



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Kollár Gáborné - Nagy Béla

MATEMATIKA I.



Műegyetemi Kiadó, 2009

Lektor:

Dr. Sebestyén Lukács

Szerzők:

Dr. Kollár Gáborné

Dr. Nagy Béla

(Tizenharmadik utánnomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **065000**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 16,5 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 7105/09

TARTALOMJEGYZÉK

1. A középiskolai tanulmányok alapján ismertnek tekintett néhány alapfogalom rövid leírása	3.
1.1. Matematikai logikai alapok	3.
1.2. A halmazokkal kapcsolatos alapok	6.
1.3. A "legfontosabb" függvényekhez feladatsor	10.
2. A valós számok	11.
2.1. A természetes számok	11.
2.2. Az egész számok	12.
2.3. A racionális számok	13.
2.4. A valós számok	14.
2.5. Feladatok a 2. fejezet anyagához	25.
3. A komplex számok	27.
3.1. A komplex számok halmaza. Műveletek	27.
3.2. Komplex együtthatós polinomok	35.
3.3. Feladatok a 3. fejezet anyagához	38.
4. Valós számsorozatok és numerikus sorok.	39.
4.1. A sorozatokkal kapcsolatos alapfogalmak. Konvergenciátételek	39.
4.2. Numerikus végtelen sorok	52.
4.3. Feladatok a 4. fejezet anyagához	57.
5. Függvények határértéke, folytonossága, differenciálhatósága	59.
5.1. Határérték, folytonosság	60.
5.2. Zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai	66.
5.3. Differenciálhatóság	67.
5.4. Feladatok az 5. fejezet anyagához	73.
6. A differenciálhányados alkalmazása a függvények menetének vizsgálatára	76.
6.1. Függvények lokális szélsőértéke. Középértéktételek. Függvények monotonitási intervallumai	76.
6.2. Magasabb rendű deriváltak. Taylor tétele	84.
6.3. Függvénygörbék alakja; konvexitás, konkávitás	88.
6.4. Teljes függvényvizsgálat	93.
6.5. Feladatok a 6. fejezet anyagához	94.
7. A határozatlan integrál	97.
7.1. A határozatlan integrál alaptulajdonságai	97.
7.2. Parciális integrálás	99.
7.3. Integrálás helyettesítéssel	100.
7.4. Racionális törtfüggvények integrálása	103.
7.5. Racionális törtfüggvények integrálására vezető helyettesítések	107.
7.6. Feladatok a 7. fejezet anyagához	112.

8.	A határozott integrál	113.
8.1.	A Riemann féle határozott integrál definíciója és alaptulajdonságai	113.
8.2.	A határozott integrál alkalmazásai	134.
8.3.	Improprius integrálok	139.
8.4.	Feladatok a 8. fejezet anyagához	144.
9.	Függvény sorok	147.
9.1.	Alapfogalmak	147.
9.2.	Hatványsorok	149.
9.3.	Komplex számok exponenciális alakja	152.
9.4.	Fourier sorok	154.
9.5.	Feladatok a 9. fejezet anyagához	155.
10.	A lineáris algebra alapjai	157.
10.1.	Determinánsok	157.
10.2.	Mátrixok	161.
10.3.	Lineáris egyenletrendszerek	163.
10.4.	Vektorok	168.
10.5.	Feladatok a 10. fejezet anyagához	175.
Függelék		
	A (*)-gal jelölt feladatokhoz tartozó eredmények	178.

1. A középiskolai tanulmányok alapján ismertnek tekintett
néhány alapfogalom rövid leírása

1.1 Matematikai logikai alapok

Definíció: ismeretlen fogalom pontos körülírása

$$\begin{array}{ccc} \text{ismeretlen fogalom} & & \text{ált. fogalom} \\ \text{pl.: magyar választópolgár} & \text{az a} & \text{magyar állampolgár,} \\ \text{aki 18-ik életévét betöltötte és cselekvőképessége} & & \\ & & \text{nem korlátozott} \\ & & \text{specializálás} \end{array}$$

Megjegyzés: az ú.n. alapfogalmakat nem definiáljuk!

Axióma: Alapfeltevés, amelyet bizonyítás nélkül fogadunk el.

Tétel: speciális állítás, amelynek tartalma, hogy bizonyos feltételekből egy bizonyos állítás következik.

$$\begin{array}{ccc} \text{Jelölése: } \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{array} \right] & \Rightarrow & \boxed{A} \\ \text{feltételek} & & \text{állítás} \\ & & \text{amely a feltételekből következik} \end{array}$$

Bizonyítás: A logika következtetési szabályainak felhasználása a tétel feltételeire úgy, hogy a tétel állításához jussunk.

$$\begin{array}{c} \text{feltételek } (F_1, F_2) \\ \text{pl.: Ha Péter a BME magyar állampolgárságu hallgatója,} \\ \text{akkor Péter magyar választópolgár} \\ \text{a tétel állítása} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Bizonyítás: } F_1 = \text{Péter magyar állampolgár} \\ F_2 = \text{Péter a BME hallgatója} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array}} \right\} \text{feltételek}$$

$$\begin{array}{l} F_1 = \text{Péter magyar állampolgár} \\ F_2 \Rightarrow \text{Péter betöltötte 18-ik életévét és} \\ \text{Péter orvosilag alkalmas a felvételi lapja szerint} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Péter cselekvőképessége nem korlátozott} \end{array}$$

tehát Péter magyar választópolgár

Általában a tétel jelölése: $F \implies A$

Elégséges feltétel: F elégséges feltétele A -nak, ha

$F \implies A$ teljesül

pl.: Ha Péter magyar választópolgár, akkor
18-ik életévét betöltötte

Szükséges feltétel: A szükséges feltétele B -nek, ha

$B \implies A$ teljesül

pl.: Péter csak akkor lehet magyar választópolgár
ha 18-ik életévét betöltötte

Figyelem, nem minden 18-ik életévét betöltött
magyar állampolgár egyben választópolgár is!

Szükséges és elégséges feltétel: A szükséges és elégséges
feltétele B -nek, ha mind $B \implies A$, mind $A \implies B$ teljesül.

Jelölése: $A \iff B$

pl.: egy szám pontosan akkor osztható hattal,
ha hárommal osztható és páros.

A "pontosan akkor" kifejezés helyett használatos még az
"akkor és csak akkor" kifejezés is.

A logikai "és" $A \& B$

A és B állításokat kapcsolja össze.

$A \& B$ állítás pontosan akkor igaz, ha mind A, mind B igaz.

A logikai "vagy" $A \cup B$

A és B állításokat kapcsolja össze.

$A \cup B$ állítás pontosan akkor igaz, ha A ill. B állítások közül legalább az egyik igaz.

A logikai tagadás jelölése $\bar{A}$ ill. $\neg A$

egy állításra vonatkozik.

$\bar{A}$ pontosan akkor igaz, ha A nem igaz

pl. $A = x$ férfi

$\bar{A} = x$ nem férfi

Vigyázat! $\bar{A} \neq x$ nő, mivel elképzelhető pl., hogy
 x egy kismacska, vagy egy cseresznye.

Az indirekt bizonyítás: $A \implies B$ indirekt bizonyítása

$(A \& \bar{B}) \implies$ abszurdum belátását jelenti, tehát B tagadásából indulunk ki, egyidejűleg feltételezve A teljesülését, s így ellentmondásra jutunk.

pl.: Ha $\underbrace{x \text{ és } y \text{ páros számok}}_A$, akkor $\underbrace{\text{van közös osztójuk}}_B$

Bizonyítás:

$\bar{B}$: x -nek és y -nak nincs közös osztója } ellentmondás!
A: $x=2x_1$; $y=2y_1$

1.2 A halmazokkal kapcsolatos alapok

A halmaz alapfogalom, nem definiáljuk. Egy halmazt akkor tekintünk megadottnak, ha pontosan tudjuk, melyek az elemei. Magát a halmazt általában nagybetűvel jelöljük, elemeit általában kisbetűvel. Az elemet mint alapfogalmat szintén nem definiáljuk.

Jelölés: $h \in H$ jelenti: "h eleme H halmaznak"

$x \notin H$ jelenti: "x nem eleme H halmaznak".

Példák halmazok megadására:

1./ $A = \{ 1, 2, -1, \pi \}$

$B = \{ \text{körte, Piroska, farkas} \}$

E példákban az adott halmaz minden elemét felsoroltuk.

2./ $X = \{x: 1 < x \leq 8 \text{ és } x \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}$ itt az egész számok halmazát jelenti, tehát az x halmazt elemeivel felsorolásnak is megadhattuk volna:

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$Y = \{ y: 1 < y \leq 8 \text{ és } y \in \mathbb{R} \}$

($\mathbb{R}$ itt a valós számok halmazát jelenti, tehát az Y halmaz a középiskolából ismert $(1;8]$ intervallum, elemeit felsorolással nem tudjuk megadni)

3./ $A = \left\{ a_n \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ a_n : a_n = \frac{n}{n+1} \text{ és } n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

($\mathbb{Z}^+$ itt a pozitív egészek halmazát jelenti)

Az itt megadott A halmaz az alábbiak szerint is megadható

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$$

Az alábbiakban példát adunk arra, hogy milyen "megadás" nem jelent halmazt:

$X = \{ x: x \text{ öreg ember} \}$ ez nem halmaz, mivel az öregség fogalma relatív, egy elsőéves hallgató számára pl. egy 60 éves ember öreg, de ugyanez a 60 éves ember egy 80 éves szempontjából fiatal. Az "öreg emberek halmazát" tehát nem tekinthetjük halmaznak, mivel nem dönthető el egyértelműen, ki tartozik bele, és ki nem.

$H = \{ h: h \text{ tetszőleges halmaz} \}$ ez sem tekinthető halmaznak, mivel ez a "minden halmaz halmaza", egy halmaz pedig nem lehet önmagának egyben eleme is.

Részhalmaz: A részhalmaza B-nek: $A \subset B$ jelenti, hogy A minden eleme egyben B-nek is eleme:

$$A \subset B \iff \{a \in A \implies a \in B\}$$

pl. a 4-gyel osztható számok halmaza részhalmaza a páros számok halmazának.

Két halmaz egyenlősége: $A = B \iff A \subset B \ \& \ B \subset A$

Gyakran előfordul, hogy egy halmaz minden elemére vonatkozó kijelentést teszünk. "A" halmaz minden "a" elemének rövid jelölése: $\forall a \in A$

Hasonló fontosságú és gyakoriságú a létezik olyan "a" eleme "A"-halmaznak kifejezés. Ennek rövid jelölése: $\exists a \in A$
Ha az adott "A" halmaznak pontosan egy "a" elemének létezését kívánjuk röviden leírni, a $\exists a \in A$ jelölést használhatjuk.

Műveletek halmazokkal

1. Unió vagy egyesítés: $A \cup B$



1. ábra

$c \in A \cup B$ pontosan akkor, ha

$c \in A$ vagy $c \in B$ közül legalább az egyik teljesül.

2. Metszet: $A \cap B$



2. ábra

$c \in A \cap B$ pontosan akkor, ha mind $c \in A$, mind $c \in B$ teljesül.

Mindkét művelet kommutatív és asszociatív:

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cap B = B \cap A \quad \text{kommutativitás}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad ; \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad \text{asszociativitás}$$

A műveletekre vonatkozóan kétféle disztributivitás teljesül:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

A kétféle disztributivitás szemléltetése legegyszerűbben az uniónál és a metszethöz megadott ábrákhoz hasonlóan történhet. Készítse el a megfelelő ábrákat!

3. Különbség $A \setminus B$



3. ábra

$c \in A \setminus B$ pontosan akkor, ha $c \in A$ és $c \notin B$.

A különbségképzésnél különleges jelentősége van az ún. alaphalmazra vonatkoztatott különbségnek, ezt nevezzük komplementerhalmaznak:



4. ábra

Szemléltetése az ún. Venn diagrammon történhet.

Az alaphalmazt minden esetben külön meg kell adni, hogy a komplementerképzést értelmezni tudjuk. Legyen pl. az alaphalmaz az egész számok halmaza, $\mathbb{Z}$, legyen továbbá

$$A = \{a: a \in \mathbb{Z} \text{ \& } a > 0\}.$$

A komplementere: $\bar{A} = \mathbb{Z} \setminus A = \{0\} \cup \{x: x \text{ negatív egész}\}$
és nincs olyan $x \in \bar{A}$ hogy $x > 0$ teljesüljön.

Ha viszont az alaphalmaz a racionális számok halmaza, $\mathbb{Q}$ és A az előbbiekben megadott, pozitív egészek halmaza, akkor A komplementere:

$$\bar{A} = \mathbb{Q} \setminus A \text{ és } \exists x \in \bar{A} \text{ úgy, hogy } x > 0 \text{ teljesül pl. } x = 2/3 \text{ esetén.}$$

Az alaphalmaz komplementere az üres halmaz. Az üres halmaz az a halmaz, amelynek nincs eleme. Jelölése: $\emptyset$
Figyelem, $\{\emptyset\}$ nem az üres halmaz, hanem azon halmaz, amelynek egyetlen eleme az üres halmaz!

A de Morgan féle formulák

A de Morgan formulák az unió, a metszet és a komplementerképzésre vonatkozó kapcsolatokat fejezik ki:

$$1. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



5. ábra

$$2. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



6. ábra

1.3 A "legfontosabb" függvényekhez feladatsor

F.1.1 Az x^n ; x^{-n} ; $x^{1/n}$; $x^{-1/n}$ ($n>0$, egész)

függvények ábrázolása

pl. $n=2$ és $n=3$ esetén.

A függvényeket vizsgálja párosság ill. páratlanság szempontjából.

F.1.2 Az $y=ax^2+bx+c = a \cdot (x-u)^2+v$ parabola ábrázolása.

Rajzolja fel az alábbi parabolákat:

$$f_1(x) = 2x^2+6x+8 ; \quad f_2(x) = -x^2+2x-2$$

$$f_3(x) = x^2+5x+6 ; \quad f_4(x) = -3x^2-6x-3$$

Írja fel a függvényeket $a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)$ alakban, ha ez lehetséges!

F.1.3. A $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ függvények ábrázolása

F.1.4. Az a^x ill. $\log_a x$ függvények ábrázolása

$0 < a < 1$ ill. $a > 1$ esetén

Rajzolja fel az alábbi függvényeket:

$$f_1(x) = 2^x, \quad f_2(x) = \left[\frac{1}{2} \right]^x$$

$$f_3(x) = \log_2 x, \quad f_4(x) = \log_{1/2} x$$

F.1.5. Az $f(x)$ függvény rajzából adja meg

$$\text{az } f_1(x) = f(x) + c, \quad f_2(x) = f(x+c)$$

$$f_3(x) = c \cdot f(x), \quad f_4(x) = f(c \cdot x) \text{ függvények}$$

rajzát!

$$\text{Példa: } 3 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right),$$

$$\log_3(-x+2), \quad \log_{1/3}(x+2)$$

2. A valós számok

2.1. A természetes számok

A természetes számok halmazának jelölése: $\mathbb{N}$
Természetes számoknak nevezzük a pozitív egészeket és a nullát.

Tehát $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ vagy $\mathbb{N} = \{n\}_{n=0}^{\infty}$

A természetes számok között értelmezve van két művelet, az összeadás és a szorzás, úgy, hogy ezen műveletek eredménye ismét természetes szám. Mindkét művelet kommutatív és asszociatív:

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ esetén

$a+b=b+a$; $a \cdot b=b \cdot a$ kommutativitás

$a+(b+c)=(a+b)+c$; $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ asszociativitás

továbbá az összeadás művelete a szorzásra vonatkozóan disztributív: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Mindkét műveletnek van egyértelműen ún. neutrális eleme:

$a+0=a$; $a \cdot 1=a$

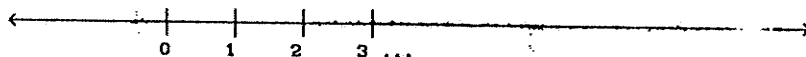
Az összeadásra vonatkozóan a neutrális elem a zérus, a szorzásra vonatkozóan a valós egység.

A természetes számok halmazából tehát két művelet, az összeadás és a szorzás, nem vezet ki.

A természetes számokat ábrázolhatjuk egy egyenesen, úgy, hogy az egyenesen kijelöljük a 0 és az 1 természetes számok helyét, és ezután a két pont távolságát, a 0-ból az 1 irányában elindulva, n -szer felmérve, az így kapott utolsó pont felel meg az n természetes számnak. Ez a megfeleltetés a természetes számok és az egyenes kijelölt pontjai között a 0 és az 1 helyének kijelölése után egy-egy értelmű, azaz minden természetes számnak az egyenesen pontosan egy pont felel meg, és az egyenes minden kijelölt pontjának pontosan egy természetes szám felel meg.

Ezt az egyenest majd "teljesen" be fogjuk tölteni számokkal, azaz az egyenes minden pontjának megfeleltetünk majd (pontosan) egy számot, s ezután el fogjuk nevezni (valós) számegyenesnek.

Vizsgáljuk meg a számegyenesen most kijelölt pontok, azaz a természetes számok elhelyezkedését:



A pontok az egyenesen "rendezetten" helyezkednek el.

A természetes számok halmazán értelmezhetjük tetszőleges két természetes szám között a "nagyobb" ($>$) relációt:

Legyen $a, b \in \mathbb{N}$ $a > b$ pontosan azt jelenti, hogy az a szám a számszámként a b számtól jobbra helyezkedik el.

Vizsgáljuk meg ezen reláció tulajdonságait:

1. $\forall a, b \in \mathbb{N}$ esetén az alábbiak közül pontosan egy igaz: vagy $a > b$, vagy $b > a$, vagy $a = b$

Ezen tulajdonság neve : TRICHOTOMIA

2. $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ esetén, ha $a > b$ és $b > c$ akkor $a > c$

Ezen tulajdonság neve : TRANZITIVITÁS

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ esetén, ha $a > b$ akkor $a + c > b + c$
továbbá, ha $a > b$ és $c > 0$ akkor $a \cdot c > b \cdot c$

Ezen tulajdonság neve : a reláció MONOTONITÁSA az összeadásra és a szorzásra vonatkozóan

D.2.1. Definíció (RENDEZETT HALMAZ)

Egy M halmazt rendezettnek nevezünk, ha elemein értelmezhető egy olyan bináris reláció, amely rendelkezik a fentiekben leírt első két tulajdonsággal (trichotomia, tranzitivitás), és ha a halmazon a $(+)$ és a $(\cdot)$ műveleteket értelmeztük, teljesül a két műveletre vonatkozó monotonitás

is, azaz a halmazon teljesülnek e relációra vonatkozóan a "rendezési axiómák", a rendezési reláció előbbi 1,2,3. alatti követelményei.

A természetes számok halmaza rendezett.

2.2. Az egész számok

Az egész számok halmazának jelölése: $\mathbb{Z}$

Az egész számok halmazának a természetes számok halmaza részhalmaza : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

A természetes számokon kívül a negatív egészek tartoznak az egész számok halmazába.

A pozitív egészek halmazára szokásos jelölés: $\mathbb{Z}^+$
a negatív egészekre : $\mathbb{Z}^-$

Ezen jelölésekkel : $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

illetve : $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$

Az egész számok halmaza a természetes számok halmazának bővítése, ezen nemcsak az elemek számának olyan növelését értjük, amikor a "régi" elemeket mind megtartjuk, hanem azt is, hogy a természetes számok halmazán értelmezett műveletek tulajdonságait megtartva, az egész számok halmazán is értelmezve vannak.

Tehát tetszőleges egész számok összege ill. szorzata ismét egész szám, továbbá

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ esetén teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} a+b &= b+a & ; & & a \cdot b &= b \cdot a & \text{kommutativitás} \\ a+(b+c) &= (a+b)+c & ; & & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c & \text{asszociativitás} \\ (a+b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c & & & & & \text{az összeadás a szorzásra} \\ & & & & & & \text{vonatkozóan disztributív} \end{aligned}$$

Mindkét műveletnek van egyértelmű neutrális eleme:

$$a+0=a \quad ; \quad a \cdot 1=a$$

A természetes számokra vonatkozóan túl az egész számok halmazában $\forall a \in \mathbb{Z}$ esetén $\exists b \in \mathbb{Z}$ egyértelműen, úgy, hogy $a+b=0$.

Ezen $b=-a$ egész számot nevezzük az a egész szám összeadásra vonatkozó inverzének, vagy másnéven az a szám ellentettjének, s $a+(-b)$ az a és b számok különbsége, ill. b -nek a -ból való kivonása.

Az egész számok halmazából tehát három művelet, az összeadás, a szorzás és az összeadás inverz művelete, a kivonás, nem vezetnek ki.

A felsoroltak teljesülése miatt az egész számok halmaza ún. kommutatív gyűrűt alkot.

D.2.2. Definíció (A KOMMUTATÍV GYŰRŰ)

Egy M halmaz kommutatív gyűrűt alkot pontosan akkor, ha elemein értelmezve van két művelet

(jelöljük ezeket $+$ ill. $\cdot$ jelekkel)

és teljesülnek az alábbiak $\forall a, b, c \in M$ esetén:

$$\begin{aligned} a+b &= b+a & ; & & a \cdot b &= b \cdot a & \text{kommutativitás} \\ a+(b+c) &= (a+b)+c & ; & & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c & \text{asszociativitás} \\ (a+b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c & & & & & \text{az egyik } (+) \text{ művelet a} \\ & & & & & & \text{másikra } (\cdot) \text{ vonatkozóan disztributív} \end{aligned}$$

Mindkét műveletnek van egyértelmű neutrális eleme:

$\exists n^+, n^- \forall a \in M$ esetén úgy, hogy $a+n^+=a$ és $a \cdot n^-=a$

A $(+)$ műveletre nézve létezik inverz elem:

$\forall a \in M$ esetén egyértelműen $\exists -a \in M$ úgy, hogy $a+(-a)=n^+$

A D.2.1. definíció szempontjából megvizsgálva az egész számok halmazát, megállapíthatjuk, hogy az egész számok halmaza is rendezett.

2.3. A racionális számok

A racionális számok halmazának jelölése: $\mathbb{Q}$

Racionális számnak nevezünk minden olyan számot, amely két egész szám hányadosaként írható fel, úgy, hogy az osztó nem nulla. Az egész számok halmaza a racionális számok halmazának része: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

A racionális számok halmaza az egész számok halmazának bővítése, a racionális számok halmaza is kommutatív gyűrűt alkot. A D.2.2. definícióban megadott gyűrűaxiómákon kívül a racionális számok halmazában több is teljesül, nevezetesen:

$\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ esetén egyértelműen $\exists b \in \mathbb{Q}$ úgy, hogy $a \cdot b = 1$. Ezen $b = 1/a = a^{-1}$ számot nevezzük az a szám szorzásra vonatkozó inverzének, vagy másnéven az a szám reciprokának.

A felsoroltak teljesülése miatt a racionális számok halmaza ú.n. testet alkot.

A racionális számok halmazából tehát négy művelet, az összeadás, a szorzás, valamint e műveletek inverz műveletei, a kivonás és az osztás nem vezetnek ki.

D.2.3. Definíció (A TEST)

Egy M halmaz testet alkot pontosan akkor, ha ezen M halmaz kommutatív gyűrű, és benne a $(\cdot)$ műveletre nézve is egyértelműen létezik inverz elem $\forall a \in M \setminus \{0\}$ esetén.

A racionális számok felírhatók végtelen, szakaszos tizedestört alakban, illetve minden végtelen, szakaszos tizedestört felírható két egész szám hányadosaként.

Az alábbiakban a végtelen, szakaszos tizedestört közönséges tört alakba való átírására mutatunk példát:

$$\begin{array}{l} x = 1,235235235 \dots \\ 1000x = 1235,235235235 \dots \\ \hline 999x = 1234 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1234}{999} \end{array}$$

A D.2.1. definíció szempontjából vizsgálva a racionális számok halmazát, megállapíthatjuk, hogy a racionális számok halmaza is rendezett halmaz. Mivel a racionális számok halmazán mind a rendezési, mind a testaxiómák teljesülnek, a racionális számok halmaza RENDEZETT TEST.

2.4. A valós számok

A valós számok halmazának jelölése: $\mathbb{R}$

Mielőtt pontosan megadnánk a valós számok definícióját, néhány új fogalommal kell, hogy megismerkedjünk.

D.2.4. Definíció (A RACIONÁLIS SZÁMSOROZAT)

Racionális számsorozatnak nevezünk egy olyan hozzárendelést, amely minden természetes számnak megfeleltet egy racionális számot.

Jelölés: az n -edik természetes számnak megfeleltetett számot általában az n szám indexbe írásával jelöljük, pl. a_n , b_n , c_n és a számsorozat n -edik tagjának, elemének nevezzük.
A hozzárendelés, azaz a számsorozat megadása történhet képlettel: $a_n = n \cdot (n+1)$

felsorolással: $a_n: 0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$
vagy bármely más egyértelmű alakban.

D.2.5. Definíció (AZ ABSZOLUTÉRTÉK)

Legyen $a \in \mathbb{Q}$ tetszőleges racionális szám.

Az a szám abszolútértékét $|a|$ -val jelöljük, és az alábbi mennyiséget értjük ezen:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ha } a \geq 0 \\ -a & \text{ha } 0 > a \end{cases}$$

Az abszolútérték tulajdonságai: $|a| \geq 0$

$$|a| = 0 \iff a = 0$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

D.2.6. Definíció (A TÁVOLSÁG)

Legyenek $a, b \in \mathbb{Q}$ tetszőleges racionális számok.

A $d(a, b) = |a - b|$ nemnegatív mennyiséget nevezzük az a, b számok távolságának.

A távolság tulajdonságai: $d(a, b) = d(b, a) \geq 0$

$$d(a, b) = 0 \iff a = b$$

$$d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$$

D.2.7. Definíció (A KÖRNYEZET)

Legyenek $a, \epsilon \in \mathbb{Q}$ és $\epsilon > 0$

Az a szám ϵ sugarú környezetén értjük azon x számok halmazát, amely számokra $d(x, a) < \epsilon$ teljesül.

Jelölése: $U_\epsilon(a)$

Például a 0 szám ϵ sugarú környezetének elemei azon x számok, melyekre $|x| < \epsilon$ teljesül.

D.2.8. Definíció (A NULLSOROZAT)

Az a_n sorozatot nullsorozatnak nevezzük, ha a 0 szám tetszőleges ϵ sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.

Másképpen mondva: $\forall \epsilon > 0$ számhoz $\exists N(\epsilon)$ úgy, hogy

ha $n > N(\epsilon)$, akkor $|a_n| < \epsilon$

D.2.9. Definíció (MŰVELETEK SOROZATOKKAL)

A c_n sorozatot az a_n és a b_n sorozatok

összegének nevezzük, ha $c_n = a_n + b_n$

különbségének, ha $c_n = a_n - b_n$

szorzatának, ha $c_n = a_n \cdot b_n$

hányadosának, ha $c_n = a_n / b_n$ teljesül

D.2.10. Definíció (SZABÁLYOS RACIONÁLIS SOROZATPÁR)

Az (a_n, b_n) racionális számokból álló sorozatpárt szabályos racionális sorozatpárnak nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak:

a_n sorozat monoton növekvő, azaz ha $k > m$ akkor $a_k \geq a_m$

b_n sorozat monoton csökken, azaz ha $k > m$ akkor $b_k \leq b_m$

$c_n = a_n - b_n$ sorozat nullsorozat

D.2.11. Definíció (A VALÓS SZÁM)

Valós számnak nevezünk egy szabályos racionális sorozatpárt.

D.2.12. Definíció

A v valós szám racionális, ha $\exists (a_n; b_n) = v$ szabályos racionális sorozatpár úgy, hogy $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

Tehát pl. az $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ racionális számot $a_n = b_n = \frac{1}{2}$ szabályos racionális sorozatpárral adhatjuk meg.

D.2.13. Definíciók

Legyenek $(a_n; b_n)$ és $(a_n^*; b_n^*)$ szabályos racionális sorozatpárok

1. A $v = (a_n; b_n)$ és $v^* = (a_n^*; b_n^*)$ valós számok egyenlőek pontosan akkor, ha $c_n = a_n - a_n^*$ sorozat nullsorozat.

2. $v = (a_n; b_n) > 0$ pontosan akkor, ha $\exists n$ úgy, hogy $a_n > 0$

D.2.14. Definíciók (MŰVELETEK VALÓS SZÁMOKKAL)

Legyenek $(a_n; b_n)$ és $(a_n^*; b_n^*)$ szabályos racionális sorozatpárok így $v = (a_n; b_n)$ és $v^* = (a_n^*; b_n^*)$ valós számok.

$$1. \quad v + v^* = (a_n + a_n^*; b_n + b_n^*)$$

$$2. \quad -v = (-b_n; -a_n)$$

következmény:

$$v^* - v = (a_n^* - b_n; b_n^* - a_n)$$

$$3. \quad v > 0 \text{ és } v^* > 0 \text{ esetén } v \cdot v^* = (a_n \cdot a_n^*; b_n \cdot b_n^*)$$

$$v < 0 \text{ és } v^* > 0 \text{ esetén } v \cdot v^* = (a_n \cdot b_n^*; b_n \cdot a_n^*)$$

$$v < 0 \text{ és } v^* < 0 \text{ esetén } v \cdot v^* = (b_n \cdot b_n^*; a_n \cdot a_n^*)$$

$$4. \quad v \neq 0 \text{ és } a_n \neq 0, b_n \neq 0 \text{ esetén } \frac{1}{v} = \left(\frac{1}{b_n}; \frac{1}{a_n} \right)$$

A D.2.13. és D.2.14. definíciók segítségével a valós számok halmazán definiálhatjuk a " $>$ " rendezési relációt:

$v > v^*$ pontosan akkor, ha $v - v^* > 0$

A műveletek tulajdonságait és a rendezési relációt figyelembevéve megállapíthatjuk, hogy a valós számok is rendezett testet alkotnak, és a racionális számok halmazának a valós számhalmaz bővítése.

D.2.15. Definíció

Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz elemeit, tehát azokat a valós számokat, amelyek nem racionális számok, irracionális számoknak nevezzük.

A racionális számok tizedestörtekként végtelen szakaszos, az irracionális számok végtelen nem szakaszos tizedestörtekekkel adhatók meg.

Térjünk most vissza a számegyeneshez. A valós számok és a számegyenes pontjai között egy-egy értelmű megfeleltetés van. Láttuk, hogy a számegyenesen el tudunk helyezni minden racionális számot, de a középiskolában tanultak alapján is $\sqrt{2}$ nem racionális - nyilvánvaló, hogy a racionális számok nem töltik ki "teljesen" a számegyeneset, annak ellenére, hogy "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen. A D.2.15. definícióval összhangban a racionális számok által "el nem foglalt" pontokat feleltetjük meg az irracionális számoknak.

T.2.1. Tétel

A számegyenes és a valós számok halmaza között létezik kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés.

(Azaz: A számegyenes minden pontjához pontosan egy valós szám tartozik, és megfordítva, minden valós számhoz a számegyenesnek pontosan egy pontja tartozik e hozzárendelésnél.)

Bizonyítás:

a.) Tekintsük a számegyenes tetszőleges P pontját. Jelölje a_1 azon legnagyobb egész számot, amely a P ponttól balra található, és legyen $b_1 = a_1 + 1$. Ekkor P pont az a_1 és b_1 pontok között van. Jelölje a_2 azon legnagyobb, egy tizedesjegyet tartalmazó racionális számot, amely a P ponttól balra található a számegyenesen, és legyen $b_2 = a_2 + 0,1$. Ekkor P pont az a_2 és b_2 pontok között van.

Folytassuk ezen "skatulyázó" eljárást.

Jelölje a_n azon legnagyobb, $n-1$ tizedesjegyet tartalmazó racionális számot, amely a P ponttól balra található a számegyenesen, és legyen $b_n = a_n + 10^{1-n}$. Ekkor P pont az a_n és b_n pontok között van.

Az így konstruált $(a_n; b_n)$ sorozatpár szabályos racionális sorozatpár, és pontosan egy v valós számot definiál.

b.) Tekintsünk egy tetszőleges $v = (a_n; b_n)$ valós számot. Mivel az $(a_n; b_n)$ szabályos racionális sorozatpár "egymásbaskatulyázott" - összehúzódó - zárt intervallumok sorozatát adja meg, a geometria axiómái értelmében pontosan egy pontot határoz meg.

A most következő tételekben bemutatjuk, hogyan helyezkednek el "egymás mellett" a racionális és az irracionális számok.

T.2.2. Tételek

1.) Bármely két racionális szám között van racionális szám.

Bizonyítás: Legyen $a, b \in \mathbb{Q}$ és $a < b$

$$\text{Ekkor } c = (a+b)/2 \in \mathbb{Q} \text{ és } a < c < b$$

2.) Bármely két racionális szám között van irracionális szám.

Bizonyítás: Legyen $a, b \in \mathbb{Q}$ és $a < b$

$$\text{Ekkor } x = (b-a) \cdot \sqrt{2} / 2 \notin \mathbb{Q} \text{ mivel } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ és } 0 \text{ test}$$

$$\text{ugyanazért } y = a+x \notin \mathbb{Q}$$

$$\text{mivel } b > a \Rightarrow x > 0 \Rightarrow y > a, \text{ továbbá}$$

$$\text{mivel } x < b-a \quad y < a+b-a=b$$

3.) Bármely két irracionális szám között van racionális szám.

Bizonyítás:

$$\text{Legyen } v, v^* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \quad v^* < v \text{ és } v = (a_n; b_n); \quad v^* = (a_n^*; b_n^*)$$

$$\text{Mivel } v > v^* \Rightarrow v - v^* > 0 \Rightarrow \exists n: a_n - b_n^* > 0 \Rightarrow a_n > b_n^*$$

Tekintsük ezen n -hez tartozó a_n racionális számot:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mivel } v = (a_n; b_n) \Rightarrow v > a_n \\ v^* = (a_n^*; b_n^*) \Rightarrow b_n^* > v \end{array} \right\} \text{ és } a_n > b_n^* \Rightarrow v > b_n^* > v^*$$

4.) Bármely két irracionális szám között van irracionális szám.

Bizonyítás: Legyen $v, v^* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $v > v^*$

A 3. pontban beláttuk, hogy tetszőleges két irracionális szám között van racionális szám - ekkor nemcsak egy, hanem pl. két racionális szám is van közöttük. Tetszőleges két racionális szám között pedig 2. pont szerint van irracionális szám.

Megjegyzés: A tétel 3. pontját könnyen szemléltethetjük a valós számok - véges ill. végtelen - tizedestörtalakjával: Ahhoz, hogy pl. két pozitív irracionális szám közötti racionális számot kapjunk, elegendő a nagyobbik irracionális számot elválni első olyan tizedesjegye után amelyben a két irracionális szám már különbözik:

$$3,21391010010001... < 3,2139103 < 3,21391030010001...$$

Az előző tételekben láttuk, hogy mind a racionális számok, mind az irracionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy míg a racionális számok sorozatba rendezhetők, ugyanezt az irracionális számokkal nem tudjuk megtenni. Az irracionális számok tehát "többen" vannak, mint a racionális számok. Matematikai nyelven megfogalmazva a racionális számok számossága megszámlálhatóan végtelen, az irracionális számok halmaza kontinuum számosságú.

A továbbiakban a valós számhalmaz egy újabb tulajdonságával fogunk megismerkedni.

D.2.16. Definíció (FELSŐ KORLÁT)

Legyen $M \subset \mathbb{R}$ és $f \in \mathbb{R}$. Az f valós számot a M halmaz felső korlátjának nevezzük, ha $\forall h \in M$ esetén $f \geq h$ teljesül, azaz a M halmaznak nincsen f -nél nagyobb eleme.

D.2.17. Definíció (SUPREMUM)

Legyen x a $M \subset \mathbb{R}$ halmaz felső korlátja. Ezt az x -et a M halmaz legkisebb felső korlátjának, vagy supremumának nevezzük ha a M halmaz minden f felső korlátjára teljesül: $f \geq x$
A M halmaz supremumának jelölése: $\sup M$

D.2.18. Definíció (ALSÓ KORLÁT)

Legyen $M \subset \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$. Az a valós számot a M halmaz alsó korlátjának nevezzük, ha $\forall h \in M$ esetén $a \leq h$ teljesül, azaz a M halmaznak nincsen a -nál kisebb eleme.

D.2.19. Definíció (INFIMUM)

Legyen y a $M \subset \mathbb{R}$ halmaz alsó korlátja. Ezt az y -t a M halmaz legnagyobb alsó korlátjának, vagy infimumának nevezzük, ha a M halmaz minden a alsó korlátjára teljesül: $a \leq y$
A M halmaz infimumának jelölése: $\inf M$

D.2.20. Definíció (KORLÁTOS HALMAZ)

A $M \subset \mathbb{R}$ halmazt alulról korlátosnak nevezzük, ha van alsó korlátja, felülről korlátosnak nevezzük, ha van felső korlátja. A M halmaz korlátos, ha van mind alsó, mind felső korlátja.

T.2.3. Tétel

A valós számok minden felülről korlátos részhalmazának van legkisebb felső korlátja, és minden alulról korlátos részhalmazának van legnagyobb alsó korlátja.

(Tehát, ha $M \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz, akkor $\exists \sup M \in \mathbb{R}$ valamint $\exists \inf M \in \mathbb{R}$.)

Bizonyítás:

Csak a legkisebb felső korlát létezését bizonyítjuk, a legnagyobb alsó korlát létezése hasonló gondolatmenettel látható be.

Tegyük fel, hogy a M felülről korlátos halmaznak felső korlátja f . Ezen f felső korlátból az egységet ismételtelen levonva megkapjuk azon f_0 felső korlátot, amelynek "egész része", az $x_1 = \{f_0\}$ már nem felső korlát, $f_1 = \{f_0\} + 1$ pedig felső korlát.

Legyen $m_1 = (x_1 + f_1)/2$, ez vagy felső korlát, vagy nem.

Ha m_1 felső korlát, akkor $x_2 = x_1$ és $f_2 = m_1$ } és $f_2 - x_2 = 1/2$
ha nem az, akkor $x_2 = m_1$ és $f_2 = f_1$

Legyen $m_2 = (x_2 + f_2)/2$, ez vagy felső korlát, vagy nem.

Ha m_2 felső korlát, akkor $x_3 = x_2$ és $f_3 = m_2$ } és $f_3 - x_3 = 1/4$
ha nem az, akkor $x_3 = m_2$ és $f_3 = f_2$

Az eljárást folytatva olyan $(x_n; f_n)$ racionális sorozatpárt kapunk, amelyre $f_n - x_n = 2^{1-n} \rightarrow 0$, tehát $(x_n; f_n)$ egy szabályos racionális sorozatpár. Tekintsük az $f^* = (x_n; f_n)$ valós számot, ez a M halmaz felső korlátja, mivel $\forall f_n$ felső korlát volt, és nincsen nála kisebb felső korlát, mivel $\forall x_n$ nem volt felső korlát. Ebből adódóan az f^* valós szám a M halmaz legkisebb felső korlátja.

D.2.21. Definíció

Ha egy rendezett testben minden alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja, és minden felülről korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja, a test rendezettségét teljesnek mondjuk.

A valós számok rendezettsége teljes. (T.2.3. tétel)

D.2.22. Definíció (BELSŐ PONT)

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $h \in H$. A h valós számot a H halmaz belső pontjának nevezzük, ha $\exists \varepsilon > 0$ úgy, hogy $U_\varepsilon(h) \subset H$

D.2.23. Definíció (NYÍLT HALMAZ)

A $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nyílt halmaznak nevezzük, ha $\forall h \in H$ pontja belső pont.

T.2.4. Tétel

Minden nyílt intervallum nyílt halmaz. (Nem bizonyítjuk.)

T.2.5. Tétel

Nyílt halmazok uniója nyílt halmaz. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt halmaz. (Nem bizonyítjuk.)

D.2.24. Definíció (ZÁRT HALMAZ)

A $H \subset \mathbb{R}$ halmazt zárt halmaznak nevezzük, ha $\bar{H} = \mathbb{R} \setminus H$ komplementerhalmaza nyílt halmaz.

T.2.6. Tétel

Minden zárt intervallum zárt halmaz. (Nem bizonyítjuk.)

T.2.7. Tétel

Zárt halmazok metszete zárt halmaz. Véges sok zárt halmaz uniója zárt halmaz. (Nem bizonyítjuk.)

D.2.25. Definíció (TORLÓDÁSI PONT)

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $t \in \mathbb{R}$. A t valós számot a H halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists h \in H$ úgy, hogy $h \in U_\varepsilon(t) \setminus \{t\}$, azaz a t pont tetszőleges környezetében a H halmaznak van t -től különböző pontja.

Megjegyzés:

- 1.) Tessék észrevenni, hogy egy pont egy halmaznak lehet torlódási pontja úgy is, hogy maga a halmaznak nem eleme!
- 2.) Könnyen belátható, hogy ha $t \in \mathbb{R}$ a H halmaz torlódási pontja, akkor a t pont tetszőleges környezete a H halmaz végtelen sok elemét tartalmazza.

D.2.26. Definíció (ZÁRT HALMAZ)

A $H \subset \mathbb{R}$ halmazt zárt halmaznak nevezzük, ha tartalmazza torlódási pontjainak halmazát.

Jelölésben: $\text{torl}(H) \subset H$

Megjegyzés:

A zárt halmaz D.2.24. és D.2.26. definíciói ekvivalensek.

D.2.27. Definíció

Az $A \subset \mathbb{R}$ számhalmazt a $B \subset \mathbb{R}$ számhalmazban sűrűnek nevezzük, ha $B \text{torl}(A)$ teljesül, azaz a B halmaz minden pontja az A halmaznak torlódási pontja.

A definícióból következően a $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ halmaz önmagában sűrű, ha $A \text{torl}(A)$ teljesül.

pl.: a racionális számok halmaza sűrű önmagában, továbbá sűrű az irracionális számok halmazában is.

T.2.9. Tétel (BOLZANO-WEIERSTRASS)

Legyen $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ végtelen elemszámú, korlátos halmaz. Ekkor a $\mathbb{H}$ halmaznak van torlódási pontja.

Bizonyítás:

Legyen a $\mathbb{H}$ halmaz egy alsó korlátja a_0 , felső korlátja b_0 , melyek mindketten racionális számok.

Ekkor $\mathbb{H} \cap [a_0; b_0] \neq \emptyset$, így az $[a_0; b_0]$ intervallumban $\mathbb{H}$ halmaznak végtelen sok eleme van.

Legyen $m_1 = (a_0 + b_0)/2 \in \mathbb{Q}$.

Mivel $\mathbb{H}$ halmaz elemeinek száma végtelen,

az $[a_0; m_1]$ ill. $[m_1; b_0]$ intervallumok közül legalább

az egyikben $\mathbb{H}$ -nak végtelen sok eleme van.

Ha ez az intervallum $[a_0; m_1]$, legyen $a_1 = a_0$ és $b_1 = m_1$

egyébként legyen $a_1 = m_1$ és $b_1 = b_0$

Legyen $m_2 = (a_1 + b_1)/2 \in \mathbb{Q}$.

Az előző lépéshez hasonlóan kijelölhetünk egy $[a_2; b_2]$ intervallumot, úgy, hogy $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$, és a kijelölt intervallumban a $\mathbb{H}$ halmaznak végtelen sok eleme van.

Az eljárást folytatva $(a_n; b_n)$ szabályos racionális sorozatpárt kapunk, amely meghatároz egy $t = (a_n; b_n)$ valós számot. Mivel ezen t valós szám tetszőleges $U_\epsilon(t)$ környezetében a $\mathbb{H}$ halmaznak végtelen sok pontja van, ezen t valós szám a $\mathbb{H}$ halmaz torlódási pontja.

A Bolzano-Weierstrass tétel feltételei között szerepelt a végtelen elemszámú halmaz korlátos volta. Nem nehéz példát adni olyan végtelen elemszámú, nem korlátos halmazra, amely halmaznak nincsen torlódási pontja. Ilyen pl. a természetes számok halmaza. Itt a "torlódási pont" a $+\infty$ lenne, de a $+\infty$ nem valós szám. Azért, hogy bizonyos esetekben a $+\infty$ ill. $-\infty$ is tárgyalható legyen - akár torlódási pontként, akár felső ill. alsó korlátként, bevezetjük a valós számok kiterjesztett rendszerének fogalmát.

D.2.28. Definíció (A VALÓS SZÁMOK KITERJESZTETT RENDSZERE)

A valós számok kiterjesztett rendszere az $\mathbb{R}$ valós számhalmazból és a $+\infty$ ill. $-\infty$ szimbólumokból áll.

$\mathbb{R}$ rendezését megtartva $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $-\infty < x < +\infty$. Nyilvánvalóan a $+\infty$ felső korlátja $\mathbb{R}$ minden részhalmazának, hasonlóan a $-\infty$ alsó korlát.

A valós számok kiterjesztett rendszere nem alkot testet, de szokás szerint megállapodunk a következőkben:

- 1.) $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $x + \infty = +\infty$; $x - \infty = -\infty$
 $x : (+\infty) = x : (-\infty) = 0$
- 2.) Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x > 0$, akkor $x \cdot (+\infty) = +\infty$; $x \cdot (-\infty) = -\infty$
 Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x < 0$, akkor $x \cdot (+\infty) = -\infty$; $x \cdot (-\infty) = +\infty$

A valós számok kiterjesztett rendszerét $\mathbb{R}^*$ jelöli.

2.5. Feladatok a 2. fejezet anyagához

F.2.1. Gyűrűt ill. testet alkotnak-e az alábbi halmazok:

$$\mathbb{N} ; \mathbb{Z}^- ; \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} ; A=[0;1] ; \mathbb{Z} ; \mathbb{Q}$$

F.2.2. Írja fel az $A=\{1,2,-1\}$ halmaz összes részhalmazát!

F.2.3. Bizonyítsa be, hogy az $x=3\sqrt{2}$ ill. $y=1+\sqrt{2}$ számok nem racionális számok!

F.2.4. Legyen $v=(a_n; b_n) < 0$ és $v^*=(a_n^*; b_n^*) > 0$

a.) Mutassa meg, hogy $(a_n \cdot b_n^* ; b_n \cdot a_n^*)$ szabályos racionális sorozatpár, és $c_n = b_n \cdot a_n^* - a_n \cdot b_n^*$ nullsorozat.

b.) Mutassa meg, hogy $(b_n/b_n^* ; a_n/a_n^*)$ szabályos racionális sorozatpár, és $c_n = a_n/a_n^* - b_n/b_n^*$ nullsorozat.

F.2.5.^(*) Adja meg az alábbi számhalmazok legnagyobb alsó ill. legkisebb felső korlátját!

$$A = \{-1, -1/2, -1/3, \dots, -1/n, \dots\}$$

$$B = \{x : x < 3 \text{ és } x \in \mathbb{R}\} \quad C = \{\sqrt{3} + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$$

F.2.6. Van-e legnagyobb alsó korlátja a racionális számok halmazában az alábbi halmaznak?

$$H = \left\{ x_n : x_n = \begin{cases} 1,5 & \text{ha } n=0 \\ x_n/2 + 1/x_n & \text{ha } n>0 \end{cases} \right\}$$

F.2.7. Mutassa meg, hogy ha $a_k = x + k \cdot \sqrt{2}$; $k \in \mathbb{N}$

és $b_n = y + 2 \cdot n$; $n \in \mathbb{N}$, akkor $a_k = b_n$ legfeljebb egy (k,n) számpár esetén teljesülhet.

F.2.8.^(*) Vizsgálja meg nyíltságot, zárttságot, korlátosságot szempontjából az alábbi halmazokat:

$$A = (0;1) \cup \{2\} ; B = \{1,2,8\} ; C = \{0;1\} \cup \{2\}$$

$$D = [0;1] \cup \{1+2^{-n} ; n \in \mathbb{N}\}$$

F.2.9. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges zárt halmaz komplementere nyílt!

F.2.10.^(*) Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}$ ill. az üres halmaz nyílt is, zárt is!

F.2.11. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

a.) $x^2 + 7x + 12 \leq 0$

b.) $x^4 - 1 \geq 0$

c.) $\frac{(x+1) \cdot (x-2)}{x-3} > 0$

d.) $\frac{2}{1-x} \leq -5$

e.) $\frac{5 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot x < 6x$

f.) $\log_{1/2}(3x+2) < 2$

g.) $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 2$

h.) $\frac{3 \cdot |x| - 2}{|5x-15|} \geq 0$

i.) $|3-x| < \left| \frac{x^3+1}{x+1} \right|$

j.) $|x^2+2x-3| - |x-4| > 0$

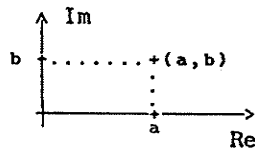
k.) $|x-3| + |1-x| + |1+x| < 5$

l.) $\frac{|x+1|}{|x^2-3x-4|} > \frac{2}{|x-1|}$

3. A komplex számok

3.1. A komplex számok halmaza. Műveletek.

A valós számok halmazán bizonyos másodfokú egyenleteknek, pl. az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs megoldása. Célunk a valós számok halmazának olyan bővítése, hogy az így kapott halmazon minden másodfokú egyenlet megoldható legyen. Mivel a valós számok teljesen kitöltik a valós számegyenest, a bővítéshez a valós számegyenest tartalmazó sík pontjait használjuk fel. Ezt a síkot nevezzük komplex számsíknak. A komplex számsík tartalmazza a valós számegyenest. Célszerűen a komplex számsík pontjait egy olyan derékszögű koordináta-rendszerben adjuk meg, amely koordináta-rendszer abszcisszatengelye a valós számegyenes, másnéven a valós tengely (Re), az ordinátatengelyt pedig képzetes tengelynek nevezzük, és jelölése Im rövidítéssel történik:



7. ábra

Így az ábrán látható módon meg tudjuk adni a komplex számsík tetszőleges pontját.

D.3.1. Definíció

Komplex számnak nevezünk egy $(a; b)$ rendezett valós számpárt, mely valós számpárookra az összeadás és a szorzás műveletét az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\text{összeadás: } (a; b) + (a'; b') = (a+a'; b+b')$$

$$\text{szorzás: } (a; b) \cdot (a'; b') = (a \cdot a' - b \cdot b'; a \cdot b' + a' \cdot b)$$

Az $(a; b)$ rendezett valós számpárból az első valós számot a komplex szám valós részének, a másodikat a komplex szám képzetes részének nevezzük.

Jelölésben: $z = (a; b)$; $a = \operatorname{Re} z$; $b = \operatorname{Im} z$

A komplex számok halmazának jelölése: $\mathbb{C}$

Megjegyzés:

- 1.) Az így definiált komplex szám a komplex számsík egy pontja (egy vektor), de eme vektorokra a vektoroknál jól ismert összeadáson kívül a szorzást is definiáltuk.
- 2.) A szorzásra vonatkozó definíció akkor jegyezhető meg könnyen, ha a későbbiekben megadott D.3.2. definíció után leírt következményt is figyelembe vesszük.

T.3.1. Tétel.

Az összeadásnak és a szorzásnak a valós számoknál megismert műveleti tulajdonságai, a kommutativitás, az asszociativitás, valamint az összeadásnak a szorzásra vonatkozó disztributivitása a komplex számokra is érvényben maradnak.

Bizonyítás:

Csupán az összeadás kommutativitását bizonyítjuk, a többi gyakorló feladatként végzendő el.

$$(a; b) + (a^*; b^*) = (a+a^*; b+b^*) \quad \text{a D.3.1. definíció miatt.}$$

$$\text{továbbá } a+a^* = a^*+a \text{ és } b+b^* = b^*+b$$

mivel az összeadás a valós számokra kommutatív.

$$\text{Ezzel } (a; b) + (a^*; b^*) = (a^*+a; b^*+b) = (a^*; b^*) + (a; b)$$

T.3.2. Tétel

Az $n=(0;0)$ komplex szám a komplex számokra értelmezett összeadás neutrális eleme (a nulla).

Bizonyítás:

Legyen $z=(a;b) \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám

$$\text{Ekkor } z+n=(a;b)+(0;0)=(a;b)=z$$

Megjegyzés:

n további tulajdonsága:

$$z \cdot n=(a;b) \cdot (0;0)=(a \cdot 0-b \cdot 0; a \cdot 0+0 \cdot b)=(0;0)=n$$

T.3.3. Tétel

Az $e=(1;0)$ komplex szám a komplex számokra értelmezett szorzás neutrális eleme (az egység).

Bizonyítás:

Legyen $z=(a;b) \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám

$$\text{Ekkor } z \cdot e=(a;b) \cdot (1;0)=(a \cdot 1-b \cdot 0; a \cdot 0+b \cdot 1)=(a;b)=z$$

T.3.4. Tétel

Legyen $z=(a;b) \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám.

Ekkor egyértelműen hozzárendelhető z -hez egy $z^* \in \mathbb{C}$ komplex szám úgy, hogy $z+z^*=n$ teljesül.

$$z^*=(-a; -b) \text{ és jelölése: } z^*=-z$$

Bizonyítás:

$$z+(-z)=(a;b)+(-a; -b)=(a-a; b-b)=(0;0)=n$$

A hozzárendelés egyértelműsége pedig következik a valós számoknál definiált "ellentett" elem egyértelműségéből.

Megjegyzés: a " $-z$ " komplex számot a z komplex szám összeadásra vonatkoztatott inverz elemének, másnéven ellentettjének nevezzük.

T.3.5.Tétel

A valós számhalmaz a komplex számhalmaz része ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), továbbá a komplex számok halmaza a valós számok halmazának bővítése.

Bizonyítás:

Legyen $a, a^* \in \mathbb{R}$ és $(a;0), (a^*,0) \in \mathbb{C}$

akkor az $(a;0) \longleftrightarrow a$ ill. $(a^*,0) \longleftrightarrow a^*$
kölsönösen egyértelmű hozzárendelések,

amelyek az $a+a^*$ összegre ill. az $a \cdot a^*$ szorzatra

a megfelelő kölsönösen egyértelmű hozzárendeléseket adják az összeadás és a szorzás megfelelő tulajdonságainak megtartásával:

$$(a;0) + (a^*;0) = (a+a^*;0) \longleftrightarrow a+a^*$$

$$(a;0) \cdot (a^*;0) = (a \cdot a^*;0) \longleftrightarrow a \cdot a^*$$

Megjegyzés: a szorzásra vonatkozó inverz elem egyértelmű létezésére a későbbiekben, a T.3.7.tételben térünk ki.

Következmény: az $(a;0)$ alakú komplex számok a valós számok, tehát a valós számok képzetes része zérus.

T.3.6.Tétel

Legyen $i=(0,1) \in \mathbb{C}$, ekkor $\forall (a;b) \in \mathbb{C}$ esetén teljesül:
 $(a;b) = a + b \cdot i$

Bizonyítás:

$$a+b \cdot i = (a;0) + (b;0) \cdot (0;1) = (a;0) + (0;b) = (a;b)$$

D.3.2.Definíció (KOMPLEX SZÁM ALGEBRAI ALAKJA)

A $z=(a;b) \in \mathbb{C}$ komplex szám $z=a+b \cdot i$ alakját a z komplex szám algebrai alakjának nevezzük.

Következmény:

A T.3.6. tételből és a D.3.2. definícióból következően a komplex számok algebrai alakjával ugyanúgy számolhatunk, mint a valós számokkal, csupán azt kell figyelembe vennünk, hogy $i \cdot i = -1$

$$(i \cdot i = (0;1) \cdot (0;1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1;0) = -1)$$

Megjegyzés:

A fentiekből adódóan könnyen megjegyezhető a D.3.1. definícióban megadott "szorzási szabály":

$$\begin{aligned} (a,b) \cdot (a^*,b^*) &= (a+b \cdot i) \cdot (a^*+b^* \cdot i) = a \cdot a^* + b \cdot b^* \cdot i^2 + a \cdot b^* \cdot i + b \cdot a^* \cdot i = \\ &= (a \cdot a^* - b \cdot b^*; a \cdot b^* + b \cdot a^*) \end{aligned}$$

T.3.7. Tétel

Legyen $z=(a;b) \in \mathbb{C}$ tetszőleges, nemzérus komplex szám
($z \neq n = (0;0)$)

Ekkor egyértelműen létezik z^{-1} komplex szám, amelyre
teljesül: $z \cdot z^{-1} = e = (1;0)$

$$\text{és} \quad z^{-1} = \frac{1}{(a;b)} = \left[\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2} \right]$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= (a;b) \cdot \left[\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2} \right] = (a+b \cdot i) \cdot \left[\frac{a-b \cdot i}{a^2+b^2} \right] = \\ &= \frac{a^2+a \cdot b \cdot i - a \cdot b \cdot i - b \cdot i^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = (1,0) \end{aligned}$$

A hozzárendelés egyértelműsége pedig következik a valós számoknál definiált reciprok elem egyértelmű létezéséből.

Megjegyzés: a fentiekben megadott z^{-1} komplex számot a z komplex szám szorzásra vonatkoztatott inverzánek, vagy másnéven reciprokának nevezzük.

D.3.3. Definíció (KOMPLEX SZÁM KONJUGÁLTJA)

A $z = (a;b) \in \mathbb{C}$ komplex szám konjugáltjának nevezzük a
 $\bar{z} = (a;-b)$ komplex számot. A konjugált geometriai képét az eredeti komplex számnak (mint vektornak) a valós tengelyre való tükrözésével kapjuk meg.

Megjegyzés:

a $z=a+b \cdot i \neq 0$ komplex szám reciprokának algebrai alakját legegyszerűbben a konjugálttal történő bővítéssel kapjuk meg:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+b \cdot i} = \frac{1}{a+b \cdot i} \cdot \frac{a-b \cdot i}{a-b \cdot i} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b \cdot i}{a^2+b^2}$$

D.3.4. Definíció (KOMPLEX SZÁM ABSZOLUTÉRTÉKE)

A $z=a+b \cdot i$ komplex szám abszolútértékének nevezzük az

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{nemnegatív valós számot.}$$

Megjegyzés: A komplex szám abszolútértékének definíciója megegyezik a síkvektorok abszolútértékének definíciójával.

T.3.8.Tétel

Tetszőleges z_1 és z_2 komplex számok esetén teljesülnek az alábbiak:

$$a.) \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$b.) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad ; \quad c.) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

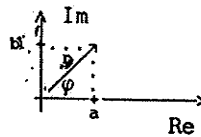
$$d.) \quad \text{ha } z_2 \neq 0 \quad \text{akkor} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

A tétel bizonyítása az algebrai alak használatával gyakorló feladat.

T.3.9.Tétel

Legyen $z = a + b \cdot i$ algebrai alakban adott tetszőleges komplex szám, legyen továbbá $|z| = r$, valamint a z komplex számnak, mint vektornak a valós tengellyel bezárt szöge φ .

Ekkor $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$



8. ábra

Bizonyítás:

a.) Ha $z = 0 = 0 + 0 \cdot i$ akkor $r = 0$, tehát az állítás $\forall \varphi$ esetén igaz.

b.) Ha $z \neq 0$, akkor $r \neq 0$, tehát $\cos \varphi = a/r$; $\sin \varphi = b/r$
ezért $r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = r \cdot a/r + r \cdot i \cdot b/r = a + b \cdot i = z$

D.3.5.Definíció (KOMPLEX SZÁM TRIGONOMETRIKUS ALAKJA)

A T.3.9. tételben megadott $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ alakot a z komplex szám trigonometrikus alakjának nevezzük.

Jelölésként használatos az $r = |z|$; $\varphi = \arg z$.

Megjegyzés: Míg a komplex számok algebrai alakja esetén $z_1 = z_2$ egyenértékű az $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$ és $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$

egyenlőségekkel,

a trigonometrikus alak esetén $z_1 = z_2$ jelentése:

$$r_1 = r_2 \quad \text{és} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}$$

azaz $\operatorname{abs}(z_1) = \operatorname{abs}(z_2)$ és $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi$.

T.3.10. Tétel (SZORZÁSI TÉTEL)

Legyenek $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex számok, melyek trigonometrikus alakja: $z_1 = (r_1, \varphi_1)$; $z_2 = (r_2, \varphi_2)$

akkor $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$

Bizonyítás: $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$; $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

Következmény: (HATVÁNYOZÁSI SZABÁLY)

Ha $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám, és n pozitív egész szám, és z trigonometrikus alakja $z = (r, \varphi)$ akkor

z^n trigonometrikus alakja: $z^n = (r^n, n \cdot \varphi)$

T.3.11. Tétel (RECIPROK TÉTEL)

Legyen $z \neq 0$ egyébként tetszőleges komplex szám, melynek trigonometrikus alakja: $z = (r, \varphi)$. Ekkor

$z^{-1} = (1/r, -\varphi)$ trigonometrikus alakban adott.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= (1, 0) \text{ ezért } r \cdot \text{abs}(z^{-1}) = 1 \implies \text{abs}(z^{-1}) = 1/r \\ &\text{és } \varphi + \arg(z^{-1}) = 0 \implies \arg(z^{-1}) = -\varphi \end{aligned}$$

Következmény: (OSZTÁSI SZABÁLY)

Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex számok és $z_2 \neq 0$, továbbá trigonometrikus alakjuk $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ és $z_2 = (r_2, \varphi_2)$

akkor $z_1/z_2 = (r_1/r_2, \varphi_1 - \varphi_2)$ trigonometrikus alakban adott.

D.3.5. Definíció

A $z = (r, \varphi)$ trigonometrikus alakú komplex szám n -edik gyökének (n pozitív egész) nevezzük a $w = (p, \alpha)$ trigonometrikus alakú komplex számot pontosan akkor, ha teljesül:

$$w^n = z = (r, \varphi + 2k\pi) ; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Jelölésben: $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$

T.3.12. Tétel (KOMPLEX SZÁMOK GYÖKE)

Legyenek $z=(r,\varphi)$ és $w=(p,\alpha)$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok, továbbá n pozitív egész szám.

$w=\sqrt[n]{z}$ pontosan akkor teljesül, ha $\begin{cases} p=r^{1/n} \\ \text{és} \\ \alpha=\varphi/n+2k\pi/n ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Bizonyítás:

1.) Tegyük fel, hogy $w=\sqrt[n]{z}$. Ekkor D.3.5. definíció szerint $w^n=z$, azaz a hatványozási szabály szerint $p^n=r$ és $n \cdot \alpha = \varphi + 2k\pi$

tehát $r^{1/n}=p$ és $\alpha=\varphi/n+2k\pi/n$

2.) Tegyük fel, hogy $p=r^{1/n}$ és $\alpha=\varphi/n+2k\pi/n$. Ekkor a hatványozási szabály szerint $w^n=(p^n;n \cdot \alpha)=(r;\varphi+2k\pi)$ azaz $w=z^{1/n}$

Következmény: Tetszőleges $z=(r,\varphi) \neq 0$ komplex számnak n db különböző n -edikgyöke van, és ezek az origó középpontú, $\sqrt[n]{r}$ sugarú körön helyezkednek el úgy, hogy egy szabályos n -szög csúcsait határozzák meg.

T.3.13. Tétel

Legyen n pozitív egész szám, és jelölje ε_k ($k=0,1,\dots,n-1$) az $\varepsilon_k=(1;2k\pi/n)$ trigonometrikus alakú komplex számokat, az ú.n. n -edik egységgyököket.

Ekkor tetszőleges $z=(r,\varphi)$ trigonometrikus alakú komplex szám n -edik gyökei előállíthatóak $(\sqrt[n]{z})_k = (\sqrt[n]{r};\varphi/n) \cdot \varepsilon_k$ alakban.

A tétel bizonyítását a T.3.10. szorzási tétel alkalmazásával végezze el gyakorló feladatként.

Megjegyzés:

A komplex számok algebrai $(a+b \cdot i)$ illetve trigonometrikus $(r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi))$ alakján kívül az ú.n. exponenciális alak is használatos. Az exponenciális alak definíciójára vissza fogunk térni az $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 2.718281 \dots$ valós szám

definíciója után, a 9. fejezetben, ahol a hatványsorokat tárgyaljuk. Már itt megjegyezzük azonban, hogy a $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ trigonometrikus alakú komplex szám

exponenciális alakja: $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

Jelenleg azonban még nem értelmeztük sem az e számot, sem pedig annak $(i \cdot \varphi)$ -edik hatványát. Formálisan azonban, a középiskolából ismert azonosságokat használva jól látható, hogy az exponenciális alakra is teljesülnek a trigonometrikus alaknál belátott szorzási, osztási, hatványozási ill. gyökvonási tételek.

Tehát

$$1.) \text{ ha } z_1 = (r_1; \varphi_1) = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} \text{ és } z_2 = (r_2; \varphi_2) = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$$

$$\text{akkor } z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\text{és ha } z_2 \neq 0 \text{ akkor } z_1 / z_2 = r_1 / r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = (r_1 / r_2; \varphi_1 - \varphi_2)$$

$$2.) \text{ ha } z = (r; \varphi) = r \cdot e^{i \cdot \varphi} \text{ és } n \text{ pozitív egész szám,}$$

$$\text{akkor } z^n = (r^n; e^{i \cdot n \cdot \varphi}) = (r^n; n \cdot \varphi)$$

$$\begin{aligned} \text{és } \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2k\pi)}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot (\varphi/n + 2k\pi/n)} = \\ &= (\sqrt[n]{r}; \varphi/n + 2k\pi/n) \end{aligned}$$

3.2. Komplex együtthatós polinomok

D.3.6. Definíció

Legyen $\{a_k\}_{k=0}^n \in \mathbb{C}$ ahol $n \in \mathbb{N}$.

$$A \quad p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \dots + a_n \cdot z^n$$

algebrai kifejezést a z komplex változó n -edfokú polinomjának nevezzük.

A $z=\alpha$ komplex szám gyöke a $p_n(z)$ polinomnak, ha $p_n(\alpha)=0$.

T.3.14. Tétel (AZ ALGEBRA ALAPTÉTELE)

Legyen $p_n(z)$ legalább elsőfokú komplex változós, komplex együtthatós polinom. Ekkor $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $p_n(\alpha)=0$.

Másképpen megfogalmazva: A komplex számok halmazán minden legalább elsőfokú polinomnak van gyöke.

A tételt nem bizonyítjuk.

T.3.15. Tétel

Legyen adott $p_n(z)$ polinom és $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex szám. A $p_n(z)$ polinom pontosan akkor osztható $(z-\alpha)$ -val, ha α a polinom gyöke.

Bizonyítás:

1.) Tegyük fel hogy a polinom osztható $(z-\alpha)$ -val.

Ekkor $p_n(z) = (z-\alpha) \cdot p_{n-1}(z)$ alakban írható fel, tehát α a polinom gyöke, mivel $p_n(\alpha) = (\alpha-\alpha) \cdot p_{n-1}(\alpha) = 0$

2.) Tegyük fel hogy α a polinom gyöke, tehát $p_n(\alpha)=0$.

$$\text{Ekkor } p_n(z) = p_n(z) - p_n(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k - \sum_{k=0}^n a_k \cdot \alpha^k = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (z^k - \alpha^k) =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k \cdot (z^k - \alpha^k) + a_0 \cdot z^0 - a_0 \cdot \alpha^0 = \sum_{k=1}^n a_k \cdot (z^k - \alpha^k)$$

A $z^k - \alpha^k$ kifejezés pedig $k \geq 1$ esetén osztható $(z-\alpha)$ -val.

Megjegyzés: A $(z-\alpha)$ kifejezést az α gyökű $p_n(z)$ polinom gyöktényezőjének nevezzük. Ha a polinom $p_n(z) = (z-\alpha)^j p_{n-j}(z)$ alakban írható fel, ahol $p_{n-j}(\alpha) \neq 0$, akkor a $(z-\alpha)$ gyöktényezőt j -szeres gyöktényezőnek, másképpen j multiplicitású gyöktényezőnek nevezzük, az α számot pedig a polinom j -szeres gyökének.

A T.3.14. és a T.3.15. tételek következményei

1.) Tetszőleges $p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ pontosan n -edfokú polinom előállítható $p_n(z) = a_n \cdot (z-\alpha_1) \cdot (z-\alpha_2) \cdots (z-\alpha_n) = a_n \cdot \prod_{k=1}^n (z-\alpha_k)$ ún. gyöktényezős alakban, ahol az α_k komplex számok a $p_n(z)$ polinom (nem feltétlenül különböző) gyökei. E felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

2.) Tetszőleges n -edfokú polinomnak n db. (nem feltétlenül különböző) gyöke van, ha minden gyököt multiplicitásának megfelelő sokszor számítunk be.

3.) Legyen $p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ és $\{a_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R}$, azaz $p_n(z)$ valós együtthatós polinom, továbbá legyen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
Ha $p_n(\alpha) = 0$, akkor $p_n(\bar{\alpha}) = 0$, azaz ha az α komplex szám egy valós együtthatós polinom gyöke, akkor a polinomnak α konjugáltja is gyöke. Az α és $\bar{\alpha}$ gyökök multiplicitása egyenlő.

Bizonyítás:

Felhasználva, hogy $\bar{\bar{a}}_k = a_k$, mivel $\forall a_k$ valós szám, T.3.8. tétel szerint adódik:

$$p_n(\bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \bar{\alpha}^k = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \cdot \bar{\alpha}^k = \sum_{k=0}^n \overline{(a_k \cdot \alpha^k)} = \overline{\left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot \alpha^k\right)} = \overline{0} = 0$$

Ezzel beláttuk, hogy $\bar{\alpha}$ is gyök. Vizsgáljuk most a multiplicitások egyenlőségét.

Tegyük fel, hogy α multiplicitása j_1 , és $\bar{\alpha}$ multiplicitása j_2 továbbá $j_1 \neq j_2$, pl. $j_1 > j_2$.

Ekkor

$$\begin{aligned} p_n(z) &= (z-\alpha)^{j_1} \cdot (z-\bar{\alpha})^{j_2} \cdot p_{n-j_1-j_2}(z) = \\ &= (z-\alpha)^{j_2} \cdot (z-\bar{\alpha})^{j_2} \cdot (z-\alpha)^{j_1-j_2} \cdot p_{n-j_1-j_2}(z) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{p_{n-2j_2}(z)=q(z)} \end{aligned}$$

és $q(z)$ olyan polinom, amelynek α gyöke, de $\bar{\alpha}$ nem gyöke, Ez ellentmondás.

4.) Tetszőleges valós együtthatós polinom előállítható legfeljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok szorzataként.

Bizonyítás: Ha α gyök valós, a $(z-\alpha)$ elsőfokú polinom valós együtthatós.

Ha az α gyök nem valós akkor $\bar{\alpha}$ is gyöke a valós együtthatós polinomnak, mégpedig az α -éval azonos multiplicitással, továbbá:

$(z-\alpha) \cdot (z-\bar{\alpha}) = z^2 - z \cdot (\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha \cdot \bar{\alpha} = z^2 - 2\operatorname{Re}\alpha \cdot z + |\alpha|^2$; ezt a kifejezést másodfokú, valós együtthatós gyöktényezőnek nevezzük. Ezen másodfokú gyöktényező valós együtthatós elsőfokú tényezőkre már nem bontható tovább.

5.) Tetszőleges valós együtthatós, páratlan fokszerű polinomnak van valós gyöke.

Bizonyítás: Ha α nem valós és gyök, akkor $\bar{\alpha}$ is gyök, mégpedig α -éval azonos multiplicitással. Tehát, a nem valós gyökök száma páros, a polinom fokszerü pedig páratlan, ezért legalább egy valós gyök létezik.

3.3. Feladatok a 3. fejezet anyagához

F.3.1. $z=1-i$; $w=-\sqrt{3} + i$

Végezze el az alábbiakban kijelölt műveleteket algebrai és trigonometrikus alakban:

$$z \cdot w ; w^3/z ; z/w ; w/z$$

F.3.2.(*) Adja meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:

$$z_1 = \frac{1^6 + 31^9 + 2i^2 + 1}{1^7 + 5i^6 + 2i} ; z_2 = \frac{101 - i^8 + 2i^2 + i^7}{1 + 2i}$$

F.3.3. Végezze el az alábbi gyökvonásokat:

$$\sqrt[3]{1/i} ; \sqrt[4]{-1 + \sqrt{3} i} ; \sqrt[7]{128(\cos 63^\circ + i \cdot \sin 63^\circ)}$$

F.3.4. Számítsa ki az n-edik egységgyökök összegét $n=4$; $n=6$ esetén, valamint általánosan!

F.3.5.(*) Határozza meg az alábbi egyenletek összes gyökét:

a.) $z^3 + 2z^2 - 3 = 0$ és $z_1 = 1$

b.) $z^2 - (2-8i) \cdot z - 14-8i = 0$

c.) $z^2 + 6z + 25 = 0$

d.) $z^4 - 1 = 0$

e.) $z^4 + z^3 + 5z^2 + 4z + 4 = 0$ és $z_1 = 2i$

A valós együtthatós polinomokat írja fel legfeljebb másodfokú gyöktényezőinek szorzataként is!

4. Valós számsorozatok és numerikus sorok

4.1. A sorozatokkal kapcsolatos alapfogalmak.

Konvergenciátételek.

D.4.1. Definíció (VALÓS SZÁMSOROZAT)

Valós számsorozatnak (a továbbiakban sorozatnak) nevezünk egy, a természetes számok halmazán értelmezett valós függvényt.

Tehát, ha $n \mapsto a(n)$ olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya: $D_a = \mathbb{N}$ és értékkészlete: $R_a \subset \mathbb{R}$,

az $[a(0)], a(1), a(2), \dots, a(n), \dots$ függvényértékek sorozatát valós számsorozatnak (sorozatnak) nevezzük.

Jelölésben a függvényértékeket az egyszerűség kedvéért:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ alakkal jelöljük, vagy rövidebben:

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{ill.} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Megjegyzés: Vesse össze a D.4.1. és a D.2.4. definíciókat! (valós számsorozat, racionális számsorozat)

D.4.2. Definíció (SOROZAT VÉGES HATÁRÉRTÉKE)

Az A valós számot az $\{a_n\}$ sorozat határértékének nevezzük pontosan akkor, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \setminus U_{\varepsilon}(A)$ halmaz elemeinek száma véges.

A sorozat (véges) határértékének tehát tetszőleges ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van. Jelölésben azt, hogy az $\{a_n\}$ sorozat határértéke A , a

következőképpen írhatjuk: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

Megjegyzés: Vesse össze a D.4.2. és a D.2.8. definíciókat! (sorozat véges határértéke, nullsorozat)

T.4.1. Tétel

A D.4.2. definícióval ekvivalens az alábbi definíció:

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke pontosan akkor $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n > N(\varepsilon)$ akkor $|a_n - A| < \varepsilon$

Az $N(\varepsilon)$ ε -től függő számot küszöbszámnak, vagy küszöbindexnek nevezzük.

A tétel bizonyítása gyakorló feladat.

D.4.3. Definíció (SOROZAT VÉGTELEN HATÁRÉRTÉKE)

1.) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke $+\infty$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ pontosan akkor, ha tetszőlegesen nagy $K \in \mathbb{R}$ esetén az $\{a_n\} \setminus (K; +\infty)$ halmaz elemeinek száma véges.

A $+\infty$ határérték esetén tehát tetszőleges K számhoz a sorozat K -nál kisebb elemeinek száma véges.

2.) A $\{b_n\}$ sorozat határértéke $-\infty$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ pontosan akkor, ha tetszőlegesen nagy $K \in \mathbb{R}$ esetén a $\{b_n\} \setminus (-\infty; -K)$ halmaz elemeinek száma véges.

A $-\infty$ határérték esetén tehát tetszőleges K számhoz a sorozat $-K$ -nál nagyobb elemeinek száma véges.

Megjegyzés: Ha a környezet fogalmát kiterjesztjük úgy, hogy a valós számok kiterjesztett rendszerében $+\infty$, ill. $-\infty$ "valós számoknak" is értelmezzük a környezetét, és pedig legyen $U_K(+\infty) = (K; +\infty)$ és $U_K(-\infty) = (-\infty; -K)$, akkor a D.4.1.

III. D.4.2. definíciókat egyetlen definícióként is megadhatjuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^* \iff \forall K \in \mathbb{R} \text{-hez az } \{a_n\} \setminus U_K(A) \text{ halmaz elemeinek száma véges}$$

T.4.2. Tétel

A D.4.3. definícióval ekvivalens az alábbi definíció:

1.) Az a_n sorozat határértéke pontosan akkor $+\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists N(K)$ úgy, hogy ha $n > N(K)$ akkor $a_n > K$

2.) A b_n sorozat határértéke pontosan akkor $-\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists N(K)$ úgy, hogy ha $n > N(K)$ akkor $b_n < -K$.

Az $N(K)$ K -tól függő számot küszöbszámnak, vagy küszöbindexnek nevezzük.

A tétel belátása gyakorló feladat.

Megjegyzés: A kiterjesztett valós számrendszerről tanultakat alkalmazva, a T.4.1. és a T.4.2. tételek egyetlen tételben is megfogalmazhatók:

Ekvivalens az alábbi két definíció:

a.) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ pontosan akkor, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \setminus U_K(A)$ halmaz elemeinek száma véges

b.) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ pontosan akkor, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists N(K)$ úgy, hogy, ha $n > N(K)$ akkor $a_n \in U_K(A)$

T.4.3.Tétel

Egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke van

Bizonyítás:

A bizonyítást véges határértékek esetére mutatjuk be.

Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B \in \mathbb{R}$ és $A > B$

Legyen $\varepsilon = (A-B)/10$. Ekkor az $\{a_n\}$ sorozatnak mind az $U_\varepsilon(A)$, mind az $U_\varepsilon(B)$ környezetén kívül csak véges sok eleme van.

Tekintve, hogy $U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B) = \emptyset$, így az $\{a_n\}$ sorozatnak csak véges sok eleme lenne, ez pedig ellentmondás

A további eseteket: $A \in \mathbb{R}$ és $B = +\infty$ vagy $B = -\infty$

ill. $A = +\infty$ és $B = -\infty$ lássa be gyakorló feladatként!

D.4.4.Definíció (KONVERGENS SOROZAT)

Egy sorozat konvergens, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, azaz véges határértéke van.

Megjegyzés:

Más könyv nevezhet konvergensnek $a_n \rightarrow \pm\infty$ sorozatot is.

D.4.5.Definíció (KORLÁTOS SOROZAT)

Az $\{a_n\}$ sorozatot alulról korlátosnak nevezzük, ha $\exists L \in \mathbb{R}$ valós szám úgy, hogy $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subset [L; +\infty)$

Az $\{a_n\}$ sorozatot felülről korlátosnak nevezzük, ha $\exists L \in \mathbb{R}$ valós szám úgy, hogy $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subset (-\infty; L]$

Az $\{a_n\}$ sorozatot korlátosnak nevezzük, ha alulról is, felülről is korlátos.

T.4.4.Tétel

Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás: $\{a_n\}$ konvergens, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ (A véges)

Legyen $\varepsilon = 1$; az $\{a_n\}$ sorozatnak az $[A-1; A+1]$ intervallumon kívül csak véges sok eleme van. Ha $A-1$ a sorozatnak nem alsó korlátja, válasszuk ki a sorozat $[A-1; A+1]$ intervallumon kívül eső véges sok eleme közül a legkisebbet, ez alsó korlát lesz. Hasonlóképpen, ha $A+1$ a sorozatnak nem felső korlátja, válasszuk ki a sorozat $[A-1; A+1]$ intervallumon kívül eső véges sok eleme közül a legnagyobbat ez felső korlát lesz.

T.4.5. Tétel

Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, továbbá a $\{b_k\}$ sorozat az $\{a_n\}$ sorozat tetszőleges részsorozata: $\{b_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, azaz $b_k = a_{n_k}$, ahol $n_1 < n_2 < \dots$. Ekkor $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.

Bizonyítás:

(arra az esetre végezzük a bizonyítást amikor $A \neq +\infty$)

Tegyük fel, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = B \neq A$ pl. $B > A$, és legyen $K \in (A; B)$

Ekkor a $(-\infty; K]$ intervallumban a $\{b_k\}$ sorozatnak csak véges sok eleme van, ez ellentmondás, mivel $b_k = a_{n_k}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ továbbá $A \in (-\infty; K]$.

T.4.6. Tétel (CAUCHY KONVERGENCIATÉTELE)

Az a_n sorozat pontosan akkor konvergens (azaz véges határértékű), ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n > m > N(\varepsilon)$ akkor $|a_m - a_n| < \varepsilon$

Bizonyítás:

a.) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ létezik és véges, akkor $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $m > n > N(\varepsilon)$ akkor $|a_m - A| < \varepsilon/2$ és $|a_n - A| < \varepsilon/2$.

Következésképpen:

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \varepsilon$$

b.) Létezzen $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $m > n > N(\varepsilon)$ akkor $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Be fogjuk látni, hogy ekkor az a_n sorozat konvergens.

Legyen m_0 olyan rögzített szám amelyre $m_0 > N(\varepsilon)$ teljesül.

Ekkor az $\{a_k\}_{k=m_0}^{\infty}$ számhalmaz korlátos, mivel $\forall a_k$ esetén $|a_k - a_{m_0}| < \varepsilon$ teljesül, tehát $\{a_k\}_{k=m_0}^{\infty} \subset [a_{m_0} - \varepsilon; a_{m_0} + \varepsilon]$.

1.) Tegyük fel, hogy az $\{a_k\}_{k=m_0}^{\infty}$ számhalmaz elemei között csak véges sok különböző van, a többire $a_k = A$; Ekkor $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A$

2.) Tegyük fel, hogy az $\{a_k\}_{k=m_0}^{\infty}$ számhalmaz elemei között végtelen sok különböző van. Ekkor a T.2.9. Bolzano-Weierstrass tétel szerint az $\{a_k\}_{k=m_0}^{\infty}$ végtelen elemszámú, korlátos halmaznak van torlódási pontja. Kiindulási feltételünkéből ($|a_m - a_n| < \varepsilon$ ha $m > n > N(\varepsilon)$) belátható, hogy csak egy ilyen t torlódási pont van, és $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = t$.

A Cauchy konvergenciatétel bizonyításánál láthattuk, hogy a valós számhalmazok torlódási pontjai és a konvergens sorozatok határértéke között szoros összefüggés van. Ha az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergens sorozat elemei között csak véges sok egyenlő van, láthatóan a sorozat határértéke egyben a sorozat elemeiből álló ponthalmaz egyetlen torlódási pontja. Egy konvergens sorozat határértékét azonban akkor is a sorozat torlódási pontjának tekintjük, ha a sorozat elemei között csak véges sok különböző van, a többire $a_n = A$ teljesül. Ekkor a számegyenesen az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak egy véges elemszámú ponthalmaz felel meg, amely ponthalmaznak a D.2.25. definíció értelmében természetesen nincs torlódási pontja. Látható tehát, hogy a sorozat torlódási pontját a D.2.25. definíciótól eltérően kell definiálnunk, azonban úgy, hogy azon sorozatokra, amelyeknek végtelen elemszámú valós ponthalmazok feleltethetők meg, ne kapjunk a torlódási pontra a D.2.25. definíciótól eltérő értelmezést.

D.4.6. Definíció (SOROZAT TORLÓDÁSI PONTJA)

A t valós számot az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjának nevezzük, ha a t szám tetszőleges $U_\varepsilon(t)$ környezetében az a_n sorozatnak végtelen sok eleme van.

Ha a valós számok kiterjesztett rendszerében értelmezzük a sorozat torlódási pontját, figyelembe kell vennünk a D.4.2. definíció megjegyzésében a $+\infty$ ill. $-\infty$ környezetének értelmezését, s így az alábbi definíciót mondhatjuk ki:

A $t \in \mathbb{R}^*$ "számot", amely lehet $+\infty$ ill. $-\infty$ is, az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjának nevezzük, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén az $U_K(t)$ környezetben az a_n sorozatnak végtelen sok eleme van.

Megjegyzés:

Gondolja végig, hogyan kell megfogalmazni a valós számegyenes ponthalmazainak torlódási pontjára adott D.2.25. definíciót, ha a valós számok kiterjesztett rendszerében gondolkodva a $+\infty$ ill. a $-\infty$ "számokat" is torlódási pontnak kívánjuk tekinteni!

T.4.7. Tétel

Konvergens sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, és ez a sorozat (véges) határértéke. (Nem bizonyítjuk.)

Ha ugyanezt a tételt a valós számok kiterjesztett rendszerében mondjuk ki, az állítás az alábbi:

Ha egy sorozatnak van (véges vagy végtelen) határértéke, akkor ezen sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, és ez a sorozat (véges vagy végtelen) határértéke.

D.4.7. Definíció (LIMSUP ÉS LIMINF)

Legyen az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjainak halmaza $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^*$

a.) A $\mathbb{T}$ halmaz legkisebb felső korlátját nevezzük az a_n sorozat "limes superior"-jának.

Jelölése: $\limsup a_n$ vagy $\overline{\lim} a_n$.

b.) A $\mathbb{T}$ halmaz legnagyobb alsó korlátját nevezzük az a_n sorozat "limes inferior"-jának.

Jelölése: $\liminf a_n$ vagy $\underline{\lim} a_n$

Tehát $\limsup a_n = \sup \mathbb{T}$ és $\liminf a_n = \inf \mathbb{T}$

Megjegyzés:

Ha a $\mathbb{T}$ halmaz elemei, tehát az a_n sorozat torlódási pontjai között van legnagyobb (legyen ez t_f), ill. legkisebb (legyen ez t_a), akkor $t_f = \limsup a_n$ és $t_a = \liminf a_n$.

$\mathbb{R}^*$ -ban mindig $\exists t_f, t_a$.

T.4.8. Tétel

Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ (tehát A lehet véges vagy $+\infty$ vagy $-\infty$)

Ekkor $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = A$

A tételt nem bizonyítjuk.

A továbbiakban monoton sorozatok határértékével fogunk foglalkozni. A monoton sorozatok definícióját - racionális számsorozatra - a D.2.10. definícióban már megadtuk, ebből értelemszerűen következik a valós számsorozatok monotonitásának definíciója:

D.4.8. Definíció (MONOTON SOROZAT)

Az a_n sorozat monoton növekvő, ha $\forall n_1 > n_2$ esetén $a_{n_1} \geq a_{n_2}$

A b_n sorozat monoton csökkenő, ha $\forall n_1 > n_2$ esetén $b_{n_1} \leq b_{n_2}$

Szigorú monotonitás esetén a sorozat elemei között az egyenlőség nincs megengedve.

T.4.9. Tétel (MONOTON SOROZATOK HATÁRÉRTÉKE)

Ha a c_n sorozat monoton, akkor van határértéke, és ez a határérték

- a.) véges, ha a sorozat korlátos
- b.) $+\infty$, ha a sorozat felülről nem korlátos
- c.) $-\infty$, ha a sorozat alulról nem korlátos.

Bizonyítás:

- a.) Mivel a c_n sorozat korlátos, ezért a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ halmaz korlátos valós számhalmaznak a T.2.3. tétel szerint van legnagyobb alsó korlátja, jelölje ezt A , és legkisebb felső korlátja, jelölje ezt F .

Ha a sorozat monoton növekvő, akkor $A=c_1$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = F$, mivel F a legkisebb felső korlát, így $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy $c_{N(\varepsilon)} > F - \varepsilon \implies$ ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $c_n > F - \varepsilon$.

Ha a sorozat monoton csökkenő, akkor $F=c_1$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, mivel A a legnagyobb alsó korlát, így $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy $c_{N(\varepsilon)} < A + \varepsilon \implies$ ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $c_n < A + \varepsilon$.

- b.) Mivel a sorozat felülről nem korlátos,
 - 1.) csak monoton növekvő lehet, hiszen monoton csökkenő sorozatnak az első eleme felső korlátja.
 - 2.) $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists N(K)$ úgy, hogy $c_{N(K)} > K$; a monoton növekedés miatt ekkor $\forall n > N(K)$ esetén $c_n > K$, ez pedig a D.4.3./1. definíció értelmében azt jelenti, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$.
- c.) Mivel a sorozat alulról nem korlátos,
 - 1.) csak monoton csökkenő lehet, hiszen monoton növekvő sorozatnak az első eleme alsó korlátja.
 - 2.) $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists N(K)$ úgy, hogy $c_{N(K)} < K$; a monoton csökkenés miatt ekkor $\forall n > N(K)$ esetén $c_n < K$, eszerint pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$.

A most következő tételek sorozatok véges határértékének kiszámításához adnak segítséget, jóllehet közülük bármelyiket lehet általánosítani bizonyos végtelen határértékek kiszámításához, ugyanolyan értelemben, mint ahogyan azt a valós számok kiterjesztett rendszerében a műveleteknél tettük.

T.4.10. Tétel(ek) (SOROZATOK HATÁRÉRTÉKÉNEK KISZÁMÍTÁSA)

Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, ahol A, B végesek.

Ekkor:

- 1.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
- 2.) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot b_n) = \lambda \cdot B \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$
- 3.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- 4.) Ha $B \neq 0$ és $b_n \neq 0$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/b_n = 1/B$
következmény: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / b_n = A/B$
- 5.) Ha $B = 0$ és $b_n > 0$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/b_n = +\infty$
- 6.) Ha $A = B$ és $a_n \leq b_n$, valamint c_n olyan sorozat, hogy $a_n \leq c_n \leq b_n$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$

A tételek közül példaként a 3.) pont bizonyítását mutatjuk be, a többi bizonyítása is hasonlóan történik.

$$|A \cdot B - a_n \cdot b_n| = |A \cdot B - a_n \cdot B + a_n \cdot B - a_n \cdot b_n| \leq |B| \cdot |A - a_n| + |a_n| \cdot |B - b_n| \rightarrow 0$$

Megjegyzés: a tétel 6. pontját szemléletes állítása miatt "rendőr elv"-ként is szokás említeni, mivel az a_n és a b_n sorozatok "közrefogják" és "magukkalviszik" a c_n sorozatot.

Az következő két tétel a "rendőr elvet" a középiskolából jól ismert geometriai sorozatra vonatkoztatott összehasonlítással alkalmazza.

A középiskolai tanulmányokból ismertnek tételezzük fel, hogy az $a_n = a_0 \cdot q^n$ geometriai sorozatra teljesül:

- ha $|q| < 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \cdot q^n = 0$
- ha $q > 1$ és $a_0 > 0$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \cdot q^n = +\infty$
- ha $q > 1$ és $a_0 < 0$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \cdot q^n = -\infty$
- ha $q < -1$ és $a_0 \neq 0$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \cdot q^n$ nem létezik
és $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_0 \cdot q^n| = +\infty$

T.4.11. Tétel (HÁNYADOSKRITÉRIUM SOROZATOKRA)

Legyen a_n olyan sorozat, amelyre $a_n \neq 0$, legyen továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell$$

a.) Ha $\ell < 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; b.) Ha $\ell > 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$

Megjegyzés: ha $\ell = 1$ akkor ezen tétel alapján az a_n sorozat határértékét nem tudjuk kiszámítani. (Esetleg nem is létezik)

pl.: $a_n = n$; $\ell = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

$b_n = 1/n$; $\ell = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$c_n = n \cdot (-1)^n$; $\ell = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ nem létezik

Bizonyítás:

a.) Mivel $\ell < 1 \exists q \in \mathbb{R}$ úgy hogy $\ell < q < 1$ teljesül.

Ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy hogy ha $n \geq n_0$ akkor $|a_{n+1}/a_n| < q$

Tehát

$$\begin{aligned} |a_{n_0+1}/a_{n_0}| < q &\implies |a_{n_0+1}| < |a_{n_0}| \cdot q \\ |a_{n_0+2}/a_{n_0+1}| < q &\implies |a_{n_0+2}| < |a_{n_0+1}| \cdot q^2 \end{aligned}$$

$$|a_{n_0+k}/a_{n_0+k-1}| < q \implies |a_{n_0+k}| < |a_{n_0}| \cdot q^k$$

melyből adódóan, mivel

$$0 < |a_{n_0+k}| < |a_{n_0}| \cdot q^k \rightarrow 0$$

a rendőr elvet alkalmazva $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_0+k}| = 0$

tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

b.) Mivel $\ell > 1 \exists q \in \mathbb{R}$ úgy hogy $1 < q < \ell$ teljesül.

Ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy ha $n > n_0$ akkor $|a_{n+1}/a_n| > q$.

Tehát

$$|a_{n_0+1}/a_{n_0}| > q \implies |a_{n_0+1}| > |a_{n_0}| \cdot q$$

ill. az a.) rész bizonyításához hasonlóan

$$|a_{n_0+k}| > |a_{n_0}| \cdot q^k$$

Mivel pedig $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_0}| \cdot q^k = +\infty$, adódik, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_0+k}| = +\infty \text{ tehát } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$$

Megjegyzés: A tétel alkalmazásával könnyen beláthatjuk, hogy az alábbi sorozatok a felsorolásuk sorrendjében "egyre gyorsabban" tartanak a végtelenbe, azaz bármelyikük az "utána felsorolt" sorozattal osztva zérushoz, az "előtte felsorolt" sorozattal osztva végtelenbe tart.

$$a_n = n^{100}; b_n = 100^n; c_n = n!; d_n = n^n$$

T.4.12. Tétel (GYÖKKRITÉRIUM SOROZATOKRA)

Legyen a_n olyan sorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$.

a.) Ha $\ell < 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; b.) Ha $\ell > 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

Megjegyzés: Ha $\ell = 1$ akkor ezen tétel alapján az a_n sorozat határértékét nem tudjuk kiszámítani. (Esetleg nem is létezik)

A hányadoskritériumnál megadott $a_n = n$; $b_n = 1/n$; $c_n = (-1)^n \cdot n$ sorozatokra a gyökkritériumot alkalmazva, a T.4.14. tétel segítségével belátható, hogy mindegyik sorozatnál $\ell = 1$.

Bizonyítás:

a.) Mivel $\ell < 1$ $\exists q \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\ell < q < 1$ teljesül.

Ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy ha $n \geq n_0$ akkor $\sqrt[n]{|a_n|} < q \Rightarrow |a_n| < q^n$.

Mivel $0 < |a_n| < q^n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, a rendőr elvet alkalmazva adódik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b.) Mivel $\ell > 1$ $\exists q \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $1 < q < \ell$ teljesül.

Ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy ha $n \geq n_0$ akkor $\sqrt[n]{|a_n|} > q \Rightarrow |a_n| > q^n$.

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$, adódik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.

Megjegyzés:

A gyökkritérium "erősebb", mint a hányadoskritérium, azaz van olyan sorozat, amelynek konvergenciája a hányadoskritériummal nem mutatható meg, a gyökkritériummal azonban igen. Ha egy sorozat a hányadoskritérium szerint konvergensnek adódik, akkor ezen sorozat a gyökkritérium szerint is konvergens.

Az alábbiakban példát adunk olyan sorozatra, amelynek konvergenciája a hányadoskritériummal nem dönthető el, a gyökkritériummal azonban igen:

Legyen $a_{2n-1} = 1/2^{2n-1-\sqrt{2n-1}}$; $a_{2n} = 1/2^{2n+\sqrt{2n}}$

Ezen sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}/a_{2n-1} = 0$ ($= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/2^{1+\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}$)

és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}/a_{2n} = +\infty$ ($= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1+\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}$)

tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$ nem létezik, azonban a gyökkritériumot alkalmazva a sorozat konvergenciája látható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/2^{n \pm \sqrt{n}}})$$

A most következő tételt néhány "nevezetes" sorozat határértékének kiszámításához ill. a határérték létezésének a vizsgálatához fogjuk alkalmazni.

T.4.13. Tétel (BERNOULLI EGYENLŐTLENSÉG)

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $x > -1$; $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$.

Bizonyítás: (teljes indukció)

a.) $n=0$ esetén $(1+x)^0 = 1 = 1+0 \cdot x$

b.) Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén $(1+x)^k \geq 1+k \cdot x$ teljesül.

Belátjuk, hogy ekkor az egyenlőtlenség $n=k+1$ esetére is teljesül, azaz $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1) \cdot x$.

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+k \cdot x \quad / \cdot (1+x) \quad \text{mely kifejezés pozitív}$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+k \cdot x + x + k \cdot x^2 = 1+(k+1) \cdot x + k \cdot x^2$$

$$\text{Mivel pedig } k \cdot x^2 \geq 0 \implies (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1) \cdot x$$

T.4.14. Tétel (NEVEZETES SOROZATOK HATÁRÉRTÉKE)

1.) Legyen $a > 0$; $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2.) Legyen $a_n = \sqrt[n]{\sqrt{n}}$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$$\text{Következmény: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Bizonyítás:

1.) a.) Legyen $a > 1$. Ekkor $\sqrt[n]{a} = 1 + \varepsilon_n$ ahol $\varepsilon_n > 0$

Alkalmazva a Bernoulli egyenlőtlenséget, adódik:

$$a = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n \cdot \varepsilon_n \implies (a-1)/n \geq \varepsilon_n > 0$$

Mivel pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} (a-1)/n = 0$, a rendőr elvet alkalmazva

$$\text{adódik, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n) = 1$$

b.) Legyen $0 < a < 1$. Ekkor $b = 1/a > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$.

$$\text{Ebből adódik: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/b} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt[n]{b} = 1$$

2.) Mivel $a_n = \sqrt[n]{\sqrt{n}} \geq 1$, tehát $a_n = 1 + \varepsilon_n$ alakba írható, ahol $\varepsilon_n \geq 0$. Alkalmazva a Bernoulli egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{n} = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n \cdot \varepsilon_n \implies (\sqrt{n} - 1)/n \geq \varepsilon_n \geq 0$$

Mivel pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - 1)/n = 0$, a rendőr elvet

$$\text{alkalmazva adódik, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n) = 1$$

T.4.15. Tétel (AZ "e" SZÁMOT DEFINIÁLÓ SOROZATPÁR)

Az $a_n = (1+1/n)^n$; $b_n = (1+1/n)^{n+1}$ sorozatpár szabályos racionális sorozatpár, azaz $a_n \leq b_n$; a_n monoton növekvő , b_n monoton csökkenő, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 .$$

Bizonyítás:

1.) Az, hogy $(a_n; b_n)$ racionális sorozatpár, következik abból, hogy a racionális számok halmaza testet alkot.

2.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n \cdot [1+1/n - 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot 1/n = 0$
mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, és a bizonyítás 3. ill. 4. pontjában látni fogjuk, hogy az a_n sorozat korlátos.

3.) a_n monoton növekvő, azaz $a_n \geq a_{n-1}$:

$$a_n = (1+1/n)^n = ((n+1)/n)^n ; a_{n-1} = (1+1/(n-1))^{n-1} = (n/(n-1))^{n-1}$$

azaz bizonyítandó, hogy:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^n \geq \frac{n-1}{n} ; \text{ Alkalmazva a baloldalra a}$$

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1} / \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$$

Bernoulli egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^n \geq 1+n \cdot (-1/n^2) = 1-1/n = \frac{n-1}{n}$$

Ezzel beláttuk az a_n sorozat monoton növekvő voltát, és ezzel együtt azt, hogy mind az a_n , mind a b_n sorozatok alulról korlátosak. (alsó korlát mindkettőre a_1 , mivel az $a_n < b_n$ állítás $b_n = a_n \cdot (1+1/n)$ miatt triviális.

4.) b_n monoton csökkenő, azaz $b_n \geq b_{n+1}$:

$$b_n = (1+1/n)^{n+1} = ((n+1)/n)^{n+1} ; b_{n-1} = (1+1/(n-1))^n = (n/(n-1))^n$$

azaz bizonyítandó, hogy:

$$\left(\frac{n}{n-1} \right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} / \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\text{adódik: } \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^n \geq \frac{n+1}{n} ; \text{ Alkalmazva a baloldalra a}$$

$$\text{Bernoulli egyenlőtlenséget: } \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^n \geq 1+n \cdot \frac{1}{n^2-1} \geq 1+n/n^2 = \frac{n+1}{n}$$

Ezzel beláttuk, hogy a b_n sorozat monoton csökkenő, és ezzel együtt azt, hogy a_n és b_n felső korlátja b_1 .

D.4.9. Definíció (AZ "e" SZÁM)

Az $a_n = (1+1/n)^n$; $b_n = (1+1/n)^{n+1}$ szabályos racionális sorozatpár által megadott valós számot e számnak nevezzük.

$$e \approx 2,7182818....$$

Megjegyzés:

Az $x > 0$ valós szám e alapú logaritmusának jelölése: $\ln(x)$, a "logarithmus naturalis", természetes logaritmus rövidítéseként. Ha az exponenciális függvény említésekor más megjegyzést a függvényhez nem fűznek, általában az e alapú exponenciális függvényt értik alatta. Jelölésében gyakran használatos az $\exp(x)$.

T.4.16. Tétel

Legyen z_n tetszőleges olyan nullsorozat, amelyre $z_n \neq 0$.

$$\text{Ekkor } \lim_{n \rightarrow \infty} (1+z_n)^{1/z_n} = e$$

A tételt nem bizonyítjuk.

4.2. Numerikus végtelen sorok

D.4.10. Definíció (A NUMERIKUS VÉGTLEN SOR)

Legyen adott az a_n sorozat, és legyen S_n az alábbi sorozat:

$$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \dots S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Amennyiben az S_n sorozatnak létezik a határértéke, ezen

határértékkel értelmezzük a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ "végtelen összeget".

Ezen $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ "végtelen összeget" nevezzük numerikus végtelen sornak, az S_n sorozat elemeit pedig az S numerikus végtelen sor részletösszegeinek. Az S_n sorozatot a részletösszegek sorozatának nevezzük.

Megjegyzés:

A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ "végtelen összeget" akkor is numerikus végtelen sornak nevezzük, ha a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ határérték nem létezik, vagy nem véges. Ekkor a numerikus végtelen sort divergensnek mondjuk. Ha az $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ határérték létezik és véges, a numerikus végtelen sort konvergensnek mondjuk.

A numerikus végtelen sort röviden $\sum a_k$ vagy $\sum a_n$ is jelölheti.

T.4.17. Tétel

A $\sum a_n$ numerikus végtelen sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ teljesüljön.

Bizonyítás:

A T.4.6. Cauchy konvergenciatétel szerint, ha a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ határérték véges, akkor $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists N(\epsilon)$ úgy, hogy ha $m > n > N(\epsilon)$ akkor $|S_m - S_n| < \epsilon$.

Legyen $m = n+1$, ekkor $|S_m - S_n| = |S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Következmény: Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, vagy nem létezik, akkor a $\sum a_n$ numerikus végtelen sor divergens.

Most példát mutatunk be olyan numerikus végtelen sorra, amelynél a konvergencia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ szükséges feltétele teljesül, s a sor mégis divergens.

T.4.18.Tétel (A HARMONIKUS SOR DIVERGENCIÁJA)

A $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens.

Bizonyítás:

Mivel a T.4.6. Cauchy konvergenciatétel a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ véges határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele, elegendő belátnunk a harmonikus sor divergenciájához, hogy

az $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ sorozat a Cauchy konvergenciatétel feltételeit

nem teljesíti:

Legyen $m=2 \cdot n$, ekkor

$$|S_m - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2 \cdot n} = \frac{1}{2}$$

azaz $|S_{2n} - S_n| > 1/2$, tehát pl. $\varepsilon=0,1$ és $m=2n$

esetére nincs olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $|S_m - S_n| < \varepsilon$ teljesül.

D.4.11.Definíció (ABSZOLUT ÉS FELTÉTELES KONVERGENCIA)

A $\sum a_n$ numerikus végtelen sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum |a_n|$ numerikus végtelen sor konvergens.

Ha a $\sum a_n$ sor konvergens és a $\sum |a_n|$ sor divergens, a $\sum a_n$ sort feltételesen konvergensnek mondjuk.

T.4.19.Tétel

Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Bizonyítás:

Mivel a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $m > n > N(\varepsilon)$ akkor $|S_m^* - S_n^*| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$,

$$\text{ahol } S_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Ebből adódóan:

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$$

D.4.12. Definíció (POZITÍV TAGÚ SOR)

A $\sum a_n$ sort pozitív tagú sornak nevezzük, ha $a_n > 0$ minden n -re

Megjegyzés: Mivel a pozitív tagú sorok esetén a részletösszegek sorozata monoton növekvő, a T.4.9. tétel értelmében egy pozitív tagú sor vagy konvergens (ha a részletösszegek sorozata korlátos), vagy $S = +\infty$ (ha a részletösszegek sorozata nem korlátos).

T.4.20. Tétel (MAJORÁLÁS, MINORÁLÁS POZ. TAGÚ SOROKRA)

Legyenek $\sum a_n$ ill. $\sum b_n$ pozitív tagú sorok, melyekre $a_n \leq b_n$ teljesül minden n -re.

- a.) Ha $\sum a_n = +\infty$ akkor $\sum b_n = +\infty$; Úgy mondjuk, hogy a $\sum b_n$ sort a $\sum a_n$ divergens sorral minoráltuk.
- b.) Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens. Úgy mondjuk, hogy $\sum a_n$ sort a $\sum b_n$ konvergens sorral majoráltuk.

A tételt nem bizonyítjuk, mivel állítása rendkívül szemléletes. Felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy konvergens sorral minorálni, ill. divergens sorral majorálni a konvergencia vizsgálata szempontjából nem nyújt semmilyen eredményt.

Itt jegyezzük meg azt is, hogy a majorálást ill. a minorálást gyakran csupán egy előre megadott $n = n_0$ indexű tagtól kezdődően végezzük. Ezt megtehetjük, mivel a numerikus sor konvergenciáját ill. divergenciáját véges sok tag elhagyása nem változtatja meg. (A sorösszeget azonban igen!)

A most következő két tétel a geometriai sorral való majorálást ill. minorálást teszi könnyen kezelhetővé.

T.4.21. Tétel (HÁNYADOSKRITÉRIUM SOROKRA)

Legyen a $\sum a_n$ sor olyan, hogy $a_n \neq 0$, továbbá létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell$ határérték.

- a.) Ha $\ell < 1$ akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens.
- b.) Ha $\ell > 1$ akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

Megjegyzés: Ha $\ell = 1$ akkor ezen tétel alapján a sor konvergenciája ill. divergenciája nem dönthető el.

Példa: $a_n = 1/n$; itt $\ell=1$, és $\sum a_n$ divergens.
 $b_n = 1/[n \cdot (n+1)] = 1/n - 1/(n+1)$; itt is $\ell=1$, de most
 $S_n = (1-1/2) + (1/2-1/3) + \dots + (1/(n-1) - 1/n) + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - 1/(n+1)$
 ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/(n+1)) = 1$

Bizonyítás:

- a.) Ha $\ell < 1$ akkor a $\sum |a_n|$ sor a T.4.11. tétel szerint valamely $n=n_0$ -tól kezdődően konvergens geometriai sorral majorálható, tehát a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, így konvergens is.
- b.) Ha $\ell > 1$ akkor a T.4.11. tétel szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$, tehát a $\sum a_n$ sor nem teljesíti a konvergencia T.4.17. tételben megadott $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ szükséges feltételét.

T.4.22. Tétel (GYÖKKRITÉRIUM SOROKRA)

Legyen a $\sum a_n$ sor olyan, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ határérték létezik.

- a.) Ha $\ell < 1$ akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens.
- b.) Ha $\ell > 1$ akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

Megjegyzés: Ha $\ell=1$ akkor ezen tétel alapján a $\sum a_n$ sor konvergenciája ill. divergenciája nem dönthető el.

Példa: A T.4.21. tételnél megadott $\sum 1/n$ ill. $\sum 1/[n \cdot (n+1)]$ soroknál mindkét sorra $\ell=1$, s mégis, az első divergens, a második konvergens.

A tétel bizonyítása a T.4.21. tétel bizonyításának alapján gyakorló feladatként végzendő el. Útmutatás: a majoráláshoz ill. minoráláshoz használja a T.4.12. tételt! (Gyökkritérium sorozatokra)

D.4.13. Definíció (ALTERNÁLÓ SOR)

Legyen adott az $a_n > 0$ pozitív tagú sorozat.

Az $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ sort alternáló sornak nevezzük.

T.4.23. Tétel (LEIBNIZ TÉTEL)

Legyen az $S = \sum (-1)^n \cdot a_n$ alternáló sor olyan, hogy az a_n sorozat monoton csökkenően tart nullához. Ekkor a sor konvergens, és $|S - S_n| \leq |a_{n+1}|$

Bizonyítás:

Vizsgáljuk meg az $S_1, S_3, S_5, \dots, S_{2n-1}, \dots$ páratlan indexű

részösszegek sorozatát:

$$S_1 = a_1; S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_1 - (a_2 - a_3) \leq S_1; \dots$$

$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq S_{2n-1}$; azaz a páratlan indexű részletösszegek sorozata monoton csökkenő, továbbá alulról korlátos, mivel minden n -re igaz, hogy $S_{2n+1} \geq S_2$.

Tehát a páratlan indexű részletösszegek sorozata a T.4.9. tétel értelmében konvergens.

Hasonló megfontolás alapján belátható, hogy az $S_2, S_4, \dots, S_{2n}, \dots$ páros indexű részletösszegek sorozata monoton növekvő, és felülről korlátos ($S_{2n} \leq S_1$), tehát szintén konvergens.

Mivel pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$, adódik, hogy az S numerikus végtelen sor konvergens, továbbá mivel

$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$ tehát az S sorösszegnek a részletösszeggel való közelítéskor a közelítés hibája az első elhagyott tag abszolútértékével becsülhető.

Megjegyzés:

A Leibniz tétel az alternáló sorok konvergenciájának elégséges feltétele. Tudunk példát adni olyan alternáló sorra, amely a Leibniz tétel feltételeit nem teljesíti maradéktalanul, s mégis konvergens.

Pl.: $S = 1/2 - 1/3 + 1/4 - 1/9 + 1/8 - 1/27 + 1/16 - 1/81 + \dots$

$$\text{azaz } a_{2n} = -(1/3)^n; a_{2n-1} = (1/2)^n$$

Itt láthatóan $a_5 > a_4$, és továbbra is $a_{2n+1} > a_{2n}$, ha $n \geq 2$, azaz az a_n sorozat nem monoton csökkenve tart 0-hoz.

Könnyen belátható azonban, hogy S abszolút konvergens:

$$\sum |a_n| = \sum (1/2^n + 1/3^n) < 2 \cdot \sum 1/2^n = 1/(1-1/2) = 2$$

S abszolút konvergenciájából adódóan pedig T.4.18. tétel szerint S konvergens is.

Bizonyítás nélkül megemlítjük, de fontos:

Egy abszolút konvergens sor tetszőlegesen átrendezhető absz. konvergenciájának és sorösszegének megváltozása nélkül. Így az előbbi példa S sorösszege ki is számítható az alábbiak szerint:

$$S = \sum 1/2^n - \sum 1/3^n = 1/[2 \cdot (1-1/2)] - 1/[3 \cdot (1-1/3)] = 1-1/2 = 1/2$$

Az átrendezés nem abszolút konvergens soroknál megváltoztathatja a sorösszeget.

4.3. Feladatok a 4. fejezet anyagához

F.4.1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét, és adja meg $N(\varepsilon)$ küszöbindexet $\varepsilon=0,01$ esetén!

$$a_n = \frac{n+2}{2n-1} ; \quad b_n = \frac{n+1}{1-3n^2} ; \quad c_n = \frac{n^2+2n+1}{5n^2+1} ; \quad d_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

F.4.2. Az alábbi, végtelenbe tartó sorozatoknál adja meg azt a legkisebb K számot, amelyre, ha $n > K$, $a_n > 10000$ teljesül!

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} ; \quad b_n = 1,001^n ; \quad c_n = \log_2 n$$

F.4.3.^(*) Számítsa ki az alábbi határértékeket:

$$a.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2} + n^2 + 1}{\sqrt{1+n^2} + 2 \cdot \sqrt{n^3+2}} ; \quad b.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\pi} + 3n^5}{\sqrt{n^9} + 1}$$

$$c.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{1+n^{\pi}} ; \quad d.) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

$$e.) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) ; \quad f.) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n^{1,1}} - n)$$

F.4.4. Bizonyítsa a T.4.16. tételt $z > 0$ esetre!

F.4.5.^(*) Számítsa ki a T.4.16. tétel alkalmazásával az alábbi határértékeket:

$$a.) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n} ; \quad b.) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n^2+3}{2}}{n^2+1} \right)^{5n^2} ; \quad c.) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2} \right)^{3\sqrt{n}}$$

F.4.6. Mutassa meg, hogy az a_n sorozat monoton növekvő és korlátos!

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2 \cdot n}$$

F.4.7. Mutassa meg, hogy az alábbi sorozat monoton csökkenő és korlátos. Adja meg határértékét.

$$x_0 = 1,5 ; \quad x_{n+1} = x_n / 2 + 1/x_n \quad \text{ha } n > 0$$

F.4.8. Mutassa meg, hogy az alábbi sorozat monoton növekvő és korlátos. Adja meg a határértékét!

$$a_1 = \sqrt{2} ; \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \quad \text{ha } n \geq 1$$

F.4.9.^(*) Számítsa ki az alábbi határértékeket:

a.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2n + 3}$; b.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{100n^5 + n^{3/2}}$

c.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}$; d.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}}{100^n}$; e.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!}$

f.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$; g.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$ ahol $a=2$; ill $a=3$

F.4.10.^(*) Az alábbi sorokról döntse el, hogy konvergens, vagy divergens!

a.) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$; b.) $\sum \frac{1}{2^n}$; c.) $\sum \frac{100^n + n^{100}}{n!}$; d.) $\sum \frac{1}{n!}$

e.) $\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; f.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lg n}$; g.) $\sum \frac{1}{n^2}$

F.4.11.^(*) Az alábbi alternáló sorokról döntse el, hogy konvergens-e, abszolút konvergens-e. Konvergencia esetén becsülje $|S - S_{100}|$ értékét.

a.) $\sum \frac{\sin(n \cdot \pi/2)}{n!}$; b.) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; c.) $\sum \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

d.) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; e.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lg n}$

F.4.12. Rendezze át az $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ sort úgy, hogy a sorösszeg $3 \cdot S/2$ legyen!

5. Függvények határértéke, folytonossága,
differenciálhatósága

Ebben a fejezetben olyan függvényekkel fogunk foglalkozni, amelyeknek mind az értelmezési tartománya, mind pedig az értékkészlete a valós számok halmazának egy-egy részhalmaza.

Jelölések:

Jelölje az értelmezési tartomány és az értékkészlet elemei közötti függvénykapcsolatot f , ekkor az értelmezési tartomány szokásos jelölése D_f az értékkészleté R_f .

Legyen az értelmezési tartomány tetszőleges eleme az x valós szám, ekkor az értékkészlet hozzárendelt elemének szokásos jelölése $f(x)$.

Magát a függvényt szokás az $x \mapsto f(x)$ hozzárendeléssel jelölni, de ugyanúgy szokásos az $x \mapsto y = f(x)$ jelölés, vagy röviden $y = f(x)$.

Fentieket figyelembevéve érdemes visszalapozni a valós számsorozatok definícióját D.4.1. definícióhoz, hiszen már itt is találkoztunk a függvényfogalommal.

Magát a függvényfogalmat nem definiáljuk, megjegyezzük azonban, hogy a függvénykapcsolat az értelmezési tartomány minden egyes eleméhez hozzárendeli az értékkészlet egy (és csak egy) elemét.

Igy pl. függvény az $y = f(x) = x^2$ hozzárendelés, itt $D_f = \mathbb{R}$ és

$R_f = [0; \infty)$; de nem tekinthető függvénynek az $y^2 + x^2 = 25$

összefüggéssel megadott $x \mapsto y$ hozzárendelés, mivel itt pl. az $x=3$ számhoz mind az $y=+4$, mind az $y=-4$ valós számokat hozzárendeltük.

D.5.1. Definíció (AZ ÖSSZETETT FÜGGVÉNY)

Legyenek f és g függvények olyanok, hogy $R_f \subset D_g$, ekkor értelmezhetjük $\forall x \in D_f$ esetén az $x \mapsto f(x) \mapsto g[f(x)]$ hozzárendelést, amelyet $g \circ f$ összetett függvénynek nevezünk.

D.5.2. Definíció (KÖLCSÖNÖSEN EGYÉRTELMŰ LEKÉPEZÉS)

Legyen $y = f(x)$ olyan függvény, amelyre az értelmezési tartományának tetszőleges $a \neq b$ elemei esetén $f(a) \neq f(b)$ teljesül. Ekkor az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete között kölcsönösen egyértelmű leképezést ad meg, és az f függvényt egy-egy értelmű függvénynek nevezzük.

D.5.3. Definíció (INVERZ FÜGGVÉNY)

Legyen az $y=f(x)$ egy-egy értelmű függvény. Azon g függvényt, amelynek értelmezési tartománya $D_g = R_f$ és értékkészlete $R_g = D_f$ és az $y=f(x) \in R_f$ számhoz a $g(y)=x \in D_f$ számot rendel $\forall y \in R_f$ esetén, az f függvény inverzének nevezzük, jelölése: $g=f^{-1}$.

Példa: $f(x)=2^x$; $D_f=R$; $R_f=(0; +\infty)$
 $f^{-1}(x)=\log_2 x$; $D_{f^{-1}}=R_f=(0; +\infty)$; $R_{f^{-1}}=D_f=R$
továbbá $\forall y=2^x \in D_{f^{-1}}$ esetén $\log_2 y = \log_2 2^x = x$ teljesül,
azaz $f^{-1}[f(x)]=x$ ill. $f[f^{-1}(y)]=y$

D.5.4. Definíció (MONOTON FÜGGVÉNY)

Legyenek $x_1, x_2 \in (a; b)$, melyekre $x_1 < x_2$ teljesül, egyébként tetszőlegesen.

Az $f(x)$ függvény az $(a; b)$ intervallumon

monoton növekvő, ha $f(x_1) \leq f(x_2)$
szigorúan monoton növekvő, ha $f(x_1) < f(x_2)$
monoton csökkenő, ha $f(x_1) \geq f(x_2)$
szigorúan monoton csökkenő, ha $f(x_1) > f(x_2)$

5.1. Határérték, folytonosság

D.5.5. Definíció (FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE)

Legyen adott f függvény, $x_0 \in \mathbb{R}^*$; legyen továbbá $\{x_n\}$ tetszőleges olyan sorozat, amelyre teljesülnek az alábbiak:

a.) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$ b.) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f$

Ha minden ilyen x_n sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}^*$ teljesül, A -t az f függvény x_0 -beli határértékének nevezzük.

Jelölésben: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

D.5.6. Definíció (VÉGES HELYEN VETT VÉGES HATÁRÉRTÉK)

Legyen adott az f függvény, valamint az $x_0 \in \mathbb{R}$ szám, amely D_f egy torlódási pontja.

Az f függvény x_0 -beli határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, azaz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ pontosan akkor, ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\epsilon)$ úgy, hogy

$$\text{ha } x \in D_f \text{ és } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ akkor } |f(x) - A| < \epsilon$$

Szavakkal kifejezve (kissé pontatlanul): az f függvény x_0 pontbeli határértéke az A szám pontosan akkor, ha amennyiben x az x_0 -hoz "elégé" közel van, akkor $f(x)$ az A -hoz tetszőlegesen közel van.

Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy a függvényhatárérték definícióját a D.5.6. definícióhoz hasonlóan egyenlőtlenségekkel adjuk meg (és nem sorozatokkal, mint a D.5.5. definícióban), összesen kilenc esetet kell megkülönböztetnünk, nevezetesen az alábbi táblázatban összefoglaltak szerint:

x	VS	VS	VS	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
A	VS	$+\infty$	$-\infty$	VS	$+\infty$	$-\infty$	VS	$+\infty$	$-\infty$

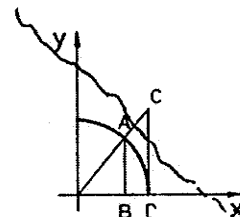
vs jelentése: x (vagy A) véges ($\in \mathbb{R}$)

Példa:

Mutassuk meg, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Az ábrából látható, hogy:

$$\overline{AB} = \sin x; \quad \widehat{AD} = x; \quad \overline{CD} = \operatorname{tg} x$$



9. ábra

Ha $x > 0$ az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \implies 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Mivel pedig } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Az $x < 0$ esetet lássa be gyakorló feladatként!

D.5.7. Definíció (BAL- ÉS JOBBOLDALI HATÁRÉRTÉK)

Legyen adott az f függvény, valamint $x_0 \in \mathbb{R}$.

Baloldali határérték:

Legyen x_n olyan sorozat, amelyre teljesül:

$$\forall x_n < x_0 ; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 ; \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f$$

Ha minden ilyen x_n sorozat esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_b$ teljesül,

A_b -t az f függvény baloldali határértékének nevezzük.

$$\text{Jelölésben: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A_b ; (A_b \in \mathbb{R}^*)$$

Jobboldali határérték:

Legyen x_n olyan sorozat, amelyre teljesül:

$$\forall x_n > x_0 ; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 ; \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f$$

Ha minden ilyen x_n sorozat esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_j$ teljesül,

A_j -t az f függvény jobboldali határértékének nevezzük.

$$\text{Jelölésben: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A_j ; (A_j \in \mathbb{R}^*)$$

T.5.1. Tétel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \\ \text{és} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \end{array} \right.$$

A tételt nem bizonyítjuk, mivel belátása a határérték valamint a jobb- és baloldali határérték definícióiból triviális.

T.5.2. Tétel

Legyen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}^*$)

Ekkor

1.) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = A + B$

2.) $\lim_{x \rightarrow a} \lambda \cdot g(x) = \lambda \cdot B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

következmény: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = A - B$

3.) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

4.) Ha $B \neq 0$ akkor $\lim_{x \rightarrow a} 1/g(x) = 1/B$

következmény: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A/B$

A tétel következik a sorozatoknál kimondott T.4.10. tételből.

Megjegyzés: A T.5.2. tétel néhány állítása érvényes $A, B = \pm\infty$ esetén is: gyakorlatilag azok, amelyekkel kaocsolatban logikusan gondolkozva kétség nem merül fel.

T.5.3. Tétel (ÖSSZETETT FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE)

Legyenek adottak f és g függvények, valamint $a, A \in \mathbb{R}^*$

Legyen továbbá $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, és létezzen a -nak olyan $U_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) \neq A$.

Legyen továbbá $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B \in \mathbb{R}^*$.

Ekkor $\lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = B$.

Bizonyítás:

Tekintsünk tetszőleges olyan x_n sorozatot, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, továbbá $x_n \neq a$ és $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D_f$ teljesülnek. Ezen x_n sorozatok által definiált $\forall y_n = f(x_n)$ sorozatra teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ és $y_n \neq A$, ha n elég nagy, azaz $x_n \in U_\delta(a)$.

Ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = B$.

D.5.8. Definíció (FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA PONTBAN)

Legyen adott az f függvény és $a \in D_f$, teljesüljön továbbá

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ekkor az $f(x)$ függvényt az a pontban folytonosnak nevezzük.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az f függvény a -beli folytonossága három feltétel teljesülését jelenti:

- 1.) f -nek a -ban van határértéke.
- 2.) f -nek a -ban van helyettesítési értéke.
- 3.) a -ban f határértéke és helyettesítési értéke egyenlő egymással.

D.5.9. Definíció (BAL- ÉS JOBBOLDALI FOLYTONOSSÁG)

Az f függvényt az $a \in D_f$ pontban balról folytonosnak nevezzük, ha $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$; jobbról folytonosnak

nevezzük, ha $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

D.5.10. Definíció (FOLYTONOSSÁG NYÍLT INTERVALLUMON)

Az f függvényt az $(a; b)$ nyílt intervallumon folytonosnak nevezzük, ha $\forall x \in (a; b)$ pontban f folytonos.

D.5.11. Definíció (FOLYTONOSSÁG ZÁRT INTERVALLUMON)

Az f függvényt az $[a;b]$ zárt intervallumon folytonosnak nevezzük, ha f folytonos az $(a;b)$ nyílt intervallumon, továbbá f az a pontban jobbról, a b pontban balról folytonos.

T.5.4. Tétel

Az f függvény az a pontban pontosan akkor folytonos, ha f az a -ban jobbról is, balról is folytonos.
A tétel bizonyítása gyakorló feladat.

Jelölés: A továbbiakban $\langle a;b \rangle$ jelölést fogunk alkalmazni, ha az említett $\langle a;b \rangle$ intervallum az $(a;b)$, $(a;b]$, $[a;b)$, illetve $[a;b]$ intervallumok bármelyike lehet.

T.5.5. Tétel

Legyenek f és g az $\langle a;b \rangle$ intervallumon folytonos függvények. Ekkor az $\langle a;b \rangle$ intervallumon:

- 1.) $f+g$ is folytonos függvény
- 2.) $\lambda \cdot g$ is folytonos függvény $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
következmény: $f-g$ is folytonos függvény
- 3.) $f \cdot g$ is folytonos függvény
- 4.) ha $x \in \langle a;b \rangle$ esetén $g(x) \neq 0$ akkor $1/g$ is folytonos függvény $\Rightarrow f/g$ is folytonos függvény

A tételt nem bizonyítjuk.

T.5.6. Tétel (ÖSSZETETT FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA)

Legyen f függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, valamint g függvény folytonos az $y_0 = f(x_0) \in D_g$ pontban.

Ekkor a $g \circ f$ összetett függvény is folytonos x_0 -ban.

A tételt nem bizonyítjuk.

T.5.7.Tétel (INVERZ FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA)

Legyen f függvény szigorúan monoton és folytonos
 $D_f = \langle a; b \rangle - n$.

Ekkor

- 1.) $R_f = \langle \alpha; \beta \rangle$ is intervallum.
- 2.) az f függvényhez létezik f^{-1} inverz függvény.
- 3.) az f^{-1} inverz függvény ugyanolyan értelemben szigorúan monoton az $\langle \alpha; \beta \rangle$ intervallumon, mint ahogyan az f függvény az $\langle a; b \rangle$ intervallumon.
- 4.) az f^{-1} inverz függvény folytonos az $\langle \alpha; \beta \rangle$ intervallumon.

A tételt nem bizonyítjuk.

5.2. Zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

T.5.8.Tétel (BOLZANO TÉTEL)

Legyen f az $[a; b]$ zárt intervallumon folytonos függvény, amelyre $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$.

Ekkor $\exists \xi \in (a; b)$ úgy, hogy $f(\xi) = 0$.

Bizonyítás:

Mivel f az a pontban jobbról, a b pontban pedig balról folytonos, $\exists [a_1; b_1]$ zárt intervallum, amelyre $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$, valamint $f(a_1) < 0$ és $f(b_1) > 0$.

Tekintsük azon szabályos racionális sorozatpárt, amelyet az $[a_1; b_1]$ intervallum lépésenkénti felezésével kapunk az alábbiak szerint, feltéve, hogy $f(m_k) \neq 0$ egyetlen $k \in \mathbb{N}^+$ esetén sem:

$$m_k = (a_k + b_k) / 2$$

továbbá, ha $f(m_k) > 0$ akkor $b_{k+1} = m_k$ és $a_{k+1} = a_k$;

ha $f(m_k) < 0$ akkor $b_{k+1} = b_k$ és $a_{k+1} = m_k$

Ezen szabályos racionális sorozatpár egyetlen $\xi \in \mathbb{R}$ számot határoz meg, amelyre $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \xi$.

Az a_k sorozat által meghatározott $f(a_k)$ sorozatra: $f(a_k) < 0$,

A b_k sorozat által meghatározott $f(b_k)$ sorozatra: $f(b_k) > 0$,
melyből következően $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) \leq 0$ és $\lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) \geq 0$.

Tekintve, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) = f(\xi) \implies f(\xi) = 0$.

Ha $\exists k \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $f(m_k) = 0$, akkor $\xi = m_k$.

Következmény:

Zárt intervallumon folytonos függvény "nem hagy ki értéket", azaz $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz.

T.5.9.Tétel

Legyen f az $[a; b]$ zárt intervallumon folytonos függvény. Ekkor f az $[a; b]$ intervallumon korlátos.

Bizonyítás: (indirekt)

Tegyük fel, hogy f az $[a; b]$ -n pl. felülről nem korlátos, azaz $\forall n \in \mathbb{N}$ számhoz $\exists x_n \in [a; b]$ úgy, hogy $f(x_n) > n$.

Mivel az x_n sorozat korlátos, a T.2.9. (Bolzano-Weierstrass) tétel szerint van konvergens részsorozata.

Legyen ezen x_{n_k} konvergens sorozat határértéke: $\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a; b]$

Ekkor $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$, ez pedig ellentmondás, mivel $f(x_{n_k}) > n_k$ -ből következően $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = +\infty$.

(Hasonlóan láthatjuk be azt is, hogy f az $[a; b]$ -n alulról korlátos)

T.5.10.Tétel (WEIERSTRASS TÉTEL)

Legyen f az $[a;b]$ zárt intervallumon folytonos függvény.

Ekkor $\exists x_1 \in [a;b]$ melyre $f(x_1) = \sup_{x \in [a;b]} f(x)$
és $\exists x_2 \in [a;b]$ melyre $f(x_2) = \inf_{x \in [a;b]} f(x)$

Bizonyítás:

A bizonyítást csupán a supremum esetére mutatjuk be, mivel az infimum bizonyítása analóg módon vihető végig.

Jelölés: $M = \sup_{x \in [a;b]} f(x)$ ($M \in \mathbb{R}$ létezik T.2.3. szerint)

Mivel M supremum, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ számhoz $\exists x_n$ úgy, hogy $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$

Mivel az x_n sorozat korlátos, $\exists$ konvergens x_{n_k} részsorozata,

amelyre $\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a;b]$

Tekintve, hogy $f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}$

adódik: $f(c) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq \lim_{n_k \rightarrow \infty} (M - \frac{1}{n_k}) = M$

Mivel pedig M supremum $\implies f(c) \leq M \implies f(c) = M$.

Megjegyzés: Ha az $M = \sup_{x \in [a;b]} f(x)$ függvényérték (pl. mint fent), akkor az f függvény $[a;b]$ intervallumon felvett maximumának nevezzük. Hasonlóan, ha az $m = \inf_{x \in [a;b]} f(x)$ érték függvényérték, akkor az f függvény $[a;b]$ -n felvett minimumának nevezzük.

5.3. Differenciálhatóság

D.5.12.Definíció (KÜLÖNBSÉGI HÁNYADOS)

Legyen f az $\langle a;b \rangle$ intervallumon értelmezett függvény, legyen továbbá $x_1, x_2 \in \langle a;b \rangle$ és $x_1 \neq x_2$.

Az $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ hányadost az f függvény x_1 és x_2

pontokhoz tartozó különbségi hányadosának nevezzük.

A különbségi hányados másik elnevezése differenciahányados.

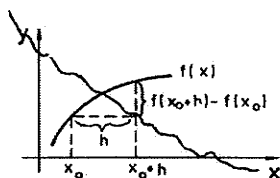
D.5.13. Definíció (DIFFERENCIÁLHÁNYADOS)

Legyen f az $\langle a; b \rangle$ intervallumon értelmezett függvény, legyen továbbá $x_0, x_0+h \in \langle a; b \rangle$ és $h \neq 0$

A $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ határértéket, amennyiben létezik és véges, az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosának, vagy deriváltjának nevezzük.

$$\text{Jelölése: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0}$$

Megjegyzés:



10. ábra

Mint ahogyan az a rajzon látható, geometriailag a differenciálhányados az f függvény $(x_0; f(x_0))$ illetve $(x_0+h; f(x_0+h))$ koordinátákkal

megadott pontjain áthaladó szelő iránytangense. Azon egyenest, amely áthalad az $(x_0; f(x_0))$ ponton, és iránytangense $f'(x_0)$, az f függvénygörbe $(x_0; f(x_0))$ koordinátájú pontjához húzott érintőjének nevezzük.

Ezen érintő egyenes egyenlete: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Példa:

1.) Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény deriváltját:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[\left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} \right]^{1/x} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} \right] = \frac{1}{x} \cdot \ln e^x = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2.) Határozzuk meg az $f(x)=\sin x$ függvény deriváltját:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h - \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right] = \cos x \\ \text{mivel } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} &= 1 \text{ és } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \end{aligned}$$

D.5.14. Definíció (DIFFERENCIÁLHATÓSÁG)

Legyen f az $(a;b)$ intervallumon értelmezett függvény. Az f függvényt az $x \in (a;b)$ pontban differenciálhatónak nevezzük, ha az f függvénynek az x pontban létezik $f'(x)$ differenciálhányadosa.

Az f függvényt az $(a;b)$ nyílt intervallumon differenciálhatónak nevezzük, ha $\forall x \in (a;b)$ pontban differenciálható.

D.5.15. Definíció (JOBB- ÉS BALOLDALI DERIVÁLHATÓSÁG)

Legyen f az $(a;b)$ intervallumon értelmezett függvény, legyen továbbá $x, x+h \in (a;b)$ és $h>0$.

Az f függvényt az x pontban jobbról deriválhatónak nevezzük, ha létezik és véges a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_+(x) \text{ határérték.}$$

Az f függvényt az x pontban balról deriválhatónak nevezzük, ha létezik és véges a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'_-(x) \text{ határérték.}$$

Az $f'_+(x)$ ill. $f'_-(x)$ értékeket az f függvény x pontbeli jobb- ill. baloldali deriváltjának nevezzük.

D.5.16. Definíció

Legyen f az $[a;b]$ intervallumon értelmezett függvény. Az f függvényt az $[a;b]$ zárt intervallumon deriválhatónak nevezzük, ha f differenciálható az $(a;b)$ nyílt intervallumon továbbá f jobbról deriválható az a pontban és balról deriválható a b pontban.

T.5.11. Tétel

Az f függvény az x pontban pontosan akkor deriválható, ha f az x -ben jobbról is, balról is deriválható, valamint

$f'_+(x) = f'_-(x)$; azaz x pontban f jobb- és baloldali deriváltjai egyenlőek.

A tétel bizonyítása gyakorló feladat.

T.5.12. Tétel (DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNY FOLYTONOS)

Legyen f függvény az a pontban differenciálható. Ekkor f az a pontban folytonos.

Bizonyítás:

Mivel f az a -ban deriválható, $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A \in \mathbb{R}$

Ekkor $\exists U_\delta(a)$ úgy, hogy $\forall x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right| < |A|+1 \implies 0 \leq |f(x)-f(a)| < (|A|+1) \cdot |x-a|$$

Mivel pedig $\lim_{x \rightarrow a} |x-a| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} |f(x)-f(a)| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

T.5.13. Tétel (DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK)

Legyenek f és g az a pontban differenciálható függvények. Ekkor:

1.) $f+g$ is deriválható a -ban, és $[f(x)+g(x)]'_{x=a} = f'(a)+g'(a)$

2.) $\lambda \cdot g$ is deriválható a -ban $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén, és
 $[\lambda \cdot g(x)]'_{x=a} = \lambda \cdot g'(a)$

következmény: $[f(x)-g(x)]'_{x=a} = f'(a)-g'(a)$

3.) $f \cdot g$ is deriválható a -ban, és

$$[f(x) \cdot g(x)]'_{x=a} = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$$

4.) Ha $g(a) \neq 0$ akkor $1/g$ is deriválható a -ban, és

$$\left[\frac{1}{g(x)} \right]'_{x=a} = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2} \implies \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'_{x=a} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{[g(a)]^2}$$

Bizonyítás:

Csak a 3. pontban felírt, szorzatra vonatkozó deriválási szabályt bizonyítjuk, a többi szabály bizonyítása gyakorló feladat.

$$\begin{aligned}
 [f(x) \cdot g(x)]'_{x=a} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot g(a+h) + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \cdot f(a) \right\} = \\
 &= f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)
 \end{aligned}$$

Példa a 4. pontban leírt, hányados deriválási szabályára:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

T.5.14. Tétel (LÁNCSZABÁLY)

Ha a g függvény differenciálható az x_0 pontban, és az f függvény differenciálható az $y_0 = g(x_0)$ pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény differenciálható az x_0 pontban, és

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$

Bizonyítás:

a.) Tegyük fel, hogy $g'(x_0) \neq 0$, ekkor $\exists U(x_0)$ úgy, hogy ha $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ akkor $g(x) - g(x_0) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Tehát} \quad (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0) \cdot g'(x_0)
 \end{aligned}$$

b.) Ha $g'(x_0) = 0$, akkor azon $x_n \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ pontokra, amelyekre $g(x_n) = g(x_0)$, az $\frac{f[g(x_n)] - f[g(x_0)]}{x_n - x_0}$ különbségi hányados értéke zérus.

Azon $x_k \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ pontokra pedig, amelyekre $g(x_k) \neq g(x_0)$ alkalmazhatók az a.) pont lépései, melyekből következően

$$\lim_{x_k \rightarrow x_0} \frac{f[g(x_k)] - f[g(x_0)]}{g(x_k) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_k) - g(x_0)}{x_k - x_0} = 0$$

$$\text{mivel } \lim_{x_k \rightarrow x_0} \frac{g(x_k) - g(x_0)}{x_k - x_0} = 0 \text{ és } \lim_{y_k \rightarrow y_0} \frac{f(y_k) - f(y_0)}{y_k - y_0} = \text{véges}$$

Példa:

$$\begin{aligned} 1.) \quad (\cos x)' &= [\sin(x+\pi/2)]' = \cos(x+\pi/2) \cdot (x+\pi/2)' = \\ &= \cos(x+\pi/2) \cdot 1 = -\sin x \end{aligned}$$

$$2.) \quad (2^x)' = (e^{x \cdot \ln 2})' = e^{x \cdot \ln 2} \cdot (x \cdot \ln 2)' = 2^x \cdot \ln 2$$

T.5.15. Tétel (INVERZ FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA)

Legyen az $y=f(x)$ az $[a;b]$ intervallumon értelmezett szigorúan monoton, folytonos függvény. (Ekkor a T.5.7. tétel értelmében $\exists f^{-1}$ inverz függvény.)

Ha az $x_0 \in (a;b)$ pontban $\exists f'$ és $f'(x_0) \neq 0$,

akkor az $y_0=f(x_0)$ pontban $\exists (f^{-1})'$ és

$$(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$$

Bizonyítás:

Mivel az f^{-1} függvény létezik, $\forall x_0+h \in (a;b)$ ponthoz az $y_0+k = f(x_0+h)$ egy-egy értelműen meghatározott, és $x_0+h = f^{-1}(y_0+k)$. Ezzel:

$$\frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{y_0+k - y_0} = \frac{x_0+h - x_0}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

Mivel pedig f és f^{-1} folytonos függvények és f differenciálható, adódik:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Megjegyzés:

Az inverz függvény deriváltjának meghatározásához gyakran a láncszabályt használják az alábbiak szerint:

Jelölje az f függvény inverzét $u=f^{-1}(x)$, ekkor :

$$f(u) = f[f^{-1}(x)] = x$$

Alkalmazva a láncszabályt, adódik:

$$f'(u) \cdot u' = 1 \implies u' = 1/f'(u)$$

Példa:

$$y = \arctg x \implies \tg y = x \implies 1/\cos^2 y \cdot y' = 1$$

$$\text{tehát } y' = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

5.4. Feladatok az 5. fejezet anyagához

F.5.1.^(*) Az $f(x)=e^x/2$ és $g(x)=e^{-x}/2$ függvények rajzát felhasználva rajzolja le az alábbi, hiperbolikus függvényeknek nevezett függvények görbéit:

$$\text{a.) } \operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2 \quad ; \quad \text{b.) } \operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$$

$$\text{c.) } \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ; \quad \text{d.) } \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

F.5.2. Igazolja az alábbi azonosságokat:

$$\text{a.) } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad ; \quad \text{b.) } \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$$

$$\text{c.) } 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$$

F.5.3.^(*) Határozza meg a hiperbolikus függvények deriváltját!

F.5.4. A hiperbolikus függvények görbéjét használva rajzolja meg az inverz hiperbolikus függvények görbéjét! Állapítsa meg az inverz hiperbolikus függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

F.5.5.^(*) Fejezze ki az inverz hiperbolikus függvényeket a logaritmusfüggvény segítségével!

F.5.6. Képezze az inverz hiperbolikus függvények deriváltját:

- a.) az inverz függvény deriválási szabálya szerint
- b.) láncszabállyal, az F.5.5. feladat eredményeiből.

F.5.7. Számítsa ki az alábbi függvényhatárértékeket:

$$a.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{1-x} ; b.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{3x-1} ; c.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5x+1}{x^3-1}$$

$$d.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} ; e.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} ; f.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$$

$$g.) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x^2+x} - x \right] ; h.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$$

$$i.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctg \frac{x+1}{x-1} ; j.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg \frac{x+1}{x-1} ; k.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg \frac{x+1}{x-1}$$

$$l.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sin^2 x}{1-x^2} ; m.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{3x} ; n.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$$

$$o.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{5x-1} ; p.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{2x} ; q.)^{(*)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x^2}$$

F.5.8. Az alábbi függvényeket vizsgálja a folytonosság szempontjából:

$$a.) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-3)}{x-3} & \text{ha } x \neq 3 \\ 5 & \text{ha } x = 3 \end{cases} ; b.) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \leq 0 \\ 3+x & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$c.)^{(*)} f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x^2-4} & \text{ha } x \neq \pm 2 \\ 1 & \text{ha } x = 2 \\ 0 & \text{ha } x = -2 \end{cases} ; d.)^{(*)} f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 2/3 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$e.) f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} ; f.) f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$g.)^{(*)} f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} ; h.)^{(*)} f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ b & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

F.5.9. Az alábbi deriváltakat képezze a differenciálhányados definíciója alapján:

a.) $(x^2)'$; b.) $(\sqrt{x})'$; c.) $(\sqrt[3]{x})'$; d.) $(\cos x)'$

F.5.10. Az alábbi függvényeket vizsgálja meg a folytonosság és a differenciálhatóság szempontjából:

a.) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{ha } x \leq 0 \\ 3x-2 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus 0 \end{cases}$; b.) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

c.) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

F.5.11.^(*) Az $y=f(x)$ függvényről tudjuk, hogy kielégíti az $\sin y + x \cdot y^2 + 2x \cdot \cos y + x^3 = 3$ függvényegyenletet.

Írja fel a függvény érintőjének az egyenletét a $P_0 = (x_0; y_0) = (1; 0)$ pontban! Számítsa ki közelítőleg y értékét az $x_1 = 0,9$ pontban! Használja a közelítő számításhoz az érintő egyenletét!

F.5.12. Igazolja, hogy a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ($x_0, A \in \mathbb{R}$) függvényhatárértékre adott D.5.5. ill. D.5.6. definíciók ekvivalensek!

**6.A differenciálhányados alkalmazása a függvények menetének
vizsgálatára**

6.1. Függvények lokális szélsőértéke. Középértéktételek.

Függvények monotonitási intervallumai

D.6.1. Definíció Az $x_0 \in D_f$ pont az $f(x)$ függvény lokális maximumhelye pontosan akkor, ha $\exists U(x_0)$ úgy, hogy $\forall x \in U(x_0)$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül.
Ha $\forall x \neq x_0$ esetén $f(x) < f(x_0)$ is teljesül, a lokális maximumhelyet szigorú lokális maximumhelynek nevezzük.

D.6.2. Definíció Az $x_0 \in D_f$ pont az $f(x)$ függvény lokális minimumhelye pontosan akkor, ha $\exists U(x_0)$ úgy, hogy $\forall x \in U(x_0)$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül.
Ha $\forall x \neq x_0$ esetén $f(x) > f(x_0)$ is teljesül, a lokális minimumhelyet szigorú lokális minimumhelynek nevezzük.

D.6.3. Definíció Az $x_0 \in D_f$ pontot az $f(x)$ függvény lokális szélsőértékhelyének, vagy másnéven lokális extrémumpontjának nevezzük pontosan akkor, ha x_0 az f függvénynek vagy lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye. Az $f(x_0)$ függvényérték neve: lokális szélsőérték, másnéven lokális extrémum.

T.6.1. Tétel

Ha az $x_0 \in D_f$ pont az $f(x)$ függvény lokális extrémumhelye és $\exists f'(x_0)$ akkor $f'(x_0) = 0$

(A függvény x_0 -hoz húzott érintője vízszintes)

Bizonyítás:

a.) x_0 lokális maximumhely: $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$ ekkor

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{ha } h < 0 \quad \text{és}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{ha } h > 0$$

$$\text{azaz } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$\text{Következésképpen } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$$

b./ x_0 lokális minimumhely: $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$

$$\text{ekkor } \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{ha } h < 0$$

$$\text{és } \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{ha } h > 0$$

$$\text{azaz } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Következésképpen

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$$

A tétel nem megfordítható, tehát ha $f'(x_0) = 0$ ebből nem következik, hogy x_0 lokális szélsőérték helye

pl. az $f(x) = x^3$ függvény esetén

$f'(x) = 3x^2 = 0$ ha $x = 0$ és e pontban a függvénynek nincs lokális szélsőérték helye

A most következő T.6.2, T.6.3. és T.6.4. tételek, Rolle, Lagrange és Cauchy közéértéktételei ú.n. egzisztenciátételek. Ez azt jelenti, hogy a tételek állításában szereplő pontok létezését - egzisztenciáját - garantálják.

T.6.2. Tétel (ROLLE TÉTELE)

Legyen f az $[a;b]$ zárt intervallumon folytonos, és az $(a;b)$ nyílt intervallumon deriválható függvény.

Legyen továbbá $f(a) = f(b)$.

Ekkor $\exists x_0 \in (a;b)$ úgy, hogy $f'(x_0) = 0$

Bizonyítás:

Mivel f az $[a;b]$ zárt intervallumon folytonos, a T.5.10. Weierstraß tétel értelmében felveszi $[a;b]$ -n supremumát és infimumát.

Ha mindkettőt az intervallum szélső pontjain veszi fel, akkor $\forall x \in [a;b]$ esetén $f(x) = f(a) = f(b) \Rightarrow f'(x) = 0$.

Ha a supremum és infimum közül legalább az egyiket belső pontban veszi fel, akkor ezen $x_0 \in (a;b)$ belső pont egyben lokális extrémhely, tehát T.6.1. értelmében $f'(x_0) = 0$.

T.6.3. Tétel (LAGRANGE TÉTELE)

Legyen f az $[a;b]$ zárt intervallumon folytonos és az $(a;b)$ nyílt intervallumon deriválható függvény.

Ekkor $\exists x_0 \in (a;b)$ úgy, hogy

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bizonyítás :

Tekintsük a $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x - a)$ függvényt.

Ezen g függvény kielégíti a Rolle tétel feltételeit,

$$\text{mivel } g(a) = f(a) \text{ és } g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (b-a) =$$

$$= f(a) = g(a)$$

tehát $\exists x_0 \in (a;b)$ úgy, hogy $g'(x_0) = 0$.

$$\text{Ebből mivel } g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\text{adódik, hogy } f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

T.6.4. Tétel (CAUCHY TÉTELE)

Legyenek adottak az $[a;b]$ intervallumon f és g folytonos függvények, melyek az $(a;b)$ intervallumon deriválhatók, továbbá $g'(x) \neq 0$ ha $x \in (a;b)$

Ekkor $\exists x_0 \in (a;b)$ úgy, hogy

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Bizonyítás:

Legyen $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$, ahol λ konstans értékét úgy választjuk, hogy $\varphi(a) = \varphi(b)$ teljesüljön:

$$\varphi(a) = f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) = \varphi(b)$$

$$\text{ekkor } \lambda = - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

és a φ függvény teljesíti a Rolle tétel feltételeit.

λ ilyen megválasztása mindig lehetséges, mivel $g'(x) \neq 0$ feltételből adódóan $g(a) \neq g(b) \Rightarrow g(b) - g(a) \neq 0$

Alkalmazzuk $\varphi(x)$ függvényre a Rolle tételt.

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0$$

melyből következik

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

T.6.5. Tétel

Legyen f függvény az $[a; b]$ intervallumon deriválható,
és legyen $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$ esetén.

Ekkor $f(x) = \text{konstans}$

Bizonyítás: legyen $x \in (a; b)$ egyébként tetszőleges

A Lagrange tétel szerint $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0)$ ahol $x_0 \in (a; x)$

mivel pedig $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$

A következő tétel a középértéktételeknek egy gyakorlati alkalmazását teszi lehetővé, nevezetesen bizonyos "0/0" ill. " $\frac{\infty}{\infty}$ " és ebből következően a " $0 \cdot \infty$ "; " 0^0 "; " 1^∞ " típusú határértékek kiszámítását.

T.6.6. Tétel (L'HOSPITAL SZABÁLY)

Feltételek:

$$(1) \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$\text{vagy } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$$

(2) f és g differenciálható függvények az a egy redukált (a -t nem tartalmazó) környezetében, továbbá az a ezen redukált környezetében $g'(x) \neq 0$

$$(3) \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{Ekkor } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Bizonyítás: A tételt csak a " $\frac{0}{0}$ " alakra bizonyítjuk, véges "a" esetére.

Ekkor f és g folytonosan kiterjeszthetők a -ra

$f(a) = g(a) = 0$ értékadással, s így alkalmazható a Cauchy középértéktétel:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$$

Cauchy

Megjegyzés:

1.) A tétel feltételei az $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték létezéséhez elégséges feltételt adnak, de nem szükséges feltételt. Az alábbiakban példát adunk arra az esetre, amikor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték nem létezik, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ azonban igen.

pl. $f(x) = x \cdot (2 + \cos x)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$g(x) = 1 + x^2$; $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2 + \cos x)}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overset{\text{korl}}{2 + \cos x}}{\underset{\infty}{\frac{1}{x} + x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos x - x \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2 + \cos x}{2x} - \frac{\sin x}{2} \right]$$

mely limes nem létezik

2.) A tétel akkor is alkalmazható, ha egyoldali (bal vagy jobboldali) határérték kiszámítása a cél, a függvények egyikének vagy mindkettőjük értelmezési tartományának határpontján s a feltételek így csak "egyoldali" környezetben értelmezhetők.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

A függvények monotonitásának definícióját már az előző, 5. fejezetben megadtuk (D.5.4. Definíció) Most azt fogjuk vizsgálni, milyen kapcsolat van a függvény deriváltja és monotonitása között.

T.6.7. Tétel

Legyen f az $[a; b]$ intervallumon differenciálható

a.) teljesüljön $\forall x \in [a; b]$ esetén az $f'(x) > 0$ egyenlőtlenség.

Ekkor f az $[a; b]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.

b.) teljesüljön $\forall x \in [a; b]$ esetén az $f'(x) < 0$ egyenlőtlenség.

Ekkor f az $[a; b]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

Bizonyítás:

Legyen $x_1 < x_2$, egyébként $x_1, x_2 \in [a; b]$ tetszőlegesen választott pontok.

a.) Lagrange tételét alkalmazva adódik

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) (x_2 - x_1) \quad \text{ahol } \xi \in (x_1; x_2)$$

mivel pedig $x_2 - x_1 > 0$ és a tételünk feltételei szerint $f'(\xi) > 0$ adódik: $f(x_2) > f(x_1)$

b.) Lagrange tételét alkalmazva adódik:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) (x_2 - x_1) \quad \text{ahol } \xi \in (x_1; x_2)$$

mivel pedig $x_2 - x_1 > 0$ és a tételünk b feltétele szerint $f'(\xi) < 0$ adódik $f(x_2) < f(x_1)$

Megjegyzés: A tétel megfordítása nem igaz. Abból, hogy egy differenciálható függvény az $[a; b]$ intervallumon pl. szigorúan monoton növekvő, nem következik, hogy deriváltja pozitív.

pl. $f(x) = x^3$ szigorúan monoton növekvő teljes értelmezési tartományán, de $f'(0) = 0$.

A következő tételben differenciálható függvény szigorú monotonitásának szükséges és elégséges feltételét adjuk meg.

T.6.8. Tétel

Legyen f az $[a; b]$ intervallumon differenciálható függvény.

f szigorúan monoton növekvő $[a; b]$ -n pontosan akkor, ha

$\forall x \in [a; b]$ esetén $f'(x) \geq 0$ és nincs olyan

$\langle \alpha; \beta \rangle \subset [a; b]$ részintervallum, ahol $\forall x \in \langle \alpha; \beta \rangle$ esetén $f'(x) \equiv 0$

Hasonlóképpen adhatjuk meg a szigorúan monoton csökkenés szükséges és elégséges feltételét.

A tételt nem bizonyítjuk.

6.2. Magasabb rendű deriváltak. Taylor tétele

Az előző fejezet D.5.13. definíciójában megadtuk az $\langle a; b \rangle$ intervallumon értelmezett f függvény $x_0 \in \langle a; b \rangle$ pontbeli deriváltjának értelmezését. Néhány példában láttuk, hogy a deriválással az f függvényhez egy másik függvényt rendelünk hozzá, amelyet az f függvény derivált függvényének, vagy röviden deriváltjának nevezünk.

Pl. az $f(x) = x^4 + 5x^2 + 6x + 3$ függvény
deriváltja: $f'(x) = 4x^3 + 10x + 6$

Ezen $f'(x)$ függvény szintén deriválható, így megadhatjuk f' deriváltját: $(f')'(x) = 12x^2 + 10$

Az $(f')'(x)$ jelölése $f''(x)$ és az f függvény második deriváltjának nevezzük. Ezen eljárást folytatva megadhatjuk a harmadik, negyedik stb. deriváltakat is.

$$f'''(x) = 24x \quad ; \quad f^{(IV)}(x) = 24; \quad f^{(V)}(x) = 0$$

Az f függvény f' deriváltja esetén szokás az elsőrendű derivált elnevezést használni.

A korábbiakban, az érintőegyenes értelmezésekor példát láttunk arra, hogyan tudjuk a deriválható f függvényt elsőfokú polinommal - az érintőegyenessel - közelíteni úgy, hogy egy x_0 pontban a közelítendő f függvény és a közelítő polinom helyettesítési értéke és első deriváltjának értéke megegyezzen, azaz f függvényt a közelítő polinom az elsőrendű deriváltig, másképpen mondva első rendben közelítse.

A továbbiakban megmutatjuk, hogyan lehet egy n -szer deriválható függvényhez n -edrendben közelítő, n -ed fokú polinomot találni.

Legyen a pont, amelyben közelíteni kívánjuk az f függvényt x_0 , az n -ed fokú polinom pedig

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Határozzuk meg $\{a_k\}_{k=0}^n$ együtthatókat az n -edrendben való közelítés feltételeiből:

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$k = 0 \quad p_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$k = 1 \quad p_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$

$$k = 2 \quad p_n''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$k = 3 \quad p_n'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = f'''(x_0) \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

.

.

$$k = n \quad p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n = f^{(n)}(x_0) \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

D.6.4. Definíció (A TAYLOR POLINOM)

Legyen f függvény az x_0 pont egy $U(x_0)$ környezetében n -szer deriválható. Ezen $U(x_0)$ környezeten értelmezett

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

legfeljebb n -edfokú polinomot az f függvény x_0 pont körüli n -edfokú Taylor polinomjának nevezzük.

Jelölése: $T_{n,f,x_0}(x)$ röviden $T_n(x)$.

Amennyiben $x_0=0$, a Taylor polinom elnevezése Mac-Laurin polinom.

T.6.9. Tétel (TAYLOR TÉTELE)

Legyen f függvény az x_0 pont egy $U(x_0)$ környezetében $(n+1)$ -szer deriválható. Ekkor $\forall x \in U(x_0)$ esetén

$$f(x) = T_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x)$$

ahol

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{és } \xi \text{ az } x \text{ és } x_0 \text{ pontok között van}$$

A $R_{n,f,x_0}(x)$ függvény elnevezése:

a $T_{n,f,x_0}(x)$ Taylor polinom Lagrange féle maradéktagja.

A tételt nem bizonyítjuk.

T.6.10. Tétel (A LEGJOBB HELYI MEGKÖZELÍTÉS TÉTELE)

Legyen f az x_0 pont egy $U(x_0)$ környezetében n -szer deriválható, és legyen $q_n(x)$ tetszőleges, legfeljebb

n -edfokú polinom, melyre $q_n(x) \neq T_{n,f,x_0}(x)$

Ekkor $\exists V(x_0) \subset U(x_0)$ környezete x_0 pontnak

Úgy, hogy ha $x \in V(x_0)$

$$\text{akkor } |f(x) - T_{n,f,x_0}(x)| \leq |f(x) - q_n(x)|$$

A tételt nem bizonyítjuk.

T.6.11. Tétel

Legyen az f függvény az x_0 pont $U(x_0)$ környezetében n -szer folytonosan deriválható ($n \geq 2$), valamint

$$\text{legyen } f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$\text{és } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Ekkor

(1) Ha n páratlan, akkor x_0 -ban f -nek nincs lokális extrémuma.

(2) Ha n páros, akkor x_0 -ban f -nek lokális extrémuma van, és pedig ha $f^{(n)}(x_0) > 0$ lokális minimuma,

ha $f^{(n)}(x_0) < 0$ lokális maximuma.

Bizonyítás:

Mivel $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, az f x_0 körüli $(n-1)$ -edfokú Taylor polinómja $T_{(n-1)}(x) = f(x_0)$

és ennek maradéktagja : $R_{(n-1)}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n$

tehát $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n$; következésképpen

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n$$

Mivel $f^{(n)} \in U(x_0)$ -ban folytonos, ha x az x_0 -hoz elegendően közel van $f^{(n)}(\xi)$ előjele megegyezik $f^{(n)}(x_0)$ előjelével.

(1) Ha tehát n páratlan, $(x-x_0)^n$ előjelet vált x_0 pontban, ezért $f(x) - f(x_0)$ is előjelet vált x_0 -ban, ezért f -nek x_0 -hoz tetszőleges közel lesznek $f(x_0)$ -nál kisebb és nagyobb függvényértékei is.

(2) Ha n páros, $(x-x_0)^n \geq 0$ tehát $f(x) - f(x_0)$ az x_0 pontban nem vált előjelet, $f^{(n)}(\xi)$ előjele (mely $f^{(n)}(x_0)$ előjelével egyezik) határozza meg az $f(x) - f(x_0)$ különbség előjelét. Ha tehát $f^{(n)}(x_0) > 0$ adódik $f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow x_0$ minimumhely.

Ha pedig $f^{(n)}(x_0) < 0$ adódik

$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow x_0$ maximumhely.

6.3. Függvénygörbék alakja; konvexitás, konkávitás

Csak differenciálható függvények esetén foglalkozunk a függvénygörbe alakjának vizsgálatával.

D.6.5. Definíció

Legyen f az I intervallumon differenciálható függvény f -et az $[a;b] \subset I$ szakaszon alulról konvexnek nevezzük, ha $\forall x_0 \in [a;b]$ esetén f -nek x_0 ponthoz tartozó érintője a függvénygörbe alatt halad.

Tehát tetszőleges $x_0, x_1 \in [a;b]$ és $x_0 \neq x_1$ esetén $f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ teljesül.

D.6.6. Definíció

Legyen f az I intervallumon differenciálható függvény. Az $[a;b] \subset I$ szakaszon f -et alulról konkávnak nevezzük, ha $\forall x_0 \in [a;b]$ esetén f -nek az x_0 ponthoz tartozó érintője a függvénygörbe fölött halad.

Tehát tetszőleges $x_0, x_1 \in [a;b]$ és $x_0 \neq x_1$ esetén $f(x_1) < f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ teljesül.

T.6.12. Tétel

- (1) Az f differenciálható függvény az $[a;b]$ szakaszon pontosan akkor alulról konvex, ha f' az $[a;b]$ szakaszon szigorúan monoton nő.
- (2) Az f differenciálható függvény az $[a;b]$ szakaszon pontosan akkor alulról konkáv, ha f' az $[a;b]$ szakaszon szigorúan monoton csökken.

Bizonyítás: Csak a (2) esetet bizonyítjuk, (1) bizonyítását az olvasóra bizzuk.

a.) Tegyük fel, hogy f az $[a;b]$ -n alulról konkáv, ekkor
 $\forall x_1 \in [a;b]$ és $x_2 \in [a;b]$ esetén teljesülnek az
 alábbiak: $f(x_1) < f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$

$$\text{ill. } f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\text{adódik: } f(x_1) + f(x_2) < f(x_2) + f(x_1) + (x_1 - x_2)[f'(x_2) - f'(x_1)]$$

$$\text{azaz } 0 < (x_1 - x_2)[f'(x_2) - f'(x_1)]$$

$$\text{ebből, ha } x_1 > x_2 \Rightarrow 0 < f'(x_2) - f'(x_1) \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

$$\text{ill., ha } x_1 < x_2 \Rightarrow 0 > f'(x_2) - f'(x_1) \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

azaz f' szig. monoton csökken.

b.) Tegyük fel, hogy f' az $[a;b]$ -n szigorúan monoton
 csökken.

akkor $\forall x_1 \in [a;b]$ és $x_2 \in [a;b]$ esetén teljesül

$$\text{ha } x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2).$$

A Lagrange középértéktétel szerint

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) \text{ ahol } x_1 < \xi < x_2$$

(tehát $f'(\xi) < f'(x_1)$)

$$\text{mivel } f'(\xi) < f'(x_1)$$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

azaz f alulról konkáv

Következmény

Ha $f(x)$ kétszer differenciálható $[a;b]$ -n és az $[a;b]$
 intervallumnak nincs olyan részintervalluma, ahol $f''(x) \equiv 0$
 teljesülnek az alábbiak (a T.6.8. tételt alkalmazva f' -re)

1. f pontosan akkor alulról konvex $[a;b]$ -n, ha

$$\forall x \in [a;b] \text{ esetén } f''(x) \geq 0$$

2. f pontosan akkor alulról konkáv $[a;b]$ -n, ha

$$\forall x \in [a;b] \text{ esetén } f''(x) \leq 0$$

Csak a 2. esetet bizonyítjuk:

2a.) tfh. $f''(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} < 0$ ha h elég kicsi

Legyen $h > 0 \Rightarrow x + h > x$

$\Rightarrow f'(x+h) < f'(x)$

legyen $h < 0 \Rightarrow x + h < x$

$\Rightarrow f'(x+h) > f'(x)$

tehát
 $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow f'(x+h) < f'(x) \\ \Rightarrow f'(x+h) > f'(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} f' \text{ szig. mon. csökk.} \\ \text{így } f \text{ alulról konkáv} \end{array}$

2b. tegyük fel, hogy f alulról konkáv:

akkor T.6.12. Tétel szerint f' az $[a;b]$ -n szig. mon. csökken:

$h > 0$ esetén $f'(x+h) < f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} < 0$

$h < 0$ esetén $f'(x+h) > f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} < 0$

tehát $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \leq 0$

D.6.7. Definíció

az $x_0 \in D_f$ pontot az f differenciálható függvény inflexiós pontjának nevezzük pontosan akkor, ha az x_0 pont alulról konvex szakaszt alulról konkáv szakasztól választ el.

Pl. $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$; $f''(x) < 0$ ha $x < 0$; $f''(x) > 0$ ha $x > 0 \Rightarrow$
 $x=0$ infl. pont

$f(x) = x^{5/3}$ itt $f''(0)$ nem létezik!

T.6.13. Tétel

Ha x_0 inflexiós pontja f -nek
és f' folytonos x_0 -ban $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Ha } x_0 \text{ inflexiós pontja } f\text{-nek} \\ \text{és } f' \text{ folytonos } x_0\text{-ban} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ lok. extrémuma } f'\text{-nek}$

Bizonyítás: legyen $x_1 < x_0 < x_2$

továbbá $[x_1; x_0]$ -on f konkáv és $[x_0; x_2]$ -en f konvex.

Ekkor $[x_1; x_0]$ -on f' szig. mon. csökken $\Rightarrow f'(x_1) > (f'(x_0))_-$
és $[x_0; x_2]$ -en f' szig. mon. nő $\Rightarrow (f'(x_0))_+ < f'(x_2)$

A folytonosság miatt $(f'(x_0))_- = (f'(x_0))_+ = f'(x_0)$

így
$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_0 < x_2 \\ f'(x_1) > f'(x_0) < f'(x_2) \end{array} \right\} f'(x_0) \text{ minimum}$$

min

Következmény: Ha f' is diffható x_0 -ban, azaz $\exists f''(x_0)$
akkor a diffható fgv-ek lok. extrémumára vonatkozó

T.6.1. Tétel miatt $f''(x_0) = 0$

Megjegyzés: A tétel állítását szemléltesse az $f(x)=x^3$ ill.
a $g(x)=x^{5/3}$ függvényeken és deriváltjaikon.

T.6.14. Tétel

Legyen az f függvény az x_0 pont $U(x_0)$ környezetében $(2k+1)$ -szer folytonosan differenciálható ($k > 0$, $k \in \mathbb{N}$).

Legyen továbbá $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2k)}(x_0) = 0$

$$\text{és} \quad f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$$

Ekkor x_0 -ban f -nek inflexiós pontja van.

Bizonyítás:

Mivel $k > 0$, $2k+1 \geq 3$ és $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, $U(x_0)$ környezetnek nincs olyan x_0 -t tartalmazó $(\alpha; \beta)$ részintervalluma, ahol $f''(x_0) = 0$. Elegendő tehát a T.6.12. Tétel következményének alkalmazásához belátnunk, hogy $f''(x)$ az (x_0) pontban előjelet vált. Írjuk ehhez föl $g(x) = f''(x)$ függvény x_0 pont körül $(2k-2)$ -edfokú Taylor

$$\text{polinomját. } T_{(2k-2),g,(x_0)} = f''(x_0) + \frac{f^{(2k)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k-2)!}(x - x_0)^{2k-2} \equiv 0$$

$$\text{és maradéktagja: } R_{(2k-2),g,(x_0)}(x) = \frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k-1)!}(x - x_0)^{(2k+1)}$$

Melyből adódóan

$$g(x) = f''(x) = \frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k-1)!}(x - x_0)^{(2k+1)}$$

Mivel $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$ és $f^{(2k+1)}$ x_0 -ban folytonos, ha

elegendően közel van x az x_0 -hoz, $f^{(2k+1)}(\xi)$ és

$f^{(2k+1)}(x_0)$ előjele megegyezik.

Tekintetbevéve, hogy $(x-x_0)^{(2k+1)}$ az x_0 pontban előjelet vált, adódik, hogy az x_0 pontban $f''(x)$ is előjelet vált, így az x_0 pont f függvény alulról konvex és alulról konkáv szakaszát választja el egymástól, tehát inflexiós pont.

6.4. Teljes függvényvizsgálat

Ebben a részben egy példán szemléltetjük a 6. fejezetben leírtak alkalmazását egy függvény részletes vizsgálatában, s összefoglaljuk egyben a teljes függvényvizsgálat

szempontjait. A megvizsgálandó függvény: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

1.) Értelmezési tartomány, limesek, zérushelyek:

$$D_f = (0;1) \cup (1;\infty) ; f(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x} = \infty$$

2.) Monotonitási intervallumok, szélsőérték helyek:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ ha } \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e$$

x	0;1	1	1;e	e	e;\infty
f'	-		-	0	+
f	v		v	e	↑

min

3.) Konvexitás, konkávitás, inflexiós pontok:

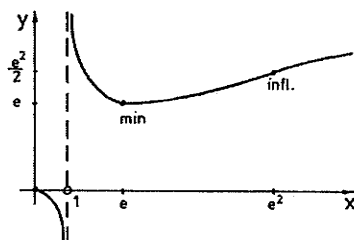
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x - 1)}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \cdot \ln^3 x}$$

$$f''(x)=0 \text{ ha } x = e^2$$

x	0;1	1	1;e ²	e ²	e ² ;\infty
f''	-		+	0	-
f	∩		∪	e ² /2	∩

infl.

(4) A függvénygörbe rajza, értéktáblázat



$$R_f = (-\infty; 0) \cup [e; \infty)$$

11. ábra

6.5. Feladatok a 6. fejezet anyagához

F.6.1. Az alábbi függvényekről állapítsa meg, felveszik-e supremumukat ill. infimumukat a megadott intervallumon. Ha igen, határozza meg a minimum ill. maximum helyét és értékét!

a.) $f(x) = \frac{1}{x}$; $0 < x < 1$

b.) $f(x) = x - x$; $0 \leq x \leq 3$

x jelentése: "egészrész"(x) pl. 1,2 = 1

c.) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $0 \leq x < \infty$

d.) $f(x) = x^2 + 3x$; $-2 \leq x \leq 1$

e.) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; $-2 \leq x \leq 1$

F.6.2.^(*) Konstans felszínű hengerek közül határozza meg a maximális térfogatú henger alapkörének sugarát és magasságát!

F.6.3.^(*) Az "a" oldalú négyzetbe háromszöget írunk úgy, hogy a háromszög A és B csúcsa a négyzet egymás melletti két csúcsán, a harmadik, C a négyzet szemközti oldalán helyezkedik el. Határozza meg az így rajzolható maximális és minimális területű háromszög AC és AB oldalának hosszát!

F.6.4.^(*) Számítsa ki l'Hospital szabály segítségével az alábbi határértékeket

a.) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{\sin 4x}$ b.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2 x}$ c.) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

d.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x^2}{(1+x)^m - 1 + x^2}$; e.) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$; f.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{3x^2 - 1}$

F.6.5. $f(x) = \ln x + 2 - x$

a.) Van-e $f(x)$ függvénynek gyöke az $[e^{-2}; e^{-1}]$ ill. $[e; e^2]$

intervallumokon

b.) Van-e $f(x)$ -nek vízszintes érintője az $[e^{-2}; e^2]$ intervallumon? Ha igen, írja fel egyenletét!

F.6.6.^(*) Írja fel az $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{4}$ pont körüli másodfokú Taylor polinomját!

F.6.7. Írja fel az alábbi függvények n -edfokú Mac Laurin polinomját és az ehhez tartozó Lagrange féle maradéktagot. A polinom segítségével számítsa ki közelítőleg $f(x)$ értékét és becsülje meg a közelítés hibáját!

a.) $f(x) = e^x$; $n = 3$; $x_1 = 0.6$

b.) $f(x) = \sin x$; $n = 4$; $x_1 = 0.3$

c.) $f(x) = \operatorname{ch} x$; $n = 2$; $x_1 = 0.1$

d.)^(*) $f(x) = \ln(1+x)$; $n = 5$; $x_1 = 1$

e.)^(*) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $n = 5$; $x_1 = 0.6$

Melyik szám logaritmusát közelítjük a d.) és e.) feladatokban?

F.6.8. Határozza meg n egész számot úgy, hogy az alábbi függvények n -edfokú Mac Laurin polinomja az adott x_1 pontban az $f(x_1)$ függvényértéket a megadott H pontossággal közelítse!

a.) $f(x) = \cos x$ $x_1 = 0.3$ $H = 0.0001$

b.)^(*) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ $x_1 = 0.2$ $H = 0.00001$

c.) $f(x) = e^x$ $x_1 = -0.1$ $H = 0.001$

F.6.9. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alább megadott függvényekre!

a.) $f(x) = x + \frac{108}{x^2}$

b.) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

c.) $f(x) = x e^{-x}$

d.) $f(x) = x^2 \ln x$

e.) (*) $f(x) = x^x$

f.) (*) $f(x) = \arctg \frac{x+1}{x-1}$

g.) $f(x) = \ln(1+x^2)$

7. A határozatlan integrál

7.1 A határozatlan integrál alaptulajdonságai

D.7.1. Definíció

Legyenek F és f az $(a;b)$ intervallumon értelmezett függvények. Az F függvény a f függvény határozatlan integrálja (primitív függvénye) az $(a;b)$ intervallumon pontosan akkor, ha $\forall x \in (a;b)$ esetén $F'(x) = f(x)$ teljesül.

A határozatlan integrál jelölésére

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \text{használatos.}$$

A határozatlan integrált zárt $[a;b]$ intervallumra is definiálhatjuk, ekkor az intervallum végpontjaira az alábbiak kell, hogy teljesüljenek:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(a) \text{ ill. } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(b+h) - F(b)}{h} = f(b)$$

A későbbiekben (T.8.8. Tétel) majd bizonyítani fogjuk, hogy minden zárt intervallumon folytonos függvénynek létezik az adott intervallumon primitív függvénye.

T.7.1. Tétel Ha az $\langle a;b \rangle$ nyílt vagy zárt intervallumon az $f(x)$ függvénynek $F(x)$ határozatlan integrálja, akkor itt tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $G(x) = F(x) + c$ is határozatlan integrálja f -nek.

Bizonyítás: mivel $\int f(x) dx = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

továbbá $G'(x) = F'(x) + c' = F'(x) \Rightarrow \int f(x) dx = G(x)$.

Következmény: Ha az $f(x)$ függvénynek az $\langle a;b \rangle$ intervallumon

$F(x)$ és $G(x)$ primitív függvényei, akkor

$F(x) - G(x) = \text{konstans.}$

T.7.2. Tétel (A HATÁROZATLAN INTEGRÁL TULAJDONSAGAI)

Legyenek f_1 és f_2 az $\langle a; b \rangle$ intervallumon értelmezett olyan függvények, melyeknek léteznek az adott intervallumon határozatlan integráljai:

$$\int f_1(x) dx \text{ ill. } \int f_2(x) dx .$$

Ekkor tetszőleges $c_1 \in \mathbb{R}$ $c_2 \in \mathbb{R}$ valós számok esetén létezik az

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx \quad \text{határozatlan integrál, és}$$

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx .$$

Bizonyítás: legyen $F_1(x) = \int f_1(x) dx$ és $F_2(x) = \int f_2(x) dx$ ekkor a D.7.1. definíció szerint $\forall x \in \langle a; b \rangle$ esetén teljesülnek: $F_1'(x) = f_1(x)$ és $F_2'(x) = f_2(x)$

A deriválási szabályok szerint $\forall c_1 \in \mathbb{R}$ és $c_2 \in \mathbb{R}$ esetén ekkor $\left[c_1 \cdot F_1(x) + c_2 \cdot F_2(x) \right]'$ létezik, és

$$\left[c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) \right]' = c_1 F_1'(x) + c_2 F_2'(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) .$$

T.7.3. Tétel

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{ha } n \neq -1 \\ \ln |x| & \text{ha } n = -1 \end{cases}$$

$$\int e^x dx = e^x ; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x ; \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x ; \quad \int \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \operatorname{cth} x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x ; \quad \int \cos x dx = \sin x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x & ; & \quad \int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x & ; & \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \operatorname{arch} x & ; & \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsh} x \end{aligned}$$

A tétel bizonyítása a deriválási szabályokkal történik.

7.2. Parciális integrálás

T.7.4. Tétel (PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS)

Legyenek $u(x)$ és $v(x)$ függvények az $\langle a; b \rangle$ intervallumon differenciálhatók, továbbá létezzen $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ határozatlan integrál. Ekkor létezik $\int u(x) \cdot v'(x) dx$ határozatlan integrál és

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx .$$

Bizonyítás:

$\int u(x) \cdot v'(x) dx$ létezik, ha van olyan $F(x)$ fgv. amelyre

$$F'(x) = u(x) \cdot v'(x)$$

Tekintsük az $F(x) = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$ függvényt

$$F'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) - u'(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v'(x)$$

Ezzel például belátható, hogy $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x$

$$\begin{aligned} \text{Legyen ugyanis } u(x) &= \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ \text{és } v'(x) &= 1 \Rightarrow v(x) = x \end{aligned}$$

$$\text{Ekkor } \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x$$

7.3. Integrálás helyettesítéssel

T.7.5.Tétel (INTEGRÁLÁS HELYETTESÍTÉSSEL)

A.) Tegyük fel, hogy az $\langle a; b \rangle$ intervallumon létezik

$$F(x) = \int f(x) dx \text{ integrál}$$

továbbá az $x = \varphi(t)$ függvény az $\langle \alpha; \beta \rangle$ intervallumon értelmezett differenciálható függvény, amelyre

$$\forall t \in \langle \alpha; \beta \rangle \text{ esetén } x = \varphi(t) \in \langle a; b \rangle \text{ teljesül.}$$

Ekkor az $\langle \alpha; \beta \rangle$ intervallumon létezik az $\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$

$$\text{integrál és } \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x) dx = F(x) \Big|_{x=\varphi(t)}$$

Bizonyítás: Mivel $F(x) = F[\varphi(t)]$ és $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$
a láncszabályt alkalmazva adódik:

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt} = \frac{dF}{dx} \Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$$

B.) Tegyük fel, hogy az $\langle \alpha; \beta \rangle$ intervallumon értelmezett

$x = \varphi(t)$ differenciálható függvény az $\langle \alpha; \beta \rangle$ intervallumot $\langle a; b \rangle$ -re leképező szigorúan monoton függvény, továbbá $\varphi'(t) \neq 0$ ha $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ (E feltételek biztosítják $t = \varphi^{-1}(x)$ inverz függvény létezését és differenciálhatóságát $\langle a; b \rangle$ minden pontjában).

Tegyük fel továbbá, hogy létezik $\langle \alpha; \beta \rangle$ -n

$$G(t) = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \text{ integrál.}$$

Ekkor az $\langle a; b \rangle$ intervallumon létezik az $\int f(x) dx$ integrál
és $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = G(t) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$.

Bizonyítás: Mivel $G(t) = G[\varphi^{-1}(x)]$ és $\frac{dG}{dt} = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ a láncszabályt és az inverz függvény deriválási tételét alkalmazva adódik:

$$\frac{dG[\varphi^{-1}(x)]}{dx} = \frac{dG}{dt} \bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} \cdot \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$\text{továbbá } f[\varphi(t)] \big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = f[\varphi(\varphi^{-1}(x))] = f(x)$$

melyből adódóan

$$\frac{dG[\varphi^{-1}(x)]}{dx} = f(x) \cdot \left[\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \right]_{t=\varphi^{-1}(x)} = f(x)$$

A helyettesítéses integrál kétféle alkalmazására láthatunk példát az alábbiakban:

A.) Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$ tetszőleges, a zérust nem tartalmazó $\langle a; b \rangle$ intervallumon, továbbá az $x = \cos t$ függvény mindenütt differenciálható, és ha

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow x \in (0; 1] \text{ mely } (0; 1] \text{ intervallum a zérust nem tartalmazza, adódik:}$$

$$\int \lg t \, dt = - \int \frac{-\sin t}{\cos t} dt = - \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| = \ln |\cos t|$$

$$x = \cos t$$

Hasonlóan adódik $\int \lg t \, dt = \ln |\cos t|$ tetszőleges,

$$\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right]; K \in \mathbb{Z} \text{ esetén.}$$

$$\begin{aligned} \text{B.) Mivel } \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt &= \int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \end{aligned}$$

tetszőlegesen $\langle \alpha; \beta \rangle$ intervallumon ahol $\cos t \geq 0$,

továbbá az $x = \sin t$ függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon

szigorúan monoton nő, valamint a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon

$(\sin t)' = \cos t \neq 0$ és az $x = \sin t$ függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

intervallumot $(-1; 1)$ intervallumra képezi le, adódik:

$\forall x \in (-1; 1)$ esetén

$$\begin{aligned} \int_{x=\sin t} \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_{t=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x)}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

Megjegyzés: Az $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right)$ határozatlan integrál a zárt $[-1; 1]$ intervallumon is létezik, mivel a T.7.5. Tétel B. része kiterjeszthető

$f(x) \left[= \sqrt{1-x^2} \right]$ folytonossága mellett olyan

$\langle \alpha; \beta \rangle = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra is, melynek véges sok pontjában

$\varphi'(t) (= \cos t)$ zérus.

7.4 Racionális törtfüggvények integrálása

Mielőtt tetszőleges racionális törtfüggvény integrálásával foglalkoznánk, vizsgáljunk meg három speciális esetet és ezek általánosítását.

1. Speciális eset: $\int \frac{1}{3x+5} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+5| + c$

Általánosítása: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c \quad (a \neq 0)$

2. Speciális eset: $\int \frac{1}{1+(2x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x-1) + c$

Általánosítása: a nevezőben levő $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomnak nincs valós gyöke ($D = b^2 - 4ac < 0$)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{4a}{4ac-b^2} \frac{1}{\left[\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right]^2 + 1} dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \end{aligned}$$

3. Speciális eset:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+(2x-1)^2} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{8x-4+4}{4x^2-4x+2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \ln(1+(2x-1)^2) + \int \frac{1/2}{1+(2x-1)^2} dx \end{aligned}$$

általánosítása :

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$$

Az előbbiekből következik, hogy ha egy racionális törtfüggvényt fel tudunk bontani elsőfokú nevezőjű és nulladfokú számlálójú, továbbá valós gyökkel már nem rendelkező másodfokú nevezőjű és legfeljebb elsőfokú számlálójú résztörtekre, akkor a racionális törtfüggvény primitív függvényét fel tudjuk írni. Ennyire azonban nem egyszerű a törtek felbontása, nézzük erre az alábbi példát:

$$\int \frac{(1+x^2)^2 [x-3-2(x-3)(x+2)+(x+2)^2] + (x+2)^2 [(x-3)(1+x^2)-(x-3)]}{(x+2)^2(1+x^2)^2(x-3)} dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Tehát látható, a nevezőben szerepelhet az $(ax+b)$ elsőfokú kifejezés 1-nél nagyobb egész kitevős hatványa is, s hasonló a helyzet az ax^2+bx+c másodfokú, továbbá már nem bontható kifejezéssel.

T.7.6. Tétel (RÉSZTÖRTEKRE BONTÁS)

Legyenek $P(x)$ és $Q(x)$ olyan valós együtthatós polinomok, amelyeknek közös gyökük nincs (relatív prim polinomok), továbbá legyen $P(x)$ fokszáma $Q(x)$ fokszámanál kisebb. Legyen továbbá a $Q(x)$ polinom gyöktényezős alakja:

$$Q(x) = a \prod_{i=1}^{n_r} (x - x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{n_c} [(x - z_j)(x - \bar{z}_j)]^{k_j}$$

ahol $\{x_i\}_{i=1}^{n_r}$ a $Q(x)$ polinom valós gyökeinek halmaza, x_i gyök multiplicitása k_i ;

$\{z_j; \bar{z}_j\}_{j=1}^{n_c}$ a $Q(x)$ polinom komplex konjugált gyökpárjainak

halmaza, $z_j; \bar{z}_j$ gyökpár multiplicitása k_j .

Ekkor figyelembevéve, hogy

$$(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = x^2 - 2\operatorname{Re} z_j \cdot x + |z_j|^2 \quad \text{valós együtthatós polinom}$$

a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ racionális törtfüggvény résztörtekre bontható az

alábbiak szerint:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{\ell=1}^{k_i} \frac{a_{i\ell}}{(x-x_i)^\ell} + \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{\ell=1}^{k_j} \frac{b_{j\ell} x + c_{j\ell}}{(x^2 - 2\operatorname{Re} z_j x + |z_j|^2)^\ell}$$

Következmény:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^{k_i} \frac{a_{i\ell}}{(x-x_i)^\ell} + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{k_j} \frac{b_{j\ell} x + C_{j\ell}}{(x^2 - 2\operatorname{Re} z_j x + |z_j|^2)^\ell} dx$$

Módszer $\frac{b_{j1} x + C_{j1}}{(x^2 - 2\operatorname{Re} z_j x + |z_j|^2)^1}$ integrálására:

Speciális eset: $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx =$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx - \int x \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$u = x; \quad v' = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

melyből adódik

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x^2} + \int \frac{1}{1+x^2} dx \right]$$

hasonlóan bemutatható bármely $n > 1 \quad n \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = + \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} + \left[1 - \frac{1}{2(n-1)} \right] \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$$

7.5. Racionális törtfüggvények integrálására vezető

helyettesítések

Jelölés: Jelölje $R(f(t), g(t))$ azt a törtfüggvényt, amely $x = f(t)$; $y = g(t)$ helyettesítéssel

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \text{racionális törtfüggvényt ad meg.} \\ \text{(P és Q kétváltozós polinomok)}$$

T.7.7. Tétel Az $\int R \left[\sqrt[n]{x}, \sqrt[m]{x} \right] dx$ integrál, ahol n és m pozitív egészek, és legkisebb közös többszörösük k , a $t = \sqrt[k]{x}$ helyettesítéssel racionalizálható.

$$\text{Bizonyítás: legyen } n = \frac{k}{\ell_1} \quad \text{és} \quad m = \frac{k}{\ell_2}.$$

$$\text{ekkor } \sqrt[n]{x} = \left(\sqrt[k]{x} \right)^{\ell_1} = t^{\ell_1} \quad \text{és} \quad \sqrt[m]{x} = \left(\sqrt[k]{x} \right)^{\ell_2} = t^{\ell_2}$$

$$\text{valamint } x = t^k \quad \text{ezért} \quad \frac{dx}{dt} = k t^{k-1}$$

A helyettesítési tétel B. részét alkalmazva adódik

$$\int R \left[\sqrt[n]{x}, \sqrt[m]{x} \right] dx = \int R \left(t^{\ell_1}, t^{\ell_2} \right) k t^{k-1} dt = \int R^*(t) dt$$

$$\text{Példa: } \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1}{t^3 + t^2} 6 t^5 dt = \int \frac{6t^3}{t+1} dt =$$

$$t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6t^5 \quad \left| \quad = 6 \left[\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt{x} - \ln \left[\sqrt{x} + 1 \right] \right] + c \right.$$

T.7.8.Tétel Az $\int R(e^x) dx$ integrál a $t = e^x$ helyettesítéssel racionalizálható.

Bizonyítás: Mivel $t = e^x \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

$$\int R(e^x) dx = \int R(t) \frac{1}{t} dt = \int R^*(t) dt$$

Példa:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx = \int \frac{t}{t^2-1} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt = \ln \sqrt{\frac{|e^x-1|}{e^x+1}} + C$$

T.7.9.Tétel: Az $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ integrál a $t = e^x$ helyettesítéssel racionalizálható.

Bizonyítás: mivel $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ és $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ adódik:

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx = \int R^*(e^x) dx = \int R^{**}(t) \frac{1}{t} dt$$

Példa:

$$\int \frac{\operatorname{sh} x + 1}{\operatorname{ch} x} dx = \int \frac{e^x - e^{-x} + 2}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^{2x} + 2e^x - 1}{e^{2x} + 1} dx =$$

$$\int \frac{t^2 + 2t - 1}{t(t^2 + 1)} dt = \int \frac{2t + 2}{t^2 + 1} - \frac{1}{t} dt = -x + \ln(e^{2x} + 1) + 2 \operatorname{arctg} e^x + C$$

T.7.10.Tétel: Az $\int R(\sin x, \cos x) dx$ integrál a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel racionalizálható.

Bizonyítás:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

adódik:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int R^*(t) dt$$

Példa:

$$\int \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}{\frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dx =$$

$$= \int \frac{2t+1-t^2+1+t^2}{t(1-t^2)} dt = \int \frac{2}{t(1-t)} dt = \int \frac{2}{t} + \frac{2}{1-t} dt =$$

$$= \ln \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right] + c$$

T.7.11. Tétel

Az $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ integrál két egymásutáni helyettesítéssel racionalizálható, mely helyettesítések a $D = b^2 - 4ac$ valamint az a előjelétől függenek.

Bizonyítás:

a.) $a > 0$ és $D > 0$: ekkor $ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right]$

az első helyettesítés tehát $\text{ch } t = \frac{2a}{\sqrt{D}} x + \frac{b}{\sqrt{D}}$

mellyel

$$\int R \left(x, \sqrt{ax^2+bx+c} \right) dx = \int R^* (\text{sh } t, \text{ch } t) dt$$

így a második helyettesítés: $u = e^t$.

b.) $a < 0$ és $D > 0$: ekkor $ax^2+bx+c = -a \left[\frac{D}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right]$

az első helyettesítés tehát :

$$\sin t = \frac{2ax + b}{\sqrt{D}}$$

mellyel

$$\int R \left(x, \sqrt{ax^2+bx+c} \right) dx = \int R^* (\sin t, \cos t) dt$$

így a második helyettesítés: $u = \text{tg } \frac{t}{2}$.

c./ $a > 0$ és $D < 0$: ekkor $ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-D}{4a^2} \right]$

az első helyettesítés tehát: $\text{sh } t = \frac{2ax + b}{\sqrt{-D}}$
 mellyel

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx = \int R^*(\text{ch } t, \text{sh } t) dt$$

így a második helyettesítés: $u = e^t$.

d./ $a < 0$ és $D < 0$: ekkor $ax^2+bx+c < 0$

tehát $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ értelmezési tartománya az üres halmaz.

7.6 Feladatok a 7. fejezet anyagához

F.7.1. a.) $\int x^2 \sin 2x dx$

c.) $\int \arctg x dx$

F.7.2. a.) $\int (\sin x)^5 \cos x dx$

c.) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

F.7.3. a.) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

c.) $\int \sqrt{2x-x^2} dx$

F.7.4. a.) $\int \frac{1}{x^2+5x+6} dx$

c.) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$

F.7.5. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

F.7.6. a.) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$

F.7.7. a.) $\int \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x \cos x} dx$

F.7.7. a.) $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx$

c.) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

b.) $\int \sin x e^{2x} dx$

d.) $\int x \ln x dx$

b.) $\int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx$

d.) $\int \frac{2x}{x^2+3} dx$

b.) $\int \sqrt{x^2-4} dx$

d.) $\int \sqrt{2x+x^2} dx$

b.) $\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

d.) $\int \frac{x^3+2x^2-2x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx$

b.) $\int \frac{\operatorname{sh} x + 1}{\operatorname{ch} x} dx$

d.) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

b.) $\int \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} dx$

8.A határozott integrál

8.1 A Riemann féle határozott integrál definíciója és alaptulajdonságai

E fejezetben olyan függvényekkel fogunk foglalkozni, amelyek "görbéje" egy véges oldalhosszúságú téglalapba foglalható, tehát véges, zárt intervallumon értelmezett korlátos függvényre fogjuk megadni a Riemann féle határozott integrál definícióját.

D.8.1. Definíció(k) (AZ $[a; b]$ INTERVALLUM FELOSZTÁSA ÉS ANNAK FINOMSÁGA)

Legyen adott az $[a; b]$ korlátos, zárt intervallum, továbbá legyen adott az $\{x_i\}_{i=0}^k \subset [a; b]$ szigorúan mon. növekvő számsorozat. Ez az $\{x_i\}_{i=0}^k$ számsorozat az $[a; b]$ intervallum egy felosztását képezi, ha $a = x_0$ és $b = x_k$ teljesül. Ekkor ugyanis

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b \quad \text{teljesül.}$$

Jelölje ezen felosztást $\delta = \{x_i\}_{i=0}^k$.

A δ felosztás finomsága $\varphi(\delta) = \max_{1 \leq i \leq k} (x_i - x_{i-1}) = \max_{1 \leq i \leq k} \Delta x_i$

D.8.2. Definíció (A SZABÁLYOS BEOSZTÁSSOROZAT)

Legyen adott az $[a; b]$ intervallum egy $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$

beosztássorozata.

A δ_n beosztássorozatot szabályos beosztássorozatnak nevezzük pontosan akkor, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\delta_n) = 0$ azaz a beosztások finomságából képezett sorozat nullsorozat.

D.8.3. Definíció (AZ INTEGRÁLKÖZELÍTŐ ÖSSZEG)

Legyen adott az $[a; b]$ intervallum egy szabályos beosztássorozata: $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left\{ x_i^{(n)} \right\}_{i=0}^{k_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ továbbá legyen f az

$[a; b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvény :

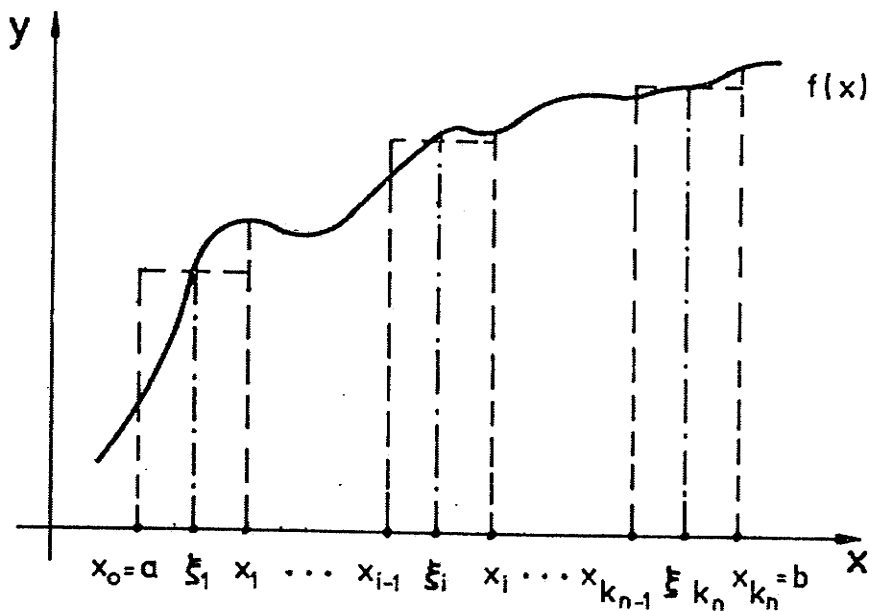
$$A \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)} \text{ összeget, ahol } \xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}] \\ i=1, 2, \dots, k_n$$

nevezzük az f függvény $[a; b]$ intervallumon vett (egy) integrálközelítő összegének.

Az integrálközelítő összeg jelölése:

$$\sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)} = A_f^{(n)}(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)}) = A_f^{(n)}(\underline{\xi}^{(n)})$$

Geometria jelölése az alábbi ábrán szemléltethető:



12. ábra

D.8.4. Definíció (RIEMANN INTEGRÁLHATÓSÁG)

Az $f(x)$ $[a; b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvényt az $[a; b]$ -n Riemann- integrálhatónak nevezzük pontosan akkor,

ha az $[a; b]$ intervallum minden δ_n szabályos beosztássorozata esetén az

$A_f^{(n)}(\xi^{(n)})$ integrálközelítő összegek sorozata a $\xi^{(n)}$ pontok kiválasztásától függetlenül konvergál.

Jelölésben: $\exists \int_a^b f(x) dx \Delta x_i$ ill.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_f^{(n)}(\xi^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)}$$

Példa:

Riemann - integrálható-e a $[0; 1]$ intervallumon az alábbi

függvény: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0; 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{ha } x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

Tekintsük azt a δ_n beosztássorozatot, amit úgy kapunk, hogy δ_n a $[0; 1]$ intervallum n egyenlő részre való

beosztását jelenti : $\delta_n : \left\{ \frac{i}{n} \right\}_{i=0}^n$

Ekkor $\Delta x_i^{(n)} = \frac{1}{n}$

a./ válasszuk a $\xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)} \right]$ értékeket úgy, hogy legyen $\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)} = \frac{i}{n} \in \mathbb{Q} \quad i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{ekkor } A_f^{(n)} = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

mivel $\xi_i^{(n)} \in \mathbb{Q}$

b./ Legyen $\xi_1^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}] \setminus Q$

$$\text{akkor } A_f^n = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \frac{1}{n} = 0$$

Fentiekből látható, hogy ha például $\delta_1, \delta_3, \delta_5, \dots, \delta_{2k+1}, \dots$ beosztások esetén $\xi_1^{(n)}$ értékeket racionális számoknak

választjuk, akkor $A_f^{2k+1}(\xi^{(2k+1)}) = 1$, ha pedig

ha pedig $\delta_2, \delta_4, \dots, \delta_{2k}, \dots$ beosztások esetén $\xi_1^{(n)}$ irracionális számoknak választjuk, akkor $A_f^{2k}(\xi^{(2k)}) = 0$.

Az integrálközelítő összegek sorozata tehát az alábbi lesz: 1, 0, 1, 0, ..., amely láthatóan nem konvergens,

azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} A_f^n(\xi^{(n)})$ nem létezik,

III. $\int_0^1 f(x) dx$ nem létezik

III. f a $[0;1]$ -en nem R-integrálható.

T.8.1. Tétel

Ha az $[a;b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény Riemann integrálható $[a;b]$ -n, akkor az integrálközelítő összegeinek sorozatai ugyanazon I számhoz konvergálnak.

Bizonyítás:

Legyenek δ_n és δ'_n az $[a;b]$ intervallum szabályos beosztássorozatai.

Mivel f $[a;b]$ -n Riemann integrálható, ezért léteznek

$$\text{és } \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} A_f^{n(\delta_n)}(\underline{\xi}) = I \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A_f^{n(\delta'_n)}(\underline{\xi}) = I' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{véges} \\ \text{határértékek} \end{array}$$

Mivel δ_n és δ'_n az $[a;b]$ szabályos beosztássorozatai, a $\delta''_n = \delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2, \dots$ is az $[a;b]$ szabályos beosztássorozata, tehát létezik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_f^{n(\delta''_n)}(\underline{\xi}) = I'' \text{ véges határértékek.}$$

Mivel az $A_f^{n(\delta''_n)}(\underline{\xi})$ integrálközelítő összegek sorozatának

az $A_f^{n(\delta_n)}(\underline{\xi})$ ill. $A_f^{n(\delta'_n)}(\underline{\xi})$ integrálközelítő összegek sorozata részsorozata, adódik, hogy
 $I = I''$ ill. $I' = I'' \Rightarrow I = I'$

D.8.5. Definíció (A HATÁROZOTT INTEGRÁL)

Az $[a;b]$ intervallumon értelmezett korlátos f függvény $[a;b]$ -n vett Riemann integráljának nevezzük az f függvény $[a;b]$ -n vett integrálközelítő összegeinek a határértékét.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_f^{n(\delta''_n)}(\underline{\xi})$$

1. Példa $\int_0^1 x \, dx$ kiszámítása:

$$\text{legyen } \delta_n = \left\{ \frac{i}{n} \right\}_{i=0}^n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

$$\text{ekkor } \Delta x_i = \frac{1}{n},$$

$$\text{továbbá legyen } \xi_i = x_i = \frac{i}{n}; i = 1, 2, \dots, n$$

ekkor

$$A_f^n(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} (1+2+\dots+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_f^n(\underline{\xi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

2. Példa: Mutassa meg, hogy $\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$.

$$\begin{aligned} A_f^n(\underline{\xi}) &= \sum_{i=1}^n \left[a + \frac{b-a}{n} i \right] \frac{b-a}{n} = \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow (b-a) \cdot \left[a + \frac{1}{2} (b-a) \right] = \\ &\approx \frac{1}{2} (b-a)(b+a) \end{aligned}$$

D.8.6. Definíció (EGYENLETES FOLYTONOSSÁG)

Az $f(x)$ $\langle a; b \rangle$ intervallumon értelmezett függvényt

$\langle a; b \rangle$ -n egyenletesen folytonosnak nevezzük, ha

$\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\epsilon) > 0$ úgy, hogy ha

$x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle$ és $|x_1 - x_2| < \delta$

akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Példa: legyen $f(x) = \frac{1}{x}$ ez a függvény $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ -on egyenletesen folytonos, de $(0,1)$ -en, bár folytonos, nem egyenletesen folytonos.

a.) Vizsgáljuk $f(x)$ -et $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ -on, azaz $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ekkor

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 x_2} < \frac{|x_2 - x_1|}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4 |x_2 - x_1|$$

Ha tehát $\varepsilon > 0$ -hoz tekintjük $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ -et akkor

$$|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4} \text{ esetén } |f(x_1) - f(x_2)| < 4|x_2 - x_1| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \text{ teljesül.}$$

b.) Vizsgáljuk $f(x)$ -et $(0;1)$ -en, azaz $x_1, x_2 \in (0;1)$; mivel

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 x_2} \text{ és a nevező alsó határa zérus,}$$

nem adhatunk meg az egész intervallumra "univerzális" δ -t egyetlen ε -hoz sem.

T.8.2.Tétel

Véges, zárt intervallumon folytonos f függvény eme intervallumon egyenletesen folytonos.

A tételt nem bizonyítjuk.

T.8.3.Tétel (FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ)

Legyen $f(x)$ függvény az $[a;b]$ intervallumon folytonos.

Ekkor $f(x)$ az $[a;b]$ -n Riemann-integrálható.

A bizonyításhoz vezessük be az alábbi jelöléseket:

legyen δ egy beosztása az $[a;b]$ intervallumnak.

Ezen δ beosztáshoz ($\delta = \{x_i\}_{i=0}^k$)

legyen $M_i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$ ill. $m_i = \min_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$

továbbá $S_f^\delta = \sum_{i=1}^k M_i \Delta x_i$ és $s_f^\delta = \sum_{i=1}^k m_i \Delta x_i$

(teljesül: $s_f^\delta \leq S_f^\delta$)

1.segéd-tétel Legyen δ_n az $[a;b]$ intervallum egy szabályos beosztássorozata ($\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\delta_n) = 0$)

akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} [S_f^{\delta_n} - s_f^{\delta_n}] = 0$.

Bizonyítás: Ahhoz, hogy belássuk, $S_f^{\delta_n} - s_f^{\delta_n}$ tetszőleges pozitív ε -nál kisebb, tekintsük a szabályos beosztássorozatr egy olyan elemét, amelynek finomsága $\varphi(\delta_n)$ olyan kicsi pozitív szám, hogy ha $|\xi - \eta| < \varphi(\delta_n)$ akkor $|f(\xi) - f(\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ teljesül, mivel f folytonos,

így egyenletesen is folytonos $[a;b]$ -n.

Ekkor

$$S_f^{\delta_n} - s_f^{\delta_n} = \sum_{i=1}^n \left[M_i^{(n)} - m_i^{(n)} \right] \Delta x_i^{(n)} \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^{(n)} = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

2. Segédteétel

Legyen δ és δ' az $[a; b]$ intervallum két tetszőleges beosztása.

$$\text{Ekkor } s_f^{\delta} \leq S_f^{\delta'}$$

Bizonyítás: Jelölje δ'' az $[a; b]$ intervallum azon beosztását, amelynek osztópontjai azon $\{x_i\}_{i=0}^{k''}$ pontok, amelyek a δ és δ' beosztások valamelyikének osztópontjai. Ezen δ'' beosztás a δ ill. δ' beosztások "finomítása", mivel $\varphi(\delta'') \leq \min(\varphi(\delta), \varphi(\delta'))$

Ezért $s_f^{\delta} \leq s_f^{\delta''}$ ill. $S_f^{\delta''} \leq S_f^{\delta'}$. Mivel pedig s ill. S definíciójából

$$\text{következően adódik: } s_f^{\delta''} \leq S_f^{\delta''},$$

tehát

$$\underline{s_f^{\delta}} \leq s_f^{\delta''} \leq S_f^{\delta''} \leq \underline{S_f^{\delta'}}$$

A tétel bizonyítása

1. Belátjuk, hogy bármely $[a; b]$ intervallumon értelmezett szabályos δ_n beosztássorozat esetén $S_f^{\delta_n}$ konvergens.

Jelölje $S_f^{\delta_n}$ határértékét $\lim_{n \rightarrow \infty} S_f^{\delta_n} = I$.

A rövidség kedvéért jelöljük $S_f^{\delta_n}$ -t S_n -vel,

és $s_f^{\delta_n}$ -t s_n -vel.

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = 0$, tehát $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n > N(\varepsilon)$: $S_n - s_n < \varepsilon$;

legyen $p, q \in \mathbb{N}$ továbbá $p, q > N(\varepsilon)$

akkor a 2. segédteétel miatt $s_p \leq S_q$ és $s_q \leq S_p$.

$$\left. \begin{array}{l} s_q \leq S_p \\ -S_q \leq -s_p \end{array} \right\} \Rightarrow s_q - S_q \leq S_p - S_q \leq S_p - s_p$$

azaz $-\varepsilon \leq S_p - S_q \leq \varepsilon \Rightarrow S_p - S_q \rightarrow 0$ azaz S_n konvergens.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I$ -ből pedig adódik:

$$a./ s_n = S_n + s_n - S_n \rightarrow I$$

$$\text{Mivel } S_n \rightarrow I \text{ és } (s_n - S_n) \rightarrow 0$$

$$b./ s_n \leq A_f^{\delta n}(\xi) \leq S_n \Rightarrow A_f^{\delta n}(\xi) \rightarrow I$$

$$\text{mivel } s_n \rightarrow I \text{ és } S_n \rightarrow I$$

tehát a zárt $[a; b]$ intervallumon folytonos $f(x)$ függvény az $[a; b]$ -n Riemann integrálható.

T.8.4. Tétel (A HATÁROZOTT INTEGRÁL TULAJDONSÁGAI)

A. Legyenek $f_1(x)$ és $f_2(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann- integrálható függvények, azaz

$$\exists \int_a^b f_1(x) dx \quad \text{és} \quad \exists \int_a^b f_2(x) dx .$$

Ekkor $f_1(x) + f_2(x)$ is Riemann-integrálható $[a; b]$ -n, és

$$\int_a^b f_1(x) + f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx .$$

A tétel bizonyítása következik a Riemann integrál definíciójából

B. Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.

Ekkor $\lambda \cdot f(x)$ is Riemann integrálható $[a; b]$ -n, és

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx .$$

A tétel bizonyítása következik a Riemann integrál definíciójából.

C. Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, és legyen $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$, ekkor $f(x)$ az $[\alpha; \beta]$ intervallumon is Riemann-integrálható

A tételt nem bizonyítjuk

Következmény: Ha $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, és $c \in (a; b)$, akkor $f(x)$ Riemann-integrálható az $[a; c]$ ill. $[c; b]$ intervallumokon is, továbbá

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

$$\text{Hasonlóan ha } \int_a^c f(x) dx \text{ és } \int_c^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

D. Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, és legyen $\forall x \in [a; b]$ esetén $f(x) \geq 0$

$$\text{Ekkor } \int_a^b f(x) dx \geq 0 .$$

A tétel bizonyítása következik a Riemann integrál definíciójából.

E. Legyenek $f_1(x)$ és $f_2(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények, teljesüljön továbbá

$$\forall x \in [a; b] \text{ esetén } f_1(x) \geq f_2(x) .$$

$$\text{Ekkor } \int_a^b f_1(x) dx \geq \int_a^b f_2(x) dx$$

A tétel az A, B és D tulajdonságokból következik.

F. Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény. Ekkor az $[a; b]$ -n $|f(x)|$ is Riemann-integrálható, továbbá teljesül

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

A tétel az abszolútérték definíciójából, továbbá B tulajdonságból és C következményéből következik.

Figyelem, ez a tétel nem megfordítható:

ellenpélda $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Ezen függvényre $\int_0^1 |f(x)| dx$ létezik, de $\int_0^1 f(x) dx$ nem!

G. Legyenek $f_1(x)$ és $f_2(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények. Ekkor az $[a; b]$ intervallumon az $f_1(x) \cdot f_2(x)$ függvény is Riemann integrálható.

Figyelem, a szorzat integrálhatóságából a tényezők integrálhatósága nem következik!

D.8.7. Definíció

Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény.

$$\text{Ekkor } \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_b^a f(x) dx$$

T.8.5. Tétel

A D.8.6. definíció segítségével a T.8.4/C tételt tetszőleges $a, b, c \in [\alpha; \beta]$ valós számokra kiterjeszthetjük.

Azaz, ha $f(x)$ az $[\alpha; \beta]$ intervallumon Riemann integrálható függvény és $a, b, c \in [\alpha; \beta]$ egyébként tetszőleges számok, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

T.8.6.Tétel (AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS KÖZÉPÉRTÉKTÉTELE)

Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható, legyen továbbá

$$m = \inf_{x \in [a; b]} f(x), \text{ és } M = \sup_{x \in [a; b]} f(x).$$

Ekkor létezik olyan $\mu \in [m; M]$ szám, amelyre

$$\mu \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Bizonyítás: A Riemann integrál definíciója értelmében

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a)$$

$$\text{ebből : } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \implies \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Mely μ szám az f fgv. $[a; b]$ -n vett integrálközepe.

Ha $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon folytonos is, akkor

$\exists \xi \in [a; b]$ úgy, hogy $\mu = f(\xi)$,

mivel Bolzano tétele szerint (T.5.8.) folytonos függvény "nem hagy ki" értéket.

D.8.8. Definíció (AZ INTEGRÁL MINT A FELSOR HATÁR FÜGGVÉNYE)

Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann integrálható függvény, legyen továbbá adott $\alpha \in [a; b]$ (α rögzített!).

Ekkor a T.8.4/C tétel és a D.8.7. definíció értelmében

$$\forall x \in [a; b] \text{ esetén } \exists \int_{\alpha}^x f(t) dt \text{ integrál.}$$

Ezen integrál az $[a; b]$ intervallumon értelmezett

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt \text{ függvényt definíciójuk szerint.}$$

amely $\varphi(x)$ függvény neve: az integrál mint a felső határ függvénye, vagy integrálfüggvény.

T.8.7.Tétel (AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY FOLYTONOS)

Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann integrálható függvény, $\alpha, x \in [a; b]$ és $\varphi(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$,
a D.8.8. definíció szerinti "integrál, mint a felső határ függvénye".

Állítás: a $\varphi(x)$ függvény az $[a; b]$ -n folytonos.

Bizonyítás: legyen $x_0 \in [a; b]$, egyébként tetszőleges;

belátjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$, azaz $\lim_{x \rightarrow x_0} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = 0$.

Jelöljük x -et $x = x_0 + h$ -val,
akkor

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{\alpha}^{x_0+h} f(x) dx - \int_{\alpha}^{x_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \right|$$

a T.8.4/c. tétel szerint.

A T.8.4/F tétel szerint
$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)| dx$$

Mivel pedig $f(x)$ az $[a; b]$ -n korlátos, $|f(x)|$ is korlátos, tehát $|f(x)| \leq M = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$;

adódik tehát:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)| dx \right| \leq M |x_0 + h - x_0| = M |h|$$

mivel pedig $h \rightarrow 0$, adódik: $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \rightarrow 0$

**T.8.8.Tétel (FOLYTONOS INTEGRANDUS INTEGRÁLFÜGGVÉNYE
DIFFERENCIÁLHATÓ)**

Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon folytonos függvény
(tehát T.8.3. értelmében Riemann integrálható)

Ekkor $f(x)$ D.8.8. szerint definiált $\varphi(x)$
integrálfüggvénye differenciálható az $[a; b]$ intervallumon.

Bizonyítás:

Legyen $x_0 \in [a; b]$ egyébként tetszőleges.

Belátjuk, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$ létezik és véges.

D.8.7. és D.8.8. definíciók valamint T.8.4/c és T.8.6.
tételek szerint

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = f(\xi) \cdot h \quad \text{ahol } \xi \in (x_0, x_0+h) \text{ ha } h > 0$$

$$\xi \in (x_0+h, x_0) \text{ ha } h < 0.$$

Fentiekből adódóan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cdot h}{h} = f(x_0)$$

Következmény Ha $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon folytonos
függvény, akkor $f(x)$ D.8.8. szerint definiált $\varphi(x)$
integrálfüggvénye egyben $f(x)$ primitív függvénye az
 $[a; b]$ -n, mivel $\forall x_0 \in [a; b]$ esetén $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

T.8.9.Tétel (NEWTON - LEIBNIZ TÉTEL)

Ha $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálható és
 $[a; b]$ -n létezik $f(x)$ primitív függvénye, $F(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás:

Legyen $\delta_n = \left\{ x_i^{(n)} \right\}_{i=0}^n$ az $[a; b]$ egy szabályos
beosztássorozata:

Ekkor:

$$F(b) - F(a) = F(b) - F\left(x_{k_{n-1}}^{(n)}\right) + F\left(x_{k_{n-1}}^{(n)}\right) - \dots - F\left(x_1^{(n)}\right) + F\left(x_1^{(n)}\right) - F(a) =$$

$$= \sum_{i=1}^k \left[F\left(x_i^{(n)}\right) - F\left(x_{i-1}^{(n)}\right) \right] = \sum_{i=1}^k F'(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)} = \sum_{i=1}^k f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)} = A_f^{\delta, n}(\underline{\xi}^{(n)})$$

Lagrange tétel és a D.7.1. definíció szerint

melyből adódóan $\lim_{n \rightarrow \infty} A_f^{\delta, n}(\underline{\xi}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$
Mivel pedig $f(x)$ az $[a; b]$ -n Riemann integrálható,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_f^{\delta, n}(\underline{\xi}^{(n)}) = \int_a^b f(x) dx$$

Tehát

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b}$$

Példák arra vonatkozóan, amikor a Newton-Leibniz tétel nem alkalmazható :

A. $f(x)$ függvénynek az $[a;b]$ intervallumon van primitív

függvénye, de $\int_a^b f(x)dx$ nem létezik:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0 \\ 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

Ez az $f(x)$ függvény $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén deriváltja az

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{függvénynek,}$$

tehát $\int f(x)dx = F(x)+C$ tetszőleges $[a;b]$ intervallumon

$$\text{Mivel pedig } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right)$$

vizsgálatakor megállapíthatjuk, hogy a $\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$

függvény a 0 környezetében nem korlátos, adódik, hogy

$f(x)$ függvény a 0-t tartalmazó $[a;b]$ intervallumon nem Riemann integrálható.

$$\text{pl. } \int_{-1}^2 f(x)dx \quad \text{nem létezik}$$

B. $f(x)$ függvény az $[a;b]$ intervallumon Riemann integrálható, de ezen intervallumon primitív függvénye nem létezik.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0;1] \setminus \mathbb{Q} \text{ vagy } x=0 \\ 1/q & \text{ha } x = \frac{p}{q} \in (0;1] \text{ és } p,q \text{ relatív prímek.} \end{cases}$$

Ezen függvény minden irracionális pontban és a nullában folytonos, a többi racionális pontban nem folytonos.

Szakadási pontjainak számossága miatt az itt nem tárgyalt Darboux tétel szerint nem létezik olyan F függvény, amelyre $F'(x) = f(x)$ teljesül a $[0,1]$ intervallumban. Tehát $f(x)$ függvénynek a $[0,1]$ intervallumon primitív függvénye nem létezik.

Vizsgáljuk most $\int_0^1 f(x) dx$ Riemann integrál létezését.

Legyen $\delta_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ a $[0,1]$ intervallum tetszőleges szabályos beosztássorozata.

Ha $\xi_1^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}] \setminus 0$ akkor $f(\xi_1^{(n)}) = 0$

így $A_f^{\delta_n}(\xi) = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} A_f^{\delta_n}(\xi) = 0$.

Ha $\xi_1^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}] \cap 0$ akkor $f(\xi_1^{(n)}) = \frac{1}{q_i^{(n)}}$

Ekkor tetszőlegesen nagy $N \in \mathbb{N}$ számhoz megadható egy olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy amennyiben $\Delta x_i^{(n)} \leq \frac{1}{N \cdot n_0}$ akkor azon részintervallumok száma (m),

amelyeken $\max \frac{1}{q} > \frac{1}{N}$, $m \leq n_0$; ezen részintervallumokon
 $\frac{p}{q} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$ pedig $\frac{1}{q} \leq 1$ teljesül.

Így a δ_n szabályos beosztássorozatnál, ha $\varphi(\delta_n) \leq \frac{1}{N \cdot n_0}$

akkor $\sum_{i=1}^k f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^k f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i + \sum_{i=1}^k f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i \leq n_0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{N n_0} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \Delta x_i \leq 1$
 ez $\leq n_0$ db ez $\leq k_n$

adódik: $A_f^{\delta_n}(\xi) \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} \rightarrow 0$. Tehát $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

T.8.10. Tétel (PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS)

Legyenek $u(x)$ és $v(x)$ az $[a; b]$ intervallumon differenciálható függvények, legyenek továbbá $u'(x)$ és $v'(x)$ az $[a; b]$ -n Riemann integrálható függvények. Ekkor

léteznek $\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$ és $\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$ integrálok,

$$\text{továbbá } \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

Bizonyítás: Tekintsük az $F(x) = u(x) \cdot v(x)$ függvényt az $[a; b]$ intervallumon. $F(x)$ differenciálható, és

$$F'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \forall x \in [a; b] \text{ esetén.}$$

Mivel u' és v' Riemann integrálható függvények, u és v pedig differenciálhatóságuk miatt folytonosak $\Rightarrow$ R integrál-

hatók, tehát $\exists \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$ és $\exists \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$ melyből

következően $\exists \int_a^b F'(x) dx$, és alkalmazva a T.8.9.

Newton-Leibniz tételt, adódik:

$$\int_a^b F'(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b$$

Mivel pedig $F'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, adódik:

$$\left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b = \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx .$$

Példa: $u(x) = \arcsin x$

$v(x) = x$

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v'(x) = 1$$

E példában $u'(x)$ a $[0;1]$ intervallumon nem Riemann integrálható mivel $(0;1)$ -en nem korlátos, ennek ellenére

$\int_0^1 \arcsin x$ parciális integrálással kiszámítható, mivel

$$(x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2})' = \arcsin x$$

$$\text{adódik } \int_0^1 \arcsin x = \left[x \cdot \arcsin x \right]_0^1 + \left[\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

T.8.11. Tétel (INTEGRÁLÁS HELYETTESÍTÉSSEL)

Legyen $f(x)$ az $[a;b]$ intervallumon folytonos függvény, továbbá az $x = \varphi(t)$ az $[\alpha;\beta]$ intervallumon szigorúan monoton, folytonosan differenciálható függvény, amelyre $\varphi'(t) \neq 0$ ha $t \in [\alpha;\beta]$, és amely φ függvény az $[\alpha;\beta]$ intervallumot az $[a;b]$ intervallumra képezi le, úgy, hogy $a = \varphi(\alpha)$ és $b = \varphi(\beta)$

Ekkor léteznek $\int_a^b f(x)dx$ és $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ integrálok,

továbbá

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Bizonyítás: $\int_a^b f(x)dx$ és $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ létezése

következik az integrandusok folytonosságából. A két integrál egyenlősége pedig adódik a határozatlan integrálra vonatkozó T.7.5. tételből.

$$\text{Példa } \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(\sin t + \cos t)^2} dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(\operatorname{tg} t + 1)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$

$$x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t \quad = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[\frac{-1}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ugyanezen helyettesítést nem alkalmazhatjuk a $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$

intervallumon, mivel az $x = \varphi(t) = \operatorname{tg}(t)$ függvény a $t = \frac{\pi}{2}$ pontban nincs értelmezve.

Erre az intervallumra alkalmazható

a $x = \varphi^*(t) = \operatorname{ctg} t$ helyettesítés:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{(\sin t + \cos t)^2} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \operatorname{ctg} t)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} dt =$$

$$x = \varphi^*(t) = \operatorname{ctg} t \quad = \int_1^0 \frac{-1}{(1+x)^2} dx = \left[\frac{1}{1+x} \right]_1^0 = \frac{1}{2}$$

8.2. A határozott integrál alkalmazásai

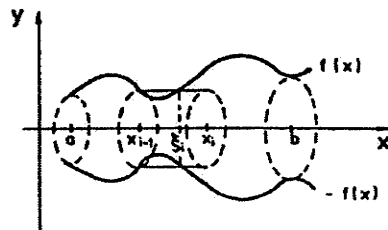
D.8.9. Definíció (GÖRBÉK KÖZTI TERÜLET)

Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ az $[a; b]$ intervallumon Riemann integrálható függvények és legyen f -nek és g -nek függvénygörbéje.

Ekkor az $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ Riemann integrál mérőszáma a két függvénygörbe közötti területnek.

D.8.10. Definíció (FORGÁSTEST TÉRFOGATA)

Legyen $f(x) \geq 0$ függvény az $[a; b]$ intervallumon Riemann integrálható, és legyen f -nek függvénygörbéje. Tekintsük azt a forgástestet, amelyet úgy kapunk, hogy az $f(x)$ függvénygörbének az $[a; b]$ intervallum fölötti szakaszát megforgatjuk az x tengely körül;



13. ábra

Legyen továbbá $\delta_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^k$ az

$[a; b]$ intervallum egy szabályos beosztássorozata, valamint

$$V_1^{(n)} = \pi \cdot [f(\xi_1^{(n)})]^2 \Delta x_1^{(n)}$$

ahol $\xi_1^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$
 $i=1, 2, \dots, kn$

Az így leírt forgástest térfogata:

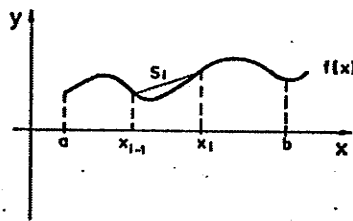
$$V_f[a; b] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{kn} \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Példa: $f(x) = \operatorname{tg}(x)$; $[a; b] = [0; \frac{\pi}{4}]$

$$\begin{aligned} V_{\operatorname{tg}}[0; 1] &= \pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi [\operatorname{tg} x - x]_0^{\pi/4} \\ &= \pi (1 - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

D.8.11. Definíció (GÖRBE ÍVHOSSZA)

Legyen $f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonosan differenciálható, legyen továbbá $\delta_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^k$ az $[a; b]$ intervallum egy szabályos beosztássorozata, továbbá



14. ábra

$$S_i^{(n)} = \sqrt{\Delta x_i^{(n)2} + \left[f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)}) \right]^2} = \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i^{(n)}) \right]^2} \Delta x_i^{(n)}$$

$$\text{ahol } \xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)} \right] \\ i=1, 2, \dots, k_n$$

Az $f(x)$ függvénygörbe $[a; b]$ intervallum fölötti darabjának ívhossza:

$$S_f[a; b] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Megjegyzés: azon $[a; b]$ -n értelmezett $f(x)$ differenciálható

függvények görbéjét melyekre $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ létezik,

rektifikálható, vagy ívhosszal rendelkező függvénygörbéknek nevezzük.

Példa: Az $f(x) = \ln(\sin x)$ függvény $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum

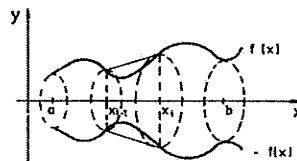
fölötti görbéjének ívhossza:

$$S\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + [(\ln \sin x)']^2} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx =$$

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{tg} \pi/6}^{\operatorname{tg} \pi/4} \frac{1}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_{1/\sqrt{3}}^1 = \ln \sqrt{3} \\ t &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

D.8.12. Definíció (FORGÁSTEST PALÁSTJÁNAK FELSZÍNE)

Legyen $f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonosan differenciálható, legyen továbbá $\delta_n = \left\{ x_i^{(n)} \right\}_{i=0}^k$ az $[a; b]$ intervallum egy szabályos beosztássorozata, továbbá



$$A_i^{(n)} = \frac{f(x_{i-1}^{(n)}) + f(x_i^{(n)})}{2} \sqrt{1 + [f'(\xi_i^{(n)})]^2} \Delta x_i^{(n)} 2\pi$$

ahol $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$
 $i = 1, 2, \dots, k_n$

15. ábra

Az ábra szerint megadott forgástest palástjának felszíne

$$A_f[a; b] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} A_i^{(n)}.$$

T.8.12. Tétel

A D.8.12. Definíció szerinti forgástest palástjának felszíne

$$A_f[a; b] = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$$

Bizonyítás: Mivel f $[a; b]$ -n folytonos, a Bolzano tétel

szerint $\exists \eta_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$ úgy, hogy $f(\eta_i^{(n)}) = \frac{f(x_{i-1}^{(n)}) + f(x_i^{(n)})}{2}$

$$\text{ezzel } 2\pi \sum_{i=1}^n f(\eta_i^{(n)}) \sqrt{1+[f'(\xi_i^{(n)})]^2} \Delta x_i^{(n)} = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\text{valamint } 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{i=1}^n f(\eta_i^{(n)}) \sqrt{1+[f'(\xi_i^{(n)})]^2} \Delta x_i^{(n)}$$

Ezért:

$$A_f[a; b] - 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{i=1}^n [f(\eta_i^{(n)}) - f(\xi_i^{(n)})] \sqrt{1+[f'(\xi_i^{(n)})]^2} \Delta x_i^{(n)}$$

Mivel $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $\xi, \eta \in [a; b]$ esetén $|\xi - \eta| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon$ (*)

továbbá f' folytonosságából adódóan $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ korlátos, a

$K = \max_{x \in [a; b]} \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ jelöléssel, ha $\varphi(\delta_n) < \delta(\varepsilon)$ adódik:

$$\left| 2\pi \sum_{i=1}^n [f(\eta_i^{(n)}) - f(\xi_i^{(n)})] \sqrt{1+[f'(\xi_i^{(n)})]^2} \Delta x_i^{(n)} \right| \leq 2\pi K \sum_{i=1}^n \Delta x_i^{(n)}$$

melyből, mivel $\sum \Delta x_i^{(n)} = b-a$, adódik:

$$A_f[a; b] - 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx = 0$$

Megjegyzés:

A (*) jelöléssel ellátott állításunk bizonyítandó, a jegyzetben nem bizonyított T.8.2. tétel állítása (zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen folytonos.)

Példa: Az $f(x) = \operatorname{ch}(x)$ függvény $[0;2]$ intervallum fölötti görbéjének az x tengely körül történő megforgatásával nyert forgástest palástjának felszíne:

$$A[0;2] = 2\pi \int_0^2 \operatorname{ch} x \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} \, dx = 2\pi \int_0^2 \operatorname{ch}^2 x \, dx =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^2 e^{2x} + 2 + e^{-2x} \, dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^4}{2} + 4 - \frac{e^{-4}}{2} \right)$$

8.3. Impropius integrálok

A 8.1. fejezetben definiáltuk az $\int_a^b f(x)dx$ Riemann integrált. A definícióban (D.8.5.) szereplő $[a;b]$ intervallum véges volt, az $f(x)$ függvény pedig ezen intervallumon korlátos.

E fejezetben a határozott integrált a határérték fogalmának felhasználásával ki fogjuk terjeszteni bizonyos nem véges intervallumokra, ill. nem korlátos függvényekre is. Ezen kiterjesztéseket nevezzük majd impropius integráloknak.

D.8.13. Definíció (IMPROPRIUS INTEGRÁL VÉGTELEN INTERVALLUMON)

Legyen az $f(x)$ (korlátos) függvény Riemann integrálható tetszőleges $[a;b] \subset \mathbb{R}$ véges intervallumon

a.) Amennyiben létezik és véges a

$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$ határérték, ezt nevezzük az $f(x)$ függvény $(-\infty; b]$ intervallumon vett impropius integráljának.

$$\text{Jelölésben } \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

b.) Amennyiben létezik és véges a $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ határérték, ezt nevezzük az $f(x)$ függvény $[a; \infty)$ intervallumon vett improprius integráljának.

Jelölésben:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

c.) Legyen $c \in (a; b)$ egyébként tetszőleges szám.

Amennyiben léteznek a $\int_c^\infty f(x) dx$ és $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ improprius integrálok, e két integrál összegét nevezzük az $f(x)$ függvény $(-\infty; \infty)$ intervallumon vett improprius integráljának.

Jelölésben:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$$

Megjegyzés: a fenti integrál értéke c -től nyilvánvalóan független.

Példa:

$$\begin{aligned} 1.) \quad \int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{x+1} \right]_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{b+1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.) A $(-\infty; \infty)$ intervallumon vett improprius integrál

létezéséhez nem elegendő, ha a $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$ határérték

létezik.

Tekintsük erre példaként az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \notin (-1; 1) \\ 1 & \text{ha } x \in (-1; 1) \end{cases} \text{ függvényt:}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\int_{-\alpha}^{-1} \frac{1}{x} dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{\alpha} \frac{1}{x} dx \right] =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [-\ln|-\alpha| + \ln|-1| + 2 + \ln\alpha - \ln 1] = 2$$

Ezzel szemben, ha tekintjük pl. $c=1$ választásával az

$$\int_c^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - 1) = \infty$$

improprius integrált, látható, a vizsgált határérték nem

véges, így $\int_c^{\infty} f(x) dx$ nem létezik (divergens) tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \text{ improprius integrál is divergens.}$$

8.14. Definíció (NEM KORLÁTOS FGV. IMPROPRIUS INTEGRÁLJA)

a.) Legyen $f(x)$ függvény Riemann integrálható (ezért korlátos) az $[a; b]$ intervallum minden $[a+\varepsilon; b]$ ($\varepsilon > 0$) részintervallumában, de nem korlátos az $[a; b]$ intervallumon. Ha létezik és véges a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ határérték, ezt nevezzük az $f(x)$ függvény $[a; b]$ intervallumon vett improprius integráljának.

$$\text{Jelölésben: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx .$$

b.) Legyen $f(x)$ függvény Riemann integrálható (ezért korlátos) az $[a; b]$ intervallum minden $[a; b-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) részintervallumában, de nem korlátos az $[a; b]$ intervallumon.

Ha létezik és véges a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ határérték, ezt nevezzük az $f(x)$ függvény $[a; b]$ intervallumon vett improprius integráljának.

$$\text{Jelölésben: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx .$$

c.) Legyen $c \in (a; b)$ és $f(x)$ függvény Riemann integrálható (ezért korlátos) az $[a; b]$ intervallum minden $[a; c-\varepsilon_1] \cup [c+\varepsilon_2; b]$ részhalmazán, de nem korlátos az $[a; b]$

intervallumon. Ha (egymástól függetlenül) léteznek $\int_a^c f(x) dx$

és $\int_c^b f(x) dx$ improprius integrálok, e két integrál összegét nevezzük az $f(x)$ függvény $[a; b]$ intervallumon vett improprius integráljának.

Ez utóbbi improprius integrál jelölése :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx$$

Példa:

$$1.) \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1+\operatorname{ctg} x)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\pi/4} f(x) dx \cdot \frac{1}{(1+\operatorname{ctg} x)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{(1+\operatorname{ctg} x)} \right]_{\epsilon}^{\pi/4} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\operatorname{ctg} \epsilon} \right] = \frac{1}{2}$$

2.) Az $[a; b]$ intervallumon vett improprius integrál létezéséhez nem elegendő, ha a $c \in (a; b)$ pontot tartalmazó intervallumon korlátos $f(x)$ függvény esetén a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right] \text{ határérték létezik.}$$

Tekintsük erre példaként az alábbi függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \in [-1; 2] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon}^2 \frac{1}{x} dx \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\ln |-\epsilon| - \ln |-1| + \ln 2 - \ln \epsilon] = \ln 2$$

Ezzel szemben, ha tekintjük pl. az

$$\int_0^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\ln 2 - \ln \epsilon) = \infty$$

improprius integrált, látható, hogy a vizsgált határérték

nem véges, így $\int_0^2 f(x) dx$ nem létezik (divergens) tehát

$\int_0^2 f(x) dx$ improprius integrál is divergens.

8.4. Feladatok a 8. fejezet anyagához

$$\text{F.8.1.a.) } \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{b.) } (^*) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$$

$$\text{c.) } (^*) \int_{-5}^{-1} |x-4| dx$$

$$\text{d.) } \int_{-2}^2 \sqrt{2+|x|} dx$$

$$\text{F.8.2. a.) } (^*) \int_0^2 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}} dx$$

$$\text{b.) } \int_0^{1/2} \sin^{-1} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{c.) } \int_{-3}^4 \sqrt{25-x^2} dx$$

$$\text{d.) } (^*) \int_0^3 \sqrt{9+x^2} dx$$

F.8.3. Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:

$$\text{a.) } (^*) f(x) = \ln(1-x^2); \quad 0 \leq x \leq 1/2$$

$$\text{b.) } f(x) = \sqrt{x^3}; \quad 1 \leq x \leq \sqrt[3]{4}$$

$$\text{c.) } f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}; \quad 1 \leq x \leq 2$$

F.8.4. Határozza meg az alábbi forgástestek térfogatát:

$$\text{a.) } (^*) f(x) = \frac{1}{\cos x}; \quad V_x \left[0; \frac{\pi}{4} \right];$$

$$\text{b.) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}; \quad e \leq x \leq e^2$$

$$\text{c.) } f(x) = x \cos x; \quad V_x \left[0; \frac{\pi}{2} \right];$$

$$\text{d.) } f(x) = \text{sh } x; \quad V_x [0; 1]$$

F.8.5. Határozza meg az alábbi forgástestek felszínét:

$$\text{a.) } f(x) = \text{ch } x; \quad F_x [0; 1];$$

$$\text{b.) } f(x) = \sqrt{9-x^2}; \quad F_x [0; 3];$$

$$\text{c.) } (^*) f(x) = x^3; \quad F_x [1; 2];$$

F.8.6. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \int_1^2 \frac{1}{e^x - 1} dx & \quad ; \quad \text{b.) }^{(*)} \int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx \\ \text{c.) }^{(*)} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cdot \cos x}{1 + \cos x} dx & \quad ; \quad \text{d.) }^{(*)} \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 \cdot (x^2 + 4)} dx \\ \text{e.) } \int_{-\pi/2}^{-\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot (\cos x - 1)} dx & \quad ; \quad \text{f.) }^{(*)} \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

F.8.7. Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat, ha léteznek:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} dx & \quad ; \quad \text{b.) }^{(*)} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx \quad ; \quad \text{c.) }^{(*)} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx \\ \text{d.) } \int_0^1 \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} dx & \quad ; \quad \text{e.) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad \text{f.) } \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \\ \text{g.) } \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx & \quad ; \quad \text{h.) }^{(*)} \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot e^x dx \quad ; \\ \text{i.) }^{(*)} \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1) \cdot (x+3)} dx & \quad ; \quad \text{j.) } \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

F.8.8.^(*) Az alábbi improprius integrálokról állapítsa meg, hogy konvergens, vagy divergens:

$$\text{a.) } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad ; \quad \text{b.) } \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx \quad ; \quad \text{c.) } \int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} dx$$

9. Függvénysorok

9.1. Alapfogalmak

D.9.1. Definíció (FÜGGVÉNYSOR)

Legyenek az $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... függvények valamennyien értelmezve az $\langle a; b \rangle$ intervallumon.

Ezen függvényekkel $\forall x_0 \in \langle a; b \rangle$ számhoz hozzárendelhetünk egy $S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ numerikus végtelen sort. Tekintsük azon $x_0 \in \langle a; b \rangle$ pontokat, amelyekben ez a numerikus végtelen sor konvergens. Ezen pontokra az előbbiekben megadott hozzárendeléssel egy $S(x)$ függvényt definiáltunk, amely

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ végtelen összeget nevezünk függvénysornak.}$$

Megjegyzés:

Mivel az $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ végtelen összeget formálisan az $\langle a; b \rangle$ intervallum azon pontjaira is felírhatjuk, ahol a megfelelő numerikus végtelen sor divergens, az $\langle a; b \rangle$ intervallumon értelmezett $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... függvényekkel a teljes $\langle a; b \rangle$ intervallumon definiáltuk az $S(x)$ függvénysort. Ezt a függvénysort konvergensnek mondjuk azon $x \in \langle a; b \rangle$ pontokban, ahol a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ numerikus végtelen sor konvergens, és divergensnek mondjuk azon $x \in \langle a; b \rangle$ pontokban, ahol a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ numerikus végtelen sor divergens. A konvergenciapontokban értelmezett $S(x)$ függvényt a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor határfüggvényének nevezzük.

Példaként tekintsük az $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ függvénysort. Ezen függvénysort $\forall x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén felírhatjuk, azonban csupán $x \in (-1; 1)$ esetén lesz konvergens. Határfüggvénye itt

$$S(x) = x/(1-x)$$

Definíció

Adott az $\langle a; b \rangle$ intervallumon az $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor.

Az $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ $\langle a; b \rangle$ intervallumon értelmezett függvények sorozatát az $S(x)$ függvénysor részletösszegeinek nevezzük.

D.9.3. Definíció (EGYENLETES KONVERGENCIA)

Legyen adott az $\langle a; b \rangle$ intervallumon a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor, a függvénysor határfüggvénye, $S(x)$, továbbá részletösszegeinek sorozata, $S_n(x)$.

A függvénysor $\langle a; b \rangle$ -n egyenletesen konvergál az $S(x)$ határfüggvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $\forall x \in \langle a; b \rangle$ esetén $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Az egyenletes konvergencia jelölése: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \Rightarrow S(x)$.

Példa:

Legyen

$$f_1(x) = x; f_2(x) = x^2 - x; f_3(x) = x^3 - x^2; \dots; f_n(x) = x^n - x^{n-1}; \dots$$

akkor $S_n(x) = x^n$, s az így megadott $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor egyenletesen konvergál az $S(x) \equiv 0$ határfüggvényhez pl. a $[0; 0,9]$ intervallumon, a konvergencia azonban nem egyenletes a $[0; 1)$ intervallumon, vagy a $[0; 1]$ intervallumon, mely utóbbi intervallumon a határfüggvény is más, nevezetesen az

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases} \quad \text{függvény.}$$

T.9.1. Tétel

Legyenek az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ függvények az $[a; b]$ zárt intervallumon folytonosak, továbbá konvergáljon egyenletesen $[a; b]$ -n a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor az $S(x)$ határfüggvényhez. Ekkor az $S(x)$ határfüggvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos.

A tételt nem bizonyítjuk.

T.9.2. Tétel

Ha az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ függvények az $[a; b]$ intervallumon differenciálhatók, és $[a; b]$ -n az $S(x) = \sum f_n(x)$ függvény-sor konvergens, továbbá a $h(x) = \sum f'_n(x)$ derivált sor egyenletesen konvergens, akkor $S(x)$ az $[a; b]$ -n deriválható, és

$$S'(x) = h(x) \text{ azaz } \left(\sum f_n(x) \right)' = \sum f'_n(x).$$

A tételt nem bizonyítjuk.

T.9.3. Tétel

Ha az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ függvények az $[a; b]$ intervallumon Riemann-integrálhatók, és a $\sum f_n(x)$ függvény-sor $[a; b]$ -n egyenletesen konvergál az $S(x)$ határfüggvényhez, akkor $[a; b]$ -n $S(x)$ is Riemann-integrálható

$$\text{és } \int_a^b S(x) dx = \sum \int_a^b f_n(x) dx.$$

A tételt nem bizonyítjuk.

9.2. Hatványsorok

D.9.4. Definíció (HATVÁNSOR)

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ és $f_n(x) = a_n \cdot (x - x_0)^n$.

A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ függvény-sort az x_0 kifejtési

helyhez tartozó hatványsornak nevezzük.

Megjegyzés:

A hatványsor fenti definíciója kiterjeszthető komplex x, x_0 ,

ill. a_n esetére is.

T.9.4. Tétel (CAUCHY-HADAMARD, HATVÁNSOROK KONVERGENCIASUGARA)

Minden $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ hatványsorhoz létezik egy $r \in \mathbb{R}^+$ nemnegatív, "valós" szám úgy, hogy $|x-x_0| < r$ esetén a hatványsor konvergens és $|x-x_0| > r$ esetén a hatványsor divergens, továbbá

$$r = \begin{cases} 0 & \text{ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{l} & \text{ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Ez az r a hatványsor konvergenciasugara. Valós hatványsor esetén az $(x_0 - r; x_0 + r)$ intervallum a hatványsor konvergenciaintervalluma.

A tételt nem bizonyítjuk.

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy a Cauchy-Hadamard tétel az $|x-x_0|=r$ esetre nem mond semmit a konvergenciáról ill. a divergenciáról. Ilyen esetekre külön konvergenciavizsgálat szükséges.

Következmény:

Konvergenciaintervallumán belül minden hatványsor abszolút konvergens.

T.9.5. Tétel

Minden hatványsor egyenletesen konvergens konvergenciaintervallumának tetszőleges véges, zárt részintervallumában.

Nem bizonyítjuk.

Következmény:

- 1.) A hatványsor határfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében folytonos függvény. (T.9.1. tétel)
- 2.) A hatványsor konvergenciaintervallumának belsejében tagonként differenciálható és integrálható. (T.9.2. ill. T.9.3. tételek, + T.9.6. tétel)

T.9.6. Tétel

Minden hatványsor derivált sorának konvergenciasugara egyenlő az eredeti hatványsor konvergenciasugarával.

Bizonyítás:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \implies S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-x_0)^n, \quad (b_n = (n+1) \cdot a_{n+1})$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1) \cdot |a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

D.9.5. Definíció (TAYLOR SOR)

Legyen az f függvény az x_0 pont egy $U(x_0)$ környezetében tetszőlegesen sokszor differenciálható.

a $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$ hatványsort nevezzük az f függvény x_0 pont körüli Taylor sorának.

Az $x_0=0$ pont körüli Taylor sor elnevezése: Mac Laurin sor.

T.9.7. Tétel

Legyen $T(x)$ az f függvény x_0 pont körüli Taylor sora, R a Taylor sor konvergenciasugara, $T_n(x)$ az f függvény x_0 pont körüli n -edfokú Taylor polinomja és $r_n(x)$ a Taylor polinom maradéktagja.

Ha $|x-x_0| < R$ akkor az $r_n(x)$ függvényt sorozat konvergál egy $r(x)$ határfüggvényhez.

Bizonyítás:

Mivel a hatványsor a T.9.4. tétel értelmében konvergenciaintervalluma belsejében konvergens, és $T_n(x)$ a konvergens hatványsor n -ik részletösszege, ezért

$$T_n(x) \rightarrow T(x) \quad \forall x \in (x_0-R; x_0+R) \text{ esetén.}$$

A T.6.9. Taylor tétel értelmében pedig $f(x) = T_n(x) + r_n(x)$.

$$\text{Ebből adódóan } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x) - T(x) = r(x).$$

Következmény:

$r(x) \equiv 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = T(x)$.

T.9.8. Tétel (HATVÁNSOROK UNICITÁSI TÉTELE)

Legyen adott a $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ hatványsor, amelynek $(a;b)$ konvergenciaintervallumán a határfüggvénye $f(x)$.

Ekkor az adott hatványsor az x_0 kifejtési hely körüli hatványsorok közül az egyetlen, amelyre az $(a;b)$ -n

$$f(x) = \sum a_n \cdot (x-x_0)^n \text{ teljesül.}$$

A tételt nem bizonyítjuk.

Következmény:

Ha az f függvény az $\langle a;b \rangle$ intervallumon akárhányszor differenciálható, és $f(x) = \sum a_n \cdot (x-x_0)^n$, akkor

$$a_n = f^{(n)}(x_0) / n!, \text{ azaz a } \sum a_n \cdot (x-x_0)^n$$

hatványsor az f függvény x_0 pont körüli Taylor sora.

Példa:

Ha $|x| < 1$ akkor $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$, a geometriai sorról tanultakból adódóan.

Alkalmazva a T.9.5. tétel tagonkénti integrálhatóságra vonatkozó következményét, valamint a T.9.8. unicitási tételt, megkapjuk az $f(x) = \arctg x$ függvény Mac Laurin sorát:

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

9.3. Komplex számok exponenciális alakja

A T.6.9. Taylor tétel értelmében az e^x exponenciális függvény az alábbi alakban írható fel:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Mivel } \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

a T.9.7. tétel szerint adódik, hogy az e^x függvény egyenlő Mac Laurin sorával:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Vegyük most figyelembe a D.9.4. definíciónál megadott megjegyzést, amely szerint a hatványsorok kiterjeszthetők a komplex változós esetre is:

Legyen $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám. Definiálja az e^z komplex változós exponenciális függvényt az

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!} \quad \text{komplex változós hatványsor.}$$

$$\text{legyen } z = i \cdot x \Rightarrow \begin{cases} z^{2n} = i^{2n} \cdot x^{2n} = (-1)^n \cdot x^{2n} \\ z^{2n+1} = i^{2n+1} \cdot x^{2n+1} = (-1)^n \cdot x^{2n+1} \cdot i \end{cases}$$

ezzel

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) =$$

$$= \cos x + i \cdot \sin x$$

A komplex számok $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ trigonometrikus alakját figyelembevéve, adódik:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$

amely $z = r \cdot e^{i\varphi}$ ú.n. Euler féle alak a komplex számok exponenciális alakja.

9.4. Fourier sorok

Ebben az alfejezetben olyan függvénysorokkal ismerkedünk meg, amelyek részletösszegeivel bizonyos periodikus függvényeket tudunk jól közelíteni.

D.9.6. Definíció

Legyen az f függvény a $[-l; l]$ intervallumon Riemann-integrálható függvény, továbbá periodikus, és periódusa $2l$.

Legyen továbbá

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad ; \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad ; \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\} \quad \text{függvénysort}$$

az f függvény Fourier sorának nevezzük.

D.9.7. Definíció

Az f függvényt az $[a; b]$ intervallumon szakaszonként folytonosnak nevezzük, ha f az $[a; b]$ intervallumon az intervallum véges sok pontjának kivételével folytonos, és ezen véges sok szakadási pontban f -nek véges jobb- és baloldali határértéke van.

T.9.9. Tétel

Legyen f $2l$ szerint periodikus függvény, továbbá legyenek f és f' a $[-l; l]$ intervallumon szakaszonként folytonos függvények.

Ekkor az f függvény Fourier sora $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ pontban konvergál az

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right\} \quad \text{értékhez.}$$

T.9.10. Tétel

Legyen f 2ℓ szerint periodikus, periódus-intervallumán Riemann-integrálható függvény, melynek Fourier sora:

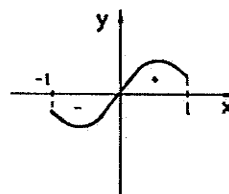
$$\frac{a_0}{2} + \sum \left(a_n \cdot \cos(n\pi x/\ell) + b_n \cdot \sin(n\pi x/\ell) \right)$$

- a.) Ha f páros függvény, akkor Fourier sorában $\forall b_n = 0$.
 b.) Ha f páratlan függvény, akkor Fourier sorában $\forall a_n = 0$.

Bizonyítás:

A bizonyításhoz használjuk fel azt a geometriailag könnyen szemléltethető segédtelet, amely szerint, ha g páratlan függvény, akkor az origóra szimmetrikus $[-\ell; \ell]$ intervallumon vett Riemann-integrálja zérus:

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx &= \int_{-\ell}^0 g(x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx = \\ &= \int_0^{\ell} -g(x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx = 0 \end{aligned}$$



16. ábra

- a.) Mivel f páros függvény, és $\sin(n\pi x/\ell)$ páratlan, a $g(x) = f(x) \cdot \sin(n\pi x/\ell)$ függvény is páratlan $\Rightarrow b_n = 0$.
 b.) Mivel f páratlan függvény, és $\cos(n\pi x/\ell)$ páros, a $g(x) = f(x) \cdot \cos(n\pi x/\ell)$ függvény is páratlan $\Rightarrow a_n = 0$.

9.5. Feladatok a 9. fejezet anyagához

F.9.1.^(*) Legyen $f_1(x) = x$; $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$ ha $n > 1$

$$\text{és } S(x) = \sum f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

Legyen továbbá $\varepsilon = 0,0001$.

Adja meg azon $N_{x_0}(\varepsilon)$ értékét, amelyre $|S(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon$ ha $n > N_{x_0}(\varepsilon)$ a.) $x_0 = 0,9$; b.) $x_0 = -0,9$ esetén.

F.9.2. Adja meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát ill. konvergenciaintervallumát:

a.) $1 + x/2 + x^2/4 + x^3/8 + \dots = \sum x^n/2^n$

b.) ^(*) $1 - x/3 + 4x^2 - x^3/27 + 16x^4 - x^5/3^5 + 4^6 \cdot x^6 - \dots$

c.) $2 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 2^3(x-1)^3 + 3^2(x-1)^4 + \dots$

d.) ^(*) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$

F.9.3. Írja fel az alábbi függvények Mac Laurin sorát:

a.) $2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; b.) $1 - \sin^2 x$

c.) $1/(1+x)$ és $\ln(1+x)$

d.) ^(*) $1/\sqrt{1-x^2}$ és $\arcsin x$

F.9.4. ^(*) Az alábbi komplex számokat írja fel exponenciális alakban:

$$z_1 = 1+i ; z_2 = 1-\sqrt{3} \cdot i ; z_3 = -2i$$

F.9.5. Írja fel az alábbi függvények Fourier sorát:

a.) $f(x)=x+1$ ha $x \in (-\pi; \pi]$ és $f(x+2\pi)=f(x)$

b.) ^(*) $f(x)=x$ ha $x \in (-\pi; \pi]$ és $f(x+2\pi)=f(x)$

c.) $f(x)=x^2$ ha $x \in (-\pi; \pi]$ és $f(x+2\pi)=f(x)$

d.) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{ha } x \in [-\pi/2; \pi/2] \\ 0 & \text{ha } x \in (-\pi; -\pi/2) \cup (\pi/2; \pi] \end{cases}$ és $f(x+2\pi)=f(x)$

e.) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in (-\pi; 0) \\ 2 & \text{ha } x \in [0; \pi] \end{cases}$ és $f(x+2\pi)=f(x)$

F.9.6. ^(*) Írja fel az alábbi függvény Fourier sorát, majd adja meg azon numerikus sor összegét, amelyet az $x=\pi/2$ helyettesítéssel kap.

$f(x)=1-x$ ha $x \in (-\pi; \pi]$ és $f(x+2\pi)=f(x)$

10. A lineáris algebra alapjai

10.1. Determinánsok

D.10.1. Definíció (MÁSODRENDŰ DETERMINÁNS)

Legyenek adottak a, b, c, d tetszőleges (valós vagy komplex) számok

$$A \quad D^{(2)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot d - b \cdot c \text{ kifejezést, amelynek értékét}$$

a definiáló egyenlőség szerint számítjuk ki, másodrendű determinánsnak nevezzük.

A másodrendű determinánsnak 2 sora és 2 oszlopa van, elemei az a, b, c, d számok.

A másodrendű determináns jelölése, célszerűen, hogy az elemek jelöléséből mindjárt a sor ill. az oszlop szerinti elhelyezkedésük is leolvasható legyen:

$$D^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Megjegyzés:

1.) Definíálhatunk elsőrendű determinánst is: $D^{(1)} = |a_{11}| = a_{11}$

Figyelem! Itt $|a_{11}|$ nem abszolútértéket jelöl!

2.) A másodrendű determinánshoz hasonlóan felírhatunk (ez még nem definíció!) tetszőleges n -edrendű ($n > 2$) determinánst is:

$$D^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A felírásból látszik,
hogy $D^{(n)}$ -ben
 n db sor és n db oszlop van.

3.) $D^{(n)}$ tetszőleges a_{ij} eleméhez egyértelműen definiáljuk a $D_{ij}^{(n-1)}$ $(n-1)$ -edrendű determinánst, úgy hogy $D^{(n)}$ -ből elhagyjuk i -edik sorát és j -edik oszlopát.

Az n -edrendű determinánst teljes indukcióval definiáljuk, azaz felhasználjuk a másodrendű determináns D.10.1. definícióját, majd az $(n-1)$ -edrendű determináns segítségével definiáljuk az n -edrendű determinánst $n > 2$ esetére.

D.10.2. Definíció (N-EDRENDŰ DETERMINÁNS ; $N > 2$)

Legyenek adottak az $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$ (összesen n^2 db) valós vagy komplex számok.

$$A_{D^{(n)}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot D_{1j}^{(n-1)} \cdot (-1)^{1+j}$$

kifejezést,

amelynek értéke a definiáló egyenlőség szerint számítható ki, n -edrendű determinánsnak nevezzük.

Megjegyzés:

az $A_{1j} = (-1)^{1+j} \cdot D_{1j}^{(n-1)}$ kifejezést az a_{1j} elemhez tartozó algebrai adjungáltnak nevezzük.

Ezzel a jelöléssel: $D^{(n)} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot A_{1j}$

Példa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

T.10.1.Tétel(ek) (A DETERMINÁNSOK TULAJDONSÁGAI)

- 1.) A determináns értéke nem változik, ha elemeit a determináns főátlójára tükrözzük, azaz a determinánst transzponáljuk. (Nem bizonyítjuk.)

$$\text{Pl.: } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (-3) = 13$$

Következmény: a determináns soraira kimondott tételek a determináns oszlopokra is érvényesek. (És fordítva, amit az oszlopokra kimondunk, a sorokra is igaz.)

- 2.) Ha a determináns két sorát (vagy két oszlopát) fölcseréljük, a determináns értéke (-1) -gyel szorozódik. (Nem bizonyítjuk.)

$$\text{Pl.: } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [-3 - 10] = 13$$

Következmény: ha egy determinánsban két, elemenként rendre megegyező sor (vagy oszlop) van, a determináns értéke zérus.

- 3.) A determináns tetszőleges sora (vagy oszlopa) szerint kifejtethető. (Nem bizonyítjuk.)

$$D^{(n)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

- 4.) "Ferde kifejtés" tétele:

$$\text{Ha } i \neq k \text{ akkor } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{kj} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n)$$

$$\text{Bizonyítása } n=3 \text{ esetén: } D^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

legyen $i=1$ és $k=2$:

$$\sum_{j=1}^3 a_{1j} \cdot A_{2j} = -a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \text{ mert két egyenlő sora van.}$$

- 5.) Ha egy determináns tetszőleges sorát (vagy oszlopát) megszorozzuk λ valós vagy komplex számmal, a determináns értéke λ -szorosára változik.

A bizonyítást végezze el gyakorló feladatként pl. harmadrendű determináns esetén úgy, hogy a determinánst aszerint a sora (vagy oszlopa) szerint fejti ki, amelyik sort (vagy oszlopot) a λ számmal szorozta.

- 6.) Ha egy determináns valamelyik sorában (vagy oszlopában) álló elemek mindegyike kéttagú összeg, a determináns felírható két determináns összegeként az alábbiak szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{i1} + b_{i1}) & (a_{i2} + b_{i2}) & \dots & (a_{in} + b_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A bizonyításhoz fejtse ki a baloldalon álló determinánst i -edik sora szerint!

- 7.) Ha egy determináns tetszőleges sorához (vagy oszlopához) egy másik sorának (vagy oszlopának) λ -szorosát hozzáadjuk, a determináns értéke nem változik. A bizonyításhoz végezze el az alábbi determináns felbontását két determináns összegére, majd alkalmazza az 5. pontban mondottakat, ill. a 2. pont következményét.

$$D^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + \lambda \cdot a_{11}) & (a_{22} + \lambda \cdot a_{12}) & (a_{23} + \lambda \cdot a_{13}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10.2. Mátrixok

D.10.3. Definíció (MÁTRIX)

Egy $k \cdot n$ -es típusú mátrixon $k \cdot n$ db. valós vagy komplex szám k sorban és n oszlopban való elrendezését értjük. Jelölés:

$$A = (a_{ij})_{k \cdot n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

D.10.4. Definíció

Egy mátrix négyzetes, ha sorainak és oszlopainak száma egyenlő. Minden négyzetes mátrixhoz képezhető egy determináns, a mátrix determinánsa az alábbiak szerint:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \det A = D^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Az $n \cdot n$ -es típusú mátrix determinánsa n -edrendű.

D.10.5. Definíció (MÁTRIX ALDETERMINÁNSA)

Egy A mátrix aldeterminánsán értjük annak az A' négyzetes mátrixnak a determinánsát, amely A' mátrixot az A mátrixból hoztunk létre úgy, hogy az A mátrixból sorokat és/vagy oszlopokat hagytunk el.

Megjegyzés:

Aldeterminánsa minden mátrixnak több is van, determinánsa azonban csak a négyzetes mátrixoknak van, és minden négyzetes mátrixnak egyetlen determinánsa van.

D.10.6. Definíció (MÁTRIX RANGJA)

Az A mátrix rangszámán vagy rangján értjük az A mátrixból képezhető legmagasabb rendű, nem zérus. értékű aldetermináns rendjét.

Az A mátrix rangjának jelölése: $\text{rang}(A)$

Megjegyzés:

Ha $k \leq n$ és A $k \cdot n$ -es típusú mátrix, akkor $\text{rang}(A) \leq k$.

Egy mátrix rangja egyértelműen meghatározható.

D.10.7. Definíció (MÁTRIXOK EGYENLŐSÉGE)

Az $A=(a_{ij})$ és $B=(b_{ij})$ $k \cdot n$ -es típusú mátrixok pontosan akkor egyenlőek, ha $\forall i$ és $\forall j$ esetén $a_{ij}=b_{ij}$ teljesül.

D.10.8. Definíció(k) (MÁTRIXMŰVELETEK)

1.) Összeadás:

Legyen $A=(a_{ij})_{k \cdot n}$ és $B=(b_{ij})_{k \cdot n}$; $A+B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij})_{k \cdot n}$

Megjegyzés:

Csak azonos típusú mátrixok adhatók össze. A mátrixok összeadása kommutatív és asszociatív.

2.) Szorzás számmal:

Legyen $A=(a_{ij})_{k \cdot n}$ és λ valós vagy komplex szám.

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{k \cdot n}$$

Megjegyzés:

Ha $k=n$, akkor a $n \cdot n$ -es típusú A ill $\lambda \cdot A$ mátrixoknak létezik a determinánsa, és $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$ teljesül.

3.) Mátrixok szorzása:

Csak olyan két mátrix szorozható össze, amelyeknél teljesül, hogy az első tényezőként szereplő mátrix oszlopainak száma egyenlő a második tényezőként szereplő mátrix sorainak számával. Ebből következően a mátrixok szorzása nem kommutatív művelet.

Legyenek adottak $A=(a_{ij})_{k \cdot n}$ és $B=(b_{ij})_{n \cdot s}$ mátrixok.

Szorzatuk $(A \cdot B)=C_{k \cdot s}=(c_{ij})_{k \cdot s}$ ahol $c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \cdot b_{\ell j}$

A mátrixok szorzásánál az asszociativitás és az összeadásnak a szorzásra vonatkozó disztributivitása teljesül.

D.10.9. Definíció (EGYSÉGMÁTRIX)

Az $E_n=(e_{ij})_{n \cdot n}$ négyzetes mátrix az $n \cdot n$ -es egységmátrix, ha minden főátlóbeli eleme 1 és minden főátlón kívüli eleme

zérus, azaz $e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i=j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

Pl.:

a 3·3-as egységmátrix: $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D.10.10. Definíció (REGULÁRIS ILL. SZINGULÁRIS MÁTRIX)

Az A négyzetes mátrix reguláris ha $\det A \neq 0$,
szinguláris, ha $\det A = 0$.

D.10.11. Definíció (INVERZ MÁTRIX)

Az A és B $n \cdot n$ -es típusú négyzetes mátrixok egymás
inverzei, ha $A \cdot B = B \cdot A = E_n$.

T.10.2. Tétel (AZ INVERZ MÁTRIX EGYÉRTÉLMŰSÉGE)

Legyen A $n \cdot n$ -es típusú nem szinguláris (reguláris)
négyzetes mátrix. Ekkor van inverze, és egyetlen inverze
van.

Az A mátrix inverzének jelölése: A^{-1} .
A tételt nem bizonyítjuk.

Megjegyzés: szinguláris mátrixnak ill. nem négyzetes
mátrixnak nincs inverze!

10.3. Lineáris egyenletrendszerek

D.10.12. Definíció (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER)

Legyen adott az $\underline{A} = (a_{ij})$ $k \cdot n$ -es típusú mátrix, továbbá a
 $\underline{b} = (b_i) = (b_i)$ $k \cdot 1$ -es típusú ún. oszlop mátrix vagy
másnéven oszlopvektor,

és legyenek ismeretlenek az $\underline{x} = (x_i) = (x_i)$ $n \cdot 1$ -es
típusú oszlopvektor elemei.

Az $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel meghatározott

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + \dots + a_{kn} \cdot x_n &= b_k \end{aligned}$$

egyenletrendszert
lineáris egyenletrendszernek
nevezzük.

Az itt felírt lineáris egyenletrendszer k db egyenletből
áll, és n db ismeretlent tartalmaz.

Azt az $\underline{x}$ oszlopvektort, vagyis azt az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
összetartozó szám n -est, amelyre $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ teljesül, az
adott lineáris egyenletrendszer megoldásának nevezzük.

D.10.13. Definíció

Két lineáris egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldásaik azonosak.

Megjegyzés:

Ekvivalens átalakítások a lineáris egyenletrendszeren:

- egyenletek felcserélése
- egy vagy több egyenlet konstansszorosának hozzáadása az egyenletrendszer valamely egyenletéhez
- egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$ számmal

D.10.14. Definíció

Az $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert homogénnek nevezzük, ha a $\underline{b}$ oszlopvektor minden eleme zérus.

Ha egy lineáris egyenletrendszer nem homogén, akkor inhomogénnek nevezzük.

T.10.3. Tétel

A homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van megoldása, azon $\underline{x}$ oszlopvektor, melynek minden eleme zérus. Ezt a megoldást a homogén lineáris egyenletrendszer triviális megoldásának nevezzük.

D.10.15. Definíció

Legyenek adottak $\underline{A} = (a_{ij})$ $k \cdot n$ -es típusú mátrix és $\underline{b} = (b_i)$ $k \cdot 1$ -es típusú oszlopmátrix.

Az $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenlet bővített mátrixának nevezzük azt az $\underline{A}_b$ $k \cdot (n+1)$ -es típusú mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy az $\underline{A}$ mátrixhoz utolsó oszlopként hozzáírjuk a $\underline{b}$ oszlopvektort.

T.10.4. Tétel (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDHATÓSÁGA)

Az $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_b)$.

Ha a lineáris egyenletrendszerben szereplő ismeretlenek száma n , továbbá $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_b) = r$, akkor a lineáris egyenletrendszernek

- pontosan egy megoldása van, ha $n=r$
- végtelen sok megoldása van, $n-r$ szabad paraméterrel, ha $n>r$

A tételt nem bizonyítjuk.

Megjegyzés: vagy $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_b)$ vagy $\text{rang}(A_b) = 1 + \text{rang}(A)$

Bár a T.10.4. tételt nem bizonyítottuk, az alábbiakban összefoglalunk egy eljárást, a Gauss féle eliminációs eljárást, amely világossá teszi a T.10.4. tétel bizonyításának elvét.

A Gauss féle eliminációs eljárásnak az a célja, hogy az eredeti $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszerből ekvivalens átalakítási lépésekkel olyan lineáris egyenletrendszert hozzunk létre, amelynek mátrixában $a_{ij} = 0$ ha $i > j$, azaz a mátrix "főátlója" alatti elemek zérusok.

A Gauss módszer lépései:

Legyen adott az alábbi lineáris egyenletrendszer:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + \dots + a_{kn} \cdot x_n = b_k$$

1.) Az egyenletrendszerben megkeressük az első olyan egyenletet, (legyen ez az i -edik) amelyikben $a_{i1} \neq 0$, és ezt az egyenletet felcseréljük az első egyenlettel. A továbbiakban értelemszerűen az egyenletrendszer együtthatóit is átindexeljük, tehát a sorcsere előtti a_{ij} -k most a_{ij} -k lesznek, az a_{ij} -k a_{ji} -k, b_i -ből b_1 lesz, és b_1 -ből b_i . Ezt az "átindexelő" lépést ezután magától értetődőnek tekintjük, külön nem fogjuk említeni.

2.) Az első helyen álló egyenlet a_{21}/a_{11} -szeresét levonva a második egyenletből elimináljuk a második egyenletből az x_1 ismeretlent; majd ezt a lépést a többi egyenlettel is elvégezzük, az első helyen álló egyenlet a_{j1}/a_{11} -szeresét használva az eliminációhoz a j -edik egyenletnél.

Eredmény:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

:

$$a_{k2} \cdot x_2 + \dots + a_{kn} \cdot x_n = b_k$$

3.) Az új, ekvivalens egyenletrendszer második egyenletétől kiindulva megkeressük az első olyan egyenletet (legyen ez az m -edik), amelyikben $a_{m2} \neq 0$, és ezt az egyenletet felcseréljük a másodikkal, majd eliminációt végzünk a második helyen álló egyenlet a_{j2}/a_{m2} - szeresét használva a j -edik egyenletből az x_2 ismeretlen kiküszöböléséhez.

Az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg az alábbi két eset egyikéhez nem jutunk:

a.) Az alábbi alakhoz jutunk, ahol $r \leq n$ és $r \leq k$ valamint $a_{11} \neq 0$

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1r} \cdot x_r + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2r} \cdot x_r + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$$a_{rr} \cdot x_r + \dots + a_{rn} \cdot x_n = b_r$$

A fenti egyenletrendszer együtthatói természetesen a sorozatos átjelölések következtében már nem az eredeti a_{ij} -k.

Ebben az esetben a lineáris egyenletrendszernek van megoldása, és pedig, ha $r=n$, akkor egyetlen megoldás van, ha pedig $r < n$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, amely végtelen sok megoldásból úgy adhatunk meg egyet, hogy az utolsó egyenletben szereplő $(n-r+1)$ ismeretlenből $(n-r)$ ismeretlennek az értékét szabadon megválasztjuk, a fennmaradó egyet pedig ezen utolsó egyenletből kiszámítjuk. A többi egyenletből ezután értelemszerűen adódik a többi ismeretlen számítása.

A módszerből pontosan látható, hogy mit jelent a T.10.4. tételben az egyetlen megoldás ill. a végtelen sok megoldás esetén az $(n-r)$ szabad paraméter.

b.) Az elimináció során valamelyik egyenletben minden a_{ij} együttható zérussá válik és $b_i \neq 0$. Ez ellentmondást jelent, tehát a lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása.

Megjegyzés:

Nem térünk még ki arra az esetre, ha az eliminációban az x_p ismeretlen kiküszöböléséhez az egyenletek között lefelé haladva nem találunk olyan egyenletet, ahol $a_{mp} \neq 0$. Ilyenkor az adott ismeretlent szabad paraméternek tekinthetjük, amennyiben az egyenletrendszernek van megoldása.

A most következő tétel arra az igen fontos esetre vonatkozik, amikor az egyenletrendszer egyenleteinek és ismeretlenek a száma egyenlő.

T.10.5.Tétel (CRAMER SZABÁLY)

Legyen az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszer A mátrixa négyzetes mátrix.

A fenti lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha az A mátrix nem szinguláris tehát $\det A \neq 0$. Ez az egyetlen megoldás az alábbiak szerint

számítható:

$$x_i = \frac{D_i}{\det A}$$

ahol a D_i determináns úgy képezhető $\det A$ -ból, hogy $\det A$ i -edik oszlopvektorának a helyére a b oszlopvektort helyettesítjük.

Bizonyítás:

1.) Tegyük fel, hogy $\det A \neq 0$. Ekkor $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_b) = n$, tehát az egyenletrendszernek a T.10.4. tétel szerint egyetlen megoldása van.

2.) Tegyük fel, hogy az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, ekkor a T.10.4. tétel szerint $\text{rang}(A) = n$, tehát $\det A \neq 0$.

Megjegyzés:

A tételnek a megoldás kiszámítására vonatkozó részét nem bizonyítjuk, azonban 2 ismeretlen esetre gyakorló feladatként írják fel a megoldást a középiskolából jól ismert egyenlő együtthatók módszerével, majd vessék ezt össze a determinánsokról tanultakkal.

10.4. Vektorok

Ebben az alfejezetben a fizikai (háromdimenziós) tér vektoraival fogunk foglalkozni. A háromdimenziós tér jelölése: $\mathbb{R}^3$, a kétdimenziós téré (síké): $\mathbb{R}^2$.

D.10.16. Definíció (VEKTOR)

Vektornak nevezzük a tér adott hosszúságú, irányú és irányítású szakaszainak összességét. Ezen halmaz egy elemét a vektor egy reprezentánsának nevezzük.

Az így definiált vektor az ún. szabadvektor. A szabadvektor kiindulási pontja tetszőleges, az egyes reprezentánsok egymásbavihetők párhuzamos eltolással.

A kötött vektor a szabadvektortól annyiban különbözik, hogy kiindulási pontja rögzített.

A továbbiakban a vektor szabadvektort fog jelenteni.

A középiskolából ismertnek tekintjük az alábbiakat:

- 1.) a nullvektort (hossza zérus, iránya, irányítása tetszőleges)
- 2.) két vektor összeadására vonatkozó háromszög ill. paralellogramma módszert, valamint a vektorok összeadására vonatkozó kommutativitást és asszociativitást.
- 3.) a vektorok számmal való szorzását:
legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$.
a $\lambda \cdot \underline{a}$ vektor az $\underline{a}$ vektor, amelynek
 - hosszúsága: $|\lambda \cdot \underline{a}| = |\lambda| \cdot |\underline{a}|$
 - iránya megegyezik $\underline{a}$ irányával
 - irányítása:
 - megegyezik $\underline{a}$ irányításával ha $\lambda > 0$
 - ellentétes $\underline{a}$ irányításával ha $\lambda < 0$

a számmal való szorzás tulajdonságai: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \underline{a} &= \underline{a} \cdot \lambda & ; & & \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{a}) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{a} \\ \lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) &= \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b} & ; & & (\lambda + \mu) \cdot \underline{a} &= \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a} \end{aligned}$$

- 4.) két vektor párhuzamosságát:

$$\underline{a} \parallel \underline{b} \iff \underline{b} = \lambda \cdot \underline{a} \text{ vagy } \underline{a} = \underline{0}$$

(a nullvektor tetszőleges vektorral párhuzamosnak - de ugyanígy merőlegesnek is - tekinthető)

T.10.6.Tétel

a.) Legyenek adottak $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges nem párhuzamos vektorok. Ezen vektorok által meghatározott sík tetszőleges $\underline{v}$ vektora előállítható $\underline{v} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{b}$ alakban ahol λ és μ egyértelműen meghatározott számok.

b.) Legyenek adottak $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges, nem egy síkban fekvő vektorok. Ekkor a tér tetszőleges $\underline{v}$ vektora előállítható $\underline{v} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c}$ alakban, ahol α, β és γ egyértelműen meghatározott számok.

A tétel bizonyítása gyakorló feladat. (Az előállíthatósághoz használja a paralellogramma módszert!)

D.10.17.Definíció (VEKTOROK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA)

Legyenek adottak az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorok, és a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számok. A $\underline{b} = \lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{a}_n$ vektort az $\{\underline{a}_i\}_{i=1}^n$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

D.10.18.Definíció (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG)

Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorokból álló halmazt lineárisan függetlennek nevezzük pontosan akkor, ha a

$$\underline{0} = \lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{a}_n \quad (*)$$

teljesüléséből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Egyébként az $\{\underline{a}_i\}_{i=1}^n$ halmazt lineárisan függőnek nevezzük.

Megjegyzés: Egyetlen független vektorrendszer (halmaz) sem tartalmazza a zérusvektort.

T.10.7.Tétel

Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorok pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha közülük valamelyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás:

a.) Tegyük fel, hogy $\exists \underline{a}_j$ a rendszerben, amely a többi vektorral kifejezhető: $\underline{a}_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot \underline{a}_i \Rightarrow \underline{0} = -\underline{a}_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot \underline{a}_i$, tehát ekkor a vektorok lineáris kombinációjaként a nullvektor is kifejezhető.

b.) Tegyük fel, hogy a nullvektor kifejezhető az adott vektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{0} = \sum \lambda_i \cdot \underline{a}_i$ és $\exists \lambda_j \neq 0$.

Ekkor $\underline{a}_j = \sum_{i \neq j} (-\lambda_i / \lambda_j) \cdot \underline{a}_i$

Megjegyzés:

Ha egy vektorrendszer a nullvektort tartalmazza, akkor csak lineárisan összefüggő vektorrendszer lehet.

T.10.8. Tétel

- 1.) Az egyenesen $\exists$ egy lineárisan független rendszert alkotó vektor, de bármely két vektor lineárisan összefüggő rendszert alkot.
- 2.) A síkban $\exists$ két lineárisan független rendszert alkotó vektor, de bármely három vektor lineárisan összefüggő rendszert alkot.
- 3.) A térben $\exists$ három lineárisan független rendszert alkotó vektor, de bármely négy vektor lineárisan összefüggő rendszert alkot.

Bizonyítás:

- 1.) Az egyenes bármely két vektora párhuzamos egymással.
- 2.) : 3.) a T.10.6. tétel következménye.

D.10.19. Definíció (VEKTORTÉR DIMENZIÓJA)

Egy vektorteret n dimenziósnak nevezünk, ha létezik benne n db lineárisan független rendszert alkotó vektor, de bármely $(n+1)$ db. vektor lineárisan összefüggő.

Megjegyzés: a vektortér pontos definícióját még nem adtuk meg, egyelőre csupán szemlélet alapján foglalkozunk az egyenessel, síkkal, fizikai térrel, mint rendre 1, 2, ill. 3 dimenziós vektorterekkel.

D.10.20. Definíció (VEKTOROK KOORDINÁTÁS ALAKJA)

Legyenek adottak az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ egységnyi hosszúságú, térbeli vektorok, amelyek egymásra páronként merőlegesek, és a $\underline{k}$ vektor olyan irányítású, hogy végpontjából "visszanézve" az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok által meghatározott síkra, az $\underline{i}$ vektort a $\underline{j}$ vektorba 180° -nál kisebb (jelen esetben 90° -os) pozitív irányú elforgatás viszi át. (Ekkor az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok - az adott sorrendben - jobbsodrású rendszert alkotnak.)

Az így megadott $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok nincsenek egy síkban, tehát a T.10.6. tétel szerint egyértelműen meghatározott lineáris kombinációjuk megadja a tér tetszőleges $\underline{v}$ vektorát.

A $\underline{v} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k} = (x, y, z)$ a $\underline{v}$ vektor koordinátás alakja, az (x, y, z) rendezett számhármast a vektor koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzés: Az (x, y, z) rendezett számhármast fogalmát fogjuk majd kiterjeszteni - rendezett szám n -esként - ahhoz, hogy az n dimenziós tér vektorait megadhassuk.

T.10.9. Tétel

1.) Az összeadás koordinátás alakban:

Legyen $\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\underline{b} = (b_x, b_y, b_z)$

Ekkor $\underline{a} + \underline{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$

2.) Skalárral való szorzás koordinátás alakban:

Legyen $\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$

Ekkor $\lambda \cdot \underline{a} = (\lambda \cdot a_x; \lambda \cdot a_y; \lambda \cdot a_z)$

A tétel bizonyítása gyakorló feladat.

D.10.21. Definíció (SKALÁRSZORZAT)

Legyenek adottak az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok, melyek abszolútértéke $|\underline{a}|$ és $|\underline{b}|$, valamint az $\underline{a}$ vektort a $\underline{b}$ vektorba forgató szög legyen φ . ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$)

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skalárszorzatának nevezzük az

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \varphi \quad \text{valós számot.}$$

T. 10.10. Tétel (A SKALÁRSZORZAT TULAJDONSÁGAI)

Legyenek adottak $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1.) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ (kommutativitás)
- 2.) $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$ (disztributivitás)
- 3.) $(\lambda \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b} = \lambda \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b})$
- 4.) $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2$
- 5.) $\underline{a} \perp \underline{b} \iff \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

A tulajdonságok belátása gyakorló feladat.

Megjegyzés:

$(\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{c} \neq \underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c})$ mivel a baloldali vektor $\underline{c}$ -vel, a jobboldali pedig $\underline{a}$ -val párhuzamos!

T. 10.11. Tétel (A SKALÁRSZORZAT KOORDINÁTÁS ALAKJA)

Legyen $\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\underline{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Ekkor $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

Bizonyítás:

A műveleti tulajdonságok alapján :

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{b} &= (a_x \cdot \underline{i} + a_y \cdot \underline{j} + a_z \cdot \underline{k}) \cdot (b_x \cdot \underline{i} + b_y \cdot \underline{j} + b_z \cdot \underline{k}) = \\ &= a_x \cdot b_x \cdot \underline{i}^2 + a_y \cdot b_y \cdot \underline{j}^2 + a_z \cdot b_z \cdot \underline{k}^2 + (a_x \cdot b_y + a_y \cdot b_x) \cdot \underline{i} \cdot \underline{j} + \\ &+ (a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \underline{i} \cdot \underline{k} + (a_y \cdot b_z + a_z \cdot b_y) \cdot \underline{j} \cdot \underline{k} = \\ &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \end{aligned}$$

$$\text{mivel } \underline{i}^2 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2 = 1 \text{ és } \underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{j} \cdot \underline{k} = 0$$

Megjegyzés:

Az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ egységvektorok koordinátás alakja:

$$\underline{i} = (1, 0, 0) ; \underline{j} = (0, 1, 0) ; \underline{k} = (0, 0, 1)$$

D. 10.22. Definíció (VEKTORIÁLIS SZORZAT)

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egymással φ szöget bezáró vektorok vektoriális szorzata az a $\underline{c}$ vektor amelynek

- hossza: $|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \varphi$
- iránya: merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokra
- irányítása: olyan, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok a megadott sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektori szorzatának jelölése: $\underline{a} \times \underline{b}$

T.10.12.Tétel (A VEKTORI SZORZAT TULAJDONSÁGAI)

Legyenek adottak $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- 1.) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ (antikommutativitás)
- 2.) $(\lambda \cdot \underline{a}) \times (\mu \cdot \underline{b}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$
- 3.) $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a} \times \underline{c})$ (disztributivitás)
- 4.) $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \iff \underline{a} \parallel \underline{b}$

A tételt nem bizonyítjuk, de az 1,2 és 4. tulajdonságokat gyakorló feladatként lássa be!

T.10.13.Tétel (A VEKTORI SZORZAT KOORDINÁTÁS ALAKJA)

Legyen $\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\underline{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Ekkor

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z) \cdot \underline{i} - (a_x b_z - b_x a_z) \cdot \underline{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \cdot \underline{k}$$

Bizonyítás:

Mivel $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$, továbbá

$$\underline{i} \times \underline{j} = -\underline{j} \times \underline{i} = \underline{k}; \quad \underline{j} \times \underline{k} = -\underline{k} \times \underline{j} = \underline{i}; \quad \underline{k} \times \underline{i} = -\underline{i} \times \underline{k} = \underline{j}$$

a műveleti tulajdonságokból adódik:

$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= (a_x \cdot \underline{i} + a_y \cdot \underline{j} + a_z \cdot \underline{k}) \times (b_x \cdot \underline{i} + b_y \cdot \underline{j} + b_z \cdot \underline{k}) = \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) \cdot \underline{i} - (a_x b_z - b_x a_z) \cdot \underline{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \cdot \underline{k} \end{aligned}$$

D.10.23.Definíció (VEGYESSZORZAT)

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzatán az $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$ valós számot értjük.

T.10.14.Tétel (A VEGYESSZORZAT KOORDINÁTÁS ALAKJA)

Legyenek adottak $\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\underline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ és $\underline{c} = (c_x, c_y, c_z)$ vektorok. Ekkor

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{determinánssal} \\ \text{adható meg.} \end{array}$$

A tétel bizonyítása a skalárszorzat, a vektoriális szorzat és a determinánsok kiszámítási szabályával gyakorló feladat. Következmény:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = -\underline{a} \cdot (\underline{c} \times \underline{b}) = -\underline{b} \cdot (\underline{a} \times \underline{c}) = -\underline{c} \cdot (\underline{b} \times \underline{a})$$

T.10.14.Tétel (AZ EGYENES VEKTOREGYENLETE)

Legyen az e térbeli egyenes egy adott pontja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és legyen az e egyenes párhuzamos a $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$ vektorral. Ekkor az e egyenes tetszőleges $P = (x, y, z)$ pontjához a P_0 pontból húzott vektor párhuzamos a $\underline{v}$ vektorral. Az e egyenes vektoregyenlete tehát: $\overrightarrow{P_0 P} = t \cdot \underline{v}$

Koordinátás alakban az egyenes egyenletrendszere:

$$x = x_0 + v_x \cdot t ; y = y_0 + v_y \cdot t ; z = z_0 + v_z \cdot t.$$

T.10.15.Tétel (A SÍK EGYENLETE)

Legyen az S sík egy adott pontja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és legyen az S sík merőleges az $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z)$ vektorra. Ekkor az S sík tetszőleges $P = (x, y, z)$ pontjához a P_0 pontból húzott vektor merőleges az $\underline{n}$ vektorra. Az S sík egyenlete tehát: $\overrightarrow{P_0 P} \cdot \underline{n} = 0$.

Koordinátás alakban a sík egyenlete:

$$n_x \cdot (x - x_0) + n_y \cdot (y - y_0) + n_z \cdot (z - z_0) = 0$$

T.10.16.Tétel (A VEKTOROK ÉS A LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK)

Legyenek adottak az $\underline{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$; $\underline{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$; $\underline{a}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok, és az alábbi lineáris egyenletrendszer:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \quad (*)$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

Ezen lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha a $\underline{b}$ vektor előállítható az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van pontosan akkor, ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok halmaza lineárisan független.

A tétel bizonyítása gyakorló feladat.

(a (*) lin. egyenletrendszer $x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + x_3 \cdot \underline{a}_3 = \underline{b}$ alakba írható!)

10.5. Feladatok a 10. fejezet anyagához

F.10.1.^(*) Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\text{a.) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b.) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

F.10.2. Mutassa meg, hogy az alábbi determináns zérus:

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

F.10.3. Számítsa ki z értékét, ha:

$$\text{a.) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16 \quad \text{b.) } \begin{vmatrix} z^2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & z \end{vmatrix} = 2+8i$$

F.10.4. Adottak az A , B , C mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Adja meg az alábbi mátrixokat, ha léteznek!

$$A \cdot B ; A \cdot C ; B \cdot C ; B \cdot A ; C \cdot A ; C \cdot B ; A \cdot B \cdot C ; \\ A^{-1} ; B^{-1} ; C^{-1} ; (B \cdot B^T)^{-1} ; (B^T \cdot B)^{-1} ;$$

F.10.5.^(*) Adja meg x azon értékeit melyekre az alábbi A mátrix invertálható!

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

F.10.6.^(*) Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } x + 2y + 5z = -9 & \text{b.) } 3x - y + 2z = 5 \\ x - y + 3z = 2 & x + 2y - z = 3 \\ 3x - 6y - z = 25 & 4x + y + 3z = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c.) } x - 2y + z = -1 \\ -5x + y + 2z = 3 \\ -4x - y + 3z = \lambda \quad 1.) \lambda=2 ; \quad 2.) \lambda=5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d.) } x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{array}$$

F.10.7.^(*) Adja meg az a és b valós számokat úgy, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszernek
a.) ne legyen megoldása ; b.) végtelen sok megoldása legyen ; c.) egyetlen megoldása legyen .

$$\begin{array}{l} a \cdot x + 2y - 2z = 2 \\ x + y - z = b \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{array}$$

F.10.8.^(*) Írja fel az alábbi síkok egyenleteit:

a.) S_1 tartalmazza a $P_1=(1,2,0)$ $P_2=(0,1,0)$ $P_3=(1,1,1)$ pontokat.

b.) S_2 merőleges az $\underline{n} = (1,3,-2)$ vektorra és tartalmazza a $P_0=(-1,5,6)$ pontot.

c.) S_3 tartalmazza az e_1 és e_2 egyeneseket:

$$\begin{array}{ll} e_1: x = 1+2t & e_2: x = 3-2\lambda \\ y = 3t & y = 2-3\lambda \\ z = 5 & z = 0 \end{array}$$

F.10.9.^(*) Írja fel az alábbi egyenesek egyenletrendszerét:

a.) e_1 áthalad a $P_1=(2,0,3)$ és $P_2=(1,-1,5)$ pontokon.

b.) e_2 áthalad az origón és merőleges a $2x + y - z = 3$ síkra.

c.) e_3 áthalad a $P_0=(1,5,8)$ ponton és párhuzamos a $v=(0,1,7)$ vektorral.

F.10.10. Határozza meg az $S: 2x + 3y - z = 6$ egyenletű sík és az $e: x = 2 + 2t$ egyenes távolságát!

$$\begin{aligned} y &= 6 + t \\ z &= 2 + 7t \end{aligned}$$

F.10.11. Határozza meg az $S_1: x - 2y + 2z = 3$ és $S_2: -x + 2y - 2z = 5$ síkok távolságát!

F.10.12. Határozza meg a $P_0 = (1, 3, -2)$ pont távolságát az $e: x = 4$ egyenestől!

$$\begin{aligned} y &= 3 + t \\ z &= 1 + 5t \end{aligned}$$

F.10.13.^(*) Határozza meg az e_1 és e_2 egyenesek távolságát és szögét!

$$\begin{aligned} e_1: \quad x &= 1 + 2t \\ y &= 2 - t \\ z &= 1 + 3t \end{aligned} \quad \begin{aligned} e_2: \quad x &= 3 + 2u \\ y &= 2u \\ z &= -1 \end{aligned}$$

F.10.14. Határozza meg az $S_1: 2x + y - z + 5 = 0$ és az $S_2: x - y + 6z - 3 = 0$ síkok metszéspontjának irányvektorát és egy pontját!

F.10.15.^(*) Tükrözze a $P_0 = (1, 3, 0)$ pontot az $S: x + y = 5$ síkra!

F.10.16. Tükrözze az e egyenest az $S: x + 2y - z = 3$ síkra! $e: x = 1 + 2t$ Határozza meg e és S szögét!

$$\begin{aligned} y &= 1 + 3t \\ z &= -t \end{aligned}$$

Függelék

A (*)-gal jelölt feladatokhoz tartozó eredmények

$$\begin{array}{ll} \text{F.2.5.} & \sup A = 0 \quad ; \quad \inf A = -1 \\ & \sup B = 3 \quad ; \quad \inf B = -\infty \notin \mathbb{R} \\ & \sup C = 1+\sqrt{3} \quad ; \quad \inf C = \sqrt{3} \end{array}$$

F.2.8. A : nem nyílt, nem zárt, korlátos
 B : zárt, nem nyílt, korlátos
 C : zárt, nem nyílt, korlátos
 D : zárt, nem nyílt, korlátos

F.2.10. $\mathbb{R}$ nyílt: $\forall r \in \mathbb{R}$ esetén pl. $(r-1; r+1) \subset \mathbb{R}$
 $\mathbb{R}$ zárt : torl $\mathbb{R} = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$
 $\emptyset$ nyílt: nincs pontja
 $\emptyset$ zárt : torl $\emptyset = \emptyset \subset \emptyset$

F.2.11. c.) $x \in (-1; 2) \cup (3; \infty)$
 j.) $x \in (-\infty; (-3-\sqrt{37})/2) \cup ((-3+\sqrt{37})/2; \infty)$
 l.) $x \in (3; 4) \cup (4; 7)$

$$\text{F.3.2. } z_1 = 9/26 - i \cdot 19/26 \quad ; \quad z_2 = 3 + 3i$$

$$\text{F.3.5. a.) } z_{2,3} = (-3 \pm i \cdot \sqrt{3})/2 \quad ; \quad p(z) = (z-1) \cdot (z^2 + 3z + 3)$$

$$\text{b.) } z_1 = 1-3i \quad ; \quad z_2 = 1-5i$$

$$\text{c.) } z_1 = -3+4i \quad ; \quad z_2 = -3-4i$$

$$\text{d.) } z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = i \quad ; \quad z_3 = -1 \quad ; \quad z_4 = -i$$

$$p(z) = (z-1) \cdot (z+1) \cdot (z^2+1)$$

$$\text{e.) } z_2 = -2i \quad ; \quad z_3 = (-1+i \cdot \sqrt{3})/2 \quad ; \quad z_4 = (-1-i \cdot \sqrt{3})/2$$

$$p(z) = (z^2+4) \cdot (z^2+z+1)$$

F.4.3. a.) ∞ ; b.) ∞ ; c.) 0 ;
d.) 0 ; e.) $1/2$; f.) ∞ ;

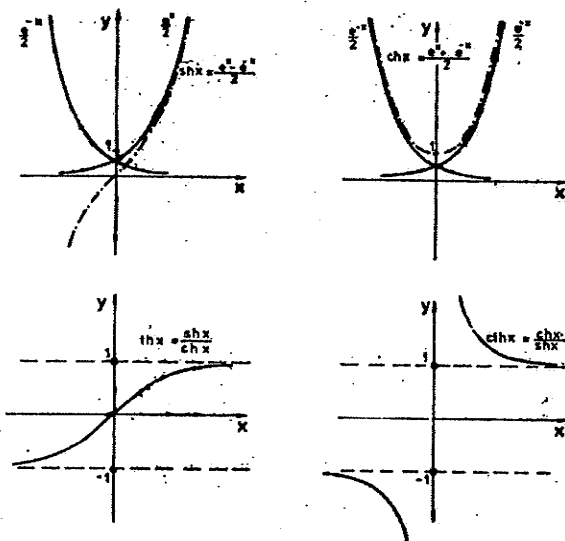
F.4.5. a.) $e^{4/3}$; b.) e^{10} ; c.) e^{-3}

F.4.9. a.) 1 ; b.) 1 ; c.) 0 ; d.) 0 ; e.) 0 ;
f.) 0 ; g.) ha $a=2$ akkor 0 , ha $a=3$ akkor $+\infty$.

F.4.10. a.) div ; b.) konv ; c.) konv ; d.) konv
e.) konv ; f.) div ; g.) konv

F.4.11. a.) absz. konv. ; $|S-S_{100}| < 1/101!$
b.) felt. konv. ; $|S-S_{100}| < 1/10$
c.) absz. konv. ; $|S-S_{100}| < 1/3^{102}$
d.) absz. konv. ; $|S-S_{100}| < 10^{-4}$
e.) felt. konv. ; $|S-S_{100}| < 1/2$

F.5.1



17. ábra

F.5.3. $(sh x)' = ch x$; $(ch x)' = sh x$

$(th x)' = \frac{1}{ch^2 x}$; $(cth x)' = \frac{-1}{sh^2 x}$

$$F.5.5. \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) ; \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} ; \operatorname{arcth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$F.5.7. d.) 1 ; e.) \text{ nem } \exists ; f.) 1 ;$$

$$i.) \pi/2 ; j.) -\pi/2 ; k.) \pi/4 ;$$

$$o.) e^{-5} ; p.) 1 ; q.) e^4 ;$$

$$F.5.8. c.) x = 2\text{-ben nem tehető folytonossá,}$$

$$x = -2\text{-ben } f(-2) = 3/4 \text{ értékadással folytonos.}$$

$$d.) x = 0\text{-ban } f(0) = 3/5 \text{ értékadással folytonos.}$$

$$g.) x = 1\text{-ben folytonos, másutt nem.}$$

$$h.) \text{ Ha } a \neq 0, b = 1/(2\sqrt{a}) \text{ esetén folytonos.}$$

$$F.5.11. \text{Érintő egyenlete: } y = -5 \cdot (x-1) ; y(0,9) \approx 0,5$$

$$F.6.2. A = 2r\pi \cdot m + 2r^2\pi ; V \text{ maximális, ha } m/r = 2 \text{ azaz}$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \text{ és } m = \sqrt{\frac{2A}{3\pi}}$$

$$F.6.3. \text{Maximális a kerület, ha } AC=a \text{ és } AB=a\sqrt{2}$$

$$\text{vagy } AC=a\sqrt{2} \text{ és } AB=a.$$

$$\text{Minimális a kerület, ha } AC=AB=a\sqrt{5}/2.$$

$$F.6.4. a.) -1/2 ; b.) \infty ; c.) 1/2 ;$$

$$d.) -1/m ; (m \neq 0) ; e.) 1 ; f.) 1/3 ;$$

$$F.6.6. T_2(x) = 1 + 2 \cdot (x - \pi/4) + 2 \cdot (x - \pi/4)^2$$

$$F.6.7. d.) T_5(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5$$

$$\ln 2 \approx 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 ; |H| < 1/6$$

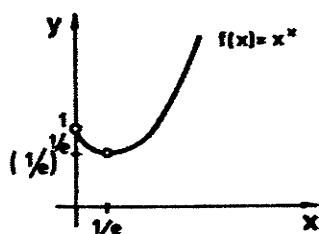
$$e.) T_5(x) = x + x^3/3 + x^5/5$$

$$\ln 2 \approx 0,6 + 0,6^3/3 + 0,6^5/5 ; |H| < 0,6^7/4,48$$

$$F.6.8. T_n(x) = 1 + \binom{1/3}{1} \cdot x + \binom{1/3}{2} \cdot x^2 + \dots + \binom{1/3}{n} \cdot x^n$$

$$x_1 = 0,2 : n=6 \text{ esetén } |H| < 10^{-5}$$

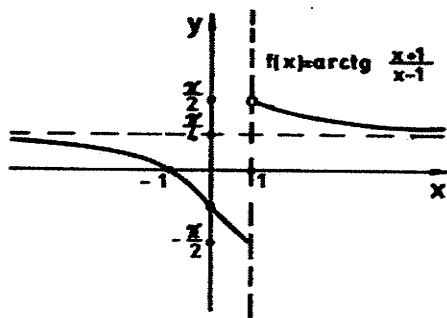
F.6.9. e.) $f(x) = x^x$



$$R_f = \left[\left(\frac{1}{e} \right)^{1/e}; \infty \right)$$

18. ábra

f.) $f(x) = \arctg \frac{x+1}{x-1}$



$$R_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$$

19. ábra

F.7.1. a.) $\cos 2x \cdot (1/4 - x^2/2) + x/2 \cdot \sin 2x + C$

b.) $1/5 \cdot e^{2x} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x) + C$

F.7.2. c.) $\ln |\ln x| + C$

F.7.3. c.) $1/2 \cdot \arcsin(x-1) + (x-1) \cdot \sqrt{1-(x-1)^2} + C$

F.7.4. c.) $-1/x - \arctg x + C$

d.) $x + \ln|x-1| + \ln(x^2+1) - \arctg x + C$

F.7.7. c.) $\sqrt{x^2-1} - 2 \cdot \arctg(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C$

F.8.1. b.) $2 \cdot (\sqrt{3} - 1) + \pi/6$; c.) 5

F.8.2. a.) $2 \cdot \sqrt{11} - 2$; d.) $\frac{9}{8} \cdot ([1+\sqrt{2}]^2 - [1+\sqrt{2}]^{-2} + 4 \cdot \ln(1+\sqrt{2}))$

F.8.3. a.) $\ln 3 - 1.2$

F.8.4. a.) π

F.8.5. c.) $(145^{3/2} - 10^{3/2}) \cdot \pi \cdot 27$

F.8.6. b.) $e - 1$; c.) $\pi - 2$

d.) $(1 - \sqrt{3}/2 - \pi/12) / 2$; f.) $\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}$

F.8.7. b.) divergens ; c.) $1/\ln 2$
h.) 2 ; i.) $\ln \sqrt{3}$

F.8.8. a.) konvergens ; b.) konvergens ; c.) konvergens

F.9.1. a.) és b.) $N_{x0}(e) = -4/\lg 0.9 = 87$

F.9.2. b.) $r = 2$; $I = (-2 ; 2)$
d.) $r = 1$; $I = (-1 ; 1)$

F.9.3. d.) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (-x^2)^n = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{15x^6}{48} + \dots$

$\arcsin x = \sum \binom{1/2}{n} \cdot (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots$

F.9.4. $z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$; $z_2 = 2 \cdot e^{-i\pi/3}$; $z_3 = 2 \cdot e^{-i\pi/2}$

F.9.5. b.) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \sin kx$

F.9.6. $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot (-1)^k \cdot \sin kx$

$x=\pi/2$: $1-\pi/2 = 1 - 2 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots)$
tehát: $\pi/2 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$

F.10.1. a.) $D = -9$; b.) $D = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b)$

F.10.3. b.) $z_1 = (1+i) \cdot \sqrt{2}/2$; $z_2 = - (1+i) \cdot \sqrt{2}/2$

F.10.5. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

F.10.6. a.) $x = 2$; $y = -3$; $z = -1$

b.) $x = 1$; $y = 2$; $z = 2$

c.) $\lambda = 2 : 1 \times \infty$; $\lambda = 5 : \text{nincs megoldás}$

d.) nincs megoldás

F.10.7. a.) nincs megoldás, ha $a=2$ és $b \neq 1$

b.) $1 \times \infty$ megoldás, ha $a=2$ és $b=1$

c.) egyetlen megoldás van, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

F.10.8. a.) $S_1: x-y-z+1 = 0$

b.) $S_2: x+1+3 \cdot (y-5)-2 \cdot (z-6) = 0$

c.) $S_3: -15 \cdot (x-1)+10y-2 \cdot (z-5) = 0$

F.10.9. a.) $e_1: x=1-t$; $y=-1-t$; $z=5+2t$

b.) $e_2: x=2t$; $y=t$; $z=-t$

c.) $e_3: x=1$; $y=5+t$; $z=8+7t$

F.10.13 $d = 2 \cdot \sqrt{3}$; $\cos \varphi = 1/\sqrt{28}$

F.10.15. $P_0' = (5; 7; 0)$

