\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

körszektorban egyenletesen folytonos.

27. Legyen $f(z)$ egyenletesen folytonos a $|z| < 1$ körtartományon.

a) Igazoljuk, hogy a $|z| = 1$ kör bármely ξ pontjában tetszőleges $z_n \rightarrow \xi$; $|z_n| < 1$ esetén létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$$

határérték.

b) Igazoljuk, hogy a $|z| = 1$ körön felvett határértékekkel kiegészített f függvény folytonos a teljes $|z| \leq 1$ körtartományon.

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

1.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

1.1 DIFFERENCIÁLHATÓSÁG, CAUCHY-RIEMANN EGYENLETEK

1. A különbségi hányados segítségével határozzuk meg az alábbi függvények adott pontbeli differenciálhányadosát:

$$a) f(z) = z^3 - 2z, \quad z = z_0; \quad z_0 = -1$$

$$b) f(z) = 3z^2 + 4jz - 5 + j, \quad z_0 = 2$$

$$c) f(z) = \frac{2z - j}{z + 2j}, \quad z_0 = -j$$

$$d) f(z) = \frac{3}{z^2}, \quad z_0 = 1+j$$

$$e) f(z) = \sqrt{z} - \frac{2}{z}; \quad z_0 = 1; \quad (0 \leq \arg z \leq \pi)$$

$$f) f(z) = \frac{1}{\sqrt{3-jz}}, \quad z_0 = j; \quad (0 \leq \arg z \leq \pi)$$

2. A differenciálási szabályok alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát:

$$a) w = (2z + 3j)(z - j)$$

$$b) w = \frac{2z - 1}{z + 2j}$$

$$c) w = (2jz + 1)^2$$

$$d) w = \frac{1}{(jz-1)^3}$$

$$e) w = \sqrt{z^2 + 1} \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

3. A differenciálási szabályok alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények adott pontbeli differenciálhányadosát:

- a) $f(z) = (z^2 + 3j)(1-3jz); \quad z_0 = -j$
- b) $f(z) = \frac{3j}{(2-jz^2)^5}; \quad z_0 = 1 - j$
- c) $f(z) = \frac{(z+2j)(j-z)}{2z-1}; \quad z_0 = j$
- d) $f(z) = [z + (z^2 + 1)^2]^2; \quad z_0 = 1 + j$

4. A differenciálhatóság - Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletekkel megfogalmazott - szükséges és elégséges feltétele alapján állapítsuk meg, hogy hol differenciálhatók az alábbi függvények:

- a) $f(z) = x^2 + j y^2$
- b) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + j(3x^2y - y^3)$
- c) $f(z) = x^3 + 3xy^2 - j(3x^2y - y^3)$
- d) $f(z) = y^3 - j(x-1)^3$
- e) $f(z) = e^{y^2 - x^2} (\cos 2xy - j \sin 2xy)$
- f) $f(z) = z^2 \operatorname{Re} z$
- g) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$
- h) $f(z) = \sqrt{z-1} \quad (-\pi < \arg z < \pi)$
- i) $f(z) = \arg z; \quad z \neq 0 \text{ és } (-\pi < \arg z < \pi)$

Ahol differenciálhatók, ott határozzuk meg a deriváltjukat!

[5]. a) Igazoljuk, hogy ha az f komplex függvény differenciálható a z_0 pontban, akkor ott folytonos.

b) Adjunk példát arra, hogy az a) pontbeli állítás megfordítása nem szükségképpen igaz.

⑥. Az alábbi függvények segítségével illusztráljuk, hogy a folytonosság a differenciálhatóságnak csak szükséges, de nem elégséges feltétele:

$$a) f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$$

$$b) f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z = 0 \text{ és ha } |z| \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } |z| = \frac{p}{q} \text{ racionális;} \\ & p \text{ és } q \text{ relatív prímek} \end{cases}$$

⑦. Az alábbi függvények segítségével illusztráljuk, hogy a C.-R. egyenletek teljesülése (a komplex függvény valós és képzetes részének differenciálhatósága nélkül) a differenciálhatóságnak csak szükséges, de nem elégséges feltétele:

$$a) f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{z^4}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0, \end{cases}$$

$$b) f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x y = 0 \\ 1, & \text{ha } x y \neq 0. \end{cases}$$

⑧. Az alábbi függvények segítségével illusztráljuk, hogy a C.-R. egyenletek teljesülése esetén a parciális deriváltak folytonossága a differenciálhatóságnak elégséges, de nem szükséges feltétele:

$$a) f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|z|}}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0; \end{cases}$$

$$b) f(z) = \begin{cases} |z|^2 \operatorname{sh} \frac{1}{|z|}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0. \end{cases}$$

9. Ha

$$f(z) = x^3 + j(y-1)^3 = u + jv$$

akkor

$$u'_x + jv'_x = 3x^2.$$

Indokoljuk, hogy $3x^2$ miért csak a $z = j$ pontban adja meg $f'(z)$ -t!

10. Legyen

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 + jy^3}{x^2 + y^2} & , \text{ ha } z = x + jy \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } z = 0 \end{cases}$$

- a) Mely pontokban teljesülnek a C.-R. egyenletek?
- b) Mely pontokban differenciálható a függvény?

[11]. Legyen

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(z - \alpha)^n}{|z - \alpha|} & \text{ha } z \neq \alpha ; n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{ha } z = \alpha \end{cases}$$

- a) Milyen n értékekre folytonos f a $z_0 = \alpha$ pontban?
- b) Milyen n értékekre differenciálható f a $z_0 = \alpha$ pontban?

12. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények sehol sem differenciálhatók:

a) $f(z) = z - \bar{z}$

b) $f(z) = 2x + jxy^2$

c) $f(z) = e^x (\cos y - j \sin y)$

[d] $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-|z|} & , \text{ ha } |z| < 1 \\ \infty & , \text{ ha } |z| = 1 \end{cases}$

[13]. Igazoljuk, hogy

$$w = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - x + jy}$$

differenciálható függvénye $z = x + jy$ -nak, és fejezzük ki a függvényt és differenciálhányadosát a z komplex változóval!

[14]. Igazoljuk, hogy ha

$$u_1(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_2(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

akkor

$$f'(z) = u_1(z, 0) - ju_2(z, 0)$$

15. Határozzuk meg az "a", "b", "c" konstansokat úgy, hogy az

$$a) f(z) = x + ay + j(bx + cy)$$

ill.

$$b) f(z) = \cos x(chy + a shy) + j \sin x (chy + b shy)$$

függvény mindenütt differenciálható legyen. írjuk fel a differenciálhányadosát!

16. Határozzuk meg azt a tartományt, ahol az

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2j |xy|$$

függvény differenciálható.

17. Konstruáljunk olyan komplex függvényt, amely a $|z| < 1$ tartományon értelmezett és folytonos, de csak a $z = 0$ pontban differenciálható!

18. Konstruáljunk olyan komplex függvényt, amely egy T tartományon folytonos és ott bizonyos egyenesek kivételével nem differenciálható!

[19]. Konstruáljunk olyan komplex függvényt, amely egy T tartományon értelmezett, T bizonyos "sűrűn" elhelyezkedő pontjaiban differenciálható, de más sűrűn elhelyezkedő pontjaiban nem differenciálható.

20. Igazoljuk, hogy ha a $w = f(z) = u + jv$ komplex függvény a z pontban az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

a) u és v differenciálható,

b) $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ létezik,

akkor vagy f , vagy $\bar{f}$ differenciálható a z pontban.

21. Igazoljuk, hogy ha a $w = f(z) = u + jv$ függvény a z pontban az alábbi tulajdonságú:

a) u és v differenciálható,

b) $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\operatorname{arc} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right]$ létezik,

akkor f differenciálható a z pontban.

22. Igazoljuk $w = f(z)$ komplex függvény esetében az alábbi állításokat!

a) ha a z pontban létezik

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right],$$

akkor ott u'_x és v'_y is létezik és megegyezik;

b) ha a z pontban létezik

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right],$$

akkor ott u'_y és v'_x is létezik és $u'_y = -v'_x$;

c) ha a z pontban u és v differenciálható, akkor az a) és b) határértékek egyikének létezése maga után vonja a másik létezését, következésképpen az f függvény differenciálhatóságát.

23. írjuk fel a (ξ, η) görbevonali koordináta-rendszerben a C.-R. egyenleteknek megfelelő parciális differenciálegyenleteket, ha

$$x = e^{\xi} \operatorname{ch} \eta,$$

$$y = e^{\xi} \operatorname{sh} \eta$$

24. Írjuk fel r és φ polárkoordinátákkal

a) a C.-R. egyenleteknek megfelelő parciális differenciálegyenleteket;

b) az $f'(z)$ differenciálhányadost, r és φ függvényében, ha $z = re^{j\varphi}$ és $f(z) = u(r, \varphi) + jv(r, \varphi)$

25. Határozzuk meg a polárkoordinátákkal adott alábbi függvények differenciálhányadosát:

$$a) w = \frac{1}{r^3} e^{-3j\varphi} \quad \left(= \frac{1}{z^3} \right)$$

$$b) w = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + j \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \quad \left(= z + \frac{1}{z} \right)$$

1.2 MAGASABB RENDŰ DERIVÁLTAK

26. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények első- és másodrendű deriváltja minden z -re létezik és határozzuk meg $f'(z)$ -t és $f''(z)$ -t!

$$a) f(z) = 3 - 2jz + z^2$$

$$b) f(z) = (j + z)^3$$

$$c) f(z) = \cos 4x \operatorname{ch} 4y - j \sin 4x \operatorname{sh} 4y$$

$$d) f(z) = (2x - x^3 + 3xy^2) + j(2y + y^3 - 3x^2y)$$

27. Határozzuk meg az alábbi függvények másodrendű deriváltjait:

$$a) f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 4z + 2j}} \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

$$b) f(z) = \sqrt[3]{z + 2\sqrt{z}} \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

$$c) f(z) = \frac{1}{z \sqrt{1 - z^2}} \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

28. Határozzuk meg az alábbi függvények első- és másodrendű deriváltjait az adott z_0 pontokban:

- a) $f(z) = j z + 2$; $z_0 = 1 + j$
 b) $f(z) = e^{-x}(\cos y - j \sin y)$; $z_0 = 2 + \frac{\pi}{2} j$
 c) $f(z) = z^3 - \frac{j}{z^2}$; $z_0 = j$
 d) $f(z) = \cos x \operatorname{ch} y - j \sin x \operatorname{sh} y$; $z_0 = \frac{\pi}{3}$

29. Igazoljuk, hogy ha f mindenütt reguláris komplex függvény, amelyre $f'' = c^2$, akkor

$$f = c^2 z^2 + A z + B$$

alakú, ahol A és B tetszőleges komplex állandó.

30. Tegyük fel, hogy az f függvény $(n+1)$ -szer differenciálható a T tartományon és ott $f^{(n+1)} = 0$. Mutassuk meg, hogy f polinom és fokszáma $\leq n$.

1.3 DIFFERENCIÁL

31. Határozzuk meg az alábbi függvények $z = z_0$ pontbeli differenciálját!

- a) $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ($z_0 \neq 1$)
 b) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z-2}}$ ($z_0 \neq 2$)
 c) $f(z) = \sqrt[3]{z^2 + 1}$ ($z_0 \neq j$)

b) és c) esetben $-\pi < \arg z \leq \pi$

32. Legyen

$$f(z) = z^3 - 2z^2$$

Határozzuk meg tetszőleges z pontban

- a) a Δf függvény megváltozást,
 b) a df differenciált,
 c) a $(\Delta f - df)$ különbséget.

33. Legyen

$$f(z) = jz^2 - 4z + 3j.$$

Határozzuk meg a

- a) Δf függvénymegváltozást,
- b) df differenciált,
- c) $(\Delta f - df)$ különbségét,

a $z = 2j$ pontban.

34. Határozzuk meg

- a) a Δf függvénymegváltozást,
- b) a df differenciált,

ha

$$f(z) = (2z + 1)^3; \quad z = -j; \quad \Delta z = 1 + j.$$

35. Igazoljuk, hogy f és g differenciálhatósága esetén

- a) $d[f(z) \cdot g(z)] = [f(z) \cdot g'(z) + g(z) f'(z)] \Delta z.$
- b) $d\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \left[\frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\right] \Delta z$

1.4 L'HOSPITAL-SZABÁLY

36. Döntsük el, hogy alkalmazható-e L'Hospital-szabály az alábbi határértékek meghatározására! Amelyiknél alkalmazható, azt határozzuk is meg!

$$a) \lim_{z \rightarrow j} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}$$

$$b) \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3-4j)z - 6j}$$

$$c) \lim_{z \rightarrow j} \frac{z^2 - 2jz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$$

$$d) \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi}{3}j}} \left[(z - e^{\frac{\pi}{3}j}) \frac{z}{z^2 + 1} \right]$$

37. L'Hospital-szabály alkalmazásával - amennyiben lehetséges - igazoljuk, hogy

$$a) \lim_{x+jy \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y}{x + jy} = 1$$

$$b) \lim_{x+jy \rightarrow 0} \frac{e^x \cos y - 1 + j e^x \sin y}{x + jy} = 1$$

$$c) \lim_{x+jy \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \operatorname{ch} y + j \sin x \operatorname{sh} y}{x^2 - y^2 + 2jxy} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x+jy \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \operatorname{ch} y + j(y - \cos x \operatorname{sh} y)}{x^3 - 3xy^2 + j(3x^2y - y^3)} = \frac{1}{6}$$

2.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK REGULARITÁSA

2.1 DIFFERENCIÁLHATÓSÁG, REGULARITÁS

[38]. Igazoljuk, hogy a

$$w = |z|^4$$

függvény a $z = 0$ pontban differenciálható, de nem reguláris!

39. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények sehol sem regulárisak:

$$a) f(z) = xy + jy$$

$$b) f(z) = e^x (\cos x + j \sin x)$$

$$c) f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + j \frac{y}{x^2+y^2}$$

[40]. Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekben a

$$w = (1 - |z|)^2$$

függvény differenciálható ill, azokat, amelyekben reguláris.

41. Hol differenciálhatók és hol regulárisak az alábbi függvények:

$$a) f(z) = x^2 - j(y^2 + x)$$

$$b) f(z) = (x^2 - y^2) + j(x^2 + y^2),$$

$$c) f(z) = \sin x \cdot \cosh y - j \cos x \cdot \sinh y,$$

$$d) f(z) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + j e^{-x}(y \sin y - x \cos y)$$

$$e) f(z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + j \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f) f(z) = \ln \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + j \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x-1}$$

$$g) f(z) = \frac{z}{z + j},$$

$$h) f(z) = \frac{1}{|z|^2},$$

$$i) f(z) = \frac{3z - 2}{z^2 + 2z + 5},$$

$$j) f(z) = (z - \alpha) |z - \alpha| \quad (\alpha \text{ rögzített komplex szám})$$

$$k) f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z + \frac{z-1}{z^2 + 1}$$

(Az a)-f) feladatokban $x + jy = z$).

④2. Igazoljuk, hogy ha az $f = u + jv$ komplex változós függvény reguláris egy T tartományon, akkor ott a $g = -v + ju$ függvény is reguláris!

④3. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) \text{ és } \overline{f(\bar{z})}$$

függvények egyidejűleg regulárisak!

44. Igazoljuk, hogy ha $g(\zeta)$ és $f(z)$ reguláris függvények, akkor $g \circ f$ reguláris!

④5. Igazoljuk, hogy ha az f komplex függvény egy T tartományon reguláris és ott $f' = 0$, akkor f állandó a T tartományon!

(46). Igazoljuk, hogy ha f és g reguláris egy T tartományon és ott $f' = g'$, akkor $(f - g)$ állandó.

(47). Igazoljuk, hogy ha f reguláris egy T tartományon és ott $|f|$ állandó, akkor ott f is állandó.

(48). Igazoljuk, hogy ha f reguláris egy T tartományon és ott valós része konstans ($\operatorname{Re} f = \text{konstans}$), akkor ott f állandó.

(49). Igazoljuk, hogy ha a komplex változós f és $\bar{f}$ függvények regulárisak egy T tartományon, akkor ott f állandó.

50. Legyen

$$f(z) = u + jv = \varrho e^{j\varphi}$$

reguláris függvény.

Igazoljuk, hogy ha az u , v , ϱ , φ függvények egyike konstans, akkor $f(z)$ is konstans!

2.2 HARMONIKUS FÜGGVÉNY, HARMONIKUS TÁRSFÜGGVÉNY

(51). Mutassuk meg, hogy a

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

és

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

formális operátorok bevezetésével a kétváltozós függvényre vonatkozó Laplace-féle parciális differenciálegyenlet felírható

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$$

alakban.

(52). Igazoljuk, hogy ha f az r és φ polárkoordinátákkal kifejezett függvény, akkor a Laplace-féle parciális differenciálegyenlet felírható:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$$

alakban.

53. Döntsük el, hogy harmonikusak-e az alábbi - derékszögű koordinátákkal adott - függvények:

a) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

b) $u(x,y) = 3(x^2 - y^2) + 2y - 1$

c) $u(x,y) = 4x + e^{-y} \sin 2x$

d) $u(x,y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$

e) $u(x,y) = y - \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (y > 0)$

54. Döntsük el, hogy harmonikusak-e az alábbi - polárkoordinátákkal adott - függvények:

a) $u(r, \varphi) = \frac{1}{r} \quad (r \neq 0)$

b) $u(r, \varphi) = \ln r \quad (r \neq 0)$

c) $u(r, \varphi) = (r - \frac{1}{r}) \sin \varphi \quad (r \neq 0)$

d) $u(r, \varphi) = r^2 \cos 2\varphi$

e) $u(r, \varphi) = r^n \sin n\varphi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

55. Legyen f reguláris komplex függvény. Állapítsuk meg, hogy az alábbi valós értékű függvények közül melyek harmonikusak és melyek nem:

a) $w = |f(z)|$

b) $w = \arccos f(z)$

c) $w = \ln |f(z)| \quad (f(z) \neq 0)$

56. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \arccos z = \arccos (x + jy)$$

komplex függvény első és másodrendű parciális deriváltjai folytonosak és a függvény harmonikus a negatív valós tengely mentén bemetszett komplex síkon!

57. Milyen kapcsolatnak kell fennállni az a, b, c valós együtthatók között, hogy az

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

kétváltozós valós függvény harmonikus legyen?

56. Legyen $u(x, y)$ harmonikus függvény

a) Következik-e ebből, hogy $u^2(x, y)$ is harmonikus?

b) Milyen f függvény esetén lesz $f(u)$ is harmonikus?

Állításunkat indokoljuk és példával illusztráljuk!

59. Határozzuk meg - amennyiben léteznek - az alábbi típusú harmonikus függvényeket:

a) $u = \varphi(x),$

b) $u = \varphi(ax + by) \quad (a \neq 0; b \neq 0)$

c) $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

d) $u = \varphi(x \cdot y)$

e) $u = \varphi(x^2 + y^2)$

f) $u = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right) \quad (x \neq 0)$

g) $u = \varphi\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

h) $u = \varphi(x^2 + y)$

60. Igazoljuk, hogy az $u_i(x, y); i = 1, 2, \dots, n$ harmonikus függvények lineáris kombinációja:

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i(x, y)$$

is harmonikus függvény!

61. Igazoljuk, hogy ha $u(x, y)$ harmonikus függvény, akkor

$$u(x + a, y + b)$$

is harmonikus (" a " és " b " tetszőleges állandó).

[62]. Legyen $u(x,y) = u(z)$ egy egyszeresen összefüggő T tartományon harmonikus függvény és legyen $z = \varphi(\zeta)$ egy T^* tartományon reguláris függvény, amelynek értékei T -be esnek. Igazoljuk, hogy ekkor

$$u(\varphi(\zeta)) = U(\zeta)$$

is harmonikus T^* -on.

[63]. Az x és y változóban harmonikus

$$H = e^{-x} \cos y$$

függvényre

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \text{ha } y = 0.$$

A $z = w^2 = (u + jv)^2$ transzformációval bevezetve az u és v változókat, mutassuk meg, hogy H az u és v változóknak is harmonikus függvénye és hogy az $y = 0$ egyenes képen is 0-ák a megfelelő parciális deriváltak. Azaz:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \text{ha } u = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0, \quad \text{ha } v = 0.$$

[64]. A harmonikus

$$H = 2y + e^{-x} \cos y$$

függvényre

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 2, \quad \text{ha } y = 0.$$

A $z = w^2$ transzformációval bevezetve az u és v változókat mutassuk meg, hogy H az u és v változóknak is harmonikus függvénye és hogy az $y = 0$ egyenes képen a megfelelő parciális deriváltak egyike sem 2, hanem

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 4v, \quad \text{ha } u = 0$$

és

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 4u, \quad \text{ha } v = 0.$$

65. Igazoljuk, hogy ha u és v harmonikus egy T tartományon, akkor ott az

$$f = \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + j \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

függvény reguláris.

66. Legyen $f = u + jv$ olyan reguláris komplex függvény, amely folytonos első- és másodrendű parciális deriváltakkal rendelkezik.

Igazoljuk, hogy

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2$$

67. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények harmonikusak az adott tartományokon, és ott határozzuk meg harmonikus társfüggvényeiket!

$$\boxed{a)} u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x ; \quad 0 \leq |z| < \infty$$

$$b) u(x,y) = 2y + e^{-x} \cos y ; \quad 0 \leq |z| < \infty$$

$$c) u(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + x ; \quad 0 \leq |z| < \infty$$

$$d) u(x,y) = \ln(x^2+y^2)^{3/2} \quad 0 < |z| < \infty$$

ahol $z = x + jy$.

68. Legyen

$$u(x,y) = 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} \quad 0 < |z| < \infty$$

a) Igazoljuk, hogy u harmonikus

b) Határozzuk meg u összes $v(x,y,c)$

harmonikus társfüggvényét (c tetszőleges állandó).

c) Írjuk fel az adott u függvénnyel és ennek v harmonikus társával képezett összes

$$f = u + jv$$

alakú reguláris komplex függvényt.

69. a) Igazoljuk, hogy minden valós együtthatójú

$$u(x,y) = ax + by + c$$

lineáris függvény harmonikus!

b) Határozzuk meg a $v(x,y,c^*)$ harmonikus társfüggvényeket, és az azokkal képezett

$$f(z) = u(x,y) + j v(x,y)$$

alakú reguláris komplex függvényeket!

70. a) Igazoljuk, hogy a

$$v = \ln [(x-1)^2 + (y-2)^2]$$

függvény harmonikus bármely olyan tartományon, amely nem tartalmazza az (1,2) pontot.

b) Határozzunk meg egy olyan u kétváltozós függvényt, amellyel az $f = u + j v$ reguláris komplex függvény.

71. Állapítsuk meg, hogy az alábbi kétváltozós függvények közül melyek harmonikusak! A harmonikusoknak határozzuk meg harmonikus társfüggvényeit és írjuk fel velük az $f = u + j v$ módon képezett reguláris komplex függvényeket!

a) $u(x,y) = 2x(1-y);$

b) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y;$

c) $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}; \quad (y > 0)$

d) $u(x,y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3;$

e) $u(x,y) = xe^x \cos y - y e^x \sin y;$

f) $v(x,y) = -e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2);$

g) $u(x,y) = 2 \sin x \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y;$

h) $v(x,y) = x - 2y + \ln(x^2 + y^2); \quad (y > 0)$

72. Állapítsuk meg, hogy az alábbi kétváltozós függvények közül melyekkel képezhető $f = u + j v$ alakú reguláris komplex függvény! Amelyekkel képezhető, azokkal határozzuk is meg!

a) $u = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}$

$$b) u = e^{\frac{y}{x}} \quad (x > 0)$$

$$c) v = y^2 - x^2 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

(c) esetben az arctg főértékével számoljunk!

73. Határozzuk meg - amennyiben léteznek - mindazon reguláris függvényeket, amelyeknek abszolút értéke illetve arcusa az alábbi módon adott:

$$a) |f(z)| = (x^2 + y^2) e^x$$

$$b) |f(z)| = e^{r^2} \cos 2\varphi$$

$$c) \operatorname{arc} f(z) = x y$$

$$d) \operatorname{arc} f(z) = \varphi + r \sin \varphi$$

ahol x és y derékszögű -, r és φ pedig polárkoordinátákat jelöl.

74. a) Válasszuk meg a "c" állandót úgy, hogy

$$u(x, y) = x^2 + 3cy^2 - 6 \cos x \operatorname{ch} y$$

egy reguláris komplex függvény valós része legyen.

b) Határozzuk meg a függvény differenciálhányadosát a

$$z_0 = \frac{\pi}{2} + j$$

pontban.

75. Válasszuk meg a "c" számot úgy, hogy az alábbi függvények az egész komplex síkon reguláris $f = u + jv$ függvények képzetes részei legyenek és határozzuk meg ezen f függvények differenciálhányadosait az adott pontokban:

$$a) v(x, y) = cx^2 + 2xy - 2y^2 \quad z_0 = -j$$

$$b) v(x, y) = c(x^2 y + xy) - 4y^3 - 3 \quad z_0 = 1 + 2j$$

$$c) v(x, y) = x^3 + cxy^2 + \operatorname{ch} x \cos y \quad z_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$$

[76]. Határozzuk meg azt a reguláris függvényt, amelyre

$$\operatorname{Re} f'(z) = 3x^2 - 4y - 3y^2$$

és

$$f(1 + j) = 0$$

[77]. Határozzuk meg annak a reguláris függvénynek a $z_0 = 1 + j$ pontbeli értékét, amelyre

$$\operatorname{Im} f'(z) = 6x(2y - 1)$$

és

$$f(1) = 6 - 5j$$

78. a) Milyen kapcsolatnak kell fennállni az $a > 0$ és $b > 0$ számok között, hogy az

$$u(x, y) = e^{ax} \cos by$$

kétváltozós függvény egy f reguláris komplex függvény valós része lehessen?

b) Határozzuk meg ezt a reguláris komplex függvényt!

[79]. Határozzuk meg azokat a mindenütt reguláris komplex függvényeket, amelyeknek valós része az a, b, c, d valós együtthatójú

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

kétváltozós függvény!

[80]. Legyen

$$u(x, y) = e^{2x} h(x) - \frac{y^2}{2}$$

a) Adjuk meg az összes olyan h függvényt, amellyel u egy f reguláris komplex függvény valós része lehet.

b) Határozzuk meg a kapott f függvénnyel

$$f'(1 + j)$$

értékét.

[81]. Legyen f tetszőleges reguláris függvény.

a) Igazoljuk, hogy az x és y változók bármely harmonikus függvénye az

$$x + jy = f(u + jv)$$

transzformációval az u és v változóknak is harmonikus függvénye.

b) Állításunkat illusztráljuk példával.

82. Igazoljuk, hogy az $u(x,y)$ harmonikus függvény változóira alkalmazva az

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}; \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

transzformációt, a transzformált függvény is harmonikus.

83. Igazoljuk, hogy az $u(x,y)$ harmonikus függvény változóira alkalmazva az

$$x = \varphi(\xi, \eta); \quad y = r(\xi, \eta)$$

transzformációt, a transzformált függvény is harmonikus, amennyiben φ és r harmonikus társfüggvények!

84. Igazoljuk, hogy ha $u(x,y)$ és $v(x,y)$ harmonikus társfüggvények, akkor

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

85. Legyenek az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények harmonikus társfüggvények és legyen a

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Jacobi determináns egy egyszeresen összefüggő tartományban zérustól különböző értékű. Igazoljuk, hogy ekkor az $x(u,v)$ és $y(u,v)$ inverz függvények is harmonikus társfüggvények!

86. Legyen $f = u + j v$ egy T tartományon reguláris függvénye a $z = x + j y$ változónak.

Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$U(x,y) = e^{u(x,y)} \cdot \cos v(x,y)$$

$$V(x,y) = e^{u(x,y)} \cdot \sin v(x,y)$$

függvények a T tartományon harmonikusak és társfüggvények!

2.3 KOMPLEX POTENCIÁL

87. Igazoljuk, hogy van olyan egyszeresen összefüggő síktartomány, amelyben az

$$a) \underline{v}(\underline{r}) = -\sin x \operatorname{ch} y \underline{i} + \cos x \operatorname{sh} y \underline{j}$$

$$b) \underline{v}(\underline{r}) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} - 2x \right) \underline{i} + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} + 2y \right) \underline{j}$$

$$c) \underline{v}(\underline{r}) = (1 - e^{-x} \cos y) \underline{i} - e^{-x} \sin y \underline{j}$$

$$d) \underline{v}(\underline{r}) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \underline{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \underline{j}$$

vektormezőknek (síkbeli vektor-vektor függvényeknek) létezik komplex potenciáljuk és határozzuk meg azokat!

88. Állapítsuk meg, hogy az alábbi komplex függvények közül melyek lehetnek vektormező komplex potenciáljai! Ahol lehet, ott határozzuk meg azt a vektormezőt, amelynek az adott függvény a komplex potenciálja!

$$a) f(z) = x^3 - 3y^2x + 2 + j(3x^2y - y^3 + 5)$$

$$b) f(z) = \cos x \operatorname{ch} y - j(\sin x \operatorname{sh} y + 4)$$

$$c) f(z) = 2 + x + \ln(x^2 + y^2) - j(y - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x})$$

$$d) f(z) = 1 + 2y + e^{-x} \cos y - j(2x - e^{-x} \sin y)$$

(A meghatározásnál f valós részét tekintsük a vektormező skalárpotenciál függvényének!)

89. Határozzuk meg a síkbeli áramlás erővonalait, az áramlás irányát és sebességvektorát, ha az áramlás komplex potenciálja:

$$a) F(z) = z$$

$$b) F(z) = \frac{1}{z}$$

$$c) F(z) = z + \frac{1}{z}$$

$$d) F(z) = z - \frac{1}{z}$$

90. Határozzuk meg annak a síkvektornak az ekvipotenciális vonalait, erővonalait és térerősségvektorát, amelynek komplex potenciálja:

a) $F(z) = az + b,$ ($a \neq 0$)

b) $F(z) = z^2,$

c) $F(z) = \frac{1}{z^2},$

d) $F(z) = \ln \left| 1 + \frac{1}{z^2} \right| + j \operatorname{arc} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right),$

e) $F(z) = \ln |z^2 - a^2| + j \operatorname{arc} (z^2 - a^2), \quad (a > 0)$

f) $F(z) = \ln \left| \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2} \right| + j \operatorname{arc} \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2}.$

[91]. Igazoljuk, hogy van olyan $f = u + jv$ reguláris komplex függvény, amelynek valós része

a) $u(x,y) = 2y + e^{x^2-y^2} \cos 2xy$

b) $u(x,y) = \sin (x^2-y^2) \operatorname{ch} 2xy,$

c) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \ln (x^2+y^2); \quad y > 0$

A komplex potenciál segítségével határozzuk meg - mindhárom esetben -

$$f'(j)$$

értékét.

92. Határozzuk meg a "c" állandót úgy, hogy az

a) $u(x,y) = x^2 + cy^2 + e^{-2y} \cos 2x$

b) $u(x,y) = x^3 + cxy^2 + \sin 3x \operatorname{ch} 3y$

függvény harmonikus legyen és a kapott u függvénnyel írjuk fel a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} u$$

függvény komplex potenciáljának deriváltját a) esetben a $z_0 = 1 + j$, b) esetben a $z_0 = j$ pontban.

93. Adjuk meg azon görbe egyenletét, amely a z sík $(1 + j)$ pontján megy át és az

a) $2xy + 2x - 3y + c = 0,$

b) $x^3y - xy^3 = c$

c) $e^{-x} \cos y + xy = c$

d) $e^{-x} (x \sin y - y \cos y) = c$

görbesereg minden elemét merőlegesen metszi!

94. Valamely tér ekvipotenciális vonalai az $x^2 + y^2 = 2ax$ körvonalak. Határozzuk meg a $(2a, 0)$ és (a, a) pontokban fennálló térerősségek nagyságának hányadosát!

95. A $z_1 = -a$ és $z_2 = a$ (ahol " a " valós szám) pontokban elhelyezett különböző előjelű (q és $-q$) pontszerű töltések által létesített erőter komplex potenciálja:

$$F(z) = 2q \ln(z - z_1) - 2q \ln(z - z_2) = 2q \ln \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Határozzuk meg és ábrázoljuk a tér ekvipotenciális vonalait és erővonalait!

96. A $z_1 = -a$ és $z_2 = a$ (ahol " a " valós szám) pontokban elhelyezett egynemű pontszerű töltések által létesített erőter komplex potenciálja:

$$F(z) = 2q \ln \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Határozzuk meg és ábrázoljuk e tér ekvipotenciális vonalait!

97. a) Határozzuk meg az (x, y) síkon állandó v_0 sebességgel áramló folyadék komplex potenciálját, ha a sebességvektor az x tengely pozitív irányával α szöget zár be!

b) Határozzuk meg ezen erőter skalárpotenciálfüggvényét és áramfüggvényét!

c) Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalakat és az erővonalakat!

98. Egy áramló folyadék komplex potenciálja:

$$F(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right),$$

ahol v_0 és " a " pozitív állandó.

- a) írjuk fel az erővonalak és az ekvipotenciális vonalak egyenletét!
- b) Ábrázoljuk az erővonalakat és az ekvipotenciális vonalakat!
- c) Határozzuk meg az áramlás sebességvektorát!
- d) Határozzuk meg az áramlás stagnáló pontjait!

REGULÁRIS KOMPLEX FÜGGVÉNYEK LEKÉPEZÉSE

1.§ KÖLCSÖNÖSEN EGYÉRTELMŰ ÉS KONFORM
LEKÉPEZÉSEKEGYSZERŰ TRANSZFORMÁCIÓK

1. Igazoljuk; hogy a

$$f(z) = z^2 + 2z + 3$$

függvény által létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű a

$$T = \{z : |z| < 1\}$$

körtartományon.

[2.] Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

függvény által létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű a

$$T = \{z : |z| > 1\}$$

tartományon!

[3.] Igazoljuk, hogy a

$$w = f(z) = \frac{4}{z-j}$$

függvény a

$$T = \{z : z \neq j\}$$

tartományt kölcsönösen egyértelműen képezi le a

$$T^* = \{w : w \neq 0\}$$

tartományra és határozzuk meg a T^* -on értelmezett

$$z = f^{-1}(w)$$

inverz leképezést!

4. a) Határozzuk meg azt a T^* tartományt, amelyre az

$$w = f(z) = 1 + z^2$$

függvény leképezi a

$$T = \{z \mid \operatorname{Re} z < -1\}$$

félsíkot.

- b) Mutassuk meg, hogy az

$$f : T \rightarrow T^*$$

leképezés kölcsönösen egyértelmű!

- c) Határozzuk meg ezen a tartományon a

$$z = f^{-1}(w)$$

inverz leképezést!

5. Mely pontokban létesítenek konform leképezést az alábbi függvények:

a) $w = z + z^2$,

b) $w = 2 - \frac{1}{z+1}$, $(z \neq -1)$

c) $w = x - e^x \cos y + j(y - e^x \sin y)$, $(z = x + jy)$

d) $w = \sin 2x \operatorname{ch} 2y + j \cos 2x \operatorname{sh} 2y$, $(z = x + jy)$

6. Igazoljuk, hogy a

$$w_1 = z^2; \quad w_2 = z^3; \quad w_3 = \sqrt[3]{z^4}$$

$(-\frac{\pi}{3} \leq \arg w_3 < \frac{\pi}{3})$ függvény által létesített leképezés az

a) $z_0 = 1$;

b) $z_0 = -\frac{1}{4}$,

c) $z_0 = 1 + j$,

d) $z_0 = -3 + 4j$

pontokban lokálisan konform és határozzuk meg e pontokban az elfordulási szöget és nyújtási együtthatót!

7. Keressük meg a z sík azon pontjait, amelyekben

$$w = z^2$$

által létesített leképezésnek azonos a nyújtási együtthatója és azon pontjait, amelyekben azonos az elfordulási szöge!

8. A z sík melyik része "zsugorodik össze" és melyik "nyúlik meg" az alábbi függvények által létesített leképezések során?

a) $w = z^2$

b) $w = z^2 + 2z$

c) $w = \frac{1}{z}$

d) $w = e^x (\cos y + j \sin y) \quad (x+jy = z)$

9. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények kölcsönösen egyértelmű és konform leképezését adják az adott tartományoknak és határozzuk meg azok w síkbeli képét.

a) $w = z^2 + 1$; $\operatorname{Re} z > 1$

b) $w = (z + 1)^2$; $\operatorname{Re} z > 1$

c) $w = \sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$

d) $w = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + j \operatorname{arx} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; $y > 0$

10. Írjuk fel annak a w síkbeli görbének az egyenletét, amelyre az

$$x + y =$$

egyenes a

a) $w = z^2$

b) $w = \frac{1}{z}$

függvény leképezi!

11. Írjuk fel - polárkoordinátákkal - annak a w síkbeli görbének az egyenletét, amelyre a

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

kört a

$$w = \sqrt{z}$$

függvény leképezi.

12. a) Mutassuk meg, hogy a $w = z^2$ függvény az $y = c$ ($c \neq 0$) egyeneseket olyan parabolákra képezi le, amelyeknek $w = 0$ a közös fókuszuk!

b) Mi a képe az $y = 0$ egyenesnek?

13. Írjuk fel azoknak a w síkbeli görbéknek a paraméteres egyenletét, amelyekre az

$$a) w = z^2 + 1$$

$$b) w = z^3$$

függvény leképezi a

$$y = 1$$

egyenest és a

$$|z - j| = 1$$

kört.

14. A w sík mely görbéire képezi le a

$$w = z + \frac{a^2}{z} \quad (a > 0 \text{ valós})$$

függvény a z sík

$$|z| = R \quad (R > 0)$$

köreit?

15. Mire képezi le a

$$w = \frac{z}{(1-z)^2}$$

függvény a z sík

$$|z| = 1$$

körét?

16. a) Írjuk fel azoknak a w síkbeli görbéknek az egyenletét, amelyekre

$$1. w = 3z - 2j\bar{z}$$

$$2. w = z^2$$

$$3. w = \frac{1}{z}$$

függvény leképezi az

$$y = 2x \quad \text{és} \quad x + y = 6$$

egyeneseket.

b) Határozzuk meg az egyenesek közti szög és a képgörbék közti szög kapcsolatát. Indokoljuk megállapításunkat!

17. Határozzuk meg azt a tartományt, amelyre az

$$1; 2; 1 + j; 2 + j;$$

csúcspontú négyzetet leképezi a

$$a) w = 2z + 5 - 3j$$

$$b) w = z^2$$

függvény, és igazoljuk közvetlenül, hogy a leképezett tartomány szomszédos határoló görbéi merőlegesek egymásra.

18. Határozzuk meg a w sík azon tartományát, amelyre a

$$j; 1 - j; 1 + j$$

csúcspontú háromszög belsejét leképezi a

$$a) w = (2 - j) z$$

$$b) w = z^2$$

függvény!

19. Határozzuk meg a w sík azon tartományát, amelyre

$$\operatorname{Im} z \geq 1 + \operatorname{Re} w$$

félsíkot leképezi az

28. Határozzuk meg a - polárkoordinátákkal adott -

$$0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

félkör-szektor képét és annak területét és kerületét a

$$w = z^2$$

leképezésnél!

29. Határozzuk meg a

$$0 < x < 1$$

$$0 < y < 1$$

négyzet képét és annak területét és kerületét a $w = z^2$ leképezésnél!

30. Határozzuk meg az alábbi T tartományok adott $w = f(z)$ által létesített képeinek alakját, kerületét és területét:

$$\text{a) } T : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a leképező függvény:

$$w = e^x \cos y + j e^x \sin y ;$$

$$\text{b) } T : 1 \leq |z| \leq 2,$$

a leképező függvény:

$$w = \frac{1}{z} .$$

2.§ LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

2.1 LINEÁRIS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉSÜK

a) GÖRBÉK ÉS TARTOMÁNYOK LEKÉPEZÉSE LINEÁRIS EGÉSZ FÜGGVÉNNYEL

31. Határozzuk meg az alábbi lineáris egész függvények végesben levő fix pontját (amennyiben létezik), abban a pontban az általuk létesített leképezés elfordulási szögét és nyújtási együtthatóját:

a) $w = 2z + 1 - 3j$

b) $w = jz + 4$

c) $w = z + 1 - 2j$

d) $w = (1-j)z - 2j$

e) $w - w_1 = a(z - z_1)$ $a \neq 0$

32. Elemi transzformációk (nyújtás-zsugorítás, elforgatás, párhuzamos eltolás) egymásutánjával szemléltessük, és adjuk meg analitikusan azoknak a w síkbeli görbéknek az egyenletét, amelyekre az

a) $w = 3z + 1 + j$

b) $w = jz + 3 - 2j$

c) $w = -2jz + 4$

d) $w = (1 + j)z - 5j$

függvények leképezik a z sík

1. $y = x + 2$ egyenesét,

2. $x^2 + y^2 = 4$ körét

3. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ körét

$(z = x + jy).$

33. Írjuk fel azoknak a w síkbeli görbéknek a paraméteres egyenletét, amelyekre a

$$w = 2jz + 1 - j$$

lineáris egész függvény leképezi a z sík alábbi - paraméteresen adott - görbéit:

a) $\gamma(t) = e^{jt}$

b) $\gamma(t) = \frac{1}{2} + jt$

c) $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + t) + j \cdot 0$

d) $\gamma(t) = t e^{2j}$

34. Elemi transzformációk egymásutánjával szemléltessük és adjuk meg analitikusan azt a tartományt, amelyre a

$$w = jz + 1$$

lineáris egész függvény leképezi a z síkbeli

a) $x > 0$; $0 < y < 2$

vízszintes félsávot;

b) $x^2 + (y - 1)^2 < 1$

körtartományt.

35. Határozzuk meg és ábrázoljuk azt a tartományt, amelyre a

$$w = (j - 1)z + j + 1$$

lineáris egész függvény leképezi az

$$A(0,0); B(\frac{1}{2}, 0); C(\frac{1}{2}, 1); D(0,1)$$

csúcspontú téglalapot.

36. A z síkbeli T téglalaptartomány határegyenesei

$$x = 0; \quad y = 0; \quad x = 2; \quad y = 1.$$

Elemi transzformációk egymásutánjával szemléltessük a w sík azon T^* tartományát, amelyre az alábbi lineáris egész függvények a T tartományt leképezik!

- a) $w = z + 1 - 2j$,
 b) $w = \sqrt{2} e^{j \frac{\pi}{4}} \cdot z$,
 c) $w = \sqrt{2} e^{j \frac{\pi}{4}} \cdot z + (1 - 2j)$.

Adjuk meg a határegyenesek képeinek egyenletét és a csúcspontok koordinátáit is!

[37]. Legyen T a z sík egy háromszögtartománya, amelynek csúcspontjai:

$$z_1 = j ; \quad z_2 = 1 - j ; \quad z_3 = 1 + j .$$

Elemi transzformációkkal határozzuk meg ennek w síkbeli képét, ha a leképező függvény:

- a) $w = 3z + 4 - 2j$
 b) $w = jz + (2 - j)$
 c) $w = 5e^{j \frac{\pi}{3}} \cdot z - 2 + 4j$

Adjuk meg z_1, z_2, z_3 képpontjait is!

b) ADOTT LEKÉPEZÉSEKET MEGVALÓSÍTÓ LINEÁRIS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK MEGHATÁROZÁSA

[38]. Határozzuk meg azt a lineáris egész függvényt, amelynek fix pontja: $z_0 = 1 + 2j$, és a $z = j$ pontot a $w = -j$ pontba képezi le!

[39]. a) Indokoljuk, hogy a z sík $\{0, 1, j\}$ csúcspontú háromszöge leképezhető lineáris egész függvénnyel a w sík $\{-1, -j, j\}$ csúcspontú háromszögére!

b) Adjunk meg egy ilyen leképező függvényt!

c) Adjunk feltételt a leképező függvény egyértelműségére!

[40]. Határozzunk meg egy olyan lineáris egész függvényt, amely a z sík $\{0, 1, j\}$ csúcspontú háromszögét a w sík $\{0, 2, 1 + j\}$ csúcspontú háromszögére képezi le!

41. Határozzunk meg olyan

$$w = az + b$$

alakú lineáris egész függvényeket, amelyek a z és a w sík alább adott görbéi közt létesítenek kölcsönösen egyértelmű leképezéseket:

$$a) y = 2x \iff v = u + 1$$

$$b) y + x = 3 \iff u = 0$$

$$c) x^2 + y^2 = 1 \iff u^2 + 4u + v^2 = 5$$

$$d) |z - j| = 1 \iff |w - 1 - j| = 3$$

42. Határozzunk meg olyan

$$w = az + b$$

alakú lineáris egész függvényeket, amelyek a z és a w sík alábbi tartományai közt létesítenek kölcsönösen egyértelmű leképezéseket:

$$a) \operatorname{Re} z \geq 0 \iff \operatorname{Im} w \geq 1$$

$$b) \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z \iff \operatorname{Im} w \leq -1$$

$$c) |z| < 3 \iff |w - 1 + j| < 1$$

$$d) |z + j| > 2 \iff |w + 1 - j| > 4$$

43. Határozzuk meg azt a lineáris egész függvényt, amely a z sík

$$x = c, \quad x = c + h$$

(c és h valós állandó) egyenesekkel határolt sávját a w sík

$$0 < \operatorname{Re} w < 1$$

sávjára képezi le, úgy hogy

$$w(c) = 0$$

legyen.

44. Határozzunk meg egy olyan lineáris egész függvényt, amely a

$$|z| < 1$$

körtartományt a

$$|w - w_0| < R$$

körtartományra képezi le, úgy hogy a z síkbeli kör középpontjának a képkör középpontját; a z síkbeli kör vízszintes átmérőjének a képkör azon átmérőjét felelteti meg, amely az x tengely pozitív irányával α szöget zár be.

45. Határozzuk meg azt a legáltalánosabb lineáris egész függvényt, amely

- a) a felső félsíkot önmagára
- b) a felső félsíkot az alsó félsíkra
- c) a felső félsíkot a jobb félsíkra
- d) a jobb félsíkot önmagára

képezi le.

Mutassuk meg, hogy ezeket a leképezéseket egyértelműen meghatározza 1-1 egymásnak megfeleltetett belső pont, vagy 2-2 egymásnak megfeleltetett határpont.

46. Határozzuk meg azt a legáltalánosabb lineáris egész függvényt, amely önmagára képezi le az:

- a) $0 < x < 1$ sávot
- b) $-2 < y < 1$ "
- c) $y = x$ és $y = x - 1$ egyenések

által határolt sávot.

47. Határozzuk meg azt a legáltalánosabb lineáris egész függvényt, amely:

- a) a z sík origó középpontú egységsugarú körének belsejét a w sík β középpontú R sugarú körének belsejére;
- b) a z sík α középpontú R sugarú körének belsejét a w sík origó középpontú egységsugarú körének belsejére;
- c) a z sík α középpontú R_1 sugarú körének belsejét a w sík β középpontú R_2 sugarú körének belsejére képezi le.

2.2 LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉSÜK

a) GÖRBÉK ÉS TARTOMÁNYOK LEKÉPEZÉSE LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNNYEL

48. a) Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z} \quad (z = x + j y)$$

függvény mire képezi le a z sík

$$(x - 3)^2 + y^2 = 2$$

egyenletű körét és a

$$2x + 3y = 7$$

egyenletű egyenesét.

b) Mutassuk meg, hogy a képgörbék ugyanakkora szögben metszik egymást, mint az eredeti két görbe! Állításunkat indokoljuk.

49. Adjunk választ a 48. feladatbeli kérdésre, ha a z síkbeli két görbe az

$$(x - 3)^2 + y^2 = 5$$

egyenletű kör és a

$$2x + 3y = 14$$

egyenletű egyenes.

50. a) Mutassuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z}$$

függvény a

$$|z - 3| = 5$$

egyenletű kört a

$$\left| w + \frac{3}{16} \right| = \frac{5}{16}$$

egyenletű körbe képezi le!

b) Mire képezi le a fenti függvény a

$$|z - 3| < 5$$

körbelsőt?

51. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z} \quad (z = x+jy)$$

függvény mire képezi le az alábbi görbéket!

a) $y = 3x$ egyenest

b) $y + x = 2$ egyenest

c) $x^2 + y^2 = 4$ kört

d) $x^2 + 2x + y^2 = 0$ kört

e) $y = x^2$ parabolát

52. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z} \quad (z = x+jy)$$

függvény mire képezi le az alábbi görbéket!

a) $x^2 + y^2 = R^2$ köröket $R \neq 0$

b) $x^2 + y^2 = ax$ " $(a \neq 0)$

c) $x^2 + y^2 = by$ " $(b \neq 0)$

d) $y = mx$ egyeneseket

e) $y = x + b$ "

f) $z_0 \neq 0$ ponton átmenő egyeneseket.

53. a) Mutassuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z}$$

függvény a

$$|z| < R \quad (R > 0)$$

körbelsőt a

$$|w| > \frac{1}{R}$$

körkülsőre képezi le!

a) Mutassuk meg, hogy a

$$w = \frac{c}{z};$$

függvény (ahol $c \neq 0$ tetszőleges állandó), a

$$|z| > R$$

$$(R > 0)$$

körkülsőt a

$$|w| < \frac{c}{R}$$

körbelsőre képezi le!

54. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z}$$

$$(z = x+jy)$$

függvény mire képezi le a z sík alábbi tartományait:

a) $0 < y < \frac{1}{2c}$ sávot;

b) $x > 1$; $y > 0$ negyedsíkot;

c) $0 < x < 1$, $y > 0$ félsávot;

d) $|z + 1| = 1$; $|z - 1| = 1$; $|z - j| = \sqrt{2}-1$

(egymást kívülről érintő) körök által határolt tartományt.

55. a) Mutassuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z}$$

$$(z = x+jy)$$

függvény az $y > c$ félsíkot egy kör belsejére képezi le, feltéve, hogy $c > 0$.

b) Mi a képtartomány, ha $c = 0$?

c) Mi a képtartomány, ha $c < 0$?

56. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{j}{z}$$

függvény mire képezi le az

$$x \geq 0; \quad 0 \leq y \leq 1$$

vízszintes félsávot!

57. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{1}{z - z_0} + b$$

függvény mire képezi le a polárkoordináta vonalakat: a $|z - z_0| = R$ köröket és az $\arg(z - z_0) = \alpha$ egyeneseket.

58. a) Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (z = x + jy)$$

függvény mire képezi le a z sík

$$y = x \quad \text{és} \quad x + y = 6$$

egyenletű egyeneseit.

b) Mutassuk meg, hogy a képgörbék ugyanakkora szögben metszik egymást, mint a z síkbeli egyenesek!

59. Mire képezi le a

$$w = j \frac{1 - z}{1 + z} \quad (z = x + jy)$$

függvény az

a) $x = 0$,

b) $y = 0$,

c) $x^2 + y^2 = 1$,

d) $x - y = 1$,

e) $x^2 - 4x + y^2 = 0$.

görbék?

60. Mire képezi le a

$$w = \frac{2jz}{z-j} \quad (z = x+jy)$$

függvény az

- a) $y = x$,
- b) $y = 2x + 1$,
- c) $x^2 + y^2 = 1$,
- d) $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

görbék?

[61]. Mely alakzatba viszi át a

$$w = c \frac{z-j}{z+j}$$

függvény a z sík képzetes tengelyét, ha " c " valós szám?

[62]. Igazoljuk, hogy a

$$w = \frac{2z-j}{jz+2} \quad (z = x+jy)$$

függvény a z sík origó középpontú egységsugarú körét, a w sík origó középpontú, egységsugarú körére képezi le!

63. a) Igazoljuk, hogy a

$$w = \frac{z-j}{jz-1}$$

függvény az

$$\operatorname{Im} z \geq 0$$

félsíkot a

$$|w| \leq 1$$

körtartományra képezi le!

b) Milyen tartományra képezi le az

$$\operatorname{Im} z \leq 0$$

félsíkot?

64. Határozzuk meg a c konstans értékét úgy, hogy a

$$w = \frac{z - 1}{z + c}$$

függvény a $|z - j| = 1$ kört egyenesbe képezze le!

65. Határozzuk meg, hogy az alábbi lineáris egész- és törtfüggvények mire képezik le az adott tartományokat:

- | | |
|------------------------------|--|
| a) $w = jz + 1$ | $ z - 1 < 2$ |
| b) $w = 2z + j + 1$ | $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$ |
| c) $w = (1 + j)z$ | $ z + 2 > 3$ |
| d) $w = \frac{j}{z}$ | $ z - j < 1$ |
| e) $w = \frac{2}{z - 1}$ | $\operatorname{Im} z > 0$ |
| f) $w = \frac{z}{z + 1}$ | $ z < 2$ |
| g) $w = \frac{1 + j}{2z}$ | $1 + \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ |
| h) $w = \frac{z + 1}{z - 1}$ | $\operatorname{Im} z > 0$ |
| i) $w = \frac{2}{z + j}$ | $ z > 2$ |
| j) $w = \frac{2z}{z + j}$ | $-1 + \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$ |
| k) $w = \frac{2z - 4}{z}$ | $\operatorname{Re} z > 0$ |

66. Határozzuk meg, hogy az alábbi lineáris törtfüggvények mire képezik le az adott tartományokat:

- | | |
|--|---|
| a) $w = \frac{1 + z}{1 - z}$; | $\operatorname{Re} z > 1$ félsíkot |
| b) $w = \frac{z - j}{z + j}$; | $\operatorname{Re} z > 0$; $\operatorname{Im} z > 0$ negyedsíkot |
| c) $w = \frac{1}{j} \frac{z + j}{z - j}$; | a $(0, j, 1)$ csúcspontú háromszög belsejét |
| d) $w = \frac{1}{j} \frac{z + j}{z - j}$; | a $(0, j, 1)$ csúcspontú háromszög külsejét |
| e) $w = j \frac{z - j}{z + j}$; | $0 < \operatorname{Re} z < 1$; $\operatorname{Im} z > 0$ félsávot |
| f) $w = j \frac{z - j}{z + j}$; | $0 < \operatorname{Re} z < 1$; $0 < \operatorname{Im} z < 1$ négyzetet |

67. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \frac{z + j}{z - j}$$

leképezésnél mi az "ősképek" az alábbi w síkbeli görbéknek

a) $|w - (1 + \frac{j}{2})| = \frac{1}{2}$

b) $\text{Im } w = \text{Re } w$

b) LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNYEK NYÚJTÁSI EGYÜTTHATÓJA, ELFORGATÁSI SZÖGE ÉS FIX PONTJAI

68. Határozzuk meg az

a) $w = \frac{z - j}{z + j}$

b) $w = \frac{2jz}{z + 2j}$

függvények által létesített leképezések nyújtási együtthatóját és elforgatási szögét a $z_1 = -1$ és a $z_2 = j$ pontokban!

69. Határozzuk meg az alábbi lineáris törtfüggvények által létesített leképezések fix pontjait:

a) $w = \frac{z - 1}{z + 1}$

b) $w = \frac{6z - 9}{z}$

c) $w = \frac{2z - 5}{z + 4}$

70. Legyen

$$w = \frac{z - 1}{z + j}$$

a) Határozzuk meg a leképezés fix pontjait!

b) Határozzuk meg a leképezés mellett a

$$|w - 1| < 2$$

tartomány ösképet!

71. Határozzuk meg mindazon lineáris törtfüggvényeket, amelyeknek fix pontjai $z_1 = 1$ és $z_2 = -1$

72. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amelynek fix pontjai:

$$z_1 = 1 \quad \text{és} \quad z_2 = j,$$

és amely a $z = 0$ pontnak a $w = -1$ pontot felelteti meg!

73. Adjuk meg azt a legáltalánosabb lineáris (egész- vagy tört-) függvényt, amelynek fix pontjai z_1 és z_2 feltéve, hogy

a) z_1 és z_2 egyike sem ∞

b) z_1 és z_2 egyike ∞

74. Határozzuk meg azt a legáltalánosabb lineáris transzformációt, amelynek

$$z = + j$$

az egyetlen fix pontja a végesben.

75. Igazoljuk, hogy a legáltalánosabb lineáris transzformáció, amelynek fix pontja az origó, és minden távolságot változatlanul hagy, az vagy forgás, vagy forgás és a valós tengelyre tükrözés egymásutánja.

76. Legyen L egy lineáris transzformáció (lineáris egész, vagy törtfüggvény)! Igazoljuk, hogy

a) ha L -nek $z_1 = 0$ és $z_2 = \infty$ a fix pontjai, akkor

$$L(z) = a \cdot z$$

($a \neq 0$ állandó);

b) ha L -nek $z = \infty$ az egyetlen fix pontja, akkor L egy transláció (párhuzamos eltolás):

$$L(z) = z + b$$

($b \neq 0$ állandó);

c) ha L -nek $z = 0$ az egyetlen fix pontja, akkor

$$L(z) = \frac{z}{cz + d}$$

77. Igazoljuk, hogy az

$$S(z) = \frac{1}{z} \quad \text{és} \quad L(z) = z + 2$$

leképezések nem kommutatívak. Azaz

$$S \circ L \neq L \circ S.$$

c) ADOTT LEKÉPEZÉSEKET MEGVALÓSÍTÓ LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNYEK MEGHATÁROZÁSA

78. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a z sík 3 adott pontjának a w sík 3 adott pontját felelteti meg az alábbi módon:

a) $z = \{0, -j, -1\} \implies w = \{j, 1, 0\}$

b) $z = \{-1, 0, 1\} \implies w = \{1, j, -1\}$

c) $z = \{1, j, -j\} \implies w = \{0, 1, \infty\}$

d) $z = \{0, 1, \infty\} \implies w = \{1, j, -j\}$

e) $z = \{2, j, -2\} \implies w = \{1, j, -1\}$

f) $z = \{\infty, j, 0\} \implies w = \{0, j, \infty\}$

79. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely az alábbi tulajdonságú:

a) a $|z| < 1$ körtartományt az $\text{Im } w > 0$ félsíkra képezi le úgy, hogy a $\{-1, 1, j\}$ pontokat a $\{\infty, 0, 1\}$ pontokba viszi át;

b) a $|z| < R$ körtartományt a $\text{Re } w > 0$ félsíkra képezi le úgy, hogy az $\{R, -R, 0\}$ pontokat a $\{0, \infty, 1\}$ pontokba viszi át.

80. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely az

$$a) (1 + j) z + (1 - j) \bar{z} \leq 0$$

tartományt a

$$|w| \leq 1$$

tartományra;

$$b) (1 + 2j) z + (1 - 2j) \bar{z} < 8$$

tartományt a

$$|w| > 1$$

tartományra képezi le.

81. Adjunk meg egy-egy olyan lineáris törtfüggvényt, amely az

$$a) x + y \leq 1$$

félsíkot az

$$(u - 2)^2 + (v - 3)^2 \leq 16$$

körtartományra;

$$b) \operatorname{Re} z > 5$$

félsíkot a

$$|w + j| < 3$$

körtartományra;

$$c) |z| \leq 4$$

körtartományt, az

$$\operatorname{Im} w \leq 0$$

félsíkra képezi le.

82. Legyen z_0 és w_0 tetszőleges, a és b , $R > 0$; $R_1 > 0$; $R_2 > 0$ valós állandó. Határozzunk meg olyan lineáris (egész- vagy tört-) függvényt, amely az alábbi leképezést valósítja meg!

- I. $\operatorname{Re} z > 0 \implies$
- a) $\operatorname{Im} w > 0$
 - $\implies$ b) $\operatorname{Im} w < 0$
 - $\implies$ c) $\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$
 - $\implies$ d) $\operatorname{Im} w < a \operatorname{Re} w + b$
 - $\implies$ e) $|w| < R$
 - $\implies$ f) $|w| > R$
 - $\implies$ g) $|w - w_0| < R$

$$\begin{aligned}
\text{II. } \operatorname{Im} z > a \cdot \operatorname{Re} z + b &\implies \text{a) } \operatorname{Im} w > 0 \\
&\implies \text{b) } \operatorname{Im} w < 0 \\
&\implies \text{c) } \operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w \\
&\implies \text{d) } \operatorname{Im} w > c \cdot \operatorname{Re} w + d \\
&\implies \text{e) } |w| < R \\
&\implies \text{f) } |w| > R \\
&\implies \text{g) } |w - w_0| > R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III. } |z| < R_1 &\implies \text{a) } \operatorname{Im} w > 0 \\
&\implies \text{b) } \operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w \\
&\implies \text{c) } \operatorname{Im} w < a \cdot \operatorname{Re} w + b \\
&\implies \text{d) } |w| < R_2 \\
&\implies \text{e) } |w| > R_2 \\
&\implies \text{f) } |w - w_0| < R_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV. } |z - z_0| < R_1 &\implies \text{a) } \operatorname{Im} w > 0 \\
&\implies \text{b) } \operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w \\
&\implies \text{c) } \operatorname{Im} w < a \cdot \operatorname{Re} w + b \\
&\implies \text{d) } |w| < R_2 \\
&\implies \text{e) } |w| > R_2 \\
&\implies \text{f) } |w - w_0| < R_2
\end{aligned}$$

83. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely az

$$\operatorname{Im} z \geq 0$$

félsíkot a

$$|w| \leq 1$$

körlemezre képezi le úgy, hogy

$$z = j \implies w = 0$$

$$z = \infty \implies w = -1$$

(Tehát adott a z síkbeli tartomány egy belső pontjának és egy határpontjának a képe.)

84. Határozzuk meg a lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z - 4j| < 2$$

körtartományt az

$$\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$$

félsíkra képezi le úgy, hogy a kör középpontjának a $w = -4$ pont és a kör $z = 2j$ pontjának a $w = 0$ pont felel meg.

85. Határozzuk meg azt a legáltalánosabb lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z| < 1$$

körtartományt a

$$\operatorname{Re} w > 0$$

félsíkra képezi le úgy, hogy

$$w(z_1) = 0 ; \quad w(z_2) = \infty$$

legyen. (Itt z_1 és z_2 a $|z| = 1$ kör olyan pontjai, amelyekre $\operatorname{arc} z_1 < \operatorname{arc} z_2$.)

[86]. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z| = 2$$

kört a

$$|w + 1| = 1$$

körre képezi le úgy, hogy a

$$w(2) = 0 ; \quad w(0) = j$$

legyen.

[87]. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z| \leq 1$$

körtartományt a

$$|w - 1| \leq 1$$

körtartományra képezi le úgy, hogy

$$z = 0\text{-nak} \quad w = \frac{1}{2}$$

$$z = 1\text{-nek} \quad w = 0$$

feleljen meg.

88. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely az

$$\operatorname{Im} z > 0$$

felső félsíkot a

$$|w| < R$$

körtartományra képezi le úgy, hogy

$$w(j) = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{arc} w'(j) = 1$$

legyen.

89. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely az

$$\operatorname{Im} z > 0$$

felső félsíkot a

$$|w| < 1$$

körtartományra képezi le úgy, hogy

$$\text{a) } w(j) = 0 \quad ; \quad \operatorname{arc} w'(j) = -\frac{\pi}{2} \quad ,$$

$$\text{b) } w(2j) = 0 \quad ; \quad \operatorname{arc} w'(2j) = 0 \quad ,$$

$$\text{c) } w(a+jb) = 0; \operatorname{arc} w'(a+jb) = 0 \quad (b > 0)$$

legyen.

90. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely az

$$\operatorname{Im} z > 0$$

felső félsíkot a

$$|w - w_0| < R$$

körtartományra képezi le úgy, hogy a j pontnak a kör középpontja felel meg, és a j pontbeli derivált pozitív.

91. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z| < 2$$

körtartományt a

$$\operatorname{Re} w > 0$$

félsíkra képezi le úgy, hogy

$$w(0) = 1 ; \quad \operatorname{arc} w'(0) = \frac{\pi}{2}$$

legyen.

92. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a felső félsíkot az alsó félsíkra képezi le úgy, hogy

$$w(a) = a \quad \text{és} \quad \operatorname{arc} w'(a) = -\frac{\pi}{2},$$

ahol $\operatorname{Im} a > 0$.

93. Határozzuk meg azt a lineáris függvényt, amely a

$$|z| < 1$$

körtartományt a

$$|w| < 1$$

körtartományba képezi le úgy, hogy

$$\text{a) } w\left(\frac{1}{2}\right) = 0 ; \quad \operatorname{arc} w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{b) } w\left(\frac{j}{2}\right) = 0 ; \quad \operatorname{arc} w'\left(\frac{j}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{c) } w(0) = 0 ; \quad \operatorname{arc} w'(0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } w(a) = a ; \quad \operatorname{arc} w'(a) = \alpha$$

94. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z - 2| < 1$$

körtartományt a

$$|w - 2j| < 2$$

körtartományba képezi le úgy, hogy

$$w(2) = j \quad \text{és} \quad \arg w'(2) = 0$$

legyen.

95. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z - 2| < 1$$

körtartományt a

$$|w - 2j| < 2$$

körtartományra képezi le úgy, hogy

$$w(2) = j; \quad \arg w'(2) = 0$$

legyen.

96. Igazoljuk, hogy a z sík bármely 4 különböző pontjának lineáris transzformációval megfeleltethető a w sík $\{1, -1, k, -k\}$ pontja (ahol k értéke függ a z síkbeli pontoktól!). Hány megoldás van és azok hogy határozhatók meg?

97. Mutassuk meg, hogy ha f lineáris törtfüggvény és

$$f(0) = -\frac{1}{2}; \quad f(1) = -3; \quad f(j) = -j$$

akkor valós helyeken a függvényérték is valós.

98. Határozzuk meg a felső félsíknak azon önmagára való konform leképezését, amely a $\{\infty, 0, 1\}$ pontokat a $\{0, 1, \infty\}$ pontokba viszi át!

99. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a felső félsíkot önmagára képezi le úgy, hogy

$$w(a) = b \quad \text{és} \quad \arg w'(a) = \alpha,$$

ahol $\operatorname{Im} a > 0, \operatorname{Im} b > 0$.

100. a) Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z| = 1 \quad \text{és} \quad |z - 1| = \frac{5}{2}$$

körvonalak közti gyűrűszerű tartományt az

$$1 < |w| < R$$

körgyűrűre képezi le!

b) Határozzuk meg R értékét!

101. a) Határozzunk meg egy olyan lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z| = 1 \quad \text{és} \quad \left|z - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

köröket koncentrikus körökbé képezi le!

b) Határozzuk meg a sugarak arányát!

102. Létezik-e olyan lineáris törtfüggvény, amely a

$$|z| = 2 \quad \text{kört}$$

és az

$$x = 2 \quad \text{egyenest}$$

koncentrikus körökbé képezi le!

Indokoljuk állításunkat!

103. Tegyük fel, hogy egy lineáris törtfüggvény a $|z| = R_1$ és $|z| = R_2$ köröket koncentrikus körökbé viszi át.

Igazoljuk, hogy a képkörök sugarainak aránya $\frac{R_1}{R_2}$!

104. Van-e olyan komplex változós lineáris törtfüggvény, amely két párhuzamos (de nem egybeeső!) egyenes közti tartományt két koncentrikus kör közötti tartományra képez le. Indokoljuk állításunkat!

3.8 ELEMİ FÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉSÜK

3.1 EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY

105. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket:

a) $\frac{2\pi}{e^3} j$

b) $e^{-\frac{\pi}{2}} j$

c) e^{2+j}

d) $e^{2 \pm 3 \pi j}$

e) $e^{\frac{2 + \pi j}{4}}$

[106]. a) Igazoljuk, hogy ha e^z valós, akkor $\text{Im } z = \pm k \pi$
($k = 0, 1, 2, \dots$)

b) z milyen értékei mellett lesz e^z tiszta képzetes

107. Határozzuk meg mindazon z értékeket, amelyekre

a) e^{3z} pozitív valós

b) e^{z^2} valós

érték!

[108]. Igazoljuk, hogy az $xy = 4$ hiperbola pontjaiban az

$$f(z) = e^{jz^2}$$

függvény állandó abszolútértékű!

[109]. Igazoljuk, hogy

$$|e^{-2z}| < 1$$

akkor és csak akkor, ha z a $\text{Re } z > 0$ félsíkon van.

[110]. Igazoljuk az alábbiakat:

a) e^{jz} -nek 2π periódusa

b) $|e^{jz}| = e^{-y}$

c) $e^{j\bar{z}} \neq \overline{(e^{jz})}$

[111]. Egyszerűsítsük az

$$|e^{2z+j}| \quad \text{és} \quad |e^{jz^2}|$$

kifejezéseket és mutassuk meg, hogy

$$|e^{2z+j} + e^{jz^2}| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

[112]. Állapítsuk meg, hogy az origóból kiinduló ($\arg z = c$) félegyenések mentén tartva a ∞ -hez a

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$$

határérték melyik irányban létezik és melyikben nem!

113. Állapítsuk meg az alábbi határértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x+jy}$

b) $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{2+jy}$

114. Igazoljuk, hogy

$$w = e^{\bar{z}}$$

sehol sem differenciálható.

115. A differenciálási szabályok alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát:

a) $w = z^2 + e^{-\frac{j}{z}}$

b) $w = \sqrt{1 + e^{2z}}$

c) $w = e^{\sqrt{1+z^2}}$

d) $w = z e^{\frac{1}{1-z}}$

e) $w = \frac{e^{1-2z}}{z + e^{2z}}$

[116]. A $z = x + jy$ helyettesítés alkalmazásával fejezzük ki a

$$w = \operatorname{Re} e^{1/z}$$

függvényt az x és y valós változók segítségével és mutassuk meg, hogy a kapott valós függvény harmonikus minden olyan tartományon, amely nem tartalmazza az origót.

[117]. Határozzunk meg egy olyan síkbeli vektorteret, amelynek az

$$f(z) = e^{jz^2}$$

függvény a komplex potenciálja!

118. Írjuk fel a polárkoordinátákkal a w sík azon göbéjének egyenletét, amelyre a

$$w = e^z$$

függvény leképezi a z sík

$$a) \quad k y = x \quad (k \text{ tetszőleges valós szám})$$

$$b) \quad y = 2x + 1$$

$$c) \quad y = kx + b \quad (k \text{ és } b \text{ tetszőleges valós})$$

egyenését.

[119]. Igazoljuk, hogy a

$$w = e^{-3z^2} - 1 + j$$

komplex függvény a z sík

$$|y| = |x|$$

egyenestartóját a w sík egyetlen körére képezi le. Adjuk meg a kör középpontját és sugarát.

120. Határozzuk meg és ábrázoljuk azt a w síkbeli tartományt, amelyre a

$$w = e^z$$

függvény leképezi a z sík

$$a) \quad 0 \leq y \leq \pi; \quad x < 0$$

$$b) \quad 0 \leq y \leq \pi; \quad 1 \leq x \leq 5$$

téglalaptartományát.

121. Határozzuk meg azt a w síkbeli tartományt, amelyre

$$w = j + e^{z-2}$$

függvény leképezi a z sík

$$\operatorname{Re} z \leq 2$$

félsávját!

122. Határozzuk meg, hogy a

$$w = e^z$$

függvény mire képezi le az alábbi tartományokat:

- a) $\alpha < y < \beta$; $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ félsávot;
- b) $y = x$; $y = x + 2\pi$ egyenesek közti sávot;
- c) $x < 0$; $0 < y < \alpha \leq 2\pi$ félsávot;
- d) $x > 0$; $0 < y < \alpha \leq 2\pi$ félsávot

($z = x + jy$).

123. a) Igazoljuk, hogy a

$$w = e^{3jz^2}$$

függvény által létesített leképezésnél a z sík

$$xy = 1$$

hiperboláján lévő pontok a w sík egyetlen körén helyezkednek el!

b) Adjuk meg a kör középpontját és sugarát!

124. Határozzuk meg a z komplex sík azon pontthalmazát, amelyet a

$$w = e^{3z-6}$$

komplex függvény a w sík origó középpontú egységsugarú körének a belsejébe képez le!

125. Határozzuk meg a

$$|w| = R$$

és

$$\arg w = \alpha$$

polárkoordináta-vonalak z síkbeli ösképet, ha a leképező függvények

- a) $w = e^{\frac{1}{z}}$,
- b) $w = ez^2$.

3.2 LOGARITMUS FÜGGVÉNY

126. Határozzuk meg az alábbi reláció-értékeket és azok főértékeit:

- a) $\text{Ln} (-4)$
- b) $\text{Ln} (3j)$
- c) $\text{Ln} (-ej)$
- d) $\text{Ln} (1-j)$
- e) $\text{Ln} (\sqrt{3}-j)$
- f) $\text{Ln} (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j)$
- g) $\text{Ln} (j^{-1/2})$

127. Határozzuk meg mindazon z értékeket, amelyekre

- a) $e^z = -2$
- b) $e^{3z} = 1,$
- c) $e^{4z} = j.$
- d) $e^{2z-1}=1$
- e) $e^z = 1 + j\sqrt{3}$
- f) $e^z = -1 + 2j$
- g) $e^z = -1 -j$

128. Határozzuk meg az alábbi összefüggések összes gyökét:

- a) $\ln z = \frac{1}{2} \pi j$
- b) $\ln z = j$
- c) $\ln \sqrt{2 + z^2} = \pi j$

129. Igazoljuk, hogy

- a) $\lim_{z \rightarrow 0} (\ln z)$ nem létezik $(-\pi < \arg z < \pi)$
- b) $\lim_{z \rightarrow 0} (z \ln z) = 0$ (")
- c) $\lim_{z \rightarrow 0} (\sqrt{z} \ln z) = 0$ (")

130. a) Határozzuk meg a

$$w = e^{jz}$$

függvény legkisebb pozitív periódusát!

b) Adjunk meg egy olyan ponthalmazt, amelyet a fenti függvény egy-egy értelműen képez le, és adjuk meg ezen a ponthalmazon értelmezett inverz függvényét!

131. a) Adjunk meg a z síkban egy olyan tartományt, amelyen a

$$w = e^{\frac{z}{1+j}}$$

függvény invertálható!

b) Határozzuk meg ezen a tartományon az inverz függvényt és annak egy kiválasztott pontbeli értékét!

132. A differenciálási szabályok alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények differenciáhányadosát:

a) $w = \ln(z^2 + 2z + 2)$

b) $w = \ln\left(z + \frac{3}{2} + \sqrt{z^2 + 3z + 2j}\right)$

c) $w = \frac{1}{\ln(1+z^2)}$

d) $w = \ln^2(1 + e^{z^3})$

e) $w = e^{z \cdot \ln z}$

f) $w = \frac{\ln(z + 3j)}{z^2}$

($\ln z$ az $\text{Ln } z$ reláció főértékét jelöli.)

133. Határozzuk meg a

$$z(t) = t + jt;$$

$$0 \leq t \leq \varepsilon$$

egyenesszakasz hosszváltozását kis ε esetén, ha a leképező függvény:

a) $w = \ln(1 + 2z)$

b) $w = e^z + \frac{1}{3 + \ln(1+z)}$

134. Legyen.

$$z = r e^{j\varphi} \quad \text{és} \quad z - 1 = \rho e^{j\phi}$$

a) Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{Re} [\ln (z-1)] = \frac{1}{2} [\ln (1+r^2-2r \cos \varphi)]$$

($z \neq 1$)

b) Kielégíti-e ez a függvény a Laplace-féle parciális differenciálegyenletet, ha $z \neq 1$? Indokoljuk állításunkat!

135. Határozzuk meg a w sík azon tartományát, amelyre a

$$w = \ln \frac{1}{1-z}$$

függvény leképezi a z sík

$$|z| \leq 1$$

körtartományát.

136. a) Bizonyítsuk be, hogy a felső félsíkon kiválasztható a

$$w = \operatorname{Ln} \cos z$$

reláció reguláris ága

b) Milyen tartományba viszi át az $\operatorname{Im} z > 0$ a felső félsíkot a fenti reláció bármelyik kiválasztott ága?

137. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \ln z \quad (-\pi < \arg z \leq \pi)$$

függvény mire képezi le az

a) $r = A e^{k\varphi}$; ($A > 0$) logaritmikus spirálist;

b) $0 < \arg z < \alpha < 2\pi$ szögteret;

c) $|z| < 1$, $0 < \arg z < \alpha < 2\pi$ körszketort;

d) az $[r_1, r_2]$ szakasz mentén bemetszett $r_1 < |z| < r_2$ gyűrűtartományt!

3.3 TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

138. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket:

- a) $\sin 2j$
- b) $\sin (-1 + 3j)$
- c) $\cos j$
- d) $\cos (5 + j)$
- e) $\cos \left(\frac{\pi}{4} - j\right)$
- f) $\operatorname{tg} (-1 + 2j)$
- g) $\operatorname{tg} (2 - j)$

139. Határozzuk meg mindazon z értékeket, amelyekre

- a) $w = \sin z$
- b) $w = \cos z$
- c) $w = \operatorname{tg} z$

tiszta valós, vagy tiszta képzetes.

140. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \operatorname{tg} z$$

függvény értelmezési tartományában sehol sem veszi fel a $+j$, vagy $-j$ értéket!

141. Határozzuk meg

$$\cos 2z \quad \text{és} \quad \cos 3z$$

értékét, ha $\cos z = 2$.

142. Írjuk fel (az exponenciális függvény felhasználásával) zárt alakban az alábbi összegeket!

- 1. $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$
- 2. $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x$
- 3. $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin (2n-1)x$

143. Mutassuk meg, hogy minden z -re fennállnak az alábbi egyenlőségek:

- a) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$;
- b) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$;
- c) $\overline{\operatorname{tg} z} = \operatorname{tg} \bar{z}$.

144. Mutassuk meg, hogy

$$\cos j\bar{z} = \overline{(\cos jz)}$$

minden z -re, de

$$\sin j\bar{z} \neq \overline{(\sin jz)}$$

kivéve $z : \pm n\pi j$; $n = 0, 1, 2, \dots$

145. Igazoljuk, hogy ha

$$|\sin z| \leq 1,$$

akkor z valós!

146. Határozzuk meg mindazon z értékeket, amelyekre

$$|\operatorname{tg} z| = 1$$

147. Mutassuk meg, hogy

$$\text{a) } |\sin z|^2 = |\sin(x+jy)|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$$

$$\text{b) } |\cos z|^2 = |\cos(x+jy)|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x$$

148. Mutassuk meg, hogy

$$\text{a) } |\sin z| = |\sin(x+jy)| \geq |\sin x|$$

$$\text{b) } |\cos z| = |\cos(x+jy)| \geq |\cos x|$$

149. Határozzuk meg az alábbi határértékeket

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow \infty} \sin z$$

$$\text{b) } \lim_{z \rightarrow \infty} \cos z$$

$$\text{c) } \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{tg} z$$

$$\text{d) } \lim_{z \rightarrow 0} z \cos \frac{1}{z}$$

$$\text{e) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2},$$

$$\text{f) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z},$$

- g) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z^3}$,
- h) $\lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)^{z^{\frac{1}{2}}}$
- i) $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{z^{\frac{1}{2}}}$
- j) $\lim_{z \rightarrow n\pi j} (z - n\pi j) \frac{e^z}{\sinh z}$

150. Állapítsuk meg, hogy hol differenciálhatók és hol regulárisak az alábbi függvények

- a) $f(z) = \sin jz$
- b) $f(z) = \sin \bar{z}$
- c) $f(z) = \overline{\sin 3z}$
- d) $f(z) = \cos \bar{z}$
- e) $f(z) = |\cos z|^2$

151. A differenciálási szabályok alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények első és második deriváltját:

- a) $f(z) = \sin^3(z-j)$
- b) $f(z) = e^{\cos(z^2)}$
- c) $f(z) = \frac{1}{(1+\operatorname{tg} z)^2}$
- d) $f(z) = \ln \operatorname{tg}(z^2)$

152. Határozzuk meg a w sík azon alakzatait, amelyekre az alábbi függvények a z sík adott görbéit leképezik:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $w = \overline{j \cos z}$ | $x = 0$ egyenest |
| b) $w = \overline{j \sin 3z}$ | $x = \frac{\pi}{6}$ egyenest |
| c) $w = \overline{\cos 3z}$ | $x = c$ egyeneseket |

Kölcsönösen egyértelműek-e a fenti elképezések?

153. Határozzuk meg azokat a w síkbeli alakzatokat, amelyekre a

a) $w = \sin 2z$

b) $w = \cos z$

függvény leképezi a z sík

$$\operatorname{Re} z = c \quad \text{ill.} \quad \operatorname{Im} z = d$$

egyeneseit.

154. a) Igazoljuk, hogy a

$$w = \sin z$$

függvény kölcsönösen egyértelműen és konform módon képezi le a z sík

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq y \leq 1$$

téglalaptartományát.

b) Ábrázoljuk a képtartományt!

155. Határozzuk meg azt a tartományt, amelyre a

$$w = \operatorname{tg} z$$

függvény leképezi a z sík

a) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ sávját

b) $0 < x < \pi; \quad y > 0$ félsávját!

156. Határozzuk meg és ábrázoljuk a w sík azon tartományait, amelyekre a

$$w = \sin z$$

függvény leképezi a z sík alábbi tartományait:

a) $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{Im} z > 0$

b) $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{Im} z > 0$

c) $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \operatorname{Im} z < k$

$$d) -\pi \leq \operatorname{Re} z \leq \pi ; \quad c_1 \leq \operatorname{Im} z \leq c_2$$

$$e) -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}; \quad 1 \leq \operatorname{Im} z < 2$$

157. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \cos z$$

függvény mire képezi le az alábbi tartományokat:

$$a) 0 < x < \pi, \quad y < 0 \quad \text{félsávot};$$

$$b) 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad y > 0 \quad \text{félsávot};$$

$$c) -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad y > 0 \quad \text{félsávot},$$

$$d) 0 < x < \pi \quad \text{sávot};$$

$$e) 0 < x < \pi, \quad -h < y < h \quad (h > 0) \quad \text{négyszögtartományt!}$$

[158]. Egyszerűbb transzformációk összetételeként határozzuk meg és ábrázoljuk a w sík azon tartományát, amelyre a

$$w = \sqrt{\sin z}$$

függvény leképezi a z sík

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad y \geq 0$$

félsávját!

[159]. Egyszerűbb transzformációk (elemi függvények által létesített leképezések) összetételeként határozzuk meg és ábrázoljuk a w sík azon tartományát, amelyre a

$$w = \sin^2 z$$

függvény leképezi a z sík

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad y > 0$$

félsávját.

160. Egyszerűbb transzformációk összetételeként határozzuk meg és ábrázoljuk a w sík azon tartományát, amelyre a

$$w = (\sin z)^{1/4}$$

függvény leképezi a z sík

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} ; \quad y \geq 0$$

félsávját!

3.4 ARCUS-FÜGGVÉNYEK

161. Határozzuk meg az alábbi értékeket

- a) $\operatorname{Arcsin} 2$
- b) $\operatorname{Arcsin} j$
- c) $\operatorname{Arctg} 2j$
- d) $\operatorname{Arctg} (1 + j)$

162. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

- a) $\sin 3z + 2 = 0$
- b) $\sin z = 5j$
- c) $\cos z = 5$
- d) $\sin z = \operatorname{ch} 4$
- e) $\operatorname{tg} z = 1 + j$

163. Vizsgáljuk meg, hogy van-e megoldása a komplex számok körében az

- a) $\sin jz = j \overline{\cos jz}$
- ☐ b) $\cos jz = 2j \sin jz$
- ☐ c) $\sin z = j \cos z$

egyenleteknek!

164. Igazoljuk, hogy ha $-1 \leq a \leq 1$, akkor

- a) $\sin z = a$
- b) $\cos z = a$

minden gyöke valós!

165. Állapítsuk meg, amennyiben létezik a

$$\lim_{z \rightarrow j} \frac{\operatorname{arctg} (z^2 + 1)^2}{\sin^2 (z^2 + 1)}$$

határértéket, ha az Arctg relációnak azt az ágát vesszük, amelyen $\operatorname{arctg} (0) = 0$

166. A differenciálási szabályok alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát:

a) $f(z) = \arcsin \frac{1}{z}$

b) $f(z) = \arccos (z - 1)^2$

c) $f(z) = z \operatorname{arctg} \ln z$

d) $f(z) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{z+3j}}$

e) $f(z) = \arcsin (1 - e^{2jz})$

f) $f(z) = \arccos (\sin z - \cos z)$

167. Határozzuk meg azt a tartományt, amelyre a

$$w = \operatorname{arctg} z \quad (-\pi < \operatorname{arc} z \leq \pi)$$

függvény leképezi az

$$|z| < 1$$

körtartományt!

168. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \arcsin z \quad (-\pi < \operatorname{arc} z \leq \pi)$$

függvény mire képezi le az alábbi tartományokat:

- a) a felső félsíkot;
- b) a valós tengely $(-\infty, 1]$ és $[1, \infty)$ szakaszai mentén bemetszett z síkot;
- c) az első síknegyedet;
- d) a valós tengely $(-\infty, -1]$ szakasza mentén bemetszett bal félsíkot!

3.5 HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNY

169. Határozzuk meg az alábbi értékeket:

$$4 \operatorname{sh} \frac{\pi j}{3}$$

$$\operatorname{ch} (2k + 1) \frac{\pi j}{2}$$

$$\operatorname{cth} \frac{3\pi j}{4}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

170. Határozzuk meg mindazon z értékeket, amelyekre

a) $w = \operatorname{sh} z$.

b) $w = \operatorname{ch} z$

c) $w = \operatorname{th} z$

tiszta valós, vagy tiszta képzetes.

171. Igazoljuk, hogy

a) $\operatorname{sh}(z + j\pi) = -\operatorname{sh} z$

b) $\operatorname{ch}(z + j\pi) = -\operatorname{ch} z$

172. Mutassuk meg, hogy

$$|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$$

$$|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y$$

($z = x + jy$).

173. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{sh} |x| \leq |\operatorname{ch} z| \leq \operatorname{ch} |x|$$

($z = x + jy$)

174. A differenciálási szabályok alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát:

a) $f(z) = \operatorname{sh}(z + e^{jz})$

b) $f(z) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(z^2 + 1 + 3j)}$

c) $f(z) = \ln \operatorname{ch}(z + 1)^2$

d) $w(z) = e^{\sqrt{\operatorname{ch}(z+3j)}}$

175. Adjuk meg az összes olyan z értéket, amelyre a

$$w = 2z^3 \operatorname{ch} 2z - z^4 \operatorname{sh} 2z$$

komplex függvény által létrehozott leképezés nem konform.

176. Határozzuk meg a w sík azon görbéit, amelyekre a z sík

$$x = c \quad \text{ill.} \quad y = d$$

egyeneseit leképezi a

$$a) w = \operatorname{sh} \bar{z}$$

$$b) w = \operatorname{ch} \bar{z}$$

függvény.

177. Mutassuk meg, hogy a

$$w = \operatorname{ch} z$$

függvény

a) a $z = jy$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ pontthalmazt a w sík tengelyének $0 \leq u \leq 1$ szakaszára képezi le;

b) az $x \geq 0$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ félsávot a w sík első negyedére képezi le. Határozzuk meg a félsáv határvonalainak w síkbeli képét!

178. Határozzuk meg, hogy a

$$w = \operatorname{ch} z$$

függvény mire képezi le az

a) $0 < y < \pi$ sávot,

b) $x \geq 0$; $0 \leq y \leq \pi$ félsávot!

3.6 AREA-FÜGGVÉNYEK

179. Határozzuk meg az alábbi reláció értékeket

a) $\operatorname{arch} j$

b) $\operatorname{arsh} [\ln (-1)]$

c) $\operatorname{arch} (-1)$

d) $\operatorname{arth} 0$

180. Határozzuk meg az alábbi egyenletek összes gyökét!

$$a) \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$$

$$b) \operatorname{sh} z = j$$

c) $\operatorname{ch} z = -2$

d) $\operatorname{sh} \frac{1}{z} = 0$

181. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$

b) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 1$

182. Határozzuk meg azt a tartományt, amelyre a

$$w = \operatorname{arsh} z$$

függvény leképezi

a) képzetes tengely $1 \leq y < \infty$ és $-\infty < y \leq -1$ szakasza mentén bemetszett z síkot;

b) a z sík első negyedét!

3.7 ÁLTALÁNOS HATVÁNYFÜGGVÉNY

183. Határozzuk meg az alábbi értékeket

a) 1^j

b) 2^j

c) j^j

d) $(-1)^j$

e) $(-1)^{2j}$

184. Határozzuk meg az alábbi értékeket:

a) $\operatorname{Re} (1-j)^{1+j}$

b) $|(-j)^{-j}|$

c) $(1+j)^j$

d) $(6-3j)^{2j}$

e) $e^{\sqrt{j}}$

f) $(-1)^{1/\pi}$

185. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat, amelyekre

$$1^z = 5$$

[186]. Milyen feltételek mellett vesz fel

$$c^z = (a + jb)^{x+jy}$$

csak valós értékeket.

[187]. Határozzuk meg a

$$w = z^z$$

függvény valós és képzetes részét.

188. Határozzuk meg a

$$w = z^z = e^z \ln z$$

(ahol $\ln z$ a logaritmus reláció főága) függvényértékeit a $z = -c$ pontban a bemetszés felső és alsó partján.

[189]. Mutassuk meg, hogy

$$|z^j| = e^{-\operatorname{arc} z}$$

(ahol $\operatorname{arc} z$ az Arcus reláció főága) és vázoljuk a

$$|z^j| = \operatorname{const.}$$

görbékét.

190. Differenciáljuk a

$$w = (z - 3j)^{4z + 2}$$

függvényt.

[191]. Határozzuk meg, hogy az

$$f(z) = j^z$$

függvény milyen görbékre képezi le az

$$a) \operatorname{Re} z = c_1$$

$$b) \operatorname{Im} z = c_2$$

egyeneseket!

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

1.§ KOMPLEX VONALINTEGRÁL

1. A komplex vonalintegrál definíciója alapján számítsuk ki az alábbi görbe menti integrálok értékét!

a) $\int_a^b 1 \, dz$

tetszőleges, pozitív irányítású rektifikálható görbe mentén integrálva;

b) $\int_a^b z \, dz$

tetszőleges, pozitív irányítású rektifikálható görbe mentén integrálva;

c) $\int_G \frac{1}{z - z_0} \, dz$

ha G a pozitív irányítású $|z - z_0| = R$ kör.

2. Határozzuk meg az

$$\int_L (z^2 - 1) \, dz$$

integrál értékét, ha az L görbe a $P_1(0,1)$ kezdőpontot a $P_2(1,0)$ végponttal összekötő

- a) egyenes szakasz
- b) $y = 1 - x^2$ parabolaív, növekvő $\operatorname{Re} z = x$ irányban befutva!

3. Számítsuk ki az

$$\int_{\pi j}^1 e^z \, dz$$

integrál értékét

9. Határozzuk meg

$$\int_L |z| dz$$

integrál értékét, ha

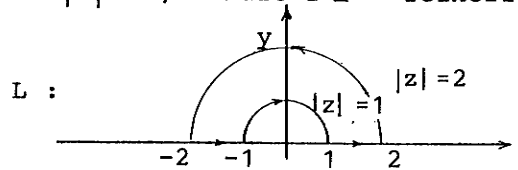
- a) L : az origóból a $z = 2 - j$ ponthoz vezető sugár,
- b) L : a $|z| = 1$; $0 \leq \arg z \leq \pi$ félkörív pozitív irányban bejárva,
- c) L : a $|z| = R$ kör pozitív irányba bejárva.

10. Határozzuk meg az alábbi vonalmenti integrálok értékét!

a) $\int_L |z| \bar{z} dz$

L : a pozitív irányban bejárt $|z| = 1$; $0 \leq \arg z \leq \pi$ félkörív.

b) $\int_L \frac{z}{\bar{z}} dz$



c) $\oint_G \bar{z}^2 dz$

G : a pozitív irányban bejárt $|z-1| = 1$ kör

11. Határozzuk meg az alábbi vonalmenti integrálok értékét az adott $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ csúcspontú polinomok mentén, ha a befutási irány a csúcspontok jelzett sorrendje!

- a) $\int_L (3z-1) dz$ csúcspontjai: $\{-j, +j\}$.
- b) $\int_L (3z-1) dz$ csúcspontjai: $\{-j, j, -1, -j\}$.
- c) $\int_L \operatorname{Re} z dz$ csúcspontjai: $\{-j, -j+1, j+1, j\}$
- d) $\int_L |z| dz$ csúcspontjai: $\{-j+1, j+1\}$

[12]. Legyen L a $z_1 = (-2-2\sqrt{3}j)$ pontból a $z_2 = (-2 + 2\sqrt{3}j)$ pontba irányított egyenesszakasz, $f(z) = \sqrt{z}$ pedig a $\sqrt{z}$ reláció azon egyértékű ága, amelyre $\sqrt{1} = 1$

Határozzuk meg az

$$\int_L f(z) dz$$

vonal menti integrál értékét!

13. Határozzuk meg az $f = \frac{1}{\sqrt{z}}$ reláció alábbiakban adott egyértékű ágának az adott görbe menti integrálját! (Az egyértékű ág kiválasztása a görbe egy pontjához tartozó függvényérték megadásával történik):

a) $L : |z| = 1 ; y \geq 0$ félkörív ; $\sqrt{1} = 1$

b) $L : |z| = 1 ; y \geq 0$ " ; $\sqrt{1} = -1$

c) $L : |z| = 1 ; y \leq 0$ " ; $\sqrt{1} = 1$

d) $G : |z| = 1 ;$ kör ; $\sqrt{1} = 1$

e) $G : |z| = 1 ;$ kör ; $\sqrt{-1} = -j$

Itt L nyílt görbét, G zárt görbét jelöl; az integrálást a görbék pozitív irányú bejárásával végezzük.

14. Határozzuk meg az

$$\oint_G \ln z dz$$

görbementi integrál értékét (ahol $\ln z$ egyértékű ágának kiválasztása egy pontbeli függvényérték megadásával történik), ha

a) $G : |z| = 1$ kör és $\ln 1 = 0$

b) $G : |z| = 1$ " és $\ln j = \frac{\pi j}{2}$

c) $G : |z| = R$ " és $\ln R = \ln R$

d) $G : |z| = R$ " és $\ln R = \ln R + 2\pi j$.

15. Határozzuk meg az

$$\oint_{|z|=1} z^n \ln z dz$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

vonal menti integrál értékét, azon az ágon integrálva, amelyen

- a) $\ln 1 = 0$
 b) $\ln(-1) = \pi j$.

16. Határozzuk meg az

$$\oint_{|z|=1} z^{\alpha} dz$$

vonalmonti integrál értékét, ha α tetszőleges komplex szám és $1^{\alpha} = 1$.

17. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét

a) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$,

b) $\oint_{|z|=1} |z-1| |dz|$

c) $\oint_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a|^2}$ ($a \neq R$)

a köröket pozitív irányban bejárva!

18. Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit!

- a) $f(z) = z \cdot e^z$
 b) $f(z) = \cos^2 z$
 c) $f(z) = \sin^3 z$
 d) $f(z) = \ln z$

a negatív valós tengely mentén bemetszett síkon

e) $f(z) = \operatorname{arctg} z$

az $x=0$; $|y|>1$ félegyenesek mentén bemetszett síkon.

19. Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

- a) $\int e^{-3jz} dz$
 b) $\int z^2 \sin z^3 dz$

- c) $\int \frac{z^2 + 1}{z^3 + 3z + 2} dz$
d) $\int \sin^4 2z \cdot \cos 2z dz$
e) $\int z^2 \operatorname{th}(4z^3) dz$
f) $\int z \cos 2z dz$
g) $\int z^2 e^{-z} dz$
h) $\int z \ln z dz$
i) $\int z^3 \operatorname{sh} z dz$
j) $\int z \sqrt{2z + 5} dz$

az utóbbinál a gyök pozitív ágát véve.

20. A Newton-Leibniz-tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi vonalmenti integrálok értékét!

a) $\int_L z \sin z^2 dz$

L : az origóból a $z = 1+j$ pontba irányított egyenesszakasz;

b) $\int_L (z + 2) e^{jz} dz$

L : az origóból a $z = \pi + j$ pontban irányított egyenesszakasz;

c) $\int_L \frac{dz}{z^2 + 4}$

L : az $x + y = 1$ egyenesnek az x és y tengelyek közötti szakasza csökkenő x -ek irányában bejárva.

21. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét!

a) $\int_L (\bar{z} + \sin z + \operatorname{ch}^2 z) dz$; L : $|z| = 1$; $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
negyedkörív

b) $\int_L (\sin 2\bar{z} - \frac{1}{z^2}) dz$; L : $z_1 = -1 \rightarrow z_2 = 2j$
egyenesszakasz

$$c) \int_L \frac{\cos 2z}{e^z} dz; \quad L : z_1 = -1 \rightarrow z_2 = 2j \rightarrow z_3 = 1 \\ \text{törtvonal}$$

$$d) \int_L \left(\frac{z}{e^z} - \frac{1}{z} \right) dz; \quad L : a) \text{-beli negyedkörív}$$

$$e) \int_L z \sin z \cos z dz; \quad L : y = \sqrt{\pi^2 - x^2}, y > 0$$

$$f) \oint_G z(e^z + \bar{z}) dz; \quad G : |z| = 1$$

pozitív befutással.

22. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét!

$$a) \int_L e^z \cdot dz,$$

ha L a $P_1(-1,0)$ pontból a $P_2(1,0)$ pontba irányított egyenes-szakasz;

$$b) \int_L (e^z + z) dz,$$

ha L a $P(1,0)$ pontból a $P_2(1,\pi)$ pontba irányított egyenes-szakasz;

$$c) \int_L |z| dz,$$

ha L a pozitív körüljárású $|z| = 2$ kör.

$$d) \int_L \frac{\ln z}{z} dz;$$

ha L a $|z| = 1$ kör jobb fele a $-j$ pontból a $+j$ pontba irányítva.

$$e) \int_L \ln z dz;$$

ha L a d)-beli görbe.

23. Határozzuk meg

$$\int_{|z|=R} x \, dz$$

értékét a kört pozitív irányban bejárva.

- a) paraméteres alakban végezve a számítást;
- b) felhasználva, hogy $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$.

24. Legyen G a komplex sík tetszőleges zárt Jordan görbéje, amely T tetszőleges területű tartományt határol. Igazoljuk, hogy

$$\text{a)} \quad \oint_G x \, dz = jT,$$

$$\text{b)} \quad \oint_G y \, dz = -T,$$

$$\text{c)} \quad \oint_G \bar{z} \, dz = 2j T.$$

25. Legyen a G görbe paraméteres egyenlete:

$$z(t) = R e^{jt}; \quad 0 \leq t < 2\pi. \text{ Igazoljuk, hogy}$$

$$\text{a)} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_G \frac{\ln z}{z^2} \, dz = 0,$$

$$\text{b)} \quad \lim_{R \rightarrow 0} \oint_G (\sqrt{z} \ln z) \, dz = 0$$

ahol $\ln z$ az $\text{Ln } z$ reláció főága!

26. Legyen L a $z(t) = R e^{jt}; \quad 0 \leq t \leq \pi$ egyenletű félkörív.

Igazoljuk, hogy

$$\text{a)} \quad \left| \int_L \frac{1}{z^2 + 1} \, dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \quad (R > 1)$$

$$\text{b)} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_L \frac{1}{z^2 + i} \, dz = 0.$$

[27]. Legyen f folytonos a $|z - z_0| = r_0$ kör külsejében, jelölje $M(r)$ az $|f|$ függvény maximumát minden $|z - z_0| = r > r_0$ körön és legyen $\lim_{r \rightarrow \infty} rM(r) = 0$.

Igazoljuk, hogy ekkor

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{K_r} f(z) dz = 0,$$

ha K_r a $|z - z_0| = r > r_0$ körív, vagy annak egy része!

28. Az integrálok kiszámítása nélkül mutassuk meg, hogy fennállnak-e az alábbi becslések!

$$a) \left| \int_L \frac{1}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

ha L a $|z| = 2$ kör első síknegyedbeli íve;

$$b) \left| \int_L (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60,$$

ha L a $z_1 = 0; z_2 = -4, z_3 = 3j$ csúcspontú háromszög $z_1 \rightarrow z_2, z_2 \rightarrow z_3, z_3 \rightarrow z_1$ irányban bejárva;

$$c) \left| \int_L \frac{\ln z}{z^2} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \ln R}{R}$$

ha L a pozitív irányítású $|z| = R$ kör, ahol $R > 1$.

[29]. Legyen L az origó középpontú egységsugarú kör α irányszögű sugara.

Határozzuk meg α értékét úgy, hogy létezzen az

$$\int_L e^{-\frac{1}{z}} dz$$

integrál!

[30]. Legyen $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ olyan komplex változós függvény, amelynek valós és képzetes része egy T tartományon differenciálható.

Igazoljuk, hogy ha tetszőleges $L \in T$ rektifikálható görbén az

$$\int_L [u(x,y) + jv(x,y)] dz$$

integrál értéke valós, akkor $u(x,y)$ és $v(x,y)$ kielégíti legalább az egyik C.-R. egyenletet!

31. Legyen

$$u(x,y) = x + 2xy$$

és L egy tetszőleges, irányított, rektifikálható görbeszakasz, amely a $P(0,0)$ kezdőpontot a $Q(1,1)$ végponttal köti össze.

Határozzuk meg, a $v(x,y)$ függvényt úgy, hogy

$$\int_{\substack{P \\ (L) \\ Q}} [u(x,y) + jv(x,y)] dz = \frac{7}{3}$$

legyen!

32. Igazoljuk:

a) ha $f(z)$ folytonos az origó környezetében, akkor

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_0 f(re^{j\varphi}) d\varphi = 2\pi f(0)$$

akkor b) ha $f(z)$ folytonos a $z = a$ pont környezetében,

$$\lim_{|z-a| \rightarrow 0} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi j f(a)$$

[33]. Legyen f reguláris egy T tartományon és ott $|f'(z) - 1| < 1$.

Igazoljuk, hogy tetszőleges $G \in T$ zárt görbére

$$\oint_G \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

2.§ CAUCHY INTEGRÁL TÉTEL ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

34. Igazoljuk, hogy

$$\oint_G f(z) dz = 0,$$

ha

$$f(z) = z^3 - jz^2 + 5z + 2j$$

és a G zárt görbe

a) $|z| = 1$ kör

b) $|z-1| = 2$ "

c) $|z-3j| + |z+3j| = 20$ ellipszis

pozitív irányban bejárva.

35. Határozzuk meg az alábbi függvények regularitási tartományát és mutassuk meg, hogy

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 0,$$

ha:

a) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$

b) $f(z) = z^2 e^{-z}$

c) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 5}$

d) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$

e) $f(z) = \ln(z + 2)$

36. A. Indokoljuk, hogy az alábbi zárt görbe menti integrálok értéke 0 :

a) $\oint_G \sin z dz$; $G : |z| = R; \quad R > 0$

b) $\oint_G ze^z dz$; $G : |z| = R; \quad R > 0$

c) $\oint_G \frac{1}{(z - 2j)^2} dz$; $G : |z| = 1$

$$d) \oint_G \frac{1}{1+z^2} dz ; \quad G : |z| = R; \quad 0 \leq R \leq 1$$

$$e) \oint_G \operatorname{tg} z \, dz ; \quad G : 4x^2 + y^2 = 4$$

B. Határozzuk meg a fenti vonalintegrálok értékét, ha az adott G görbék $\operatorname{Im} z \geq 0$ felső ívén integrálunk pozitív irányban!

[37]. Legyen G a

$$0 \leq \operatorname{Re} z \leq 3 ; \quad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$$

téglalap tartomány határa pozitív irányban bejárva. Mutassuk meg, hogy

$$a) \oint_G \frac{dz}{z-2-j} = 2\pi j$$

$$b) \oint_G \frac{dz}{(z-2-j)^n} = 0$$

[38]. Legyen G a $|z| = 4$ kör és az $x = +1$, $y = +1$ egyenesek által határolt négyzet közti tartomány határvonala, úgy irányítva, hogy befutásakor a tartomány bal kéz felé essen. Indokoljuk, hogy miért lesz

$$\oint_G f(z) \, dz = 0,$$

ha

$$a) f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1},$$

$$b) f(z) = \frac{z+2}{\sin \frac{z}{2}},$$

$$c) f(z) = \frac{z}{1-e^z}$$

[39]. Határozzuk meg az alábbi (szingularitásokkal rendelkező) függvények integrálját az adott görbék mentén!

$$a) f(z) = \frac{1}{z} \quad G : |z-3| = 1,$$

$$b) f(z) = \frac{\sin z}{(z-5j)^3}, \quad G : |z-1| + |z+1| = 4.$$

40. Határozzuk meg az

$$u(x,y) = x^3 - 3y^2x + y$$

függvényhez olyan $v(x,y)$ függvényt, hogy

$$\oint [u(x,y) + jv(x,y)] dz = 0$$

legyen bármely G rektifikálható zárt görbére!

41. Adjunk az integrandusban szereplő k együtthatónak egy olyan valós számértéket, hogy

$$a) \oint_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^3 - jz^2 + kz} dz = 0,$$

$$b) \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3 - 2z^2 - j - kz} dz = 0$$

legyen!

42. A Cauchy-integráltétel alkalmazásával határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{dz}{1+z^2}$$

integrál értékét, ha G a pozitív irányban bejárt:

$$a) |z - j| = 1;$$

$$b) |z + j| = 1;$$

$$c) |z| = 2$$

kör!

43. Az integrálandó függvények résztörtekre bontása után a Cauchy-integráltétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi integrálok értékét!

$$a) \oint_G \frac{dz}{9 + z^2}, \quad G : |z| = 4,$$

$$b) \oint_G \frac{1}{z(z^2 - 4)} dz, \quad G : |z - 2| = 3,$$

$$c) \oint_G \frac{3z - 1}{(z-1)(z^2+jz)} dz, \quad G : |z + j| = 4,$$

az adott G görbét pozitív irányban bejárva.

[44]. Igazoljuk, hogy a $z = \pm j$ pontokon át nem menő, tetszőleges rektifikálható L görbe mentén integrálva

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

ahol k egész szám!

[45]. Az $\frac{1}{2} < |z| < 2$ körgyűrűben (ami kétszeresen összefüggő tartomány) reguláris $w = \frac{1}{z}$ függvény segítségével illusztráljuk, hogy többszörösen összefüggő tartományon két pont közti integrál értéke nem független a két pontot összekötő görbétől!

[46]. Igazoljuk, hogy az origón át nem menő, tetszőleges rektifikálható görbe mentén integrálva:

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z + 2\pi jk,$$

ahol a k egész szám, amelynek abszolút értéke és előjele azt mutatja, hogy az integrációs görbe hányszor és milyen irányban kerüli meg az origót.

(47). Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét, ha az integrációs út a kezdő és végpontot összekötő tetszőleges, szakaszonként sima görbe!

$$a) \int_j^{j/2} e^{\pi z} dz$$

$$b) \int_0^{\pi+2j} \cos \frac{z}{2} dz$$

$$c) \int_1^3 (z-2)^3 dz$$

[48]. Határozzuk meg - amennyiben lehetséges - a Newton-Leibniz-formula segítségével az

$$\int_{-1}^1 \sqrt{z} \, dz \quad (0 \leq \operatorname{arcc} z < 2\pi)$$

integrál értékét, ha

a) $L : a \ z_1 = -1$ és $z_2 = 1$ pontot összekötő, tetszőleges rektifikálható görbe az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkon;

b) $L : a \ z_1 = -1, z_2 = 1$ pontot összekötő tetszőleges rektifikálható görbe az $\operatorname{Im} z < 0$ félsíkon.

49. a) Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{re} \cdot j^{\frac{\varphi}{2}} \quad (r > 0; \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2})$$

$$f(0) = 0$$

függvény folytonos a felső félsíkon!

b) Legyen G az $R \leq 1; 0 \leq \varphi \leq \pi$ félkörtartomány teljes határa pozitív irányban bejárva. A félkörív és az x tengelyen levő két egyenesszakasz menti integrálással mutassuk meg, hogy

$$\oint_G f(z) \, dz = 0.$$

Indokoljuk, hogy miért nem alkalmazható itt a Cauchy-alaptétel!

50. Legyen

$$G(z) = \int_{\pi-j\pi}^z \cos 3\zeta \, d\zeta$$

Igazoljuk, hogy

a) $G(z)$ független a $(\pi-j\pi)$ és z pontot összekötő görbétől,

$$b) G'(z) = \cos 3z.$$

51. Legyen

$$G(z) = \int_{1+j}^z \sin \zeta^2 d\zeta.$$

Igazoljuk, hogy

- a) G reguláris függvénye z -nek,
- b) $G'(z) = \sin z^2$.

52. a) Igazoljuk, hogy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_G \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)} dz = 0,$$

ha G a pozitív irányítású $|z| = R$ kör!

b) Igazoljuk a) eredményének felhasználásával, hogy

$$\oint_G \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)} dz = 0,$$

ha G a pozitív irányítású $|z-2| = 5$ kör!

c) Igaz-e a b)-beli állítás, ha G a pozitív irányítású $|z+1| = 1,2$ kör? Indokoljuk állításunkat!

53. Legyen $P(x,y)$ és $Q(x,y)$ két folytonos és folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvény a T tartományban; G egy tetszőleges zárt Jordan-görbe T -ben, és tételezzük fel, hogy minden ilyen görbére

$$\oint_G [P(x,y) dx + Q(x,y) dy] = 0,$$

(ahol a bal oldal az $f(z) = P(x,y) + Q(x,y)j$ komplex változós függvény G görbe menti integrálja.)

a) Igazoljuk, hogy ekkor létezik egy olyan reguláris f komplex függvény, hogy

$$\operatorname{Re} [f(z) dz] = P dx + Q dy$$

egy teljes differenciál!

b) Határozzuk meg - a) felhasználásával - $p(x,y)$ és $q(x,y)$ értékét úgy, hogy

$$\operatorname{Im} [f(z)dz] = p \, dx + q \, dy$$

teljesüljön, és igazoljuk, hogy

$$\oint_E [p \, dx + q \, dy] = 0 .$$

c) Mutassunk rá a), b) és a Cauchy-tétel közti összefüggésre!

54. Illusztráljuk az 53. feladat eredményeit $p(x,y)$, $q(x,y)$ és $f(z)$ meghatározásával, ha

$$P(x,y) = 2x + y - 2xy; \quad Q(x,y) = x - 2y - x^2 + y^2 .$$

3.§ CAUCHY INTEGRÁLFORMULA FÜGGVÉNYRE ÉS DIFFERENCIÁLHÁNYADOSRA

[55]. Határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{3z}{z^2 + jz + 2} \, dz$$

integrál értékét, ha G a pozitív irányítású $|z| = 3$ kör!

[56]. Határozzuk meg a Cauchy-integrálformula felhasználásával az

$$\oint_G \frac{dz}{z^2 + 9}$$

integrál értékét, ha

a) $z = 3j$ pont G belső pontja és $z = -3j$ G külső pontja;

b) $z = -3j$ pont G belső pontja és $z = 3j$ G külső pontja;

c) $z = 3j$ és $z = -3j$ pontok G belső pontjai.

[57]. Határozzuk meg a G zárt Jordan-görbe elhelyezkedésétől függően a

$$\oint_G \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$$

integrál értékét, feltéve, hogy G nem megy át az integrálandó függvény egyetlen szinguláris pontján sem!

58. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét:

$$a) \oint_G \frac{\sin^6 z}{z - \frac{\pi}{6}} dz$$

$$b) \oint_G \frac{\sin^6 z}{(z - \frac{\pi}{6})^3} dz$$

ha G : a $|z| = 1$ kör pozitív irányban bejárva

$$c) \oint_G \frac{1}{z^2 + 4} dz$$

$$d) \oint_G \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz$$

ha G : a $|z - j| = 2$ kör pozitív irányban bejárva.

59. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{e^z}{z(1 - z)^3} dz$$

integrál értékét, ha

a) $z = 0$ a G határgörbe belsejében, $z = 1$ a külsejében helyezkedik el.

b) $z = 1$ a G belsejében, $z = 0$ a külsejében helyezkedik el;

c) $z = 0$ és $z = 1$ mindketten G belsejében vannak.

60. Legyen G a $\operatorname{Re} z = \pm 2$; $\operatorname{Im} z = \pm 2$ egyenesek által határolt négyzet határgörbéje pozitív irányban bejárva.

A Cauchy-integrálformula alkalmazásával határozzuk meg az alábbi integrálok értékét!

$$a) \oint_G \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi j}{2}} dz$$

$$b) \oint_G \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz$$

$$c) \oint_G \frac{z}{2z + 1} dz$$

$$d) \oint_G \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{2}}{(z - x_0)^2} dz \quad |x_0| < 2$$

$$e) \oint_G \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 - 1)} dz$$

61. A differenciálhányadosra vonatkozó Cauchy-integrál formula felhasználásával határozzuk meg az alábbi integrálok értékét (a G görbék pozitív irányú bejárása esetén)!

$$a) \oint_G \frac{\sin z}{z^2} dz, \quad G : |z| = 1,$$

$$b) \oint_G \frac{\sqrt{z}}{(z-1)^2} dz, \quad G : |z-1| = \frac{1}{2},$$

z -nek azt az ágát véve, amelyen $-\pi < \arg z \leq \pi$;

$$c) \oint_G \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 + 2z + 1} dz, \quad G : |z+1| = \frac{1}{10},$$

$$d) \oint_G \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz, \quad G : |z| = 3.$$

62. A Cauchy-integrálformula felhasználásával határozzuk meg az alábbi integrálok értékét, ha G a pozitív irányítású $|z| = 6$ kör!

$$a) \oint_G \frac{e^z}{z-2} dz$$

$$b) \oint_G \frac{\operatorname{sh} 3z}{z-j} dz$$

$$c) \oint_G \frac{z^4 e^{\pi z}}{z^2 + 4} dz$$

$$d) \oint_G \frac{\sin z}{z(z^2 + 4)} dz$$

$$e) \oint_G \frac{e^z}{(z - 3)^5} dz$$

$$f) \oint_G \frac{\sin z}{(z^2 + 9)^2} dz$$

63. A Cauchy-integráltétel vagy a Cauchy-integrálformula alkalmazásával határozzuk meg az alábbi integrálok értékét (az integrációs görbék pozitív irányú bejárása mellett)!

$$a) \oint_{|z|=10} \frac{1}{z + \frac{1}{2}} dz$$

$$b) \oint_{|z|=10} \frac{\sin z}{z + \frac{1}{2}} dz$$

$$c) \oint_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{arctg} z}{z - 1} dz$$

$$d) \oint_{|z-j|=\frac{3}{2}} \frac{e^z + z}{z - 2} dz$$

$$e) \oint_{|z+2j|=\frac{3}{2}} \frac{1 + \operatorname{ch} z}{z + j} dz$$

$$f) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz$$

$$g) \oint_{|z-j|=1} \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

$$h) \oint_{|z-1|=\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{z}}{z^2-1} dz \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

64. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét (a G görbék pozitív irányú bejárása mellett)!

$$a) \oint_G \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2-1} dz ,$$

ahol G : az $x^2+y^2-2x=0$ kör;

$$b) \oint_G \frac{2z^2-z-2}{z-2} dz$$

ahol G : $x = \pm 3$; $y = \pm 3$ egyenesekkel határolt négyzet;

$$c) \oint_G \frac{e^{z\pi}}{(z^2+1)^2} dz ,$$

ahol G : a $4x^2+y^2-4y=0$ ellipszis;

$$d) \oint_G \frac{1}{z^2+4} dz ,$$

ahol G : a $|z-j|=2$ kör;

$$e) \oint_G \frac{1}{(z^2+4)^2} dz ,$$

ahol G : a $|z-j|=2$ kör;

$$f) \oint_G \frac{\operatorname{ch} z}{z^4} dz ,$$

ahol G : az $y=1+x$; $y=1-x$, $y=-1$ egyenesekkel határolt háromszög.

65. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét!

$$a) \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{z}{z^4-1} dz ,$$

ha $G : |z - a| = a$ és $a > 1$;

$$b) \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$$

ha G a belsejében tartalmazza a $|z| \leq a$ körtartományt

$$c) \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{z e^z}{(z-a)^3} dz ,$$

ha a $z = a$ pont a G görbe belső pontja.

66. A Cauchy-integrálformula felhasználásával határozzuk meg az alábbi integrálokkal definiált $f(t)$ függvényeket!

$$a) f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz ,$$

ha $t > 0$ és $G : |z| = 3$ kör.

$$b) f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{e^{zt}}{(z^2 + 1)^2} dz ,$$

ha $t > 0$ és $G : |z| = 3$ kör.

67. Határozzuk meg az összes olyan $z = a$ komplex számot, amelyre fennáll, hogy

$$\oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{ch} z}{(z-a)^2} dz = 2\pi j \operatorname{sh} a$$

68. Legyen G a $|z| = 3$ kör pozitív irányban bejárva.

a) Mutassuk meg, hogy ha

$$f(z_0) = \oint_G \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0} dz \quad (|z_0| < 3),$$

akkor $f(2) = 8\pi j$.

b) Mi az értéke $f(z_0)$ -nak, ha $|z_0| > 3$?

69. Igazoljuk a Cauchy-integráltétel megfordítását az ún. Morea-tételt:

Ha az f komplex függvény egy T tartományon folytonos és tetszőleges $G \in T$ zárt Jordan-görbére vett vonalintegráljának értéke 0, akkor f reguláris T -ben.

[70]. Legyen f reguláris az origót körülvevő G Jordan-görbén és az általa határolt tartományon. Igazoljuk, hogy $\ln z$ bármely reguláris ágát tekintve:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G f'(z) \cdot \ln z \, dz = f(z_0) - f(0) \quad , \quad .$$

ahol z_0 az integrál kezdőpontja!

[71]. Legyen $\varphi(z)$ folytonos a G zárt görbén. Ekkor

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

a G görbe belsejében reguláris függvény.

Feltételezhető-e, hogy az így értelmezett f függvény folytonos a G határgörbén és ott értékei megegyeznek φ értékeivel? Illusztráljuk állításunkat a

$$\varphi(z) = \frac{1}{z}$$

függvény és a

$$G : |z| = 1$$

görbe segítségével!

[72]. Legyen f reguláris a G zárt Jordan-görbén és az általa határolt tartományon, és z_0 ne legyen G -n. Igazoljuk, hogy

$$\oint_G \frac{f'(z)}{z - z_0} \, dz = \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, dz$$

[73]. Legyen f reguláris a G zárt Jordan-görbén és az általa határolt tartományon, amelynek z_0 belső pontja. Igazoljuk, hogy

$$[f(z_0)]^n = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{[f(z)]^n}{z - z_0} \, dz$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

74. Az előző feladat felhasználásával igazoljuk, hogy

$$[f(z_0)]^n \leq \frac{M^n}{2\pi\alpha}$$

ahol α a z_0 pontnak a G görbétől való minimális távolsága és M az $|f(z)|$ valós függvény maximális értéke a G görbén!

75. Legyen G egy pozitív irányítású rektifikálható zárt görbe és

$$\varphi(z_0) = \oint_G \frac{z^3 + 2z}{(z - z_0)^3} dz.$$

Igazoljuk, hogy

$$\varphi(z_0) = 6\pi j z_0,$$

ha z_0 a G görbe belsejében van és

$$\varphi(z_0) = 0,$$

ha z_0 a G görbe által határolt tartományon kívüli pont!

76. Legyen k valós szám és G a $z = e^{j\varphi}$; $-\pi < \varphi \leq \pi$ egységkör pozitív irányban bejárva.

a) Mutassuk meg, hogy

$$\oint_G \frac{e^{kz}}{z} dz = 2j\pi$$

b) írjuk át az integrált trigonometrikus alakba és igazoljuk, hogy:

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \varphi} \cos(k \sin \varphi) d\varphi = 2\pi.$$

77. Igazoljuk, hogy ha f reguláris az egész komplex síkon és van olyan n , pozitív egész szám, hogy elég nagy $|z|$ -re $|f(z)| < |z|^n$, akkor f polinom!

4.§ CAUCHY INTEGRÁLFORMULA NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYE

4.1 CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉGEK

[78]. Igazoljuk, hogy ha f reguláris a $|z| \leq R$ körtartományon, továbbá

$$f(0) = 0$$

és $|f(z)| \leq M$,

akkor:

$$|f(z)| \leq \frac{M \cdot |z|}{R}$$

[79]. Igazoljuk, hogy az

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cauchy-egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$f(z) = \frac{c M (z-a)^n}{R^n}$$

ahol c olyan konstans, amelyre $|c| = 1$.

[80]. Legyen f reguláris ha $|z| < 1$ és $|f(z)| < \frac{1}{1-|z|}$

Keressük meg a Cauchy-egyenlőtlenség által nyújtott legjobb becslést $|f^{(n)}(0)|$ -ra!

[81]. Legyen f reguláris és $|f(z)| < M$, ha $|z| \leq R$. Adjunk egy felső korlátot $|f^{(n)}(z)|$ -re ha $|z| \leq \rho < R$.

4.2 LIONVILLE-TÉTEL

[82]. a) Legyen f reguláris a T tartományon. Következik-e ebből, hogy f korlátos T -n?

b) Az a) kérdésre adott válasz ismeretében döntsük el, hogy a Lionville-tétel teljesülésének szükséges feltétele-e f korlátossága?

[83]. Igazoljuk a Lionville-tételt az

$$\oint_G \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

típusú integrál segítségével, ahol G a pozitív irányítású $|z-a| = R$ kör és " b " a $|z-a| < R$ tartomány belső pontja.

[84]. Igazoljuk a Lionville-tétel alábbi következményét!
Ha f az egész komplex síkon reguláris függvény és minden z -re

$$|f(z)| \leq M|z|^n$$

(ahol n nem negatív egész szám és M pozitív állandó), akkor f vagy n -nél nem magasabb fokszámú polinom, vagy null-polinom.

[85]. Legyen f egy olyan - nem konstans - komplex függvény, amelyre

$$f(z+a) = f(z)$$

és

$$f(z+bj) = f(z) ,$$

ahol " a " és " b " pozitív valós konstansok.

Igazoljuk a Lionville-tétel segítségével, hogy f nem reguláris a

$$0 \leq x \leq a$$

$$0 \leq y \leq b$$

négyszögtartományon!

4.3 MAXIMUM-, MINIMUM-TÉTEL

[86]. Határozzuk meg, az

$$f(z) = z^2 - 2z + 3$$

függvény abszolút értékének maximumát a $|z| \leq 1$ körlemezen!

87. Határozzuk meg $|f|$ maximumát a $|z| \leq 1$ körlemezen, ha

$$a) f = z^2 - 3z + 2$$

$$b) f = z^4 - 2z^2 + 1$$

c) $f = \cos 3z$

d) $f = \frac{2z + 1}{2z - 1}$

88. Igaz-e a maximum-tétel többszörösen összefüggő tartományon? Igazoljuk állításunkat!

89. Mutassuk meg, hogy az

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

függvényre a $|z| \leq 1$ tartományon nem teljesül a maximum-tétel! Indokoljuk az állítást!

90. Igazoljuk, hogy a

$$f(z) = \frac{1}{\cos z}$$

függvény abszolút értéke a $|z| \leq \frac{\pi}{3}$ tartománybeli minimumát a tartomány határgörbéjén veszi fel!

91. Illusztráljuk a maximum- és minimum-tételt az

$$f(z) = (z + 1)^2$$

reguláris függvényvel, ha T a

$$z_1 = 0; z_2 = 2; z_3 = j$$

csúcspontú háromszög belseje! Határozzuk meg a $\bar{T}$ zárt tartomány azon pontjait, ahol f maximális ill. ahol minimális!

92. Mutassuk meg, hogy

a) az

$$f(z) = e^{-z^2 + 2z}$$

komplex függvény abszolútértékének létezik maximuma a $|z| \leq 2$ zárt körtartományon;

b) a

$$g(z) = -z^2 + 2z$$

komplex függvény valós részének létezik maximuma a $|z| < 2$ nyílt körtartományon.

Határozzuk meg a fenti maximumokat!

[93]. Adjunk meg olyan - zárt halmazon reguláris - komplex függvényt, amelynek abszolútértéke nem a halmaz határán veszi fel a minimumát!

[94]. Legyen $f = u + jv$ reguláris a korlátos T tartományon és folytonos a T tartomány határán.

Igazoljuk, hogy a

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$$

harmonikus függvény, maximumát és minimumát T határán és nem a belsejében veszi fel, kivéve, ha n állandó! (Harmonikus függvényre vonatkozó maximum-, minimum-tétel.)

[95]. Illusztráljuk a harmonikus függvényre vonatkozó maximum-, minimum-tételt az

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

harmonikus függvénnel, ha T a

$$0 < x < 1; \quad 0 < y < \pi$$

téglalap belseje és határozuk meg a téglalap határegyeneseivel lezárt tartomány azon pontjait, ahol $u(x,y)$ értéke a legnagyobb ill. a legkisebb.

96. Legyen

$$f = e^{u(x,y) + j v(x,y)}$$

a $\bar{T}$ zárt tartományon reguláris komplex függvény, ahol

$$u(x,y) \quad \text{és} \quad v(x,y)$$

harmonikus társfüggvények.

Igazoljuk, hogy $u(x,y)$ sem a maximumát, sem a minimumát nem veheti fel a T tartomány belső pontjában!

[97]. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f \neq c$ komplex függvény reguláris valamely egyszeresen összefüggő tartományon és annak peremén $|f|$ konstans, akkor f -nek a tartomány belsejében van zérushelye.

KOMPLEX FÜGGVÉNYSOROK

1.§ ÁLTALÁNOS FÜGGVÉNYSOROK

1.1 FÜGGVÉNYSOR KONVERGENCIATARTOMÁNYA, KÖZÖNSÉGES, ABSZOLÚT ÉS EGYENLETES KONVERGENCIÁJA

1. Állapítsuk meg, hogy hol konvergensek az alábbi függvénytörtek!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + |z|}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + |z|}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + |z|}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z}$$

2. Legyen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} (1 - z^2)$$

a) Határozzuk meg a sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

b) Mutassuk meg, hogy a konvergenciatartományon a sor abszolút konvergens!

c) Igazoljuk, hogy a sor összegfüggvénye nem folytonos a konvergenciatartomány $z = 1$ pontjában!

3. Határozzuk meg a z sík azon pontjait, ahol az alábbi függvénytörtek abszolút konvergensek!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z + n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nz)$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^n}$$

Adjuk meg azokat a z értékeket is, ahol a függvénysorok egyes tagjai nem értelmezettek!

4. Legyen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = z^2 + \frac{z^2}{1 + z^2} + \frac{z^2}{(1 + z^2)^2} + \dots$$

a) Határozzuk meg a sor n -edik részletösszegét!

b) Határozzuk meg a sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

c) Állapítsuk meg, hogy folytonos-e az összegfüggvény!

d) Mutassuk meg, hogy a $|z| \leq \delta$; $\delta \geq 0$ tartományon a sor nem egyenletesen konvergens!

5. Igazoljuk, hogy az

$$\frac{1}{1 + |z|} - \frac{1}{2 + |z|} + \frac{1}{3 + |z|} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n + |z|} \pm \dots$$

függvénysor

a) sehol nem abszolút konvergens;

b) minden z -re egyenletesen konvergens!

6. Igazoljuk, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek az adott tartományon!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}} \quad |z| < 1$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} \quad 1 < |z| < 2$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z+1}{z^2+n^2} \quad |z| \leq R; \quad 0 < R < +\infty$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{2n}+1} \quad |z| \leq R; \quad 0 < R < 1$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z^2-1)^n} \quad |z| \geq 2$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n!} \quad \{z | -\infty < \operatorname{Re} z < +1\}$$

7. Határozzuk meg azon pontok halmazát, ahol az alábbi függvénysorok abszolút konvergensek, illetve ahol egyenletesen konvergensek!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+|z|^2}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n$$

8. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Dirichlet-sor

- a) divergens, ha $\operatorname{Re} z \leq 1$,
- b) abszolút konvergens, ha $\operatorname{Re} z > 1$,
- c) egyenletesen konvergens az

$$1 + \frac{1}{R} \leq x < R; \quad -R \leq y < +R$$

téglalaptartományon, ha $1 < R < +\infty$,

- d) nem egyenletesen konvergens a $\operatorname{Re} z > 1$ tartományon.

[9]. Igazoljuk, hogy ha az $f_n(z)$; $n = 1, 2, \dots$ függvények folytonosak T -ben és ott $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ egyenletesen konvergál $S(z)$ -hez, akkor $S(z)$ folytonos T -ben!

[10]. Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sor egyenletesen konvergens egy T tartomány C határán!
 a) Igazoljuk, hogy a sor az egész $\bar{T}$ zárt tartományon egyenletesen konvergens!
 b) Illusztráljuk egy példával, hogy a fenti sor differenciálásával nyert $\sum f'_n(z)$ sor nem feltétlenül egyenletesen konvergens a C határgörbén!

[11]. Igazoljuk, hogy ha a T tartományon az $f_n(z)$; $n = 1, 2, 3, \dots$ függvények folytonosak, a $\sum f_n(z)$ függvényt sor egyenletesen konvergens és C tetszőleges rektifikálható görbe T -ben, akkor a függvényt sor $S(z)$ összegfüggvénye integrálható a C görbén és:

$$\int_C S(z) dz = \int_C \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right] dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_C f_n(z) dz \right].$$

[12]. Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ reguláris a $|z| < 1$ tartományon és $f(0) = 0$, akkor az

$$f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \dots + f(z^n) + \dots$$

függvényt sor konvergens a $|z| < 1$ tartományon és ott összegfüggvénye folytonos!

13. Igazoljuk, hogy ha a két függvényt sor mindegyike abszolút és egyenletesen konvergens egy T tartományon, akkor Cauchy-szorzatuk is abszolút és egyenletesen konvergens T -n.

2.§ HATVÁNYSOROK

2.1 HATVÁNYSOR KONVERGENCIA SUGARA, KÖZÖNSÉGES, ABSZOLÚT ÉS EGYENLETES KONVERGENCIÁJA

14. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergencia-tartományát!

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

$$\text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$$

$$\text{d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$$

$$\text{e)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}$$

$$\text{f)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^n}{(n+1) z^{2n-1}}$$

$$\text{g)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+4)^n}{n}$$

$$\text{h)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2j)^n}{n^2 \cdot 2^n}$$

$$\text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(z-0,5)}{n!}$$

$$\text{j)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 \cdot 4^n}$$

$$\text{k)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+j)^n}{(n+1)(n+2)}$$

15. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát!

$$a) 1 + z + z^4 + z^9 + \dots + z^{n^2} + \dots$$

$$b) 1 + \frac{z}{1^3} + \frac{z^2}{2^3} + \dots + \frac{z^n}{n^3} + \dots$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^n \cdot n}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} (2n)! z^{2n}$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+jn}$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n$$

$$h) \sum_{n=0}^{\infty} \cos jn \cdot z^n$$

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$$

16. Konvergencia-körük mely pontjaiban konvergensek az alábbi hatványsorok?

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n \ln n}$$

$$b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n}}{n - \sqrt{n}}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

[17]. Állapítsuk meg, hogy az alábbi hatványsorok konvergencia-tartományuk határkörén konvergensek, vagy abszolút konvergensek!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{p \cdot n}}{n} \quad (p > 0, \text{ egész})$$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$$

[18]. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ hatványsor konvergencia-sugara R_1 és R_2 . Mit állíthatunk az alábbi hatványsorok konvergencia-sugaráról?

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n z^n$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n \quad (b_n \neq 0)$$

19. Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergencia-sugara $R > 0$. Mit állíthatunk az alábbi hatványsorok konvergencia-sugaráról?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^p \cdot z^n \quad p \in \mathbb{N}^+ \text{ rögzített}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p} z^n$$

$p \in \mathbb{N}^+$ rögzített

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n! z^n$$

[20]. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hatványsor konvergencia-sugara

R ; $0 < R < \infty$.

Határozzuk meg R ismeretében az alábbi hatványsorok konvergencia-sugarát!

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n$$

$(k \in \mathbb{N})$ rögzített

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n^n} z^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n$$

$(k \in \mathbb{N}^+)$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + z_0)^n c_n z^n$$

[21]. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét, ha $|z| < 1$!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

[22]. Határozzuk meg a z sík azon pontjait, ahol az alábbi hatványsorok abszolút konvergensek!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n \quad (p \in \mathbb{N}^+ \text{ rögzített állandó})$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-nz}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n (z-j)^n}{4^n (n^2+1)^{5/2}}$$

[23]. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok egyenletes-konvergenciatarományát!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-j)^{2n}}{n^2}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) z^n}$$

24. Határozzuk meg, hogy az alábbi hatványsorok hol abszolút konvergensek, és hol egyenletesen konvergensek?

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(3-z)^n}{3^{n+1}}$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$$

"a" rögzített állandó

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$$

[25]. Konstruáljunk olyan $R = 1$ konvergenciasugarú hatványsort, mely az origó középpontú egység-sugarú kör

a) egy előírt pontjában

b) k darab előírt pontjában

divergens, minden más pontjában konvergens!

[26]. Igazoljuk, hogy ha egy (a_n) pozitív valós számsorozat monoton csökkenve a 0-hoz tart és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugara: $R = 1$, akkor a sor - legfeljebb a $z = 1$ pont kivételével - a $|z| = 1$ körön mindenütt konvergens!

[27]. a) Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hatványsor $S(z)$ összefüggvénye kielégíti a

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{\partial S}{\partial z} \right) = \frac{1}{1-z}$$

differentiálegyenletet, ha $|z| < 1$.

b) Mutassuk meg, hogy a $0 < |z| < 1$ tartományon $S(z)$ primitív függvénye a

$$-\frac{\ln(1-z)}{z} = \frac{1}{z} \ln \frac{1}{1-z}$$

reguláris függvénynek!

2.2 TAYLOR-SOR

28. írjuk fel az alábbi függvények $z_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát (Maclaurin-sorát) és határozzuk meg azok konvergenciasugarát!

$$a) f(z) = \sin^2 z$$

$$b) f(z) = \operatorname{ch}^2 z$$

$$c) f(z) = (a + z)^\alpha$$

$$(a^\alpha = e^{\alpha \ln a})$$

$$\textcircled{d)} f(z) = \sqrt{z + j} \quad (\sqrt{j} = \frac{1 + j}{\sqrt{2}})$$

$$\text{e)} f(z) = \frac{1}{az + b} \quad (b \neq 0)$$

$$\textcircled{f)} f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 13}$$

$$\textcircled{g)} f(z) = \frac{z^2}{(z + 1)^2}$$

$$\textcircled{h)} f(z) = \ln(z^2 - 3z + 2)$$

$$\textcircled{i)} f(z) = \int_0^z e^{-z^2} dz$$

$$\text{j)} f(z) = \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz$$

29. írjuk fel az alábbi függvények $z_0 = 1$ bázispontú Taylor-sorát és határozzuk meg azok konvergencia-sugarát!

$$\text{a)} f(z) = \frac{z}{z + 2}$$

$$\text{b)} f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$$

$$\text{c)} f(z) = \frac{z^2}{(z + 1)^2}$$

$$\text{d)} f(z) = \sqrt[3]{z} \quad (\sqrt[3]{1} = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{e)} f(z) = \sin(2z - z^2)$$

30. írjuk fel az alábbi függvények adott bázispontú Taylor-sorát és határozzuk meg azok konvergenciatartományát!

$$\text{a)} f(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2 \quad z_0 = 2$$

$$\text{b)} f(z) = \frac{1}{1 + z} \quad z_0 = 1$$

$$\text{c)} f(z) = \frac{1}{(1+z)(z-3j)} \quad z_0 = j$$

$$d) f(z) = \frac{z-1}{z^2}$$

$$z_0 = 1$$

$$e) f(z) = \cos z$$

$$z_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$f) f(z) = \sin z$$

$$z_0 = j + \frac{\pi}{2}$$

$$g) f(z) = z^3 \operatorname{ch}(z+3)$$

$$z_0 = 0$$

$$h) f(z) = e^{-z}$$

$$z_0 = j$$

$$i) f(z) = z e^{2z}$$

$$z_0 = -1$$

$$j) f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$$

$$z_0 = j$$

31. Az $f(z) = \frac{1}{1-z}$ függvény Maclaurin-sorának differenciálásával igazoljuk, hogy

$$a) \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$b) \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

32. Igazoljuk, hogy

$$a) \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) (z+1)^n, \quad \text{ha } |z+1| < 1$$

$$b) \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad \text{ha } |z-2| < 2$$

$$c) e^z = e + e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}, \quad \text{ha } |z| < \infty$$

$$d) e^z = e^{-2} + e^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n!}, \quad \text{ha } |z| < \infty$$

33. Az $f(z) = \operatorname{sh} z$ függvény $z_0 = j\pi$ bázispontú Taylor-sorának felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\lim_{z \rightarrow j\pi} \frac{\operatorname{sh} z}{z - j\pi} = -1$$

34. A számláló és a nevező "megfelelő" bázispontú Taylor-sorának felhasználásával igazoljuk, az alábbi határértékek fennállását!

a) $\lim_{z \rightarrow 0} z \operatorname{ctg} z = 1$

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = 0$

c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$

d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sin z}$ nem létezik.

e) $\lim_{z \rightarrow j} \frac{(z - j)e^z}{1 + z^2} = \frac{e^j}{2j}$

35. Sorfejtés nélkül határozzuk meg az alábbi függvények adott bázispontú Taylor-sorának konvergenciatartományát!

a) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 + 4} \quad z_0 = 0$

b) $f(z) = \frac{z}{e^z + 1} \quad z_0 = 0$

c) $f(z) = \frac{z + 3}{(z-1)(z-4)} \quad z_0 = 2$

d) $f(z) = e^{-z^2} \operatorname{sh}(z+2) \quad z_0 = 0$

e) $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)} \quad z_0 = 4j$

36. Határozzuk meg - sorfejtés nélkül - az alábbi függvények (ill. reláció-főágak) adott bázispontú Taylor-sorának konvergencia-sugarát!

a) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad z_0 = 1$

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------|
| b) $f(z) = \sqrt{z}$ | $z_0 = 1+j$ |
| c) $f(z) = \sqrt{z}$ | $z_0 = -1 -j$ |
| d) $f(z) = e^z \operatorname{ctg} z$ | $z_0 = \frac{\pi}{2}$ |
| e) $f(z) = e^z \operatorname{ctg} z$ | $z_0 = j$ |
| f) $f(z) = \ln(z + j)$ | $z_0 = -1$ |

Minden esetben indokoljuk, hogy a konvergencia-sugár miért nem lehet nagyobb a kapottnál!

37. Fejtsük Taylor-sorba az alábbi függvényeket (reláció-ágakat) az adott z_0 pont körül és határozzuk meg konvergencia-tartományukat!

a) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^3}}$	$z_0 = 0$
------------------------------------	-----------

azon az ágon, ahol $f(0) = 1$;

b) $f(z) = \arcsin z$	$z_0 = 0$
-----------------------	-----------

azon az ágon, ahol $f(0) = 0$;

c) $f(z) = \ln(3 - jz)$	$z_0 = 2j$
-------------------------	------------

azon az ágon, ahol $f(0) = \ln 3$.

d) $f(z) = (1+z)^{1/z}$	$z_0 = 0$
-------------------------	-----------

azon az ágon, ahol $f(0) = e$.

38. Írjuk fel az alábbi függvények $z_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorának néhány első tagját!

a) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$

b) $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$

c) $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{1+z}$

d) $f(z) = [\ln(1+z)]^2$

39. Fejtsük z hatványai szerint haladó sorba - sorok szorzása segítségével - az alábbi függvényeket!

$$a) f(z) = [\ln(1 - z)]^2$$

$$b) f(z) = [\operatorname{arctg} z]^2 \quad (\operatorname{arctg} 0 = 0)$$

$$c) f(z) = [\arcsin z]^2 \quad (\arcsin 0 = 0)$$

40. Fejtsük z hatványai szerint haladó sorba - a reciprok sor felhasználásával - az alábbi függvényeket!

$$a) f(z) = \frac{z}{\operatorname{arctg} z} \quad 0 \text{ arc } z$$

$$b) f(z) = \frac{z}{\ln(1+z)}$$

$$c) f(z) = \frac{1}{\operatorname{ch} z}$$

41. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{ha } z \neq 0 \\ 1 & \text{" } z = 0 \end{cases}$$

függvény mindenütt reguláris!

42. Igazoljuk, hogy ha f reguláris a $z = a$ pont egy K környezetében és $z = a$ az f függvény n -szeres zérushelye, akkor a

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^n}, & \text{ha } z \neq a \\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, & \text{" } z = a \end{cases}$$

függvény reguláris a $z = a$ pont egy $K' \subset K$ környezetében!

2.3 LAURENT-SOR

43. Állítsuk elő Laurent-sorral az

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

függvényt a $z_0 = 0$ reguláris pont körüli összes lehetséges gyűrűtartományban!

[44]. Állítsuk elő Laurent-sorral az

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

függvényt a $z_0 = -1$ izolált szinguláris pont körüli összes lehetséges gyűrűtartományban!

45. Állítsuk elő Laurent-sorral az

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

függvényt az alábbi gyűrűtartományokban!

- a) $|z| < 1$
- b) $1 < |z| < 2$
- c) $|z| > 2$
- d) $|z-1| > 1$
- e) $0 < |z-2| < 1$

46. Állítsuk elő az

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

függvényt.

- a) Maclaurin-sorral és adjuk meg ennek konvergenciatartományát;
- b) Laurent-sorral a $|z| > 1$ tartományon!

47. Állítsuk elő az

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2}$$

függvényt:

- a) $(z-1)$ hatványai szerint haladó Taylor-sorral és adjuk meg annak konvergenciatartományát;
- b) Laurent-sorral a $|z-1| > 1$ tartományon!

[48]. Állítsuk elő az

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

függvényt $z_0 = j$ bázispontú hatványsorral az

a) $|z + j| < 2$ tartományon,

b) $|z + j| > 2$ tartományon,

[49]. Fejtsük Laurent-sorba az adott szinguláris pontok körüli valamely gyűrűtartományon az alábbi függvényeket, és határozzuk meg minden egyes sor konvergenciatartományát!

a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ $z_0 = 1$

b) $f(z) = (z-3) \sin \frac{1}{z+2}$ $z_0 = -2$

c) $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$ $z_0 = 0$

d) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ $z_0 = -2$

e) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2}$ $z_0 = 3$

50. Határozzuk meg az alábbi függvények Laurent-sorát az adott konvergenciatartomány és bázispont esetén!

a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$; ha $|z| < 1$ és $z_0 = 0$

b) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$; ha $1 < |z| < 3$ és $z_0 = 0$

c) $f(z) = \frac{1}{z-a}$ ha $|z| < |a|$ és $z_0 = 0$
($a \neq 0$ rögzített)

d) $f(z) = \frac{1}{z-a}$ ha $|z| > |a|$ és $z_0 = 0$

e) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ ha $|z-1| > 0$ és $z_0 = 1$

f) $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ ha $|z-2| > 0$ és $z_0 = 2$

g) $f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$ ha $0 < |z| < \infty$ és $z_0 = 0$

$$h) f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z} \quad \text{ha } 0 < |z| < \infty \text{ és } z_0 = 0$$

51. Írjuk fel (ismert sorok szorzásával) az alábbi függvények $z_0 = 0$ pont körüli Laurent-sorát és határozzuk meg azok konvergenciatartományát!

$$a) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$$

$$b) f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$$

$$c) f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$$

$$d) f(z) = z^2 e^{-z^4}$$

52. Határozzuk meg - polinommal, ill. végtelen sorral való osztás felhasználásával - az alábbi függvények adott hely környezetében érvényes Laurent-sorának néhány első tagját és határozzuk meg a sor konvergenciatartományát!

$$a) f(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - 1} \quad z_0 = 1$$

$$b) f(z) = \frac{1}{\operatorname{sh} z} \quad z_0 = 0$$

$$c) f(z) = \frac{1}{\ln(1+z)} \quad z_0 = 0$$

$$d) f(z) = \frac{e^z}{z^2} \quad z_0 = 0$$

$$e) f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 1)} \quad z_0 = 0$$

$$f) f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \quad z_0 = 0$$

[53]. a) Határozzuk meg az

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z}$$

függvény $0 < |z| < \pi$ tartománybeli Laurent-sorának néhány első tagját!

b) A sorfejtés felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\oint_G \frac{dz}{z^2 \operatorname{sh} z} = -\frac{1}{3} \pi j,$$

ha G a $|z| = 1$ kör!

54. Fejtsük Laurent-sorba a $z_0 = \infty$ pont környezetében az alábbi függvényeket, és állapítsuk meg konvergenciatartományukat!

a) $f(z) = \frac{1}{z-2}$

b) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^2}$

c) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$

d) $f(z) = \cos \frac{1}{z}$

55. Állapítsuk meg, hogy az alábbi relációknak van-e olyan egyértékű ága, amely a $z = \infty$ -ben Laurent-sorba (ill. Taylor-sorba) fejthető.

a) $f(z) = \sqrt{z(z-1)}$

b) $f(z) = \sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$

c) $f(z) = \sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$

d) $f(z) = \ln [(z-1)(z-2)]$

56. Állítsuk elő az alábbi relációk valamely ágának a $z_0 = \infty$ pont környezetére érvényes Laurent-sorát!

$$a) f(z) = \sqrt{(z-1)(z-2)}$$

$$b) f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$$

57. Legyen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{és} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

két - ugyanabban a körgyűrűben konvergens - Laurent-sor.

Határozzuk meg e sorok szorzatával előállított függvény Laurent-sorát!

58. Legyen $P(z)$ egy M -edfokú és $Q(z)$ egy N -edfokú polinom ($N \geq 1$).

Igazoljuk, hogy a

a) a $\frac{P(z)}{Q(z)}$ racionális törtfüggvény $z_0 = 0$ körüli Laurent-sorának a

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

sornak csak véges sok pozitív kitevőjű tagja van ($a_n = 0$, ha $n \geq M-N+1$);

b) konvergenciatartománya:

$$T = \{ z \mid R \leq |z| < \infty \}$$

59. Mutassuk meg, hogy egy reguláris f függvény n -edik deriváltjai n regularitási tartomány egyetlen belső pontjában sem elégíthetik ki minden n -re az

$$|f^{(n)}(z)| > n! n^n$$

egyenlőtlenségeket! (Sőt végtelen sok n -re sem teljesülhet a fenti egyenlőtlenség).

REZIDUUM ELMÉLET ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

1.§ ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK IZOLÁLT SZINGULÁRIS PONTBELI REZIDUUMA

1.1 IZOLÁLT SZINGULÁRIS HELYEK A VÉGESBEN ÉS A VÉGTELENBEN

[1]. Határozzuk meg a határértékes definíció alapján és sorfejtéssel is az alábbi függvények adott pontbeli szingularitásának jellegét!

$$\text{a) } f(z) = \frac{z - \operatorname{sh} z}{z^3}, \quad z_0 = 0$$

$$\text{b) } f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \quad z_0 = 1$$

$$\text{c) } f(z) = (z-3) \sin \frac{1}{z+2}, \quad z_0 = -2$$

$$\text{d) } f(z) = z \operatorname{sh} \sqrt{z}, \quad z_0 = 0$$

$$\text{e) } f(z) = \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0$$

[2]. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényeknek megszüntethető szingularitásuk van az adott pontokban. Állapítsuk meg, hogy a függvények értelmezésének milyen kiegészítésével lehet azok szingularitását megszüntetni.

$$\text{a) } f(z) = \frac{z^2 - 4}{3z^2 + 6z}, \quad z_0 = -2$$

$$\text{b) } f(z) = \frac{(z-1)(z^2 + z + 1)}{(z^2 - 1)(z + 3)}, \quad z_0 = 1$$

$$\text{c) } f(z) = \frac{\operatorname{sh} 3z}{4z}, \quad z_0 = 0$$

$$d) f(z) = \frac{e^z}{1 - \cos 4z}$$

$$z_0 = 0$$

3. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényeknek pólusuk van a $z = 0$ pontban! Határozzuk meg e pólusok rendjét!

$$a) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2(z^4 + 1)}$$

$$b) f(z) = z^{-n+1} \sin \pi z \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

$$c) f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z(e^z - 1)} \quad [\ln(1+z) \text{ az } \ln(1+z) \text{ főága}]$$

$$d) f(z) = \frac{e^z}{(e^z - 1)^2}$$

4. Fejtsük Laurent-sorba az

$$f(z) = \sin \frac{z}{1-z}$$

függvényt a $z = 1$ pont körül és állapítsuk meg, hogy milyen szingularitása van ebben a pontban!

5. Határozzuk meg Laurent-sorfejtés segítségével az alábbi függvények $z = 0$ pontbeli szingularitásának jellegét!

$$a) f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

$$b) f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$$

$$c) f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$$

$$d) f(z) = z^2 e^{-z^4}$$

$$e) f(z) = z e^{\frac{1}{z^2}}$$

$$f) f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}$$

$$g) f(z) = \frac{1}{z(4-z)}$$

$$h) f(z) = \frac{1}{1 + e^{1/z^2}}$$

6.) Határozzuk meg az alábbi függvények végesben levő izolált szinguláris helyeit és azok jellegét!

$$a) f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^4 - 1}$$

$$b) f(z) = \frac{z^2 + 2 - jz}{z(z - 2j)^3}$$

$$c) f(z) = \frac{e^z}{z^2(z - 1)}$$

$$d) f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$$

$$e) f(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}$$

$$f) f(z) = \frac{1}{e^{z-3+j}}$$

$$g) f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(1-e^z)}$$

$$h) f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{z^2}$$

$$i) f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$$

$$j) f(z) = \frac{1}{e^{z^2} + 1}$$

7. Határozzuk meg az alábbi függvények szingularitásának jellegét a végtelenben!

$$(a) f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

$$(b) f(z) = \cos z - \sin z$$

$$(c) f(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sin z + \cos z}$$

$$(d) f(z) = \sqrt{(z-1)(z-2)} \quad (f(3) = +\sqrt{2})$$

$$e) f(z) = \frac{z^2 + 4}{e^z}$$

$$f) f(z) = \frac{z^5 - 1}{z^2 + z + 1}$$

$$g) f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$$

$$h) f(z) = \frac{1}{\cos z}$$

$$i) f(z) = \cos z$$

$$j) f(z) = z^4 \operatorname{ch} \frac{1}{z}$$

$$k) f(z) = z \sin \frac{1}{z}$$

$$l) f(z) = \frac{1}{\sin 2z}$$

$$m) f(z) = e^z$$

$$(n) f(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}$$

8. Határozzuk meg az alábbi függvények végesben levő izolált szinguláris pontjait és azok jellegét; vizsgáljuk viselkedésüket a $z = \infty$ -ben!

$$a) f(z) = \frac{1}{z - z^3}$$

$$b) f(z) = \frac{z^4}{1 + z^4}$$

$$c) f(z) = \frac{z^5}{(1 - z)^2}$$

$$d) f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)^2}$$

$$e) f(z) = \frac{e^z}{1 + z^2}$$

$$f) f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

$$g) f(z) = \frac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$$

$$h) f(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^{3z}}$$

$$i) f(z) = \frac{z}{\frac{1}{e^z} - 1}$$

$$j) f(z) = \cos \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)$$

$$k) f(z) = \sin \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z^2}$$

$$l) f(z) = e^{-z} \cos \frac{1}{z}$$

$$m) f(z) = \frac{z^8 + 1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$$

$$n) f(z) = \frac{\frac{1}{z-2}}{e^z - 1}$$

$$o) f(z) = z^4 e^{-z}$$

$$p) f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$$

9. Mutassuk meg, hogy létezik olyan pont, amely a

$$w = \frac{1}{\sqrt{z} + 1}$$

relációnak az egyik ágon szinguláris; a másikon reguláris pontja!

⑩. Vizsgáljuk az adott pontok környezetében az alábbi relációk egyértékű ágainak viselkedését. (Döntsük el, hogy az adott pont az egyes egyértékű ágak reguláris-, vagy szinguláris pontja; ha szinguláris pontja, úgy határozzuk meg annak jellegét!)

$$a) f(z) = \frac{z}{1 + \sqrt{z-3}} \quad z_0 = 4$$

$$b) f(z) = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}} \quad z_0 = 1$$

$$c) f(z) = \frac{2z + 3}{1 + z - 2\sqrt{z}} \quad z_0 = 1$$

$$d) f(z) = \cos \frac{1}{1 + \sqrt{z}} \quad z_0 = 1$$

$$e) f(z) = \frac{1}{(2 + \sqrt{z}) \sin(2 - \sqrt{z})} \quad z_0 = 4$$

$$f) f(z) = \sin \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{z}{z-2}}} \quad z_0 = \infty$$

11. Legyen $f(z)$ a z_0 megszüntethető szinguláris pont kivételével reguláris függvény és $g(z)$ a z_0 pontban zérustól különböző értékű, reguláris függvény. Igazoljuk, hogy az

a) $h(z) = g(z) + f(z)$

b) $h(z) = g(z) \cdot f(z)$

függvénynek ugyanolyan jellegű szingularitása van z_0 -ban, mint f -nek.

12. Legyen z_0 a mindenütt reguláris f_1 függvény α rendű zérushelye, és a z_0 pont kivételével reguláris f_2 függvény β rendű pólushelye ($\alpha > 0$; $\beta > 0$). Milyen "jellegű" helye z_0 az

a) $f_1 + f_2$

b) $f_1 \cdot f_2$

c) $\frac{f_1}{f_2}$

d) $\frac{f_2}{f_1}$

függvényeknek?

13. Határozzuk meg az $F(z) = f(\varphi(z))$ összetett függvény szingularitásának jellegét a $z = z_0$ ($\neq \infty$) pontban, ha

$\varphi(z)$ a z_0 pontban reguláris, vagy pólusa van és $f(\zeta)$ -nak a $\zeta_0 = \varphi(z_0)$ pontban

a) megszüntethető szingularitása

b) n -edrendű pólusa,

c) lényeges szinguláris helye van.

14. Igazoljuk, az alábbi állításokat!

a) Ha $h(z)$ reguláris a z_0 pontban és $h(z_0) \neq 0$, akkor az

$$f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$$

függvénynek a z_0 pont elsőrendű pólushelye;

b) Ha $h(z)$ reguláris a z_0 pontban és $h(z_0) = 0$ akkor az

$$f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$$

függvénynek a z_0 pont megszüntethető szinguláris helye.

15. Konstruáljunk egy-egy olyan komplex függvényt, amelynek a komplex síkon (a $z = \infty$ -t is beleértve) csak az alább megadott szinguláris helyei vannak!

- a) egy másodrendű pólusa a végtelenben
- b) egy másodrendű pólusa a $z = 0$ pontban és egy elsőrendű pólusa a $z = \infty$ -ben
- c) elsőrendű pólusai a $z_k = \alpha^k$ pontokban, ahol

$$\alpha = e^{\frac{2\pi j}{n}}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

16. Igazoljuk, hogy ha egy függvénynek hat 4-edrendű zérushelye, négy pólusa (3-ad, 4-ed, 7-ed, és 8-adrendű) van, és a végesben nincs más szinguláris helye, akkor a $z = \infty$ -ben másodrendű pólusa van.

Fogalmazzuk meg általánosabban az állítást!

17. Igazoljuk, hogy ha $f(z)$ -nek a $z = 1-j$ és a $z = 1+j$ pont elsőrendű zérushelye; a $z = -1 + j$ és a $z = -1-j$ pont másodrendű pólusa; és a végesben nincs több szinguláris pontja, sem zérushelye, akkor a függvény

$$f(z) = k \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 2z + 2)^2}$$

alakú, ahol k tetszőleges állandó.

[18]. A Cauchy-integrálformula következménye:

Ha C egy rektifikálható (nyílt vagy zárt) görbe és $\varphi(z)$ a görbe pontjaiban értelmezett folytonos függvény, akkor egy elég nagy sugarú, origó középpontú K kör külsejében az

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

függvény reguláris.

Milyen az f függvény viselkedése, ha $z \rightarrow \infty$?

19. Legyen f olyan komplex függvény, amelynek csak pólus szingularitásai vannak a T tartományban.

Igazoljuk, hogy az

$$\frac{f'(z)}{f(z)-A}$$

függvénynek (az $[f(z) - A]$ függvény logaritmikus differenciálhányadosának) nincs más szingularitása, mint elsőrendű pólusa f pólushelyein és az A pontban.

20. Illusztráljuk a Casorati-Weierstrass-tételt az

$$\boxed{a)} f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$$

$$b) f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

függvényekkel.

21. a) Mutassuk meg, hogy az

$$f(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

függvény korlátos a $|z| < 1$ nyílt körlapon, és hogy a $z = 1$ pontban lényeges szingularitása van!

b) Igazoljuk, hogy a

$$g(z) = (z-1) e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

függvény folytonos a $|z| \leq 1$ zárt körlapon, reguláris a $|z| < 1$ nyílt körlapon, és a $z = 1$ pontban lényeges szingularitása van!

22. Tegyük fel, hogy az $f : T \rightarrow T^*$ függvénynek a $H \subset T$ halmaz minden pontjában izolált szingularitása van és α egy T -ben fekvő torlódási pontja H -nak.

a) Mutassuk meg, hogy ha H minden pontja megszüntethető szingularitás, akkor f differenciálható az α pontban!

b) Igazoljuk, hogy ha H minden pontja lényeges szingularitás, akkor f nem lehet differenciálható α -ban!

23. Tegyük fel, hogy az f racionális függvény valamennyi gyökének multiplicitása és valamennyi pólusának rendje páros szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan g racionális függvény, amelyre $f = g^2$.

24. Tegyük fel, hogy az f racionális függvény valamennyi gyöke egyszeres és valamennyi pólusa elsőrendű. Legyenek az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pontok a gyökök, az $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ pontok a pólusok és legyen $\alpha_j \neq 1$ ($j=1, 2, \dots, n$)
Igazoljuk, hogy $|f|$ állandó a $|z| = 1$ körvonalon!

1.2 REZIDUUM A VÉGESBEN ÉS A VÉGTELENBEN

25. Határozzuk meg - Laurent-sorfejtéssel - az alábbi függvények adott pontbeli reziduumát!

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} \quad z_0 = 0$$

$$\text{b) } f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^4} \quad z_0 = 0$$

$$\text{c) } f(z) = e^{1/z} \quad z_0 = 0$$

$$\text{d) } f(z) = \frac{z^2 + z + 3}{z^2 - 1} \quad z_0 = 1$$

$$\text{e) } f(z) = \frac{1}{\ln(1+z)} \quad z_0 = 0$$

$$\text{f) } f(z) = \frac{1}{\operatorname{sh} z} \quad z_0 = 0$$

26. Határozzuk meg - Laurent-sorfejtéssel - az alábbi függvények $z = \infty$ -beli reziduumát!

$$\text{a) } f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

$$\text{b) } f(z) = z^2 \ln \frac{z-a}{z-b} \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

$$c) f(z) = \cos z - \sin z$$

$$d) f(z) = \frac{z^2 + 4}{e^z}$$

$$e) f(z) = z^4 \operatorname{sh} \frac{1}{z}$$

$$f) f(z) = \sqrt{(z-1)(z-2)}$$

$$f(3) = +\sqrt{2}$$

$$g) f(z) = z \sqrt{\left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(1 + \frac{j}{z}\right)}$$

$$(-\pi < \arg z < \pi)$$

[27]. Határozzuk meg - a pólusbeli reziduumok meghatározására vonatkozó határértékes formulák felhasználásával - az alábbi függvények megjelölt pólusra vonatkozó reziduumát!

$$a) f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1}$$

$$z_0 = j$$

$$b) f(z) = \frac{e^{j\frac{z}{2}}}{\sin z}$$

$$z_0 = \pi$$

$$c) f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1}$$

$$z_0 = 2\pi j$$

$$d) f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$$

$$z_0 = 1$$

$$e) f(z) = \frac{z^4}{(z-1)^3}$$

$$z_0 = 1$$

[28]. Határozzuk meg - több módszerrel - az

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^3}$$

függvény $z = 2$ pontbeli reziduumát!

29. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények minden végesbeli izolált szinguláris helye pólus! Határozzuk meg a pólusok rendszámát és a hozzájuk tartozó reziduumokat!

$$a) f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$$

$$b) f(z) = \operatorname{th} z$$

$$c) f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$$

$$d) f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$$

$$e) f(z) = \frac{z}{\cos z}$$

$$f) f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$$

$$g) f(z) = \operatorname{ctg} z^2$$

30. Határozzuk meg az alábbi függvények adott pontbeli reziduumát (mindegyiket a legalkalmasabb módszerrel)!

$$a) f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)} \quad z = 1$$

$$b) f(z) = \frac{1}{z^2(z+j)} \quad z = 0$$

$$c) f(z) = \frac{1-e^z}{z(z-j)^2} \quad z = j$$

$$d) f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{tg} z} \quad z = 0$$

$$e) f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{tg} z} \quad z = \frac{\pi}{2}$$

$$f) f(z) = \frac{1}{\ln^2 z} \quad z = 1$$

$$g) f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \quad z = 0$$

31. Határozzuk meg az alábbi függvények reziduumát a végesben levő összes izolált szinguláris pontjában és a $z = \infty$ -ben (feltéve, hogy a ∞ nem torlódási pontja a szinguláris helyeknek)!

$$a) f(z) = \frac{z^{2n}}{1+z^n}$$

$$b) f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$$

$$c) f(z) = \cos z - \sin z$$

$$d) f(z) = \frac{e^z}{1+z}$$

$$e) f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$$

$$f) f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + j)^2}$$

$$g) f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$$

$$h) f(z) = \frac{z^2 + z - i}{z^2(z-1)}$$

$$i) f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$$

$$j) f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

$$k) f(z) = \cos \frac{1}{z-2}$$

$$l) f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$$

$$m) f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$$

$$n) f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$$

$$o) f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

$$p) f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}}$$

$$r) f(z) = \operatorname{ctg} z^2$$

32. Határozzuk meg az alábbi relációk egyértékű ágain a jelzett pontbeli reziduumot!

$$a) f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1-z} \quad z = 1$$

$$b) f(z) = \frac{1}{\sqrt{2-z} + 1} \quad z = 1$$

$$c) f(z) = \frac{z^\alpha}{1-\sqrt{z}} \quad z = 1$$

$$d) f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} \quad z = \infty$$

$$e) f(z) = \operatorname{Ln} \frac{z-a}{z-b} \quad z = \infty$$

$$f) f(z) = z^2 \ln \frac{z-a}{z-b} \quad z = \infty$$

$$g) f(z) = \frac{\operatorname{Arctg} z}{z} \quad z = 0$$

$$h) f(z) = \frac{\operatorname{Arctg} z}{z}$$

$$z = \infty$$

33. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \frac{2z^5 - 4z^2 + 5}{3z^6 - 8z + 10}$$

függvény összes pólusbeli reziduumának összege: $\frac{2}{3}$.

34. Határozzuk meg

$$\operatorname{res}_{z=\infty} [f(z)]^2$$

értékét, ha $f(z)$ -nek a ∞ körüli sorfejtése:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

alakú!

35. Határozzuk meg

$$\operatorname{res}_{z=a} [\varphi(z) \cdot f(z)]$$

értékét, ha $\varphi(z)$ reguláris a $z = a$ pontban és ebben a pontban $f(z)$ -nek

a) elsőrendű pólusa van A reziduummal

b) k -adrendű pólusa van, ahol Laurent-sorának főrésze:

$$\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

36. Határozzuk meg

$$\operatorname{res}_{z=a} f(\varphi(z))$$

értékét, ha $\varphi(z)$ reguláris a $z = a$ pontban, $\varphi'(a) \neq 0$ és $f(\zeta)$ -nek a $\zeta = \varphi(a)$ pontban elsőrendű pólusa van A reziduummal!

37. Tegyük fel, hogy az f függvénynek α lényeges szingularitása és hogy az α körüli R sugarú körlapon $f(z) \neq 0$.

Mutassuk meg, hogy α -ban az $\frac{1}{f}$ függvénynek is lényeges szingularitása van és ha

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - \alpha)^{-n}$$

akkor

$$\operatorname{res} \frac{1}{f} = a_2^2 - \frac{a_{-3}}{a_{-1}}$$

2.§ REZIDUUM-TÉTEL ÉS ALKALMAZÁSA INTEGRÁLOK ÉRTÉKÉNEK MEGHATÁROZÁSÁRA

2.1 KOMPLEX INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA REZIDUUM-TÉTELLEL

38. A G belsejébe eső izolált szinguláris pontokbeli reziduumok ismeretében határozzuk meg az alábbi - pozitív irányban bejárt - G zárt görbementi integrálok értékét!

a) $\oint_G \frac{e^z - 1}{z^3} dz$

$G : |z| = 2$

b) $\oint_G e^{\frac{1}{z}} dz$

$G : |z-1| = 2$

c) $\oint_G \frac{1}{\ln(1+z)} dz$

$G : |z| = \frac{1}{2}$

d) $\oint_G \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1} dz$

$G : |z-j| = 1$

e) $\oint_G \frac{e^{j \frac{z}{2}}}{\sin z} dz$

$G : |z - \pi| = 2$

f) $\oint_G \frac{z^2}{e^z - 1} dz$

$G : |z - 2\pi j| = 1$

39. A reziduum-tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi - pozitív irányban bejárt - zárt görbementi integrálok értékét!

$$a) \oint_G \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz$$

$$G : |z| = 2$$

$$b) \oint_G \frac{1}{z(1-e^z)} dz$$

$$G : |z| = 10$$

$$c) \oint_G \frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz$$

$$G : |z-2| = 2$$

$$d) \oint_G \frac{1}{\sin z} dz$$

$$G : |z| = 8$$

$$e) \oint_G \frac{\sin z}{z^3 - 3jz^2} dz$$

$$G : |z| = 4$$

$$f) \oint_G \frac{dz}{1 - e^{-z^2}}$$

$$G : |z| = 1$$

$$g) \oint_G \frac{z^8}{1+z^4} dz$$

$$G : \left| z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = 1$$

40. A reziduum-tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi zárt görbementi integrálok értékét, ha G a pozitív irányítású $|z| = 2$ kör.

$$a) \oint_G \operatorname{tg} z dz$$

$$b) \oint_G \frac{1}{\operatorname{sh} 2z} dz$$

$$c) \oint_G \frac{\operatorname{ch} z}{z(z^2 + 1)} dz$$

$$d) \oint_G \frac{\operatorname{ctg} z}{z(z+j)} dz$$

$$e) \oint_G \frac{\sin^2 z}{z} dz$$

41. A reziduum-tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi zárt görbe menti integrálok értékét, ha G a pozitív irányítású $|z|=1$ kör.

$$a) \oint_G \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$$

$$b) \oint_G \frac{1}{z^2 e^z} dz$$

$$c) \oint_G \frac{1}{z \sin z} dz$$

$$d) \oint_G \frac{1}{z^2 \sin z} dz$$

$$e) \oint_G z e^{\frac{1}{z}} dz$$

$$f) \oint_G z e^{z^{\frac{1}{2}}} dz$$

$$g) \oint_G \frac{e^{\sin z}}{\cos 2z} dz$$

42. A reziduum-tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi - pozitív irányban bejárt - zárt görbementi integrálok értékét!

$$a) \oint_G \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz$$

$$G : |z| = 1$$

$$b) \oint_G \frac{dz}{z^4 + 1}$$

$$G : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z \end{cases}$$

$$c) \oint_G \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$$

$$G : |z-2| = \frac{1}{2}$$

$$d) \oint_G \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz$$

$$G : |z| = 2$$

$$e) \oint_G \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$$

$$G : |z| = 3$$

$$f) \oint_G \frac{z^8}{1+z^4} dz$$

$$G : \left| z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = 1$$

43. A reziduum-tétel alkalmazásával határozzuk meg az alábbi integrálok értékét, ha G a pozitív irányítású $|z| = R$, $R > 1$ kör!

$$a) \oint_G \frac{z}{z^n - 1} dz ;$$

$$n \in \mathbb{N}^+$$

$$b) \oint_G \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz ;$$

$$n \in \mathbb{N}^+$$

$$c) \oint_G \frac{z^{2n}}{(1+z)^n} dz ;$$

$$n \in \mathbb{N}^+$$

$$d) \frac{1}{2\pi j} \oint_G z^n \cdot e^{\frac{2}{z}} dz ;$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$e) \frac{1}{2\pi j} \oint_G \sin \frac{1}{z} dz$$

$$f) \frac{1}{2\pi j} \oint_G \sin^2 \frac{1}{z} dz$$

44. A reziduum-tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi - pozitív irányban bejárt - zárt görbementi integrálok értékét!

$$a) \oint_G \frac{1}{z^3(z+4)} dz,$$

$$\text{ha } G: |z| = 2 \text{ ill. } |z+2| = 3$$

$$b) \oint_G \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+3)} dz,$$

$$\text{ha } G: |z-2| = 2 \text{ ill. } |z| = 4$$

$$c) \oint_G \frac{e^{2jz}}{z^4 + 9z^2} dz$$

$$\text{ha } G: x^2 + 2y^2 - 8y = 12 \text{ ill. } |z-3| = 1$$

$$d) \oint_G \frac{e^z}{z^4 + 4z^2} dz,$$

$$\text{ha } G: |z-1-j| = 2$$

$$e) \oint_G \frac{(z+j)(z+2j)}{z^3 + 4z} dz,$$

$$\text{ha } G: |z+j| = 2$$

$$f) \oint_G \frac{e^z}{z(z^2 - 2z + 1)} dz,$$

ha $G: |z| = 2$ ill. $|z| = \frac{1}{2}$

$$g) \oint_G \frac{\sin z}{(z^2 + 2z + 1)(z^2 - 2z + 1)} dz ,$$

ha $G: |z| = 2$ ill. $|z| = \frac{1}{2}$

45. A reziduum-tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi - pozitív irányban bejárt - zárt görbementi integrálok értékét!

$$a) \oint_G \frac{\operatorname{sh} 3z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2} dz ,$$

ha $G: 1 + j; 2 + j; 2 + 2j; 1 + 2j$ csúcspontú téglalap.

$$b) \oint_G \frac{2 + 3 \sin \pi z}{z(z-1)^2} dz ,$$

ha $G: -3-3j; 3-3j; 3+3j; -3+3j$ csúcspontú téglalap

$$c) \oint_G \operatorname{ctg} z^2 dz ,$$

ha $G: -2-2j; 2-2j; 2+2j; -2+2j$ csúcspontú téglalap

$$d) \oint_G \frac{1 - \operatorname{tg} z}{\cos^2 2z} dz ,$$

ha $G: |z| = \frac{3}{7} \pi$ kör

$$e) \oint_G \frac{z}{\sin z(1 - \cos z)} dz \quad G: |z| = 5$$

$$f) \oint_G \frac{z^2}{\sin z(1 - \cos z)} dz \quad G: |z| = 5$$

$$g) \oint_G \left(1 + z + z^2\right) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz; \quad G: |z| = 3$$

$$h) \oint_G \frac{dz}{(4z - \pi j)^2 \operatorname{sh} 2z}; \quad G: |z-j| + |z+j| = 4$$

$$i) \oint_G \frac{z^2 + 4}{(z-2j)(z-3)\sin(z-j)} dz; \quad G: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{10} = 1$$

$$j) \oint_G \frac{z^3 + 3}{(z+j) \sin z \operatorname{ch} z} dz \quad G: |z| = 2$$

[46]. Adjunk az integrandusban szereplő c együtthatónak olyan valós számértéket, hogy

$$a) \oint_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^3 - jz^2 + cz} dz = 0$$

$$b) \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3 - 2z^2 j - cz} dz = 0$$

legyen!

47. Legyen G a pozitív irányban bejárt $|z| = 2$ kör. Határozzuk meg azokat az n pozitív és negatív egész számokat, amelyekre

$$\oint_G \frac{\operatorname{ch} z}{(z - j \frac{\pi}{2})^n} dz = 0$$

[48]. Igazoljuk, hogy

$$\oint_{|z|=R} \frac{dz}{z(z-z_0)^n} = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

bármely olyan R értékre, amelyekre $|z_0| < R$.

49. Legyen

$$f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2}$$

Állapítsuk meg, hogyan függ az f függvény $z_0 = 1$ középpontú R sugarú körön vett integrálja a kör R sugarától!

50. Határozzuk meg az alábbi $F(R)$ függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

$$a) F(R) = \oint_{G^+} \frac{e^z - 1}{z^2 - 2z} dz \quad G: |z - 2j| = R$$

$$b) F(R) = \oint_G \frac{dz}{z^3 + 3jz} \quad G: |z| = R$$

$$c) F(R) = \oint_G \frac{\sin z}{z^3 - 4z^2 + 4z} dz \quad G: |z - 2j| = R$$

51. Határozzuk meg az alábbi integrálok össze lehetséges értékét a különböző G rektifikálható zárt Jordan-görbék mentén, feltéve, hogy azok nem mennek át az integrálandó függvény egyetlen szinguláris pontján sem!

$$a) \oint_G \frac{\operatorname{th} z}{z^3 (z^2 + 4)} dz$$

$$b) \oint_G \frac{z - j}{(z^2 + 2z + 2)^2} dz$$

$$c) \oint_G \frac{e^z - 1}{z^3 + 6z^2 + 9z} dz$$

$$d) \oint_G \frac{\operatorname{arctg} z}{1 + z^2} dz$$

52. Legyen

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} z^k$$

Határozzuk meg az

$$\oint_G f(z) dz$$

integrál értékét, ha G a $|z| = 2$ kör pozitív irányban bejárva!

53. Igazoljuk, hogy a Cauchy-integráltétel és a Cauchy-integrálformula a reziduum-tétel speciális esete!

54. Legyen G a $z = 0$ pontot a belsejében tartalmazó, pozitív irányítású zárt Jordan-görbe; f és g reguláris G -n és G belsejében. Továbbá tegyük fel, hogy g -nek csak elsőrendű zérushelyei vannak a G belsejében levő $a_1, a_2, \dots, a_n$ pontokban és $a_i \neq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Határozzuk meg az

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(z)}{z \cdot g(z)} dz$$

integrál értékét.

55. Legyen a_k ; $k = 0, 1, \dots, n$ valós konstans,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=R} z^{n-1} |f(z)|^n dz = a_0 a_n \cdot R^{2n}$$

56. Igazoljuk, hogy

$$\oint_G \frac{1}{z(e^z - 1)} dz = 2\pi j c_0$$

ahol c_0 az $\frac{1}{e^z - 1}$ függvény $z_0 = 0$ bázispontú Laurent-sorának konstans tagja és G a pozitív irányban bejárt $|z| = 10$ kör.

57. Legyen $f(z)$ reguláris egy G zárt Jordan-görbén és az általa határolt T véges tartomány külsejében; T belsejében véges sok izolált szinguláris pontja legyen és ne legyen elágazási pontja.

Igazoljuk, hogy ha T a belsejében tartalmazza az origót, akkor

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta z - \zeta^2} d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \in T \\ \frac{f(z)}{z} & \text{" } z \notin T \end{cases}$$

2.2 VALÓS INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA REZIDUUM-TÉTELLEL

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (A)$$

típusú integrálok, ahol $\frac{P}{Q}$ racionális törtfüggvény.

58. A reziduum-tétel alkalmazásával határozzuk meg az alábbi improprius valós integrálok értékét!

$$a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

$$e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad a > 0, b > 0$$

59. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} \quad n = 2, 3, \dots$$

60. Igazoljuk, hogy

$$a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx = -\frac{\pi}{27}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2a^3}$$

$$e) \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$f) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

(B)

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$$

típusú integrálok, ahol R racionális függvény, melynek nincs szingularitása az egységgörön

61. Az $e^{jx} = z$ helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg az alábbi valós integrálok értékét!

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2 \cos x + \sin x}$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4 \cos x} dx$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-3 \sin x)^2}$$

$$d) \int_0^{2\pi} \frac{\sin 3x}{5-3 \cos x} dx$$

$$e) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-4 \cos 2x} dx$$

$$f) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{(5-3 \cos x)^4} dx$$

62. Az $e^{jx} = z$ helyettesítés alkalmazásával igazoljuk, hogy

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} ; \quad a > 1$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} ; \quad -1 < a < 1$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a \cos x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} ; \quad -1 < a < 1$$

63. Az $e^{jx} = z$ helyettesítéssel határozzuk meg az alábbi integrálok értékét!

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx ;$$

$$b) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx ;$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b \cos x)^2} dx ; \quad a > b > 0$$

$$d) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b \cos^2 x)^2} dx ; \quad a > 0; b > 0$$

$$e) \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx$$

©

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\pm jkx} dx; \text{ ill. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx$$

típusú integrálok

64. Az $f(x)e^{jax}$ függvény komplex síkbeli analitikus folytatása, valamint a reziduum-tétel alkalmazásával határozzuk meg az alábbi improprius integrálok értékét!

$$\boxed{\text{a)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j a x}}{1+x^2} dx \quad (a > 0)$$

$$\text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j a x}}{1+x^2} dx \quad (a < 0)$$

$$\text{c)} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx \quad (a > 0)$$

$$\text{d)} \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx \quad (m > 1)$$

$$\text{e)} \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} dx \quad (m > 1)$$

65. Határozzuk meg az alábbi improprius integrálokat, vagy azok Cauchy-főértékét!

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+x+1} dx \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1} dx$$

$$\text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)} dx$$

$$\text{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$$

66. A Jordan-lemma (ld. jegyzet 320. oldal) felhasználásával határozzuk meg az alábbi improprius integrálok értékét!

$$\boxed{\text{a)}} \int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+4} dx$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + n^2} dx$$

$$\begin{cases} m = 1, 2, \dots \\ n > 0 \end{cases}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin mx}{x^4 + 1} dx$$

$$m = 1, 2, \dots$$

67. Az integrálandó függvény komplex síkbeli analitikus folytatása, valamint a reziduum-tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi improprius integrálok értékét!

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx$$

$$e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx$$

68. Igazoljuk, hogy $0 < a < 1$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

69. Igazoljuk, hogy

$$a) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{b)} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1} dx = \frac{1}{4} \operatorname{cth} \frac{a}{2} - \frac{1}{2a}$$

$$\textcircled{c)} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi a}$$

70. Igazoljuk, hogy

$$\textcircled{a)} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^2 - 1} dx = \pi$$

$$\textcircled{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} dx = 0$$

$$\textcircled{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2} (1 + \cos 1)$$

$\textcircled{D}$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \quad \text{ill.} \quad \int_a^b f(x) dx$$

típusú integrálok, ahol f nem korlátos az integrációs tartományon és analitikus folytatásának elágazási pontja van.

71. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét!

$$\textcircled{a)} \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)x^{\alpha}} dx \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\textcircled{b)} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^n \sqrt{x^2 - 1}} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x} (x+1)^2} dx$$

72). A reziduum-tétel felhasználásával igazoljuk, hogy:

$$a) \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$b) \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$$

73. A reziduum-tétel felhasználásával igazoljuk, hogy

$$a) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 2x + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{8}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi \ln 2}{4}$$

$$e) \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi \ln 2}{2}$$

$$f) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}$$

$$g) \int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^4 + 1} dx = \frac{3\pi^3 \sqrt{2}}{64}$$

3.§ ZÉRUSHELYEK ÉS PÓLUSOK ELHELYEZKEDÉSE ÉS SZÁMÁNAK VIZSGÁLATA

3.1 LOGARITMIKUS REZIDUUM

$$\oint_G \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{és} \quad \oint_G \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

TÍPUSÚ INTEGRÁLOK ÉRTÉKÉNEK MEGHATÁROZÁSA

74. A logaritmikus reziduum felhasználásával határozzuk meg az alábbi - pozitív irányban bejárt - G zárt görbe menti integrálok értékét!

$$\text{a)} \quad \oint_G \frac{z^3}{z^4 + 1} dz \quad G : |z| = 2$$

$$\text{b)} \quad \oint_G \frac{3z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 - z} dz \quad G : |z| = 1$$

$$\text{c)} \quad \oint_G \operatorname{tg} z \, dz \quad G : |z| = 4$$

$$\text{d)} \quad \oint_G \frac{e^{2z}}{e^{2z} - 1} dz \quad G : |z| = 5$$

$$\text{e)} \quad \oint \frac{1}{z \ln z} dz \quad : |z - 1| = \frac{1}{2}$$

$$\text{f)} \quad \oint \frac{e^z - 4nz^{n-1}}{e^z - 4z^{n+1}} dz \quad G : |z| =$$

$$\text{g)} \quad \oint \operatorname{tg} \pi z \, dz \quad G : |z| = n; n=1, 2, \dots$$

75. Határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

integrál értékét az alábbi f függvényekre és az adott - pozitív irányítású - G zárt görbékre!

$$\text{a)} \quad f = \frac{z^2 + 4}{(z^2 + 2z + 2)^5} \quad G: |z| = 5$$

$$\text{b)} \quad f = \frac{(z^2 + 1)^2}{\sin^3(z-1)} \quad G: |z| = 5$$

$$\text{c)} \quad f = \frac{z^2 \sin z}{1 - \cos z} \quad G: |z-1| = 6$$

$$\text{d)} \quad f = \frac{e^z}{\sin^2 2z} \quad G: |z+3| = 2$$

$$\text{e)} \quad f = \frac{e^z - 1}{\sin^2 2z} \quad G: |z-j| = 6$$

$$\text{f)} \quad f = \frac{e^{2z} - 2e^z + 1}{\sin 2z} \quad G: |z-6j| = 8$$

[76]. Számítsuk ki az

$$\oint_G z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

integrál értékét az alábbi f függvények esetében, feltéve, hogy G olyan pozitív irányítású rektifikálható zárt Jordan-görbe, amely belsejében tartalmazza a megfelelő f függvény minden zérus- és pólushelyét!

$$\text{a)} \quad f = e^z (2z^3 - 3z^2 + z)$$

$$\text{b)} \quad f = \frac{z^2 - j}{z^2 - 4jz - 4}$$

$$\text{c)} \quad f = \frac{z + j}{(z - 2j)(z^2 + 2jz - 1)^2}$$

$$\text{d)} \quad f = \frac{z^3 - 4jz^2 - 4z}{(z-j)^4}$$

$$e) \quad f = \frac{(z^2 + 1)^3}{e^{2z}}$$

77. Számítsuk ki - $\oint_G \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ alakra hozva - az alábbi zárt görbe-menti integrálokat!

$$a) \quad \oint_{|z|=2} \frac{e^{jz}}{\sin 2z} dz$$

$$b) \quad \oint_{|z|=5} e^{z^2} \operatorname{tg} z dz$$

$$c) \quad \oint_{|z|=4} z^4 \operatorname{ctg} z dz$$

$$d) \quad \oint_{|z|=8} \frac{z^2 \sin z}{1 - \cos z} dz$$

78. Határozzuk meg a

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

függvény z_0 pontbeli reziduumát, ha f reguláris z_0 -ban, $f(z_0) \neq 0$ és g -nek másodrendű zérushelye van z_0 -ban!

79. Legyen

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n,$$

ahol $a_0 \neq 0$; $a_1, a_2, \dots, a_n$ komplex konstansok.
Határozzuk meg az

$$a) \quad \frac{1}{2\pi j} \oint_G z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$b) \frac{1}{2\pi j} \oint_G z^2 \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

integrálok értékét, ha G belsőjében tartalmazza f összes zérushelyét.

[80]. Legyen $r > 0$ nem egész valós szám. Igazoljuk, hogy

$$\oint_{|z|=r} \operatorname{ctg} z \, dz = (2[r] + 1) 2\pi j$$

3.2 ROUCHÉ-TÉTEL

81. A Rouché-tétel felhasználásával határozzuk meg, hogy hány gyöke van az alábbi egyenleteknek a $|z| < 1$ körtartományban!

$$a) z^8 - 4z^5 + z^3 - 1 = 0$$

$$b) z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$$

$$c) z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$$

$$d) 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$$

$$e) z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$$

$$f) 5z + z^{10} = 0$$

82. Határozzuk meg az alábbi egyenletek adott tartományokba eső gyökeinek számát!

$$a) z^4 + z^3 + 1 = 0$$

$$T: |z| < 2$$

$$b) z^6 - z^4 + 2 = 0$$

$$T: |z| < 2$$

$$c) z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

$$T: 1 < |z| < 2$$

$$d) z^4 - 5z + 1 = 0$$

$$T_1: |z| < 1$$

$$\text{ill. } T_2: 1 < |z| < 2$$

$$e) z^4 - 8z + 10 = 0 \quad T_1: |z| < 1$$

$$\text{ill. } T_2: 1 < |z| < 3$$

83. Igazoljuk, hogy a

$$z^3 \cdot e^{1-z} = 1$$

egyenletnek pontosan egy gyöke van a $|z| = 1$ kör belsejében!

84. Mutassuk meg, hogy a

$$[a] P(z) = z^3 + z + 1$$

polinom összes gyöke a

$$\frac{2}{3} \leq |z| \leq \frac{4}{3}$$

gyűrűtartományba esik;

$$b) Q(z) = z^5 + z - 16j$$

polinom összes gyöke a

$$1 < |z| < 2$$

gyűrűtartományba esik!

85. Mutassuk meg, hogy a

$$z^5 + 15z + 1 = 0$$

egyenlet 4 gyöke a

$$\frac{3}{2} < |z| < 2$$

körgyűrűbe esik!

86. Határozzuk meg, hogy hány gyöke van a $|z| < 1$ körben az alábbi transzcendens egyenleteknek!

$$[a] e^{z-\lambda} = z; \quad \lambda > 1$$

$$[b] e^z - 4z^n + 1 = 0; \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$c) az^n = e^z; \quad a > e \quad \text{és} \quad n \in \mathbb{N}^+$$

87. Határozzuk meg, hány gyöke van a $|z| < R$ körben az

$$e^z = az^n \quad n \in \mathbb{N}^+$$

egyenletnek, ha $|a| > \frac{e^R}{R^n}$.

88. Legyen $f(z)$ reguláris a $|z| \leq 1$ körlemezben és $|z| < 1$ -re legyen $|f(z)| < 1$. Hány gyöke van a $|z| \leq 1$ körben a

$$z - f(z) = 0$$

egyenletnek?

89. Határozzuk meg, hogy hány gyöke van a

$$z^n + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0; \quad n \in \mathbb{N}^+$$

egyenletnek a $|z| < 1$ körben, ha

$$|\alpha_2| > |\alpha_1| + |\alpha_0| + 1.$$

90. Igazoljuk, hogy az

$$\alpha z e^z = 1$$

egyenletnek a $|z| < 1$ körtartományba

a) $|\alpha| > e$ esetén egy gyöke esik;

b) $\alpha > e$ esetén ez a gyök valós és pozitív.

91. Legyen $\lambda > 1$ valós szám. Mutassuk meg, hogy a

$$\lambda - z - e^{-z} = 0;$$

egyenletnek a $\operatorname{Re} z \geq 0$ félsíkon egyetlen - méghozzá valós - gyöke van!

92. Igazoljuk, hogy az

$$z \operatorname{tg} z = a; \quad a > 0$$

egyenletnek végtelen sok valós gyöke van, de nincs imaginárius gyöke!

93. Igazoljuk, hogy a

$$\operatorname{tg} z = az$$

egyenletnek

- a) végtelen sok valós gyöke van, ha $a > 0$;
- b) csak 2 tiszta képzetes gyöke van, ha $0 < a < 1$;
- c) csupa valós gyöke van, ha $a \geq 1$.

94. Legyen

$$f(z) = \operatorname{tg} z - \alpha \cdot z$$

és legyen G a $\pm n\pi \pm n\tau j$; $n \in \mathbb{N}^+$ csúcsokhoz tartozó négyzet határa.

Bizonyítsuk be, hogy a

$$\pi n |\alpha| > \frac{1 + e^{-2n\pi}}{1 - e^{-2n\pi}}$$

feltétel mellett az f függvénynek $2n+1$ gyöke van a G által határolt négyzet belsejében!

Igaz-e, hogy valós α esetén ezek a gyökök mind valósak?

95. Legyen $P_n(z)$ egy n -edfokú polinom. Igazoljuk, hogy bármely α komplex szám esetén a

$$P_n(z) = \alpha$$

egyenletnek n gyöke van!

96. Igazoljuk, hogy minden adott $r > 0$ számhoz létezik olyan $n(r) \in \mathbb{N}^+$ hogy $n > n(r)$ esetén az

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} = 0$$

egyenlet valamennyi gyöke a $|z| = r$ kör belsejébe esik!

97. Igazoljuk, hogy bármilyen kis $\varrho > 0$ szám megadása esetén elég nagy $n \in \mathbb{N}^+$ mellett az

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n}$$

függvény minden gyöke a $|z| < \varrho$ körtartományba esik!

98). Igazoljuk, hogy ha $\varrho < 1$, akkor elég nagy $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$$

polinomnak nincs gyöke a $|z| < \varrho$ körtartományban!

3.3 ARGUMENTUM ELV

99). Határozzuk meg az alábbi függvények arcus-változását a megadott G görbék pozitív irányú befutása esetén!

$$\text{a) } f = \frac{3z^4 + e^z - 1}{\sin^2(z-1)}; \quad G: |z| = 5$$

$$\text{b) } f = \frac{z^5 - 8z^2 + \sin z + 1}{\sin^3 z}; \quad G: |z| = 1$$

$$\text{c) } f = \frac{1 + 8z - 2jz^2 + z^3 + \sin z}{e^z - 1}; \quad G: |z| = 1.$$

100. Igazoljuk, hogy a

$$8z^4 - 6z + 5 = 0$$

egyenletnek minden síknegyedben egy-egy gyöke van!

101. Igazoljuk, hogy a

$$z^6 + 192z + 640 = 0$$

egyenletnek egy-egy gyöke van az első- és a negyedik síknegyedben és két-két gyöke a második és a harmadik síknegyedben!

102. Mutassuk meg, hogy a

$$z = e^z$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van és azok a $\operatorname{Re} z > -1$ félsíkon vannak!

103. Állapítsuk meg, hogy hány gyöke van a

$$P(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$$

polinomnak a jobb félsíkon!

104. Állapítsuk meg, hogy hány gyöke van a

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$$

egyenletnek

- a) a jobb félsíkon;
- b) az első síknegyedben!

105. Állapítsuk meg, hogy hány gyöke van a

$$2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$$

egyenletnek egy-egy síknegyedben!

106. Állapítsuk meg, hogy mely síknegyedben van gyöke a

$$z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$$

egyenletnek!

(107). Tegyük fel, hogy a

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

polinom egyetlen gyöke sincs az imaginárius tengelyen.

a) Igazoljuk, hogy ha z felülről lefelé futja be az imaginárius tengelyt, akkor a $P_n(z)$ polinom argumentum-változása $k\pi$ (ahol k egész szám, amely n -nel egyszerre páros vagy páratlan és $|k| \leq n$)!

b) Igazoljuk, hogy ebben az esetben a $P_n(z)$ polinomnak $\frac{n+k}{2}$ gyöke van a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkban!

MEGOLDÁSOK

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN ELŐKÉSZÍTÉSE

1.§ KOMPLEX SZÁMOK ÉS SZÁMHALMAZOK

1.1 KOMPLEX SZÁMSÍK, RIEMANN-FÉLE SZÁMGÖMB

1. A síkbeli pontok $(x, y, 0)$ és a megfelelő gömbi pontok (ξ, η, ζ) derékszögű koordinátáinak kapcsolata:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}; \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}; \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Ezzel:

$$z_1^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$z_2^* = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$z_3^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$z_4^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Mindegyik pont az "egyenlítőn" van; földrajzi hosszúságuk a fenti sorrendben: $0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}$.

2. a) Egy szélességi körön "diametrikusan" elhelyezkedő pontok.

b) A (ξ, η) síkbeli hosszúsági körre szimmetrikusan elhelyezkedő (azaz: ellentétes oldalon elhelyezkedő hosszúsági körökön levő) pontok.

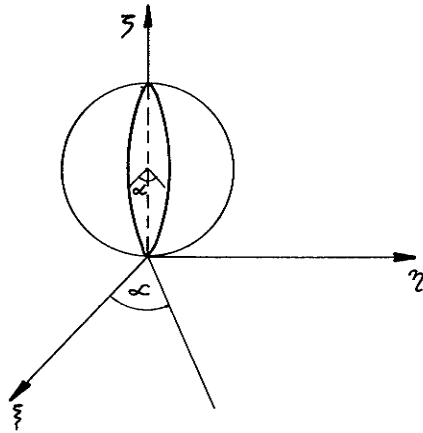
c) Az egyenlítő síkjára szimmetrikusan elhelyezkedő (azaz: azonos hosszúsági körön, ellentétes oldalon elhelyezkedő szélességi körökön levő) pontok.

3.a) Hosszúsági kör a Riemann-gömbön, amely a (ξ, η) síkbeli "főkörrel", α szöget zár be (1. 1. ábra).

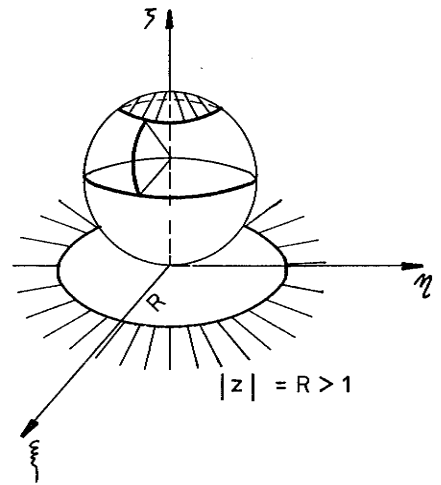
b) Szélességi kör a Riemann gömbön, amelynek az egyenlítőtől való gömbi távolsága:

$$\beta = (2 \arctg R) - \frac{\pi}{2}$$

(1. 2. ábra)



1. ábra



2. ábra

4. a) Az alsó-félgömbön;
az egyenlítőn (vízszintes főkörön);
a felső-félgömbön.
- b) Az elülső félgömbön ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; α a földrajzi hosszúság);
A függőleges főkörön;
a hátsó félgömbön ($\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi$).
- c) A keleti-(jobb) félgömbön;
(ζ, η) síkbeli hosszúsági körön;
a nyugati-(bal) félgömbön.

⑥. Felhasználva a síkbeli és a megfelelő gömbi pontok derékszögű koordinátáinak kapcsolatát, valamint a sztereo-grafikus leképezés körtartó voltát, a képkör sugarára

$$R^* = \frac{R}{R^2 + 1}$$

adódik.

1.2 KOMPLEX SZÁMHALMAZOK - SÍKBELI PONTALMAZOK

7] Mivel

$$f(n) = e^{j n \frac{\pi}{4}} + e^{-j n \frac{\pi}{4}} = 2 \cos n \frac{\pi}{4}$$

ezért

$$f(1) = \sqrt{2}; \quad f(2) = 0; \quad f(3) = -\sqrt{2}; \quad f(4) = -2;$$

$$f(n+4) = 2\cos\left(n\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 2\left[\cos n\frac{\pi}{4} \cdot \cos \pi - \sin n\frac{\pi}{4} \cdot \sin \pi\right] = -2\cos n\frac{\pi}{4} = -f(n)$$

8. a) $z = 0, \quad z = \frac{1}{m}, \quad z = \frac{j}{n};$

b) $z = 0, \quad z = 2, \quad z = 1 + j; \quad z = 1 - j;$

c) minden z , amelyre $|z| \leq 1$;

d) a komplex sík minden pontja;

e) minden z , amelyre $|z| \leq 1$;

f) a komplex sík minden pontja.

9. a) Igen.

b) A négyzet belsőjében és kerületén levő minden pont határpont.

c) Nem zárt.

d) A négyzet minden pontja határpont, (l.b.) válasz), így a halmaznak nincsenek belső pontjai

e) Nem nyílt.

f) Nem összefüggő.

g) Nem tartomány.

10. a) H tartomány;

b) Minden valós számnak megfelelő pont (az "elhagyott" pontok is) határpont. Több határpont nincs.

c) $\frac{j}{2}$ belső pont;

d) H egyszerűen összefüggő tartomány (mert határa összefüggő halmaz).

11. a) Nem tartomány;

b) Tartomány.

12. a) Nem korlátos (minden negatív valós szám a halmazhoz tartozik);

b) összefüggő;

c) nem zárt.

13. a) nem korlátos, összefüggő nyílt halmaz (tartomány);
 b) nem korlátos, összefüggő nyílt halmaz (tartomány);
 c) korlátos, összefüggő zárt halmaz;
 d) nem korlátos, nem összefüggő nyílt halmaz;
 e) nem korlátos, összefüggő nyílt halmaz;
 f) se nem nyílt, se nem zárt halmaz.

1.3 GÖRBÉK ÉS TARTOMÁNYOK A KOMPLEX SÍKON

14. a) $c(x^2 + y^2) = x$ egyenletű, az origón átmenő és az y tengelyt érintő körsereg;
 b) $c(x^2 + y^2) = y$ egyenletű, az origón átmenő és az x tengelyt érintő körsereg;
 c) $x^2 - y^2 = c$ egyenletű hiperbola-sereg;
 d) $x \cdot y = \frac{c}{2}$ egyenletű hiperbola-sereg;
 e) $2y = \operatorname{tg} \alpha [x^2 + y^2 - 1]$ egyenletű, a ± 1 pontokon áthaladó, körsereg;
 f) $(x-1)^2 + y^2 = \lambda^2 [(x+1)^2 + y^2]$ egyenletű, ún. Apollonius-körsereg

15. a) $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

b) $z \bar{z} + (1 + \frac{j}{z}) z + (1 - \frac{j}{z}) \bar{z} = 1$

c) $(z + \bar{z})^2 + 8j(z - \bar{z}) \geq 16$

16. a) A z_1 és z_2 pontokat összekötő egyenes szakasz felezőmerőlegese

- b) A z_1 és z_2 pontokhoz tartozó Apollonius-körsereg.

- c) z_1 és z_2 fókuszú ellipszis, amelynek valós tenye: 2λ

[d)] Legyen

$$\bar{z} = x - j y$$

$$\alpha = \alpha_1 + j \alpha_2$$

$$\beta = \beta_1 + j \beta_2$$

$$\gamma = \gamma_1 + j \gamma_2$$

$$\delta = \delta_1 + j \delta_2$$

Az összefüggést átrendezve, valós és képzetes részre bontva:

$$\gamma_1(x^2+y^2) + (\delta_1 - \alpha_1)x + (\delta_2 + \alpha_2)y - \beta_1 = 0$$

és

$$\gamma_2(x^2+y^2) + (\delta_2 - \alpha_2)x - (\delta_1 + \alpha_1)y - \beta_2 = 0$$

adódik. Ez két kör (ha $\gamma_1 \neq 0$ és $\gamma_2 \neq 0$), vagy két egyenes (ha $\gamma_1 = 0$ és $\gamma_2 = 0$) egyenlete. Metszéspontjaik adják a keresett halmazt, ami legfeljebb 2 elemű.

17. a) A $|z| > 2$ kör-külső, amelyhez nem tartozik az x tengely $-\infty < x \leq 2$ szakasza.

b) A $z = -\frac{3}{2}$ középpontú, $R = 2$ sugarú kör külseje.

c) A $z = 2j$ középpontú, $R_1 = 1$ és $R_2 = 2$ sugarú körök közti gyűrűtartomány.

d) Az $(x > 0; y > 0)$ és $(x < 0; y < 0)$ negyedsíkok.

e) Az origón átmenő és az y tengelyt érintő $(x-1)^2 + y^2 > 1$ kör-külső

f) $\operatorname{Re} z < 2$ (vagy: $z + \bar{z} < 4$) félsík.

18. a) A $z = \pm 2$ fókuszú és $\frac{3}{2}$ valós féltengelyű hiperbola sereg baloldali ágainak belseje

b) A $z = \pm 2$ fókuszú, $\frac{5}{2}$ valós féltengelyű ellipszis.

c) A z sík

$$\left. \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -1 < y < 0 \end{array} \right\}$$

vízszintes sávja

d) A z_1 és z_2 pontokon átmenő egyenes, amelyhez z_2 nem tartozik hozzá (Az egyenes egyenlete: $y(x_2 - x_1) = x(y_2 - y_1)$)

e) Kör, amelynek átmérője a z_1 és z_2 pontokat összekötő egyenesszakasz amelyhez z_2 nem tartozik hozzá. (A kör egyenlete: $x^2 + y^2 - x(x_1 + x_2) - y(y_1 + y_2) = 0$)

f) $y^2 = 1 - 2x$ egyenletű parabola és annak belseje.

19. a) Egyenes

b) "a" és "b" fókuszú ellipszis, ha $\alpha > |b-a|$;
 az "a" és "b" pontokat összekötő egyenesszakasz, ha
 $\alpha = |b-a|$; üres halmaz, ha $\alpha < |b-a|$.

c) A "bal" félsík, amelyből el van hagyva az
 $x^2 + y^2 - 2x - 1 \leq 0$ körtartomány

d) A $|z-j| = \sqrt{2}$ és a $|z+j| = \sqrt{2}$ körök belsejéből
 elhagyva a két kör közös része.

20. (a.) A görbesereg minden görbéje mértani helye azon
 pontoknak, amelyeknek a $z = 1$ és $z = -1$ pontoktól való tá-
 volságának szorzata állandó (Azaz: $z = \pm 1$ fókuszú lemniszkáta).

Ha $\lambda > 1$: a görbesereg elemei sima zárt görbék
 (l. 3/a ábra);

ha $\lambda > 1$: a görbesereg elemei szétesnek két zárt
 görbére amelyek $\lambda \rightarrow 0$ esetén a $z = \pm 1$ pontokra zsugorodnak
 (l. 3/b ábra);

ha $\lambda = 1$: a görbesereg elemei az ún. Bernoulli-
 féle lemniszkáták, amelyeknek $z = 0$ kettős-pontjuk és polár-
 koordinátás egyenletük: $r^2 = 2 \cos 2\varphi$ (l. 3/c ábra)

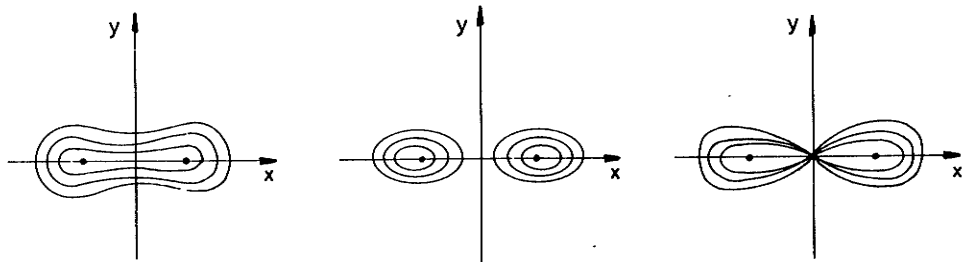
b) Lemniszkáta-sereg, amelynek fókuszai

$z^2 + az + b = 0$ egyenlet gyökei: z_1 és z_2 .

Ha $\lambda > \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|}{2}}$ akkor a lemniszkáta egyetlen
 görbéből áll;

ha $\lambda < \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|}{2}}$ akkor a lemniszkáta 2 zárt
 görbéből áll;

ha $\lambda = \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|}{2}}$, akkor a Bernoulli-féle lem-
 niszkáta adódik, melynek kettőspontja $\frac{z_1 + z_2}{2}$



3. ábra

2.8 KOMPLEX SZÁMSOROZATOK ÉS SOROK

2.1 SZÁMSOROZATOK

[21]. a) Figyelembevéve, hogy

$$\frac{n^{2jn}}{n^3 + 1} = \frac{e^{2jn(\ln n)}}{n^3 + 1} = \frac{\cos(2n \cdot \ln n) + j \sin(2n \cdot \ln n)}{n^3 + 1},$$

és felhasználva a koszinusz és szinusz függvények korlátosságát, az állítás igaz.

b) Az állítás az összeg határértékére vonatkozó tétel felhasználásával adódik.

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| n \left(\frac{1+j}{2} \right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = 0,$$

d) A szorzat határértékének felhasználásával:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot j^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} j^n$$

ahol $\lim_{n \rightarrow \infty} j^n$ nem létezik.

22. a) $\frac{1}{2} j$

b) 1

c) 0

d) $\frac{1}{2} j$

23. a) 0 ; b) 0 ; c) 1 ; d) 1

24. b) A két határérték azonos, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, ahol

$A > 0$ valós szám.

[25]. A torlódási pont definíciója értelmében a $0 < |z - z_0| < 1$ tartományban van legalább egy z_n - legyen az pl. z_{n_1} -; a $0 < |z - z_0| < \frac{1}{2}$ tartományban is van legalább egy z_n ; $n > n_1$ - legyen az pl. z_{n_2} -; és általában tetszőleges $n \geq 2$ -re a $0 < |z - z_0| < \frac{1}{n}$ tartományban van legalább egy z_n , $n > n_{n-1}$ - legyen az pl. z_{n_n} -. Az így kiválasztott (z_{n_k}) komplex számsorozat valóban z_0 -hoz konvergál.

[26]. A (z_n) sorozat határértéke z_0 , ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan N , melyre $n > N$ esetén $|z_n - z_0| < \varepsilon$ áll fenn. Ez a definíció ekvivalens a következővel: minden $\varepsilon > 0$ -hoz csak véges sok n -re áll fenn $|z_n - z_0| \geq \varepsilon$. A (z_n^*) átrendezett sorozat ugyanazokból az elemekből áll, mint (z_n) , így az utóbbi definíció szerint e sorozat is z_0 -hoz tart.

[27]. a) Az állítás a

$$||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0|$$

egyenlőtlenség felhasználásával adódik.

b) Például a

$$z_n = j^n - \frac{1}{n}; \quad n = 1, 2, \dots$$

számsorozat divergens (mert több torlódási pontja van: $1, -1, j, -j$), de elemei abszolútértékeiből alkotott

$$|z_n| = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{ha } n = 4k \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{" } n = 4k+2 \\ \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} & \text{" } n = 2k+1 \end{cases}$$

számsorozat konvergens (mert $\lim |z_n| = 1$).

28. a) Igaz.

b) Nem igaz, pl.: $z_n = j^n$; $z_n^* = 1 - j^n$

c) Nem igaz, pl.: $z_n = j^n$; $z_n^* = 1 - j^n$

d) Nem igaz. Pl. a

$$z_n = j^n - \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad z_n^* = \frac{2}{n} - j^n$$

sorozatok egyike sem konvergens, de a

$$z_n + z_n^* = \frac{1}{n}$$

sorozat konvergens.

e) Nem igaz. Pl.: $z_n = \frac{1}{n}$; $z_n^* = (1+j)^n$

f) Igaz. Ugyanis, ha mindkettő konvergens, akkor $(z_n + z_n^*)$ is konvergens.

(29). a) Az állítás a valós elemű számsorozatra vonatkozó megfelelő tétellel analóg módon igazolható.

b) $z_0 = \infty$ esetén az állítás nem érvényes u.i.s pl.

$z_{2k-1} = -z_{2k} = 2k-1$; $k = 1, 2, \dots$ esetén a

$$(z_n) = 1, -1, 3, -3, 5, -5, \dots$$

amelyre: $\lim z_n = z_0 = \infty$, míg

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}$$

nem létezik (e sorozat elemei $1, 0, 1, 0, \dots$).

Megjegyezzük, hogy valós elemű számsorozat esetén - ahol a ∞ -nek határozott előjele van - igaz az állítás.

Ugyanis ha $(a_n) \rightarrow \infty$, úgy $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{n} \rightarrow \infty$, míg ha $(a_n) \rightarrow -\infty$, úgy a számtani közepekből alkotott sorozat is $\rightarrow -\infty$.

(32). a) Használjuk fel, hogy a $(z_n = x_n + j y_n)$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha az (x_n) és az (y_n) sorozatok konvergenssek.

b) Használjuk fel, hogy - ha $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ - úgy a $(z_n = r_n e^{j \varphi_n})$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \neq 0$ és a $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ határérték.

2.2 SZÁMSOROZATOK

[33]. a) Konvergens, ugyanis

$$|z_n| = \left| \frac{1}{(1 + j n)^2} \right| = \frac{1}{1 + n^2}$$

azaz a sor abszolút konvergens, és így közö éges értelemben is konvergens.

b) Nem konvergens, ugyanis:

$$z_n = \frac{n}{1 + j n} = \frac{1 - j n}{1 + n^2}$$

azaz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} \text{ konvergens,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j n}{1+n^2} \text{ divergens,}$$

és így a sor divergens.

c) Divergens, ugyanis

$$|z_n| = |1 + j n| \not\rightarrow 0,$$

azaz a konvergencia szükséges feltétele sem teljesül.

d) Konvergens, ugyanis

$$\left| \left(\frac{\sqrt{3} + j}{\sqrt{5}} \right)^n \right| = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n$$

ami $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n$ konvergens volta miatt az eredeti sor abszolút konvergenciáját és egyben közönséges értelemben vett konvergenciáját is jelenti.

(34). a) Külön a valós és külön a képzetes részekből álló sor konvergens. így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+z^2}$ is konvergens.

b) A képzetes részekből álló sor divergens, így az eredeti sor is divergens.

[35]. A sor n -edik részletösszege:

$$s_n = 1 + z_0 + \dots + z_0^{n-1},$$

és így

$$z_0 s_n = z_0 + z_0^2 + \dots + z_0^n.$$

A két összeg különbségét véve:

$$s_n (1 - z_0) = 1 - z_0^n,$$

amiből - az $(1 - z_0) \neq 0$ miatt -

$$s_n = \frac{1 - z_0^n}{1 - z_0}.$$

Mivel feltételünk értelmében $|z_0| < 1$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_0|^n = 0,$$

és így

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-z_0} - \frac{z_0^n}{1-z_0} \right) = \frac{1}{1-z_0}$$

az állításnak megfelelően.

36. a) A sor konvergens geometriai sor, mert hányadosának abszolútértéke:

$$|q| = \left| \frac{j}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1.$$

így összege

$$S = \frac{1}{1 - \frac{j}{2}} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} j.$$

b) A sor konvergens geometriai sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-3)^{-k} e^{jk\frac{\pi}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{3} \right)^k, \quad (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{j}{3} \right)^k,$$

ahol

$$|q| = \left| -\frac{j}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1,$$

és így

$$S = -\frac{j}{3} \frac{1}{1 + \frac{j}{3}} = \frac{-1-3j}{10}.$$

c) Konvergens geometriai sor, amelynél

$$|q| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| < 1,$$

és így

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{2}j}{2}} = \frac{2}{3} (1 + \sqrt{2} j).$$

b) Konvergens geometriai sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{k}{2^2} e^{jk} \frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{j}{\sqrt{2}} \right)^k = \frac{\sqrt{2} \cdot j - 1}{3}$$

37. a) Abszolút konvergens,
 b) abszolút konvergens,
 c) közöséges értelemben konvergens,
 d) abszolút konvergens,
 e) abszolút konvergens,

38. a) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergens $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \text{ abszolút konvergens;}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergens $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ abszolút konvergens;}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^j)^n,$

ami $|q| = |e^j| = 1$ sorhányadosú divergens geometriai sor.
 így $\sum a_n$ divergens;

d) konvergens, de nem abszolút konvergens;

e) Ha $\varphi \neq 2k\pi$; $k = 0, +1, +2, \dots$ akkor a sor konvergens, de nem abszolút konvergens;

Ha $\varphi = 2k\pi$, akkor a sor divergens;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abszolút konvergens}$$

g) divergens, ugyanis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j}{n} e^{j \frac{\pi}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} + \frac{j}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right),$$

és itt: $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n)$ abszolút konvergens

mert $\sum_{n=1}^{\infty} \left| -\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$ konvergens sor

de $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Im} a_n)$ divergens

mert ha n elég nagy, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$,

ez pedig egy divergens minoráns sor.

h) divergens sor, ugyanis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos j n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{ch} n,$$

ahol:

$$a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2e} \right)^n \neq 0$$

i) abszolút konvergens sor, ugyanis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin j n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n j \operatorname{sh} n}{3^n},$$

ahol:

$$|a_n| = \left| \frac{n j \operatorname{sh} n}{3^n} \right| = n \left(\frac{e}{3} \right)^n - n \left(\frac{1}{3e} \right)^n < n \left(\frac{e}{3} \right)^n$$

és a hányados kritériummal belátható, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{e}{3} \right)^n \text{ konvergens.}$$

j) divergens sor, mert

$$|a_n| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n} \not\rightarrow 0$$

[39]. $\operatorname{Re} a_n$ abszolút konvergens, mert $|\arg a_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ feltétel miatt $\operatorname{Re} a_n > 0$, és akkor $|\operatorname{Im} a_n| < C \operatorname{Re} a_n$, amiből következik az állítás.

40. Lásd 39. feladat.

[41]. Legyen $a_n = x_n + j y_n$. A feltételből adódik a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^2 - y_n^2);$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^2 - y_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

sor konvergenciája.

(42). A tagok valós és képzetes részre bontása után az igazolás azonos a valós számsorokra vonatkozó megfelelő tétel igazolásával.

(46). A baloldali összegben a_k helyett írjuk az

$$a_k = s_k - s_{k-1}$$

kifejezést ($k = 0$ esetén $a_0 = s_0$), majd a tagokat ugyanazon s_k mellett összegezzük.

(47). Alkalmazzuk az Abel-transzformációt (lásd 46. feladat)

48. Alkalmazzuk az Abel-transzformációt (lásd 46. feladat)

[49]. Az Abel-transzformáció (46. feladat) értelmében:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \left[\sum_{k=n+1}^{n+p} s_k (b_k - b_{k+1}) \right] - s_n b_{n+1} + s_{n+p} b_{n+p+1}$$

A *) feltétel következtében:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \leq K \left[\sum_{k=n+1}^{n+p} \sqrt{k} (b_k - b_{k+1}) + \sqrt{n} \cdot b_{n+1} + \sqrt{n+p} b_{n+p+1} \right]$$

A **) és ***) feltétel következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ választása esetén létezik olyan n_0 pozitív egész szám, hogy

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon,$$

minden $n > n_0$ és minden $p \geq 1$ -re. így a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor konvergens.

[50]. A Abel-transzformáció (46. feladat) értelmében:

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{n+p_n} (a_k b_k) = \left[\sum_{k=n+1}^{n+p_n} s_k (b_k - b_{k+1}) \right] - [s_n b_{n+1} - s_{n+p_n} b_{n+p_n+1}]$$

Mivel egy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ pozitív számok tetszőleges választása esetén:

$$(c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+p_n}) \rightarrow 0,$$

ezért

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{n+p_n} (a_k b_k) \rightarrow 0,$$

amiből (a most felhasznált szükséges és elégséges feltétel értelmében) a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ sor konvergenciája következik.

KOMPLEX VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPFOGALMAI

1.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK ÉS RELÁCIÓ ÖSSZETETT FÜGGVÉNY, INVERZ FÜGGVÉNY

1. a) Az egész z sík, kivéve a

$$z_1 = e^{j \frac{\pi}{6}}; \quad z_2 = e^{j \frac{5\pi}{6}}; \quad z_3 = e^{j \frac{9\pi}{6}}$$

pontokat.

b) Az

$$|x| < \frac{1}{3}; \quad -\infty < y < \infty$$

függőleges sáv, kivéve annak $y = 0$ és $y = 1$ egyeneseit.

c) Az

$$|x| < e; \quad y > 0$$

félsáv.

d) Az

$$|y| < 2; \quad x < 0$$

félsáv.

2. a) Egyrétű függvény ($z \neq \pm j$)

b) Egyrétű-kétértékű reláció ($z \neq 4; z \neq \pm 2j$)

c) Kétrétű-háromértékű reláció ($z \neq \pm \sqrt{2}j; z \neq \pm \sqrt{2}$)

d) Egyrétű függvény ($z \neq -j$)

e) Kétrétű függvény ($z \neq \pm 2j$)

3. a) Az $x = c$ egyenesek képe:

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}, \quad \text{parabola, ha } c \neq 0;$$

$$v = 0; \quad u \leq 0 \quad \text{félegyenes, ha } c = 0.$$

b) Az $y = c$ egyenesek képe:

$$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2 \text{ parabola, ha } c \neq 0;$$

$$v = 0; \quad u \geq 0 \text{ félegyenes, ha } c = 0.$$

c) Az $y = x$ egyenes képe:

$$u = 0, \quad v \geq 0 \text{ félegyenes.}$$

d) A $|z| = R$ kör képe:

$$|w| = R^2 \text{ kör.}$$

e) Az $\arg z = \alpha$ félegyenesek képe:

$$\arg w = 2\alpha \text{ félegyenesek}$$

f) Az $u = c$ egyenesek "ősképei":

$$x^2 - y^2 = c \text{ hiperbola, ha } c \neq 0;$$

$$y = \pm x \text{ egyenespár, ha } c = 0.$$

g) A $v = c$ egyenesek ősképei:

$$x \cdot y = \frac{c}{2} \text{ hiperbola, ha } c \neq 0;$$

$$x \text{ és } y \text{ tengely, ha } c = 0.$$

4. a) Az $x = c$ egyenesek képe:

$$u^2 + v^2 - \frac{u}{c} = 0 \text{ kör ha } c \neq 0;$$

$$u = 0 \text{ tengely ha } c = 0;$$

b) Az $y = c$ egyenesek képe:

$$u^2 + v^2 + \frac{v}{c} = 0 \text{ kör ha } c \neq 0;$$

$$v = 0 \text{ tengely ha } c = 0;$$

c) A $|z| = R$ körök képe:

$$|w| = \frac{1}{R} \text{ kör;}$$

d) Az $\arg z = \alpha$ félegyenes képe:

$$\arg w = -\alpha \text{ félegyenes,}$$

e) Az $|z - 1| = 1$ kör képe:

$$u = \frac{1}{2} \text{ egyenes.}$$

f) A $u = c$ egyenesek ősképei:

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{c} = 0 \text{ kör, ha } c \neq 0$$

$$x = 0 \text{ tengely, ha } c = 0$$

g) A $v = c$ egyenesek ősképei:

$$x^2 + y^2 + \frac{y}{c} = 0 \text{ kör, ha } c \neq 0$$

$$y = 0 \text{ tengely, ha } c = 0$$

5. [a] A g függvény értelmezési tartománya és értékkészlete a teljes z sík; az f függvény értelmezési tartománya a teljes z sík, értékkészlete a felső (vagy alsó) félsík.

Mivel g értékkészletét tartalmazza f értelmezési tartománya, ezért képezhető a $f \circ g$ összetett függvény:

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = +\sqrt{j + 3z}.$$

Mivel f értékkészlete beleesik g értelmezési tartományába, ezért képezhető a $g \circ f$ összetett függvény is:

$$(g \circ f)(z) = j + 3\sqrt{z}.$$

b) $f \circ g$ létezik:

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \left(\bar{z} + \frac{1}{z}\right)^2 + j\left(\bar{z} + \frac{1}{z}\right);$$

$g \circ f$ nem létezik.

c) $f \circ g$ nem létezik

$g \circ f$ létezik és:

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \left|\frac{z}{4 + z^2}\right| + \frac{z^2}{(4 + z^2)^2}.$$

6. [a] f mindenütt értelmezett, háromrétű függvény amely kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít a $z = \frac{j}{2}$ csúcspontú $0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ szögtér és a teljes w sík között. Ezért inverze

$$f^{-1}(z) = \frac{\sqrt[3]{z} + j}{2}$$

minden z -re értelmezett és $z \neq 0$ -ra egyrétű-háromértékű reláció.

b)

$$g^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

mindenütt értelmezett, $z \neq \pm 1$ esetén kétértékű reláció.

c)

$$h^{-1}(z) = \frac{4 - 3j}{25} \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

$z = 0$ kivételével mindenütt értelmezett egyértékű függvény.

2.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

8. a) $1 - \frac{1}{2}j$; b) ∞ ; c) $2j$

9. (f)-nél használjuk fel, hogy $z \rightarrow 0$ esetén (amikor is $(x, y) > 0$):

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{és} \quad |\cos y - 1| \leq |y|$$

10. a) z_0^n

b) $\frac{1}{z_0^n}$

c) 0

d) $\frac{j}{2}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18} j$

f) $\frac{-1}{2} + \frac{11}{4} j$

11. a) $-12 + 6j$

b) $\frac{\sqrt{2}(1 + j)}{2}$

c) $-4/3 - 4j$

d) $\frac{1}{3}$

e) $-\frac{1}{4}$

[12]. Ábrázoljuk a függvényt a komplex számsíkon!
 Az $y = x^2$ és $y = 2x^2$ parabolák közötti területen a függvény értéke 1, egyébként (a határokon is) 0. Ha $x \neq 0$ tetszőleges valós szám, az $x + 1,5x^2j$ pontban a függvény 1, az x pontban pedig 0. így $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + 1,5x^2j) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, tehát nem létezik $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$.

A feladat másik részének igazolásához feltehetjük, hogy $\alpha > 0$. (Az $\alpha = 0$ eset triviális, $\alpha < 0$ pedig ugyanúgy tárgyalható, mint $\alpha > 0$.) Vizsgálunk kell az $f(x + \alpha xj)$ függvény határértékét $x = 0$ -ban. $x < 0$ esetén $f(x + \alpha xj) = 0$, ami fennáll $x > 0$ esetén is, ha $\alpha x > 2x^2$, $x < \frac{\alpha}{2}$ (vagyis: $f(x + \alpha xj) = 0$; ha $0 < x < \frac{\alpha}{2}$). Így a függvény határértéke 0-ban tényleg létezik.

[13]. Az adott relációnak a $z = 0$ pontban $\sqrt{3}$ az értéke ($a - \pi < \arg z < \frac{\pi}{3}$ ágon) és ott

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sqrt{z^2 + 3} - 2}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z + 1}{\sqrt{z^2 + 3} + 2} = \frac{1}{2}$$

3.5 KOMPLEX FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA ÉS EGYENLETES FOLYTONOSSÁGA

[15]. Nem folytonos, mert

$$\lim_{z \rightarrow 2j} \frac{z^2 + 4}{z - 2j} = 4j \neq f(2j) .$$

16. A függvény a $z = 0$ pontban nem folytonos és ott nem létezik határértéke.

17. [a] A függvény nem folytonos a $z_1 = 1$ és $z_2 = -2$ pontokban; de mindkét pontban létezik határértékük.

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{3} ,$$

$$\lim_{z \rightarrow -2} \frac{z - 1}{z^2 - z - 2} = \infty .$$

b) f nem folytonos a $z_1 = -1 + j$ és $z_2 = -1 - j$ pontokban; mindkét pontban ∞ a határérték.

f) f nem folytonos a $z_1 = 2$, $z_2 = -2$, $z_3 = 2j$, $z_4 = -2j$ pontokban; a $z = \pm 2$ pontban a határérték: ∞ , a $z = \pm 2j$ pontban a határérték: $-\frac{1}{8}$.

[18]. Az f_1 , f_3 és f_5 függvény mindenütt folytonos; az f_2 és f_4 függvény a $z = 0$ pont kivételével mindenütt folytonos. Ugyanis:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi}{1 + r} = 0 = f_1(0)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_2(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi}{r} \text{ nem létezik}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_3(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r} = 0 = f_3(0)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_4(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos 2\varphi}{r^2} \text{ nem létezik}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_5(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r^2 \cos 2\varphi)^2}{r^2} = 0 = f_5(0)$$

19. Az előző feladatnál követett gondolatmenettel belátható, hogy a válasz azonos az előző feladatével.

20. A függvény a

$$z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi j}{4}}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

pontokban nem folytonos.

[22]. Az f függvény folytonos a teljes z síkon így folytonos a korlátos és zárt $|z| \leq 10$ tartományon is, amiből következik a függvény $|z| \leq 10$ tartománybeli egyenletes folytonossága.

24. Mindkét függvény folytonos, de nem egyenletesen folytonos az adott tartományon.

25. a) Folytonos, de nem egyenletesen folytonos;

b) Egyenletesen folytonos.

[27]. a) Legyen $|\zeta| = 1$ a körvonal valamely pontja, (z_n) ; $|z_n| < 1$ pedig ζ -hoz tartó tetszőleges sorozat, azaz $z_n \rightarrow \zeta$. Belátjuk, hogy $f(z_n)$ -re teljesül a Cauchy-féle konvergencia-kritérium, azaz $f(z_n)$ konvergens. f egyenletes folytonossága miatt minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, melyre $|z_1 - z_2| < \delta$; $(|z_1| < 1, |z_2| < 1)$ esetén $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Ha N olyan egész szám, melyre $n > N$ esetén $|z_n - \zeta| < \frac{\varepsilon}{2}$ akkor nyilván $n, m > N$ -re $|z_n - z_m| < \delta$, tehát $|f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon$, és így $f(z_n)$ valóban Cauchy-konvergens.

$$b) \lim_{z_n \rightarrow \zeta} f(z_n); \quad |z_n| < 1$$

nem függ a (z_n) sorozat megválasztásától, mert a $z_n \rightarrow \zeta$ és $z'_n \rightarrow \zeta$ sorozatokból összefésült $z_1, z'_1, z_2, z'_2, \dots$ sorozat ugyancsak ζ -hoz tart, így $f(z_1), f(z'_1), f(z_2), f(z'_2), \dots$ is konvergens, tehát $\lim_{z_n \rightarrow \zeta} f(z_n) = \lim_{z'_n \rightarrow \zeta} f(z'_n)$. Ezért $f(\zeta)$ -t egyértelműen definiálhatjuk az

$$f(\zeta) = \lim_{z_n \rightarrow \zeta} f(z_n)$$

határértékkel.

A kiterjesztett f folytonossága nyilvánvaló minden belső pontban. Ha egy $|\zeta| = 1$ pontban $f(z)$ nem folytonos (indirekt feltevés), akkor létezik olyan $z_n \rightarrow \zeta, |z_n| < 1$ sorozat, melyre $|f(z_n) - f(\zeta)| \geq 2\varepsilon$, valamely rögzített $\varepsilon > 0$ -ra.

Legyen z'_n olyan pont minden z_n -hez, melyre $|z'_n| < 1$,

$|z_n - z'_n| < \frac{1}{n}$ és $|f(z_n) - f(z'_n)| < \varepsilon$ egyaránt teljesül.

(Ha $|z_n| < 1$, $z'_n = z_n$ választható, ha $|z_n| = 1$ akkor a $(0, z_n)$ körsugáron választhatunk egy z'_n -hez $\frac{1}{n}$ -nél közelebbi pontot, melyre $|f(z_n) - f(z'_n)| < \varepsilon$ is fennáll.) Erre a (z'_n) sorozatra $|z'_n| < 1$; $z'_n \rightarrow \zeta$ (mivel $z_n \rightarrow \zeta$ és $|z_n - z'_n| < \frac{1}{n}$), és így az

$|f(z'_n) - f(\zeta)| \geq \varepsilon$ (az $|f(z_n) - f(\zeta)| \geq 2\varepsilon$; $|f(z_n) - f(z'_n)| < \varepsilon$
 és a háromszögegyenlőtlenség miatt). Ez azonban lehetetlen,
 mert $f(\zeta)$ definíciója szerint $|z'_n| < 1$; $z'_n \rightarrow \zeta$ esetén
 $f(z'_n) \rightarrow f(\zeta)$.

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

1.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

1.1 DIFFERENCIÁLHATÓSÁG, CAUCHY-RIEMANN-EGYENLETEK

$$1. \text{ a) } f'(z_0) = 3z_0^2 - 2;$$

$$f'(-1) = 1$$

$$\text{b) } f'(2) = 12 + 4j$$

$$\text{c) } f'(-j) = -5j$$

$$\text{d) } f'(1+j) = \frac{3}{2} (1 + j)$$

$$\text{e) } f'(1) = 2,5$$

$$\text{f) } f'(j) = -\frac{j}{16}$$

$$2. \text{ a) } f'(z) = 4z + j$$

$$\text{b) } f'(z) = \frac{4j + 1}{(z+2j)^2}$$

$$\text{c) } f'(z) = -8z + 4j$$

$$\text{d) } f'(z) = -\frac{3j}{(jz-1)^4}$$

$$\text{e) } f'(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$3. \text{ a) } f'(-j) = 9 + j$$

$$\text{b) } f'(j-1) = \frac{6}{4^4} (1-j)$$

$$\text{c) } f'(j) = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5}j$$

$$\text{d) } f'(1+j) = -108 - 78j$$

4. a) Az $y = x$ egyenes pontjaiban és ott $f'(z) = 2x + j \cdot 0$
 b) mindenütt és $f'(z) = 3z^2$
 c) az y tengely pontjaiban és ott $f'(z) = 3y$
 d) csak a $z = j$ pontban és $f'(j) = -3j$
 e) mindenütt és

$$f'(z) = -e^{-x^2+y^2} (2x \cos 2xy + 2y \sin 2xy) + j(2x \sin 2xy - 2y \cos 2xy) e^{-x^2+y^2}$$

- f) csak az origóban és $f'(0) = 0$
 g) a $z = \pm j$ pontok kivételével mindenütt és

$$f'(z) = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}$$

- h) a $z = 1$ pont kivételével (bármely egyértékű ágon) -
 mindenütt és $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z-1}}$
 i) sehol sem

[5] a) $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \Delta z$

ahol $\Delta z \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z = \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

mert a feltétel értelmében $f'(z_0)$ létezik.
 így

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = 0,$$

ill. $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0),$

ami azt jelenti, hogy f folytonos z_0 -ban.

b) Például az $f(z) = \bar{z}$ függvény bármely z_0 pontban folytonos, de nem differenciálható.

⑥ a) Az $f = z^2 \cdot \bar{z}$ függvény mindenütt folytonos, de a $z = 0$ pont kivételével sehol sem differenciálható, mert $z \neq 0$ pontban nem teljesülnek a C.-R. egyenletek.

b) A függvény a $z_0 = 0$, ill. az irracionális $|z_0|$ pontokban folytonos, de nem differenciálható.

Ugyanis a differenciáhányados a $z_0 = 0$ pont környezetében akár 0, akár 1 értéket, míg az irracionális $|z_0| > 0$ pontok környezetében tetszőleges értéket felvehet.

⑦ a) A $z \neq 0$ pontban a függvény differenciálható, így ott teljesülnek a C.-R. egyenletek. A $z = 0$ pontban a valós és képzetes rész parciális deriváltjai mind 0-ák, így ott is teljesülnek a C.-R. egyenletek. A $z = 0$ pontban a függvény mégsem differenciálható, mert a függvény ott nem folytonos.

b) A függvény sehol nem folytonos így sehol sem differenciálható (bár parciális deriváltjai mind 0-ak és így a C.-R. egyenletek teljesülnek.)

⑧ a) A függvény a $z_0 \neq 0$ pontban nem differenciálható; a $z = 0$ pontban differenciálható (és $f'(0) = 0$, mert a függvény különbségi hányadosának határértéke 0) bár a $z = 0$ pontban a függvény valós és képzetes részének parciális deriváltjai nem folytonosak.

b) Az a)-hoz hasonló módon látható be.

9. Csak a $z = j$ pontban teljesülnek a C.-R. egyenletek.

10. a) $z = 0$

b) $z = 0$

11. Alkalmazva a

$$z - \alpha = r e^{j\varphi}$$

transzformációt:

$$w = f(z) = \frac{(z - \alpha)^n}{(z - \alpha)} = \frac{r^n e^{jn\varphi}}{r} = r^{n-1} e^{jn\varphi}.$$

$$a) \lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r, \varphi) = 0,$$

ha $n-1 > 0$, azaz ha $n > 1$;

$$b) f'(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(z - \alpha)^n}{|z - \alpha| \cdot (z - \alpha)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(z - \alpha)^{n-1}}{|z - \alpha|}$$

ami - az α -beli határérték felhasználásával csak akkor létezik, ha $n-2 > 0$, azaz ha $n > 2$.

12. $\boxed{\alpha}$ Alkalmazva az

$$f(z) = u(z) + j v(z)$$

jelölést $|z| < 1$ esetén:

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{1-|z|} = \frac{1}{1-\sqrt{x^2+y^2}} \\ v(z) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

így

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

de
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0,$$

tehát a C.-R. egyenletek sehol sem teljesülnek, a függvény sehol sem differenciálható.

$\boxed{13}$. A $w = u + jv$ függvényt valós és képzetes részre bontva:

$$u = \frac{x^2 - x + y^2}{(x-1)^2 + y^2},$$

$$v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}.$$

Mivel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-(x-1)^2 + y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

és

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y(x-1)}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

azaz: mindenütt teljesülnek a Cauchy-Riemann-egyenletek, ezért w mindenütt differenciálható függvény. Éspedig:

$$w = \frac{z \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z} - \bar{z}} = \frac{z}{z-1} ;$$

$$w' = \frac{1}{(z-1)^2} \text{ ha } z \neq 1 .$$

14. Felhasználva, hogy

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y} = u_1(x, y) - j u_2(x, y) ,$$

az $y = 0$ érték behelyettesítésével

$$f'(x) = u_1(x, 0) - j u_2(x, 0)$$

adódik. Az x változó helyébe z -t írva:

$$f'(z) = u_1(z, 0) - j u_2(z, 0) .$$

$$15. a) \quad c = 1; \quad b = -a$$

$$f(z) = (1-a)z$$

$$f'(z) = 1-a$$

$$b) \quad a = b = -1$$

$$f(z) = \cos x (\operatorname{chy} - \operatorname{sh} y) + j \sin x (\operatorname{chy} - \operatorname{sh} y)$$

$$(\quad = e^{jz})$$

$$f'(z) = \sin x (\operatorname{sh} y - \operatorname{ch} y) + j \cos x (\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)$$

$$(\quad = j e^{jz})$$

16. A függvény differenciálható, ha

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{4} ; \quad \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4}$$

(Itt $f(z) = z^2$) és ha

$$\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4} ; \quad \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4}$$

(Itt $f(z) = -z^2$)

17. Például:

$$f(z) = |z|^2$$

18. Például:

$$f(z) = (\operatorname{Im} z)^2$$

Ez a függvény az $\operatorname{Im} z = \text{konstans}$ (azaz: az y tengellyel párhuzamos) egyenesek mentén differenciálható, de másutt nem.

[19]. Például az

$$f(z) = f(x + jy) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \text{ irracionális,} \\ 1, & \text{ha } y = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } y = \frac{p}{q} \text{ (} p \neq 0 \text{ és } q > 0 \text{ relatív prím-számok)} \end{cases}$$

függvény eleget tesz a követelményeknek. Ugyanis:

- a) f a racionális ordinátájú pontokban nem folytonos, így ott nem is differenciálható
- b) f az irracionális ordinátájú pontokban differenciálható, mert ezekben a pontokban

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \begin{cases} \leq \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{\left| \frac{p}{q} - y_0 \right|}, & \text{ha } \operatorname{Im} z = y = \frac{p}{q} \\ = 0 & \text{ha } \operatorname{Im} z = y = 0 \end{cases}$$

úgy hogy itt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = 0,$$

mert y_0 egy egész együtthatós másodfokú egyenlet gyöke, amelyre tetszőleges $\frac{p}{q}$ esetén

$$\left| \frac{p}{q} - y_0 \right| \geq \frac{c}{q^2},$$

ahol $c > 0$ és csak az y_0 -tól függ. Tehát az irracionális ordinátájú pontokban

$$f'(z) = 0$$

24. a) A C.-R. egyenletek:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$b) f'(z) = \frac{\partial f}{\partial r} e^{-j\varphi} = \frac{\partial f}{\partial r} (\cos \varphi - j \sin \varphi)$$

$$25. a) f'(z) = \frac{\partial w}{\partial r} e^{-j\varphi} = -\frac{3}{r^4} e^{-4j\varphi}$$

$$(\quad = -\frac{3}{z^4} \quad); \quad z \neq 0.$$

$$b) f'(z) = \frac{\partial w}{\partial r} (\cos \varphi - j \sin \varphi)$$

$$= [(1 - \frac{1}{r^2}) \cos \varphi + j (1 + \frac{1}{r^2}) \sin \varphi] \cdot [\cos \varphi - j \sin \varphi]$$

$$= 1 - \frac{1}{r^2} (\cos 2\varphi - j \sin 2\varphi)$$

$$(\quad = 1 - \frac{1}{r^2} \quad); \quad z \neq 0.$$

1.2 MAGASABBRENDÜ DERIVÁLTAK

[26]. a) f másodfokú polinomja z -nek, tehát az egész síkon reguláris és így létezik $f'(z)$ és $f''(z)$. Éspedig

$$f'(z) = -2j + 2z$$

$$f''(z) = 2$$

b) f harmadfokú polinom, így az a)-beli következtetéssel létezik $f'(z)$ és $f''(z)$

$$f'(z) = 3(j + z)^2$$

$$f''(z) = 6(j + z)$$

c) f valós és képzetes részének parciális deriváltjai az egész síkon folytonosak és ott kielégítik a C.-R. egyenleteket. így f az egész síkon reguláris és

$$f'(z) = -4(\sin 4x \cdot \operatorname{ch} 4y - j \cos 4x \cdot \operatorname{sh} 4y)$$

$$f''(z) = -16(\cos 4x \cdot \operatorname{ch} 4y - j \sin 4x \cdot \operatorname{sh} 4y)$$

d) lásd c)-beli indoklást.

$$f'(z) = (2-3x^2 + 3y^2) - j6xy$$

$$f''(z) = -6x - j6y$$

$$27. a) f''(z) = \frac{\sqrt{(z^2-4z+2j)^3} - (z-2)^2 \cdot \sqrt{z^2-4z+2j}}{(z^2-4z+2j)^3}$$

$$b) f''(z) = -\frac{2}{9} \frac{1+\sqrt{z}}{\sqrt{z}^3 \sqrt{(z+2\sqrt{z})^5}} - \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{z}^3 \sqrt{(z+2\sqrt{z})^2}}$$

$$c) f''(z) = \frac{2}{z^3 \sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{z \sqrt{(1-z^2)^3}} + \frac{3z}{\sqrt{(1-z^2)^5}}$$

$$28. a) f'(z) = j ; \quad f'(1+j) = j$$

$$f''(z) = 0 ; \quad f''(1+j) = 0$$

$$b) f'(z) = -f(z) ; \quad f'(2+\frac{\pi}{2}j) = \frac{-e^{-2}}{\sqrt{2}} + j \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}}$$

$$f''(z) = f(z) ; \quad f''(2+\frac{\pi}{2}j) = \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}} - j \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}}$$

$$c) f'(z) = 3z^2 + \frac{2j}{z^3} ; \quad f'(j) = -5$$

$$f''(z) = 6z - \frac{6j}{z^4} ; \quad f''(j) = 0$$

$$d) f'(z) = -(\sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y) ; \quad f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(z) = -f(z) ; \quad f''(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

1.3 DIFFERENCIÁL

$$31. a) df = \frac{2}{(1-z_0)^2} \Delta z ;$$

$$b) df = \frac{-1}{2 \sqrt{(z_0-2)^3}} \Delta z ;$$

$$c) \quad df = \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + 1}} \Delta z .$$

$$32. \quad a) \quad \Delta f = (3z^2 - 4z) \Delta z + (3z - 2) (\Delta z)^2 + (\Delta z)^3$$

$$b) \quad df = (3z^2 - 4z) \Delta z$$

$$c) \quad \Delta f - df = (3z - 2) (\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 = \varepsilon \cdot \Delta z$$

$$\text{ahol } \varepsilon = (3z - 2) \Delta z + \Delta z^2$$

$$33. \quad a) \quad \Delta f = -8 \Delta z + j (\Delta z)^2$$

$$b) \quad df = -8 \Delta z$$

$$c) \quad \Delta f - df = j (\Delta z)^2$$

$$34. \quad a) \quad 38 - 2j$$

$$b) \quad 6 - 42j$$

1.4 L'HOSPITAL-SZABÁLY

$$36. \quad a) \quad \text{alkalmazható és a határérték: } \frac{5}{3}$$

$$b) \quad \quad \quad " \quad \quad \quad " \quad \quad \quad \frac{16+12j}{25}$$

$$c) \quad \quad \quad " \quad \quad \quad " \quad \quad \quad - \frac{1}{4}$$

$$d) \quad \text{nem } " \quad \quad \quad " \quad \quad \quad 0$$

2.§ KOMPLEX FÜGGVÉNYEK REGULARITÁSA

2.1 DIFFERENCIÁLHATÓSÁG, REGULARITÁS

33. A $z = 0$ pontban az

$$f(z) = |z|^4 = (x^2 + y^2)^2 + j \cdot 0$$

függvény valós és képzetes részének parciális deriváltjai folytonosak és kielégítik a C.-R. egyenleteket. Így a függvény a $z = 0$ pontban differenciálható, de nem reguláris, mert a $z = 0$ pontnak nincs olyan környezete, amelyben a függvény differenciálható volna (u. is $z \neq 0$ esetén sehol nem teljesülnek a C.-R. egyenletek).

40. Az adott függvény

$$w = (1 - |z|)^2 = (1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2).$$

Parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

melyek az origó kivételével mindenütt léteznek és folytonosak. A C.-R. egyenletek az $x^2 + y^2 = 1$ (vagyis a $|z| = 1$) körön teljesülnek. Így a függvény a $|z| = 1$ körön differenciálható, de sehol sem reguláris.

41. a) Sehol nem differenciálható;
- b) az $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$ pontokban differenciálható, de nem reguláris;
- c) az $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ pontokban differenciálható, de nem reguláris;
- d) az $x = 0$, $y = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ " " de nem reguláris;
- e) a $z = 0$ pont kivételével mindenütt reguláris;
- f) az $x = 1$ egyenes kivételével mindenütt reguláris;
- g) a $z = -j$ pont kivételével mindenütt reguláris;
- h) sehol sem differenciálható, sehol sem reguláris;
- i) a $z = -1 + 2j$ és $z = -1 - 2j$ pontok kivételével mindenütt reguláris;
- j) csak a $z = \alpha$ pontban differenciálható, de ott nem reguláris;

k: A $z \operatorname{Re} z$ függvény csak a $z = 0$ pontban differenciálható, de ott nem reguláris;

a $\frac{z-1}{z^2+1}$ függvény a $z = \pm j$ pont kivételével mindenütt reguláris.

így összegük a $z \operatorname{Re} z + \frac{z-1}{z^2+1}$ függvény csak a $z = 0$ pontban differenciálható de ott nem reguláris.

(42). Mivel $g = -j \cdot f$, ezért g is reguláris T -n.

(43). Használjuk fel a Cauchy-Riemann-egyenleteket!

(45). Használjuk fel a Cauchy-Riemann-egyenleteket!

(46). Az állítás a 45. feladat állításának következménye.

(47). A T tartományon legyen $|f(z)| = k$, ahol $k \geq 0$ konstans.

$k = 0$ esetben az állítás triviális. Ha $k \neq 0$ és $f = u + jv$, akkor

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = k^2,$$

amiből differenciálással

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

adódik. Ez az u és v változóban homogén egyenletrendszer, amelynek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az együtthatókból alkotott determináns értéke 0. Azaz ha:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = |f'(z)|^2 = 0$$

amiből $f'(z) = 0$ miatt $f(z) = \text{konstans}$ következik.

[48]. Legyen $f = u + jv$, és $u = \text{konstans}$ a T tartományon.
Ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$

és a C.-R. egyenletek felhasználásával:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0.$$

Ebből v konstans és vele együtt f konstans volta következik.

[49]. Hogy az

$$f = u + jv \quad \text{és} \quad \bar{f} = u - jv$$

függvények regulárisak, az azt jelenti, hogy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \text{és} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

Azaz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(x,y) = \text{konstans}$$

és hasonlóan

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow u(x,y) = \text{konstans}$$

Tehát:

$$f = u + jv = \text{konstans}$$

2.2 HARMONIKUS FÜGGVÉNY, HARMONIKUS TÁRSFÜGGVÉNY

[51]. Legyen $f(x,y)$ kétváltozós harmonikus függvény.
Akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - j \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} - j \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f = 0 .$$

(52). Ez az összefüggés a polárkoordinátákkal kifejezett

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (r \neq 0)$$

C.-R. egyenletek közül az elsőnek r , a másodiknak φ szerinti differenciálásával valamint (jelen esetben) a másodrendű vegyes parciális deriváltak egyenlőségének felhasználásával és a differenciálással kapott egyenletek összeadásával adódik.

53. a) Igen

b) Igen

c) Nem

d) Igen

e) Nem

54. [a] Nem harmonikus, ugyanis:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \right) = \frac{2}{r^3} - \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3} \neq 0 \end{aligned}$$

[b] Harmonikus.
U.is:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \\ &\text{ha } r \neq 0 \end{aligned}$$

[c] Harmonikus
U.is:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial r} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin \varphi + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin \varphi - \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{r^3} \sin \varphi + \frac{1}{r} \sin \varphi + \frac{1}{r^3} \sin \varphi - \frac{1}{r} \sin \varphi + \frac{1}{r^3} \sin \varphi = 0$$

ha $r \neq 0$

d) Harmonikus

e) Harmonikus

55. a) Nem harmonikus;

b) Harmonikus;

c) Harmonikus.

[56]. Be kell látnunk, hogy a jelzett tartományon f első- és másodrendű parciális deriváltjai folytonosak és kielégítik

a $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ Laplace-féle differenciálegyenletet.

A valós változójú $\arcsin t$ és $\arccos t$ függvények felhasználásával:

$$f(z) = \arccos(x+jy) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{az } y > 0 \text{ félsíkon} \\ \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{az } x > 0 \text{ félsíkon} \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{az } y < 0 \text{ félsíkon} \end{cases}$$

így az elsőrendű és másodrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

amelyek a negatív valós tengely mentén bemetszett komplex síkon valóban folytonosak és ott kielégítik a $\Delta z = 0$ egyenletet.

(A komplex változós elemi függvények ismeretében az igazolás egyszerű, mert az adott függvény nem más, mint a bemetszett síkon reguláris $\ln z$ függvény imaginárus része).

[57]. Mivel

$$u''_{xx} = 2a ,$$

$$u''_{yy} = 2c ,$$

ezért $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, ha $a = -c$ és b tetszőleges.

[58]. a) $u(x,y)$ harmonikus $\nRightarrow u^2(x,y)$ harmonikus (feltéve, hogy $u \neq \text{konstans}$). Ugyanis

$$\frac{\partial [u^2(x,y)]}{\partial x} = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ;$$

$$\frac{\partial [u^2(x,y)]}{\partial y} = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} ,$$

és

$$\frac{\partial^2 [u^2(x,y)]}{\partial x^2} = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] .$$

$$\frac{\partial^2 [u^2(x,y)]}{\partial y^2} = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

így

$$\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial y^2} = 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \neq 0 \text{ általában}$$

b) $u(x,y)$ harmonikus $\Rightarrow g = f(u)$ harmonikus, ha
 $f = au + b$
 Ugyanis:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} ;$$

és

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{d^2 f}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{d^2 f}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

így:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{df}{du} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right],$$

amiből látható, hogy g akkor harmonikus (akkor lesz $g''_{xx} + g''_{yy} = 0$), ha

$$\frac{d^2 f}{du^2} = 0,$$

azaz, ha

$$f = au + b.$$

$$59. \text{ [a] } u = c_1 x + c_2$$

$$(\Delta u = \varphi''_{xx} = 0 \text{ ha } \varphi'_x(x) = c_1 \Rightarrow \varphi(x) = c_1 x + c_2)$$

$$\text{[b] } u = c_1(ax + by) + c_2$$

$$(ax + by = t; \Delta u = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} a + \frac{d^2 \varphi}{dt^2} b = 0 \Rightarrow$$

$$u = c_1 t + c_2)$$

$$\text{[c] } u = c_1 \arctg \frac{y}{x} + c_2$$

$$(\frac{y}{x} = t; \Delta u = 0 \Rightarrow u = c_1 \arctg t + c_2).$$

Ugyanis alkalmazzuk a $t = \frac{y}{x}$ jelölést. Mivel

$$u''_{xx} = \varphi''_{tt} \left(-\frac{y}{x^2} \right)^2 + \varphi'_t \frac{2y}{x^3},$$

$$u''_{yy} = \varphi''_{tt} \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \varphi'_t \cdot 0,$$

az $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ Laplace-egyenletből

$$\varphi''_{tt} \left(\frac{y^2}{x^4} + \frac{1}{x^2} \right) = -\varphi'_t \frac{2y}{x^3}.$$

Innen

$$\frac{\varphi_{ttt}'}{\varphi_t'} = - \frac{x^4}{x^2+y^2} \cdot \frac{2y}{x^3} = - \frac{2xy}{x^2+y^2} = - \frac{2t}{1+t^2}.$$

így

$$\ln \varphi_t' = \ln \frac{c_1}{1+t^2},$$

azaz

$$\varphi_t' = \frac{c_1}{1+t^2},$$

ahonnan

$$\varphi = c_1 \arctan t + c_2.$$

Tehát

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = c_1 \arctan \frac{y}{x} + c_2$$

$$\boxed{d)} u = c_1 xy + c_2$$

$$(xy = t; \Delta u = 0 \Rightarrow u = c_1 t + c_2)$$

$$e) u = c_1 \ln(x^2 + y^2) + c_2$$

$$f) u = \frac{c_1 x}{x^2 + y^2} + c_2$$

$$g) u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$$

h) nem létezik

$\boxed{62}$. Képezzünk egy T -ben reguláris olyan $f(z)$ függvényt, amelyre

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z)$$

Ekkor

$$u(\varphi(\zeta)) = U(\zeta) = \operatorname{Re} f(\varphi(\zeta))$$

és mivel

$$f(\varphi(\zeta)) = F(\zeta)$$

reguláris T^x -on, ezért ott

$$\operatorname{Re} F(\zeta) = U(\zeta)$$

harmonikus.

[63]. A

$$z = (u + jv)^2,$$

illetve

$$x + jy = u^2 - v^2 + 2j uv$$

transzformációval az $y = 0$ egyenes képe az

$$u = 0 \quad \text{és} \quad v = 0$$

egyenes, a függvény pedig

$$H = e^{-(u^2 - v^2)} \cos 2uv$$

alakú. így $\Delta H = 0$ és az $u = 0$ és $v = 0$ egyeneseken:

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u} \right]_{u=0} = \left[e^{-(u^2 - v^2)} (2u \cos 2uv + 2v \sin 2uv) \right]_{u=0} = 0$$

és

$$\left[\frac{\partial H}{\partial v} \right]_{v=0} = \left[e^{-(u^2 - v^2)} (2v \cos 2uv - 2u \sin 2uv) \right]_{v=0} = 0$$

[64]. A 63. feladatban jelzett transzformációval:

$$H = 4uv + e^{-(u^2 + v^2)} \cos 2uv,$$

és ez harmonikus függvény.

Az $y = 0$ egyenes képén az

$$u = 0 \quad \text{és} \quad v = 0$$

egyeneseken a megfelelő parciális deriváltak

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u} \right]_{u=0} = [4v - e^{-(u^2 + v^2)} (2u \cos 2uv + 2v \sin 2uv)]_{u=0}$$

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u} \right]_{v=0} = [4u + e^{-(u^2-v^2)} (2v \cos 2uv - 2u \sin 2uv)]_{v=0} = 4u$$

65. Alkalmazzuk a C.-R. egyenleteket!

66. Használjuk fel, hogy reguláris $f = u + jv$ függvény esetén

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

67. a) $v(x, y) = 2xy + 2y + c$

b) $v(x, y) = 2x + e^{-x} \sin y + c$

c) $v(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + y + c$

d) $v(x, y) = 3(\arctg \frac{y}{x} + 2k\pi) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

Ugyanis például:

$$\boxed{a)} \quad u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x = \operatorname{Re} (z^2 + 2z)$$

és így

$$v(xy) = \operatorname{Im} (z^2 + 2z) = 2xy + 2y + c$$

$\boxed{68.}$ a) Mivel

$$u'_x = 5 + \frac{2y \cdot x}{(x^2+y^2)^2}; \quad u''_{xx} = - \frac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$u'_y = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad u''_{yy} = - \frac{6x^2y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

ezért $\Delta u = 0$, azaz u harmonikus, ha $z \neq 0$.

b) A harmonikus társfüggvények

$$v(x, y) = \operatorname{Im} \int_{(1,0)}^{(x,y)} \left(- \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) =$$

$$= \int_{x=1}^x \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - 1 \right) dx + \int_{y=0}^y \left(5 + \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{x} - x + 2 + 5y - \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x} + c =$$

$$= 5y - x - \frac{x}{x^2 + y^2} + c'.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(z) &= \left(5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) + j \left(5y - x - \frac{x}{x^2 + y^2} + c' \right) = \\ &= (5 - j) z - \frac{j}{z} + c \end{aligned}$$

69. $f(z) = (ax + by + c) + j (ay - bx + c^*)$
ahol a, b, c, c^* tetszőleges konstansok.

$$70. \text{ b) } u = -2 \arctg \frac{y-2}{x-1}$$

71. a) Harmonikus

$$v(x, y) = 2y + x^2 - y^2 + c$$

$$f(z) = jz^2 + 2z + j c$$

b) Harmonikus

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - 3x - 2y + c$$

$$f(z) = z^2(1 + j) - z(2 + 3j) + jc$$

c) Harmonikus

$$f(z) = \frac{1}{2z} + j z^2 + 3j + c$$

d) Nem harmonikus

e) Harmonikus

$$v(x, y) = y e^x \cos y + x e^x \sin y + c$$

$$f(z) = z e^z + j c$$

f) Harmonikus

$$u(x,y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) + c$$

$$f(z) = j e^{jz^2} + c$$

g) Harmonikus

$$f(z) = 2j \cos z + z^3 - jz + cj$$

h) Harmonikus

$$f(z) = (j - 2) z + 2j \ln z + c$$

72. a) Képezhető:

$$f = \frac{1+z}{1-z} + c$$

b) Nem képezhető

c) Képezhető

$$f = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 2xy + j (\arctg \frac{y}{x} - x^2 + y^2)$$

(= $\ln z - j z^2$; ahogy azt az elemi függvények tárgyalásánál látni fogjuk)

73. a) $f(z) = e^{j\alpha} z^2 e^z$ ahol α tetszőleges valós
állandó

b) $f(z) = e^{j\alpha} e^{\frac{z^2}{2}}$ " " "

e) $f(z) = c e^{\frac{z^2}{2}}$ ahol $c > 0$ tetszőleges
állandó

d) $f(z) = c z e^z$ " " "

74. a) $c = -\frac{1}{3}$.

Ugyanis:

$$u'_x = 2x + 6 \sin x \operatorname{ch} y,$$

$$u''_{xx} = 2 + 6 \cos x \operatorname{ch} y,$$

$$u'_y = 6 cy - 6 \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$u''_{yy} = 6 c - 6 \cos x \operatorname{ch} y,$$

és így:

$$\Delta u = 2 + 6 \cos x \operatorname{ch} y + 6c - 6 \cos x \operatorname{ch} y = 0,$$

$$\text{ha } c = -\frac{1}{3}$$

$$\text{b) } f'(z_0) = \pi + 6 \operatorname{ch} 1 + 2j$$

Ugyanis:

$$u = x^2 - y^2 - 6 \cos x \operatorname{ch} y$$

harmonikus és így

$$\begin{aligned} f'(z) &= u'_x - j u'_y = (2x + 6 \sin x \operatorname{ch} y) + j(2y + \\ &\quad + 6 \cos x \operatorname{ch} y) \end{aligned}$$

és

$$f'\left(\frac{\pi}{2} + j\right) = \pi + 6 \operatorname{ch} 1 + 2j$$

$$75. \text{ [a] } c = 2$$

$$f'(-j) = 4 - 2j$$

Ugyanis:

v akkor lehet egy reguláris függvény képzetes része, ha harmonikus. Tehát kell hogy

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2c - 4 = 0$$

legyen, amiből $c = 2$.

Tehát

$$v(x, y) = 2x^2 + 2xy - 2y^2$$

harmonikus és így (a valós rész meghatározása nélkül):

$$f'(z) = v'_y + j v'_x = (2x - 4y) + j(4x + 2y)$$

ill.

$$f'(-j) = 4 - 2j$$

$$\text{b) } c = 12$$

$$f'(1 + 2j) = -24 + 72j$$

$$c) \quad c = -3$$

$$f'(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j) = -\frac{3}{2} - \operatorname{ch} \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} + j \operatorname{sh} \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{2}$$

76. A kérdéses függvény

$$f = z^3 + 2j z^2 + 6 - 2j$$

Ugyanis:

$$f'(z) = 3z^2 + 4j z$$

$$f(z) = z^3 + 2j z^2 + c$$

$$\theta = (1 + j)^3 + 2j(1 + j)^2 + c$$

$$c = -(1 + j)^2 (1 + j + 2j) = 6 - 2j$$

77. $f(1 + j) = 2j + 6$

Ugyanis:

$$f'(z) = 6z^2 - 6j z,$$

ezért

$$f(z) = 2z^3 - 3jz^2 + c,$$

Ha $f(1) = 6 - 5j$ akkor $c = 4 - 2j$

így

$$f(z) = 2z^3 - 3jz^2 + 4 - 2j$$

és

$$f(1 + j) = 2j + 6,$$

78. a) $a = b$

$$b) \quad f(z) = e^{ax}(\cos ay + j \sin ay)$$

79. Az adott kétváltozós függvényben az a, b, c, d konstansok nem lehetnek tetszőlegesek. Rögzített " a " és " d " esetén kell hogy $b = -3d$; $c = -3a$ legyen. Itt tetszőleges " a " és " d " konstans esetén az

$$u(x, y) = ax^3 - 3d x^2 y - 3a xy^2 + dy^3$$

kétváltozós függvény harmonikus. Ekkor a

$$v(x, y) = d \cdot x^3 + 3a \cdot x^2 y - 3d \cdot xy^2 - ay^3 + c^*$$

harmonikus társfüggvényekkel képezett

$$f(z) = [ax^3 - 3d x^2 y - 3ax^2 y + dy^3] + j [dx^3 + 3ax^2 y - 3d xy^2 - ay^3 + c^*]$$

komplex függvények mindenütt differenciálhatók.

[80]. a) Az u függvény egy reguláris komplex függvény valós része, ha harmonikus. Tehát kell hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 e^{2x} h(x) + 4 e^{2x} h'(x) + e^{2x} h''(x) - 1 = 0$$

vagyis

$$h''(x) + 4 h'(x) + 4 h(x) = 1$$

legyen. Ez h -ra egy állandó együtthatós, másodrendű lineáris differenciálegyenlet, amelyből

$$h(x) = e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + cx + d \right);$$

s, d tetszőleges valós

$$b) f'(1 + j) = 1 + j + c$$

[81]. a) Legyen H az x és y változók egy harmonikus függvénye és vezessünk be az u és v változókat, úgy hogy az $z = x + j y$ komplex változó a $w = u + j v$ változó reguláris függvénye legyen: Azaz:

$$z = f(w),$$

ahol f reguláris.

Az adott $H(x, y)$ függvénnyel és annak $G(x, y)$ harmonikus társfüggvényével képezett $H + j G$ függvény a z változónak reguláris függvénye. Mivel - a feltétel értelmében - z a w -nek reguláris függvénye, ezért $H + j G$ a w -nek is reguláris függvénye és így H az u és v változóknak is harmonikus függvénye az állításnak megfelelően.

a) Pl. a

$$H = e^{-y} \sin x$$

függvény a z sík bármely tartományán harmonikus. Alkalmazva a

$$z = w^2$$

transzformációt (amely reguláris függvény), ahol $x = u^2 - v^2$; $y = 2uv$, a kapott

$$H = e^{-2uv} \sin(u^2 - v^2)$$

függvény a jelzett tartományon u és v harmonikus függvénye, mert

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 0.$$

2.3 KOMPLEX POTENCIÁL

$$87. \ a) \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{div} v = 0 \\ \operatorname{rot} v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \text{ komplex potenciál} \\ \text{a teljes } z \text{ síkon} \end{array}$$

$$F(z) = \cos x \operatorname{ch} y - j \sin x \operatorname{sh} y + c = \operatorname{ch} z + c$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{div} v = 0 \\ \operatorname{rot} v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \text{ komplex potenciál} \\ \text{pl. a } \operatorname{Re} z > 1 \text{ félsíkon} \end{array}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= (y^2 - x^2) + \ln(x^2 + y^2) - j(2xy - 2 \arctan \frac{y}{x}) + c = \\ &= (\ln z^2) - z^2 + c \end{aligned}$$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{div} v = 0 \\ \operatorname{rot} v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \text{ komplex potenciál} \\ \text{a teljes } z \text{ síkon} \end{array}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= x + e^{-x} \cos y + j(y - e^{-x} \sin y) + c = \\ &= z + e^{-z} + c \end{aligned}$$

$$d) \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{div} v = 0 \\ \operatorname{rot} v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \text{ komplex potenciál} \\ \text{pl. a } \operatorname{Re} z \geq 1 \text{ félsíkon} \end{array}$$

$$F(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2} + c = \frac{1}{z} + c$$

88. a) lehet;

$$\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} u + c = (3x^2 - 3y^2) \underline{i} - 6xy \underline{j}$$

b) lehet;

$$\underline{v}(\underline{r}) = (-\sin x \operatorname{ch} y) \underline{i} + (\cos x \operatorname{sh} y) \underline{j}$$

c) nem lehet;

d) lehet;

$$\underline{v}(\underline{r}) = -e^{-x} \cos y \underline{i} + (2 + e^{-x} \cos y) \underline{j}$$

89. a) Az erővonalak: az $y = c$ egyenesek;
az áramlás iránya: balról-jobbra; ($\arg F'(z)$)
az áramlás sebességvektora: $\underline{v} \equiv \overline{F'(z)} = \underline{j}$

b) Az erővonalak egyenlete:

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2};$$

az erővonalak iránya: balról-jobbra: ($\arg F'(z)$)
az áramlás sebességvektora ($\underline{v} = \overline{F'(z)}$)

$$\underline{v} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \underline{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \underline{j}$$

c) Az erővonalak egyenlete:

$$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c$$

az erővonalak iránya: jobbról-balra
az áramlás sebességvektora:

$$\underline{v} = \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) \underline{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \underline{j}$$

d) Az erővonalak egyenlete

$$y + \frac{y}{x^2 + y^2} = c$$

az erővonalak iránya: jobbról-balra
az áramlás sebességvektora:

$$\underline{v} = \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) \underline{i} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \underline{j}$$

90. a) A vektortér potenciálfüggvénye és áramfüggvénye:

$$\phi(x,y) = a_1x - a_2y + b_1 \text{ és } \psi(x,y) = a_2x + a_1y + b_2$$

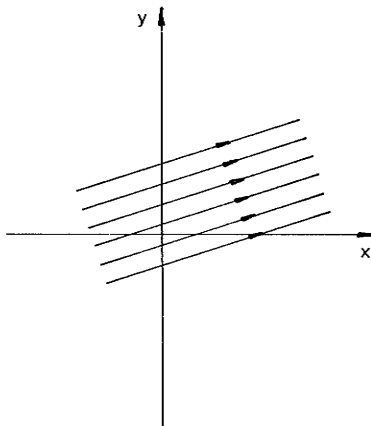
$$\text{ha } a = a_1 + j a_2; \quad b = b_1 + j b_2.$$

Az ekvipotenciális vonalak: $y = a_1x + c_1$ egyenessereg

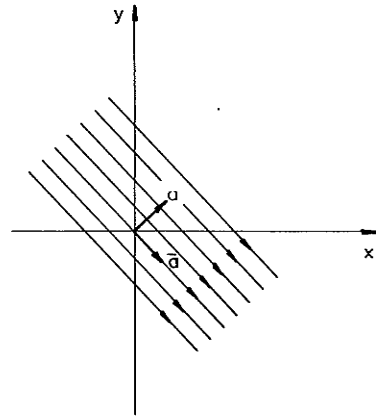
az erővonalak: (áramvonalak): $y = c_2 - a_2x$ egyenessereg

$$\text{a térerősségvektor: } \underline{v} \approx \overline{F'(z)} = \underline{a}$$

(lásd a 4. ábra)



ekvipotenciális vonalak

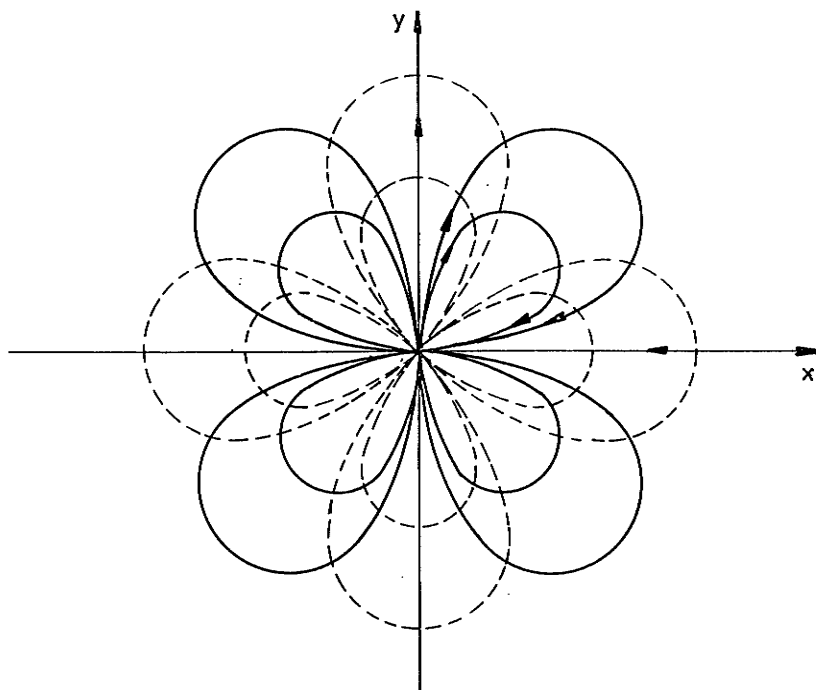


áramvonalak

$$F(z) = az + b$$

4. ábra

- b) Az ekvipotenciális vonalak: $r^2 \cos 2\varphi = c$,
 az erővonalak : $r^2 \sin 2\varphi = c$,
 a térerősségvektor : $\underline{v} \approx 2\bar{z}$
- c) Az ekvipotenciális vonalak: $r^2 = c \cos 2\varphi$,
 az erővonalak : $r^2 = c \sin 2\varphi$
 a térerősségvektor : $\underline{v} \approx \frac{-2j}{z^3}$
 (l. 5. ábra)



$F(z) = \frac{1}{z^2}$ ekvipotenciális- és áramvonalai
5. ábra

d) Az ekvipotenciális vonalak:

$$cr^4 - 2r^2 \cos 2\varphi - 1 = 0; \quad c > -1$$

($c=0$ esetén ez az $y^2 - x^2 = \frac{1}{2}$ hiperbola);

Az erővonalak:

$$r = \sqrt{c \sin 2\varphi + \cos 2\varphi}$$

($c = 0$ esetén ez a Bernoulli-féle lemniszkáta)

A vektortér:

$$\underline{v} \cong - \frac{2}{z(z^2 + 1)}$$

e) Az ekvipotenciális vonalak a

$$|z^2 - a^2| = c$$

lemniskáták.

Az erővonalak az

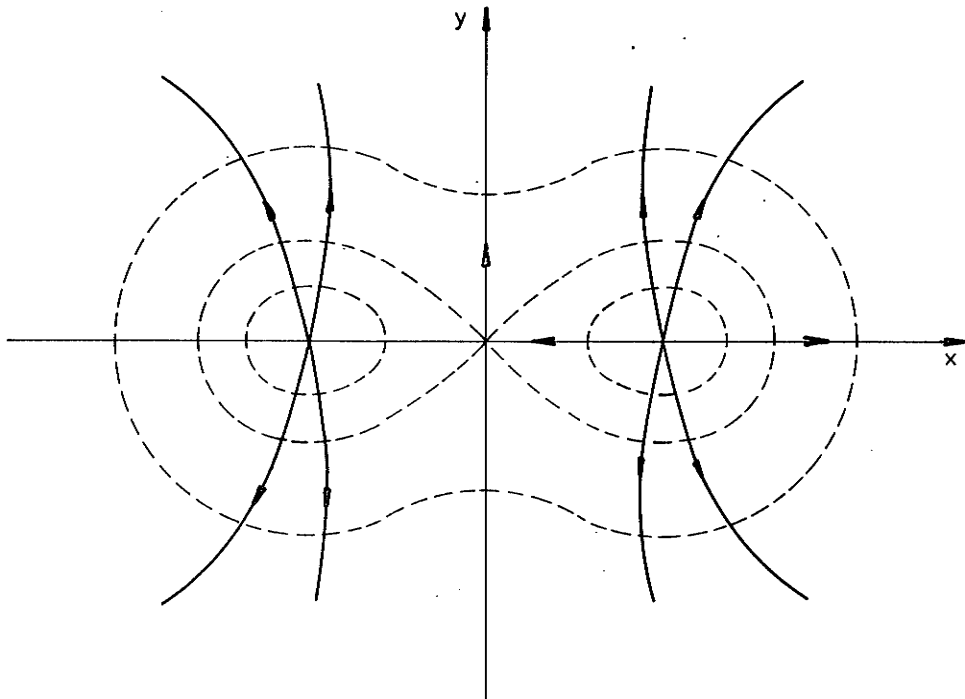
$$x^2 - \frac{2}{c} xy - y^2 = a^2$$

hiperbolák (középpontjuk az origó, átmennek a $\pm a$ ponton),

$\vec{A}$ térerősségvektor:

$$\vec{v} \approx \frac{2\vec{z}}{z^2 - a^2}$$

(1. 6. ábra)



$F(z) = \ln(z^2 - a^2)$ ekvipotenciális- és áramvonalai

6. ábra

f) Az ekvipotenciális vonalak:

$$r^4 + c a^2 r^2 \cos 2\varphi + a^4 = 0; \quad |c| > 2$$

(beleértve az $y = \pm x$ egyeneseket).

Az erővonalak

$$r^4 + c a^2 r^2 \sin 2\varphi - a^4 = 0$$

(beleértve a koordináta-tengelyek).

A sebességvektor

$$\underline{v} = \frac{4a \bar{z}^2}{\bar{z}^4 - a^4}$$

91. Mivel az a), b), c)-beli függvények esetében $\Delta u = 0$, ezért mindegyik $u(x,y)$ függvény lehet reguláris komplex függvény valós része. Felhasználva, hogy a

$$\text{grad } u = \underline{v}$$

divergencia- és rotáció-mentes vektor-tér, ezért annak létezik $f(z)$ komplex potenciál-függvénye, amely reguláris függvény és amelyre

$$\overline{f'(z)} \cong \underline{v} = \text{grad } u$$

Ebből az $u(x,y)$ valós részű komplex függvény differenciálhányadosa, $f'(z)$ meghatározható. Éspedig:

$$a) f'(j) = -2 - \frac{2}{c}$$

$$b) f'(j) = \cos 1 + 2j \cos 1$$

$$c) f'(j) = 1 - j$$

$$92. a) \Delta u = 0, \text{ ha } c = -1$$

$$\overline{f'(z)} \cong \underline{v} = \text{grad } u \text{ felhasználásával}$$

$$F'(1+j) = (2-2e^{-2} \sin 1) - j(2 + 2e^{-2} \cos 1)$$

$$b) \Delta u = 0, \text{ ha } c = -3$$

$$F'(j) = 3 (\text{ch } 3 - 1)$$

$$93. a) \text{ Az}$$

$$u(x,y) = 2xy + 2x - 3y + c$$

függvény harmonikus $\Rightarrow$ felfogható egy divergencia- és rotáció-mentes síkvektortér skalár potenciálfüggvényeként. Az ekvipotenciális vonalak merőlegesek a $v(x,y)$ harmonikus társfüggvény $v(x,y) = k$ vonalaira.

Mivel

$$v(x, y) = y^2 - x^2 + 2y + 3x + c,$$

ezért az

$$y^2 - x^2 + 2y + 3x = k$$

görbesereg $(1 + j)$ ponton átmenő egyede:

$$y^2 - x^2 + 2y + 3x = 5.$$

$$b) x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 = k$$

$$x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 = 4$$

$$c) 2e^{-x} \sin y + x^2 - y^2 = k$$

$$2e^{-x} \sin y + x^2 - y^2 = 2e^{-1} \sin 1$$

$$d) e^{-x}(y \sin y + x \cos y) = k$$

$$e^{-x}(y \sin y + x \cos y) = e^{-1}(\sin 1 + \cos 1)$$

94. Az erőter potenciál függvénye:

$$\Phi = \frac{x^2 + y^2}{2x} \quad (x > 0)$$

A térerősségvektora:

$$v = \text{grad } \Phi = \frac{x^2 - y^2}{2x^2} \underline{i} + \frac{y}{x} \underline{j} \quad (x > 0)$$

így

$$|\underline{v}(2a, 0)| : |\underline{v}(a, a)| = 1 : 2$$

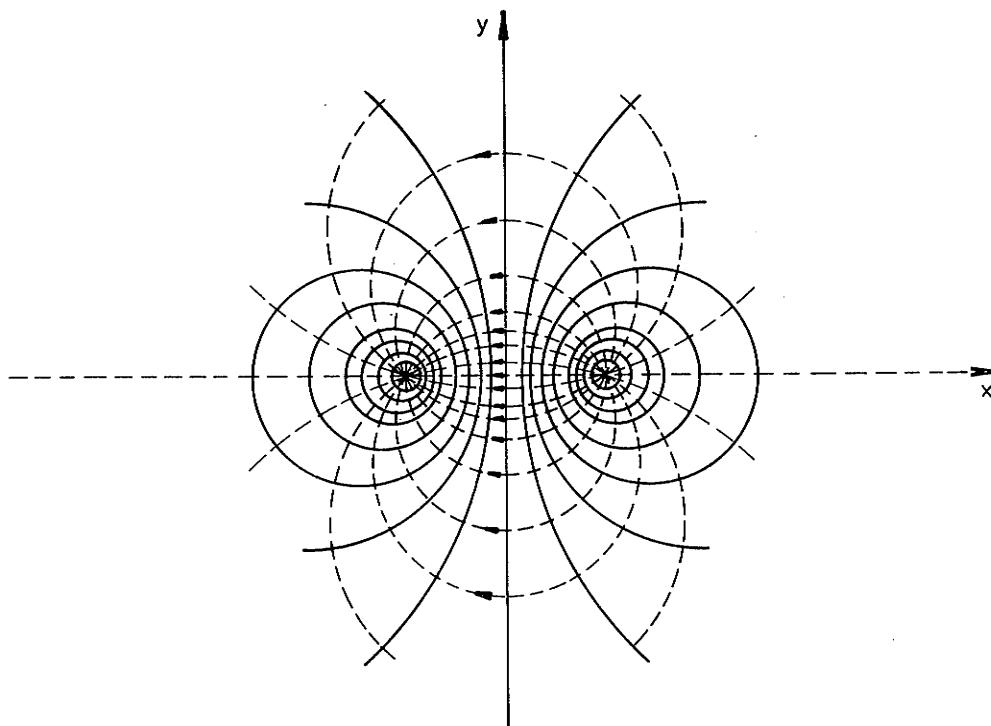
95. Ekvipotenciális vonalak azok a görbék, amelyeken

$$\text{Im } F(z) = 2q \ln \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| = \text{const},$$

azaz:

$$\left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| = \text{const}$$

Ezek az Apollonius-féle körök, melyekre nézve a z_1 és z_2 pontok egymás inverzei. (1.7. ábra).



$$F(z) = 2q \ln \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad \text{ekvipotenciális- és áramvonalai}$$

7. ábra

Erővonalak, azok a görbék amelyeken

$$\operatorname{Re} F(z) = 2q \operatorname{arc} \frac{z - z_2}{z - z_1} = \text{const}$$

Ezek a z_1 és z_2 pontokon áthaladó körök (1. 7. ábra).

[96]. Ekvipotenciális vonalak a

$$|z - z_1| \cdot |z - z_2| = c \text{ konstans}$$

lemniskáták (olyan pontok geometriai helye, amelyek z_1 -től és z_2 -től való távolságának szorzata állandó).

a) $c = 0$ esetében:

a lemniszkáta pontpárrá fajul:

b) $0 < c < \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}$ esetében

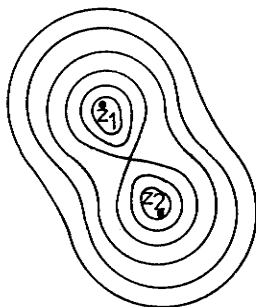
két ovális görbére esik szét;

c) $c = \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}$ esetében

az ismert Bernoulli-féle lemniszkáta

d) $c > \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}$ esetében.

egyetlen görbéből áll. (1. 8. ábra)



$$F(z) = 2q \ln \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} \quad \text{ekvipotenciális vonalai}$$

8. ábra

97. a) A sebességvektor:

$$\underline{v} = v_0 \cos \alpha \underline{i} + v_0 \sin \alpha \underline{j}.$$

Mivel az $F(z)$ komplex potenciál differenciálhányadosának konjugáltja "ekvivalens" a térerősségvektorral (jelen esetben sebességvektorral), ezért:

$$\overline{F'(z)} = v_0 \cos \alpha + j v_0 \sin \alpha = v_0 e^{j\alpha},$$

amiből

$$F'(z) = v_0 e^{-j\alpha}.$$

Ebből integrálással:

$$F(z) = v_0 e^{-j\alpha} z$$

(az integrációs állandót 0-nak választva).

b) A Φ potenciálfüggvény és a Ψ áramfüggvény a komplex potenciál valós és képzetes része. Így

$$F(z) = \Phi + j\Psi = v_0 e^{-j\alpha} z = v_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + j v_0 (y \cos \alpha - x \sin \alpha),$$

amiből

$$\Phi = v_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha); \Psi = v_0 (y \cos \alpha - x \sin \alpha).$$

c) Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$\Phi = v_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) = c;$$

az erővonalak egyenlete:

$$\Psi = v_0 (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = k.$$

98. a) Legyen $z = r e^{j\varphi}$, akkor

$$\begin{aligned} F(z) &= \varphi(x, y) + j\Psi(x, y) = v_0 \left(r e^{j\varphi} + \frac{a^2}{r} e^{-j\varphi} \right) = \\ &= v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi + j v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \varphi, \end{aligned}$$

amiből:

$$\varphi(x, y) = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi,$$

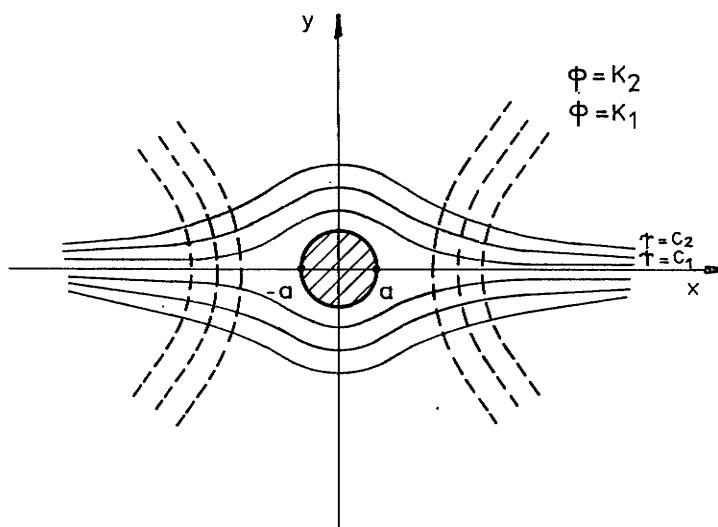
$$\Psi(x, y) = v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \varphi.$$

Így az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi = c;$$

az erővonalak egyenlete:

$$v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \varphi = k.$$



$$F(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad \text{ekvipotenciális- és áramvonalai}$$

9. ábra

b) l. 9. ábra

c) A sebességvektor:

$$\underline{v} \simeq \overline{F'(z)} = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\varphi \right) - j \frac{v_0 a^2}{r^2} \sin 2\varphi$$

d) Az áramlás "stagnáló pontjai" (azok a pontok ahol a sebesség 0) a $z = a$ és $z = -a$ pontok. Ugyanis:

$$F'(z) = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = 0$$

ha $z = a$ és $z = -a$

REGURÁLIS KOMPLEX FÜGGVÉNYEK LEKÉPEZÉSE

1.§ KÖLCSÖNÖSEN EGYÉRTELMŰ ÉS KONFORM
LEKÉPEZÉSEKEGYSZERŰ TRANSZFORMÁCIÓK

[2.] A leképezés kölcsönösen egyértelmű, ha tetszőleges $z_1 \neq z_2 \in T$ -re $f(z_1) \neq f(z_2)$

Mivel

$$f(z_1) = \frac{z_1^2 + 1}{2z_1} \quad \text{és} \quad f(z_2) = \frac{z_2^2 + 1}{2z_2},$$

ezért $f(z_1) = f(z_2)$, ha

$$z_1 z_2 (z_2 - z_1) = (z_2 - z_1),$$

ami akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$z_2 = z_1, \quad \text{vagy} \quad z_1 \cdot z_2 = 1.$$

és ez utóbbi lehetetlen, ha $z_1, z_2 \in T$.

[3.] A függvény $u \neq j$ esetén egyrétű az egész z síkon és értéke sehol sem 0. Így

$$T = \{z \mid z \neq j\} \iff T^* = \{w \mid w \neq 0\}$$

Az inverz leképezés:

$$z = \frac{4 + j w}{w}$$

[4.] a) A képtartomány: $u > 2 - \frac{v^2}{4}$

Ugyanis:

$$w = u + j v = 1 + z^2 = 1 + x^2 - y^2 + 2j xy$$

és így

$$\left. \begin{aligned} u &= 1 + x^2 - y^2 \\ v &= 2 xy \end{aligned} \right\}$$

Ebből látható, hogy a leképezendő félsík határának a $\operatorname{Re} z = x = -1$ egyenesnek a képe az

$$u = 2 - \frac{v^2}{4}$$

parabola; a $\operatorname{Re} z < -1$ félsík képe a

$$u > 2 - \frac{v^2}{4}$$

tartomány (ami a w sík, amelyből le vannak hagyva a parabola pontjai és a parabola belsejében levő pontok). Tehát

$$T : \{z \mid \operatorname{Re} z < -1\} \Rightarrow T^* : \{w \mid \operatorname{Re} w > 2 - \frac{(\operatorname{Im} w)^2}{4}\}$$

b) $T \Rightarrow T^*$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, mert T nem tartalmaz olyan $z_1 \neq z_2$ pontokat, amelyekre $f(z_1) = f(z_2)$. Ugyanis:

$$1 + z_1^2 = 1 + z_2^2 \quad \text{akkor és csak akkor}$$

ha $z_1 = z_2$, vagy $z_1 = -z_2$. Ilyen pontokat a $T: \operatorname{Re} z < -1$ tartomány nem tartalmaz.

$$c) z = - (w - 1)^{\frac{1}{2}}$$

5. [a] Konform a $z = -\frac{1}{2}$ pont kivételével mindenütt. Ugyanis: a függvény a teljes nyílt síkon differenciálható és

$$f'(z) = 1 + 2z \neq 0$$

ha $z \neq -\frac{1}{2}$, ezért f leképezése a $z = -\frac{1}{2}$ pont kivételével a sík minden pontjában lokálisan konform.

[b] A leképezés konform, ahol $w' = \frac{1}{(z + 1)^2} \neq 0$, azaz az értelmezési tartományon mindenütt.

c) $z = 2k\pi j$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontok kivételével mindenütt.

d) A $z = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontok kivételével mindenütt.

6. Az adott pontokban mindhárom függvény által létesített leképezés lokálisan konform, mert ott differenciálhányadosuk

$$w'_1 = 2z; \quad w'_2 = 3z^2; \quad w'_3 = \frac{4}{3}z^{1/3}$$

zérustól különböző értékű.

A $w_1 = z^2$ függvény esetében:

a) $\alpha = \arg f'(1) = 0; \quad \lambda = |f'(1)| = 2$

b) $\alpha = \arg f'(-\frac{1}{4}) = \pi; \quad \lambda = |f'(-\frac{1}{4})| = \frac{1}{2}$

c) $\alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \lambda = 2\sqrt{2}$

d) $\alpha = \pi - \arctg \frac{4}{3}; \quad \lambda = 10$

A $w_2 = z^3$ függvény esetében:

a) $\alpha = 0; \quad \lambda = 3$

b) $\alpha = 0; \quad \lambda = \frac{3}{16}$

c) $\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \lambda = 6$

d) $\alpha = -2 \arctg \frac{4}{3}; \quad \lambda = 75$

A $w_3 = \sqrt[3]{z^4}; \quad -\frac{\pi}{3} \leq \arg w_3 < \frac{\pi}{3}$ függvény esetében

a) $\alpha = 0; \quad \lambda = \frac{4}{3}$

b) $\alpha = -\frac{\pi}{3}; \quad \lambda = \frac{3\sqrt{4^2}}{3}$

c) $\alpha = \frac{\pi}{12}; \quad \lambda = \frac{4}{3} \sqrt[6]{2}$

d) $\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arctg \frac{4}{3}; \quad \lambda = \frac{4}{3} \sqrt[3]{5}$

7. $|z| = \text{konstans}$ körök

$\arg z = \text{konstans}$ félsugarak

8. a) összezsugorodik $|z| < \frac{1}{2}$

megnyúlik: $|z| > \frac{1}{2}$

b) összezsugorodik $|z + 1| < \frac{1}{2}$

megnyúlik: $|z + 1| > \frac{1}{2}$

c) összezsugorodik $|z| > 1$

megnyúlik: $|z| < 1$

d) összezsugorodik $\operatorname{Re} z < 0$

megnyúlik: $\operatorname{Re} z > 0$

9. Az adott tartományok határvonalai képeinek segítségével meghatározott képtartományok:

a) $u > 2 - \frac{v^2}{4}$

b) $u > 4 - \frac{v^2}{16}$

c) $v > 0$ felső félsík

d) $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ sáv

10. a) $w = z^2$ leképezésnél:

$x + y = 1 \Rightarrow u^2 + 2v = 1$ parabola

b) $w = \frac{1}{z}$ leképezésnél:

$z = \frac{1}{w} = \frac{u}{u^2 + v^2} - j \frac{v}{u^2 + v^2}$, így

$x + y = 1 \Rightarrow (u - \frac{1}{2})^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ kör

[11]. A képgörbe: $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$; $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$
 lemniszkáta-ág. Ugyanis:

1. módszer

A leképező függvény egyenletét négyzetreemelve:

$$(u + jv)^2 = x + jy,$$

$$u^2 + 2uvj - v^2 = x + jy$$

amiből

$$\left. \begin{aligned} x &= u^2 - v^2 \\ y &= 2uv \end{aligned} \right\}$$

Az adott kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

w síkbeli képének egyenlete:

$$\left(u^2 - v^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 4u^2v^2 = 1,$$

illetve polárkoordinátákra áttérve:

$$\left(r^2 \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 + (r^2 \sin 2\varphi)^2 = \frac{1}{4},$$

illetve:

$$r^4 - r^2 \cos 2\varphi = 0$$

ami $r \neq 0$ esetén az

$$r = \sqrt{\cos 2\varphi}; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

lemniskáta jobb fele.

2. módszer

A $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ kör pontjaira:

$$z = \cos \varphi e^{j\varphi}; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Mivel $w = \sqrt{z}$ a leképező függvény, ezért a kép görbe:

$$w = \sqrt{\cos \varphi} e^{j \frac{\varphi}{2}}; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

lemnizskata ág.

$$12. \text{ a) } y = c \Rightarrow v^2 = 4c^2(u + c^2),$$

amelyek $u = 0, v = 0$ fókuszú parabolák;

$$\text{b) } y = 0 \Rightarrow v = 0; \quad u \geq 0 \text{ félegyenes}$$

$$13. \text{ a) } w = 1 + z^2 \text{ leképezésénél}$$

$$y = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ v = x \end{cases} \quad -\infty < x < \infty$$

$$|z - j| = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + 1 \\ v = \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \end{cases} \quad 0 < \varphi < \pi$$

$$\text{b) } w = z^3 \text{ leképezésénél}$$

$$y = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = x^3 - 3x \\ v = 3x^2 - 1 \end{cases} \quad -\infty < x < \infty$$

$$|z - j| = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \\ v = \sin^3 \varphi \sin^3 \varphi \end{cases} \quad 0 < \varphi < \pi$$

[14]. A kép görbe:

$$\frac{u^2}{(R + \frac{a^2}{R})^2} + \frac{v^2}{(R - \frac{a^2}{R})^2} = 1 \quad \text{ellipszissereg, ha } R \neq a$$

$$-2a \leq u \leq 2a; \quad v = 0 \quad \text{egyenesszakasz, ha } R = a$$

Ugyanis:

a z sík $|z| = R$ körei megadhatók $z = Re^{j\varphi}; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$ alakban. Ezek képei:

$$w = Re^{j\varphi} + \frac{a^2}{Re^{j\varphi}} = Re^{j\varphi} + \frac{a^2}{R} e^{-j\varphi}$$

egyenletű görbék.

Azaz, a képgörbék paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} u &= R \cos \varphi + \frac{a^2}{R} \cos \varphi = \left(R + \frac{a^2}{R}\right) \cos \varphi \\ v &= R \sin \varphi - \frac{a^2}{R} \sin \varphi = \left(R - \frac{a^2}{R}\right) \sin \varphi \end{aligned} \right\} 0 \leq \varphi < 2\pi$$

ami $R \neq a$ esetén ellipszis-sereg paraméteres egyenletrendszere; $R = a$ esetén

$$\left. \begin{aligned} u &= 2a \cos \varphi \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ illetve: } \left\{ \begin{aligned} -2a &< u < 2a \\ v &= 0 \end{aligned} \right.$$

egyenesszakasz paraméteres egyenletrendszere.

15.

$$|z| = 1 \mapsto v = 0; \quad -\infty < u < -\frac{1}{4}$$

16. 1.a) A $w = 3z - 2j\bar{z}$ leképezéssel

$$y = 2x \mapsto v = -4u$$

$$y = 6-x \mapsto v = 6-u$$

b) A képgörbék szöge nem egyezik meg az eredeti görbék szögével, mert a leképezés nem konform (a függvény nem reguláris).

2.a) A $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2jxy$ leképezéssel

$$y = 2x \mapsto v = -\frac{4}{3}u; \quad u < 0, v > 0 \text{ része}$$

$$y = 6-x \mapsto v = 18 - \frac{1}{72}u^2$$

b) A képgörbék metszéspontjának koordinátái:

$$u = -12; \quad v = 16$$

(mivel $u < 0$, a másik gyök nem számít) Ebben a pontban a görbék érintőinek meredeksége:

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = -4/3; \quad \operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{1}{3}$$

így az érintők által bezárt szög tangense

$$\operatorname{tg} (\alpha_1' - \alpha_2') = \frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = 3,$$

ami megegyezik az "ősképek" által bezárt szög tangensével:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{-1 - 2}{1 - 2} = 3$$

Ezt indokolja, hogy a $P_0(2,4)$ pontban $w = [2z]_{z=2+4j} \neq 0$, így ott a leképezés konform.

$$3.a) \quad A \quad w = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}$$

leképezéssel:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ \operatorname{tg} \alpha = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = -2u \\ \operatorname{tg} \alpha' = -2 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ \operatorname{tg} \beta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (u - \frac{1}{12})^2 + (v + \frac{1}{12})^2 = \frac{2}{12^2} \\ \operatorname{tg} \beta' = \frac{1}{7} \end{array} \right.$$

b) A képgörbék metszéspontjai az

$$u = v = 0$$

és az

$$u = \frac{1}{10}, \quad v = -\frac{1}{5}$$

koordinátájú pontok. Az első az ősképek ∞ -beli metszéspontjának, a második a végesben levő $P(2,4)$ metszéspontjának a képe. Ebben a pontban az érintők által bezárt szög tangense: 3, ami megegyezik az ősképek által bezárt szög tangensével. Ezt az indokolja, hogy az egyenesek metszéspontjában, a $z = 2+4j$ pontban a leképezés konform ($f'(2+4j) \neq 0$).

17. a) A $w = 2z + 5-3j$ függvény az adott négyzetet a w sík

$$7 - 3j; \quad 9 - 3j; \quad 7 - j; \quad 9 - j$$

csúcspontú négyzetébe képezi le, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.

b) A $w = z^2$ függvény az adott négyzet a w sík

$$v = 2\sqrt{1-u}$$

$$v = 4\sqrt{4-u}$$

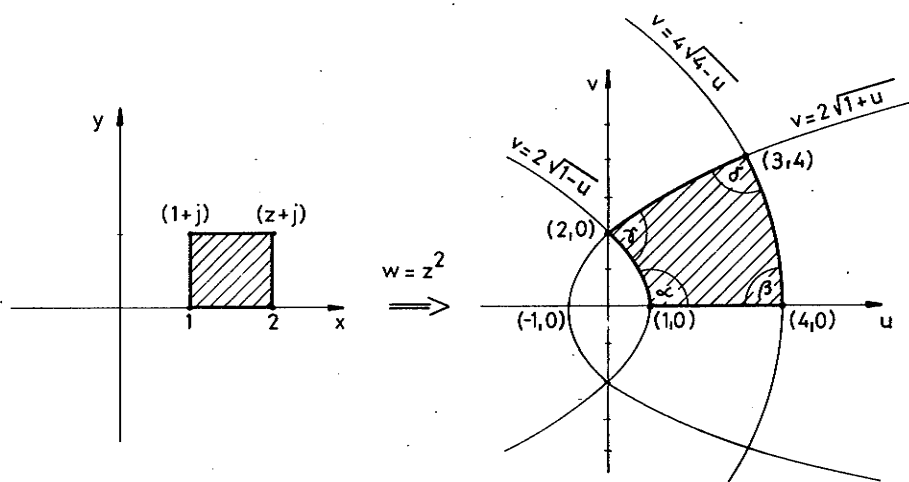
$$v = 0$$

$$v = 2\sqrt{1+u}$$

egyenletű görbékkel határolt tartományára képezi le, ahol a szomszédos határgörbék merőlegesek egymásra mert szögeikre

$$\operatorname{tg} \alpha = \infty; \quad \operatorname{tg} \beta = \infty; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2}} = \infty; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{-1 - 1}{1 - 1} = \infty$$

(lásd 10. ábra)



10. ábra

18. a) A $w = (2-j)z$ leképezésnél a képtartomány a w sík

$$1 + 2j; \quad 1 - 3j; \quad 3 + j$$

csúcspontú háromszöge.

b) A $w = z^2$ leképezésnél a képtartomány a w sík

$$v = 2\sqrt{1-u}; \quad -2 \leq v \leq 2$$

$$v = 2\sqrt{1+u}; \quad 0 \leq v \leq 2$$

$$16u^2 + 9v^2 - 24uv + 12u + 16v - 4 = 0; \quad -2 \leq v \leq 0$$

görbái által határolt tartomány.

19. a) ha $w = 1 + jz$

$$y \geq 1 + x \implies v \leq -u \text{ félsík};$$

b) ha $w = z^2$

$$y \geq 1 + x \implies v \leq \frac{u^2 - 1}{2} \text{ parabola alatti tartomány};$$

c) ha $w = \sqrt{z}$

$$y \geq 1 + x \implies v^2 - u^2 + 2uv \geq 1 \text{ tartomány.}$$

20. A függvény az adott fél-lemniszkáta belsejét a

$$|w - 1| < 1;$$

körbelsőre képezi le.

21. a) körgyűrű-cikkba

b) körszektorba.

$$[22]. \text{ a) } z = e^{jt}; \quad 0 \leq t < 2 \implies u > \frac{1}{4}; \quad v = 0$$

Ugyanis az adott leképezéssel az egységkör képe:

$$w(t) = \frac{e^{jt}}{(1 + e^{jt})^2} = \frac{1}{\left(e^{jt/2} + e^{-jt/2}\right)^2} = \frac{1}{4\cos^2 \frac{t}{2}},$$

ami mindig valós érték, és pedig

$$\frac{1}{4} \leq w(t) < \infty$$

Tehát a képgörbe az

$$u > \frac{1}{4}; \quad v = 0$$

félegyenes.

b) A leképezés $|z| < 1$ -ben konform.

Ugyanis a leképezés minenütt folytonos kivéve a $z = -1$ pontot, ahol $w = \infty$. Mivel a $z = -1$ pontban a kör érintőinek hajlásszöge π és a w síkbeli képgörbe ($z = -1$ -nek megfelelő) $w = \infty$ -beli "érintőinek" hajlásszöge 2π , ezért a kerületek megfeleltetésének elve alapján a $|z| < 1$ -ben egyrétű $w = \frac{z}{(1+z)^2}$ függvény konform módon képezi le a $|z| < 1$ körbelsőt az $u > \frac{1}{4}$; $v = 0$ félegyenes mentén bemetszett w síkra.

[23]. Az adott függvény a $|z| = c$ kör felső felének külsejét és alsó felének belsejét képezi le konform módon az $\text{Im } w > 0$ félsíkra.

Ugyanis a függvényt átalakítva:

$$w = \frac{[(z-c)(\bar{z}+c)]^2}{|z+c|^4} = \frac{[z\bar{z}-c^2+c(z-\bar{z})]^2}{|z+c|^4} = \frac{[|z|^2-c^2+2j\cdot cy]^2}{|z+c|^4}$$

Ennek képzetes része ;

$$v = \frac{4c(|z|^2 - c^2)y}{|z+c|^4} > 0$$

ha: $|z|^2 > c^2$ és $y > 0$,

vagy ha: $|z|^2 < c^2$ és $y < 0$

Ez azt jelenti, hogy az adott függvény a $|z| = c$ kör felső felének külsejét és alsó felének belsejét képezi le az $\text{Im } w > 0$ félsíkra és ezen a tartományon a leképezés konform, mert itt

$$w' = \frac{4c(z-c)}{(z+c)^3} \neq 0$$

24. a) A $w = f(z)$ leképezésnél egy $z(t)$; $t_1 < t < t_2$ egyenletű L sima görbe $f(z(t))$; $t_1 < t < t_2$ egyenletű L^* képgörbéjének ívhossza:

$$s(L^*) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{t}{dt} f(z(t)) \right] dt$$

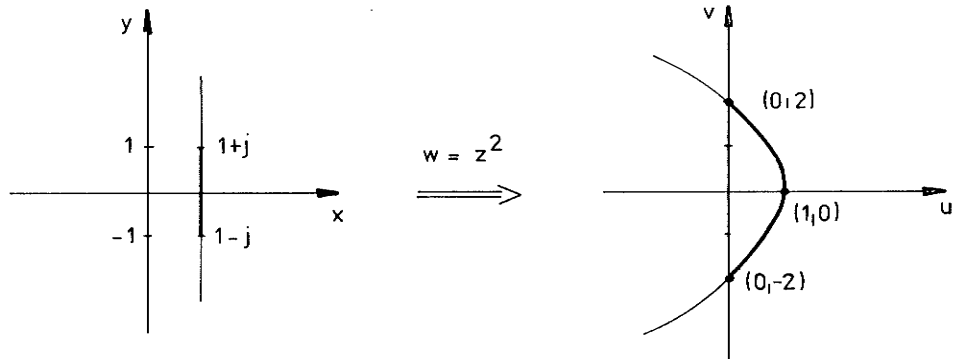
b) A T tartomány T^* képtartományának területe

$$t(T^*) = \iint_T |f'(z)|^2 dx dy$$

25. Legyen $w = u + jv$. A képgörbe: a

$$v^2 = 4(1-u)$$

parabolának a $P_1(0, -2)$ és $P_2(0, 2)$ pontok közötti szakasza. (lásd 11. ábra) Ennek hossza: $(\sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1)2$.



11. ábra

26. A képgörbe: lemniszkáta, melynek polárkoordinátákkal kifejezett egyenlete:

$$\rho = \sqrt{2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Ennek hossza:

$$s = 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

amely elliptikus integrál. így az ívhossz nem adható meg zárt alakban.

$$27. T^* = 7,5\pi$$

[28]. A $w = z^2 = x^2 - y^2 + j 2xy$ leképezésnél a képtartomány a

$$0 \leq \varphi \leq 2(1 + \cos \varphi)$$

$$0 \leq \varphi = 2 \varphi \leq \pi$$

kardioid-szektor.

Mivel az adott tartományon a leképezés kölcsönösen egyértelmű és konform, ezért a képtartomány területe:

$$\begin{aligned} \text{ter}(T^*) &= \iint_T |f'(z)|^2 dT = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left[\int_{r=0}^{2\cos\varphi} 4r^2 r dr \right] d\varphi = \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} [r^4]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 16 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = 3\pi \end{aligned}$$

A képtartomány kerülete:

$$\text{ker}(K^*) = \int_L |f'(s)| ds = \int_L 2|z| ds = \int_L 2r \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$$

Mivel $r = 2 \cos \varphi$; $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, ezért

$$\text{ker}(K^*) = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sqrt{4(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \cdot 4 \cos \varphi d\varphi = 8 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 8$$

[29]. Felhasználva, hogy a leképező függvény valós és képzetes része:

$$u = x^2 - y^2,$$

$$v = 2xy$$

a tartomány határegyeneseinek képe:

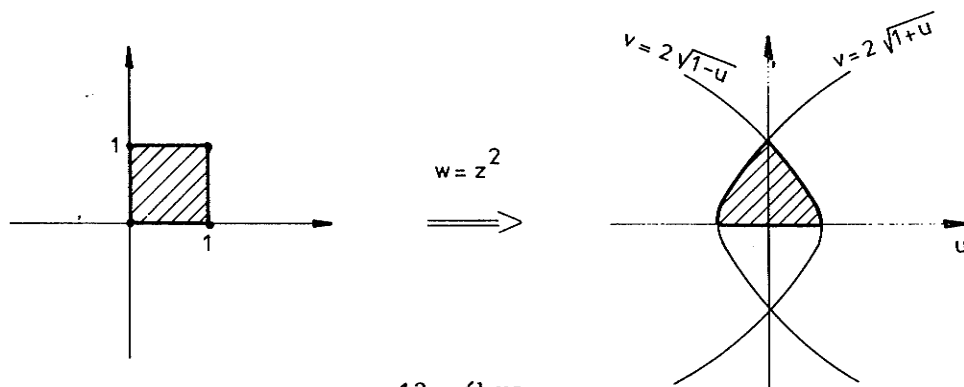
$$x = 0; \quad 0 < y < 1 \implies v = 0; \quad -1 < u < 1 \text{ egyenesszakasz}$$

$$x = 1; \quad 0 < y < 1 \implies v = 2\sqrt{1-u} \quad \text{parabola } P_1(1,0) \text{ és } P_2(0,2) \text{ pontok közti szakasza}$$

$$y = 0; \quad 0 < x < 1 \implies v = 0; \quad 0 < u < 1 \text{ egyenesszakasz}$$

$$y = 1; \quad 0 < x < 1 \implies \begin{cases} v = 2\sqrt{1+u} \text{ parabola } P_1(-1,0) \text{ és} \\ P_2(0,2) \text{ pontok közti szakasza} \end{cases}$$

(lásd 12. ábra)



12. ábra

A képtartomány területe: $\frac{8}{3}$;
 " kerülete: $2[(1+4\sqrt{2}) + \ln(1+\sqrt{2})]$

Ugyanis:

A leképezés az adott tartományon kölcsönösen egyértelmű és konform. így a T^* képtartomány területe:

$$\begin{aligned} \text{ter}(T^*) &= \iint_{T(x,y)} |f'(z)|^2 dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 4|z|^2 dx dy = \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \frac{8}{3} ; \end{aligned}$$

A leképezett tartomány kerülete:

$$\begin{aligned} \text{ker}(K^*) &= 4 \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} f(z(t)) \right| dt = \\ &= 2 \ln[(1 + \sqrt{2}) \cdot e^{1+4\sqrt{2}}] \end{aligned}$$

30. a) Képtartomány: körgyűrűcikk

$$\text{ter}(T^*) = \frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$$

$$\text{ker}(K^*) = 2(e-1) + \frac{\pi}{2} (e+1)$$

b) Képtartomány: körgyűrű

$$\text{ter } (T^{\times}) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{ker } (K^{\times}) = 3\pi$$

2.§ LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

2.1 LINEÁRIS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉSÜK

a) Görbék és tartományok leképezése lineáris egész függvénnyel

31. a) A leképezés fix pontja a

$$z = 2z + 1 - 3j$$

összefüggésből adódó:

$$z_0 = -1 + 3j$$

pont;

az elfordulási szög:

$$\alpha = \arg 2 = 0 ,$$

A nyújtási együttható:

$$k = 2$$

b) $z_0 = 2 + 2j$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} ,$$

$$k = 1 .$$

c) Nincs fix pontja a végesben;

d) $z_0 = -2 ;$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} ,$$

$$k = \sqrt{2} .$$

- e) Ha $a = 1$ nincs a végesben fix pontja;
 ha $a \neq 1$, akkor a végesbeli fix pontja:

$$z_0 = \frac{w_1 - a z_1}{1 - a}$$

$$\alpha = \arg a,$$

$$k = |a|.$$

32. a) 3-szorosra nyújt, $(1 + j)$ -vel párhuzamosan eltol.

$$1. y = x + 2 \quad \Rightarrow v = u + 6$$

$$2. x^2 + y^2 = 2^2 \quad \Rightarrow (u-1)^2 + (v-1)^2 = 6^2$$

$$3. (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow (u-4)^2 + (v-1)^2 = 3^2$$

b) $\frac{\pi}{2}$ szöggel pozitív irányban elforgat, $(-3+2j)$ -vel párhuzamosan eltol

$$1. y = x + 2 \quad \Rightarrow v = -1 - u$$

$$2. x^2 + y^2 = 2^2 \quad \Rightarrow (u-3)^2 + (v+2)^2 = 2^2$$

$$3. (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow (u-3)^2 + (v+1)^2 = 1$$

c) $\pi/2$ szöggel negatív irányban elforgat, 2-szeresére nyújt, 4-gyel jobbra eltol

$$1. y = x + 2 \quad \Rightarrow v = 8 - u$$

$$2. x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow (u-4)^2 + v^2 = 4^2$$

$$3. (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow (u-4)^2 + (v+2)^2 = 4$$

d) $\frac{\pi}{4}$ szöggel pozitív irányban elforgat, $\sqrt{2}$ -szeresére nyújt, 5 egységgel lefelé eltol

$$1. y = x + 2 \quad \Rightarrow u = -2$$

$$2. x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow u^2 + (v-5)^2 = 8$$

$$3. (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow (u-1)^2 + (v-6)^2 = 2$$

33. A képgörbék:

$$\begin{aligned} \text{a) } \gamma^*(t) &= 2j e^{jt} + 1 - j = 2j(\cos t + j \sin t) + 1 - j = \\ &= (1 - 2 \sin t) - j(1 - 2 \cos t) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \gamma^*(t) = (1 - 2t) + j \cdot 0$$

$$\text{c) } \gamma^*(t) = 1 + 2t \cdot j$$

$$\text{d) } \gamma^*(t) = (1 - 2t \sin 2) + j(2t \cos 2 - 1)$$

34. A képtartományok:

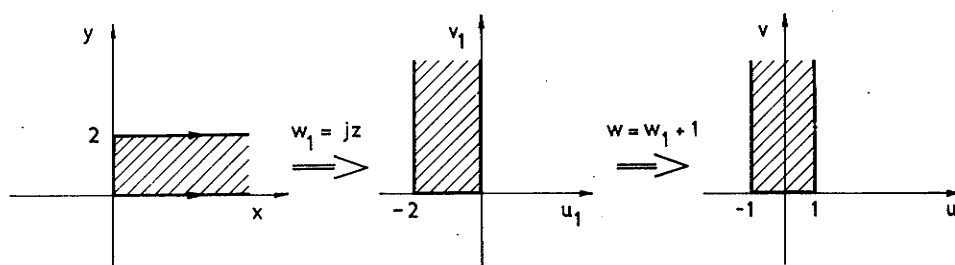
$$\text{a) } -1 < u < 1 ; \quad v > 0 \quad \text{függőleges félsáv}$$

$$\text{b) } u^2 + v^2 \leq 1 \quad \text{körtartomány}$$

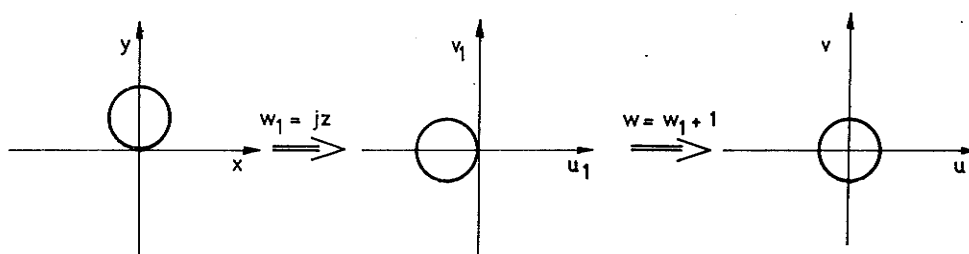
Ugyanis:

$$w = jz + 1 = e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad z + 1 = w_1 + 1$$

amiből látható, hogy ez a függvény $\frac{\pi}{2}$ szöggel pozitív irányban elforgat, 1 egységgel pozitív irányban eltol. (lásd 13. és 14. ábra)



13. ábra



14. ábra

[35]. Mivel a lineáris leképezés hasonlósági transzformáció, ezért a képtartomány téglalap, amely az adott téglalap

$$b = 1 + j$$

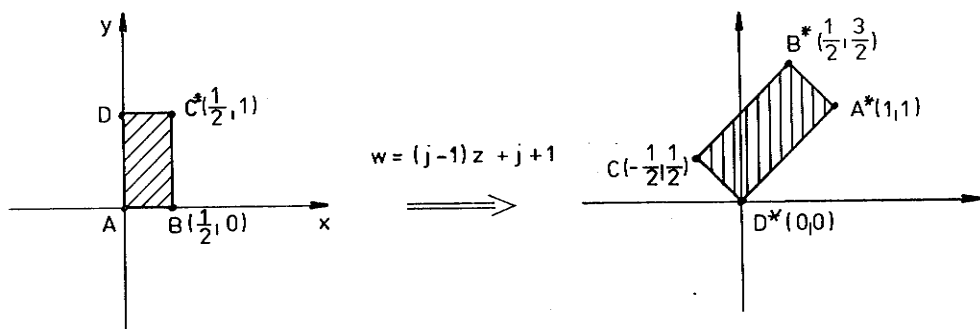
komplex számnak megfelelő síkvektorral való párhuzamos eltolásával;

$$\alpha = \arg(1-j) = \frac{3\pi}{4}$$

szöggel való pozitív irányú elforgatásával;

$$k = |1-j| = \sqrt{2}$$

nagyságú nyújtásával adódik. (lásd 15. ábra)



15. ábra

A csúcspontok

$$A^*(1,1) ; B^*\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) ; C^*\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), D^*(0,0)$$

[36]. a) $A_w = z + (1 - 2j)$ függvény a T téglalaptartományt olyan T^* téglalaptartományra képezi le, amely T -vel azonos méretű, annak az $(1 - 2j)$ komplex számnak megfelelő vektorral való párhuzamos eltolása.

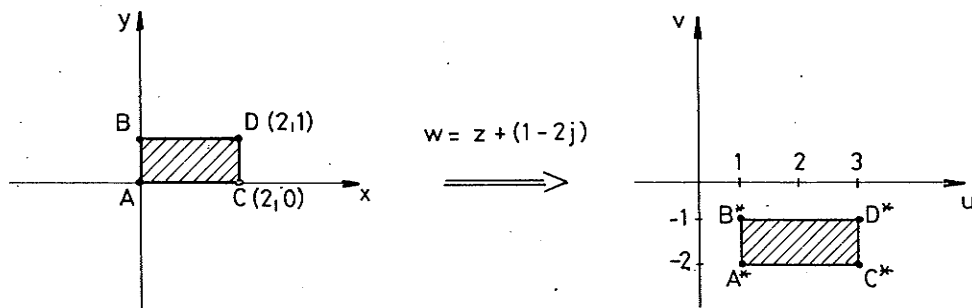
Ezért:

$$\begin{aligned} x = 0 & \implies u = 1 \\ y = 0 & \implies v = -2 \\ x = 2 & \implies u = 3 \\ y = 1 & \implies v = -1 \end{aligned}$$

úgy, hogy a T^* csúcspontjai:

$(1, -1); (1, -2); (3, -1); (3, -2)$

(lásd 16. ábra)



16. ábra

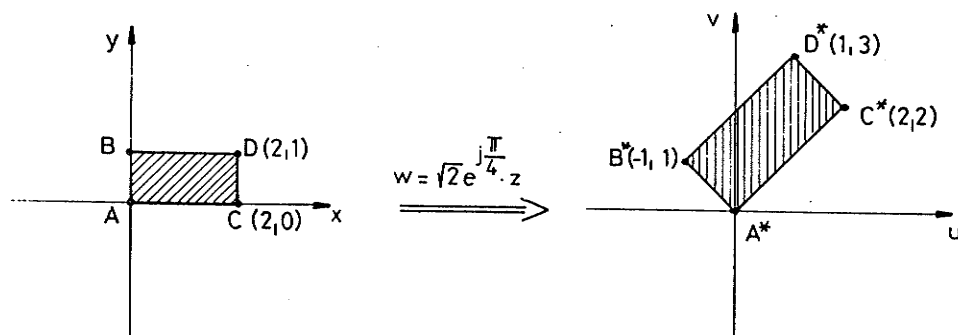
b) A $w = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot z$ függvény által létesített leképezéssel a T^* téglalaptartomány T-ből $\sqrt{2}$ -szeres nyújtással, $\frac{\pi}{4}$ szöggel való pozitív irányú elforgatással adódik. Ezért

$$\begin{aligned} x = 0 & \implies v = -u \\ x = 2 & \implies v = 4 - u \\ y = 0 & \implies v = u \\ y = 1 & \implies v = 2 + u \end{aligned}$$

úgy, hogy T csúcspontjai:

$(0,0); (-1,1); (2,2); (1,3)$

(lásd 17. ábra)

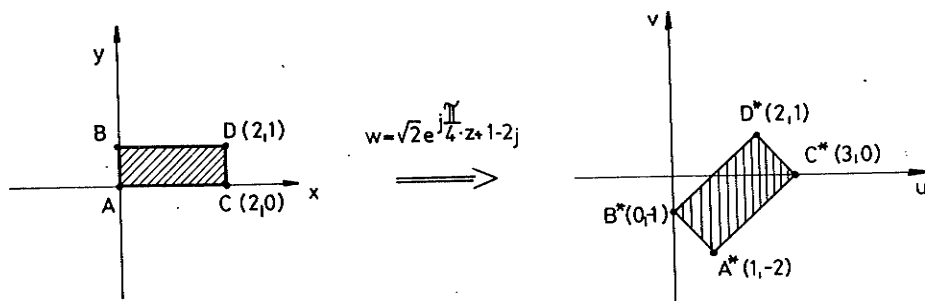


17. ábra

c) E függvény által létesített transzformáció az előzőből az $1-2j$ vektorral való párhuzamos eltolással adódik. így a w síkbeli T^* négyszög csúcspontjai:

$$(1, -2); \quad (0, -1); \quad (3, 0); \quad (2, 1)$$

(lásd a 18. ábra)



18. ábra

37. a) A $w = 3z + 4-2j$ függvény a z síkbeli háromszöget:

3-szorosára nagyítja;

$4-2j$ komplex számnak megfelelő vektorral párhuzamosan eltolja

így a w síkbeli háromszög csúcspontjai:

$$w_1 = 4 + j; \quad w_2 = 7 - 5j; \quad w_3 = 7 + j$$

b) A $w = jz + 2-j$ függvény a z síkbeli háromszöget

$\frac{\pi}{2}$ szöggel pozitív irányban elforgatja:

$(2-j)$ komplex számnak megfelelő vektorral párhuzamosan eltolja.

így a w síkbeli háromszög csúcspontjai:

$$w_1 = 1 - j; \quad w_2 = 3; \quad w_3 = 1$$

c) A $w = 5e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z - 2 + 4j$ függvény a z síkbeli háromszöget

5-szörösére nagyítja,

$\frac{\pi}{3}$ szöggel pozitív irányban elforgatja,

$(-2 + 4j)$ komplex számnak megfelelő vektorral párhuzamosan eltolja.

így a w síkbeli háromszög csúcspontjai:

$$w_1 = -\frac{5\sqrt{3} + 4}{2} + \frac{13}{2} j$$

$$w_2 = \frac{1 + 5\sqrt{3}}{2} + \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2} j$$

$$w_3 = \frac{1 - 5\sqrt{3}}{2} + \frac{13 + 5\sqrt{3}}{2} j$$

b) Adott leképezéseket megvalósító lineáris egész függvények meghatározása

$$38. w = (2 + j)z + 1 - 3j$$

Ugyanis; a $w = az + b$ lineáris egész függvény "a" és "b" együtthatóinak meghatározására az

$$\frac{b}{1-a} = 2 + j ;$$

$$-j = aj + b$$

egyenletek adódnak (az első egyenlet a fix pontból, a második a j és $-j$ pontok megfeleltetéséből adódik). Ezekből:

$$a = 2 + j$$

$$b = 1 - 3j$$

[39]. a) A z és w síkban adott háromszögek hasonlóak, így leképezhetők egymásra lineáris egész függvénnyel

b) Egy ilyen leképező függvény:

$$w = (1 - j)z - 1$$

c) A lineáris egész függvényt két pont és azok kép pontjai egyértelműen meghatározzák. így pl. a

$$z_1 = 1 \mapsto w_1 = -j$$

$$z_2 = j \mapsto w_2 = j$$

megfeleltetéssel a leképező függvény egyértelmű!

$$(40). w = (1 + j) (1 - z) ,$$

ami a

$$z = 0 \longleftrightarrow w = 1 + j$$

$$z = 1 \longleftrightarrow w = 0$$

megfeleltetés felhasználásával adódik.

$$41. a) w = e^{j(\frac{\pi}{4} - \arctg z)} \cdot z + j$$

$$b) w = e^{j\frac{3\pi}{4}} (z - 3)$$

$$c) w = 3z - 2$$

$$d) w = 3z + 1 - 2j$$

$$42. a) w = jz + j$$

$$b) w = e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot z - j$$

$$c) w = \frac{1}{3} z + 1 - j$$

$$d) w = 2(z + j) + (-1 + j) = 2z - 1 + 3j$$

$$43. w = \frac{z - c}{h}$$

$$44. w = Rze^{j\alpha} + w_0$$

$$45. a) w = az + b$$

$$b) w = -az + b$$

$$c) w = -j(az+b)$$

$$d) w = az + jb$$

a és b mindenütt valós szám és $a > 0$.

46. a) $w = z + j b$ vagy $w = -z + j + j b$
 b) $w = z + b$ vagy $w = -z - j + b$
 c) $w = z + b (1 + j)$ " $w = -z + 1 + b(1+j)$

b mindenütt valós szám.

47. a) $w = R e^{j\varphi} \cdot z + \beta$; $(0 \leq \varphi < 2\pi)$
 b) $w = \frac{1}{R} e^{j\varphi} (z - \alpha)$; (")
 c) $w = \frac{R_2}{R_1} e^{j\varphi} (z - \alpha) + \beta$; (")

Ugyanis: pl.az

$$a) |z| = 1 \Rightarrow |z - \beta| = R$$

megfeleltetés: R-szeres nyújtással;

tetszőleges φ -szöggel való elforgatással;

β -nak megfelelő vektorral való párhuzamos eltolással valósítható meg.

így a keresett függvény

$$w = R e^{j\varphi} \cdot z + \beta.$$

Hasonlóan látható be b) és c).

2.2 LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉSÜK

a) Görbék és tartományok leképezése lineáris törtfüggvénnyel

$$48. a) (u - \frac{3}{7})^2 + v^2 = \frac{2}{49}$$

$$(u - \frac{1}{7})^2 + (v + \frac{3}{14})^2 = \frac{13}{196}$$

$$49. a) (u - \frac{3}{4})^2 + v^2 = \frac{5}{16}$$

$$(u - \frac{1}{14})^2 + (v + \frac{3}{14})^2 = \frac{5}{98}$$

51. a) $y = 3x \implies v = -3u$ egyenes

b) $y + x = 2 \implies (u - \frac{1}{4})^2 + (v + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$ kör

c) $x^2 + y^2 = 4 \implies u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$ kör

d) $x^2 + y^2 + 2x = 0 \implies u = -\frac{1}{2}$ egyenes

e) $y = x^2 \implies u^2 = -\frac{v^3}{v+1}$

52. a) $x^2 + y^2 = R^2 \implies u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2}$

b) $x^2 + y^2 = ax \implies u = \frac{1}{a}$

c) $x^2 + y^2 = by \implies v = -\frac{1}{b}$

d) $y = mx \implies v = -mu$

e) $y = x + b \implies b(u^2 + v^2) + u + v = 0$ körsereg,
amely az origóban érinti a
 $v = -u$ egyenest ($b=0$ eset!).

f) $aw = \frac{1}{z}$ a $z_0 \neq 0$ ponton átmenő egyenessereget

$aw = 0$ és $w_0 = \frac{1}{z_0}$ pontokon, (mint húron) átmenő

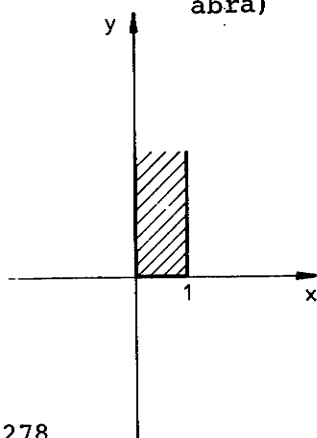
körseregbe viszi; az egyenessereg origón átmenő elemét pedig a közös húr egyenesébe.

54. a) $u^2 + (v+c)^2 > c^2; \quad v < 0$

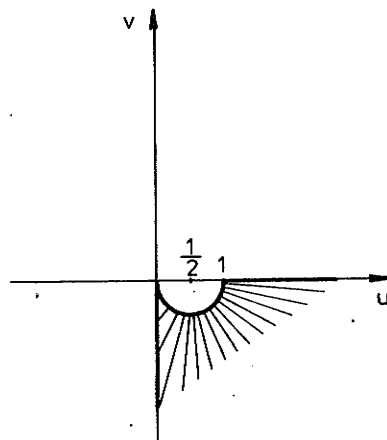
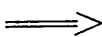
b) $|w - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}; \quad v < 0$

c) $|w - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}; \quad v < 0$

félkör alatti negyedik síknegyedre (lásd 19. ábra)



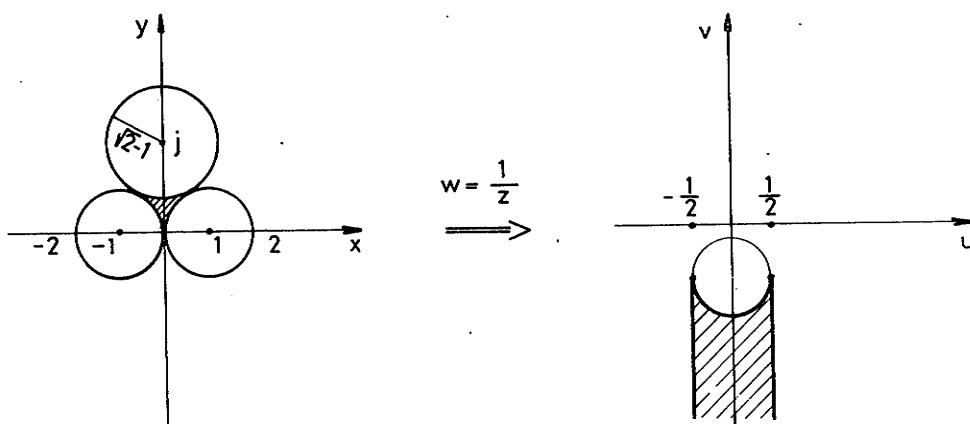
$w = \frac{1}{z}$



19. ábra

d) $-\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}$ sáv

$u^2 + (v + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{4}$ kör alatti részére
(lásd 20. ábra)



20. ábra

55. $y = c \implies c(u^2 + v^2) = -v$

a) $c > 0$ esetén

$y > c \implies c(u^2 + v^2) < -v$,

illetve:

$u^2 + (v + \frac{1}{2c})^2 < \frac{1}{4c^2}$;

b) $c = 0$ esetén

$y > 0 \implies v < 0$

c) $c < 0$ esetén ($c = -d^2$)

$y > -d^2 \implies -d^2(u^2 + v^2) < -v < 0$,

ill.:

$d^2(u^2 + v^2) > v > 0$

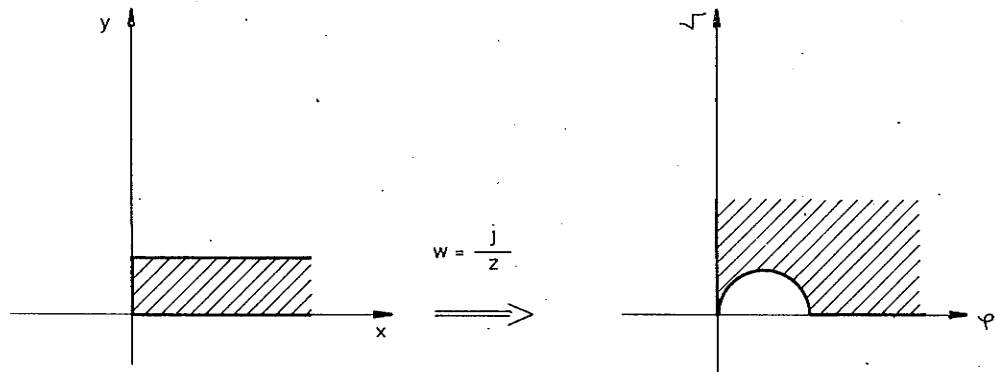
ill.:

$u^2 + (v - \frac{1}{2d^2})^2 > \frac{1}{4d^4}; \quad v > 0$

56. A képtartomány:

$$u \geq 0; \quad v \geq 0; \quad \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \geq \frac{1}{4}$$

(1. 21. ábra)



21. ábra

$$57. |z - z_0| = R \implies |w - b| = \frac{1}{R}$$

$$\arg(z - z_0) = \alpha \implies \arg(w - b) = -\alpha$$

$$58. a) y = x \implies u^2 + (v + 1)^2 = 2$$

$$x + y = 6 \implies \left(u - \frac{6}{7}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{2}{49}$$

$$59. w = j \frac{1 - z}{1 + z} \implies x = \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + 2v + u^2 + v^2}; \quad y = \frac{2u}{1 + 2v + u^2 + v^2}$$

$$a) x = 0 \quad \text{képe: } u^2 + v^2 = 1 \quad \text{kör}$$

$$b) y = 0 \quad \text{" : } u = 0 \quad \text{egyenes}$$

$$c) x^2 + y^2 = 1 \quad \text{" : } v = 0 \quad \text{egyenes}$$

$$d) x - y = 1 \quad \text{" : } \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{kör}$$

$$e) x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad \text{" : } u^2 + \left(v - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \quad \text{kör}$$

60. a) $y = x$ képe : $(u+1)^2 + (v-1)^2 = 2$ kör
 b) $y = 2x + 1$ " : $v = 1 - 2u$ egyenes
 c) $x^2 + y^2 = 1$ " : $v = 1$ egyenes
 d) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ " : $u^2 + (v-2)^2 = 4$ kör

[61]. A $w = c \frac{z-j}{z+j}$ függvény a $\operatorname{Re} z = 0$ egyenest egyenesbe viszi át, (ugyanis a $\operatorname{Re} z = 0$ egyenesen rajta van a $z = -j$ pont, amelyet a függvény a ∞ -be visz át). Mivel

$$z_1 = -j \implies w_1 = \infty$$

$$z_2 = j \implies w_2 = 0$$

$$z_3 = 2j \implies w_3 = c \frac{j}{3j} = \frac{c}{3}$$

ezért

$$\operatorname{Re} z = 0 \quad \text{képe} \quad \operatorname{Im} w = 0$$

egyenes.

[62]. Mindkét oldalt valós és képzetes részre bontva:

$$u = \frac{3x}{x^2 + y^2 - 4y + 4}$$

$$v = \frac{-2(x^2 + y^2) + 5y - 2}{x^2 + y^2 - 4y + 4}$$

adódik, amiből $x^2 + y^2 = 1$ felhasználásával

$$u^2 + v^2 = 1.$$

$$63. \text{ b) } \operatorname{Im} z \leq 0 \implies |w| \geq 1$$

[64]. Mivel $z = -c$ képe $w = \infty$, ezért a $z = -c$ pontnak a $|z - j| = 1$ körön kell lennie. Így $|-c - j| = 1$ esetén lesz a képgörbe egyenes.

65. a) $|w - (1+j)| < 2$ körbelsőbe
 b) $\operatorname{Re} w > \operatorname{Im} w$ félsíkra
 c) $|w + 2+2j| > \sqrt{18}$ kör külsőbe
 d) $\operatorname{Re} w \geq \frac{1}{2}$ félsíkra
 e) $\operatorname{Im} w < 0$ félsíkra
 f) $|w - \frac{4}{3}| > \frac{2}{3}$ körkülsőre
 g) $|w + \frac{j}{2}| > \frac{1}{2}$ körkülsőre
 h) $\operatorname{Im} w < 0$ félsíkra
 i) $|w - \frac{2}{3}j| < \frac{4}{3}$ körbelsőre
 j) $\operatorname{Im} w < \operatorname{Re} w - 2$ félsíkra
 k) $\operatorname{Re} w < 2$ félsíkra

66. a) $\operatorname{Re} w \leq -1$

b) Mivel

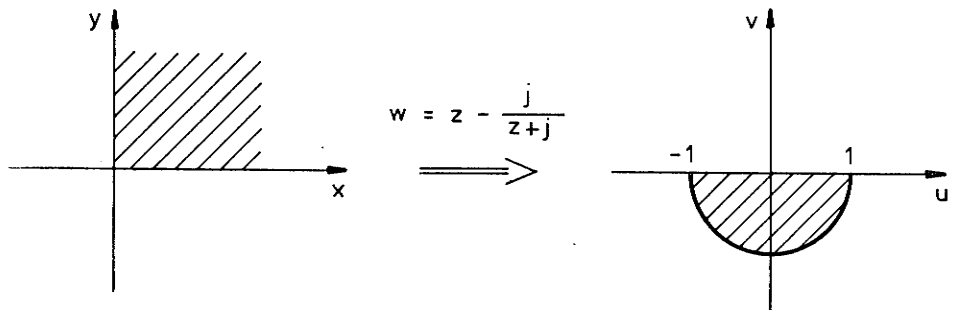
$\operatorname{Re} z > 0$ képe $\operatorname{Im} w < 0$,

$\operatorname{Im} z > 0$ " $|w| < 1$,

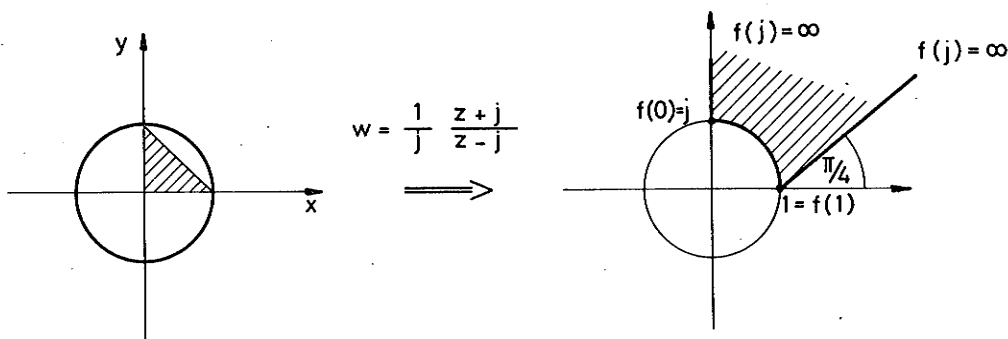
ezért az adott függvény az első síknegyedetet az origó középpontú egységgörre alsó felébe képezi le (lásd 22. ábra)

c) lásd 23. ábra

d) a 23. ábrán lévő tartomány komplementere.



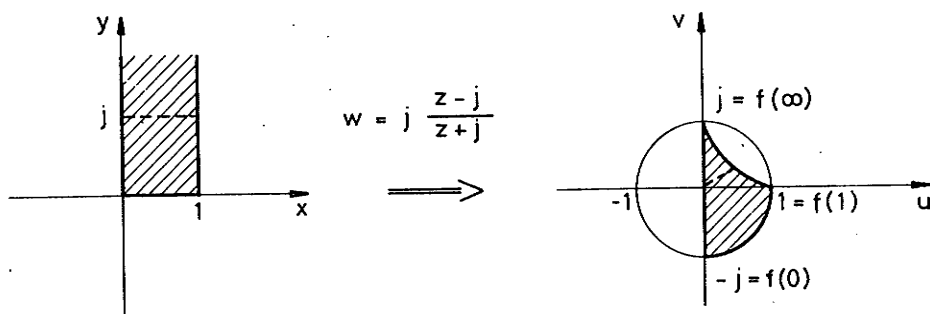
22. ábra



23. ábra

e) lásd a 24. ábra

f) a 24. ábrán lévő tartomány egy része (szaggatott vonallal levágott rész!)



24. ábra

67. a) $\text{Im } z = \text{Re } z - 1$

b) $|z| = 1$

b) Lineáris törtfüggvények nyújtási együtthatója, elforgatási szöge és fix pontjai

68. a) A $z = -1$ pontban:

$$k = |f'(z)| = 1 ; \quad \alpha = \arg f'(z) = \pi ;$$

A $z = j$ pontban :

$$k = |f'(z)| = \frac{1}{2} ; \quad \alpha = \arg f'(z) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } z = -1 \text{ pontban : } k &= \frac{4}{5} ; \alpha = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) \\ z = j \text{ pontban : } k &= \frac{4}{9} ; \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$69. \text{ a) } z = \pm j$$

$$\text{b) } z = 3$$

$$\text{c) } z = -1 \pm 2j$$

$$70. \text{ a) } z = \frac{1 - j \pm \sqrt{-4 - 2j}}{2} \text{ pontok,}$$

amelyek a $z = \frac{z-1}{z+2}$ egyenlet megoldásából adódnak.

$$\text{b) } |w-1| < 2 \iff |z+j| > \frac{\sqrt{2}}{z}$$

ugyanis

$$w = \frac{z-1}{z+j} \iff z = \frac{wj + 1}{-w + 1}$$

Mivel $|w - 1| = 2$ kör pontjai fölírhatók

$$w = 1 + 2e^{j\varphi} ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

alakban, ezért

$$z = \frac{j(1+2e^{j\varphi}) + 1}{-2e^{j\varphi}} = \frac{j + 2je^{j\varphi} + 1}{-2e^{j\varphi}} = -j - \left(\frac{1+j}{2}\right)e^{-j\varphi}.$$

Azaz:

$$|z + j| = \left| \frac{1+j}{2} \right|,$$

ill.

$$|z + j| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ami $z = -j$ középpontú, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú kör egyenlete.

$$71. \frac{w-1}{w+1} = k \frac{z-1}{z+1},$$

ahol "k" tetszőleges komplex állandó.

$$72. \quad w = \frac{(2-j)z - 1}{1 - jz}$$

Ugyanis:

Ha 1 és j fix pontok, akkor a függvény

$$\frac{w - 1}{w - j} = k \frac{z - 1}{z - j}$$

alakú. A $w(0) = -1$ feltétel miatt

$$k = \frac{2j}{1 + j} = j + 1,$$

és ezzel

$$w = \frac{(2-j)z - 1}{1 - jz}$$

a keresett függvény.

73. a) Ha $z_1, z_2 \neq \infty$ akkor a feltételeknek elegettevő legáltalánosabb lineáris függvény a

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad k \neq 0$$

törfüggvény.

b) Ha z_1 vagy z_2 valamelyike ∞ , akkor a feltételeknek elegettevő legáltalánosabb lineáris függvény; egész függvény. Ilyenkor u.is a megfelelő különbségek helyére 1-et kell írni. Pl. ha $z_2 = \infty$, akkor a keresett függvény

$$\frac{w - z_1}{1} = k \frac{z - z_1}{1}$$

azaz:

$$w = z_1 + k(z - z_1).$$

74. Alkalmazva a 73.b) eredményét:

$$w = j + k(z - j).$$

c) Adott leképezéseket megvalósító lineáris
törtfüggvények meghatározása

78. A feltételeknek elegettevő

$$w = \frac{az + b}{z + d}$$

lineáris törtfüggvények:

$$a) w = -j \frac{z + 1}{z - 1}$$

Ugyanis pl. a

$$j = \frac{a \cdot 0 + b}{0 + d}$$

$$1 = \frac{a(-j) + b}{-j + d}$$

$$0 = \frac{a(-1) + b}{-1 + d}$$

összefüggésekből:

$$a = -j; \quad b = -j; \quad d = -1.$$

$$b) w = \frac{z - j}{jz - 1}$$

$$c) w = (1-j) \frac{z-1}{z+j}$$

d) a c) inverze, így

$$w = \frac{(1-j)z - 2}{(1+j)z - 2}$$

$$e) w = \frac{-3j \cdot z + 2}{z - 6j}$$

$$f) w = -\frac{1}{z}$$

$$79. a) w = j \frac{1-z}{1+z}$$

$$b) w = \frac{R-z}{R+z}$$

80. a) $w = \frac{-z + j - 1}{z + j - 1}$

b) $w = \frac{z - 2 + 6j}{z + 2 - 2j}$

81. a) $w = \frac{4z}{z - (1+j)} + 2 + 3j$

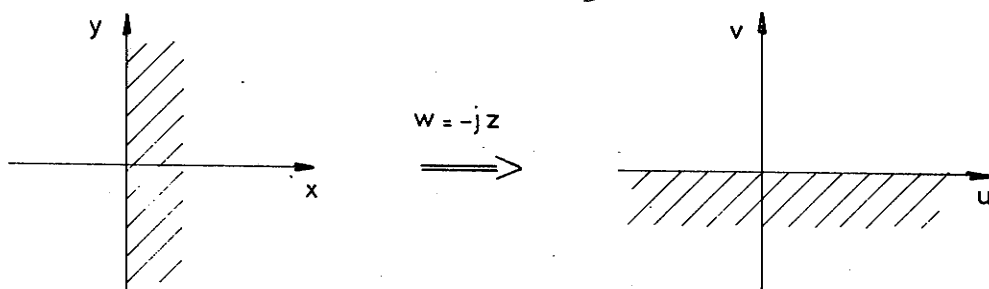
b) $w = 3 \frac{(z-5)-1}{(z-5)+1} - j$

c) $w = j \frac{z + 4}{z - 4}$

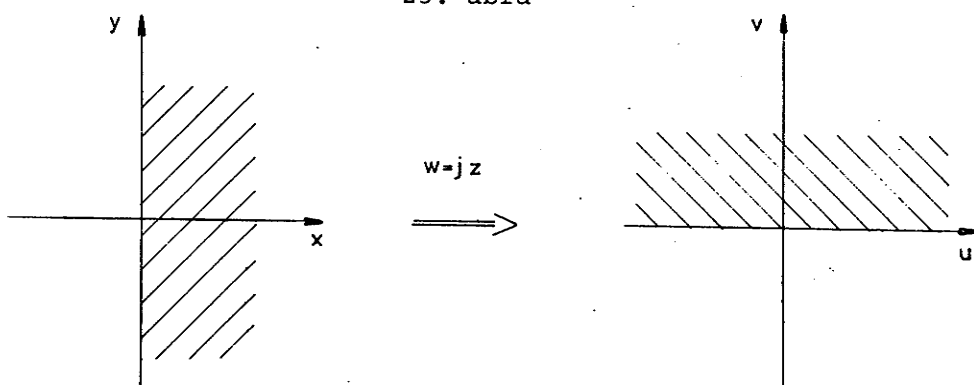
82. I. a) $w = jz$ (lásd 25. ábra)

b) $w = -jz$ (lásd 26. ábra)

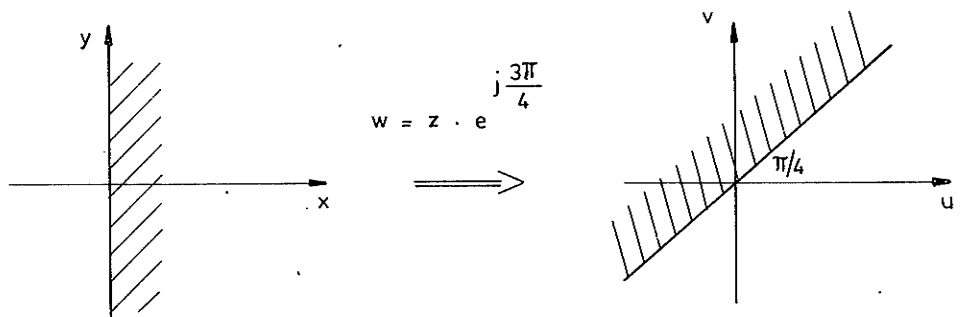
c) $w = z \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$ (lásd 27. ábra)



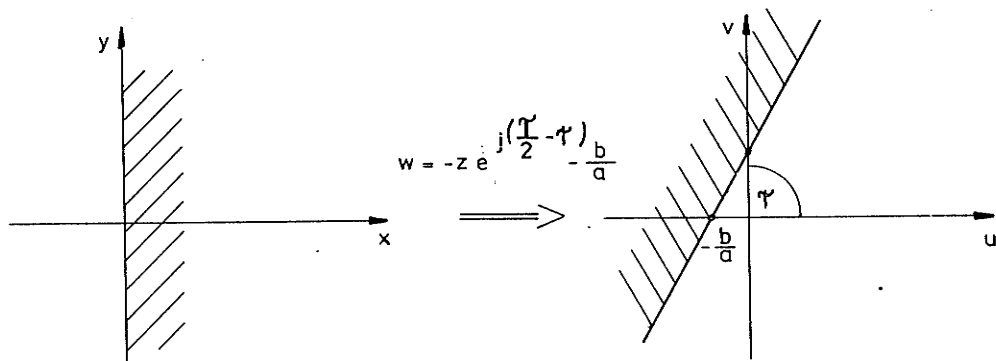
25. ábra



26. ábra



27. ábra



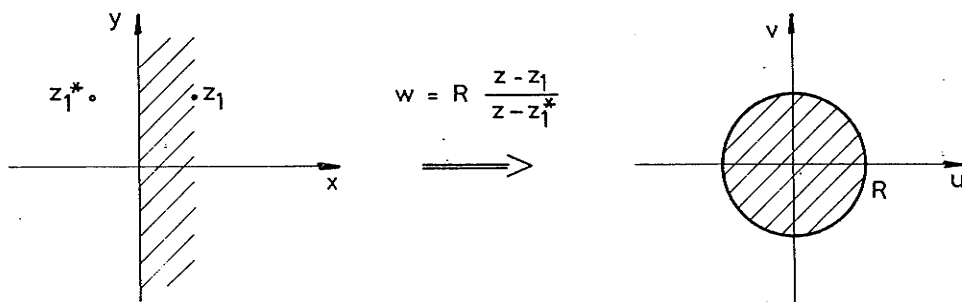
28. ábra

d) $w = -z e^{j \left(\frac{x}{2} + \gamma \right)} - \frac{b}{a}; (\operatorname{tg} \gamma = a)$ (lásd 28. ábra)

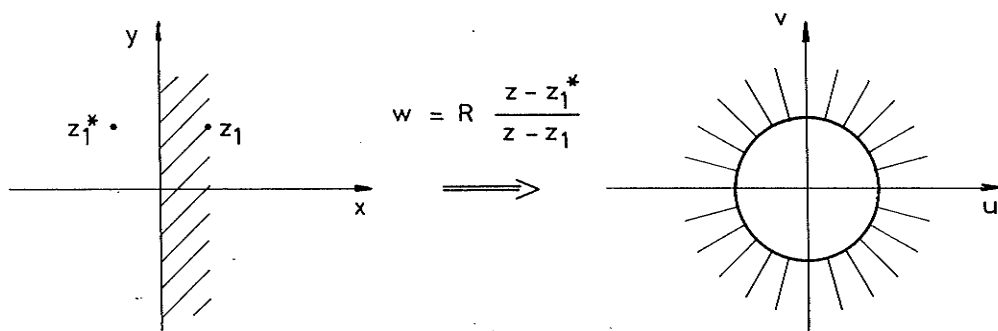
e) $w = R \frac{z - z_1}{z - z_1^*};$
 z_1 és z_1^* az $\operatorname{Im} z$ tengelyre inverz pontok.
 (lásd 29. ábra)

f) $w = R \frac{z - z_1^*}{z - z_1}$ (lásd 30. ábra)

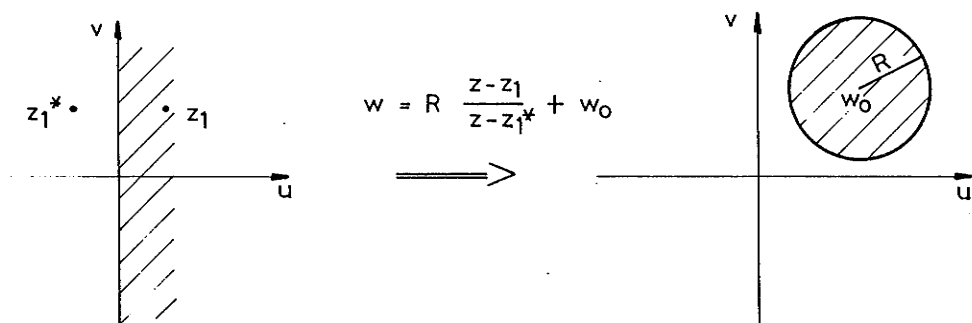
g) $w = R \frac{z - z_1}{z - z_1^*} + w_0$ (lásd 31. ábra)



29. ábra



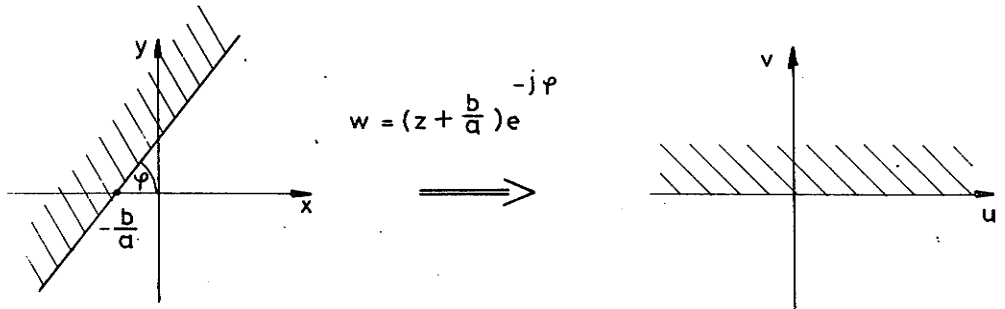
30. ábra



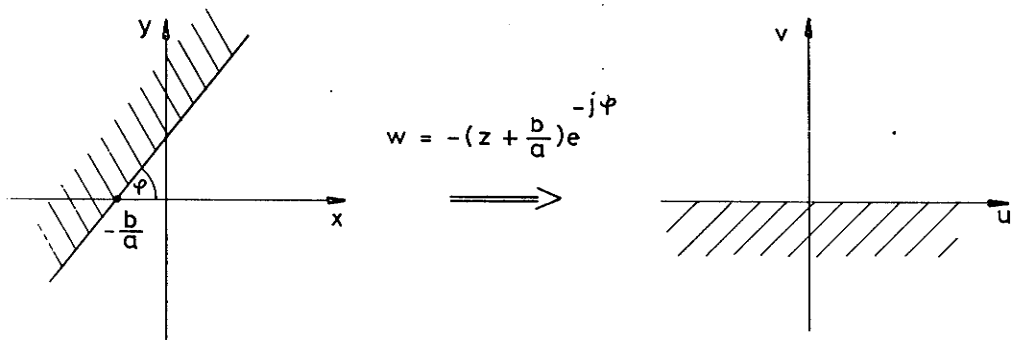
31. ábra

II. a) $w = (z + \frac{b}{a}) e^{-j\varphi}$; $\operatorname{tg} \varphi = a$ (lásd 32. ábra)

b) $w = -(z + \frac{b}{a}) e^{-j\varphi}$ (lásd 33. ábra)

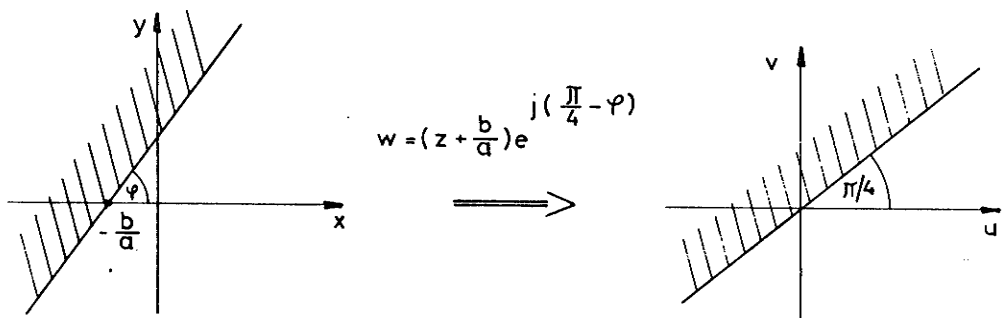


32. ábra



33. ábra

c) $w = (z + \frac{b}{a}) e^{j(\frac{\pi}{4} - \varphi)}$ (lásd 34. ábra)



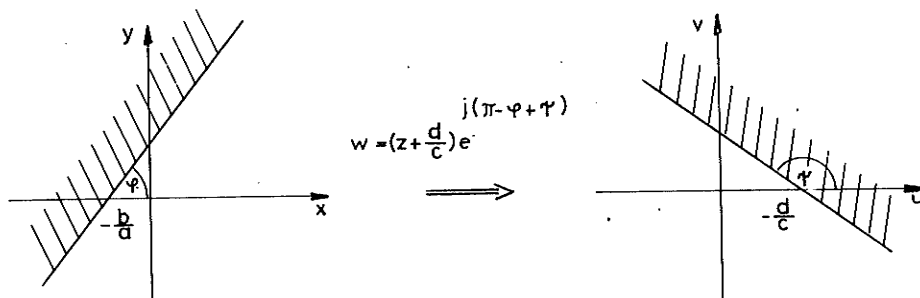
34. ábra

$$d) w = \left(z + \frac{d}{c}\right) e^{j(\pi - \varphi + \gamma)}$$

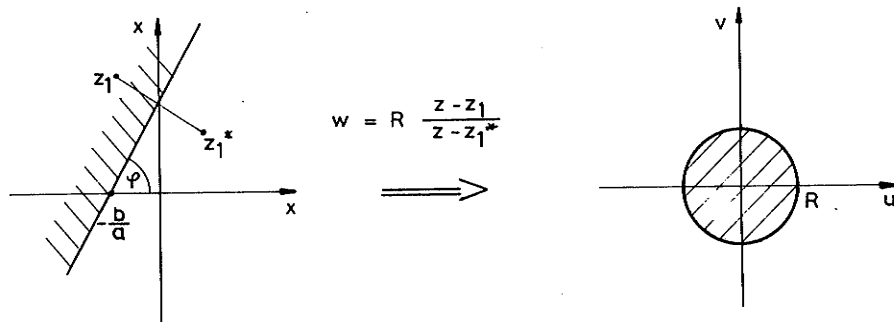
(lásd 35. ábra)

$$e) w = R \frac{z - z_1}{z - z_1^*}$$

(lásd 36. ábra)



35. ábra



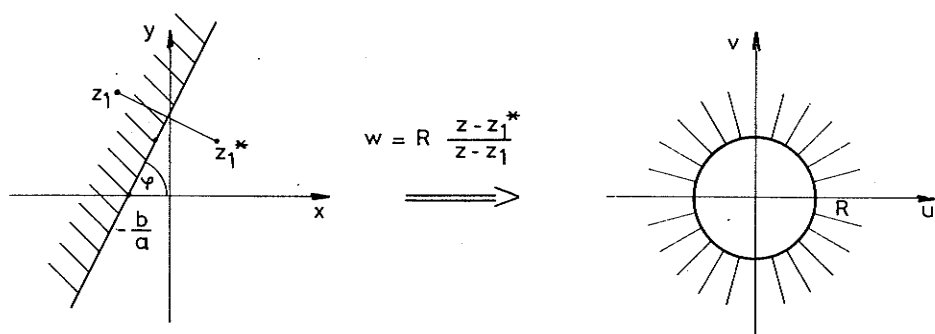
36. ábra

$$f) w = R \frac{z - z_1^*}{z - z_1}$$

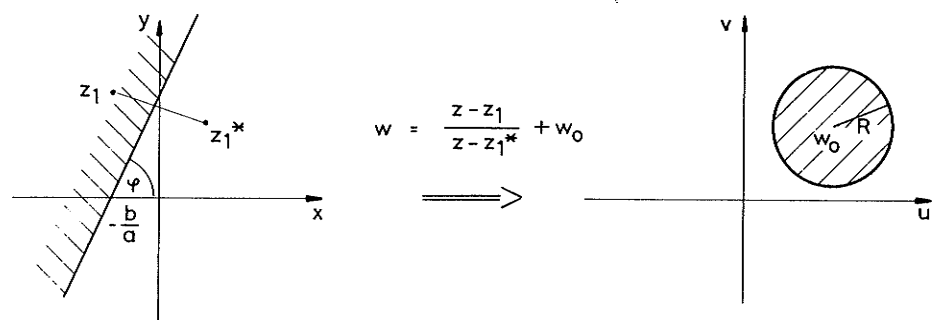
(lásd 37. ábra)

$$g) w = R \frac{z - z_1}{z - z_1^*} + w_0$$

(lásd 38. ábra)

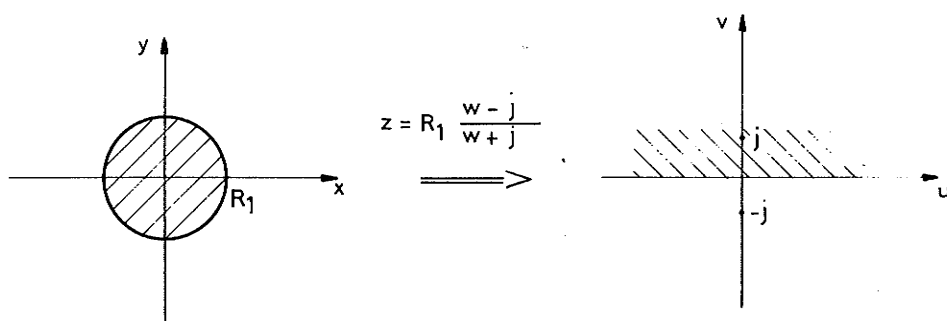


37. ábra



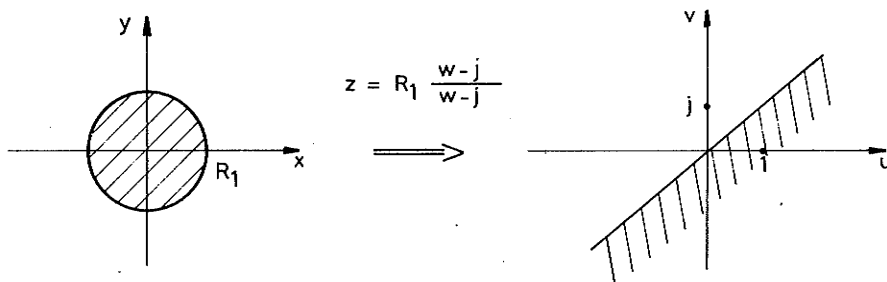
38. ábra

III. a) $z = R_1 \frac{w - j}{w + j}$ amiből $w = -j \frac{z + R_1}{z - R_1}$ (lásd 39. ábra)

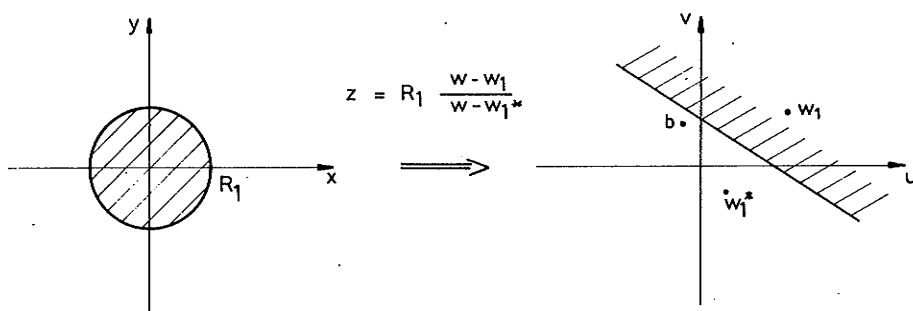


39. ábra

b) $z = R_1 \frac{w - j}{w - 1}$ amiből $w = \frac{z - j R_1}{z - R_1}$ (lásd 40. ábra)



40. ábra



41. ábra

c) $z = R_1 \frac{w - w_1}{w - w_1^*}$ amiből $w = \frac{z w_1^* - R_1 w_1}{z - R_1}$

ahol w_1 és w_1^* az $\text{Im} w = a \text{Re} w + b$ egyenesre

inverz pontpár.

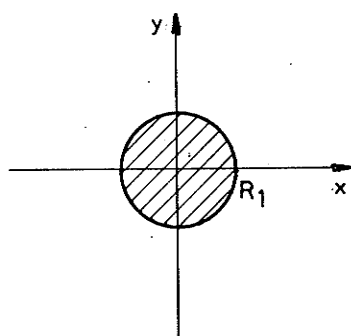
(lásd 41. ábra)

d) $w = \frac{R_2}{R_1} z$

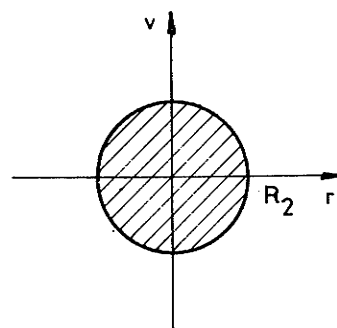
(lásd 42. ábra)

e) $w = R_2 R_1 \frac{1}{z}$

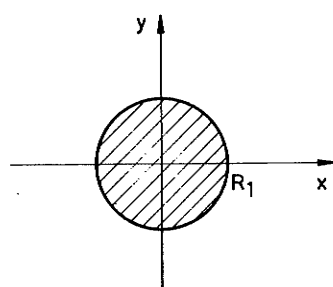
(lásd 43. ábra)



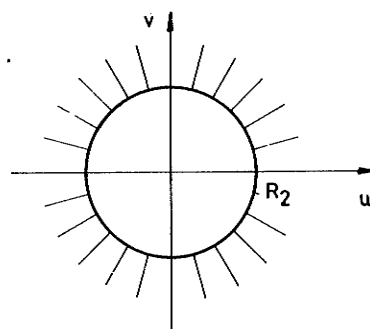
$$w = \frac{R_2}{R_1} z$$



42. ábra



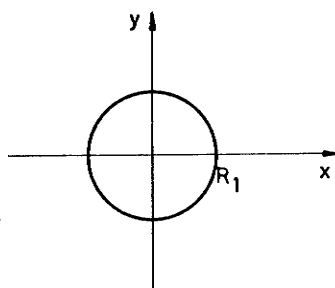
$$w = R_2 R_1 \cdot \frac{1}{z}$$



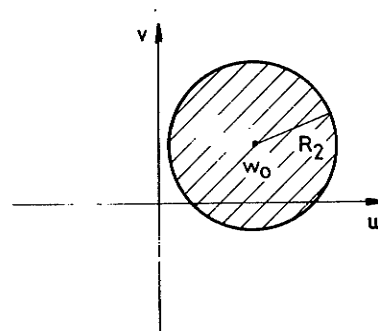
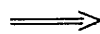
43. ábra

f) $w = \frac{R_2}{R_1} z + w_0$

(lásd 44. ábra)



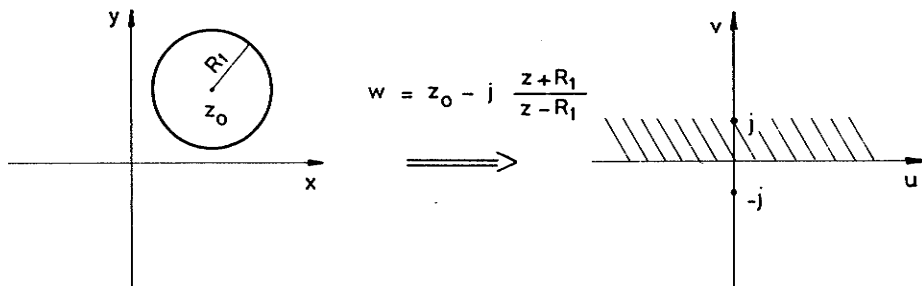
$$w = \frac{R_2}{R_1} z + w_0$$



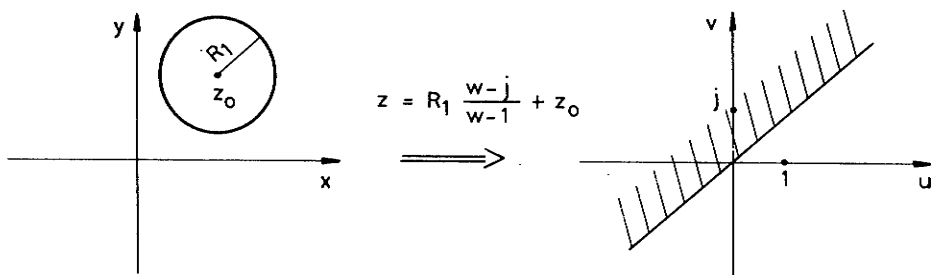
44. ábra

IV. a) $w = z_0 - j \frac{z + R_1}{z - R_1}$ (lásd 45. ábra)

b) $z = R_1 \frac{w - j}{w - 1} + z_0$ amiből $w = \frac{z - z_0 - R_1 j}{z - z_0 - R_1}$ (lásd 46. ábra)



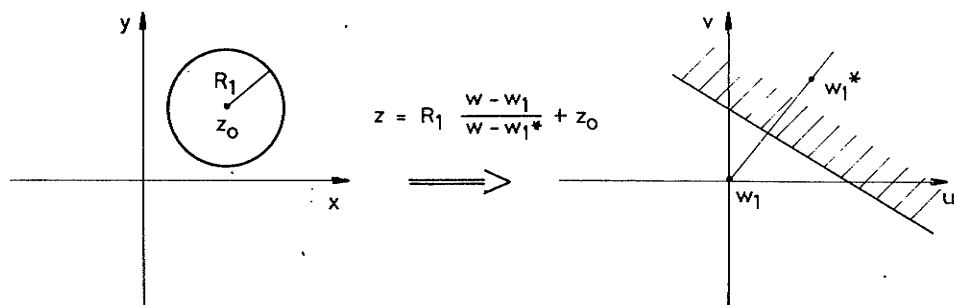
45. ábra



46. ábra

c) $z = R_1 \frac{w - w_1^*}{w - w_1} + z_0$ amiből $w = \frac{(z - z_0) w_1^* - R_1 w_1}{(z - z_0) - R_1}$

ahol w_1 és w_1^* az $\text{Im } w = a \text{Re } w + b$ egyenesre
inverz pontpár (lásd 47. ábra)



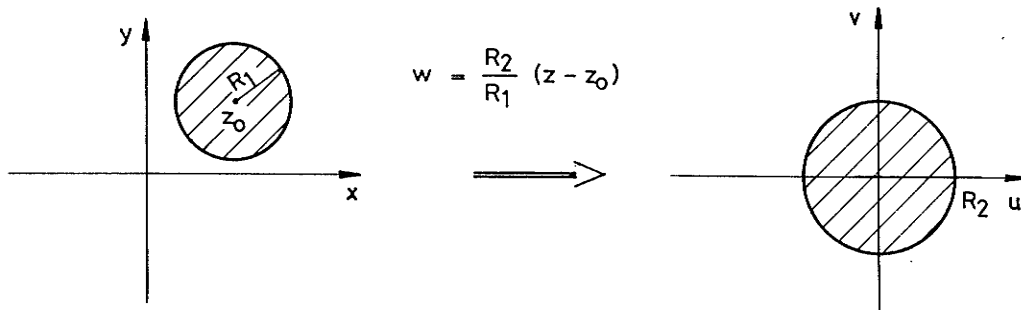
47. ábra

d) $w = \frac{R_2}{R_1} (z - z_0)$

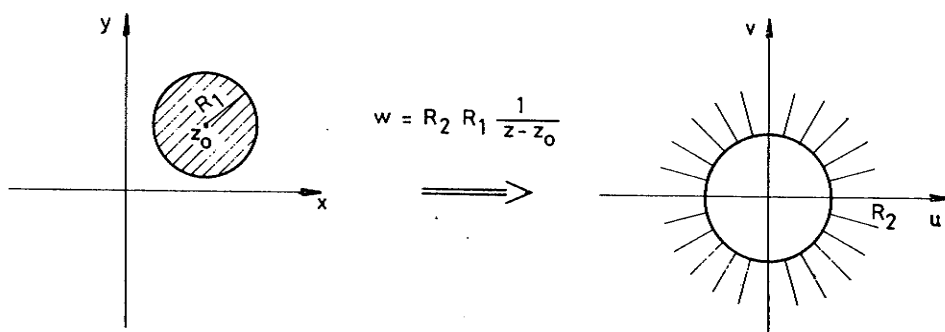
(lásd 48. ábra)

e) $w = R_2 R_1 \frac{1}{z - z_0}$

(lásd 49. ábra)



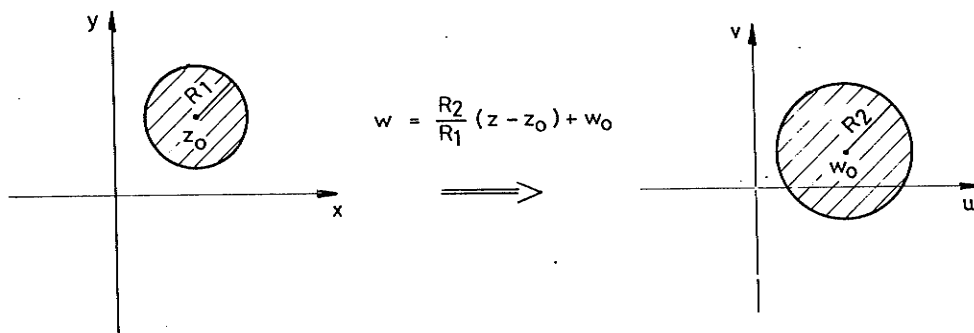
48. ábra



49. ábra

$$f) w = \frac{R_2}{R_1} (z - z_0) + w_0$$

(lásd 50. ábra)



50. ábra

83. A felső félsíkot az egységgörlemezre leképező lineáris törtfüggvény

$$w = e^{j\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

így a $z = j \mapsto w = 0$ megfeleltetésből: $z_0 = j$;

a $z = \infty \mapsto w = -1$ megfeleltetésből: $e^{j\alpha} = -1$.

Tehát a keresett függvény

$$w = (-1) \frac{z - j}{z + j} = \frac{j - z}{j + z}$$

$$84. w = -4 \frac{j \cdot z + 2}{z - 2 - 4j}$$

$$85. w = k e^{\frac{j}{2} (\pi \arccos \frac{z_2}{z_1})} \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

ahol $k > 0$.

$$[86]. w = -\frac{1}{2} \frac{(1-j)z - (2-2j)}{z - (1+j)} = -\frac{1}{2} (1-j) \frac{z-2}{z-(1+j)}$$

Ugyanis:

Keressük a feltételeknek eleget tevő

$$w = \frac{az + b}{z + d}$$

függvényt, ahol az a, b, d együtthatókat a

$$z_1 = 2 \mapsto w_1 = 0$$

$$z_2 = 0 \mapsto w_2 = j$$

$$z_3 = \infty \mapsto w_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$$

megfeleltetések alapján határozzuk meg. (Az utolsó összefüggés az inverz pontpár megfeleltetésén alapszik: $z_1 = 0$ -nak

a $|z| = 2$ körre vonatkozó inverze: $z_3 = \infty$; $w_2 = j$ -nek a $|w + 1| = 1$ körre vonatkozó inverze: $w_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$).

Ezekből:

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j; \quad b = 1 - j; \quad d = -1 - j$$

adódik. így a keresett függvény

$$w = \frac{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j)z + 1-j}{z - (1+j)}$$

[87]. Mivel $z = 0 \mapsto w = \frac{1}{2}$, ezért a $z = \infty$ -nek (mint $z = 0$ -nak a $|z| = 1$ körre vonatkozó tükörképe) $w = -1$ (mint $w = \frac{1}{2}$ -nek a $|w - 1| = 1$ körre vonatkozó inverze) felel meg.

így egyértelműen létezik olyan lineáris törtfüggvény, amely a $z = \{0, 1, \infty\}$ pontoknak a $w = \{\frac{1}{2}, 0, -1\}$ pontokat felelteti meg. A keresett függvény:

$$w = -\frac{z-1}{z+2}$$

$$\boxed{88}. w = R e^{(1+\frac{\pi}{2})j} \cdot \frac{z-j}{z+j}$$

Ugyanis:

Az $\text{Im} z > 0$ félsíkot a $|w| < R$ körtartományra leképező függvény pl.:

$$w = R e^{j\alpha} \frac{z-j}{z+j}.$$

Ez a függvény teljesíti a $w(j) = 0$ feltételt, csak α -t kell úgy megválasztani, hogy az $\text{arc } w'(j) = 1$ feltétel is teljesüljön. Mivel

$$w' = R \cdot e^{j\alpha} \frac{2j}{(z+j)^2},$$

$$w'(j) = R e^{j\alpha} \frac{1}{2j} = \frac{R}{2} e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})}$$

ezért az

$$\text{arc } w'(j) = 1$$

feltétel akkor teljesül, ha

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = 1,$$

azaz, ha

$$\alpha = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Így a kérdéses függvény:

$$w = R \cdot e^{(1+\frac{\pi}{2})j} \cdot \frac{z-j}{z+j}.$$

$$89. a) w = \frac{z-j}{z+j}$$

$$b) w = j \frac{z-2j}{z+2j}$$

$$c) w = j \frac{z-(a+jb)}{z-(a-jb)}$$

$$90. w = R j \frac{z - j}{z + j} + w_0$$

$$91. w = - \frac{z - 2j}{z + 2j}$$

$$92. \frac{w - \bar{a}}{w - a} = -j \frac{z - a}{z - \bar{a}}$$

$$93. a) w = \frac{2z - 1}{2 - z}$$

$$b) w = \frac{2jz + 1}{2 + jz}$$

$$c) w = -j z$$

$$d) \frac{w - a}{1 - \bar{a}w} = e^{j\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

$$94. w = 2 \frac{z - 2 + j}{jz + 2 - 2j}$$

$$95. w = 2 \frac{z - 2 + j}{jz + 2 - 2j}$$

$$98. w = \frac{1}{1 - z}$$

$$99. \frac{w - b}{w - \bar{b}} = e^{j\alpha} \frac{z - a}{z - \bar{a}}$$

100. a) Mindkét körre nézve egymás inverzét alkotó pontok abszcisszái:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = 4$$

A leképező függvény:

$$w = \frac{4z + 1}{z + 4}$$

b) A külső kör sugara:

$$R = 2$$

101. Felhasználva, hogy az egységgörte önmagára leképező függvény legáltalánosabb alakja:

$$w = e^{j\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

a $|z| = 1$ kört $|w| = R_1$ körre leképező függvény pl. a

$$w = R_1 \frac{2z - 1}{1 - 2z}.$$

A $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ kört a $|w| = R_2$ körre leképező függvény:

$$w = \frac{R_2}{R_1} \frac{(z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}(z - \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{R_2}{R_1} \frac{4z - 3}{\frac{33}{8} - z}$$

$$\frac{R_2}{R_1} \frac{32z - 24}{33 - 8z}$$

102. Nem létezik.

Ugyanis a $z = 2$ pont mind a körön, mind az egyenesen rajta van (a leképezés szögtartó volta miatt) a képgörbéknek is érintkezniük kell. Koncentrikus körök (hacsak nem esnek egybe) nem érintik egymást. Egybe nem eshetnek, mert a lineáris tört inverze is lineáris tört és akkor az inverz leképezés nem lenne egyértékű.

104. Tegyük fel, hogy $\exists$ ilyen leképezés. Akkor ennek $\exists$ inverze, amely ugyancsak lineáris tört és ez a két kör közti tartományt párhuzamos egyenesek közti tartományra képezné le. Ebből az következne, hogy az inverz leképezés nevezőjének zérushelye rajta volna mindkét körön, ami lehetetlen.

3.§ ELEMİ FÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉSÜK

3.1 EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY

105. [a] $\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j$,

b) $-j$,

[c] $e^2 (\cos 1 + j \sin 1) = 3,992 + j 6,218$,

d) $-e^2$,

e) $\sqrt{e} \frac{1+j}{2}$.

[106]. a) Az $e^z = e^x (\cos y + j \sin y)$ akkor valós, ha $\sin y = 0$, azaz ha $y = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

b) e^z tiszta képzetes, ha $\cos y = 0$,
azaz ha $y = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

107. [a] $z = c + \frac{2k\pi}{3} j$,

b) $z = c + \frac{k\pi}{2c} j$,

ahol c tetszőleges valós szám és $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Ugyanis pl.:

[a] $e^{3z} = e^{3x} e^{3jy} = e^{3x} (\cos 3y + j \sin 3y)$, ami valós érték, ha $3y = 2k\pi$, x tetszőleges valós szám.
így $z = c + \frac{2k\pi}{3} j$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ esetén lesz e^{3z} pozitív valós.

[108]. Mivel

$$f(z) = e^{jz^2} = e^{j(x^2 - y^2)} \cdot e^{-2xy}$$

azért

$$|f(z)| = e^{-8} \quad (xy=4)$$

109.

$$|e^{-2z}| = |e^{-2x} \cdot e^{-2jy}| = e^{-2x} < 1$$

akkor és csak akkor, ha $x > 0$ bármilyen érték is y .

110. a) $e^{j(z+2k\pi)} = e^{jz} \cdot e^{j2k\pi} = e^{jz}$

b) $|e^{jz}| = |e^{j(x+jy)}| = |e^{jx} \cdot e^{-y}| = e^{-y}$

c) Mivel

$$e^{j\bar{z}} = e^{j(x-jy)} = e^{jx} \cdot e^y$$

és

$$(e^{j\bar{z}}) = (e^{j(x-jy)}) = (e^{jx} \cdot e^y) = e^{-jx} \cdot e^{-y}$$

ezért

$$e^{j\bar{z}} \neq (\overline{e^{jz}}).$$

111. Mivel

$$|e^{2z+j}| = e^{2x} \quad \text{és} \quad |e^{jz^2}| = e^{-2xy}$$

ezért:

$$|e^{2z+j} + e^{jz^2}| \leq |e^{2z+j}| + |e^{jz^2}| = e^{2x} + e^{-2xy}$$

112. Ha az $\text{arc } z = \varphi$ félegyenesek a

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

szögtérben vannak, akkor ezek mentén tartva a ∞ -hez

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \infty,$$

mert $\text{Re } z = x \rightarrow \infty$ és így $|e^z| = e^x \rightarrow \infty$.

Ha a félegyenések a

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

szögtérben vannak, akkor

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = 0,$$

mert itt $\operatorname{Re} z = -x \rightarrow -\infty$, és így $|e^z| = e^{-x} \rightarrow 0$.

Ha $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, akkor e^z -nek nincs határértéke, mert $\operatorname{Re} e^z = \cos y$, ami +1 és -1 érték közt váltakozik.

113. a) 0

b) nem létezik.

$$115. \text{ a) } w' = 2z + \frac{j}{z^2} e^{-\frac{j}{z}}$$

$$\text{b) } w' = \frac{e^{2z}}{\sqrt{1+e^{2z}}}$$

$$\text{c) } w' = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} e^{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\text{d) } w' = e^{\frac{1}{1-z}} \left[1 + \frac{z}{(1-z)^2} \right]$$

$$\text{e) } w' = -2e^{1-2z} \cdot \frac{[z^2+z+3e^{2z}]}{(z^2+e^{2z})^2}$$

116. Mivel

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot e^{-j \frac{y}{x^2+y^2}},$$

ezért

$$\operatorname{Re} e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot \cos \frac{y}{x^2+y^2},$$

ami harmonikus minden $z \neq 0$ pontban.

$$\boxed{117}. \underline{v}(\underline{r}) = 2jz e^{jz^2}$$

Ugyanis:

I. meghatározási mód:

A $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ függvényt tekintve a keresett vektortér skalár potenciáljának:

$$\begin{aligned} \underline{v}(\underline{r}) &= \operatorname{grad} u = -2e^{-2xy} [y \cos(x^2 - y^2) + x \sin(x^2 - y^2)] \underline{i} - \\ &- 2e^{-2xy} [x \cos(x^2 - y^2) - y \sin(x^2 - y^2)] \underline{j} = 2j\bar{z} e^{j\bar{z}^2} \end{aligned}$$

II. meghatározási mód:

$$\underline{v}(\underline{r}) = \overline{f'(z)} = 2jz e^{jz^2} = 2j\bar{z} \cdot e^{j\bar{z}^2},$$

ami megegyezik az előbbi eredménnyel.

118. Logaritmikus spirálok, és pedig:

$$a) \quad \varrho = e^{k\Phi} \quad \text{ha } k \neq 0$$

$$\varrho = 1, \quad \text{ha } k = 0$$

$$b) \quad \varrho = e^{\frac{\Phi-1}{2}}$$

$$c) \quad \varrho = e^{\frac{\Phi-b}{k}}; \quad \text{ha } k \neq 0$$

$$\Phi = b \text{ sugár}, \quad \text{ha } k = 0$$

$\boxed{119}$. Legyen

$$|y| = |x| = a,$$

akkor

$$w = j-1 + e^{-6a^2}j$$

ami egy w síkbeli kör egyenlete.

A kör középpontja: $-1 + j$; sugara: 1

120. a) A képtartomány:

$$|w| \leq 1 ; \quad \operatorname{Im} w > 0$$

félkör tartomány.

Ugyanis: a félsávot határoló egyenesek képei:

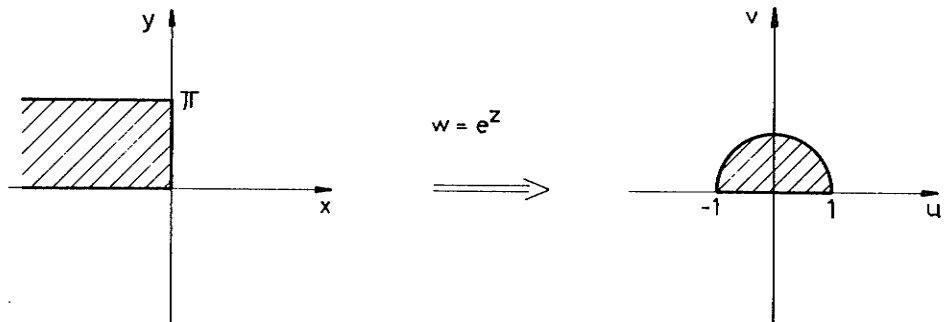
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 0 < y < \pi \end{array} \right\} \text{ egyenesszakasz} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |w| = 1 \\ v > 0 \end{array} \right\} \text{ félkör}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \text{ negatív valós tengely} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = 0 \\ 0 < u < 1 \end{array} \right\} \text{ pozitív valós tengely } [0,1] \text{ szakasza}$$

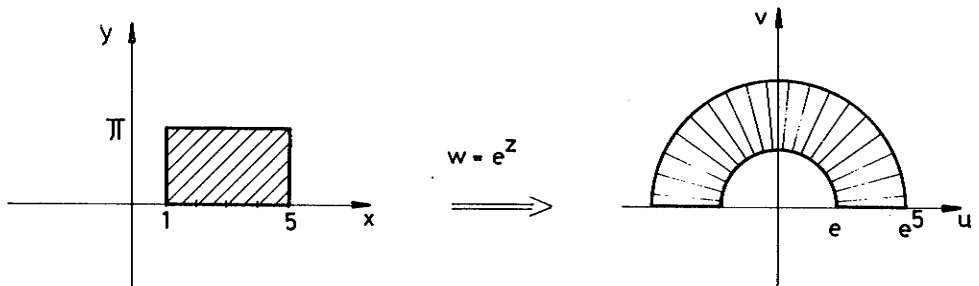
$$\left. \begin{array}{l} y = \pi \\ x < 0 \end{array} \right\} \text{ félegyenes} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = 0 \\ -1 \leq u \leq 0 \end{array} \right\} \text{ egyenesszakasz}$$

(lásd 51. ábra)

b) A képtartomány: a $|w| = e$ és $|w| = e^5$ körök közti gyűrűtartomány felső fele. (lásd 52. ábra)



51. ábra



52. ábra

121.

$$\operatorname{Re} z \leq 2 \implies u^2 + (v-1)^2 \leq 1$$

122. a) $\alpha < \varphi < \beta$ szögtérre;

$\alpha = 0$ és $\beta = 2\pi$ esetén a pozitív valós tengely mentén bemetszett w síkra.

b) $\varrho = e^\varphi$ logaritmikus spirál mentén bemetszett teljes síkra.

c) $\varrho < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ körszektorra;
 $\alpha = 2\pi$ esetén a $v = 0$, $0 \leq u \leq 1$ sugár mentén bemetszett $|w| < 1$ körbelsőre.

d) $\varrho > 1$, $0 < \varphi < \alpha$ tartományra;
 $\alpha = 2\pi$ esetén a $v = 0$, $1 \leq u < \infty$ sugár mentén bemetszett $|w| > 1$ körkülsőre.

123. a) Mivel

$$e^{3jz^2} = e^{3j(x^2 - y^2 + 2jxy)} = e^{-6xy} \cdot e^{3j(x^2 - y^2)},$$

az $xy = 1$ hiperbolán levő pontok képe:

$$w = e^{-6} e^{3j(x^2 - \frac{1}{x^2})}$$

Ez ekvivalens az

$$u = e^{-6} \cos 3(x^2 - \frac{1}{x^2})$$

$$v = e^{-6} \sin 3(x^2 - \frac{1}{x^2})$$

egyenletrendszerrel, illetve az

$$u^2 + v^2 = e^{-12}$$

összefüggéssel, ami kör egyenlete.

b) A kör középpontja az origó, sugara: $R = e^{-6}$

124. $\operatorname{Re} z < 2$ félsík.

125. a) $w = e^{\frac{1}{z}}$ esetén

$$|w| = R \implies r = \frac{\cos \varphi}{\ln R}$$

ami: $R \neq 1$ esetén: kör

$R = 1$ esetén: $\operatorname{Re} z = x = 0$ valós tengely

$$\operatorname{arc} w = \alpha \Rightarrow r = \frac{\sin \varphi}{2k\pi - \alpha}$$

ami: ha α és k egyszerre $\neq 0$, akkor kör

ha α és k egyszerre $= 0$, akkor $\operatorname{Im} z = y = 0$
képzetes tengely

b) $w = e^{z^2}$ esetén

$$|w| = R \Rightarrow x^2 - y^2 = \ln R \quad \text{hiperbola}$$

$$\operatorname{arc} w = \alpha \Rightarrow 2xy = \alpha + 2k\pi \quad "$$

3.2 LOGARITMUS FÜGGVÉNY

126. Felhasználva, hogy $\operatorname{Ln} z = \ln z + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi)$

$$\text{a) } 2 \ln 2 + (\pi + 2k\pi)j \quad k = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$$

$$2 \ln 2 + \pi j$$

$$\text{b) } \ln 3 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)j \quad "$$

$$\ln 3 + \frac{\pi j}{2}$$

$$\text{c) } 1 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)j \quad "$$

$$1 - \frac{\pi}{2}j$$

$$\text{d) } \frac{1}{2} \ln 2 + \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)j \quad "$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}j$$

$$\text{e) } \ln 2 + \left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)j \quad "$$

$$\ln 2 + \frac{11\pi}{6}j$$

$$f) \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right) j \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\frac{4\pi}{3} j$$

$$g) \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) j \quad "$$

$$\frac{\pi}{4} j$$

$$127. a) z = \ln 2 + (2k-1)\pi j \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$b) z = \frac{2k\pi}{3} j ; \quad "$$

$$c) z = \frac{1}{8}\pi j + \frac{1}{2}k\pi j ; \quad "$$

$$d) z = \frac{1}{2} + k\pi j \quad "$$

$$e) z = \ln 2 + j \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \quad "$$

$$f) z = \ln \sqrt{5} + [(2k+1)\pi - \arctg 2] j \quad "$$

$$z = \ln \sqrt{2} + \left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right] j \quad "$$

$$g) z = \ln \sqrt{2} + j \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) \quad "$$

$$128. a) z = j$$

$$b) z = \cos 1 + j \sin 1$$

$$c) z = \sqrt{-1} ; z_1 = j ; z_2 = -j$$

$$130. a) \text{ A legkisebb periódus: } \pi j$$

$$b) f(z) = e^{jz} \text{ kölcsönösen egyértelmű pl. a}$$

$$0 < \operatorname{Im} z < \pi ; -\infty < \operatorname{Re} z < \infty$$

sávon. Itt inverze

$$f^{-1}(z) = -j \ln z ,$$

ahol $\ln z$ az $\operatorname{Ln} z$ reláció főértéke.

131. a) $0 < \text{Im} z < \pi$; $\text{Re} z > 0$

b) $f^{-1}(z) = (1 + j) \ln z$

132. a) $w' = \frac{2z + 2}{z^2 + 2z + 2}$

b) $w' = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3z + 2j}}$

c) $w' = \frac{-2z}{(1+z^2) \ln^2(1+z^2)}$

d) $w' = 6z^2 \cdot \ln(1 + e^{z^3}) \cdot \frac{e^{z^3}}{1+e^{z^3}}$

e) $w' = e^z \ln z (1 + \ln z)$

f) $w' = \frac{1}{z^2(z + 3j)} - \frac{2 \ln(z + 3j)}{z^3}$

133. a) $S^* = 2 \cdot S$

b) $S^* = \frac{4}{3} S$

Ugyanis:

a) Mivel $\ln(1 + 2z)$ reguláris a $z = 0$ pontban és

$$\left[\frac{d[\ln(1+2z)]}{dz} \right]_{z=0} = 2 \neq 0,$$

ezért itt a leképezés konform. Tehát az ε hosszúságú egyenesszakasznak megfelelő képgörbe ívhossza:

$$S^* \approx |f'(z)|_{z=0} \cdot S = 2 \cdot S$$

b) Az a)-beli eljáráshoz hasonlóan:

$$s^* \approx \left[e^z + \frac{1}{(1+z)[3 + \ln(1+z)]^2} \right]_{z=0} \cdot s = \frac{4}{3} s$$

135. Az

$$u = -\ln s |\cos v|$$

görbe belseje

Ugyanis:

Az adott függvény egységgörön felvett értékei:

$$\ln \frac{1}{1-e^{j\varphi}} = \ln \frac{1}{2|\sin \frac{\varphi}{2}|} + j \frac{\pi - \varphi}{2}$$

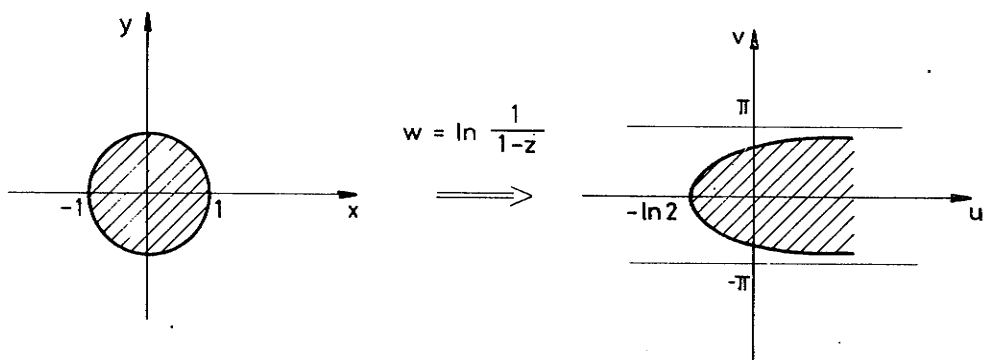
($e^{j\varphi} \neq 1$). Felhasználva, hogy

$$w = u + jv$$

és kiküszöbölve a φ paramétert az egységgör képe:

$$u = \ln \frac{1}{2|\cos v|} \quad \text{*})$$

A kerületek megfeleltetése értelmeben az adott függvény az egységgör belsét a *) egyenlettel megadott görbe belsére képezi le (lásd 53. ábra).



53. ábra

136.

b) A

$$v = k\pi; -\infty < u < 0,$$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) félsugarak mentén bemetszett w síkra.

137. a) egyenesre,

b) $0 < v < \alpha$ sávra,

c) $u < 0; 0 < v < \alpha$ félsávra,

d) $\ln r_1 < u < \ln r_2; 0 < v < 2\pi$ négyszögtartományra.

3.3 TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

138. a) $\sin 0 \cdot \cos 2 + j \cos 0 \cdot \operatorname{sh} 2 = j \operatorname{sh} 2$

vagy

$$\sin jy = j \operatorname{sh} y \text{ alapján: } \sin 2j = j \operatorname{sh} 2$$

b) $-\sin 1 \operatorname{ch} 3 + j \cos 1 \operatorname{sh} 3$

c) $\cos 0 \cdot \operatorname{ch} 1 - j \sin 0 \cdot \operatorname{sh} 1 = \operatorname{ch} 1$

vagy

$$\cos jy = \operatorname{ch} y \text{ alapján: } \operatorname{ch} j = \operatorname{ch} 1$$

d) $\cos 5 \operatorname{ch} 1 - j \sin 5 \operatorname{sh} 1$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} 1 + j \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} 1$

f) $-2 \cos 1 \operatorname{sh} 1 - 2 \sin 1 \operatorname{ch} 1$

g) $\frac{\sin 4 - j \operatorname{sh} 2}{2(\cos^2 2 + \sin^2 1)}$

139. a) $\sin z$ tiszta valós, ha: $\operatorname{Re} z = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, vagy

$\operatorname{Im} z = 0$; $\sin z$ tiszta képzetes, ha: $\operatorname{Re} z = k\pi$

b) $\cos z$ tiszta valós, ha: $\operatorname{Re} z = k\pi$, vagy $\operatorname{Im} z = 0$

$\cos z$ tiszta képzetes, ha: $\operatorname{Re} z = (2k+1) \frac{\pi}{2}$

c) $\operatorname{tg} z$ tiszta valós, ha: $\operatorname{Im} z = 0$

$\operatorname{tg} z$ tiszta képzetes, ha: $\operatorname{Re} z = \frac{k\pi}{2}$

140. Tegyük fel - az állítással ellentétben-, hogy

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{j} \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{e^{jz} + e^{-jz}} = j$$

Ebből

$$e^{2jz} = 0$$

adódik, ami lehetetlen (az exponenciális függvény sehol nem zérus!) így ellentmondáshoz jutottunk. Tehát nincs olyan z amelyre $\operatorname{tg} z = j$

Hasonlóan látható be, hogy $\operatorname{tg} z$ a "-j" értéket sem veszi fel.

141. a) $\cos 2z = 7$

b) $\cos 3z = 26$

Ugyanis például:

$$\cos^2 2z = \cos^2 z - \sin^2 z = [2 \cos^2 z] - 1 = 7$$

$$142. \quad 1) \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$2) \frac{\sin 2n x}{2 \sin x}$$

$$3) \frac{\sin^2 n x}{\sin x}$$

$$143. \quad a) \overline{\sin z} = \overline{\sin(x + jy)} = \sin x \operatorname{ch} y - j \cos x \operatorname{sh} y$$

$$\sin \bar{z} = \sin(x - jy) = \sin x \operatorname{ch} y - j \cos x \operatorname{sh} y$$

Hasonlóan látható be b) és c)

145. Mivel

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y ,$$

ezért

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} ,$$

ami csak úgy lehet minden $z = x + j y$ esetén < 1 , ha $y = 0$, azaz ha z valós érték.

$$146. \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

147. a)

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= |\sin(x + jy)|^2 = \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \\ &= \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x (\operatorname{ch}^2 y - 1) = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x \end{aligned}$$

b) az a)-hoz hasonlóan igazolható.

148. a) Mivel

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$$

(lásd 145. feladat megoldása) és $\operatorname{sh}^2 y > 0$ minden y -ra, ezért

$$|\sin z| > |\sin x|$$

b) Az a)-hoz hasonlóan látható be.

149. a) ∞ .

b) ∞

c) 1

d) ∞

e) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{2}$

g) $\frac{1}{6}$

h) $e^{-\frac{1}{2}}$

$$i) e^{-\frac{1}{6}}$$

$$j) \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch} n \pi}$$

150. [a] Mivel $\sin jz = j \operatorname{sh} z$ és $\operatorname{sh} z$ mindenütt differenciálható, ezért $\sin jz$ mindenütt differenciálható és egyben mindenütt reguláris.

$$b) y = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

pontokban differenciálható; sehol nem reguláris.

$$c) y = 0; \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{6}; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

pontokban differenciálható, sehol nem reguláris.

d) $y = 0; \quad x = k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ pontokban differenciálható, sehol nem reguláris.

e) $y = 0; \quad x = \frac{k\pi}{2}; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ pontokban differenciálható, sehol nem reguláris.

$$151. a) f'(z) = 3 \sin^2(z-j) \cos(z-j)$$

$$f''(z) = 6 \sin(z-j) \cos^2(z-j) - 3 \sin^3(z-j)$$

$$b) f'(z) = -2z \sin(z^2) \cdot e^{\cos(z^2)}$$

$$f''(z) = -[2\sin(z^2) + 4z^2 \cos(z^2) - 4z^2 \sin^2(z^2)] e^{\cos(z^2)}$$

$$c) f'(z) = -\frac{2}{(1+\operatorname{tg} z)^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$f''(z) = \frac{6}{(1+\operatorname{tg} z)^4} \cdot \frac{1}{\cos^4 z} - \frac{4}{(1+\operatorname{tg} z)^3} \cdot \frac{\sin z}{\cos^3 z}$$

$$d) f'(z) = \frac{4z}{\sin(2z^2)}$$

$$f''(z) = \frac{4}{\sin(2z^2)} - \frac{16z^2 \operatorname{ctg}(2z^2)}{\sin(2z^2)}$$

$$152. a) u = 0; \quad v < -1$$

$$b) u = 0; \quad v < -1$$

$$c) \frac{u^2}{\cos^2 3c} - \frac{v^2}{\sin^2 3c} = 1$$

ami $c \neq 0$ esetén konfokális hiperbola sereg

$c = 0$ esetén $v = 0; u > 1$ félegyenes

$$153. a) x = c \neq 0 \Rightarrow \frac{u^2}{\sin^2 2c} - \frac{v^2}{\cos^2 2c} = 1 \text{ hiperbolasereg}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{képzetes tengely}$$

$$y = d \neq 0 \Rightarrow \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 2d} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 2d} = 1 \quad \text{ellipszissereg}$$

$$y = 0 \Rightarrow -1 \leq u \leq 1; \quad v = 0 \quad \text{egyenesszakasz végtelen sokszor lefedve}$$

$$b) x = c \neq 0 \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1 \quad \text{hiperbolasereg}$$

$$x = 0 \Rightarrow u > 1; \quad v = 0 \quad \text{félegyenes (a valódi tengelyen)}$$

$$y = d \neq 0 \Rightarrow \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 d} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 d} = 1 \quad \text{ellipszissereg}$$

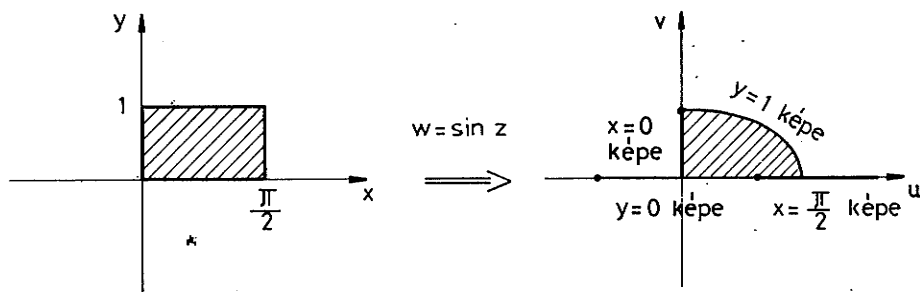
$$y = 0 \Rightarrow -1 \leq u \leq 1; \quad v = 0 \quad \text{egyenesszakasz (végtelen sokszor lefedve)}$$

154. b) lásd 54. ábra

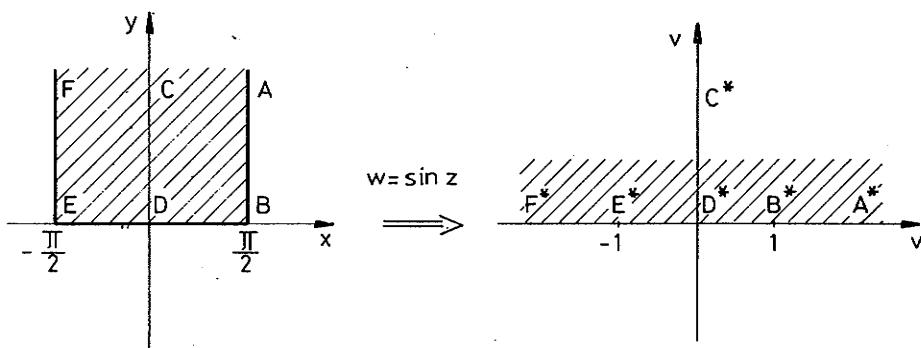
155. a) $A |w| < 1; \operatorname{Re} w > 0$ félkörtartományra.

b) A képzetes tengely $0 \leq v \leq 1$ szakasza mentén bemetszett $\operatorname{Im} w > 0$ felső félsíkra.

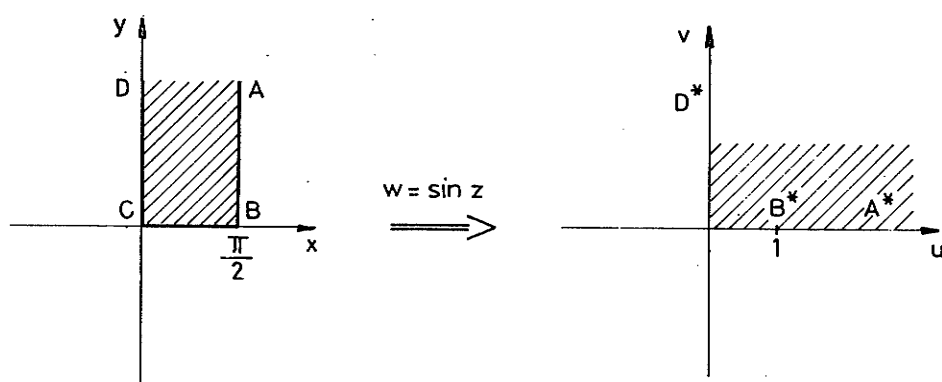
156. a) A felső félsíkra (lásd 55. ábra);
 b) A jobb felső negyedsíkra (lásd 56. ábra);
 c) $\left(\frac{u}{\operatorname{ch} k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{sh} k}\right)^2 = 1; \quad v > 0$
 fél-ellipszis tartományra (lásd 57. ábra);
 d) Két konfokális ellipszis által határolt gyűrű-
 tartományra (lásd 58. ábra);
 e) Két konfokális ellipszis által határolt gyűrű
 felső felére. (lásd 59. ábra)
157. a) a felső félsíkra;
 b) a negyedik síknegyedre;



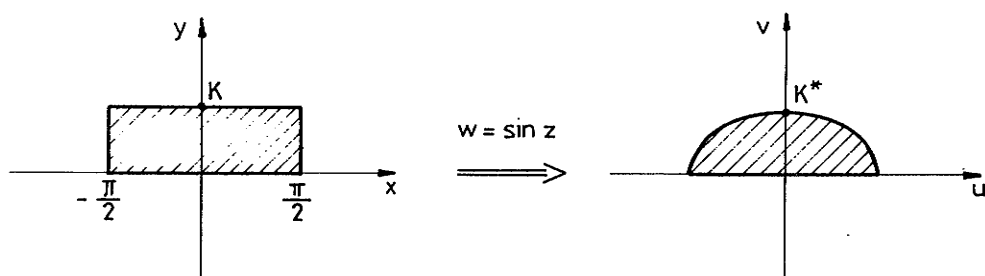
54. ábra



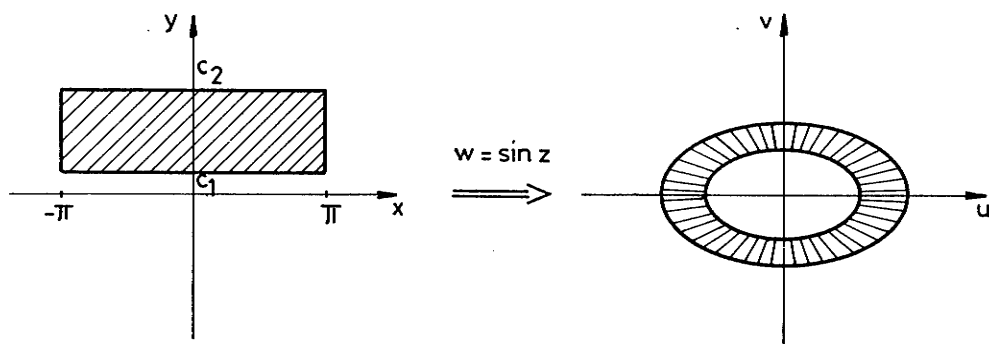
55. ábra



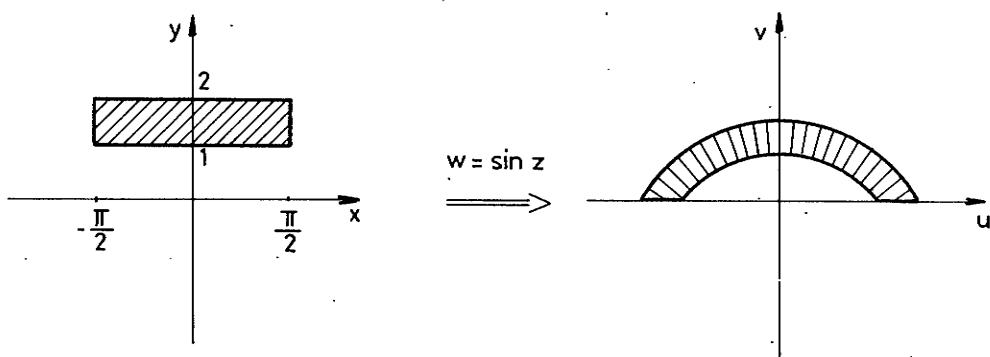
56. ábra



57. ábra



58. ábra



59. ábra

- c) a $[0, 1]$ szakasz mentén bemetszett jobb félsíkra;
d) a $(-\infty, -1)$ és $[1, \infty)$ szakaszok mentén bemetszett w síkra.
e) a $[-ch, -1]$ és $[1, ch]$ szakaszok mentén bemetszett

$$\frac{u^2}{ch^2h} + \frac{v^2}{sh^2h} = 1$$

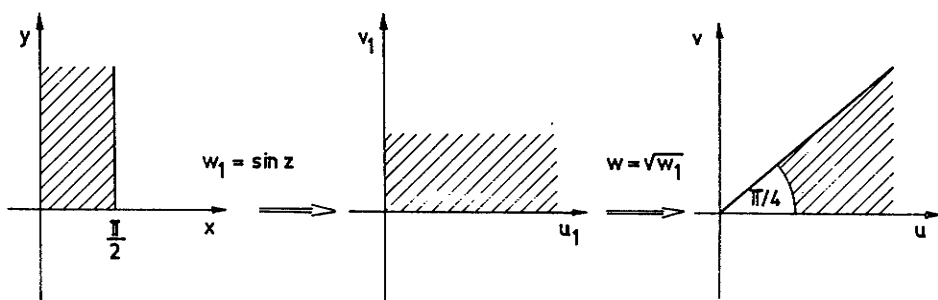
ellipszis belsejére.

158. A $\sqrt{\sin z}$ leképezés összetehető a

$$w_1 = \sin z \quad \text{és} \quad w = (w_1)^{1/2}$$

egyszerűbb leképezésekből.

Az első leképezés (153/b feladat) a $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $y \geq 0$ félsávot a w_1 sík első negyedére képezi le. A negyedsíkot a második leképezés a w sík első nyolcadára képezi le (lásd 60. ábra)



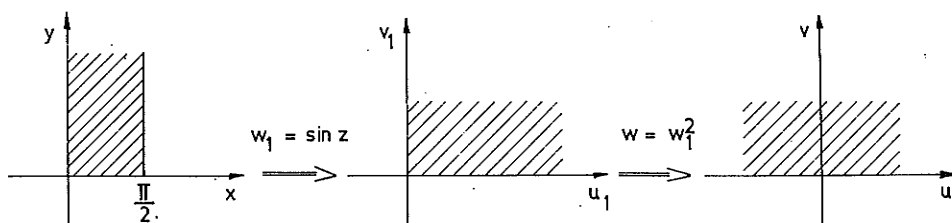
60. ábra

159. A $w = \sin^2 z$ leképezés összetehető a

$$w_1 = \sin z \quad \text{és} \quad w = (w_1)^2$$

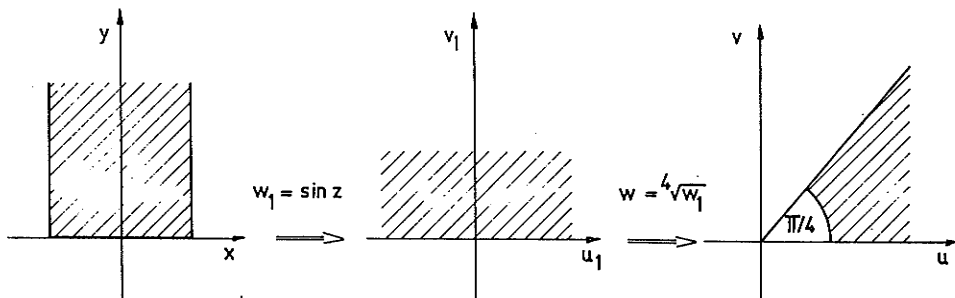
egyszerűbb leképezésekből.

Az első leképezés az adott félsávot a w' sík első negyedére képezi (lásd 153/b. feladat), ezt a második leképezés a w sík $v > 0$ félsíkjára képezi le. (lásd 61. ábra)



61. ábra

160. A képtartomány a $v = u$ egyenes alatti első nyolcad-sík (lásd 62. ábra).



62. ábra

3.4 ARCUS FÜGGVÉNYEK

161. a) $\pm j \ln(2 + \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k=0, \pm 1, -2, \dots$

b) $-j \ln(\sqrt{2}+1) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$; "

$-j \ln(\sqrt{2}-1) + \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$; "

$$c) (k + \frac{1}{2})\pi + j \ln \sqrt{3} \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$d) \frac{1}{2j} \ln \frac{j}{2-j}$$

$$162. a) z = (4k-1) \frac{\pi}{6} + j \ln (2 + \sqrt{+3})^{-1/3} \quad k=0, \pm 1, \pm 2$$

$$b) z = -j \ln (-5 \pm \sqrt{26}) + 2k\pi \quad "$$

$$c) z = -j \ln (5 \pm \sqrt{24}) + 2k\pi \quad "$$

$$d) z = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm 4j \quad "$$

$$e) z = \frac{1}{2j} \ln \frac{j}{2-j}$$

163. a) Van megoldása

$$\text{Im } z = \frac{1}{2j} \ln \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}; \text{ Rez tetszőleges}$$

b) Van megoldása
Ugyanis, ha $\cos jz \neq 0$, akkor

$$\text{tg } jz = -\frac{1}{2}j$$

$$z = -j \arctg \left(\frac{-j}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{j - \frac{j}{2}}{j + \frac{j}{2}} = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1}{3}$$

c) Nincs megoldása
Ugyanis, ha $\cos z \neq 0$, akkor $\text{tg } z = j$,
ami nem lehetséges.

165. A határérték: 1

$$166. a) f'(z) = -\frac{1}{z \sqrt{z^2-1}}$$

$$b) f'(z) = -\frac{2(z-1)}{\sqrt{2z-z^2}}$$

(a négyzetgyök pozitív értékével számolva)

$$c) f'(z) = \operatorname{arctg}(\ln z) + \frac{1}{1 + \ln^2 z}$$

$$d) f'(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{(z+1+3j) \sqrt{z+3j}}$$

$$e) f'(z) = \frac{2je^{jz}}{\sqrt{2-e^{2jz}}}$$

$$f) f'(z) = - \frac{\sin z + \cos z}{\sqrt{\sin 2z}}$$

167. A w sík

$$-\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}$$

sávjára.

$$168. a) -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, v > 0 \quad \text{félsávra}$$

$$b) -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \quad \text{sávra}$$

$$c) 0 < u < \frac{\pi}{2}, v > 0 \quad \text{félsávra}$$

$$d) -\frac{\pi}{2} < u < 0 \quad \text{sávra}$$

3.5 HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK

$$169. a) 2j\sqrt{3}$$

$$b) 0$$

$$c) j$$

170.

a) Tiszta valós, ha: x tetszőleges, $y=k\pi$; ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

" képzetes, ha: y " , $x=0$; ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

vagy x " $y=-\frac{\pi}{2}+k\pi$; ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

b) Tiszta valós, ha: x tetszőleges, $y = k\pi$; ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

vagy y " $x=0$

" képzetes, ha: x " , $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$; ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

c) " valós, ha: x tetszőleges, $y = k\frac{\pi}{2}$; ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

" képzetes, ha: y " , $y=0$

174. a) $f'(z) = (1 + j e^{jz}) \operatorname{ch}(z + e^{jz})$

b) $f'(z) = \frac{-2z \operatorname{sh}(z^2 + 1 + 3j)}{\operatorname{ch}^3(z^2 + 1 + 3j)}$

c) $f'(z) = 2(z+1) \operatorname{th}(z+1)^2$

d) $f'(z) = \frac{\operatorname{sh}(z+3j)}{2\sqrt{\operatorname{ch}(z+3j)}} e^{\sqrt{\operatorname{ch}(z+3j)}}$

175. $w' = (\operatorname{ch} 2z) \cdot 2z^2(3-z^2) = 0$

ha

a) $z = 0 \pm j \left(\frac{\pi}{4} \pm k \frac{\pi}{2} \right)$

b) $z = 0$

c) $z = \pm \sqrt{3} + j \cdot 0$

176. a) $x = c \neq 0 \Rightarrow \frac{u^2}{\operatorname{sh}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{ch}^2 c} = 1$ ellipszis-sereg

$x = 0 \Rightarrow u=0; -1 \leq v \leq 1$ egyenesszakasz végtelen sokszor lefedve

$y = d \neq 0 \Rightarrow \frac{v^2}{\sin^2 d} - \frac{u^2}{\cos^2 d} = 1$ hiperbola sereg

$y = 0 \Rightarrow v = 0$ valós tengely

b) $x = c \neq 0 \Rightarrow \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 c} = 1$ ellipszis-sereg

$x = 0 \Rightarrow v = 0; -1 \leq u \leq 1$ egyenesszakasz végtelen sokszor lefedve

$$y = d \neq 0 \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 d} - \frac{v^2}{\sin^2 d} = 1 \quad \text{hiperbola sereg}$$

$$y = 0 \Rightarrow v = 0; \quad u > 1 \quad \text{félegyenes kétszer lefedve}$$

177. a) Mivel

$$w = \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} (x+jy) = \operatorname{ch} x \cos y + j \operatorname{sh} x \sin y$$

ezért

$$u = \operatorname{ch} x \cos y$$

$$v = \operatorname{sh} x \sin y$$

Tehát

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = 0 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{array} \right.$$

b) Mivel

$$x \geq 0 \quad \text{esetén} \quad \operatorname{ch} x \geq 0, \quad \operatorname{sh} x \geq 0$$

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad " \quad \cos y \geq 0, \quad \sin y \geq 0,$$

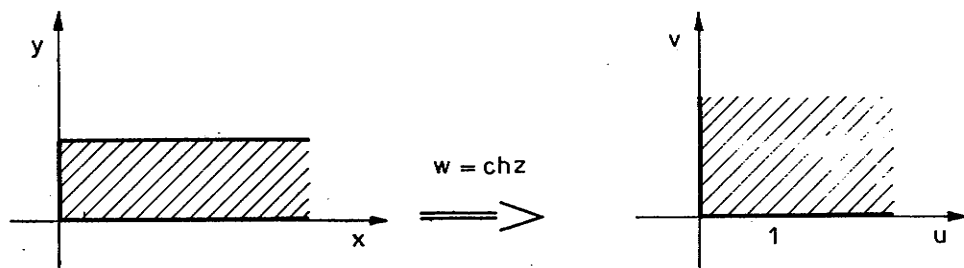
ezért ezekre az értékekre

$$u \geq 0; \quad v \geq 0$$

Tehát

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{array} \right.$$

negyedsík (l. 63. ábra).



63. ábra

Itt a határvonalak képe:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = 0 \\ 0 \leq u < 1 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u > 1 \\ v = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ v > 0 \end{array} \right.$$

178. a) a $(-\infty, -1]$ és $[1, \infty)$ egyenesszakaszok mentén bemetszett w síkra;

b) a felső félsíkra.

3.6 AREA FÜGGVÉNYEK

$$179. \text{ a) } \ln(\sqrt{2} + 1) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)j; \quad (k=0, \pm 1, \dots)$$

$$\ln(\sqrt{2}-1) + \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)j \quad "$$

$$\text{b) } \ln \left[(2k+1)\pi + \sqrt{(2k+1)^2 \pi^2 - 1} \right] + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)j$$

$$\ln \left[\sqrt{(2k+1)^2 \pi^2 - 1} - (2k+1)\pi \right] + \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)j$$

$$(k, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{c) } (2k + 1)\pi j \quad (k=0, \pm 1, \dots)$$

$$\text{d) } k\pi j \quad (k=0, \pm 1, \dots)$$

$$180. \text{ a) } z = \left(\pm \frac{1}{3} \pm 2k\right)\pi j \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{b) } z = \left(\frac{1}{2} \pm 2k\right)\pi j \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{c) } z = \ln(-2 + \sqrt{3})$$

$$\text{d) } z = \frac{1}{k\pi j} \quad (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$181. \text{ a) } z = 2k\pi j \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{ b) } z = -\ln 2 + (4k + 1) \frac{\pi}{2} j \quad "$$

$$182. \text{ a) } A \text{ w sík } -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \text{ sávjárja}$$

$$\text{ b) } A \text{ w sík } 0 < v < \frac{\pi}{2} ; u > 0 \text{ félsávjárja.}$$

3.7 ÁLTALÁNOS HATVÁNYFÜGGVÉNY

$$183. \text{ a) } 1$$

$$\text{ b) } \cos(\ln 2) + j \sin(\ln 2)$$

$$\text{ c) } e^{-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{n}}$$

$$\text{ d) } e^{-\pi}$$

$$\text{ e) } e^{-2\pi}$$

$$184. \text{ a) } e^{\ln \sqrt{2} - \frac{7\pi}{4} - 2k\pi} \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{4} + \ln \sqrt{2}\right);$$

$$\text{ b) } e^{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \quad (k=0, \pm 1, \dots) \quad "$$

$$\text{ c) } e^{-\frac{1}{4}\pi + 2k\pi} \cdot e^{\frac{1}{2}j \cdot \ln 2} \quad "$$

$$\text{ d) } e^{-4k} (-1,95 - j 1,59) \quad "$$

$$\text{ e) } w_1 = 1,54 + j 1,32$$

$$w_2 = 0,375 - j 0,32$$

$$\text{ f) } e^{(2k+1)j} \quad "$$

$$185. z = \frac{k}{n} - j \frac{1,61}{2n\pi} \quad (kn, = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

[186]. Mivel

$$\begin{aligned} c^z &= e^{(x+jy) \ln c} = \\ &= e^{(x+jy) [\ln c + j(\arcc c + 2k\pi)]} \end{aligned}$$

ezért c^z valós, ha

$$y \ln|c| + x(\arcc c + 2k) = n\pi,$$

ahol $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Tehát c^z a z komplex sík végtelen sok egyenesén vesz fel valós értéket

[187]. Mivel

$$\begin{aligned} z &= e^{z \ln z} = e^{(x+jy) [\ln|z| + j(\arcc z + 2k\pi)]} = \\ &= e^{x \ln|z| - y(\arcc z + 2k\pi)} \cdot e^{j[y \ln|z| + x(\arcc z + 2k\pi)]} \\ &= e^{x \ln|z| - y(\arcc z + 2k\pi)} \cdot e^{j[y \ln|z| + x(\arcc z + 2k\pi)]} \\ &= e^{x \ln|z| - y(\arcc z + 2k\pi)} \cdot \{ \cos[y \ln|z| + x(\arcc z + 2k\pi)] + \\ &\quad + j \sin[y \ln|z| + x(\arcc z + 2k\pi)] \} \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} u &= e^{x \ln|z| - y(\arcc z + 2k\pi)} \cdot \cos[y \ln|z| + x(\arcc z + 2k\pi)] \\ v &= e^{x \ln|z| - y(\arcc z + 2k\pi)} \cdot \sin[y \ln|z| + x(\arcc z + 2k\pi)] \end{aligned}$$

$$188. w_1 = e^{-c(1+j\pi)}$$

$$w_2 = e^{-c(1-j\pi)}$$

[189]. a) Mivel

$$z^j = e^{j \ln z} = e^{j[\ln|z| + j \arcc z]},$$

ezért

$$|z^j| = e^{-\arcc z}$$

$$b) A |z^j| = e^{-\arcc z} = c \quad (c \neq 0 \text{ állandó})$$

görbék az

$$\operatorname{arc} z = c^*$$

origóból kiinduló félegyeneselek.

$$190. f'(z) = (z-3j)^{4z+1}(4z+2) + 4(z-3j)^{4z+2} \cdot \ln(z-3j)$$

[191]. Mivel:

$$w = j^z = e^{z \ln j} = e^{z(j \frac{\pi}{2})},$$

ezért

$$\operatorname{Re} z = c_1 \implies v = (\operatorname{tg} c_1 \frac{\pi}{2}) u \quad \text{egyenes,}$$

$$\operatorname{Im} z = c_2 \implies u^2 + v^2 = 2e^{-c_2 \pi} \quad \text{kör,}$$

ahol c_1 és c_2 tetszőleges állandó.

KOMPLEX FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

1.§ KOMPLEX VONALINTEGRÁL

1. a)

$$\begin{aligned}
 \int_a^b 1 \, dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(b - z_{n-1}) + (z_{n-1} - z_{n-2}) + \dots + (z_2 - z_1) + (z_1 - a)] = \\
 &= b - a
 \end{aligned}$$

b) Az $f(z) = z$ függvény folytonos, tehát tetszőleges rektifikálható L görbe mentén integrálható. Így az L görbe $[a, b]$ szakasza bármely felosztásához tartozó integrálközelítő-összegének létezik határértéke bárhogyan is választjuk a részintervallumokbeli reprezentáns ζ pontokat. Válasszuk ζ -nak egyszer a részívek kezdőpontját, egyszer pedig a végpontját és képezzük velük az integrál-közelítő összegeket. A két integrálközelítő-összeg összege a keresett integrál kétszereséhez tart. Tehát

$$\begin{aligned}
 2 \int_a^b z \, dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [z_{k-1} (z_k - z_{k-1}) + z_k (z_k - z_{k-1})] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [(z_{k-1} + z_k) (z_k - z_{k-1})] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) = b^2 - a^2
 \end{aligned}$$

és így

$$\int_a^b z \, dz = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

c) A $|z - z_0| = R$ kör egy paraméteres egyenlete:

$$z = z_0 + R e^{j t}; \quad 0 \leq t < 2\pi$$

A körvonal t_k paraméterértékű pontját P_k -val jelölve, a körívet $\overbrace{P_{k-1} P_k}$ szakaszokra bontva és reprezentáns pontként a szakaszok felezőpontját választva:

$$\zeta_k = R e^{j \frac{t_k + t_{k-1}}{2}} = R e^{j \tau_k}$$

$$\begin{aligned} \Delta z_k &= R(e^{j t_k} - e^{j t_{k-1}}) = R e^{j \tau_k} \left(e^{j \frac{\Delta t_k}{2}} - e^{-j \frac{\Delta t_k}{2}} \right) = \\ &= j e^{j \tau_k} \cdot 2R \sin \frac{\Delta t_k}{2} = j e^{j \tau_k} \cdot \Delta s_k \end{aligned}$$

ahol $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ és $\Delta s_k = |\Delta z_k|$

Ezek felhasználásával

$$\begin{aligned} \oint_G \frac{dz}{z - z_0} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{j e^{j \tau_k} \cdot \Delta s_k}{R e^{j \tau_k}} = \frac{j}{R} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta s_k \\ &= \frac{j}{R} 2R \pi = 2\pi j \end{aligned}$$

2. a) I. módszer:

Az egyenes szakasz egyenlete:

$$y = 1 - x; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Az egyenes pontjaiban

$$z^2 - 1 = x^2 - y^2 - 1 + 2jxy = 2x - 2 + 2jx(1 - x),$$

$$dz = dx + j dy = dx - j dx.$$

így

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} (z^2 - 1) dz &= \int_0^1 [(2x - 2) + 2j(x - x^2)] [dx - j dx] = \\ &= \int_0^1 (4x - 2x^2 - 2) dx + j \int_0^1 (2 - 2x^2) dx = \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} j. \end{aligned}$$

II. módszer:

Az egyenesszakasz egy paraméteres komplex egyenlete:

$$z(t) = (1 - t)j + t; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

így

$$\begin{aligned} \int_L (z^2 - 1) dz &= \int_0^1 [z^2(t) - 1] z'(t) dt = \\ &= \int_0^1 [t^2 - (1 - t)^2 - 1 + 2jt(1 - t)] [1 - j] dt \\ &= \int_0^1 (-2 + 4t - 2t^2) dt + j \int_0^1 (2 - 2t^2) dt = \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} j. \end{aligned}$$

b) A parabolaív egy paraméteres komplex egyenlete:

$$z(t) = t + j(1 - t^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

így

$$\begin{aligned} \int_L (z^2 - 1) dz &= \int_0^1 [t^2 - (1 - t^2)^2 - 1 + 2jt(1 - t^2)] \cdot \\ &\quad \cdot [1 - 2jt] dt = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} j. \end{aligned}$$

3. a) $1 + e$

b) $1 + e$

4. a) Az egyenesszakasz egy paraméteres egyenlete:

$$z(t) = t + jt; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

így

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz &= \int_{t=0}^1 f[z(t)] \cdot \dot{z}(t) dt \\ &= \int_0^1 -3t^2 j(1 + j) dt = 1 - j. \end{aligned}$$

b) A törtvonal: $L_1 \cup L_2$, ahol

$$L_1 : x = 0; \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$L_2 : y = 1; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

így

$$\begin{aligned} \int_{\substack{z_1 \\ (L_1 \cup L_2)}}^{z_3} f(z) dz &= \int_{\substack{z_1 \\ (L_1)}}^{z_2} f(z) dz + \int_{\substack{z_2 \\ (L_2)}}^{z_3} f(z) dz = \\ &= \int_{\substack{y=0 \\ (x=0; dx=0)}}^1 y \cdot j dy + \int_{\substack{x=0 \\ (y=1; dy=0)}}^1 (1 - x - 3x^2 j) dx = \frac{1}{2} - \frac{j}{2}. \end{aligned}$$

5. a) Áttérve a t változóra:

$$\begin{aligned} \int_{(0,3)}^{(2,4)} f(z) dz &= \int_{t=0}^1 [2(t^2 + 3) + 4t^2 + j(6t - t^2 - 3)] [2 + 2jt dt] = \\ &= 2 \int_{t=0}^1 [(6 + 3t + t^3) + j(6t^3 - t^2 + 12t - 3) dt] = \end{aligned}$$

$$= \frac{31}{2} + \frac{25}{3} j.$$

b) Felhasználva, hogy a $(0, 3)$ -ból a $(2, 3)$ -ig vezető egyenesszakasz mentén: $y = 3$; $dy = 0$, és a $(2, 3)$ pontból a $(2, 4)$ pontig vezető egyenesszakasz mentén: $x = 2$; $dx = 0$:

$$\int_{(0,3)}^{(2,4)} f(z) dz = \int_{x=0}^2 [(2y + x^2) + j(3x - y)] dx + \int_{y=3}^4 [(2y + x^2) + j(3x - y)] j dy =$$

$$= \int_{x=0}^2 [(6 + x^2) + j(3x - 3)] dx + \int_{y=3}^4 [(2y + 4) + j(6 - y)] j dy =$$

$$= \frac{44}{3} + (11j - \frac{5}{2}) = \frac{73}{6} + 11j.$$

c) Az egyenes egyenlete: $2y - x = 6$. Integrációs változónak y -t vezetve be:

$$\int_{(0,3)}^{(2,4)} f(z) dz = \int_{y=3}^4 [2y + (2y - 6)^2 + j(6y - 18 - y)] [2 + j] dy =$$

$$= \int_{y=3}^4 [(8y^2 - 49y + 90) + j(4y^2 - 12y)] dy =$$

$$= \frac{103}{6} + \frac{4}{3} j.$$

[6.] a) Az egyenesszakasz egyenlete:

$$x = 0; \quad -1 \leq y \leq 1.$$

így

$$\int_L \bar{z}^2 \cdot \text{Im } z \, dz = \int_L (x^2 - y^2 - 2jxy) y (dx + jdy) =$$

$$= \int_L (x^2 y - y^3) dx + 2xy^2 dy + j \int_L [-2xy^2 dx + (x^2 y - y^3) dy] =$$

$$= j \int_{-1}^1 -y^3 dy = -j \left[\frac{y^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0.$$

b) A jobbfélsíkbeli félkörív egyenlete:

$$z(t) = e^{jt}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

így:

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z}^2 \cdot \operatorname{Im} z \, dz &= \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2jt} \sin t \cdot j e^{jt} dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - j \sin t) \sin t \, dt = \\ &= -\frac{\pi}{2} j. \end{aligned}$$

[7.] a) Az egyenesszakasz mentén integrálva:

$$\begin{aligned} \int_{\substack{z=-j \\ (L_1)}}^j |z| \, dz &= \int_{y=-1}^1 |y| j \, dy = \int_{y=-1}^0 (-y) j \, dy + \int_0^1 y j \, dy = \\ &= -j \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^0 + j \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = j; \end{aligned}$$

míg a félkörív mentén integrálva:

$$\int_{\substack{z=-j \\ (L_2)}}^j |z| \, dz = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot j e^{jt} \, dt = \left[e^{jt} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2j.$$

b) Az egyenesszakasz mentén integrálva:

$$\int_{\substack{z=0 \\ (L_1)}}^{1+j} e^{\bar{z}} dz = \int_{t=0}^1 e^{(1-j)t} (1+j) dt = \frac{1+j}{1-j} [e^{(1-j)t}]_0^1 =$$

$$= \frac{1+j}{1-j} (e^{1-j} - 1) = j(e^{1-j} - 1);$$

míg a törtvonal mentén integrálva:

$$\int_{\substack{z=0 \\ (L_2)}}^{1+j} e^{\bar{z}} dz = \int_{x=0}^1 e^x dx + \int_{y=0}^1 e^{1-jy} \cdot j dy =$$

$$= [e^x]_0^1 - [e^{1-jy}]_0^1 =$$

$$= (e - 1) - (e^{1-j} - e) = 2e - e^{1-j} - 1.$$

c) Az egyenesszakasz mentén integrálva:

$$\int_{\substack{z=0 \\ (L_1)}}^{1+j} e^{j\bar{z}} dz = \int_{t=0}^1 e^{t+jt} (1+j) dt = e^{1+j} - 1;$$

míg a törtvonal mentén integrálva:

$$\int_{\substack{z=0 \\ (L_2)}}^{1+j} e^{j\bar{z}} dz = \int_0^1 e^{jx} dx + \int_0^1 e^{j(1-dy)} j dy =$$

$$= j[1 - 2e^j + e^{1+j}].$$

8. a) $-4 + 2\pi j$

b) $2 + 3j$

9. a) $\sqrt{5}(1 - \frac{j}{2})$

b) -2

c) 0

10. a) $j\pi$

b) $\frac{4}{3}$

c) $4\pi j$

11. a) $-2j$

b) 0

c) $2j$

d) $j\sqrt{2} + j\ln(1 + \sqrt{2})$

^[12]. A $\sqrt{z}$ egyértékű ága reguláris és primitív függvénye $\frac{2}{3}\sqrt{z^3}$. így

$$\int_L \sqrt{z} dz = \int_{-2-2\sqrt{3}j}^{-2+2\sqrt{3}j} \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \left[\sqrt{(z)^3} \right]_{-2-2\sqrt{3}j}^{-2+2\sqrt{3}j}$$

Mivel

$$z_1 = -2 - 2\sqrt{3}j = 4e^{j\frac{4\pi}{3}},$$

$$z_2 = -2 + 2\sqrt{3}j = 4e^{j\frac{2\pi}{3}},$$

így

$$(\sqrt{z_1})^3 = \left(2e^{j\frac{2\pi}{3}} \right)^3 = 8e^{j2\pi} = 8,$$

$$(\sqrt{z_2})^3 = \left(2e^{j\frac{\pi}{3}} \right)^3 = 8e^{j\pi} = -8.$$

Tehát

$$\int_L \sqrt{z} \, dz = \frac{2}{3} [(\sqrt{z_2})^3 - (\sqrt{z_1})^3] = -\frac{32}{3}.$$

13. a) $-2(1 - j)$

b) $2(1 - j)$

c) $-2(1 + j)$

d) -4

e) $-2j + 2$

14. a) $2\pi j$

Ugyanis:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \ln z \, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} (\ln e^{j\varphi}) \, j e^{j\varphi} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} j\varphi \cdot j e^{j\varphi} d\varphi = \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi e^{j\varphi} d\varphi = j [\varphi e^{j\varphi}]_{-\pi}^{\pi} + j \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\varphi} d\varphi = 2\pi j. \end{aligned}$$

b) -2π

c) $2\pi Rj$

d) $2\pi Rj$

15. a) $\frac{2\pi j}{n+1}$ ha $n \neq -1$

$-2\pi^2$ " $n = -1$

b) $(-1)^{n+1} \frac{2\pi j}{n+1}$ ha $n \neq -1$

$-2\pi^2$ " $n = -1$.

$$16. \frac{e^{2(\alpha+1)\pi j} - 1}{1 + \alpha} \quad \text{ha } \alpha \neq -1$$

$$2\pi j \quad \quad \quad " \quad \alpha = -1.$$

$$17. a) 0$$

$$b) 8$$

Ugyanis:

$$\oint_{|z|=1} |z-1| |dz| = 2 \int_0^\pi |e^{j\varphi} - 1| d\varphi = 2 \int_0^\pi 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 4 \left[-2 \cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^\pi = 8$$

$$c) \frac{2R\pi}{R^2 - a^2}$$

$$18. a) ze^z - e^z$$

$$b) \frac{1}{2} \sin z \cos z + \frac{z}{2}$$

$$c) -\cos z + \frac{\cos^3 z}{3}$$

$$d) z [\ln(z) - 1]$$

$$e) z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln(z^2 + 1).$$

$$19. a) -\frac{1}{3j} e^{-3jz} + c$$

$$b) -\frac{1}{3} \cos z^3 + c$$

$$c) \frac{1}{3} \ln(z^3 + 3z + 2) + c$$

$$d) \frac{1}{10} \sin^5 2z + c$$

$$e) \frac{1}{12} \ln \operatorname{ch}(4z^3) + c$$

$$f) \frac{1}{2} z \sin 2z + \frac{1}{4} \cos 2z + c$$

$$g) -e^{-z} (z^2 + 2z + 2) + c$$

$$h) \frac{1}{2} z^2 \ln z - \frac{z^2}{4} + c$$

$$i) (z^3 + 6z) \operatorname{ch} z - 3(z^2 + 2) \operatorname{sh} z + c$$

$$j) \frac{1}{10} (2z + 5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{6} (2z + 5)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$20. a) -\frac{1}{2} [\cos z^2]_{z=0}^{1+j} = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{ch} 2)$$

$$b) -\frac{2}{e} - 1 + j(2 + \frac{\pi}{e} + \frac{2}{6})$$

$$c) \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} \frac{z}{2}]_{z=j}^{z=1} = \frac{\pi}{2}$$

$$21. a) \frac{\pi}{2} j + \cos 1 - \operatorname{ch} 1 + \frac{1}{2} (j - 1) + \frac{\operatorname{sh} 2j}{4} - \frac{\operatorname{sh} 2}{4}$$

$$b) -\frac{1+2j}{2-4j} [\cos(-4j) - \cos(-2)] - \frac{1}{2}j + 1$$

$$c) 2 \sin 2 \operatorname{ch} 1 + \cos 2 \operatorname{sh} 1$$

$$d) -e^{-j} (1 + j) + 2e^{-1} + 1$$

$$e) \frac{1}{2} \int_{\pi}^{-\pi} z \sin 2z \, dz = \frac{\pi}{2}$$

$$f) 0$$

$$22. a) e - e^{-1}$$

$$b) -2e + j\pi - \frac{\pi^2}{2}$$

$$c) 0$$

d) $-2k\pi^2$ a k-adik ágon

e) $-4k\pi - 2j$ " "

23. a) $jR^2\pi$

b) $jR^2\pi$

$$24. \text{ [a]} \oint_G x \, dz = \oint_G x(dx + j \, dy) = \oint_G x \, dx + j \oint_G x \, dy = jT$$

Ugyanis:

$$\begin{aligned} \oint_G x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{x_{j-1} + x_j}{2} (x_j - x_{j-1}) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (x_j^2 - x_{j-1}^2) = 0 \end{aligned}$$

(mert $x_n = x_1$!)

Hasonlóan

$$\oint_G (y \, dx + x \, dy) = 0$$

és a síkbeli Gauss-Osztrogradszkij tétel értelmében

$$\oint_G (x \, dy - y \, dx) = 2T,$$

úgy hogy

$$\oint_G x \, dy = T.$$

[25]. a) Az R sugarú körön

$$\left| \frac{\ln z}{z^2} \right| < \frac{\ln R + \pi}{R^2}$$

és így

$$\oint_G \frac{\ln z}{z^2} \leq 2R \frac{|\ln R| + \pi}{R^2} = 2\pi \left[\frac{|\ln R|}{R} + \frac{\pi}{R} \right] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Azaz:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_G \frac{\ln z}{z^2} dz = 0$$

b) Jelöljük $\frac{1}{R}$ -et r -rel.

Ekkor

$$\left| \oint_G \sqrt{z} \ln z dz \right| \leq 2R\pi\sqrt{R} (|\ln R| + \pi) =$$

$$\frac{2\pi}{r\sqrt{r}} (|-\ln r| + \pi) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{r \rightarrow \infty} 0$$

(26). a) Az állítás a vonalmenti integrál abszolútértékére vonatkozó alábbi becslés felhasználásával adódik:

$$\left| \int_{L_R} f(z) dz \right| \leq M(R) \cdot S,$$

ahol $|f(z)| \leq M$ és S az L görbe ívhossza.

b) Az a) állítás következménye.

[27]. Mivel az integrációs út hossza $\leq 2\pi r$, ezért

$$\left| \int_{K_r} f(z) dz \right| \leq \int_{K_r} |f(z)| |dz| \leq 2\pi r M(r) \Rightarrow 0,$$

mert a feltétel értelmében $\lim_{r \rightarrow \infty} r M(r) = 0$.

28. [a] Az L görbe pontjaiban:

$$\frac{1}{|1 + z^2|} = \frac{1}{|1 + 4e^{2j\varphi}|} = \frac{1}{\sqrt{(1 + 4e^{2j\varphi})(1 + 4e^{-2j\varphi})}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 16 + 8 \cos 2\varphi}} < \frac{1}{\sqrt{17 - 8}} = \frac{1}{3},$$

ami azt jelenti, hogy $|f|$ felső korlátja $\frac{1}{3}$.

Az L negyedkörív hossza:

$$s = \frac{2 \cdot 2\pi}{4} = \pi.$$

így a komplex vonalintegrál abszolútértékére vonatkozó becslés értelmében:

$$\left| \int_L \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \int_L \left| \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq M \cdot s = \frac{1}{3} \cdot \pi.$$

[29]. Az integrál létezik, ha $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq +\frac{\pi}{2}$.
Ugyanis:

Mivel az L sugár irányszöge α , alkalmazzuk a

$$z = te^{j\alpha}; \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

helyettesítést. Ezzel:

$$\begin{aligned} \int_L e^{-\frac{1}{z}} dz &= e^{j\alpha} \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} (\cos \alpha - j \sin \alpha) dt = \\ &= e^{j\alpha} \int_0^1 e^{-\frac{\cos \alpha}{t}} \cdot e^{j \frac{\sin \alpha}{t}} dt. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető:

- Ha $\cos \alpha > 0$ (azaz: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$), akkor az integrál abszolút konvergens;
- Ha $\cos \alpha < 0$ (azaz: $+\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$), akkor az integrál divergens;
- Ha $\cos \alpha = 0$ (azaz: $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$) akkor az integrál konvergens.

[30]. A feltétel szerint

$$\begin{aligned} \int_L [u(x,y) + jv(x,y)] dz &= \int_L [u(x,y) + jv(x,y)] [dx + j dy] = \\ &= \int_L [u dx - v dy] + j \int_L [v dx + u dy] \end{aligned}$$

valós érték és így

$$\int_L [v(x,y) dx + u(x,y) dy] = 0$$

bármely rektifikálható T -beli L görbére. így a $[v(x,y), u(x,y)]$ síkbeli vektor-vektor függvénynek - vektoranalízisbeli ismereteink értelmében - van skalár-potenciál függvénye. Ezt a potenciál-függvényt $f(x,y)$ -nal jelölve:

$$f'_x = v; \quad f'_y = u$$

Tehát

$$u'_x = f''_{yx} = f''_{xy} = v'_y$$

a Young-tétel szerint;

$$u'_x = v'_y$$

pedig a Cauchy-Reimann differenciálegyenletek egyikének teljesítését jelenti.

$$31. v(x,y) = -x^2 + y + y^2 - 2 + j \frac{5}{3}$$

[33]. A T tartományon az $\frac{f'(z)}{f(z)}$ függvénynek primitív függvénye lesz $\ln(f(z))$, hiszen $|f(z) - 1| < 1$ miatt az $f(z)$ függvény értékei az 1 körüli egységsugarú körbe esnek, e körön pedig $\ln z$ reguláris.

Minthogy az integrandusnak létezik primitív függvénye az egész T tartományon, tetszőleges T -beli G zárt görbén - melynek belseje nem feltétlenül tartozik T -hez! - vett integrálja 0.

2.§ CAUCHY-INTEGRÁL-TÉTEL ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

34. a) A $|z| = 1$ körön

$$z = e^{j\varphi}$$

és így

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} (z^3 - jz^2 + 5z + 2j) dz &= \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} (e^{3j\varphi} - je^{2j\varphi} + 5e^{j\varphi} + 2j) je^{j\varphi} d\varphi = \\ &= j \int_{\varphi=0}^{2\pi} (e^{4j\varphi} - je^{3j\varphi} + 5e^{2j\varphi} + 2je^{j\varphi}) d\varphi = \\ &= j \left[\frac{e^{4j\varphi}}{4j} - \frac{e^{3j\varphi}}{3} + 5 \frac{e^{2j\varphi}}{2j} + 2e^{j\varphi} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

b) A $z = 1 + 2e^{j\varphi}$ helyettesítéssel az eljárás ugyanaz mint az a)-ban.

35. Az a)-beli függvény a $z = 3$ pont kivételével mindenütt reguláris;

a b)-beli függvény a végesben mindenütt reguláris;

a c)-beli függvény a $z = -1 + 2j$ és $z = -1 - 2j$ pontok kivételével mindenütt reguláris;

a d)-beli függvény a $\frac{\pi}{2} + k\pi$; ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) pontok kivételével mindenütt reguláris;

az e)-beli függvény az $\text{Im } z = 0$; $\text{Re } z < -2$ bemetszés pontjai kivételével mindenütt reguláris.

Tehát mindegyik függvény reguláris a $|z| = 1$ körön és az általa határolt tartományon és így a Cauchy-alaptétel értelmében a kérdéses integrálok értéke 0.

36. A. Mindegyik függvény reguláris az integrációs G görbén és az általa határolt tartományon. Így a Cauchy-tétel értelmében az integrálok értéke zérus.

B. Az integrációs görbék felső felén integrálva, az integrálok értéke:

a) 0

b) $e^R(1 - R) - e^{-R}(1 + R)$

c) $\frac{2}{5}$

d) $2 \operatorname{arctg} R$

e) 0

[37]. Mivel a kérdéses zárt tartományon csak a $z = 2 + j$ pontban nem reguláris a függvény, ezért a G menti integrál helyett vehető: a $z_0 = 2 + j$ pontot kívülvevő $|z - 2 - j| = 1$ kör menti integrál. Így $z - 2 - j = e^{j\varphi}$ helyettesítéssel:

$$a) \oint_G \frac{dz}{z - 2 - j} = \oint_{|z-2-j|=1} \frac{dz}{z - 2 - j} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{je^{j\varphi}}{e^{j\varphi}} d\varphi = 2\pi j$$

$$b) \oint_G \frac{dz}{(z - 2 - j)^n} = \oint_{|z-2-j|=1} \frac{dz}{(z - 2 - j)^n} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{je^{j\varphi}}{e^{nj\varphi}} d\varphi = 0$$

[38]. Az a)-beli függvény a $z = \pm \frac{j}{\sqrt{3}}$ pontokban; a b)-beli függvény a $z = +2k\pi$; ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) pontokban; a c)-beli függvény a $z = 2k\pi j$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) pontokban nem reguláris. Ezek a pontok az adott tartományon kívül vannak. Tehát mind a három függvény reguláris az adott kétszeresen összefüggő tartományon és annak G határán, így a kétszeresen összefüggő tartományra vonatkozó Cauchy-alaptétel értelmében a kérdéses integrálok értéke zérus.

[39]. Mindkét függvény reguláris a G görbén és az általa határolt tartományon. Így mindkét integrál értéke zérus.

(40). A Cauchy-integráltétel értelmében olyan $v(xy)$ függvényt kell keresni, amellyel az $f(z) = u(xy) + j v(xy)$ komplex függvény reguláris. Mivel $u(xy)$ harmonikus, így kell, hogy $v(xy)$ az $u(xy)$ harmonikus társfüggvénye legyen. A keresett függvények:

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - x + c$$

ahol c tetszőleges állandó.

[41]. a) Pl.: $k = -6$,

mert $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$

és $z^2 - jz - 6$ gyökei a $|z| = 2$ körön kívül vannak.

b) Pl.: $k = 8$ (tetszőleges $k > 1$),

mert $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$,

és $z^2 - 2jz - k$ gyökei $\forall k > 1$ -re a $|z| = 1$ körön kívül vannak.

(42). Mivel

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{z - j} - \frac{1}{z + j} \right),$$

ezért a keresett görbementi integrál olyan egyszerű integrálok összegére bomlik, amelyeknek értéke vagy 0 vagy $2\pi j$. Így az integrál értéke az adott görbék mentén:

a) π ; b) $-\pi$; c) 0.

[43]. a)

$$\oint_G \frac{dz}{z^2 + 9} = \oint_G \left[\frac{\frac{j}{6}}{z + 3j} - \frac{\frac{j}{6}}{z - 3j} \right] dz$$

Mivel a G menti integrál megegyezik a $z_1 = -3j$ és $z_2 = 3j$ szinguláris pontokat körülvevő körök menti integrálok összegével, ezért

$$\oint_G \frac{dz}{z^2 + 9} = \frac{j}{6} \oint_{K_1} \frac{1}{z + 3j} - \frac{j}{6} \oint_{K_2} \frac{1}{z - 3j} dz = \frac{j}{6} [2\pi j - 2\pi j] = 0.$$

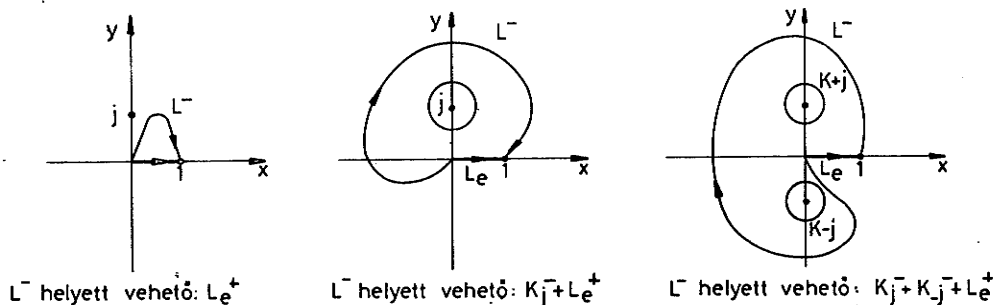
b) A szinguláris pontok közül csak a $z_1 = 0$ és $z_2 = 2$ esik G belsejébe, ezért

$$\oint_G \frac{1}{z(z^2 - 4)} dz = 2\pi j \left[-\frac{1}{4}\right] + 2\pi j \left[\frac{1}{8}\right] = -\frac{\pi j}{4}.$$

c) A $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -j$ szinguláris pontok mind G belsejében vannak, ezért

$$\oint_G \frac{3z - 1}{z(z - 1)(z + j)} dz = 2\pi j \left[-j + \frac{2}{1 + j} - \frac{3j + 1}{j - 1}\right].$$

[44]. A Cauchy-integráltétel értelmében a $z = 0$ és $z = 1$ pontokat összekötő, tetszőleges (de a $+j$ és $-j$ pontokon át nem menő) L rektifikálható görbe - az integrál értékének változatlanul hagyása mellett - helyettesíthető olyan L^* görbével, amely a $|z + j| = 1$, $|z - j| = 1$ körök és a $z = 0$ pontot a $z = 1$ ponttal összekötő egyenesszakasz véges számú összetevéséből áll. A körök menti integrálok értéke $+\pi$ vagy $-\pi$ aszerint, hogy azokat milyen irányban járjuk be; a $z = 0$ pontot a $z = 1$ ponttal összekötő egyenesszakasz mentén az integrál értéke: $\frac{\pi}{4}$. Így a kérdéses integrál lehetséges értékei: $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (l. 64. ábra)



45. Legyen a gyűrűtartomány két rögzített pontja: $z_1 = -1$ és $z_2 = 1$; az őket összekötő két görbe a $|z| = 1$ kör felső- és alsó-félköríve.

a) A c_1 felső félkörív egyenlete:

$$z(\varphi) = e^{j\varphi} ; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

így

$$\int_{\substack{-1 \\ (c_1)}}^1 \frac{1}{z} dz = \int_{\pi}^0 \frac{1}{e^{j\varphi}} \cdot je^{j\varphi} d\varphi = j\pi .$$

b) A c_2 alsó félkörív egyenlete:

$$z(\varphi) = e^{j\varphi} ; \quad -\pi \leq \varphi \leq 0$$

így:

$$\int_{\substack{-1 \\ (c_2)}}^1 \frac{1}{z} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{je^{j\varphi}}{e^{j\varphi}} d\varphi = -j\pi$$

Tehát

$$\int_{\substack{-1 \\ (c_1)}}^1 \frac{1}{z} dz \neq \int_{\substack{-1 \\ (c_2)}}^1 \frac{1}{z} dz .$$

46. a) Legyen C_0 olyan görbe, amely nem kerüli meg az origót (l. 65/a ábra)

A Newton-Leibniz formula értelmében:

$$\int_{\substack{1 \\ (C_0)}}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = [\ln \zeta]_{\zeta=1}^z = \ln z = \ln|z| + j \operatorname{arc} z$$

ahol $\ln z$ a logaritmus-reláció főértéke ($0 < \operatorname{arc} z < \pi$)

b) Legyen C_1 olyan görbe, amely egyszer kerüli meg az origót (l. 65/b ábra). Ekkor a logaritmus-érték számításánál azt a z értéket kell venni, amelynél az arcus-változás 2π . így

$$\int_{(C_1)}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = \ln|z| + j(\text{arc } z + 2\pi) =$$

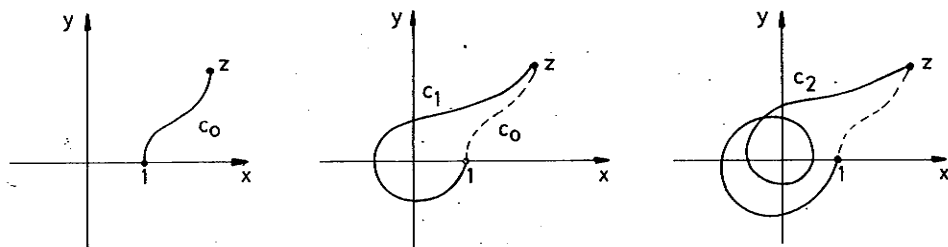
$$= [\ln|z| + j \text{ arc } z] + 2\pi j$$

azaz:

$$\int_{(C_1)}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = \ln z + 2\pi j$$

c) Legyen C_k olyan görbe, amely k -szor kerüli meg az origót (l. 65/c ábra), ekkor - felhasználva, hogy $\ln z = \ln|z| + j \text{ arc } z$ -

$$\int_{(C_k)}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = \ln z + 2k\pi j$$



65/a, b, c ábra

(47). Az integrálandó függvények mind folytonosak és mindegyikhez található $F(z)$ primitív függvény, amelyre $F'(z) = f(z)$. Ezért mindhárom integrál független a görbe alakjától és integráljuk értéke primitív függvényeik segítségével - a Newton-Leibniz formulával - határozható meg. így

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int_j^{\frac{j}{2}} e^{\pi z} dz &= \frac{1}{\pi} [e^{\pi z}]_j^{\frac{j}{2}} = \frac{1}{\pi} \left[e^{\frac{\pi j}{2}} - e^{\pi j} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} [j + 1]; \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad e + \frac{1}{e};$$

$$\text{c)} \quad 0.$$

$$\text{[48]. a)} \quad A$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{j \frac{\varphi}{2}}; \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

függvény a $\varphi = 0$ félegyenes pontjaiban - így a $z = 1$ pontban - nem reguláris.

A $\sqrt{z}$ reláció egy másik ága, az

$$f_1(z) = \sqrt{r} e^{j \frac{\varphi}{2}}; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

függvény a $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ félegyenes pontjai kivételével mindenütt reguláris és felső félsíkbeli értékei megegyeznek az integrálandó $\sqrt{z}$ függvény értékeivel, úgy hogy az helyettesíthető f_1 -gyel. Mivel az f_1 függvény primitív függvénye:

$$F_1(z) = \frac{2}{3} \sqrt{z}^3 = \frac{2}{3} \sqrt{r}^3 e^{j \frac{3\varphi}{2}}; \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}\right)$$

amely f_1 értelmezési tartományán differenciálható, ezért

$$\int_{-1}^1 \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \left[\sqrt{r}^3 e^{\frac{3j\varphi}{2}} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{2}{3} \left[e^0 - e^{\frac{3j\pi}{2}} \right] = \frac{2}{3} (1 + j).$$

b) Az alsó félsíkon az adott $\sqrt{z}$ függvény helyettesíthető az

$$f_2(z) = \sqrt{r} e^{j\frac{\varphi}{2}}; \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{5\pi}{2}$$

ággal, mert itt értékeik megegyeznek. A differenciálható

$$F_2(z) = \frac{2}{3} \sqrt{z} = \frac{2}{3} \sqrt{r} e^{j\frac{3\varphi}{2}}; \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{5\pi}{2}$$

függvény f_2 primitív függvénye. Így az alsó félsíkon tetszőleges L görbe mentén integrálva:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} (e^{2\pi j} - e^{\frac{3\pi j}{2}}) = \frac{2}{3} (-1 + j).$$

54. Egy lehetséges előállítás:

$$p = x^3 - y^2 + 2y - x$$

$$q = 2x + y - 2xy$$

$$f(z) = jz^2 + (2 - j)z.$$

3.8 CAUCHY-INTEGRÁLFORMULA FÜGGVÉNYRE ÉS DIFFERENCIÁLHÁNYADOSRA

[55]. Az integrandus

$$\frac{3z}{z^2 + jz + 2} = \frac{3z}{(z - j)(z + 2j)} = \frac{1}{z - j} + \frac{2}{z + 2j}$$

a $z = j$ és a $z = -2j$ pontok kivételével a $|z| = 3$ körtartományon reguláris. Az integrál értékének meghatározása különböző módon történhet. Pl.:

I. mód:

A többszörösen összefüggő tartományra vonatkozó Cauchy-integrál-tétel értelmében a $|z| = 3$ kör menti integrál értéke megegyezik a $K_1: |z - j| = \varepsilon_1$ és $K_2: |z + 2j| = \varepsilon_2$ diszjunkt körök menti integrálok összegével:

$$\oint_G \frac{3z}{z^2 + jz + 2} dz = \oint_{K_1} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{2}{z + 2j} \right) dz + \oint_{K_2} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{2}{z + 2j} \right) dz.$$

Az első integrálban az integrandus 2. tagja, a másodikban az integrandus 1. tagja reguláris a jelzett körön és annak belsőjében, így ezek integrálja 0. Mivel a $z = a$ pontot pozitív irányban egyszer megkerülő tetszőleges zárt görbe mentén integrálva:

$$\oint_G \frac{1}{z - a} dz = 2\pi j, \quad \text{ezért}$$

$$\oint_G \frac{3z}{z^2 + jz + 2} dz = 2\pi j + 2 \cdot 2\pi j = 6\pi j.$$

II. mód:

A Cauchy-integráltétel és a Cauchy-integrálformula felhasználásával:

$$\oint_G \frac{3z}{z^2 + jz + 2} dz = \oint_{K_1} \frac{\frac{3z}{z + 2j}}{z - j} dz + \oint_{K_2} \frac{\frac{3z}{z - j}}{z + 2j} dz =$$

$$= 2\pi j \left[\frac{3z}{z + 2j} \right]_{z=j} + 2\pi j \left[\frac{3z}{z - j} \right]_{z=-2j} = 6\pi j.$$

56. a) $\frac{\pi}{3}$

b) $-\frac{\pi}{3}$

c) 0

Ugyanis:

$$\oint_G \frac{dz}{z^2 + 9} = \oint_G \frac{dz}{(z + 3j)(z - 3j)}$$

és így a Cauchy-integrálformulát alkalmazva:

a) esetben:

$$\oint_G \frac{dz}{z^2 + 9} = \oint_G \frac{1}{z + 3j} dz = 2\pi j \left[\frac{1}{z + 3j} \right]_{z=3j} = \frac{\pi}{3}$$

b) esetben:

$$\oint_G \frac{dz}{z^2 + 9} = \oint_G \frac{1}{z - 3j} dz = 2\pi j \left[\frac{1}{z - 3j} \right]_{z=-3j} = -\frac{\pi}{3}$$

c) esetben a Cauchy-integráltételt és integrálformulát alkalmazva

$$\oint_G \frac{dz}{z^2 + 9} = \oint_{K_1} \frac{dz}{z^2 + 9} + \oint_{K_2} \frac{dz}{z^2 + 9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$$

ahol $K_1: |z - 3j| = \varepsilon_1$ és $K_2: |z + 3j| = \varepsilon_2$ egymásba nem nyúló körök.

57.

$$I = \oint_G \frac{dz}{z(z^2 - 1)} = \begin{cases} -2\pi j, & \text{ha csak a } z_1 \text{ pont van } G \text{ belsejében} \\ \pi j, & \text{ha } \begin{cases} \text{vagy csak a } z_2 \text{ pont van } G \\ \text{vagy csak a } z_3 \end{cases} \\ -\pi j, & \text{ha } \begin{cases} \text{vagy a } z_1 \text{ és } z_2 \\ \text{vagy a } z_1 \text{ és } z_3 \end{cases} \\ 2\pi j, & \text{ha a } z_2 \text{ és a } z_3 \\ 0, & \text{ha } \begin{cases} \text{vagy az összes szinguláris pont} \\ \text{vagy nincs szinguláris pont} \end{cases} \end{cases}$$

G-ben van
G belsejében

Ugyanis:

Az integrálandó függvény szinguláris pontjai:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -1.$$

Ha a szinguláris pontok közül G belsejében

1) csak a $z_1 = 0$ pont van, akkor

$$I = 2\pi j \left[\frac{1}{z^2 - 1} \right]_{z=0} = -2\pi j$$

2) csak a $z_2 = 1$, vagy csak a $z_3 = -1$ pont van, akkor

$$I = 2\pi j \left[\frac{1}{z(z+1)} \right]_{z=1} = \pi j$$

3) $z_1 = 0$ és $z_2 = 1$, vagy $z_1 = 0$ és $z_3 = -1$ pont van, akkor

$$I = 2\pi j \left[-1 + \frac{1}{2} \right] = -\pi j$$

4) $z_2 = 1$ és $z_3 = -1$ pont van, akkor

$$I = 2\pi j;$$

5) ha mindhárom szinguláris pont G belsejében van, vagy egyetlen szinguláris pont sincs G belsejében, akkor

$$I = 0.$$

58.

$$\boxed{a)} \quad \frac{\pi j}{32}$$

$$c) \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{b)} \quad \frac{21\pi j}{8}$$

$$d) \quad \frac{\pi}{16}$$

Ugyanis pl. az a) és b)-beli integrandusok az integrációs görbe által határolt tartománynak csak a $z = \frac{\pi}{6}$ pontjában nem regulárisak. Így az a) integrált a Cauchy-integrál-formula alapján számolva:

$$\oint_G \frac{\sin^6 z}{z - \frac{\pi}{6}} dz = 2\pi j \left[\sin^6 z \right]_{z=\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi j}{2^6} = \frac{\pi j}{32}.$$

A b) integrált a differenciálhányadosra vonatkozó Cauchy-integrálformula alapján számolva

$$\oint_G \frac{\sin^6 z}{(z - \frac{\pi}{6})^3} dz = \frac{2\pi j}{2!} \left[\frac{d^2}{dz^2} (\sin^6 z) \right]_{z=\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \pi j [30\sin^4 z \cos^2 z - 6\sin^6 z]_{z=\frac{\pi}{6}} = \frac{21\pi j}{8}$$

59. a) 1 ;

b) $-\frac{e}{2}$;

c) $1 - \frac{e}{2}$;

60. a) 2π

b) $\frac{\pi j}{4}$

c) $-\frac{\pi j}{2}$

d) $j\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$

e) 0

61. a) $2\pi j$

b) πj

c) $\frac{2\pi j}{\cos^2 1}$

d) $8\pi j \frac{e^{-2}}{3}$

62. a) $2\pi j e^2$

b) $-2\pi \sin 3$

c) 0

d) 0

$$e) \frac{2\pi j}{4!} e^3$$

$$f) 2\pi j \frac{6j \cos 3j - \sin 3j}{18}$$

$$63. a) 2\pi j$$

$$b) 2\pi j \sin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$c) \frac{\pi^2 j}{2}$$

$$d) 0$$

$$e) 2\pi j(1 + \cos 1)$$

$$f) 0$$

$$g) \pi$$

$$h) \pi j$$

$$64. a) \pi j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) 8\pi j$$

$$c) \frac{\pi j}{2} (j + \pi)$$

$$d) \frac{\pi}{2}$$

$$e) \frac{\pi}{16}$$

$$f) 0$$

$$65. a) \frac{\pi j}{2}$$

$$b) \frac{\sin a}{a}$$

$$c) e^a \left(1 + \frac{a}{2}\right)$$

66. a) $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \sin t$

b) $f(t) = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t)$

Ugyanis: az a) esetben:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{e^{zt}}{(z-j)(z+j)} dz$$

és így

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2\pi j} \left[\oint_{K_1} \frac{e^{zt}}{z-j} dz + \oint_{K_2} \frac{e^{zt}}{z+j} dz \right]$$

ahol $K_1: |z-j| = \varepsilon_1$ és $K_2: |z+j| = \varepsilon_2$ diszjunkt körök.
Tehát:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \left\{ \left[\frac{e^{zt}}{z-j} \right]_{z=j} + \left[\frac{e^{zt}}{z+j} \right]_{z=-j} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{e^{jt}}{2j} - \frac{e^{-jt}}{2j} \right] = \frac{1}{2\pi j} \sin t \end{aligned}$$

és hasonló módon számítható ki a b) integrál is.

67. $|a| < 5$

[68]. Alkalmazzuk a Cauchy-integráltételt a $2z^2 - z - 2$ függvényre és a $|z| = 3$ körre! Ezzel:

a) esetben: $|z_0| < 3$ -ra

$$f(z_0) = (2z_0^2 - z_0 - 2) 2\pi j$$

azaz

$$f(2) = 8\pi j$$

adódik;

b) esetben - $|z_0| > 3$ -ra -:

$$f(z_0) = 0$$

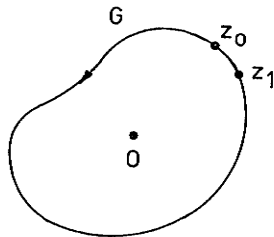
hiszen az integrálandó függvény reguláris a $|z| = 3$ körön és annak belsejében.

[69]. A feltétel értelmében $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ nem függ az

integrációs úttól, ha z_0 és z a T tartomány belső pontjai. így rögzített z_0 esetén:

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z),$$

ahol $F(z)$ egy T -ben értelmezett függvény, amely az integrál-függvényre vonatkozó tétel értelmében (1. komplex függvénytan jegyzet V. fejezet 1.6.1 tétele, ahol a bizonyítás során csak f folytonosságát használjuk fel) T minden pontjában differenciálható (azaz reguláris T -ben) amiből következik, hogy f , mint egy reguláris F függvény differenciálhányadosa, ugyancsak reguláris.



66. ábra

[70]. Járjuk be a G görbét z_0 -ból kiindulva pozitív irányban a görbének egy z_0 -hoz közeli z_1 pontjáig (azaz a nem teljesen zárt G' görbén) majd tartsunk z_1 -gyel a z_0 -hoz a G görbén (l. 66. ábra). Mivel z_0 -tól z_1 -ig $\ln z$ -nek egy reguláris ágát tekintjük:

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_0} (\ln z_1 - \ln z_0) = 2\pi j$$

Másrészt az $f(z) \cdot \ln z$ függvény reguláris a G' görbét belülről határoló keskeny sávban, ezért itt érvényes rá a Newton-Leibniz tétel. így:

$$\begin{aligned}
\oint_G f'(z) \cdot \ln z \, dz &= \oint_G [f(z) \cdot \ln z]' \, dz - \oint_G \frac{f(z)}{z} \, dz = \\
&= \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \int_{G'} [f(z) \cdot \ln z]' \, dz - 2\pi j f(0) = \\
&= \lim_{z_1 \rightarrow z_0} [f(z_1) \cdot \ln z_1 - f(z_0) \cdot \ln z_0] - 2\pi j f(0) = \\
&= 2\pi j [f(z_0) - f(0)],
\end{aligned}$$

ahol az átalakítások során felhasználtuk a Cauchy-integráltételt $f(z)$ -re, G -re és a $z_0 = 0$ pontra.

[71]. Nem,
Ugyanis:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$$

Tehát $f(0) = 0$ és a $0 < |z| < 1$ "gyűrűben":

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{2\pi j} \oint \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta = 0,$$

amiből következik, hogy a $|z| = 1$ körön az f függvény határértéke 0, míg a φ függvény értéke ott mindenütt 1.

[72]. Mivel z_0 nincs a G görbén, ezért vagy az általa határolt tartományon belül, vagy azon kívül van.

Ha z_0 belső pont, akkor a Cauchy-integráltétel értelmében mindkét integrál értéke $2\pi j \cdot f'(z_0)$, úgy hogy a két integrál megegyezik.

Ha z_0 külső pont, akkor mind az $\frac{f(z)}{(z - z_0)^2}$, mind pedig az $\frac{f'(z)}{z - z_0}$ függvény reguláris a teljes G által határolt tartományon. Így a G görbén vett integráljaik 0-ák, tehát egyenlőek.

[73]. Az $f(z)$ függvény regularitásából nyilvánvalóan következik az n -edik hatvány - $[f(z)]^n$ - regularitása a G görbén és ennek belsejében. Az állítás a Cauchy-integrálformula a G görbére és az $[f(z)]^n$ függvényre.

[75]. Felhasználjuk a differenciálhányadosra vonatkozó Cauchy-integrálformulát:

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi j} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz,$$

ahol

$$f(z) = z^3 + 2z; \quad f''(z) = 6z.$$

Ha z_0 belső pont, akkor a Cauchy-integráltétel értelmében:

$$\varphi(z_0) = \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz = \pi j \cdot 6z_0.$$

Ha z_0 külső pont akkor az integrálandó függvény a G görbén és az általa határolt tartományon reguláris, úgy hogy a Cauchy-integrál tétel értelmében az integrál értéke 0. így.

$$\varphi(z_0) = 0.$$

[76]. a) A Cauchy-integrálformula alapján:

$$\oint_G \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi j [e^{kz}]_{z=0} = 2\pi j$$

b) Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} z &= e^{j\varphi} \\ \dot{z} &= j e^{j\varphi} \end{aligned}$$

ezzel:

$$\oint_G \frac{e^{kz}}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ke^{j\varphi}}}{e^{j\varphi}} e^{j\varphi} d\varphi = j \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(\cos\varphi + j \sin\varphi)} d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= j \int_{-\pi}^{\pi} [e^{k \cos \varphi} \cos(k \sin \varphi) + j e^{k \cos \varphi} \sin(k \sin \varphi)] d\varphi \\
&= - \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \varphi} \sin(k \sin \varphi) d\varphi + j \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \varphi} \cos(k \sin \varphi) d\varphi \\
&= 2\pi j
\end{aligned}$$

Mivel mindkét integrál valós értéket ad és két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha mind a valós, mind a képzetes részük megegyezik, ezért:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \varphi} \sin(k \sin \varphi) d\varphi = 0$$

és

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \varphi} \cos(k \sin \varphi) d\varphi = 2\pi$$

az állításnak megfelelően.

[77]. Legyen z_0 tetszőleges komplex szám. Ekkor az f függvény $(n+1)$ -edik deriváltjára - a z_0 pontban, egy R sugarú körön - alkalmazva a Cauchy-egyenlőtlenséget:

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{M(n+1)!}{R^{n+1}} \leq \frac{(R + |z_0|)^n (n+1)!}{R^{n+1}}$$

Ha R a végtelenhez tart, a jobboldal 0-hoz tart, úgy hogy a reguláris f függvény $(n+1)$ -edik deriváltja mindenütt 0, azaz f legfeljebb n -edfokú polinom.

4.§ CAUCHY-INTEGRÁLFORMULA NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYE

4.1 CAUCHY EGYENLŐTLENSÉGEK

[78]. Mivel f reguláris $|z| \leq R$ -ben és $f(0) = 0$, ezért $|z| \leq R$ -ben hatványsora:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

alakú. így

$$\frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + \dots$$

A reguláris és a határon

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{|f(z)|}{R} \leq \frac{M}{R}.$$

Tehát a maximum-elv alapján minden $|z| \leq R$ -re

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{M}{R},$$

így

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$$

[79]. A Cauchy-integrálformula értelmében

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{j\varphi}) e^{-jn\varphi} d\varphi$$

Ha az $e^{j\Phi_0}$ egységnyi abszolútértékű komplex számot úgy választjuk, hogy $e^{j\Phi_0} \cdot f^{(n)}(a)$ valós legyen, akkor

$$\frac{M \cdot n!}{R^n} = \frac{n!}{2\pi \cdot R^n} \int_0^{2\pi} e^{j\Phi_0} f(a + re^{j\varphi}) \cdot e^{-jn\varphi} d\varphi$$

azaz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{j\varphi}) e^{j(\Phi_0 - n\varphi)} d\varphi = M$$

Az integrál értéke valós, tehát egyenlő valós részének integráljával. Azonban

$$|\operatorname{Re} f(a + re^{j\varphi}) e^{j(\Phi_0 - n\varphi)}| \leq M,$$

így a körön

$$\operatorname{Re} \left[\frac{f(z) \cdot e^{j\Phi_0}}{(z-a)^n} \right] = M ,$$

tehát

$$\operatorname{Im} f(z) = 0; \quad e^{j\Phi_0} \cdot \frac{f(z)}{(z-a)^n} = M ,$$

azaz

$$f(z) = M e^{-j\Phi_0} \cdot \frac{(z-a)^n}{R^n}$$

ami $e^{-j\Phi_0} = c$ jelöléssel éppen az állításbeli függvény a körön. Mivel $f(z)$ reguláris és a körvonalon megegyezik $\frac{Mc(z-a)^n}{R^n}$ -nel, ezért mindenütt megegyeznek.

[80]. A Cauchy egyenlőtlenségek szerint

$$f^{(n)}(0) \leq n! \frac{M(R)}{R^n} ,$$

ahol $M(R)$ az f függvény abszolút értékének maximuma az R sugarú körön. Minthogy

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} ,$$

ezért az R sugarú körön:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-R} ,$$

tehát

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{1}{R^n(1-R)} .$$

Ez a becslés minden $R < 1$ -re érvényes. A legjobb becslést akkor kapjuk, ha $R^n(1 - R)$ maximális. A függvény deriválásával meghatározva a minimumhelyet, arra

$$R = \frac{n}{n+1}$$

adódik, így a legjobb becslés:

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

[81]. A Cauchy-féle egyenlőtlenségek felhasználásával (ugyanis: $|z| < \rho$ esetén z köré írható a $|z| \leq R$ körön belül haladó $(R - \rho)$ sugarú kör, amelynek minden pontjára $|f| \leq M$):

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{M \cdot n!}{(R - \rho)^n}.$$

4.2 LIONVILLE-TÉTEL

[82]. a) Nem.

Ha T a teljes komplex számsík, akkor bármely, legalább elsőfokú polinom - pl. $f(z) = z$ - nyilván reguláris, de nem korlátos T -n.

Ha T korlátos - pl. a $|z| < 1$ körbelső - akkor például az $f(z) = \frac{1}{1-z}$ függvény e tartományon reguláris, de nem korlátos.

(Csak korlátos és zárt T -re következne f regularitásából f korlátossága a Bolzano tételből.)

b) Nem.

Az a) válasz szerint pl. $f(z) = z$ ellenpélda erre az állításra, hiszen ez, az egész síkon reguláris, de nem konstans függvény.

[83]. A Cauchy-integrálformula értelmében

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(z)}{z-b} dz - \frac{1}{2\pi j} \oint_G \frac{f(z)}{z-a} dz = \\ &= \frac{b-a}{2j} \oint_G \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)} dz \end{aligned}$$

Mivel $G : |z-a| = R$, ezért

$$|z-b| = |z-a+a-b| \geq |z-a| - |a-b| = R - |a-b| \geq \frac{R}{2},$$

ha R -et olyan nagynak választjuk, hogy $|a-b| < \frac{R}{2}$ legyen.

A Liouville-tétel feltétele, hogy $|f(z)| < M$ és felhasználva, hogy ha f integrálható egy S ívhosszúságú L görbén és ott $|f| < M$, akkor

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq M \cdot S$$

így

$$L = G : |z - a| = R$$

esetén

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{|b - a|}{2\pi} \left| \oint \frac{f(z)}{(z - a)(z - b)} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{|b - a| \cdot M \cdot 2\pi R}{2\pi \left(\frac{R}{2}\right) R} = \frac{2|b - a|M}{R}. \end{aligned}$$

Ebből következik: ha $R \rightarrow \infty$, akkor

$$f(b) - f(a) = 0,$$

illetve

$$f(b) = f(a).$$

Mivel a és b tetszőleges pontok, ezért szükségképpen

$$f(z) = \text{konstans}.$$

[84]. Legyen z_0 a z sík egy tetszőleges pontja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenség értelmében:

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{M(R + |z_0|)^n}{R^{n+1}} (n + 1)!,$$

mert minden $|z - z_0| < R$ esetén

$$|f(z)| \leq M(R + |z_0|)^n.$$

Ha $R \rightarrow \infty$, akkor $f^{(n+1)}(z_0) = 0$. Tehát minden z -re:

$$f^{(n+1)}(z) = 0,$$

amiből a Newton-Leibniz formula értelmében:

$$f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0) = \int_{z_0}^z f^{(n+1)}(z_0) dz \equiv 0,$$

azaz:

$$f^{(n)}(z) = f^{(n)}(z_0).$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$f^{(n)}(z) = C,$$

amiből az állítás következik.

[85]. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy f reguláris a

$$0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b$$

téglalapon. Belátjuk, hogy akkor f reguláris az egész komplex számsíkon, ami ellentmond a Liouville tételnek.

Vegyük a komplex sík téglalapácsos felosztását. A téglalapács téglalapjainak belső pontjaiban f differenciálhatósága nyilvánvaló. f differenciálható a téglalapok határvonalainak belső pontjaiban is. Ugyanis bármely téglalap határvonalának egy belső pontját tekintve a két közrefogó téglalapra vonatkozó differenciálhányadosok egyenlőek, mert a közös határvonalon képezhetők. Ugyanez a helyzet a téglalapok csúcsaiban is. Itt mind a négy differenciálhányados megegyezik, hiszen a szomszédos téglalapok közös határvonalán képezve a differenciálhányadosok megegyeznek. (Az, hogy f minden zárt téglalapon reguláris, következik a kétszeres periódicitásból.) Így f az egész síkon reguláris és korlátos, hiszen a periódicitás és folytonosság miatt f felveszi maximumát bármely zárt téglalapon. (Bolzano-tétel) De akkor a Liouville-tétel értelmében f konstans lenne és ez ellentmond a feltételnek.

4.3 MAXIMUM-, MINIMUM-TÉTEL

[86]. A függvény reguláris a $|z| \leq 1$ körtartományon, ezért abszolútértéke a maximumát a $|z| = 1$ körön veszi fel.

A $|z| = 1$ körön:

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= |\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2j \cos \varphi \sin \varphi - 2\cos \varphi - 2j \sin \varphi + 3|^2 = \\ &= (\cos 2\varphi - 2\cos \varphi + 3)^2 + (\sin 2\varphi - 2\sin \varphi)^2 = \\ &= 14 - 16\cos \varphi + 6\cos 2\varphi = F(\varphi) \end{aligned}$$

Ennek a függvénynek ott van maximuma, ahol

$$\frac{dF}{d\varphi} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d^2 F}{d\varphi^2} < 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\varphi} &= 16 \sin \varphi - 12 \sin 2\varphi = 0 \\ &= 2 \sin \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi = \\ &= \sin (2 - 3 \cos \varphi) = 0, \end{aligned}$$

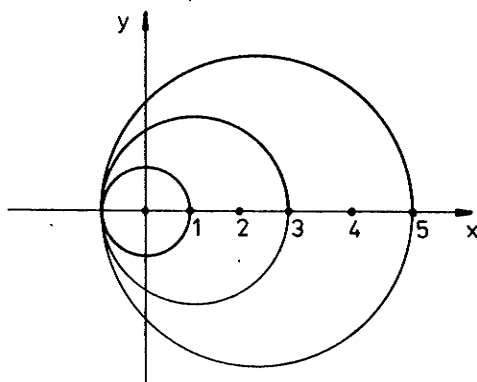
ha

$$\sin \varphi = 0, \quad \text{vagy} \quad \cos \varphi = \frac{2}{3},$$

ami akkor áll fenn, ha $\varphi = k\pi$; $0 < \varphi \leq 2\pi$ vagy ha

$\varphi = \arccos \frac{2}{3}$. Közülük maximális a függvényérték, ha $\varphi = \pi$, azaz az egységkör $z = -1$ pontjában.

87. a) $z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$, tehát $|f(z)| = |z - 1||z - 2|$. Másrészt a szorzat mindkét tényezője maximális a $|z| \leq 1$ körön $z = -1$ -re, hiszen a $|z| = 1$ kör a $z = -1$ pontban belülről érinti a $|z - 1| = 2$ és $|z - 2| = 3$ kört egyaránt (l. 67. ábra). A keresett maximum tehát 6.



67. ábra

b) $|z| \leq 1$ esetén $|z^2| \leq 1$ is teljesül. Ugyanis:
 $z^4 - 2z^2 + 1 = |z^2 - 1|^2$ és - az a) résznél követett gondolatmenet szerint - a $|z^2| = 1$ körön a $|z^2 - 1|$ akkor maximális, ha $z^2 = -1$, azaz ha $z = \pm j$. A keresett maximális érték 4.

c) Az Euler-formula értelmében:

$$\cos 3z = \frac{1}{2} \left(e^{3jz} + \frac{1}{e^{3jz}} \right)$$

Ha z befutja a $|z| = 1$ kört, akkor $3jz$ a $|z| = 3$ kört futja be. Ebből következik, hogy elég megkeresni az

$$\left| e^z + \frac{1}{e^z} \right|$$

maximumát a $|z| \leq 3$ tartományon. Mivel $z = x + jy$ esetén $e^z = e^x (\cos y + j \sin y)$ abszolútértéke e^x , ezért rögzített x mellett akkor a legnagyobb, ha $y = 0$. Ugyanis

$$\left| e^z + \frac{1}{e^z} \right| \leq |e^z| + \frac{1}{|e^z|} = e^x + \frac{1}{e^x}$$

Mivel $-3 \leq x \leq 3$, ezért $e^x + \frac{1}{e^x}$ az $x = \pm 3$ esetén a legnagyobb. Tehát $|z| \leq 1$ körlemezén $\cos 3z$ maximuma:

$$\frac{1}{2} \left(e^3 + \frac{1}{e^3} \right)$$

d) $z = \frac{1}{2}$ -nél a nevező 0, így a tört abszolútértéke $z \rightarrow \frac{1}{2}$ esetén a ∞ -hez tart. Tehát az adott függvény abszolútértékének nincs maximuma $|z| \leq 1$ -ben.

88. Igaz.

Legyen T tetszőleges többszörösen összefüggő tartomány és f reguláris T -n. Belátjuk, hogy f nem veheti fel maximumát T belső pontjában, hacsak f nem konstans.

A Gauss-féle középértéktétel szerint valamely $a \in T$ belső pontra:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int f(a + Re^{j\varphi}) d\varphi$$

ahol $R > 0$ olyan, hogy az "a" körüli R sugarú kör még T -hez tartozik. Legyen θ olyan, egységsíki abszolútértékű komplex szám, amellyel $\theta \cdot f(a)$ valós. Így

$$\theta \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta \cdot f(a + Re^{j\varphi}) d\varphi$$

miatt a jobboldali integrál valós, amiből következik, hogy a jobboldali integrál értéke megegyezik a

$$\theta \cdot f(a + Re^{j\varphi})$$

függvény valós részének integráljával. Mivel

$$|\theta \cdot f(a + Re^{j\varphi})| \leq \theta f(a)$$

ez csak úgy lehet, ha minden φ -re:

$$\theta \cdot f(a + Re^{j\varphi}) = \theta f(a)$$

így $f(z)$ konstans a körvonalon; torlódó pontsorozaton konstans lévén, konstans az egész T tartományon.

91. Maximális az $|f(z)|$ a $z = 2$ pontban; minimális a $z = 0$ pontban.

[92]. a) Az $|f| = |e^{2z-z^2}| = e^{2x-x^2+y^2}$ függvény folytonos a $|z| \leq 2$ zárt halmazon, így ott létezik maximuma, amelyet a maximum-tétel értelmében a $|z| = 2$ (azaz: $x^2 + y^2 = 4$) körön vesz fel. Itt

$$|f| = e^{2x-x^2+(4-x^2)} = e^{-2x^2+2x+4} = F(x)$$

Mivel

$$F'(x) = 0, \quad \text{ha } x = \frac{1}{2}$$

és itt

$$F''(x) > 0$$

ezért f -nek az $x = \frac{1}{2}$; $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$ pontokban maximuma van.

b) A $g(x, y) = -x^2 + y^2 + 2x$ folytonos függvénynek zárt tartományon van maximuma és ezt - mint láttuk - a $|z| \leq 2$ tartomány $x = \frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$ határpontjaiban veszi fel. Belső pontban is van maximuma, mert $\text{grad } g = (2 - 2x)\underline{i} + 2y\underline{j} = \underline{0}$,

ha $x = 1$, $y = 0$ és ebben a pontban $g = 1$, míg - a folytonosság miatt - a határkör $x = \frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$ pontjainak környezében g tetszőlegesen megközelíti a $-\frac{18}{4} = -4,5$ értéket.

[93]. Legyen $f(z) = z$ a $|z| \leq 1$ körtartományon. Ekkor $f(z) = 0$ ha $z = 0$ és amennyiben $z = re^{j\varphi}$ a tartomány tetszőleges pontja, akkor bármely pontban $|f(z)| = r$. Ebből nyilvánvaló, hogy $|f|$ minimális értéke nem lehet a $|z| = 1$ határkörön, hanem ott ahol $r = 0$, azaz a $z = 0$ pontban.

[94]. A Gauss-féle középértéktétel szerint, ha "a" belső pontja T-nek és az "a" középpontú R sugarú kör T belsejében van:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{j\varphi}) d\varphi$$

E képletben a baloldalt és a jobboldalt egyaránt valós és képzetes részekre bontva azt kapjuk, hogy az integrandus valós részének integrálja $2\pi \operatorname{Re}(f(a))$.

Tételezzük fel, - az állítással ellentétben - hogy $\operatorname{Re}[f(a)]$ -ban $\operatorname{Re}[f(z)]$ maximális, akkor $\operatorname{Re}[f(a + Re^{j\varphi})]$ -nek is minden φ -re maximálisnak kell lennie. Így $\operatorname{Re}[f(z)]$ a T-ben mindenütt konstans, mert T bármely pontjához összefüggő kör-láncokon eljuthatunk. Ekkor azonban $\frac{\partial u}{\partial x}$ és $\frac{\partial u}{\partial y}$ egyaránt 0.

Azaz a Cauchy-Riemann differenciálegyenletek szerint $\frac{\partial v}{\partial x}$ és $\frac{\partial v}{\partial y}$ is 0, tehát v is konstans T-ben. Ekkor tehát $f(z)$ konstans T-ben, ami ellentmond az $f(z) \neq C$ feltevésnek.

[95]. Az adott tartományon az $u(x, y) = e^x \cos y$ harmonikus függvény maximumát az

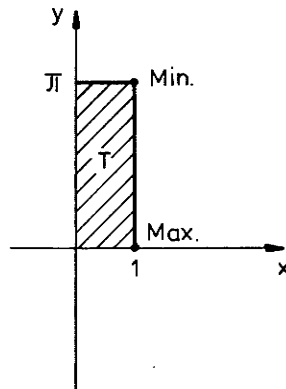
$$x = 1, \quad y = 0 \quad (\text{azaz: } z = 1)$$

pontban, minimumát pedig az

$$x = 1, \quad y = \pi \quad (\text{azaz: } z = 1 + j\pi)$$

pontban veszi fel.

Ugyanis az adott T-ben e^x az $x = 1$ -ben maximális, $\cos y$ pedig az $y = 0$ -ban maximális ill. $y = \pi$ -ben minimális. Ezek a pontok valóban a tartomány határán vannak, amint a tétel állítja (l. 68. ábra).



68. ábra

[97]. Tegyük fel, hogy f -nek nincs zérus helye T -ben. Ekkor T minden pontjában $|f(z)| < c$ és $\frac{1}{f(z)}$ regularitása miatt $\frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{c}$, feltéve, hogy $|f(z)| = c$ a T tartomány határán (Maximum-elv). Ez azonban lehetetlen, hiszen $|f(z)| < c$ és $|f(z)| > c$ közül csak az egyik áll fenn.

KOMPLEX FÜGGVÉNYSOROK

1.8 ÁLTALÁNOS FÜGGVÉNYSOROK

1.1 FÜGGVÉNYSOR KONVERGENCIATARTOMÁNYA, KÖZÖNSÉGES-,
ABSZOLÚT- ÉS EGYENLETES KONVERGENCIÁJA

1. a) Minden z -re divergens.

Ugyanis: bármely z esetén. ($n \rightarrow \infty$ miatt) valamely n indexű tagtól kezdve $n > |z|$, így

$$2n > n + |z|; \quad \frac{1}{2n} < \frac{1}{n + |z|}.$$

így $n > |z|$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + |z|}$ sor majorálja a divergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ harmonikus sort. Tehát a minoráns kritérium alapján a sor minden z -re divergens.

b) Minden z -re konvergens.

Ugyanis: a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + |z|}$ sorra minden z -re teljesül a Cauchy-féle konvergencia feltétel, mert

$$\left| \frac{1}{n + |z|} - \frac{1}{n + |z| + k} \right| = \frac{1}{(n + |z|)(n + |z| + k)} \leq \frac{1}{n^2}$$

és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ és a tagok külön-külön is zérushoz tartanak.

így a sor minden z -re konvergens.

(Ez az állítás más úton is könnyen belátható: a sor Leibniz típusú: alternáló tagjai csökkenő abszolútértékűek és 0-hoz tartanak. így a sor konvergens.)

c) Minden z -re konvergens.

Ugyanis: minden z -re

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + |z|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens. így a majoráns kritérium alapján a sor konvergens.

d) Minden z -re konvergens, kivéve a $z = -n^2$; $n=1,2,3,\dots$ pontokat.

2 a) A sor n -edik részletösszege:

$$\begin{aligned} s_n(z) &= z^2(1-z^2) + z^4(1-z^2) + \dots + z^{2n}(1-z^2) = \\ &= z^2 - z^4 + z^4 - z^6 + \dots + z^{2n} - z^{2n+2} = \\ &= z^2 - z^{2n+2} \end{aligned}$$

Mivel $|z| < 1$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{2n+2} = 0$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z^2 - z^{2n+2}) = z^2,$$

ami azt jelenti, hogy az adott függvénysor a $|z| < 1$ körtartományon konvergens és ott összegfüggvénye

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = z^2$$

b) A tagok abszolútértékeiből alkotott sor n -edik részletösszege

$$\sum_{k=1}^n f_k(z) = |z^2(1-z^2)| + |z^4(1-z^2)| + \dots + |z^{2n}(1-z^2)|,$$

ami egy $q = |z|^2$ sorhányadosú és $a_1 = |1-z^2||z|^2$ -tel kezdődő véges geometriai sor. Így

$$s_n(z) = |1 - z^2||z|^2 \frac{1 - |z|^{2n+2}}{1 - |z|^2}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = \frac{|1 - z^2||z|^2}{1 - |z|^2},$$

ami azt jelenti, hogy az adott függvénysor a $|z| < 1$ körtartományon abszolút konvergens.

c) Ha $z = 1$, akkor

$$s_n(1) = [z^2 - z^{2n+2}]_{z=1} = 0; \quad s(1) = [z^2]_{z=1} = 1$$

úgy, hogy a $z = 1$ helyen $S(z) \neq \lim s_n(z)$ és így ott $S(z)$ nem folytonos.

[3.] a) A függvénysor a $z = -1, -2, \dots$, pontokban nem értelmezett; egyetlen z -re sem abszolút konvergens.

Ugyanis: $n > |z|$ esetén

$$2n > |z| + n \geq |z + n|,$$

tehát

$$\frac{1}{|z + n|} > \frac{1}{2n},$$

ha n elég nagy. Mivel $\sum \frac{1}{2n}$ divergens, ezért a $\sum \frac{1}{z+n}$ sor semmilyen z -re sem abszolút konvergens.

b) A függvénysor a $z = 1$ pontban nem értelmezett; a $|z| < 1$ körbelsőben abszolút konvergens.

Ugyanis:

(1) $|z| < 1$ esetén $|z^n| \rightarrow \infty$, így a sor tagjainak abszolútértéke 1-hez tart, tehát a sor $|z| > 1$ -re nem is konvergens.

$$(2) |z| = 1 \text{ esetén } |z^n| = 1 \text{ és } |1 - z^n| \leq 2$$

így

$$\left| \frac{z^n}{1 - z^n} \right| \geq \frac{1}{2}$$

tehát a sor $|z| = 1$ -re nem konvergens.

$$(3) |z| < 1 \text{ esetén valamely } n\text{-től kezdve } |z^n| < \frac{1}{2}$$

és így

$$\left| \frac{z^n}{1 - z^n} \right| < 2 |z^n|$$

Tehát $|z| < 1$ -re a tagok abszolútértékeiből alkotott sor majorálható egy konvergens geometriai sorral, így a sor abszolút konvergens.

c) A függvényysor az $\text{Im } z = 0$, vagyis a valós tengely pontjaiban abszolút konvergens.

Ugyanis: az Euler formulák értelmében

$$\sin(nz) = \frac{(e^{jz})^n - (e^{-jz})^n}{2j}$$

így:

(1) ha $e^{jz} \neq 1$; azaz $\text{Im } z \neq 0$ akkor elég nagy n -re

$$|\sin(nz)| > \frac{1}{2} \max(|e^{jz}|^n, |e^{-jz}|^n).$$

Mivel $a > 1$ -re $a^n > n^2$ valamely n -től kezdve, ezért $\text{Im } z \neq 0$ esetén a tagok abszolút értéke nem tart a 0-hoz, tehát ilyenkor a sor nem konvergens.

(2) Ha $|e^{jz}| = 1$, azaz $\text{Im } z = 0$, vagyis z valós,

akkor $\sin(nz)$ korlátos és a $\sum_n \frac{1}{n^2}$ majoráns sor konvergens úgy hogy ebben az esetben az eredeti sor abszolút konvergens.

d) A függvényysor a $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontokban nem értelmezett; minden más pontban abszolút konvergens.

Ugyanis: z tetszőleges értékére valamely n -től kezdve:

$$|n^2 - z^2| > \frac{1}{2} n^2 \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2 - z^2} \right| < \frac{2}{n^2}$$

és így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ sor konvergenciája miatt a sor -

$z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ kivételével - minden z -re abszolút konvergens.

e) A függvényysor a $z = 1, 2, 3, \dots$ pontokban nem értelmezett; minden más z -re abszolút konvergens.

Ugyanis: $n > 2|z|$ -től kezdve:

$$|n - z| > \frac{1}{2} n \Rightarrow \left| \frac{1}{(n - z)^n} \right| < \frac{2}{n^n} < \frac{1}{2^n}$$

tehát - a $z = 1, 2, \dots$ kivételével - a sor majorálható egy konvergens geometriai sorral, és így a sor abszolút konvergens.

$$4. a) s_n(z) = 1 + z^2 - \frac{1}{(1+z^2)^{n-1}}$$

$$b) S(z) = 1 + z^2; \quad |1 + z^2| > 1$$

c) $S(z)$ nem folytonos a $z = 0$ pontban

5. a) Mivel $n > |z|$ -re

$$\frac{1}{a + |z|} > \frac{1}{2n}$$

és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ nem konvergens, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + |z|}$ sor sehol sem abszolút konvergens.

b) A sor minden z -re egyenletesen konvergens.

Ugyanis: a sor Leibniz típusú konvergens sor (lásd 1/b. feladat) így a sor n -edik részletösszegéhez tartozó maradék-sora:

$$R_n(z) \leq \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow 0.$$

minden z -re, tehát a Weierstrass-tétel értelmében a sor minden z -re egyenletesen konvergens.

6. a) Ha $|z| < 1$, akkor

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ numerikus sor konvergens, ezért a Weierstrass-féle elégséges feltétel értelmében az adott sor egyenletesen konvergens (és a bizonyításból kiderül, hogy a sor abszolút konvergens is) a $|z| < 1$ tartományon.

b) Az adott sor:

$$\frac{1}{1^2 + z^2} + \frac{1}{2^2 + z^2} + \frac{1}{3^2 + z^2} + \dots$$

Az első két tag elhagyása az egyenletes konvergenciát nem befolyásolja, így, ha $n \geq 3$ és $1 < |z| < 2$, akkor

$$|n^2 + z^2| \geq |n^2| - |z^2| \geq n^2 - 4 \geq \frac{n^2}{2},$$

tehát:

$$\left| \frac{1}{n^2 + z^2} \right| \leq \frac{2}{n^2}$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konvergens sor, ezért a Weierstrass-tétel értelmében az adott sor egyenletesen (és abszolút) konvergens az $1 < |z| < 2$ tartományon.

Az $1 \leq |z| \leq 2$ tartományon a függvénysor nem konvergens és így nem egyenletesen konvergens (u. is a $z = \pm j$ és $z = \pm 2j$ pontokban nem konvergens)

A c) d) e) hasonló módon látható be.

Az (f) függvénysor esetében az igazolás során használjuk fel, hogy

$$\frac{e^n}{n!} \leq \frac{e^2}{2} \cdot \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2},$$

továbbá, hogy $\frac{e}{3} < 1$.

7. a) Abszolút konvergens, ha $|z^2 + 1| > 1$;

egyenletesen konvergens, ha $|z^2 + 1| > R$; $R > 1$.

b) abszolút- és egyenletesen konvergens minden z -re.

c) abszolút- és egyenletesen konvergens, ha

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 3.$$

[8.] Legyen $z = x + jy$, ahol x és y valós. Ekkor
 $n^{-z} = e^{-z \ln n} = e^{-x \ln n} \cdot e^{-jy \ln n} = n^{-x} [\cos(y \ln n) - j \sin(y \ln n)]$

a) $\operatorname{Re} z = x \leq 1$ esetén a sor divergens u. is belátható, hogy $0 < x \leq 1$ esetén a valós részek összegére nem teljesül a konvergencia Cauchy-féle feltétele, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \cos(y \ln n)$ részletösszegei bármely N küszöbindextől kezdve is adott kor-

lát fölött lesznek; $x < 0$ esetén a valós részek nem tartanak 0-hoz. így ezekben az esetekben a sor nem konvergens

b) $\operatorname{Re} z = x > 1$ esetén a sor abszolút konvergens.

Ebben az esetben ugyanis a sor tagjainak abszolútértékeiből álló $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ valós sor: konvergens hiperharmonikus sor.

c) Az $1 + \frac{1}{R} \leq x < R$; $-R \leq y < R$; $R > 1$ tartományon a sor egyenletesen konvergens.

Ebben az esetben ugyanis y bármely értékére a sor abszolút értékben majorálható a $\sum n^{-(1+\frac{1}{R})}$ konvergens hiperharmonikus sorral és így az eredeti sor a Weierstrass-tétel értelmében egyenletesen konvergens.

d) $\operatorname{Re} z = x > 1$ esetén a sor nem egyenletesen konvergens.

Ugyanis ebben az esetben csak valós z értékekre tekintve a sort, a konvergencia már ezekre sem egyenletes. Hiszen

x -et 1-hez elég közel véve tetszőleges $\sum_{n=k}^m n^{-x}$ részletösszeg $\sum_{n=k}^m n^{-1}$ -hez bármilyen közelivé tehető és így nem teljesül a Cauchy-féle egyenletes konvergencia feltétel (hiszen $\sum n^{-1}$ elég távoli részletösszegei tetszőleges nagygyá tehetőek)!

9 Legyen

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z) \quad \text{és} \quad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) .$$

Ekkor

$$S(z) = s_n(z) + R_n(z) ,$$

és

$$S(z+h) = s_n(z+h) + R_n(z+h) ,$$

úgy, hogy

$$S(z+h) - S(z) = s_n(z+h) - s_n(z) + R_n(z+h) - R_n(z) , \quad (*)$$

ahol z és $(z + h) \in T$.

Mivel $s_n(z)$ véges sok folytonos függvény összege, ezért $s_n(z)$ folytonos. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ megadása esetén kell lenni olyan δ -nak, hogy

$$|s_n(z+h) - s_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } |h| < \delta. \quad **)$$

Mivel - a feltétel értelmében - a sor egyenletesen konvergens, N megválasztható úgy, hogy minden $z \in T$ esetén

$$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{és} \quad |R_n(z+h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } n > N. \quad ***)$$

Ekkor *) ; **) és ***) figyelembevételével

$$|S(z+h) - S(z)| \leq |s_n(z+h) - s_n(z)| + |R_n(z+h) - R_n(z)|$$

minden $z \in T$ -re ha $|h| < \delta$, ami azt jelenti, hogy $S(z)$ folytonos T -ben.

10. a) A maximum-elv értelmében n és m pozitív egész számokra

$$\max_{(T)} |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+m}(z)| =$$

$$\max_{(C)} |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+m}(z)|.$$

így ha a sor a T tartomány C határán egyenletesen konvergens, akkor T -ben is az.

b) Például az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

sor a $|z| \leq 1$ tartományon (a $|z| = 1$ körön is) egyenletesen konvergens, hiszen itt

$$|f_n(z)| = \frac{|z^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

és a $\sum \frac{1}{n^2}$ numerikus sor konvergens, ami a Weierstrass-tétel értelmében az egyenletes konvergencia elégséges feltétele.

De a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

sor csak a $|z| < 1$ tartományon konvergens ($|z| \leq 1 - \varepsilon$ tartományon egyenletesen konvergens), mert a $|z| = 1$ határkör $z = 1$ pontjában divergens.

[11]. Az $S(z)$ összegfüggvény felírható

$$S(z) = s_n(z) + R_n(z)$$

alakban (1. 9. feladat), ahol $s_n(z)$, $R_n(z)$, $S(z)$ folytonosak T -ben és ezért ott integrálhatók. így

$$\begin{aligned} \int_C S(z) dz &= \int_C s_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz = \\ &= \int_C f_1(z) dz + \int_C f_2(z) dz + \dots + \int_C f_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz \end{aligned}$$

A feltétel értelmében a sor egyenletesen konvergens T -ben, úgy, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ megadása esetén található $z \in T$ -től függetlenül - olyan N egész szám, hogy $|R_n(z)| < \varepsilon$ ha $n > N$, A C görbe hosszát l -lel jelölve

$$\left| \int_C R_n(z) dz \right| < \varepsilon \cdot l.$$

így tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ megadása esetén

$$\left| \int_C S(z) dz - \int_C s_n(z) dz \right| < \varepsilon,$$

ha n elég nagy, amivel az állítást igazoltuk.

[12]. Legyen $|z| \leq q < 1$, ahol q rögzített pozitív szám. Mivel $f(z)$ reguláris az egységgör belsejében és $f(0) = 0$, ezért Mac Laurin sorából z kiemelhető, és így $f(z) = z \cdot g(z)$, ahol g reguláris. Legyen $g(0) = g$, ekkor

$$f(z) + f(z^2) + \dots = z g(z) + z^2 g(z^2) + \dots$$

és $|z| < 1$ miatt $z^n \rightarrow 0$, $g(z^n) \rightarrow g$, így valamely N indextől kezdve $|z^n g(z^n)| \leq 2|g||z|^n \leq 2|g|q^n$, tehát az eredeti sor egy konvergens numerikus sorral megjorálható. így $\sum f(z^n)$ egyenletesen konvergens $|z| < q$ -ra, tehát a határfüggvény is folytonos ugyanitt, azaz $|z| < 1$ -ben is.

2.§ HATVÁNYSOROK

2.1 HATVÁNYSOR KONVERGENCIA-SUGARA, KÖZÖNSÉGES-, ABSZOLÚT- ÉS EGYENLETES KONVERGENCIÁJA

14. A konvergenciasugár meghatározására az $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ d'Alambert-féle képletet alkalmazzuk! (Ennek alkalmazhatósági feltétele, a limes létezése, a felsorolt feladatoknál fenn áll).

[a) $|z| < 1$

Ugyanis: $a_n = n$ és így

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 1$$

[b) $z = 0$

Ugyanis: $a_n = n!$ és így

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

[c) $|z| < 1$

Ugyanis: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ és így

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n+1}{n} \right| = 1$$

d) az egész z sík

e) az egész z sík

[f) $|z| > 1$

Ugyanis: a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}$ Laurent sor a

$$\left| \frac{1}{z} \right| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n+2}{n+3}} \right| = 1$$

esetén, azaz $|z| > 1$ -re konvergens.

$$\boxed{g)} \quad |z + 4| < 1$$

Ugyanis: $a_n = \frac{1}{n}$ és így

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$$

$$\boxed{h)} \quad |z - 2j| < 2$$

Ugyanis: $a_n = \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$ és így

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}{n^2 \cdot 2^n} = 2$$

$\boxed{i)}$ az egész z sík

Ugyanis: $a_n = \frac{n+1}{n!}$ és így

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n+2}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n+2} = \infty$$

$$\boxed{j)} \quad |z + 2| \leq 4$$

Ugyanis: $a_n = \frac{1}{(n+1)^3 4^n}$ és így

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 \cdot 4^{n+1}}{(n+1)^3 \cdot 4^n} = 4,$$

amiből következik, hogy a sor a $|z + 2| < 4$ körbelsőben konvergens. A sor a $|z + 2| = 4$ körvonalon is konvergens. Ennek eldöntésére alkalmazható a majoráns kritérium:

$$\text{Mivel } f_n = \frac{(z + 2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} = \frac{1}{4(n+1)^3} < \frac{1}{3}$$

ezért a $\sum \frac{1}{n^3}$ sor konvergenciájából következik az eredeti sor abszolút konvergenciája.

k) Az egész z sík

1) $|z + j| \leq 1$

15. [a] $R = 1$

Ugyanis: $a_n = 1$ és így a Cauchy-féle gyökkritériumot alkalmazva:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$$

[b] $R = 1$

Ugyanis: $a_n = \frac{1}{n^3}$ és így

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^3}{n^3} \right| = 1.$$

c) $r = 3,$

d) $R = \infty,$

e) $R = 0,$

[f] $R = 1$

Ugyanis: $a_n = \frac{1}{1 + jn}$ és így a d'Alambert-féle hányados kritériumot alkalmazva:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + j(n+1)}{1 + jn} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{jn} (1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{jn} + 1} \right| = 1$$

[g] $R = \frac{1}{4}$

Ugyanis: $a_n = [3 + (-1)^n]^n$ és így a Cauchy-féle gyökkritériumot alkalmazva:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{4}$$

[h] $R = \frac{1}{e}$

Ugyanis: $a_n = \cos jn = \frac{e^{j(jn)} + e^{-j(jn)}}{2} = \frac{1}{2} (e^n + \frac{1}{e^n});$

így a hányados-kritériumot alkalmazva:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{e}$$

$$\boxed{i)} \quad R = 1; \text{ ha } |a| \leq 1 \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{|a|}, \text{ ha } |a| > 1$$

Ugyanis: ha $|a| \leq 1$, akkor

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n + a^n}{n + 1 + a^{n+1}} \right| = 1$$

Ha $|a| > 1$, akkor elég nagy n -től

$$|a^n| > n$$

és így

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n + a^n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{2|a|^n} = \lim \sqrt[n]{2} \cdot |a| = |a|$$

$$\text{Ha:} \quad |a^n| > 2n$$

$$\text{akkor} \quad |n + a_n| \geq \frac{|a|^n}{2} \quad \text{és így}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n + a_n} \geq \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{2}} = |a|,$$

így a gyökkritérium értelmében

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{|a|}$$

$\boxed{16}$. Mind a három sor konvergencia-köre a $|z| = 1$ kör.

a) $z = -1$ pont kivételével a $|z| = 1$ körön mindenütt konvergens.

Ugyanis: a $|z| = 1$ körön $\frac{1}{n \ln n}$ monoton fogyva 0-hoz tart és ha $z \neq -1$, akkor a $\sum (-z)^n$ sor szeletei korlátosak. Tehát - a Dirichlet tétel szerint - ilyenkor a sor konvergens. (1. I. fejezet 47. pl).

Ha $z = -1$, akkor a kapott $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ sor divergens, ami pl. az integrálkritérium alkalmazásával is eldönthető (ugyanis $\frac{1}{x \ln x}$ primitív függvénye $\ln(\ln x)$, ami ∞ -hez tart, ha $x \rightarrow \infty$).

b) a $z = \pm j$ pontok kivételével a $|z| = 1$ körön mindenütt konvergens.

Ugyanis: a sort $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n - \sqrt{n}}$ alakba írva, a sor a

$|z| = 1$ körön konvergens, ha $-z^2 \neq 1$, (lásd az a)-beli indoklást!)

Ha $z^2 = -1$, azaz, ha $z = e^{j\frac{\pi}{2}}$ és $z = e^{j\frac{3\pi}{2}}$, akkor a sor divergens, mert minorálja a divergens harmonikus sor.

c) A $z = \pm j$ pontok kivételével a $|z| = 1$ körön konvergens.

Ugyanis: a sort $z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{2n+1}$ alakba írva a $-z^2 \neq 1$ esetben a b) feladatra alkalmazott gondolatmenetet követve: a $z^2 = -1$ esetekre a $\sum \frac{1}{3n}$ divergens minoráló sort alkalmazva adódik az állítás.

[17]. a) A $z = -1$ pont kivételével a $|z| = 1$ konvergenciakör határpontjaiban konvergens, de nem abszolút konvergens. Ugyanis: a konvergencia sugár

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1.$$

Ha $|z| = 1$ és $z \neq -1$, akkor a sor a Dirichlet-tétel értelmében konvergens ($\sum (-z)^j$ korlátos és $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \rightarrow 0$)

Ha $|z| = -1$, akkor a sor divergens, mert $z = -1$ -re a $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor adódik, amely divergens.

A $|z| = 1$ körön a sor sehol sem abszolút konvergens, mert mindenütt a harmonikus sor adódik.

b) A $z = e^{\frac{2k\pi}{p}j}$; $k=0,1,2,\dots,(p-1)$ pontok kivételével a $|z| = 1$ határkör minden pontjában konvergens, de nem abszolút konvergens.

Ugyanis: a konvergencia-sugár $R = 1$. Ha $|z| = 1$ és $z^p \neq 1$, akkor a sor a Dirichlet-tétel értelmében konvergens, de nem abszolút konvergens.

A $z^p = 1$ pontokban (azaz: a p -edik egységgyökök pontjaiban) a sor nem konvergens.

c) A $z = \frac{1-j\sqrt{3}}{2}$ és a $z = -1$ pontok kivételével a $|z| = 1$ határkör minden pontjában konvergens, de nem abszolút konvergens.

Ugyanis: a konvergencia sugár $R = 1$.

Ha $|z| = 1$ és $z^3 \neq -1$, akkor a sor a Dirichlet-tétel értelmében konvergens ($\sum_{n=1}^{\infty} (-z^3)^n$ szeletei korlátosak:

$$\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} \Rightarrow 0).$$

Ha $z^3 = -1$, azaz $z = \sqrt[3]{-1}$ (vagyis $z = \frac{1-j\sqrt{3}}{2}$ és $z = -1$), akkor a sor divergens.

A $|z| = 1$ körön a sor sehol nem abszolút konvergens, mert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ divergens.

d) A $|z| = 1$ határkör minden pontjában abszolút konvergens.

Ugyanis: a konvergencia sugár $R = 1$ (ami a Cauchy-féle gyökkritériummal számítható)

A $|z| = 1$ körön a sor abszolút konvergens, mert minden pontjában a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens hiperharmonikus sor adódik.

$$\boxed{18}. a) R \geq \min(R_1, R_2)$$

Ugyanis:

(1) Ha $R_1 \neq R_2$ akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \pm b_n)z^n]$ sor konvergencia sugara $R = \min(R_1, R_2)$. Hiszen $|z| < R$ esetén a $\sum [(a_n \pm b_n)z^n]$ sor - mint két konvergens hatványsor összege - konvergens, míg $\min(R_1, R_2) < |z| < \max(R_1, R_2)$ -re már nem konvergens (mert ilyen z értékekre az egyik hatványsor konvergens, és a másik nem).

(2) Ha $R_1 = R_2$, akkor a $\sum [(a_n \pm b_n) z^n]$ sor konvergencia sugara $R \geq R_1 = R_2$ az előző okoskodás szerint. Hiszen bármely $R > R_1 = R_2$ -höz van ilyen konvergenciasugarú hatványsor és ebből kivonva vagy hozzáadva az R_1 sugarat a különbség, vagy összeg, konvergencia sugara R_1 lesz az (1) szerint. Az $R = R_1 = R_2$ is lehetséges, például akkor, ha minden n -re $a_n = b_n$.

(1) és (2) összevetéséből adódik, hogy $R \geq \min(R_1, R_2)$

$$b) \quad R \geq R_1 \cdot R_2$$

Ugyanis a Cauchy-gyökkritérium felhasználásával a $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot b_n \cdot z^n]$ hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot b_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = R_1 \cdot R_2$$

Hogy bármely $R \geq R_1 \cdot R_2$ konvergenciasugár fellelhető, az a következőképpen látható be:

legyen az (a_n) sorozat minden páratlan indexű eleme $\frac{1}{R_1^n}$; a (b_n) sorozat minden páros indexű eleme $\frac{1}{R_2^n}$; a többi elem mindkét sorozatban $(\frac{R_2}{R})^n$, Ekkor $R \geq R_1 \cdot R_2$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{R_2}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot b_n|} = \frac{1}{R}$$

Könnyen ellenőrizhető ez a gondolatmenet az $R_1, R_2, R = 0$ vagy ∞ esetekre is.

$$c) \quad R \leq \frac{R_1}{R_2}$$

ami az a) és b)-hez hasonló okoskodással látható be.

19. a) Ugyanaz a konvergencia-sugara mint a $\sum (a_n z^n)$ -nek. (Ugyanis: $\sqrt[n]{n^p} \rightarrow 1$).

b) Ugyanaz a konvergencia-sugár mint a $\sum (a_n z^n)$ -nek.

c) $R = \infty$

(Ugyanis valamely n -től kezdve $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R} + \varepsilon$ és $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$,
 úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n!}} = 0$)

d) Sehol nem konvergens, ha R véges érték.

(Ugyanis $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{R} + \varepsilon$ és $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ miatt $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$.)

Ha $R = \infty$, úgy semmi általános érvényű nem mondható.

[20]. a) A konvergencia sugár: R

(Ugyanis:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}; \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{n^k} = 1$$

és így

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|n^k \cdot c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n^k} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

Tehát a konvergencia sugár $\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = R$.

b) A konvergencia-sugár: $\frac{R}{2}$

Ugyanis:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}; \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{2^{n-1}} = 2$$

és így

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{(2^{n-1}) |c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{2^{n-1}} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{2}{R}$$

c) A konvergencia-sugár: ∞

Ugyanis:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}; \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

és így

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!}} = \frac{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n!}} = \frac{\frac{1}{R}}{\infty} = 0$$

d) A konvergencia-sugár: 0

Ugyanis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \infty$$

és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^n \cdot c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{\infty}{R} = \infty$$

e) A konvergencia-sugár: R^k

Ugyanis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}^k = \frac{1}{R^k}$$

f) A konvergencia sugár: R ha $|a| \leq 1$

$$\frac{R}{|a|} \text{ ha } |a| > 1$$

Ugyanis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(1 + a^n)|} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |a| \leq 1 \\ |a| & \text{ha } |a| > 1 \end{cases}$$

és így

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(1 + a) c_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(1 + a^n)|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \\ &= \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{R} & \text{ha } |a| \leq 1 \\ |a| \cdot \frac{1}{R} & \text{ha } |a| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{21}. a) S(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Ugyanis: a végtelen mértani sor összege.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

ami érvényes a teljes $|z| < 1$ körbelsőben és itt a hatványsor tagonkénti deriválásával nyert sor összege megegyezik az összegfüggvény deriváltjával. Ezt felhasználva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[z \frac{d}{dz} (z^n) \right] = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{z}{(1-z)^2},$$

ami ugyancsak a $|z| < 1$ tartományon érvényes.

$$b) S(z) = -\ln(1-z)$$

Ugyanis: e hatványsor konvergencia sugara $R = 1$.
Felhasználva, hogy a $|z| < 1$ tartományban a tagonkénti integrálással nyert hatványsor összege megegyezik az összeg integráljával:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^z z^{n-1} \cdot dz \right] = \int_0^z \left[\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} dz \right] = \\ &= \int_0^z \frac{1}{1-z} dz = -\ln(1-z). \end{aligned}$$

$$c) S(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$$

Ugyanis: E hatványsor konvergencia sugara: $R = 1$.
Legyen $|z| < 1$ -ben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2^{n+1}} = S(z)$$

Ezt a hatványsort deriválva (és a tagonkénti deriváltak összegére vonatkozó tételt felhasználva):

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right)$$

Ebből integrálással és $S(0) = 0$ figyelembevételével:

$$S(z) = \frac{1}{2} [\ln(1+z) - \ln(1-z)] = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$$

adódik:

$$d) S(z) = \ln(1+z)$$

$$\boxed{22}. a) |z| < 1; \text{ ill. } |z| \leq 1, \text{ ha } p < -1$$

Ugyanis:

E hatványsor konvergencia sugara (a d'Alambert képlettel számolva):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} = 1$$

így e sor $|z| < 1$ esetén abszolút konvergens, $|z| > 1$ esetén pedig divergens.

A $|z| = 1$ körön a konvergencia-viselkedéshez a $\sum n^p$ sor konvergencia-viselkedését kell megvizsgálni, amely $p < -1$ esetén konvergens. Így a $(n^p z^n)$ sor esetében $p < -1$ esetén terjed ki $|z| = 1$ -re az abszolút konvergencia.

b) $|z| < e^{\operatorname{Re} z}$

Ugyanis: a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-nz}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{e^z}\right)^n$$

mértani sor - mint ismeretes - a $\left|\frac{z}{e^z}\right| < 1$ körbelsőben abszolút konvergens, $\left|\frac{z}{e^z}\right| > 1$ -re nem is konvergens. Így a sor azon z értékekre abszolút konvergens, amelyekre $|z| < |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Azaz, amelyekre

$$x^2 + y^2 < e^{2x}, \text{ ill. } y^2 < e^{2x} - x^2.$$

c) $|z - j| \leq 4$

Ugyanis: a hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n \cdot (-1)^n [(n+1)^2 + 1]^{5/2}}{(n+1) (-1)^{n+1} (n^2 + 1)^{5/2}} \right| = 4,$$

és mivel $|z - j| \leq 4$ -re

$$\left| \frac{n(-1)^n (z-j)^n}{4^n (n^2 + 1)^{5/2}} \right| \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

azaz: $|z - j| \leq 4$ -re a hatványsor majorálható a konvergens $\sum \frac{1}{n^3}$ numerikus sorral, ezért a Weierstrass-tétel értelmében a sor a teljes $|z - j| \leq 4$ körtartományon abszolút (és egyenletesen) konvergens.

23. a) $|z| \leq R; R < 3$

Ugyanis:

$|z| \geq 3$ esetén a sor nem konvergens, mert tagjai nem tartanak 0-hoz.

$|z| < 3$ esetén a sor abszolút konvergens, mert majorálható konvergens mértani sorral.

A mértani sorral való majorálásból - a Weierstrass-tétel alapján - következik, hogy $|z| \leq q < 1$ -re (ahol q rögzített) a konvergencia egyenletes is. A sor minden olyan tartományon egyenletesen konvergens, amely része a $|z| < 3$ -nak és pontjai nem torlódnak a $|z| = 3$ körvonalhoz.

$$b) |z - j| \leq 1$$

Ugyanis:

a sor konvergencia sugara $R = 1$ és $|z - j| \leq 1$ esetén a sor majorálható a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens hiperharmonikus sorral. Így a sor - a Weierstrass-tétel értelmében - egyenletesen konvergens a $|z - j| \leq 1$ zárt körlemezen.

$$c) |z| \geq R; R > 1$$

Ugyanis:

E negatív kitevős hatványsor konvergencia sugara

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1,$$

így a sor biztosan konvergens, ha $|z| > 1$ és divergens, ha $|z| < 1$; $z = 1$ esetén a $\sum \frac{1}{n+1}$ divergens harmonikus sor adódik (úgy, hogy a sor $|z| \leq 1$ esetén divergens).

A sor - a Dirichlet-féle egyenletes konvergencia - tétel értelmében - egyenletesen konvergens minden olyan tartományon, amelyen $|z| > 1$ és amelynek pontjai nem torlódnak a $|z| = 1$ - körvonalhoz. (Ugyanis $\frac{1}{n+1}$ egyenletesen tart 0-hoz és a hatványsor szeletei korlátosak e tartományon, ha $|1 - z| > \delta$).

24. a) Abszolút konvergencia, ha $|z - 3| < 3$ és ha $z = 0$. Egyenletesen konvergencia, ha $|z - 3| \leq R$, ahol $0 < R < 3$ (a $z = 0$ pont környezetében nem egyenletesen konvergens)

b) Abszolút és egyenletesen konvergencia a $|z| \leq R$ körtartományon, ahol $R < \frac{1}{|a|}$

c) Abszolút konvergencia a $|z| < 1$ tartományon; egyenletesen konvergencia a $|z| \leq R$ tartományon, ahol $R < 1$.

$$\boxed{25.} \text{ a) Ha } |z_1| = 1, \text{ akkor a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n$$

hatványsor konvergencia-sugara: $R = 1$; a sor a $z = z_1$ pontban divergens és a $|z| = 1$ kör minden más pontjában konvergens. Ugyanis:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \frac{z}{z_1} \right|} = 1.$$

A $z = z_1$ pontban a sor divergens (mert $\sum \frac{1}{n}$ divergens).

Ha $|z| = 1$, de $z \neq z_1$, akkor a $\sum (\frac{z}{z_1})^n$ sor n -edik részletösszege (rögzített z esetén) korlátos:

$$\left| 1 + \frac{z}{z_1} + \left(\frac{z}{z_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \right| = \frac{\left| 1 - \left(\frac{z}{z_1}\right)^{n+1} \right|}{\left| 1 - \frac{z}{z_1} \right|} \leq \frac{2}{\left| 1 - \frac{z}{z_1} \right|};$$

az $\frac{1}{n}$ együttható monoton csökkenőleg $\rightarrow 0$, ami a Dirichlet-tétel értelmében elégséges feltétele a $\sum \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n$ sor konvergenciájának.

b) Ha $z_1, z_2, \dots, z_k$ az előírt határpontok, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} + \dots + \frac{1}{z_k^n} \right) z^n \right]$$

hatványsor a $z = z_1, z_2, \dots, z_k$ pontokban divergens, minden más $|z| = 1$ pontra konvergens.

(26). Útmutatás:

Használjuk fel a konvergenciára vonatkozó Dirichlet-tételt. (lásd I. fejezet 47. példa)

[27]. a) Az $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hatványsor konvergenciátartománya: $|z| < 1$. Ebben a tartományban

$$S'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n};$$

$$z \cdot S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

és így:

$$\frac{d}{dz} (z \cdot S'(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

az állításnak megfelelően.

b) Mivel a) értelmében a $|z| < 1$ tartományon

$$\frac{d}{dz} (z S'(z)) = \frac{1}{1-z},$$

ezért

$$z \cdot S'(z) = -\ln(1-z) = \ln \frac{1}{1-z}.$$

Ugyanis: a $|z| < 1$ tartományon az $\frac{1}{1-z}$ függvény primitív függvénye az $\ln \frac{1}{1-z}$ reguláris függvény és a $z = 0$ pontban $z \cdot S'(z)$ és $\ln \frac{1}{1-z}$ egyaránt zérus értékű, amiből következik az állítás:

$$S'(z) = \frac{1}{z} \ln \frac{1}{1-z}$$

azaz: S primitív függvénye a reguláris

$$\frac{1}{z} \ln \frac{1}{1-z}$$

függvénynek.

2.2 TAYLOR-SOR

28. a) Felhasználva, hogy

$$\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} \text{ és } \cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin^2 z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}; \quad R = \infty$$

$$\text{b) } \operatorname{ch}^2 z = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}; \quad R = \infty$$

(c) Felhasználva, hogy

$$(a + z)^\alpha = a^\alpha \left(1 + \frac{z}{a}\right)^\alpha$$

és

$$\left(1 + \frac{z}{a}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \left(\frac{z}{a}\right)^n; \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

ezzel

$$(a + z)^\alpha = a^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \left(\frac{z}{a}\right)^n; \quad R = |a|$$

(d) Felhasználva, hogy

$$\sqrt{z + j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{z}{j}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{z + j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{z}{j} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left(\frac{z}{j}\right)^n\right]; \quad R = 1$$

$$e) \frac{1}{az + b} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}; \quad R = \left|\frac{b}{a}\right|$$

(f) Mivel

$$\frac{1}{z^2 - 4z + 13} = \frac{1}{[z - (2+3j)][z - (2-3j)]} = \frac{1}{6j} \left[\frac{1}{z - (2+3j)} - \frac{1}{z - (2-3j)}\right]$$

$$= -\frac{j}{6} \left[1 + \frac{z}{2+3j} + \left(\frac{z}{2+3j}\right)^2 + \dots\right] - \left[1 + \frac{z}{2-3j} + \left(\frac{z}{2-3j}\right)^2 + \dots\right]$$

ezért

$$\frac{1}{z^2 - 4z + 13} = \frac{j}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2-3j)^n - (2+3j)^n}{13^n} z^n\right]; \quad R = \sqrt{13}$$

(g) Felhasználva, hogy

$$\int \frac{1}{(z+1)^2} dz = -\frac{1}{z+1} = -[1 - z + z^2 - z^3 + \dots];$$

és

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + \dots$$

így:

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} [(-1)^n (n-1) z^n]; \quad R = 1.$$

(h) Mivel

$$\ln(z^2 - 3z + 2) = \ln[(1-z)(2-z)] = \ln(1-z) + \ln 2 + \ln(1 - \frac{z}{2})$$

és $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \dots$,

ezért

$$\ln(z^2 - 3z + 2) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \frac{z^n}{n} \right]; \quad R = 1.$$

(i) Mivel

$$\int_0^z e^{-z^2} dz = \int_0^z \left(1 - z^2 + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} \pm \dots\right) dz,$$

ezért

$$\int_0^z e^{-z^2} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{n! (2n+1)}; \quad R = \infty.$$

j) $\sum (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} \quad R = \infty$

[29]. a) Mivel

$$\frac{z}{z+2} = \frac{1}{3} \frac{(z-1) + 1}{1 + \frac{z-1}{3}},$$

ezért

$$\frac{z}{z+2} = \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}; \quad R = 3.$$

b) Mivel

$$\frac{z}{z^2 - 2z + 5} = \frac{1}{4} \frac{(z-1) + 1}{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + 1},$$

ezért

$$\frac{z}{z^2 - 2z + 5} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} [(z-1)^{2n} + (z-1)^{2n+1}]; \quad R = 2.$$

c) Mivel

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}}\right)^2,$$

ezért

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{2^{n+2}} (z-1)^n, \quad R = 2.$$

d) Mivel

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(z-1) + 1},$$

ezért

$$\sqrt[3]{z} = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (z-1)^n, \quad R = 1.$$

e) Mivel

$$\begin{aligned} \sin(2z - z^2) &= \sin[1 - (z-1)^2] = \\ &= \sin 1 \cdot \cos(z-1)^2 - \cos 1 \cdot \sin(z-1)^2, \end{aligned}$$

ezért

$$\sin(2z - z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(1 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} (z-1)^{2n}; \quad R = \infty.$$

(30). a) Azonos átalakítással a

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z-2)^3 + 3(z-2)^2 + 4(z-2) + 2$$

Taylor polinom adódik.

b) Mivel

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2 + (z-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}},$$

ezért

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

A konvergenciatartomány: $|z-1| < 2$.

c) Mivel

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z-3j)} &= -\frac{1}{1+3j} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{1+3j} \frac{1}{z-3j} = \\ &= \frac{1}{2-4j} \frac{1}{1+\frac{z-j}{1+j}} + \frac{1}{6-2j} \frac{1}{1-\frac{z-j}{2j}}; \end{aligned}$$

ezért

$$\frac{1}{(z+1)(z-3j)} = \frac{1}{2-4j} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-j}{1+j}\right)^k + \frac{1}{6-2j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-j}{2j}\right)^k.$$

A konvergenciatartomány: $|z-j| < \sqrt{2}$.

d) Mivel

$$\frac{1}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)' \text{ és } -\frac{1}{z} = -\frac{1}{(z-1)+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n,$$

ezért

$$\frac{(z-1)}{z^2} = (z-1) \frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z-1)^n.$$

A konvergenciatartomány: $|z-1| < 1$.

e) Mivel

$$\cos z = \cos \left[\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \right] = \sin \left(z - \frac{\pi}{2}\right),$$

ezért

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

a konvergencia tartomány: a teljes z sík.

f) Mivel

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin\left[z - \left(\frac{\pi}{2} + j\right) + \left(\frac{\pi}{2} + j\right)\right] = \\ &= -j \operatorname{sh} 1 \cdot \sin\left(z - \frac{\pi}{2} - j\right) + \operatorname{ch} 1 \cdot \cos\left(z - \frac{\pi}{2} - j\right),\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}\sin z &= \operatorname{ch} 1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(z - \frac{\pi}{2} - j\right)^{2k}}{(2k)!} + \\ &+ j \operatorname{sh} 1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(z - \frac{\pi}{2} - j\right)^{2k-1}}{(2k-1)!}\end{aligned}$$

a konvergencia tartomány: a teljes z sík.

$$g) z^3 \operatorname{ch}(z + 3) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{ch} 3 \cdot \frac{z^{2k+3}}{(2k)!} + \operatorname{sh} 3 \cdot \frac{z^{2k+4}}{(2k+1)!};$$

a konvergencia tartomány a teljes z sík.

h) Mivel

$$e^{-z} = e^{-(z-j)-j} = e^{-j} e^{-(z-j)},$$

ezért

$$e^{-z} = e^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-j)^n}{n!};$$

a konvergencia tartomány a teljes z sík.

i) Mivel

$$z e^{2z} = [(z+1) - 1] e^{2(z+1)} e^{-2},$$

ezért

$$z e^{2z} = e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} [(z+1)^{n+1} - (z+1)^n];$$

a konvergencia tartomány a teljes z sík.

j) Mivel

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

és

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{z-j+j} = j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-j)^n}{j^n} (-1)^n,$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-j)+(j-1)} = -\frac{j+1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-j}{j-1}\right)^n,$$

ezért

$$\frac{e^z}{z(z-1)} = e^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-j)^n}{n!} \left[j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-j}{j}\right)^n - \frac{j+1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-j}{j-1}\right)^n \right];$$

a konvergencia tartomány: $|z-j| < 1$.

[31]. a) Felhasználva, hogy

$$n \cdot z^{n-1} = \frac{d}{dz} (z^n)$$

továbbá, hogy a konvergenciatartomány belsőjében az összegezés és határérték képzés sorrendje felcserélhető:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} (z^n) = \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \\ &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} &= \frac{d^2}{dz^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \\ &= \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{2}{(1-z)^3} \end{aligned}$$

32. Ismételtes, hogy az f függvény - amennyiben reguláris az " a " körüli R sugarú körben - " a " bázispontú Taylor-sora:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots \\ + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

így:

a) az $f(z) = \frac{1}{z^2}$ függvény $a = -1$ bázispontú Taylor-sora, $R = 1$ konvergencia sugárral;

b) az $f(z) = \frac{1}{z^2}$ függvény $a = 2$ bázispontú Taylor-sora, $R = 2$ konvergencia sugárral;

c) az $f(z) = e^z$ függvény $a = 1$ bázispontú Taylor-sora $R = \infty$ konvergencia sugárral;

d) az $f(z) = e^z$ függvény $a = -2$ bázispontú Taylor-sora $R = \infty$ konvergencia sugárral.

33. Az $\operatorname{sh} z$ függvény az egész számsíkon reguláris, így bármely pontja körül Taylor sorba fejthető. Mivel:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \operatorname{sh}(z - j\pi + j\pi) = \\ &= \operatorname{sh}(z - j\pi) \operatorname{ch} j\pi + \operatorname{ch}(z - j\pi) \operatorname{sh} j\pi = \\ &= \operatorname{sh}(z - j\pi) \cos \pi + \operatorname{ch}(z - j\pi) \sin \pi = \\ &= -\operatorname{sh}(z - j\pi), \end{aligned}$$

ezért:

$$\operatorname{sh} z = - \left[(z - j\pi) + \frac{1}{3!} (z - j\pi)^3 + \frac{1}{5!} (z - j\pi)^5 - \dots \right]$$

Innen:

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z - j\pi} = - \left[1 + \frac{1}{3!} (z - j\pi)^2 + \frac{1}{5!} (z - j\pi)^4 + \dots \right]$$

és így

$$\lim_{z \rightarrow j\pi} \frac{\operatorname{sh} z}{z - j\pi} = -1$$

34). Felírva a számláló és nevező Taylor sorát, egyszerűsítés után képezhetjük a számláló és nevező határértékének hányadosát:

$$a) \ z \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots} \rightarrow 1, \text{ ha } z \rightarrow 0$$

$$b) \ \frac{1 - \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh}^2 z} = \frac{-\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} - \dots}{\frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{2}} = \frac{-\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} - \dots}{\frac{(2z)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(2z)^4}{2 \cdot 4!} + \dots} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} - \dots}{1 + \frac{z^2}{3}} \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ ha } z \rightarrow 0$$

$$c) \ \frac{z}{\sin z} = \frac{z}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots} \rightarrow 1, \text{ ha } z \rightarrow 0$$

$$d) \ \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}$$

és itt $z \rightarrow 0$ esetén a második tényező 1-hez tart; $\frac{1}{z}$ -nek pedig nem létezik határértéke: $\frac{|1|}{|z|} \rightarrow \infty$

$$e) \ \frac{(z-j) e^z}{1 + z^2} = \frac{(z-j) e^j e^{z-j}}{(z-j)(z+j)} = \frac{e^j [1 + (z-j) + \frac{(z-j)^2}{2!} + \dots]}{z + j} \rightarrow \frac{e^j}{2j},$$

ha $z \rightarrow j$.

$$35. a) \ |z| < 2$$

$$b) \ |z| < \pi$$

$$c) \ |z - 2j| < 1$$

$$d) \ |z| < \infty$$

$$e) \ |z - 4j| < 4$$

36. a) $R = \sqrt{2}$;

R nem lehet nagyobb mint $\sqrt{2}$, mert a $z_0 = 1$ bázispontnak f szinguláris pontjaitól (a $z = \pm j$ pontoktól) való távolsága $\sqrt{2}$.

b) $R = \sqrt{2}$;

a bázispontnak f elágazási pontjától ($z = 0$ -tól) való távolsága: $\sqrt{2}$

c) $R = \sqrt{2}$;

f elágazási pontja ($z = 0$) és Taylor sora bázispontjának távolsága: $\sqrt{2}$.

d) $R = \frac{\pi}{2}$;

f -nek a $z_0 = \frac{\pi}{2}$ bázisponthoz legközelebb eső szinguláris pontjai $z = 0$ és $z = \pi$. Ezek z_0 -tól való távolsága $\frac{\pi}{2}$.

e) $R = 1$;

f -nek a $z_0 = 1$ bázisponthoz legközelebb eső szinguláris pontja $z = 0$. E két pont távolsága: 1

f) $R = \sqrt{2}$

f -nek a $z_0 = -1$ bázisponthoz legközelebb eső elágazási pontja: $z = -j$. E két pont távolsága: $\sqrt{2}$.

37. a) A binomiális sor felhasználásával:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \dots;$$

ha $|z| < 1$.

b) A differenciálhányados sorának tagonkénti integrálásával:

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{7} + \dots$$

ha $|z| < 1$

c) A függvény differenciálhányadosának sora:

$$\begin{aligned}\frac{-j}{3-jz} &= \frac{1}{z+3j} = \frac{1}{(z-2j) + 5j} = -\frac{j}{5} \frac{1}{1 - \frac{j(z-2j)}{5}} \\ &= -\frac{j}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j(z-2j)^n}{5^n};\end{aligned}$$

ha $|z-2j| < 5$.

Ebből integrálással:

$$\ln(3-jz) = c - \frac{j}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{j(z-2j)}{5} \right]^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$$

adódik, ahol c az

$$\ln 3 = c - \frac{j}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$$

összefüggésből számítható. A konvergencia tartomány $|z-2j| < 5$.

d) Felhasználva a

$$(1+z)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{\ln(1+z)}{z}}$$

azonosságot, majd a jobboldali függvényt a $z_0 = 0$ bázispont körül sorbafejtve:

$$(1+z)^{\frac{1}{z}} = e\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{11}{24}z^2 - \dots\right)$$

ha $|z| > 0$.

$$(38). \text{ a) } e^{\frac{1}{1-z}} = e^{1+z+z^2+\dots} = e \cdot e^z \cdot e^{z^2} \dots$$

$$\begin{aligned}&= \left[e \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) \right] \left[1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \dots \right] \cdot [\dots] \dots = \\ &= e \left[1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \frac{73}{24}z^4 + \dots \right],\end{aligned}$$

ha $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin \frac{1}{1-z} \left[1 + \frac{z}{1-z} \right] &= \\ &= \sin 1 \cdot \cos \frac{z}{1-z} + \cos 1 \cdot \sin \frac{z}{1-z} . \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} \cos \frac{z}{1-z} &= 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^4 + \dots = \\ &= 1 - \frac{z^2}{2} - z^3 - \frac{35}{24} z^4 - \frac{11}{6} z^5 \dots ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{z}{1-z} &= \left(\frac{z}{1-z} \right) - \frac{1}{3!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^3 + \dots \\ &= z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \frac{1}{2} z^4 + \frac{1}{120} z^5 + \dots ; \end{aligned}$$

alkalmazva a $\sin 1 = \alpha$; $\cos 1 = \beta$ jelölést, ezzel:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{1-z} &= \alpha + \beta z + \left(\beta - \frac{1}{2} \alpha \right) z^2 + \left(\frac{5}{6} \beta - \alpha \right) z^3 + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \beta - \frac{35}{24} \alpha \right) z^4 + \left(\frac{1}{120} \beta - \frac{11}{6} \alpha \right) z^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\ln(1+z)}{1+z} &= [1 - z + z^2 - z^3 + \dots] \left[z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \right] = \\ &= z - \left(1 + \frac{1}{2} \right) z^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) z^3 + \dots \end{aligned}$$

d) Mivel

$$\frac{d}{dz} [\ln(1+z)]^2 = 2 \frac{\ln(1+z)}{1+z}$$

ezért a c) feladat eredményének felhasználásával:

$$[\ln(1+z)]^2 = z^2 - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{2z^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{2z^4}{4} + \dots$$

39. a)

$$\begin{aligned} [\ln(1-z)]^2 &= 2 \left[\frac{z^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{z^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{z^4}{4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) \frac{z^n}{n} + \dots \right] \end{aligned}$$

b)

$$[\operatorname{arctg} z]^2 = z^2 - (1 + \frac{1}{3}) \frac{z^4}{2} + (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \frac{z^6}{3} - \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}) \frac{z^{2n}}{n} + \dots$$

c)

$$[\operatorname{arc} \sin z]^2 = z^2 + \frac{2}{3} \frac{z^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{z^6}{3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{z^8}{4} + \dots$$

40. [a] Mivel

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots,$$

$$\frac{z}{\operatorname{arctg} z} = \frac{z}{z} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} - \frac{z^6}{7} + \dots}$$

A jobboldali törtfüggvény $z = 0$ -ban reguláris, így

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} - \frac{z^6}{7} + \dots} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

illetve:

$$1 = (1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} - \frac{z^6}{7} + \dots) (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots).$$

Együttható összehasonlítással:

$$a_0 = 1, \quad a_4 = \frac{-4}{45},$$

$$a_1 = 0, \quad a_5 = 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_6 = \frac{44}{945}$$

$$a_3 = 0,$$

adódik úgy, hogy

$$\frac{z}{\operatorname{arctg} z} = 1 + \frac{z^2}{3} - \frac{4}{45} z^4 + \frac{44}{945} z^6 + \dots$$

b) Az $\ln(1+z)$ sorának felhasználásával az a)-beli módszerrel:

$$\frac{z}{\ln(1+z)} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{24} - \frac{19z^4}{720} + \dots$$

c) A $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$ felhasználásával

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{5}{24} z^4 + \dots$$

[41]. A $\sin z$ függvény mindenütt reguláris, így a $z = 0$ pont körüli Taylor sora a $z = 0$ pont környezetében előállítja a függvényt:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Ha $z \neq 0$, akkor

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots \quad *)$$

A *)-beli hatványsort $h(z)$ -vel jelölve a *) összefüggés és f értelmezése alapján:

$$h(z) = f(z), \quad \text{ha } z \neq 0,$$

és

$$h(0) = f(0) = 1.$$

Ezért minden z értékre:

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

Mivel a $h(z)$ hatványsor minden z -re konvergens és $f(z)$ -t állítja elő, ezért $f(z)$ mindenütt reguláris függvény.

[42]. Mivel f reguláris K -n, ezért a $z = a$ pont körüli Taylor sora előállítja f -et a $z = a$ pont egy K' -n környezetében. Azaz:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n ; \quad z \in K' .$$

Mivel $z = a$ pont n -szeres zérushely:

$$f^{(k)}(a) = 0 ; \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$f^{(n)}(a) \neq 0 ,$$

ezért

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k = (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} (z-a)^k . \quad (*)$$

Alkalmazva a

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} (z-a)^k$$

jelölést,

$$h(z) = g(z) \quad \forall z \in K' ,$$

mert $h(z) = g(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} , \quad \text{ha } z = a ,$

és $h(z) = g(z) , \quad \text{ha } z \neq a$

(ez utóbbi a $*$) összefüggés következménye).

Mivel $h(z)$ a K' tartományon konvergens hatványsor, ezért K' -n reguláris is és így a vele ekvivalens $g(z)$ is reguláris K' -n.

2.3 LAURENT-SOR

[43]. Mivel a függvény szinguláris pontjai $z = -1$ és $z = -3$, ezért a $z_0 = 0$ körüli Laurent sorának lehetséges konvergencia-gyűrűi:

a) $|z| < 1$

b) $1 < |z| < 3 ,$

c) $|z| > 3 .$

A sorfejtések:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+z} - \frac{1}{6} \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \\ &= \frac{1}{2} [1 - z + z^2 - \dots] - \frac{1}{6} [1 - \frac{z}{3} + (\frac{z}{3})^2 - \dots] . \end{aligned}$$

Itt az első zárójelben levő sor a $|z| < 1$ tartományon a második zárójelben levő $|z| < 3$ tartományon konvergens, így az összevonással nyert sor

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$$

(ami Taylor sor) a $|z| < 1$ tartományon konvergens.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \\ &= \frac{1}{2z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} - \frac{1}{6} \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \\ &= \frac{1}{2z} [1 - \frac{1}{z} + (\frac{1}{z})^2 - \dots] - \frac{1}{6} [1 - \frac{z}{3} + (\frac{z}{3})^2 - \dots] \end{aligned}$$

Az első zárójelben levő sor a $|z| > 1$; a második zárójelben levő a $|z| < 3$ tartományon konvergens, így a kettő összevonásával nyert sor

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \dots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \dots$$

(amely Laurent sor) a $1 < |z| < 3$ körgyűrűben konvergens.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{(z+1)(z+3)} &= -\frac{1}{2z(1+\frac{1}{z})} - \frac{1}{2z(1+\frac{3}{z})} = \\ &= \frac{1}{2z} (1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots) - \frac{1}{2z} (1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} - \frac{27}{z^3} + \dots) \end{aligned}$$

Az első zárójelben levő sor a $|z| > 1$, a második zárójelben levő a $|z| > 3$ tartományon konvergens, így a kettő összevonásával nyert sor

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + \frac{13}{z^4} - \frac{10}{z^5} + \dots$$

a $|z| > 3$ tartományon konvergens.

44. Az adott függvény szinguláris pontjai: $z = -1$ és $z = -3$. Így a $z = -1$ pont körüli Laurent-sorának lehetséges konvergencia-gyűrűi:

a) $0 < |z + 1| < 2$,

b) $|z + 1| > 2$.

E gyűrűkben a függvény reguláris, de határukon van szinguláris pont.

a) A $0 < |z + 1| < 2$ gyűrűbeli Laurent sor - a $z + 1 = u$ jelölés bevezetésével - geometriai sorra való visszavezetéssel -:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u \left(1 + \frac{u}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2u} \left[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \dots\right] = \\ &= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \dots \end{aligned}$$

b) A $|z + 1| > 2$ gyűrűbeli Laurent sor - résztörtekre bontással -:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right] = \\ &= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z+1)} \frac{1}{1 + \frac{2}{z+1}} = \\ &= \frac{1}{2(z+1)} \left[1 - \left(1 - \frac{2}{z+1} + \left(\frac{2}{z+1} \right)^2 + \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{2}{(z+1)^3} + \frac{2}{(z+1)^4} + \dots \end{aligned}$$

45. a) $f(z) = - \left(\frac{1}{2} z + \frac{3}{4} z^2 + \frac{7}{8} z^3 + \frac{15}{16} z^4 + \dots \right)$

b) $f(z) = \dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \dots$

c) $f(z) = - \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{7}{z^3} + \frac{15}{z^4} + \dots \right)$

$$d) f(z) = - \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} + \dots \right)$$

$$e) f(z) = 1 - \frac{2}{z-2} - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \dots$$

$$6. a) \frac{z+1}{z-1} = -1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n ; \quad |z| < 1$$

$$b) \frac{z+1}{z-1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} ; \quad |z| > 1$$

$$7. a) \frac{z-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z-1)^n , \quad \text{ha } |z-1| < 1$$

$$b) \frac{z-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n (z-1)^{-n} , \quad \text{ha } |z-1| > 1$$

48. Mivel

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2j} \frac{1}{z-j} - \frac{1}{2j} \frac{1}{z+j} ,$$

ezért

$$a) \frac{1}{z^2 + 1} = -\frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{z+j} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+j}{2j} \right)^n$$

ha $|z+j| < 2$

$$b) \frac{1}{z^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2j)^n}{(z+j)^{n+2}} ;$$

ha $|z+j| > 2$.

49. a) Legyen $z-1 = u$, akkor $z = 1 + u$, és így

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} e^{2u} = \\ &= \frac{e^2}{u^3} \left[1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \dots \right] = \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3} (z-1) + \dots \end{aligned}$$

A sor $z = 1$ pont kivételével minden z -re konvergens.

b) Legyen $z + 2 = u$, akkor $z = u - 2$, és így

$$\begin{aligned}(z-3) \sin \frac{1}{z+2} &= (u-5) \sin \frac{1}{u} = \\&= (u-5) \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3!} \frac{1}{u^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{u^5} - \dots \right] = \\&= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!u^2} + \frac{5}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^4} - \dots = \\&= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} + \frac{1}{120(z+2)^4} + \dots\end{aligned}$$

A sor a $z = -2$ pont kivételével minden z -re konvergens.

$$\begin{aligned}\text{c) } \frac{z - \sin z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right] = \\&= \frac{1}{z^3} \left[\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots \right] = \\&= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots\end{aligned}$$

A sor minden z -re konvergens.

d) Legyen $z + 2 = u$, akkor $z = u - 2$ és így

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u} \cdot \frac{1}{1-u} = \\&= \frac{2-u}{u} (1 + u + u^2 + u^3 + \dots) = \\&= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + u^3 + \dots = \\&= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots\end{aligned}$$

A sor a $0 < |z + 2| < 1$ gyűrűtartományon konvergens.

e) Legyen $z - 3 = u$, akkor $z = u + 3$, és így a binomiális sor segítségével:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z-3)^2} &= \frac{1}{u^2(3+u)^2} = \frac{1}{9u^2\left(1 + \frac{u}{3}\right)^2} = \frac{1}{9u^2} \left(1 + \frac{u}{3}\right)^{-2} = \\ &= \frac{1}{9u^2} \left[1 + (-2)\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{9u^2} - \frac{2}{27u} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}u + \dots = \\ &= \frac{1}{9(z-3)^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{1}{27} - \frac{4(z-3)}{243} + \dots \end{aligned}$$

A sor a $0 < |z - 3| < 3$ körgyűrűben konvergens.

$$\begin{aligned} 50. \text{ a) } \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right] z^n = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{\infty} z^n - \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$$

$$\text{c) } \frac{1}{z-a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$$

$$\text{d) } \frac{1}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n}$$

$$\text{e) } \frac{e^z}{(z-1)^2} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-2}}{n!}$$

$$f) \frac{z}{e^{z-2}} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n! (z-2)^n}$$

$$g) e^{z + \frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$$

$$\text{ahol } c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (n+k)!}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$h) \sin z \cdot \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-2n} z^{-2n}$$

$$\text{ahol } c_{2n} = c_{-2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)! (2k+2n+1)!}.$$

$$51. a) \frac{1 - \cos z}{z} = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \dots$$

konvergencia-tartomány $|z| < \infty$

$$b) \frac{e^{z^2}}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{4!} + \frac{z^7}{5!} + \dots$$

konvergencia-tartomány $0 < |z| < \infty$

$$c) \frac{1}{z} \operatorname{ch} \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2! z^3} + \frac{1}{4! z^5} + \dots$$

konvergencia-tartomány $0 < |z| < \infty$

$$d) z^2 e^{-z^4} = z^2 - z^6 + \frac{z^{10}}{2!} - \frac{z^{14}}{3!} + \dots$$

konvergencia-tartomány $|z| < \infty$

52. [a] Az osztást elvégezve, majd résztörtekre bontva:

$$f(z) = \frac{z^2+z+2}{z^2-1} = 1 + \frac{z+3}{z^2-1} = 1 + \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z+1}$$

Az utolsó tag $z_0 = 1$ bázispontú hatványsora:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} - \dots \right)$$

ha $|z-1| < 2$, és így az eredeti függvény $z_0 = 1$ bázispontú Laurent sora:

$$f(z) = 1 + \frac{2}{z-1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} - \dots \right)$$

illetve:

$$f(z) = \frac{2}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{z-1}{2^2} - \frac{(z-1)^2}{2^3} + \frac{(z-1)^3}{2^4} - \dots$$

A konvergencia-gyűrű: $0 < |z-1| < 2$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(z) &= \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{600} - \dots \end{aligned}$$

A konvergencia-gyűrű: $0 < |z| < \infty$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(z) &= \frac{1}{\ln(1+z)} = \frac{1}{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{12} + \frac{z^2}{24} - \dots \end{aligned}$$

A konvergencia-gyűrű: $0 < |z| < 1$

$$\begin{aligned} \text{d) } f(z) &= \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots \end{aligned}$$

A konvergencia-gyűrű $0 < |z| < \infty$

$$\text{e) } \frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2} z - \frac{5}{6} z^2 + \dots$$

A konvergencia-gyűrű: $0 < |z| < 1$

$$\text{f) } \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} z - \frac{1}{720} z^2 + \dots$$

A konvergencia-gyűrű: $0 < |z| < 2\pi$

$$\begin{aligned} \boxed{53.} \text{ a) } \frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z} &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z^3} \left[1 - \frac{1}{3!} z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^4 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \dots \end{aligned}$$

ha $0 < |z| < \pi$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z} dz &= \oint_{|z|=1} \left| \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \dots \right| dz = \\ &= -\frac{1}{6} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = -\frac{1}{6} \cdot 2\pi j = -\frac{1}{3} \pi j \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\oint_G (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1 \\ 2\pi j, & \text{ha } n = -1 \end{cases}$$

54. [a]

$$\frac{1}{z-2} = + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad \text{ha } |z| > 2.$$

[b] Mivel

$$\int \frac{1}{(z-a)^2} dz = - \frac{1}{z-a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}},$$

ezért

$$\frac{1}{(z-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) a^n}{z^{n+2}}, \quad \text{ha } |z| > a$$

$$c) \quad \frac{1}{(z^2+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{z^{2n+2}}, \quad \text{ha } |z| > 1$$

$$d) \quad \cos \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)! z^{2n}}, \quad \text{ha } |z| > 1.$$

55. a) Igen, mindkét ágon

b) Nem

c) Igen, mindhárom ágon

d) Nem

56. [a] Azon az ágon amelyen $f(3) = +\sqrt{2}$

$$\sqrt{(z-1)(z-2)} = z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

így a binomiális sor felhasználásával

$$\begin{aligned} \sqrt{(z-1)(z-2)} &= z \left(1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \dots\right) = \\ &= z \left(1 - \frac{3}{2z} - \frac{1}{8z^2} + \dots\right) \end{aligned}$$

b) Az $\ln z$ főágán

$$\begin{aligned}\ln \frac{z-a}{z-b} &= \ln \left(1 - \frac{a}{z}\right) - \ln \left(1 - \frac{b}{z}\right) = \\ &= \frac{b-a}{z} + \frac{b^2-a^2}{2z^2} + \frac{b^3-a^3}{3z^3} + \dots\end{aligned}$$

57.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j z^n \right)$$

[58]. A $\frac{P(z)}{Q(z)}$ racionális törtfüggvénynek csak véges sok szinguláris helye van, így $\frac{P}{Q}$ reguláris egy $R < |z| < +\infty$ tartományon (ahol R a legnagyobb abszolútértékű szinguláris hely abszolút értéke). Továbbá van olyan K állandó és p pozitív egész szám, hogy $z = \infty$ környezetében $\left| \frac{P}{Q} \right| < K |z|^p$.

[59]. Tegyük fel, hogy f reguláris valamely tartományon és z_0 e tartomány belső pontja. Ekkor az f függvény Taylor sorba fejthető egy z_0 körüli körben.

A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ Taylor sor együtthatói: $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Ha a z_0 pontban végtelen sok n -re teljesülnek a feladatbeli egyenlőtlenségek, akkor a sor konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}}} \leq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = 0,$$

ami lehetetlen.

REZIDUUM ELMÉLET ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

1.§ ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK IZOLÁLT SZINGULÁRIS PONTBELI REZIDUUMA

1.1 IZOLÁLT SZINGULÁRIS HELYEK A VÉGESBEN ÉS A VÉGTELENBEN

1. A szingularitások jellege a határértékes definíció alapján is és a Laurent-sorfejtés segítségével is meghatározható.

a) $z_0 = 0$ megszüntethető szinguláris hely.

1. mód:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sh} z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch} z}{3z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sh} z}{6z} = -\frac{1}{6}$$

2. mód:

$$\frac{z - \operatorname{sh} z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left[z - \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) \right] = -\left(\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \dots \right)$$

b) $z_0 = 1$ harmadrendű pólus.

1. mód:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \infty, \quad \text{de} \quad \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^3 \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = e^2$$

2. mód:

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2(z-1)+2}}{(z-1)^3} = \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{2^3 e^2}{3!} + \frac{2^4 e^2}{4!} (z-1) + \\ &+ \dots + \frac{2^n e^2 (z-1)^{n-2}}{n!} + \dots \end{aligned}$$

c) $z_0 = -2$ lényeges szinguláris hely,

1. mód:

$$\lim_{z \rightarrow -2} (z-3) \frac{1}{z+2} \text{ nem létezik}$$

2. mód:

$$(z-3) \sin \frac{1}{z+2} = 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} + \dots$$

d) $z_0 = 0$ elágazási pont.

e) $z_0 = 0$ nem izolált szinguláris hely (elsőrendű pólusok torlódási pontja)

$$\boxed{2.} \text{ a) } \frac{z^2-4}{3z^2+6z} = \frac{(z-2)(z+2)}{3z(z+2)} = \frac{z-2}{3z} \quad \text{ha } z \neq -2$$

Az értelmezést az

$$f(-2) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{z-2}{3z} = \frac{2}{3}$$

értékkel kiegészítve a függvény folytonos, sőt reguláris.

$$\text{b) } \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z^2-1)(z+3)} = \frac{z^2+z+1}{(z+1)(z+3)}, \quad \text{ha } z \neq 1$$

Az értelmezést az

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2+z+1}{(z+1)(z+3)} = \frac{3}{8}$$

értékkel kiegészítve a függvény folytonos, sőt reguláris.

$$\text{c) } \frac{\text{sh } 3z}{4z} = \frac{3}{4} \frac{\text{sh } 3z}{3z}$$

Az értelmezést az

$$f(1) = \frac{3}{4} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sh } 3z}{3z} = \frac{3}{4}$$

értékkel kiegészítve a függvény folytonos, sőt reguláris.

$$d) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5z^2}{1 - \cos 4z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{10z}{4 \sin 4z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{10}{16 \cos 4z} = \frac{5}{8}$$

Az értelmezést az

$$f(0) = \frac{5}{8}$$

értékkel kiegészítve a függvény folytonos, sőt reguláris.

3. [a] másodrendű pólus

U.is $z = 0$ a nevezőnek másodrendű zérushelye (első deriváltja = 0, második deriváltja $\neq 0$), a számlálónak nem zérushelye.

[b] $(n-2)$ -ed rendű pólus.

U.is az

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^{n-1}}$$

alakból nyilvánvaló, hogy $z = 0$ a számlálónak elsőrendű, a nevezőnek $(n-1)$ -ed rendű zérushelye, így f -nek $(n-1)-1 = (n-2)$ -ed rendű pólusa.

c) elsőrendű pólus

d) másodrendű pólus.

[4] Az f függvény $z = 1$ pontbeli Laurent sora:

$$\sin \frac{z}{1-z} = \sin \frac{z-1+1}{1-z} = \sin \left(-1 + \frac{1}{1-z}\right) =$$

$$= \sin(-1) \cdot \cos \frac{1}{1-z} + \cos(-1) \cdot \sin \frac{1}{1-z} =$$

$$= \sin(-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(1-z)^{2k}} + \cos(-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{(1-z)^{2k+1}}$$

így

$$\sin \frac{z}{1-z} = \sum_{n=-} a_n (1-z)^n ;$$

ahol:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k \sin(-1)}{(2k)!} & \text{ha } n = 2k \\ \frac{(-1)^k \cos 1}{(2k+1)!} & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases}$$

Tehát $z = 1$ lényeges szinguláris hely.

$$(5.) \text{ a) } \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2 + \dots,$$

így $z = 0$ megszüntethető szinguláris hely.

$$\text{b) } \frac{e^{z^2}}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots,$$

így $z = 0$ harmadrendű pólus.

$$\text{c) } \frac{1}{z} \operatorname{ch} \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^3} + \frac{1}{4! z^5} + \dots,$$

így $z = 0$ lényeges szinguláris hely.

$$\text{d) } z^2 \cdot e^{-z^4} = z^2 - z^6 + \frac{z^{10}}{2!} - \frac{z^{14}}{3!} + \dots,$$

így $z = 0$ reguláris pont.

$$\text{e) } z e^{\frac{1}{z^2}} = z + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^3} + \frac{1}{3! z^5} + \dots,$$

így $z = 0$ lényeges szinguláris hely.

$$\text{f) } \frac{\sin^2 z}{z} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{45} + \dots,$$

így $z = 0$ megszüntethető szinguláris hely.

$$\text{g) } \frac{1}{z(z-4)} = -\left[\frac{1}{4z} + \frac{1}{16} + \frac{z}{64} + \frac{z^2}{256} + \dots\right]$$

így $z = 0$ elsőrendű pólus.

h) $z = 0$ nem izolált szinguláris hely, mert az a

$$z_k = \pm \frac{1}{\sqrt{k(2k+1)}j} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

pólushelyek torlódási pontja.

6. (a) $z = -1$ megszüntethető szinguláris hely,
 $z = 1$; $z = j$; $z = -j$ elsőrendű pólus

U.is:

$$\frac{z^3 + 1}{z^4 - 1} = \frac{(z+1)(z^2 - z + 1)}{(z-1)(z+1)(z-j)(z+j)}$$

- (b) $z = 0$ elsőrendű pólus
 $z = 2j$ másodrendű pólus

U.is

$$\frac{z^2 + 2 - zj}{z(z-2j)^3} = \frac{(z+j)(z-2j)}{z(z-2j)^3}$$

- (c) $z = 0$ másodrendű pólus
 $z = 1$ elsőrendű pólus

U.is:

a számlálónak sem $z = 0$, sem $z = 1$ nem zérushelye; a nevezőnek $z = 0$ másodrendű; $z = 1$ elsőrendű zérushelye.

- (d) $z = 0$ lényeges szinguláris hely

U.is:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[\sin z \sin \frac{1}{z} \right] \text{ nem létezik.}$$

- (e) $z = \ln(-1) = j(\pi + 2k\pi)$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

elsőrendű zérushelyek.

U.is:

ezek a helyek elsőrendű zérushelyei a nevezőnek (más zérushelye nincs), de a számlálónak nem zérushelyei.

- (f) $z = 3 - j$ lényeges szinguláris hely.

U.is:

$$\lim_{z \rightarrow 3-j} (z - 3 + j)^k e^{\frac{1}{z-3+j}} \text{ semilyen } k \in \mathbb{N}^+ \text{-ra nem létezik.}$$

tezik.

- g) $z = 1$ másodrendű pólus
 $z = 0$ megszüntethető szinguláris hely
 $z = 2k\pi j$; $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok
h) $z = 0$ másodrendű pólus
 $z = 2$ lényeges szinguláris hely

i) $z = 1$ lényeges szinguláris hely

$z = 2k\pi j$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok

j) $z = \pm \sqrt{\pi(2k+1)}j$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok (melyek az $y = x$ és $y = -x$ egyeneseken vannak)

7. A $z = \infty$ -beli szingularitás jellegének meghatározása történhet a határértékes definíció, vagy a Laurent sorfejtés segítségével. (Az $f(z)$ függvény $z = \infty$ -beli vizsgálata megegyezik az $f(\frac{1}{z})$ függvény $z = 0$ pontbeli vizsgálatával.)

(a) $e^{-\frac{1}{z}}$ -nek $z = \infty$ megszüntethető szinguláris helye:
Ugyanis:

1. mód:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{z}} = 1 \text{ (véges érték);}$$

2. mód:

$z = \infty$ környezetében Laurent-sora nem tartalmaz pozitív kitevőjű tagot:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{z}} &= e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \end{aligned}$$

b) $(\cos z - \sin z)$ -nek $z = \infty$ lényeges szinguláris helye.
Ugyanis:

1. mód:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\cos z - \sin z) \text{ nem létezik}$$

2. mód:

$z = \infty$ környezetében Laurent sora végtelen sok pozitív kitevőjű tagot tartalmaz

$$\cos z - \sin z = 1 - z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

c) $\frac{2}{\sin z + \cos z}$ -nek $z = \infty$ nem izolált szinguláris helye

Ugyanis:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin z + \cos z} = \frac{1}{\sin(z + \frac{\pi}{4})}$$

és így a $z = \infty$ a $z = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ elsőrendű pólushelyek torlódási pontja.

d) a $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ reláció jelzett egyértékű ágának a $z = \infty$ elsőrendű pólusa.

Ugyanis:

1. mód:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{(z-1)(z-2)} = \infty, \text{ de } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \sqrt{(z-1)(z-2)} = 1$$

2. mód:

$z = \infty$ környezetében Laurent sora véges számú pozitív kitevőjű tagot tartalmaz és $n = 1$ a legnagyobb pozitív kitevő:

$$\begin{aligned} \sqrt{(z-1)(z-2)} &= \sqrt{\left(\frac{1}{z} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 2\right)} = \frac{1}{z} (1 - z)^{\frac{1}{2}} (1 - 2z)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{z} (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = \\ &= z \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots\right) \end{aligned}$$

e) $\frac{z^2 + 4}{e^z}$ -nek $z = \infty$ lényeges szinguláris helye

f) $\frac{z^5 - 1}{z^2 + z + 1}$ -nek $z = \infty$ harmadrendű pólusa

g) $\sin \frac{1}{1-z}$ -nek $z = \infty$ megszüntethető szinguláris helye

h) $\frac{1}{\cos z}$ -nak $z = \infty$ nem izolált szinguláris helye

($z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ elsőrendű pólushelyek torlódási pontja)

i) $\cos z$ -nek $z = \infty$ lényeges szinguláris helye

- j) $z^4 \operatorname{ch} \frac{1}{z}$ -nek $z = \infty$ -ben negyedrendű pólusa van
- helye k) $z \sin \frac{1}{z}$ -nek $z = \infty$ megszüntethető szinguláris
- helye l) $\frac{1}{\sin 2z}$ -nek $z = \infty$ nem izolált szinguláris helye,
- hanem a $z_k = k \frac{\pi}{2}$ elsőrendű pólushelyek torlódási pontja.
- m) e^z -nek $z = \infty$ lényeges szinguláris helye
- Ⓝ) $\frac{1 - e^z}{1 + e^z}$ -nek $z = \infty$ nem izolált szinguláris helye.

Ugyanis:

$$\frac{1 - e^z}{1 + e^z} = \frac{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}} = \operatorname{th} \frac{z}{2}$$

és $z = \infty$ a $z_k = (2k + 1) \pi j$ elsőrendű pólushelyek torlódási pontja)

8. a) $z = 0$; $z = \pm 1$ elsőrendű pólusok
 $z = \infty$ harmadrendű zérushely

b) $z = \frac{1 \pm j}{\sqrt{2}}$; $z = \frac{-1 \pm j}{\sqrt{2}}$ elsőrendű pólusok

$z = \infty$ megszüntethető szinguláris hely

- c) $z = 1$ másodrendű pólus
 $z = \infty$ harmadrendű pólus

- d) $z = 0$ elsőrendű pólus
 $z = \pm j$ másodrendű pólus
 $z = \infty$ reguláris pont (ötödrendű zérushely)

- e) $z = \pm j$ elsőrendű pólusok
 $z = \infty$ lényeges szinguláris hely

- f) $z = 0$ megszüntethető szinguláris hely
 $z = 2k\pi j$; $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólus
 $z = \infty$ nem izolált szinguláris hely (a pólusok torlódási pontja)
- g) $z = 0$ másodrendű pólus
 $z = 2k\pi j$; $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok
 $z = \infty$ pólusok torlódási pontja
- h) $z = \frac{1}{3}(\pi + 2k\pi)j$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok
 $z = \infty$ pólusok torlódási pontja
- i) $z = \frac{-j}{2k\pi}$; $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok
 $z = 0$ lényeges szinguláris helye
 $z = \infty$ másodrendű pólus.
- j) $z = \infty$ lényeges szinguláris hely
- k) $z = 0$ lényeges szinguláris hely
 $z = \infty$ reguláris pont (elsőrendű zérushely)
- l) $z = 0$ lényeges szinguláris hely
 $z = \infty$ lényeges szinguláris hely
- m) $z = \pm j$ elsőrendű pólus
 $z = 1$ másodrendű pólus
 $z = \infty$ 4-edrendű pólus
- n) $z = 2$ lényeges szinguláris hely
 $z = 2k\pi j$ elsőrendű pólusok
 $z = \infty$ nem izolált szinguláris hely
- o) $z = \infty$ lényeges szinguláris hely
- p) $z = 1$ lényeges szinguláris hely

9. Például a $z = 1$ pont szinguláris pont a reláció azon ágán, ahol

$$\sqrt{1} = -1.$$

és reguláris pont ott, ahol

$$\sqrt{1} = 1.$$

⑩. a) $z_0 = 4$ az egyik ágon (ahol $[\sqrt{z-3}]_{z=4} = 1$) reguláris pont; a másik ágon (ahol $[\sqrt{z-3}]_{z=4} = -1$) elsőrendű pólus.

b) $z_0 = 1$ az egyik ágon (ahol $\sqrt{1} = -1$; $\sqrt[3]{1} = 1$) elsőrendű pólus, a többi 5 ágon (ahol: $\sqrt{1} = -1$ és $\sqrt[3]{1} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{1} = 1$ és $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt{1} = 1$ és $\sqrt[3]{1} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{1} = 1$ és $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$) reguláris pont.

c) $z_0 = 1$ az egyik ágon (ahol $\sqrt{1} = 1$) másodrendű pólus; a másik ágon (ahol $\sqrt{1} = -1$) reguláris pont.

d) $z_0 = 1$ az egyik ágon (ahol $\sqrt{1} = 1$) reguláris pont; a másik ágon (ahol $\sqrt{1} = -1$) lényeges szinguláris pont.

e) $z_0 = 4$ mindkét ágon elsőrendű pólus.

f) $z_0 = \infty$ az egyik ágon (ahol $\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{z}{z-2}} = 1$) reguláris; a másik ágon (ahol $\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{z}{z-2}} = -1$) lényeges szinguláris hely.

⑪. a) A z_0 környezetében g korlátos:

$$|g(z)| < K, \quad \text{ha} \quad |z - z_0| \leq r$$

így

$$M(f, r) - K \leq M(h, r) \leq M(f, r) + K$$

feltéve, hogy $r > 0$ kis érték, ami azt jelenti, hogy $h = f+g$ is korlátos z_0 környezetében. ($M(f, r) = \max_{|z-z_0| \leq r} f(z)$; $M(h, r) = \max_{|z-z_0| \leq r} h(z)$.)

b) A feltételek esetén van olyan $0 < K_1 < K_2$, hogy $K_1 \leq |g(z)| \leq K_2$ minden z -re a z_0 környezetében. Így

$$K_1 \cdot M(f, r) \leq M(h, r) \leq K_2 M(f, r)$$

feltéve, hogy $r > 0$ kis érték.

⑫. Hatványsorfejtéssel belátható:

a) $f_1 \pm f_2$ -nek β -rendű pólusa

- b) $f_1 \cdot f_2$ -nek
 $(\beta - \alpha)$ -rendű pólusa, ha $\alpha < \beta$
 $(\alpha - \beta)$ -rendű zérushelye, ha $\beta = \alpha$
megszüntethető szinguláris helye, ha $\beta < \alpha$
- c) $\frac{f_1}{f_2}$ -nek $(\alpha + \beta)$ -rendű zérushelye
- d) $\frac{f_2}{f_1}$ -nek $(\alpha + \beta)$ -rendű pólusa

13. a) z_0 megszüntethető szinguláris helye $F(z)$ -nek

b) z_0 n -ed rendű pólusa $F(z)$ -nek, ha $\varphi(z)$ a z_0 pont környezetében egyrétű függvény és $n \cdot m$ -ea rendű pólusa $F(z)$ -nek, ha $\varphi(z)$ a z_0 pont környezetében m -rétű függvény.

c) z_0 lényeges szinguláris helye $F(z)$ -nek.

15. Például:

a) $f(z) = z^2 + c$

b) $f(z) = \frac{1}{z^2} + z$

c) $f(z) = \frac{1}{z^{n-1}}$

[18]. Mivel - rögzített, de elég nagy z esetén - a

$$\frac{\varphi(z)}{z-z} = -\frac{1}{z} \varphi(z) - \frac{1}{z^2} \zeta \cdot \varphi(z) - \frac{1}{z^3} \zeta^3 \varphi(z) - \dots$$

sor a C görbén egyenletesen konvergens, ezért $f(z)$ -nek a kör külsejében konvergens Laurent-sora:

$$f(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

alakú, ami azt jelenti, hogy $f(z)$ a ∞ -ben reguláris és ott zérushelye van.

20. [a] Az adott függvény a $z = 0$ izolált szinguláris pont bármely környezetében minden A értéket felvesz. Ugyanis:

$$\text{ha } A = \infty,$$

akkor a $z_k = \frac{1}{k^2}$; $k = 1, 2, \dots$ pontsorozatra:

$$\lim_{z_k \rightarrow 0} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{k^2} = \infty$$

$$\text{ha } A = 0$$

akkor a $z_k = \frac{1}{k^2}$; $k = 1, 2, \dots$ pontsorozatra

$$\lim_{z_k \rightarrow 0} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k^2} = 0$$

ha $A \neq 0$; $A \neq \infty$ tetszőleges valós szám,

akkor a

$$z_k = \frac{1}{\ln A + 2k\pi j}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

választás mellett (ahol $\ln A$ tetszőleges, de minden z_k az $\ln$ relációnak azonos ágon vett pozitív értéke):

$$\lim_{z_k \rightarrow 0} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(\ln A + 2k\pi j)^2} = A^2$$

1.2 REZIDUUM A VÉGESBEN ÉS A VÉGTELENBEN

(25). A függvények adott pontokbeli reziduuma az adott pontbeli Laurent-sorban a c_{-1} együttható.

$$a) \frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots,$$

$$\text{így} \quad \text{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$b) \frac{\cosh z}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} + \dots,$$

$$\text{így} \quad \text{Res}_{z=0} f(z) = 0$$

$$c) e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots,$$

így $\operatorname{Res} f(z) = 1$
 $z=0$

$$d) \frac{z^2+z+3}{z^2-1} = \frac{5}{2(z-1)} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}(z-1) + \dots,$$

így $\operatorname{Res} f(z) = \frac{5}{2}$
 $z=1$

$$e) \frac{1}{\ln(1+z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}z + \dots,$$

így $\operatorname{Res} f(z) = 1$
 $z=0$

$$f) \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{360} + \dots,$$

így $\operatorname{Res} f(z) = 1$
 $z=0$

(26). A végtelen pontbeli reziduum: a $z = \infty$ körüli sorfejtésben a $-c_{-1}$ együttható.

$$a) e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots,$$

így $\operatorname{Res} f(z) = -c_{-1} = -1$
 $z=\infty$

$$b) z^2 \ln \frac{z-a}{z-b} = (b-a)z + \frac{(b^2-a^2)}{a} + \frac{b^3-a^3}{3z} + \dots,$$

így $\operatorname{Res} f(z) = -\frac{b^3-a^3}{3}$
 $z=\infty$

$$c) \cos z - \sin z = 1 - z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

így $\operatorname{Res} f(z) = 0$
 $z=\infty$

$$d) \frac{z^{2+4}}{e^z} = 1 - z + (1 + \frac{1}{2!})z^2 - (1 + \frac{1}{3!})z^3 + \dots$$

így $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$

$$e) z^4 \operatorname{sh} \frac{1}{z} = z^3 + \frac{1}{3!} z + \frac{1}{5!} \frac{1}{z} + \frac{1}{7!z} + \dots,$$

így $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{5!}$

$$f) \sqrt{(z-1)(z-2)} = z(1 - \frac{3}{2z} - \frac{1}{8z^2} + \dots),$$

így $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} g) f(z) &= z \sqrt{(1 - \frac{1}{z}(1 + \frac{j}{z}))} = \\ &= z \left[1 + \binom{1}{2} \left(-\frac{1}{z}\right) + \binom{1}{2} \left(-\frac{1}{z}\right)^2 + \dots + 1 + \binom{1}{2} \frac{j}{z} + \binom{1}{2} \frac{j^2}{z^2} + \dots \right] \\ &= z \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{8} \frac{1}{z^2} - \dots \right] \cdot \left[1 + \frac{j}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{8} \frac{1}{z^2} + \dots \right] = \\ &= \left[z - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z} - \dots \right] \cdot \left[1 + \frac{j}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{8} \frac{1}{z^2} + \dots \right], \end{aligned}$$

így $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = - \left(-\frac{j}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) = \frac{j+1}{4}$

[27]. Elsőrendű pólus esetén:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

vagy

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \left[\frac{g(z)}{h'(z)} \right]_{z=z_0}$$

n-edrendű pólus esetén:

$$\operatorname{res}_{z \rightarrow z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n \cdot f(z)]$$

így:

a) mivel $z_0 = j$ elsőrendű pólusa $f = \frac{g}{h}$ -nak (mert $g(j) \neq 0$; $h(j) = 0$, de $h'(j) \neq 0$), ezért

$$\operatorname{res}_{z=j} \frac{e^{\pi z}}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow j} (z-j) \frac{e^{\pi z}}{(z-j)(z+j)} = \left[\frac{e^{\pi z}}{z+j} \right]_{z=j} = \frac{j}{2}$$

b) $z_0 = \pi$ elsőrendű pólusa $f = \frac{g}{h}$ -nak (mert $g(\pi) \neq 0$; $h(\pi) = 0$, $h'(\pi) \neq 0$), ezért

$$\operatorname{res}_{z=\pi} \frac{e^{j \frac{z}{2}}}{\sin z} = \frac{g(\pi)}{h'(\pi)} = \frac{e^{j \frac{\pi}{2}}}{\cos \pi} = \frac{j}{-1} = -j.$$

c) $z_0 = 2\pi j$ elsőrendű pólusa f -nek, ezért

$$\operatorname{res}_{z=2\pi j} \frac{z^2}{e^z-1} = \frac{(2\pi j)^2}{e^{2\pi j}} = -4\pi^2$$

d) $z = 1$ másodrendű pólusa f -nek, így

$$\operatorname{res}_{z \rightarrow 1} \frac{z^3}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} 3z^2 = 3$$

e) $z_0 = 1$ harmadrendű pólusa $f = \frac{g}{h}$ -nak (mert $g(1) \neq 0$, $h(1) = h'(1) = h''(1) = 0$, de $h'''(1) \neq 0$), tehát

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1} \frac{z^4}{(z-1)^3} &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-1)^3 \frac{z^4}{(z-1)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} [12z^2]_{z=1} = 6. \end{aligned}$$

28. 1. mód: integrálással

$$\operatorname{res}_{z=2} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z-2|=R} \frac{e^z}{(z-2)^3} dz = \left[\frac{(e^z)''}{2!} \right]_{z=2} = \frac{e^2}{2}$$

2. mód: Laurent sorfejtéssel:

$$\text{mivel } e^z = e^{z-2} \cdot e^2 = e^2 \left[1 + (z-2) + \frac{(z-2)^2}{2!} + \dots \right]$$

$$\text{és } \frac{e^z}{(z-2)^3} = \frac{e^2}{(z-2)^3} \left[1 + (z-2) + \frac{(z-2)^2}{2!} + \frac{(z-2)^3}{3!} + \dots \right].$$

ezért

$$\operatorname{res}_{z=2} \frac{e^z}{(z-2)^3} = \frac{e^2}{2}$$

3. mód: határértékes formulával:

mivel $z = 2$ az f függvény 3-adrendű pólusa, ezért:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2} \frac{e^z}{(z-2)^3} &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-2)^3 \frac{e^z}{(z-2)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(e^z)'' \right]_{z=2} = \frac{e^2}{2}. \end{aligned}$$

29. a) $z = 0$ és $z = 2$ elsőrendű pólusok

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{res}_{z=2} f(z) = \frac{3}{2}$$

b) $z_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)j$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok,

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = 1$$

c) $z = 0$ harmadrendű pólus

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{4}{3}$$

d) $z = 1$ másodrendű pólus,

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = 2e^2$$

e) $z_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok,

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} (2k + 1) & \text{ha } k = 2n \\ \frac{\pi}{2} (2k + 1) & \text{ha } k = 2n + 1 \end{cases}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

f) $z = j$ és $z = -j$ elsőrendű pólusok,

$$\operatorname{res}_{z=j} f(z) = \frac{e^j}{2j} \quad \operatorname{res}_{z=-j} f(z) = -\frac{e^{-j}}{2j}$$

g) $z = 0$ másodrendű pólus

$$\operatorname{res}_{z=0} \operatorname{ctg} z^2 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 \operatorname{ctg} z^2) = 0;$$

$$z_k = \pm \sqrt{k\pi}; \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm \dots \text{ elsőrendű pólusok}$$

$$\operatorname{res}_{z_k} \operatorname{ctg} z^2 = \frac{g(a)}{h'(a)} = \left[\frac{\cos z^2}{2z \cos z^2} \right]_{z_k} = \left[\frac{1}{2z} \right]_{z_k} = \pm \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

30. a) 1

b) 1

c) $1 + (j-1)e^j$

d) 1

e) 0 (megszüntethető szingularitás)

f) 1

g) 1

$$31. \text{ [a] } z_k = e^{\frac{2k+1}{n} \pi j} \text{ pontok elsőrendű pólusok,}$$

$$z = \infty \text{ } n\text{-ed rendű pólus,}$$

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{z_k^{2n}}{n \cdot z_k^{n-1}} = \frac{z_k^{n+1}}{n} = -\frac{z_k}{n} = -\frac{1}{n} e^{\frac{2k+1}{n} \pi j}$$

és mivel

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n} = z^n - 1 + \frac{1}{z^n} + \dots,$$

azért

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq 1 \\ -1 & \text{ha } n = 1. \end{cases}$$

$$\text{[b] } z = -1 \text{ } n\text{-edrendű pólus;}$$

$$z = \infty \text{ } n\text{-edrendű pólus}$$

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{dz} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} \left[(z+1)^n \frac{z^{2n}}{(z+1)^n} \right] = (-1)^{n+1} \binom{2n}{n-1}$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = (-1)^n \binom{2n}{n-1}$$

c) $z = \infty$ lényeges szinguláris hely,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = 0$$

d) $z = -1$ elsőrendű pólus,

$z = \infty$ lényeges szinguláris hely,

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{g(-1)}{h'(-1)} = \frac{e^{-1}}{1} = e^{-1}$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{-1}$$

$$\text{e) } \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = - \sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = 0$$

$$f) \quad \operatorname{res}_{z=j} f(z) = -\frac{j}{4}; \quad \operatorname{res}_{z=-j} f(z) = \frac{j}{4}$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

$$g) \quad \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1; \quad \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

$$h) \quad \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0; \quad \operatorname{res}_{z=1} f(z) = 1;$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = - \sum_{k=1}^z \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = -1$$

$$i) \quad \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = +2 \sin 2;$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -2 \sin 2$$

$$j) \quad \operatorname{res}_{z=k\pi} f(z) = (-1)^k; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$k) \quad \operatorname{res}_{z=2} f(z) = 0;$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0;$$

$$l) \quad \operatorname{res}_{z=2} f(z) = -\frac{143}{24}$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{143}{24}$$

$$m) \quad \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0,$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

$$n) \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -\cos 1,$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \cos 1$$

$$o) \operatorname{res}_{z_k = \frac{1}{k\pi}} f(z) = (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2 \pi^2} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{6}$$

$$p) \operatorname{res}_{z_k = k\pi} f(z) = (-1)^k 2k^2 \pi^2 \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$r) \operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 \operatorname{ctg} z^2)' = 0,$$

$$\operatorname{res}_{z = \pm \sqrt{k}\pi} f(z) = \pm \frac{1}{2\sqrt{k}\pi} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$32. a) \operatorname{res}_{z=1} \frac{\sqrt{z}}{1-z} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \sqrt{1} = 1 \\ -1 & \text{ha } \sqrt{1} = -1 \end{cases}$$

$$b) \operatorname{res}_{z=1} \frac{1}{\sqrt{2-z+1}} = 0 \quad \text{ha } \sqrt{1} = -1$$

(ha $\sqrt{1} = 1$, akkor f reguláris)

$$c) \text{ Mivel } z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$$

$$\operatorname{res}_{z=1} \frac{e^{\alpha \operatorname{Ln} z}}{1 - \sqrt{z}} = \begin{cases} -2k \alpha \pi j & \text{ha } \sqrt{1} = 1 \text{ és } \operatorname{Ln} 1 = 2k\pi j \\ 0 & \text{ha } \sqrt{1} = -1 \end{cases}$$

$$d) \operatorname{res}_{z=\infty} \sqrt{(z-a)(z-b)} = \begin{cases} \frac{(a-b)^2}{8} & \text{ha } \sqrt{1} = 1 \\ -\frac{(a-b)^2}{8} & \text{ha } \sqrt{1} = -1 \end{cases}$$

$$e) \operatorname{res}_{z=\infty} \operatorname{Ln} \frac{z-a}{z-b} = a - b \quad \text{minden ágon}$$

$$f) \operatorname{res}_{z=\infty} z^2 \operatorname{Ln} \frac{z-a}{z-b} = \frac{b^3 - a^3}{3} \quad \text{minden ágon}$$

- g) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{Arctg} z}{z} = k\pi$ ha $\operatorname{Arctg} 0 = k\pi$
- h) $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\operatorname{Arctg} z}{z} = -\frac{(2k+1)}{2}$, ha $\operatorname{Arctg} \infty = \frac{(2k+1)}{2}$
34. $\operatorname{res}_{z=\infty} [f(z)]^2 = -2c_0 c_1$
35. a) $\operatorname{res}_{z=a} [\varphi(z) \cdot f(z)] = A \cdot \varphi(a)$
- b) $\operatorname{res}_{z=a} [\varphi(z) f(z)] = c_{-1} \varphi'(a) + \frac{c_{-2} \varphi''(a)}{1!} + \dots + \frac{c_{k-1} \varphi^{(k-1)}(a)}{K!}$
36. $\operatorname{res}_{z=a} f(\varphi(z)) = \frac{A}{\varphi'(a)}$

2.§ REZIDUUM-TÉTEL ÉS ALKALMAZÁSA INTEGRÁLOK ÉRTÉKÉNEK MEGHATÁROZÁSA

2.1 KOMPLEX INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA REZIDUUM TÉTELLEL

38. Az 1.§ 1.2 fejezetében levő $1/a$, c , e és $3/a$, b , c példákban kiszámított reziduumok felhasználásával

$$a) \oint_G \frac{e^z - 1}{z^3} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 2\pi j \frac{1}{2} = j\pi$$

$$b) \oint_G e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 2\pi j \cdot 1 = 2\pi j$$

$$c) \oint_G \frac{1}{\ln(1+z)} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 2\pi j \cdot 1 = 2\pi j$$

$$d) \oint_G \frac{e^{\pi z}}{z^2+1} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=j} f(z) = 2\pi j \cdot \frac{j}{2} = -\pi$$

$$e) \oint_G \frac{e^{\frac{jz}{2}}}{\sin z} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=\pi} f(z) = 2\pi j \cdot (-j) = 2\pi$$

$$f) \oint_G \frac{z^2}{e^z - 1} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=2j} f(z) = 2\pi j \cdot (-4\pi^2) = -8\pi^3 j$$

$$[39]. a) \oint \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz = 2\pi j [\operatorname{res}_{z=1} f + \operatorname{res}_{z=-1} f] = j\pi\sqrt{2}$$

Ugyanis:

$z = \pm 1$ elsőrendű pólusok, mindkettő G belsejében van és

$$\operatorname{res}_{z=1} f = \operatorname{res}_{z=1} \frac{g(z)}{h'(z)} = \frac{g(1)}{h'(1)} = \left[\frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{2z} \right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{res}_{z=-1} f = \left[\frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{2z} \right]_{z=-1} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

Ezért

$$\operatorname{res}_{z=1} f + \operatorname{res}_{z=-1} f = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \oint_G \frac{1}{z(1-e^z)} dz = 2\pi j [\operatorname{res}_{z=0} f + \operatorname{res}_{z=2\pi j} f + \operatorname{res}_{z=-2\pi j} f] = -\pi j$$

Ugyanis

az integrandus szinguláris helyei: $z = 0$ másodrendű és $z = 2k\pi j$; $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ elsőrendű pólusok. Közülük $z = 0$ és $z = \pm 2\pi j$ esik G belsejébe. Mivel

$$\operatorname{res}_{z=0} f = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{1}{z(1-e^z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{z}{(1-e^z)} \right]' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-e^z + ze^z}{(1-e^z)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res}_{z=2\pi j} f = \left[\frac{1}{1-e^z - ze^z} \right]_{z=2\pi j} = -\frac{1}{2\pi j},$$

$$\operatorname{res}_{z=-2\pi j} f = \left[\frac{1}{1-e^z - ze^z} \right]_{z=-2\pi j} = \frac{1}{2\pi j},$$

ezért a keresett integrál

$$2\pi j \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi j} + \frac{1}{2\pi j} \right] = -\pi j.$$

$$c) \oint_G \frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz = 2\pi j \left[\operatorname{res}_{z=1} f + \operatorname{res}_{z=2} f + \operatorname{res}_{z=3} f \right] =$$

$$= -2\pi j \operatorname{res}_{z=\infty} f = -2\pi j(-6) = 12\pi j$$

Ugyanis:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f + \operatorname{res}_{z=\infty} f = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f = -\operatorname{res}_{z=\infty} f,$$

és mivel

$$\frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{z^3}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} = 1 + \frac{6}{z} + \dots$$

ezért

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f = -c_{-1} = -6 \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{z=a_k} f = 6.$$

$$d) \oint_G \frac{1}{\sin z} dz = 2\pi j \sum_{k=-2}^2 \operatorname{res}_{z=k\pi} f = 2\pi j [1-1+1-1+1] =$$

$$= 2\pi j$$

Ugyanis:

az integrálandó függvény G belsejébe eső szinguláris helyei:

$$z_1 = -2\pi; z_2 = -\pi, z_3 = 0, z_4 = \pi, z_5 = 2\pi$$

amelyek mind elsőrendű pólusok.

$$e) \oint_G \frac{\sin z}{z^3 - 3jz^2} dz = 2\pi j (\operatorname{res}_{z=0} f + \operatorname{res}_{z=3j} f) = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{1}{3} \operatorname{sh} 3 - 1\right)$$

Ugyanis: az integrálandó függvénynek:
 $z = 0$ elsőrendű pólusa (mert a számlálónak elsőrendű, a nevezőnek másodrendű zérushelye); $z = 3j$ elsőrendű pólusa, és

$$\operatorname{res}_{z=0} f = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z}{z(z-3j)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2z - 3j} = -\frac{1}{3j}$$

$$\operatorname{res}_{z=3j} f = \lim_{z \rightarrow 3j} \frac{\sin z}{[z(z-3j)]'} = \left[\frac{\sin z}{2z - 3j} \right]_{z=3j} = \frac{\sin 3j}{3j}$$

$$f) \oint_G \frac{1}{1-e^{-z^2}} dz = 0.$$

Ugyanis:

$$\oint_G \frac{1}{1-e^{-z^2}} dz = \oint_G \left(\frac{z^2}{1-e^{-z^2}} \cdot \frac{1}{z^2} \right) dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} f$$

$$\text{és } \operatorname{res}_{z=0} f = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{1-e^{-z^2}} \right) = 0$$

$$g) \oint_G \frac{z^8}{z^4 + 1} dz = -j \frac{\pi \sqrt{2}}{2}$$

Ugyanis:

$$z^4 + 1 = (z^2 + j)(z^2 - j),$$

aminek zérushelyei

$$z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}; z_2 = e^{j\frac{5\pi}{4}}; z_3 = e^{-j\frac{\pi}{4}}; z_4 = e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

Ezek közül csak z_1 és z_3 esik az adott G zárt görbe belsejébe. így

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_1} f + \operatorname{res}_{z=z_3} f &= \frac{1}{4e^{j\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{-j\frac{3\pi}{4}}} = \\ &= \frac{1}{4} \left[\cos \frac{3\pi}{4} - j \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

40. a) $-4\pi j$

b) $-\pi j$

c) $2\pi j (1 - \cos 1)$

d) $2\pi j (j \operatorname{ctg} 1 + 1)$

e) 0

41. a) $\frac{-2\pi j}{9}$

b) $-2\pi j$

c) 0

d) $\frac{\pi j}{3}$

e) πj

f) $2\pi j$

g) $\pi j (e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{2}}})$

42. a) πj

b) $-\frac{\pi j}{\sqrt{2}}$

c) $-2\pi j$

d) $-\frac{\pi j}{2}$

e) $2\pi j$

f) $-\frac{\pi j}{\sqrt{2}}$

Megjegyzés: a példák kiszámításánál célszerű felhasználni azt a tételt, hogy egy függvény reziduumainak összege 0 (a ∞ -beli reziduumot is beleszámítva)!

43. [a]

$$\oint_G \frac{z}{z^n - 1} dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{ha } n = 1 \\ 2\pi j \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{j\frac{4\pi k}{n}} & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

Ugyanis:
az integrálandó függvény szinguláris pontjai a

$$z_k = \sqrt[n]{1} = e^{j\frac{2k\pi}{n}}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

pontok. Mindegyik elsőrendű pólus. Így minden szóbajöhető k-ra

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f = \frac{z_k}{n \cdot z_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{z_k^2}{z_k^n} = \frac{1}{n} z_k^2 = \frac{1}{n} e^{j\frac{4\pi k}{n}},$$

mert $z_k^n = 1$.

$$[b] \oint_G \frac{z^{2n}}{1 + z^n} dz = \begin{cases} 2\pi j \cdot 0 & \text{ha } n > 1 \\ 2\pi j \cdot 1 & \text{ha } n = 1 \end{cases}$$

Ugyanis:
az integrálandó függvény szinguláris helyei a

$z_k = e^{j\frac{2k+1}{n}\pi}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ helyek, melyek elsőrendű pólusok és mind a $|z| = R, R > 1$ kör belsejébe esnek. Így

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{z_k^{2n}}{n \cdot z_k^{n-1}} = \frac{z_k^{n+1}}{n} = -\frac{z_k}{n} = -\frac{1}{n} e^{j\frac{2k+1}{n}\pi}$$

Tehát, ha $n \neq 1$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{res}_{z=z_k} f = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{j \frac{2k+1}{n} \pi} = 0,$$

mert az n -edik egységgyökök összege 0.

Ha $n = 1$, akkor

$$\operatorname{res}_{z=-1} f = \operatorname{res}_{z=-1} \frac{z^2}{1+z} = \left[\frac{z^2}{1} \right]_{z=-1} = 1.$$

$$\text{c)} \oint_G \frac{z^{2n}}{(1+z)^n} dz = 2\pi j (-1)^{n+1} \binom{2n}{n-1}.$$

Ugyanis:

$z = -1$ n -edrendű pólus, és így

$$\operatorname{res}_{z=-1} f = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z+1)^n \frac{z^{2n}}{(z+1)^n} \right] = (-1)^{n+1} \binom{2n}{n-1}$$

$$\text{d)} \frac{1}{2\pi j} \oint_G z^n e^{\frac{2}{z}} dz = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} & \text{ha } n \geq -1 \\ 0 & \text{ha } n < -1 \end{cases}$$

e) 1

f) 0

$$44. \text{ a) } \frac{\pi j}{32} \text{ ill. } 0$$

$$\text{b) } 2\pi j \frac{5}{4}, \text{ ill. } 6\pi j$$

$$\text{c) } 2\pi \left[\frac{\operatorname{sh} 6}{27} - \frac{2}{9} \right], \text{ ill. } 0$$

$$\text{d) } \frac{\pi}{8} (4j - e^{2j})$$

$$\text{e) } -\pi j$$

$$\text{f) } 2\pi j, \text{ ill. } 2\pi j$$

$$g) j \pi (\cos 1 - \sin 1); \text{ ill. } 0$$

$$45. a) 0$$

$$b) -6 \pi j$$

$$c) 0$$

Ugyanis: $\operatorname{ctg} z^2$ -nek

$$z_k = \pm \sqrt{\pm k \pi}; \quad k = 1, 2, \dots \text{ elsőrendű pólusai}$$

$$z_0 = 0 \quad \text{másodrendű pólusa}$$

Mivel

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \left[\frac{\cos z^2}{(\sin z^2)'} \right]_{z=z_k} = \left[\frac{\cos z^2}{2z \cos z^2} \right]_{z=z_k} =$$

$$= \left[\frac{1}{2z} \right]_{z=z_k} = \pm \frac{1}{2\sqrt{\pm k \pi}},$$

$$\operatorname{res}_{z=0} f = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 \operatorname{ctg} z^2) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin (2z^2) - 2z^3}{\sin^2 z^2} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3} z^7 + \dots}{z^4} = 0,$$

és a G belsőjébe eső szinguláris pontok

$$z_1 = \pm \sqrt{\pm \pi} \quad \text{és} \quad z_0 = 0,$$

ezért

$$\sum_{k=0}^1 \operatorname{res}_{z=z_k} f = 0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{-\pi}} - \frac{1}{2\sqrt{-\pi}}$$

$$d) \frac{\pi j}{16} (3 \pi^2 - 32)$$

Ugyanis:

$$1 - \operatorname{tg} z = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} z = 1 \Rightarrow z = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$$\cos^2 2z = 0 \Rightarrow 2z = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow z = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}; \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

A $|z| = \frac{3}{7}\pi$ kör belsejébe eső szinguláris helyek:

$$z = \frac{\pi}{4} \text{ elsőrendű pólus,}$$

$$z = -\frac{\pi}{4} \text{ másodrendű pólus}$$

Ekkor

$$\operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} z}{\cos^2 2z} = \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z - \sin z}{\cos z (\cos^2 z - \sin^2 z)} =$$

$$= \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 z + \cos z \sin z} = -1$$

$$\operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} z}{\cos^2 2z} = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \left[\frac{d}{dz} \frac{z^2}{\cos^2 z + \cos z \sin z} \right] = \frac{3\pi^2}{32}$$

e) 0

f) $2\pi j (2 - \pi^2)$

g) $32\pi j$

h) $-\frac{j}{\pi}$

i) $2\pi j \left[\frac{3 + 2j}{\sin(3 - 2j)} + \frac{3 - 9j}{10} \right]$

j) $2\pi j \left[-\frac{3j}{\operatorname{sh} 1} - 3j + \frac{12 - \pi^2}{j \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi + 1}{2} j \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}} \right]$

46. a) $\sqrt{-1-4c} > 3j$ és $\sqrt{-1-4c} < -5j \Rightarrow$ nincs olyan c

b) $\sqrt{-4+46} < -2j$ és $\sqrt{-4+4c} > 6j \Rightarrow -8 < c < 0$

[48]. Ha $|z_0| < R$, akkor G belsejében két szinguláris pont van:

$$z_1 = 0 \text{ elsőrendű pólus}$$

$$z_2 = z_0 \text{ n-edrendű pólus}$$

Mivel

$$\operatorname{res}_{z=0} f = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(z-z_0)^n} = \frac{(-1)^n}{z_0^n}$$

és

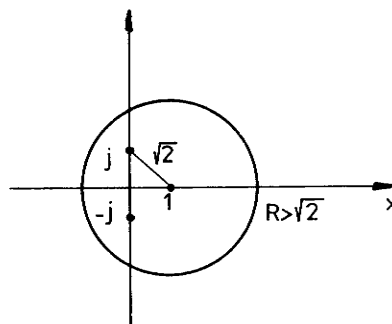
$$\operatorname{res}_{z \rightarrow z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1} \left[(z-z_0)^n \frac{1}{z(z-z_0)^n} \right]}{dz^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{z_0^n},$$

ezért

$$\oint_{|z|=R} \frac{dz}{z(1-z_0)^n} = 2\pi j \left[\frac{(-1)^n}{z_0^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{z_0^n} \right] = 0.$$

$$[49]. \oint_{|z-1|=R} \frac{\sin \frac{z}{2}}{1+z^2} dz = \begin{cases} 0 & \text{ha } R < \sqrt{2} \\ 2\pi \sin j & \text{ha } R > \sqrt{2} \end{cases}$$

Ugyanis (ld. 69. ábra)



69. ábra

$$\oint_{K_1} \frac{\sin z}{(z-j)(z+j)} dz = 2\pi j \left[\frac{\sin z}{z+j} \right]_{z=j} = 2\pi j \frac{\sin j}{2j} = \pi \sin j$$

$$\oint_{K_2} \frac{\sin z}{(z-j)(z+j)} dz = 2\pi j \left[\frac{\sin z}{z-j} \right]_{z=-j} = \pi \sin j$$

$$50. \text{ a) } F(R) = \begin{cases} 0 & \text{ha } R < \sqrt{8}, \quad R \neq 2 \\ \pi j (e^2 - 1) & \text{ha } R > \sqrt{8}, \end{cases}$$

$$\text{b) } F(R) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} & \text{ha } R < \sqrt{3}, \\ 0 & \text{ha } R > \sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\text{c) } F(R) = \begin{cases} 0 & \text{ha } R < 2, \\ \frac{2 \cos 2 - \sin 2}{4} & \text{ha } R > 2 \end{cases}$$

51. d) Az integrálandó függvény szinguláris pontjai:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = j, \quad z_3 = -j.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \text{res } f &= 0, \\ z_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res } f &= \operatorname{arctg} j, \\ z_2 &= j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res } f &= \operatorname{arctg} j, \\ z_3 &= -j \end{aligned}$$

ezért

$$\oint_G \frac{\operatorname{arctg} z}{1+z^2} dz = \begin{cases} 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{ha } G\text{-ben egy szinguláris pont} \\ \text{sincs, vagy csak a } z = 0 \\ \text{pont van;} \end{array} \right. \\ \operatorname{arctg} j, & \left\{ \begin{array}{l} \text{ha } G\text{-ben csak a } z_2 = j, \text{ vagy} \\ \text{csak a } z_3 = -j, \text{ vagy} \\ z_1 = 0 \text{ és } z_2 = j, \text{ vagy} \\ z_1 = 0 \text{ és } z_3 = -j, \text{ pont} \\ \text{van;} \end{array} \right. \\ 2 \operatorname{arctg} j, & \text{ha } G\text{-ben } z_2 = j \text{ és } z_3 = -j \text{ pontok} \\ & \text{vannak.} \end{cases}$$

52. A reziduum-tétel alkalmazásával

$$\oint_G f(z) dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z} = 2\pi j$$

$$54. \frac{f(0)}{g(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{f(a_k)}{a_k g'(a_k)}$$

[56]. A reziduum-tétel értelmében

$$I = \oint_G \frac{1}{z(e^z - 1)} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 2\pi j \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi j$$

Ugyanis:

Az integrálandó függvény $|z|=10$ kör belsejébe eső pólusai:

$$z_1 = 0 \text{ másodrendű}$$

$$z_{2,3} = \pm 2\pi j \text{ elsőrendű pólusok.}$$

Mivel:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \left[\frac{1}{z} \right]_{z=\pm 2\pi j} = \frac{1}{\pm 2\pi j},$$

ezért

$$\operatorname{res}_{z=2\pi j} f(z) + \operatorname{res}_{z=-2\pi j} f(z) = 0$$

és így

$$I = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} f(z)$$

Mivel $z=0$ az $\frac{1}{e^z-1}$ -nek elsőrendű pólusa, ezért $z=0$ körüli Laurent-sora

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots$$

így

$$\frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{c_{-1}}{z^2} + \frac{c_0}{z} + c_1 z + \dots$$

ami azt jelenti, hogy

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_0$$

Ennek értéke

$$1 = (z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots) (\frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots)$$

amiből

$$\begin{aligned} c_{-1} &= 1 \\ c_0 &= -\frac{c_1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

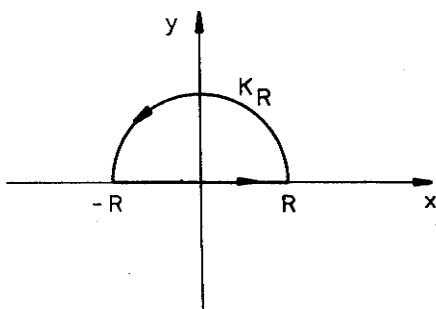
$$I = 2\pi j c_0$$

2.2 VALÓS INTEGRÁLOK KISZÁMÍTÁSA REZIDUUM-TÉTELLEL

(A)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

típusú integrálok, ahol $\frac{P}{Q}$ racionális törtfüggvény.



70. ábra

58. [a] A valós analízisből ismert, hogy ez az improprius integrál létezik. Komplex vonalintegrállal való kiszámításához szükséges az integrálandó valós függvény analitikus folytatása az $\operatorname{Im} z > 0$ felső félsíkon az

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$$

komplex függvény. Az integrálást a valós tengely $[-R, R]$ szakaszból, valamint a $|z| = R$; $\text{Im } z > 0$ félkörívbel álló, pozitív irányítású zárt görbe mentén végezzük (ld. 70. ábra). E görbe belsejébe a függvény

$$z = e^{\frac{\pi j}{6}}, e^{\frac{3\pi j}{6}}, e^{\frac{5\pi j}{6}}, e^{\frac{7\pi j}{6}}, e^{\frac{9\pi j}{6}}, e^{\frac{11\pi j}{6}}$$

elsőrendű pólusai közül csak a

$$z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi j}{6}}; \quad k = 0, 1, 2$$

pólusok esnek. A L'Hospital szabály felhasználásával:

$$\text{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^6+1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - e^{\frac{\pi j}{6}}) \frac{1}{z^6+1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi j}{6}}$$

$$\text{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^6+1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \left[(z - e^{\frac{3\pi j}{6}}) \frac{1}{z^6+1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi j}{2}}$$

$$\text{res}_{z=z_2} \frac{1}{z^6+1} = \lim_{z \rightarrow z_2} \left[(z - e^{\frac{5\pi j}{6}}) \frac{1}{z^6+1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{\frac{-25\pi j}{6}}$$

Ezért a reziduum-tétel értelmében:

$$\oint \frac{dz}{z^6+1} = 2\pi j \left[\frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi j}{6}} + \frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi j}{2}} + \frac{1}{6} e^{\frac{-25\pi j}{6}} \right] = \frac{2\pi}{3}$$

Tehát

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^6+1} + \int_{K_R} \frac{dz}{z^6+1} = \frac{2\pi}{3}$$

Mivel $R \rightarrow \infty$ esetén a K_R félkörív mentén vett integrál értéke $\rightarrow 0$, ezért

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^6 + 1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3},$$

úgy hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{3}$$

b) $\frac{\pi}{3}$

[c] Az integrálandó valós függvény felső félsíkbeli analitikus folytatásának, az

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

függvénynek a $[-R, R]$ egyenesszakaszból és a K_R felső félkörívből álló zárt görbe belsejébe eső pólusai:

$$z = j \quad \text{másodrendű pólus}$$

és

$$z = -1 + j \quad \text{elsőrendű pólus.}$$

Mivel

$$\operatorname{res}_{z=j} f(z) = \lim_{z \rightarrow j} \frac{d}{dz} \left[(z-j)^2 \frac{z^2}{(z-j)^2 (z+j)^2 (z^2+2z+2)} \right] = \frac{9j-12}{100}$$

$$\operatorname{res}_{z=-1+j} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1+j} \left[(z+1-j) \frac{z^2}{(z^2+1)^2 (z+1-j)(z+1+j)} \right] = \frac{3-4j}{25}$$

ezért

$$\oint_G \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} dz = 2\pi j \left[\frac{9j-12}{100} + \frac{3-4j}{25} \right] = \frac{7\pi}{50}$$

Felhasználva, hogy a K_R félkörív menti integrál $\rightarrow 0$,
ha $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)^2 (x^2+2x+2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2 (x^2+2x+2)} dx = \frac{7\pi}{50}.$$

[d)] Mivel az integrandus páros függvény, ezért

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

A valós integrál helyett a

$$\oint_G \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$$

komplex integrált számítjuk, ahol G a 70. ábrán látható,
pozitív irányítású zárt görbe ($R > 2$). Itt

$$\begin{aligned} \oint_G \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz &= \pi j \left[\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=j} + \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\tilde{z}_j} \right] \\ &= 2\pi j \left[\frac{1}{2j \cdot 3} + \frac{-4}{-3 \cdot 4j} \right] = \frac{2\pi j}{6j} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Mivel

$$\oint_G \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \int_{K_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz + \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx,$$

ahol $R \rightarrow \infty$ esetén az első integrál 0-hoz tart, ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{3},$$

amiből

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}$$

e) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$

59. a) $\frac{\pi}{a}$

b) $\frac{\pi}{4a^3}$

c) $\frac{\pi}{4a}$

d) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$

Ugyanis pl. b)

Mivel az integrandus páros függvény, ezért

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

Felhasználva a reziduum-tételt:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} - \int_{-R}^R \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi j \operatorname{res}_{z=aj} \frac{1}{(z^2+a^2)^2} =$$

$$= \pi j \operatorname{res}_{z=aj} \left[\frac{1}{(z-aj)^2} (c_0 + c_1(z-aj) + \dots) \right] = \pi j c_1 = \frac{\pi}{4a^3}$$

Itt az $\frac{1}{(z+aj)^2}$ függvény $z_0 = aj$ körüli Taylor sorfejtésében a c_1 együtthatót a

$$c_1 = \left[\frac{d}{dz} \frac{1}{(z+aj)^2} \right]_{z=aj} = \frac{1}{4a^3j}$$

formulával határoztuk meg.

Az átalakítások során felhasználtuk, hogy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} = 0,$$

mert az R sugarú körön

$$\left| \frac{1}{(z^2+a^2)^2} \right| < \frac{1}{R^2}$$

ha R elég nagy.

B

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$$

típusú integrálok, ahol R racionális függvény, amelynek nincs szingularitása az egységgörön

61. [a] Az adott valós integrált az

$$e^{jx} = z,$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2j}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$dx = \frac{1}{jz} dz$$

helyettesítéssel egy komplex függvény $|z|=1$ kör menti integráljává transzformáljuk. így:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x + \sin x} = \oint_{|z|=1} \frac{2 dz}{(1-2j) z^2 + 6jz - 1 - 2j}$$

Az integrálandó függvény pólusai:

$$z_1 = 2 - j, \quad z_2 = \frac{2-j}{5}$$

amelyek közül csak a z_2 esik a kör belsejébe. Mivel

$$\operatorname{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \left[\left(z - \frac{2-j}{5} \right) \frac{2}{(1-2j) z^2 + 6jz - 1 - 2j} \right] = \frac{1}{2j},$$

ezért a reziduum-tétel értelmében

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x + \sin x} = 2\pi j \frac{1}{2j} = \pi.$$

[b)] Alkalmazva a

$$z = e^{jx}; \quad \cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \quad \cos 3x = \frac{1}{2} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right); \quad dx = \frac{1}{jz} dz$$

helyettesítést:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4 \cos x} dx = -\frac{1}{2j} \oint_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3 (2z-1)(z-2)} dz$$

Mivel az integrálandó függvénynek

$z = 0$ harmadrendű pólusa,

$z = \frac{1}{2}$ elsőrendű pólusa,

és

$$\operatorname{res}_{z=0} f = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(z^3 \frac{z^6+1}{z^3 (2z-1)(z-2)} \right) = \frac{21}{8},$$

$$\text{resf} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{z^6 + 1}{z^3 (2z-1)(z-2)} \right] = -\frac{65}{24},$$

ezért

$$-\frac{1}{2j} \oint_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3 (2z-1)(z-2)} dz = -\frac{1}{2j} \cdot 2\pi j \left[\frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right] = \frac{\pi}{12}$$

így

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4\cos x} dx = \frac{\pi}{12}$$

c) $\frac{5\pi}{32}$

d) 0

e) $\frac{3\pi}{8}$

f) $\frac{135\pi}{16,38}$

63. a) $\pi\sqrt{2}$

b) $\pi\sqrt{2}$

c) $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$

d) $\frac{(2a+b)\pi}{\sqrt{[a(a+b)^3]}}$

e) $\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \cdot 2\pi$

Ugyanis pl. b):
Alkalmazva a

$$z = e^{jx}; \quad dz = je^{jx} dx;$$

azaz a

$$\sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2j}; \quad dx = \frac{1}{j} \frac{dz}{z}$$

helyettesítést, ezzel a kérdéses valós integrál az

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - \frac{(z+\frac{1}{2})^2}{4}} \cdot \frac{1}{jz} dz$$

komplex körintegrállá alakul. Elemi átalakításokkal ez az integrál

$$4j \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 - 2z - 1)(z^2 + 2z + 1)}$$

alakú, aminek értéke - a residuum tételt alkalmazva -:

$$\begin{aligned} 4j \cdot 2\pi j \operatorname{res}_{\substack{z_1 = 1 - \sqrt{2} \\ z_2 = \sqrt{2} - 1}} \frac{z}{[z - (1 + \sqrt{2})][z - (1 - \sqrt{2})][z - (-1 + \sqrt{2})][z - (-1 - \sqrt{2})]} = \\ = \frac{-\sqrt{2}}{16} - \frac{\sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

így

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \sqrt{2} \pi$$

C

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{+jkx} dx; \quad \text{ill.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx$$

típusú integrálok

64. a) πe^{-a}

b) πe^a

c) $\frac{\pi e^{-a}}{2a}$

d) $\frac{\pi}{2} e^{-m}$

e) $\frac{\pi}{4} e^{-m}(1+m)$

Ugyanis pl. a)

Az $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ függvény $|z| \rightarrow \infty$ esetén $\arg z$ -ben egyenletesen tart 0-hoz, így a Jordan Lemma feltételei teljesülnek, úgy hogy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \frac{e^{jaz}}{1+z^2} dz = 0,$$

ahol $K_R: |z| = R; \quad \operatorname{Im} z \geq 0$ félkörív.

Ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jax}}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{K_R} \frac{e^{jaz}}{1+z^2} dz =$$

$$= 2\pi j \operatorname{res}_{z=j} \left[\frac{e^{jaz}}{1+z^2} \right] =$$

$$= 2\pi j \operatorname{res}_{z=j} \frac{e^{jaz}}{(z+j)(z-j)} = \pi e^{-a}$$

pl. c):

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\frac{\sin x}{x^2+a^2}$ páratlan függvény

és így
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2} dx = 0 .$$

65. [a]
$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{m}{2}\right) e^{-\frac{m\sqrt{3}}{2}}$$

Ugyanis:

Az adott improprius integrál konvergens, mert az integrandus úgy viselkedik a végtelenben, mint $|z|^{-2}$. Felhasználjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+x+1} dx = \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jmx}}{x^2+x+1} dx \right] ,$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jmx}}{x^2+x+1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{G_R} \frac{e^{jmz}}{z^2+z+1} dz = 2\pi j \sum_{z=a_k} \operatorname{res} \frac{e^{jmz}}{z^2+z+1} ,$$

ahol G_R : a valós tengely $-R+j\cdot 0$, $R+j\cdot 0$ pontjait összekötő szakaszból és a $|z|=R$; $\operatorname{Im} z > 0$ félkörívbeli álló zárt görbe pozitív irányban bejárva és a_k az $\frac{1}{z^2+z+1}$ függvény $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkba eső pólusa. Mivel egy ilyen pólus van, az $a_1 = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$ elsőrendű pólus, ezért:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jmx}}{x^2+x+1} dx = 2\pi j \operatorname{res}_{z=a_1} \frac{e^{jmz}}{z^2+z+1} = 2\pi \frac{e^{-\frac{jm}{2}} \cdot e^{-\frac{m\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} ,$$

így

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + x + 1} dx = \operatorname{Re} \left[2\pi \frac{e^{-\frac{jm}{2}} \cdot e^{-\frac{m\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{m}{2}\right) e^{-\frac{m\sqrt{3}}{2}}$$

$$b) -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$c) \frac{\pi}{5} \left(\cos 1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

$$d) \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right)$$

$$66. \boxed{a)} 0$$

Ugyanis:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{jx}}{x^2 + 4} dx \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (j\pi e^{-2}) = 0.$$

$$b) \frac{\pi}{2} e^{-m \cdot n}$$

$$c) \frac{\pi}{2} e^{\frac{-m}{\sqrt{2}}} \cdot \cos \frac{m}{\sqrt{2}}$$

$$67. \boxed{a)} \frac{\pi}{3e^3} (\cos 1 - 3 \sin 1)$$

$$b) \pi (2 \sin 2 - 3 \sin 3)$$

$$c) \frac{\pi}{3e^3} (3 \cos 1 - \sin 1)$$

$$d) \frac{\pi}{2e^4} (2 \cos 2 + \sin 2)$$

$$e) \frac{\pi}{2} (\cos 2 + \sin 2)$$

$$f) \frac{\pi}{2} (1 - 2j) e^{-2\pi}$$

Ugyanis pl. a)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 10} e^{jx} dx$$

Felhasználjuk, hogy $|z| \rightarrow \infty$ esetén a $\frac{z}{z^2 - 2z + 10}$ függvény arc z -ben egyenletesen tart 0-hoz és így a Jordan lemma szerint

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{K_R} \frac{z}{z^2 - 2z + 10} e^{jz} dz = 0,$$

ahol K_R a $|z| = R$; $\operatorname{Im} z \geq 0$ félkörív.

Ezért

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{-R}^R \frac{z}{z^2 - 2z + 10} e^{jz} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=1+3j} \frac{z e^{jz}}{[z-(1+3j)][z-(1-3j)]} = \\ &= 2\pi j \frac{1+3j}{6} e^{j(1+3j)} = \\ &= \frac{\pi}{3e^3} (\cos 1 - 3 \sin 1) + j \frac{\pi}{3e^3} (\cos 1 + \sin 1) \end{aligned}$$

Tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{\pi}{3e^3} (\cos 1 - 3 \sin 1),$$

(60). Útmutatás:
Az integrálást végezzük a

$$-R; +R; R + 2\pi j; -R + 2\pi j$$

csúcspontú téglalap mentén és használjuk fel, hogy a függőleges szakaszok menti integrálok értéke $\rightarrow 0$, ha $R \rightarrow \infty$.

69. (b) Használjuk fel az

$$\oint_G \frac{e^{ajz}}{e^{2\pi z} - 1} dz$$

integrált, ahol G a

$$0; R; R + j; j$$

csúcspontú téglalap és $R \rightarrow \infty$.

70. (a) Használjuk fel az

$$f(z) = \frac{1 - e^{jz}}{z^2}$$

függvény integrálját.

(b) Használjuk fel az

$$f(z) = \frac{e^{\frac{j\pi z}{2}}}{z^2 - 1}$$

függvény integrálját.

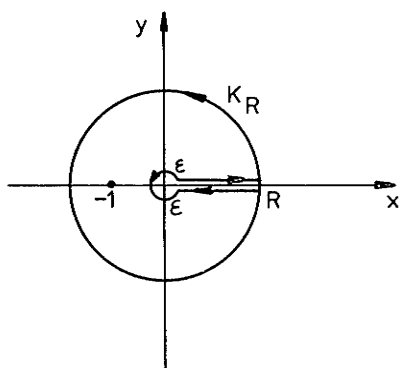
(c) A reziduum-elmélet alkalmazása nem szükséges, mert az integrandus az x változó páratlan függvénye.

D

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \quad \text{ill.} \quad \int_a^b f(x) dx$$

típusú integrálok, ahol f nem korlátos az integrációs tartományon és analitikus folytatásának elágazási pontja van.

71. (a) $\frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$



71. ábra

Ugyanis:

A valós analízisből ismert, hogy az adott improprius integrál létezik. Az integrál reziduum-tétellel történő kiszámításához előállítjuk az integrálandó függvény komplex síkbeli analitikus folytatását, a $z = 0$ -ban elágazási ponttal és a $z = \infty$ -ban zérushellyel rendelkező

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)z^\alpha}; \quad 0 < \alpha < 1$$

függvényt. Ez a függvény - a $z = -1$ pólushely kivételével - reguláris az integrációs útnak választott - a 71. ábrán látható - $[\epsilon, R] \cup K_R^+ \cup [R, \epsilon] \cup K_\epsilon^-$ pozitív irányítású zárt görbén és az általa határolt tartományon (itt $K_R : |z| = R$ és

$K_\epsilon : |z| = \epsilon$). Ugyanis az $f(z)$ függvény határértéke az $[\epsilon, R]$ szakasz valamely $\epsilon \leq x \leq R$ pontjában - ha ahhoz a felső félsík felől közeledünk -:

$$\frac{1}{(x+1)x^\alpha} = \frac{1}{(x+1)e^{\alpha \ln x}}$$

ahol a reguláris $\ln z$ úgy van definiálva, hogy $\ln(-1) = j\pi$ teljesüljön. Az alsó félsík felől közeledve ugyanehhez az x ponthoz az $f(z)$ határértéke:

$$\frac{1}{(1+x)x^\alpha e^{j2\pi\alpha}} = \frac{1}{(1+x)e^{\alpha(\ln x + 2\pi j)}}.$$

Tehát a reziduum-tétel értelmében

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^R \frac{dx}{(1+x)x^\alpha} + \oint_{K_R^+} \frac{dz}{(1+z)z} - \int_R^{\epsilon} \frac{dz}{(1+x)x^\alpha e^{j2\pi\alpha}} + \oint_{K_\epsilon^-} \frac{dz}{(1+z)z} = \\ = 2\pi j \operatorname{res}_{z=-1} \frac{1}{(1+z)z^\alpha} \end{aligned}$$

(mert az adott tartományon f egyetlen szinguláris pontja $z = -1$).

A K_R körön $|f(z)| \leq \frac{1}{(R-1) \cdot R^\alpha} \Rightarrow 0$, ha $R \rightarrow \infty$; a K_ε körön $|f(z)| \leq \frac{1}{(1-\varepsilon) \varepsilon^\alpha} \rightarrow 0$, ha $\varepsilon \rightarrow 0$. Így a K_R és K_ε körök menti integrálok 0-hoz tartanak. Ezért a kérdéses I integrálva:

$$(1 - e^{-j2\pi\alpha}) \int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{(1+x)x^\alpha} = (1 - e^{-j2\pi\alpha}) I = 2\pi j e^{-\pi\alpha}.$$

Ebből az Euler formula felhasználásával:

$$I = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}$$

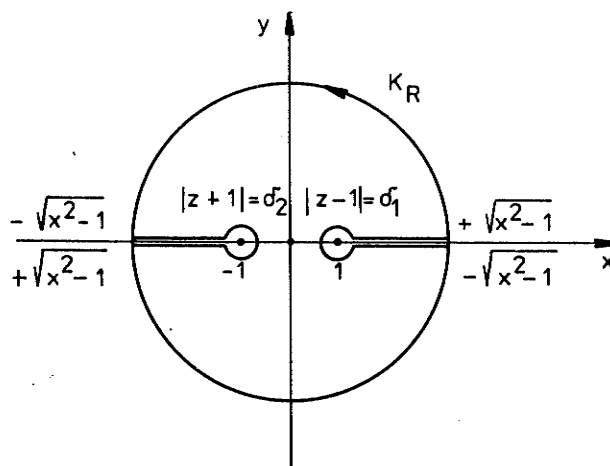
$$(b) \quad \frac{c_n}{4} = \frac{1}{4} \left[\frac{2\pi}{(n-1)!} (2n-5)(2n-7) \dots 3 \cdot 1 \right]$$

Útmutatás:

Határozzuk meg az

$$\frac{1}{z^n \sqrt{1-z^2}}$$

komplex függvény $z = 0$ pont körüli integrálját a 72. ábrán látható zárt görbén!

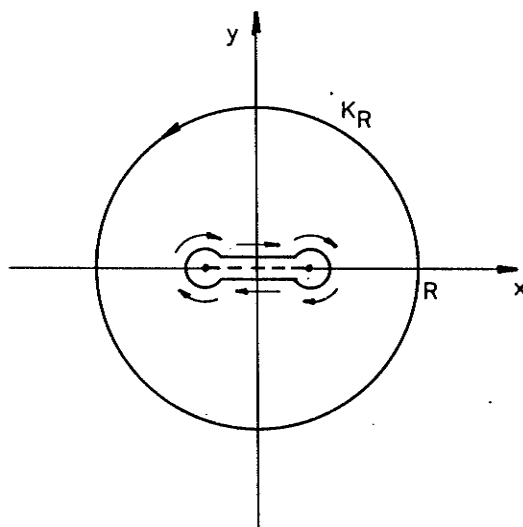


72. ábra

c) $-\pi$

72. Útmutatás:

Az $f(z) = \sqrt{1 - z^2}$ komplex reláció a $[-1, 1]$ intervallumon bemetszett komplex síkon analitikus folytatása a $\sqrt{1 - x^2}$ valós függvénynek (ugyanis: $f(z)$ határértéke a bemetszés felső partján: $\sqrt{1 - x^2}$, alsó partján $-\sqrt{1 - x^2}$. így az $f(z)$ függvény integrálását a 73. ábrán látható görbe mentén végezve a kérdéses integrálok értéke meghatározható.



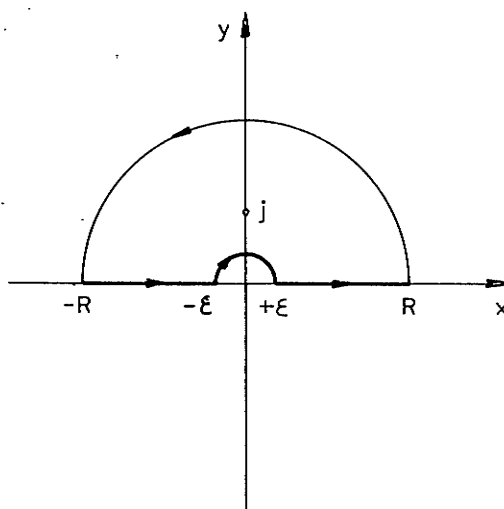
73. ábra

73. b) Az integrálandó függvény páros úgy, hogy az integrálást $(-\infty, \infty)$ -ben végezhetjük.

Az integrál kiszámításához használjuk fel az

$$\oint_G \frac{\ln^2 z}{1+z^2} dz$$

komplex integrált, ahol G a 74. ábrán látható görbe.



74. ábra

(c) Használjuk fel az

$$\oint_G \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz$$

komplex integrált, ahol G a 74. ábrán látható görbe.

3.§ ZÉRUSHELYEK ÉS PÓLUSOK ELHELYEZÉSÉNEK ÉS SZÁMÁNAK VIZSGÁLATA

3.1 LOGARITMIKUS REZIDUUM

$$\oint_G \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{és} \quad \oint_G \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

típusú integrálok értékének meghatározása

$$74. \quad \boxed{a)} \quad \oint_G \frac{z^3}{z^4 + 1} dz = \frac{1}{4} \oint_G \frac{4z^3}{z^4 + 1} dz = \frac{1}{4} \oint_G \frac{d \ln(z^4 + 1)}{dz} dz =$$

$$= \frac{1}{4} \oint_G \frac{(z^4+1)'}{(z^4+1)} dz = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 2\pi j = 2\pi j,$$

mert a $z^4 + 1 = f(z)$ függvénynek nincsenek pólusai, de mind a négy egyszeres gyöke a $|z| = 2$ kör belsejében van.

- b) $4\pi j$;
- c) $-4\pi j$;
- d) $3\pi j$;
- e) $2\pi j$;
- f) $2\pi j n$,

(a nevező gyökeinek meghatározása a Rouché-tétel alapján történhet - ld. 3.2 fejezet 6/b. pl. -)

[g) $-4\pi j$

Ugyanis:

$$\oint_{|z|=n} \operatorname{tg} \pi z \, dz = - \frac{1}{\pi} \oint_{|z|=n} \frac{-\pi \sin \pi z}{\cos \pi z} \, dz = - \frac{1}{\pi} 2\pi j \cdot 2n,$$

mert $\cos \pi z$ zérushelyei: $a_k = \frac{1}{2} + k$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ helyek és így a $|z| = n$ kör belsejébe eső zérushelyek száma: $2n$.

75. [a) $-16\pi j$

Ugyanis ezen f függvény esetében a $|z| = 5$ kör belsejébe az

$$\begin{aligned} a_1 &= 2j \text{ pontbeli} & \alpha_1 &= 1\text{-szeres,} \\ a_2 &= -2j & \alpha_2 &= 1\text{-szeres} \end{aligned}$$

zérushelyek és a

$$\begin{aligned} b_1 &= -1 + j \text{ pontbeli} & \beta_1 &= 5\text{-ödrendű,} \\ b_2 &= -1 - j & \beta_2 &= 5\text{-ödrendű,} \end{aligned}$$

pólushelyek esnek. így erre az f -re

$$\oint_G \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j [\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2] = 2\pi j [2 - 10] = -16\pi j$$

b) $-10\pi j$

c) $4\pi j$

Ugyanis ezen f függvény esetében a $|z-1|=6$ kör belsejébe az

$$a_1 = 0; \quad a_2 = \pi; \quad a_3 = -\pi$$

pontokbeli egyszeres zérushelyek és a

$$b_1 = 2\pi$$

pontbeli elsőrendű pólushely esik.

d) $-12\pi j$

Ugyanis ennek az f függvénynek nincsenek zérushelyei és pólusai közül az

$$a_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad a_2 = -\pi; \quad a_3 = -\frac{3\pi}{2}$$

másodrendű pólusok esnek a $|z+3|=2$ kör belsejébe.

e) $-24\pi j$

Ugyanis ennek az f függvénynek zérus és pólushelyei közül az

$$a_1 = 2\pi j \text{ egyszeres zérushely,}$$

$$b_1 = 0 \text{ elsőrendű,}$$

$$b_2 = \frac{\pi}{2}, \quad b_3 = -\frac{\pi}{2}, \quad b_4 = \pi; \quad b_5 = -\pi;$$

$$b_6 = \frac{3\pi}{2}; \quad b_7 = \frac{-3\pi}{2}$$

másodrendű pólusok esnek a $|z-j|=6$ kör belsejébe.

f) $-2\pi j$

Ugyanis ennél az f függvénynél a $|z-6j|=8$ kör belsejébe az

$a_1 = 0$ egyszeres zérushely,

$a_2 = 2\pi j$; $a_3 = 4\pi j$ kétszeres zérushelyek,

$b_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$; $b_{3,4} = \pm \pi$; $b_{5,6} = \pm \frac{3\pi}{2}$

elsőrendű pólusok esnek.

76. [a] $3\pi j$

Ugyanis: az f függvénynek nincsenek pólushelyei csak zérushelyei. Mivel az

$a_1 = 0$ pont $\alpha_1 = 1$ -szeres,

$a_2 = 1$ " $\alpha_2 = 1$ -szeres

$a_3 = \frac{1}{2}$ " $\alpha_3 = 1$ -szeres

zérushely, ezért

$$\oint_G z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3] =$$

$$= 2\pi j [1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}] = 3\pi j$$

$$\text{[b]} \quad 2\pi j \left[1 \cdot e^{j \frac{\pi}{4}} + 1 \cdot e^{j \frac{5\pi}{4}} - 4j \right] = 8\pi$$

$$\text{Ugyanis az } f = \frac{z^2 - j}{z^2 - 4zj - 4} = \frac{z^2 - j}{(z - 2j)^2}$$

függvénynek az

$$a_1 = e^{j \frac{\pi}{4}}; \quad a_2 = e^{j \frac{5\pi}{4}}$$

pontok egyszeres zérushelyei; a

$$b_1 = 2j$$

másodrendű pólushelye. így

$$\oint_G z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 - \beta_1 b_1] =$$

$$= 2\pi j \left[1 \cdot e^{j \frac{\pi}{4}} + 1 \cdot e^{3j \frac{\pi}{4}} - 2 \cdot 2j \right]$$

c) -2π

Ugyanis az

$$f = \frac{z + j}{(z - 2j)(z + 2jz - 1)} = \frac{1}{(z - 2j)(z + j)}$$

függvénynek nincs zérushelye csak pólusa, mégpedig a

$$b_1 = -j \quad \text{és} \quad b_2 = 2j$$

elsőrendű pólusok. így

$$\oint_G z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j [-1 \cdot 2j - 1(-j)] = 2\pi$$

d) 0

Ugyanis az

$$f = \frac{z^3 - 4jz - 4z}{(z - j)^4} = \frac{z(z - 2j)^2}{(z - j)^4}$$

függvénynek az

$$a_1 = 0 \quad \text{pont} \quad \alpha_1 = 1\text{-szeres}$$

$$a_2 = 2j \quad " \quad \alpha_2 = 2\text{-szeres}$$

zérushelye; a

$$b_1 = j \quad \text{pont} \quad 4\text{-szeres}$$

pólushelye. így

$$\oint_G z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j [1 \cdot 0 + 2 \cdot 2j - 4 \cdot j] = 0.$$

$$\boxed{e)} 0$$

Ugyanis f mindeütt reguláris.

$$77. \boxed{a)} 6 \pi j$$

Ugyanis:

$$\frac{6}{\sin 2z} = \frac{3}{\sin z \cos z} = \frac{3}{\operatorname{tg} z} \cdot \frac{1}{\cos^2 z} = \frac{3 \operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg}^3 z} \cdot \frac{1}{\cos^2 z}$$

átalakítással a kérdéses integrál

$$\oint_{|z|=2} \frac{6e^{jz}}{\sin 2z} dz = \oint_{|z|=2} e^{jz} \frac{(\operatorname{tg}^3 z)'}{\operatorname{tg}^3 z} dz$$

alakra hozható. Mivel a $|z| \leq 2$ tartományban $\varphi(z) = e^{jz}$ reguláris, $f(z) = \operatorname{tg}^3 z$ -nek a körtartomány belsejében:

$$a_1 = 0 \quad \text{pontban} \quad \alpha_1 = 3\text{-szoros zérushelye,}$$

$$b_1 = \frac{\pi}{2} \quad " \quad \beta_1 = 3\text{-adrendű pólusa,}$$

$$b_2 = -\frac{\pi}{2} \quad " \quad \beta_2 = 3\text{-adrendű pólusa}$$

van, ezért

$$\oint_{|z|=2} e^{jz} \frac{(\operatorname{tg}^3 z)'}{\operatorname{tg}^3 z} dz = 2 \pi j [\alpha_1 \varphi(a_1) - \beta_1 \varphi(b_1) - \beta_2 \varphi(b_2)] =$$

$$= 2 \pi j \left[3 e^0 - 3 e^{j \frac{\pi}{2}} - 3 e^{-j \frac{\pi}{2}} \right] =$$

$$= 2 \pi j [3 - 3j + 3j] = 6 \pi j.$$

$$\boxed{b)} -4 \pi j \left(e^{\frac{\pi^2}{4}} + e^{\frac{9\pi^2}{4}} \right)$$

Ugyanis:

$$\oint_{|z|=5} e^{z^2} \operatorname{tg} z dz = - \oint_{|z|=5} e^{z^2} \frac{(\cos z)'}{\cos z} dz.$$

Mivel $\varphi(z) = e^{z^2}$ reguláris, $f(z) = \cos z$ -nek nincsenek pólusai csak zérushelyei, melyek közül a $|z| < 2$ körbelsőbe esők:

$$a_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{pontbeli} \quad \alpha_1 = 1\text{-szeres},$$

$$a_2 = \frac{3\pi}{2} \quad " \quad \alpha_2 = 1\text{-szeres},$$

$$\alpha_3 = -\frac{\pi}{2} \quad " \quad \alpha_3 = 1\text{-szeres},$$

$$\alpha_4 = -\frac{3\pi}{2} \quad " \quad \alpha_4 = 1\text{-szeres}$$

zérushelyek, ezért az a) példabeli formula felhasználásával:

$$\oint_{|z|=5} e^{z^2} \operatorname{tg} z \, dz = - \oint_{|z|=5} e^{z^2} \frac{(\cos z)'}{\cos z} \, dz =$$

$$= -2\pi j \left[e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} + e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} + e^{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} + e^{\left(-\frac{3\pi}{2}\right)^2} \right]$$

$$= -4\pi j \left[e^{\frac{\pi^2}{4}} + e^{\frac{9\pi^2}{4}} \right].$$

c) $4\pi^5 j$

d) $-32\pi^3 j$

78. Legyen

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) \quad \text{és} \quad b_k = \frac{1}{k!} g^{(k)}(z_0); \quad k=0,1,2,\dots$$

Ekkor - a feltételek figyelembevételével -

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + \dots}{b_2(z - z_0)^2 + b_3(z - z_0)^3 + \dots}; \quad a_0 \neq 0, b_2 \neq 0$$

Bevezetve a $z - z_0 = z'$ jelölést

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{b_2 z'^2} [a_0 + a_1 z' + \dots] \cdot [1 - \frac{b_3}{b_2} z' + \dots],$$

amiből látható, hogy

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_1 b_2 - a_0 b_3}{b_2^2}$$

$$79. \text{ a) } - \frac{a_1}{a_0}$$

$$\text{b) } \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2}$$

[80]. Az integrálandó függvény

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

ennek szinguláris helyei:

$$z_k = k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (*)$$

elsőrendű pólusok. Tehát tetszőleges k -re

$$\operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (**)$$

A $|z| = r\pi$ sugarú kör belsejében (a $z=0$ -val együtt) a nevezőnek

$$2[r] + 1$$

darab gyöke van, másutt az integrálandó függvény reguláris. Így

$$\oint_{|z|=r} \operatorname{ctg} z \, dz = 2\pi j \sum_{k=-[r]}^{[r]} \operatorname{res}_{z=z_k} \operatorname{ctg} z = 2\pi j (2[r] + 1) \cdot 1$$

3.2 ROUCHÉ-TÉTEL

81. a) 5.

Ugyanis az

$$f(z) = z^8 - 4z^5; \quad g(z) = z^3 - 1$$

választás esetén a $|z| = 1$ körön:

$$|f(z)| = |z^5(z^3 - 4)| = |z^3 - 4| \geq 4 - |z^3| = 3,$$

$$|g(z)| = |z^3 - 1| \leq |z^3| + 1 = 2$$

Tehát a $|z| = 1$ körön $|f| > |g|$ így a Rouché-tétel értelmében az

$$f + g = z^8 - 4z^5 + z^3 - 1 = 0$$

egyenlet $|z| < 1$ körbe eső gyökeinek száma megegyezik az $f = z^5(z^3 - 4)$ egyenlet ottani gyökeinek számával, azaz 5-tel. (Ugyanis $z^3 - 4 \neq 0$, ha $|z| < 1$).

b) 5.

Az $f = 1 - 5z^5$; $g = z^8 - 2z$ választás esetén alkalmazzuk a Rouché-tételt.

c) 4

d) 0

e) 1

f) 0

82. a) 4 gyöke van.

Ugyanis:

Az $f(z) = z^4$; $g(z) = z^3 + 1$ választás esetén a $|z| = 2$ körön

$$\left. \begin{array}{l} |f| = 16 \\ |g| \leq 9 \end{array} \right\} \Rightarrow |f| > |g|.$$

így a Rouché-tétel értelmében a $|z| < 2$ kör belsejében az

$$f + g = z^4 + z^3 + 1$$

függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint az

$$f = z^4$$

függvénynek. Mivel f -nek $z = 0$ negyedrendű zérushelye, így $f + g$ -nek 4 gyöke van a $|z| < 2$ körben.

b) 6 gyöke.

c) 7 gyöke.

Ugyanis:

az $f(z) = 12$; $g(z) = z^7 - 5z^3$ választás esetén
a $|z| = 1$ körön

$$\left. \begin{aligned} |g(z)| = |z^7 - 5z^3| &\leq |z^7| + |5z^3| \leq 6 \\ |f| &= 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f| > |g|$$

Tehát a $|z| < 1$ körben az

$$f + g = 12 + z^7 - 5z^3$$

függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint az $f = 12$ függvénynek, azaz: egy sem.

Az $f = z^7$; $g = 12 - 5z^3$ választás esetén a $|z| = 2$ körön

$$\left. \begin{aligned} |f| &= 64 \\ |g| = |12 - 5z^3| &\leq 12 + |5z^3| = 52 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f| > |g|.$$

így a Rouché-tétel értelmében a $|z| < 2$ körben az $f + g$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint az $f = z^7$ -nek, aminek $z = 0$ hetedrendű zérushelye. így az $1 < |z| < 2$ körgyűrűben $(f + g)$ -nek 7 gyöke van.

d) 1 ill. 3 gyöke

e) 0 ill. 4 gyöke.

84. a) Egyrészt: $|z| \geq \frac{4}{3}$ esetén

$$|z|^3 \geq |z| + 1 \geq |z + 1|,$$

ezért $f = z^3$, $g = 1 + z$ választással a Rouché-tétel értelmében a

$$p(z) = f(z) + g(z) = z^3 + (z + 1)$$

függvénynek a $|z| < \frac{4}{3}$ körtartományban ugyanannyi gyöke van, mint f -nek. Mivel $f = z^3$ -nek $z = 0$ -ban harmadrendű zérushelye van, ezért $P(z)$ -nek 3 zérushelye van a $|z| < \frac{4}{3}$ tartományban.

Másrészt $0 \leq |z| < \frac{2}{3}$ esetén

$$|z + 1| > 1 - |z| > |z|^3$$

ezért a $|z| = \frac{2}{3}$ körön $g = z + 1$ majorálja az $f = z^3$ függvényt. Így g -nek és vele együtt $P(z) = f + g$ -nek nincs zérushelye $|z| \leq \frac{2}{3}$ körtartományban. Tehát $P(z)$ -nek az összes gyöke a $\frac{2}{3} \leq |z| < \frac{4}{3}$ gyűrűbe esik.

86. [a] 1 gyöke.

Ugyanis az

$$f(z) = z; \quad g(z) = -e^{z-\lambda}$$

választás mellett a $|z| = 1$ körön

$$|f(z)| = 1; \quad |g(z)| = e^{z-\lambda} < e^{1-\lambda} < 1,$$

mert $\lambda > 1$. Így a Rouché-tétel értelmében $f + g = z - e^{z-\lambda}$ gyökeinek száma a $|z| < 1$ körben megegyezik az $f(z) = z$ zérushelyeinek számával, azaz 1-gyel.

[b] n gyöke.

Ugyanis: az

$$f(z) = e^z; \quad g(z) = -4z^n + 1$$

választás mellett a $|z| = 1$ körön

$$\left. \begin{array}{l} |f| < e \\ |g| = |1 - 4z^n| > 3 \end{array} \right\} \Rightarrow |f| < |g|$$

Tehát a Rouché-tétel értelmében a $|z| < 1$ körben az $f + g = e^z - 4z^n + 1$ függvény gyökeinek száma megegyezik g gyök-számával, ami n .

c) n gyöke.

87. n gyöke.

88. A $|z| = 1$ körön

$$|f(z)| < 1.$$

így a Rouché-tétel értelmében a $|z| < 1$ körben

$$z + (-f(z)) \text{ -nek}$$

ugyanannyi gyöke van, mint z -nek, azaz: 1.

89. 2 gyöke.

[90]. a) Legyen

$$f = \alpha z; \quad g = -e^{-z}.$$

A $|z| = 1$ körön

$$|g(z)| = e^{-\operatorname{Re} z} = e^{-x} \leq e < |\alpha z| = |f(z)|,$$

mert $|\alpha| > e$ és $|z| = 1$. így a Rouché-tétel értelmében $|z| < 1$ körben az

$$f + g = \alpha z + (-e^{-z})$$

függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint az $f(z) = \alpha z$ függvénynek, azaz: egy (a $z = 0$ -ban egyszeres gyök).

[b] Ha $\alpha > e$ pozitív valós szám, akkor a

$$h(x) = \alpha x \cdot e^x - 1; \quad x \in [0, 1]$$

egyváltozós valós függvény a $[0, 1]$ zárt intervallumban folytonos, $h(0) = -1$; $h(1) = \alpha e - 1 > e^2 - 1 > 0$ így a Bolzano-tétel értelmében van olyan $\tau \in (0, 1)$ hely, amelyre $h(\tau) = 0$, amivel az állítás igazolt.

[97]. Az $f_n(z)$ függvénysorozat - a $z = 0$ pont kivételével - minden z -re az $e^{1/z}$ függvényhez konvergál. Ugyanis bármely - a $z \neq 0$ középpontú, a $z = 0$ pontot sem a belsejében, sem a határán nem tartalmazó - K kör esetén tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan elég nagy $N \in \mathbb{N}^+$, hogy a K kör minden pontjában

$$\left| f_n(z) - e^{\frac{1}{z}} \right| < \varepsilon,$$

ha

$$n > N.$$

Ezek után az $\varepsilon < \min_{z \in S} e^{\frac{1}{z}}$ választással (ahol S a K kör kerülete) és a Rouché-tétel alkalmazásával az állítás nyilvánvaló.

(98). Útmutatás:

Alkalmazzuk az előbbi feladatban követett módszert.

3.3 ARGUMENTUM-ELV

[99]. a) -4π

Ugyanis:

az adott f függvény $|z| = 5$ kör belsejébe eső multiplicitással vett zérushelyeinek száma 4, pólushelyeié pedig 6. A zérushelyek a Rouché-tétellel határozhatók meg. A

$$g(z) = 3z^4 - 1; \quad h(z) = e^z$$

választás esetén a $|z| = 5$ körön

$$\left. \begin{array}{l} |g| = |3z^4 - 1| \geq 9874 \\ |h| = |e^z| = e^x < 243 \end{array} \right\} \Rightarrow |g| > |h|$$

(mert a $|z| = 5$ körön $-5 < x < 5$ és így $e^{-5} < e^x < e^5 = 243$).
Így a $|z| = 5$ kör belsejében az

$$f = g + h = 3z^4 - 1 + e^z$$

függvénynek ugyanannyi gyöke esik, mint a $g = 3z^4 - 1$ függvénynek; azaz: 4.

A $|z| = 5$ kör belsejébe eső pólusok:

$$\sin^2(z-1) = 0 \Rightarrow z_k = 1 + k\pi; \quad k = 0, \pm 1.$$

melyek mind másodrendűek. Így a multiplicitással vett pólus-szám: 6

Tehát:

$$\Delta_G \arg f = 2\pi(Z - P) = 2\pi(4-6) = -4\pi.$$

b) -2π

Ugyanis:

a $|z| = 1$ kör belsejébe eső, multiplicitással vett zérushelyeket a Rouché-tétellel számoljuk. Legyen

$$g = \sin z + 1,$$

$$h = z^5 - 8z^2 = z^2(z^3 - 8),$$

akkor a $|z| = 1$ körön

$$\left. \begin{array}{l} |g| < 2 \\ |h| > 7 \end{array} \right\} \Rightarrow |h| > |g|,$$

úgy, hogy az $f = g + h$ függvény $|z| = 1$ kör belsejébe eső multiplicitással vett zérushelyeinek száma megegyezik h ide eső zérushelyeinek számával, ami 2.

A pólusok, a nevező gyökhelyei:

$$\sin^3 z = 0 \Rightarrow z_k = k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

melyek közül csak a $z_0 = 0$ háromszoros gyök esik a $|z| = 1$ kör belsejébe. Így

$$\Delta_G \arg f = 2\pi(Z - P) = 2\pi(2 - 3) = -2\pi.$$

103. Nincs gyöke a jobb félsíkon.

104. a) 2

b) 1

105. Minden síknegyedben egy-egy gyöke van.

106. Két-két gyöke van a második és a harmadik síknegyedben.

(107). Útmutatás:

A $P_n(z)$ polinomot hozzuk

$$P_n(z) = z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right)$$

alakra és alkalmazzuk az argumentum elvet a

$$|z| < R; \quad \operatorname{Re} z > 0$$

félkörre, ha $R \rightarrow \infty$.

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **MATEMATIKAI FELADATTÁR VII. Komplex függvénytan**

A jegyzet szerzője: **Pach Zsigmond Pálné**

A jegyzet azonosítója: **051413**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

