BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Babcsányi - Gyurmánczi - Szabó - Wettl

MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY I.

Műegyetemi Kiadó, 2009

Lektor:
Szász Gábor

Szerkesztő:
Wettl Ferenc

Szerzők:
Babcsányi István (1., 7., 8. fejezet)
Gyurmánczi János (6., 12., 13. fejezet)
Szabó Lajos (2., 3., 4., 5. fejezet)
Wettl Ferenc (9., 10., 11. fejezet)

Rajzoló:
Lukács Erzsébet

Műszaki szerkesztő:
Babcsányi István
Wettl Ferenc
Zibolen Endre

(Tizennegyedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **075001**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 30 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 778/09

Előszó

Ez a kötet az első abból a négykötetes feladatgyűjteményből, melyet a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékének oktatói készítenek Szász Gábor Matematika I-II-III című tankönyvéhez. A kötet tizenhárom fejezetének címei — az első fejezet kivételével — megegyeznek a tankönyv első kötetében lévő fejezetcímekkel. A fejezetek sorszámozatlan alfejezetekre oszlanak. Minden alfejezet tipográfiailag is elkülönülő elméleti összefoglalóval kezdődik; ez tartalmazza a felhasználandó ismeretek legfontosabb elemeit: definíciókat, tételeket, esetleg számítási technikákat, módszereket, melyek azonosítója egy betűvel kezdődik (ezek jelentése: **D** definíció, **T** tétel, **P** példa, **J** jelölés, **M** megjegyzés), majd a fejezet sorszáma, végül a fejezeten belüli saját sorszám következik. Például:

T 3.2 Ez itt a harmadik fejezet elméleti bevezetőjének kettes sorszámú tétele.

Az elméleti bevezető után következnek a feladatok; ezek csak a fejezeten belüli sorszámukat viselik. Azonos fejezetből való hivatkozásnál ez a sorszám (pl.: **56.**), más fejezetből való hivatkozásnál a fejezet és a feladat sorszáma együtt szerepel (pl.: **7.56.**). A feladat sorszámának felső indexében szerepelhet egy jel, melyet az alábbi példákban magyarázunk:

51.$^{\bullet}$ Ez az 51. feladat, megoldását fontosnak tartjuk.

52.$^{\triangleright}$ Ehhez a feladhoz részletes útmutató tartozik a megoldásoknál.

53.* Ez a feladat a nehezebbek közé tartozik.

54.^{k} Ehhez a feladathoz kalkulátor használata szükséges.

55.^{p} Ehhez a feladathoz programozható számoló- vagy számítógép használata szükséges.

A végeredményt, néhány kivétellel, minden feladatnál közöljük. Az ábráknak nincs saját sorszámuk, de minthogy közvetlenül a feladat mellett szerepelnek, a szövegből mindig egyértelmű, hogy melyikhez tartoznak.

A kötet szerzői köszönetet mondanak Szász Gábornak rendkívül gondos lektori munkájáért és hasznos javaslataiért.

A feladatgyűjtemény szövegét a $\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-TEX, rajzait az AUTOCAD programcsomaggal szerkesztettük. Ez könnyebbé teszi egy javított kiadás elkészítését. Ezért kérünk minden olvasót, hogy a megtalált hibákat, javítási ötleteiket juttassák el a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékére.

Budapest, 1992. május 20.

A szerkesztő

1. fejezet

Bevezetés

Algebrai feladatok

J 1.1 A számok gyakran használt halmazaira a következő jelöléseket vezetjük be: $\mathbf{N}$ a nemnegatív egész számok, $\mathbf{N}^+$ a pozitív egész számok, $\mathbf{Z}$ az egész számok, $\mathbf{Q}$ a racionális számok, $\mathbf{R}$ a valós számok és $\mathbf{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza.

J 1.2 Az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ összegre a $\sum_{k=1}^{n} a_k$ vagy a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ jelölést használjuk (kiejtés: szumma $k = 1$-től n-ig a_k).

D 1.3 Vezessük be az $1 \cdot 2 \ldots n$ szorzatra az $n!$ (kiejtés: n faktoriális) jelölést. Legyen továbbá $0! = 1! = 1$.

D 1.4 Legyenek $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$. Az, hogy a **osztója** b-nek, azt jelenti, hogy van olyan $c \in \mathbf{Z}$, hogy $ac = b$. Jelölése: $a|b$.

Feladatok

Legyen $a, b \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}^+$. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

1.• $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,

2. $a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a+b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}b + a^{2n-4}b^2 - \cdots - ab^{2n-3} + b^{2n-2})$,

3. $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \cdots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$.

4.* Mutassuk meg, hogy ha $a + b + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$, akkor $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

5. $|x| = x + 1$, **6.** $|2x + 3| = x^2$, **7.** $|\sin x| = \sin x + 2$,

8. $|\sin x| = \sin x + 3$, **9.** $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$, **10.** $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$,

11.▷ $|x^2+6x+6| = |x^2+4x+9| + |2x-3|$, **12.▷** $|x^4 - x^2 - 6| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$,

13. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

14. $\dfrac{3x+5}{4x-7} < 0$, **15.** $\dfrac{2x+3}{x-3} \leq 5$, **16.** $1 < \dfrac{3x-2}{4x+5} < 4$,

17. $\dfrac{5x-2}{|2x+1|} < 3$, **18.*** $|3x-7| < 1$, **19.**▷ $|x| < |x+6|$,

20. $|x+2| + |x-2| \le 12$, **21.** $|4x-3| < x < |4x+3|$,

22. $||x+1| - |x-1|| < 1$, **23.** $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$,

24. $\dfrac{2x+1}{x-4} < \dfrac{x+5}{x+1}$, **25.**▷ $\dfrac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} \le 2$,

26. $|2-x^2| > 3$, **27.** $|x(1-x)| < 0,05$,

28. $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$, **29.** $|x^2-5x| > |x^2| - |5x|$,

30.▷ $\sqrt{3-2x-x^2} > x+2$, **31.** $\sqrt{2-x} - \sqrt{x} > 1$.

Oldjuk meg valós x ismeretlenre az alábbi egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket:

32.▷ $4 < (2x+3)^2 < 9$, **33.** $(a-1)x > 2a, \quad ax < a+1$.

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az (x, y) pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira a következő egyenletek, illetve egyenlőtlenségek teljesüljenek:

34.▷ $|y| \le |x|$, **35.** $|y| < |x+2|$,

36.* $|x| + |y| \le 2$. **37.*** $|x| + |y| = 1$,

38. $|x| - |y| = 1$, **39.*** $|x+y| = |x| + |y|$,

40. $|x-y| = |x| - |y|$,

Oldjuk meg a következő kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket a valós számpárok halmazán:

41. $x-y-2<0$
$3x-y-8>0$,

42. $3x-y-2<0$
$5x-4y+6<0$,

43. $x-y-2<0$
$3x-3y+10<0$,

44. $4x+y-2=0$
$x-2y-14<0$,

45. $x-5y+7<0$
$x-y-1<0$
$x-2y+4>0$,

46. $3x-7y+13=0$
$2x+5y-1>0$
$5x-2y-17<0$,

47. $y^2-4x<0$
$x^2+y^2-2x\ge 0 \quad x\le 2$,

48. $25x^2+9y^2-225\le 0$
$9y^2-16x^2-144\ge 0$.

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket. Ahol lehet, állapítsuk meg, hogy milyen feltételek mellett áll fenn az egyenlőség:

49.* $|x+y| \le |x| + |y| \quad (x, y \in \mathbf{R})$ **(háromszög-egyenlőtlenség**, l. még **125.**),

50.▷ $a^2+b^2 \ge 2|ab| \quad (a, b \in \mathbf{R})$, **51.**▷ $|a-b| \ge ||a|-|b|| \quad (a, b \in \mathbf{R})$,

52. $\left|\dfrac{1}{a-b}\right| < \dfrac{2}{|a|}$, ha $|b| < \dfrac{|a|}{2} \quad (a, b \in \mathbf{R})$,

53.* $a + \dfrac{1}{a} \ge 2 \quad (a \in \mathbf{R}^+)$, **54.** $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2 \quad (x \in \mathbf{R})$,

55. $\dfrac{x^2}{1+x^4} \le \dfrac{1}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$,

56.• $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \quad (a,b \in \mathbf{R}^+)$ (**a harmonikus, a mértani** és **a számtani közép** közötti összefüggés; l. még a **128.** feladatot!)

57.* Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \ge 0$ és $\alpha > \beta > 0 \quad (a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R})$, akkor

$$(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(a^\beta + b^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Az alábbi feladatokban értelmezzük a (nem üres) S halmazon a megadott $\star$ vagy $\circ$ műveleteket. Vizsgáljuk meg, hogy a halmaz zárt-e ezekre a műveletekre nézve, azaz a műveletek eredménye mindig benne van-e a halmazban? Ha igen, akkor a műveletek kommutatívak-e, aszociatívak-e? Ahol két műveletet is megadtunk, ott disztributív-e valamelyik művelet a másikra nézve?

58. $S = \mathbf{R}, \quad x \star y = y, \quad x, y \in \mathbf{R}$,

59. $S = \mathbf{R}, \quad x \star y = \max(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R}$,

60. S a páratlan számok halmaza, $\star$ a számok összeadása,

61. S a páros számok halmaza, $\star$ a számok összeadása,

62. S a páratlan számok halmaza, $\star$ a számok szorzása,

63.▷ $S = \mathbf{R}, \quad x \circ y = x + 2y, \quad x, y \in \mathbf{R}$,

64.* $S = \mathbf{R}, \quad x \circ y = ax + by + c, \quad x, y \in \mathbf{R}$, ahol a, b, c adott valós számok,

65. $S = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbf{Z}\}$, a $\star$ és a $\circ$ művelet a valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás,

66. $S = \{a + b\sqrt[3]{2}; a, b \in \mathbf{Z}\}$, a $\star$ és a $\circ$ művelet a valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás,

67.* $S = \mathbf{R}, \quad a \star b = a + b - 1, \quad a \circ b = a + b - ab \quad (a, b \in \mathbf{R})$.

Számítsuk ki az alábbi összegeket:

68.• $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(2k+1)$,

69.• $\displaystyle\sum_{k=-3}^{1} k^3$,

70. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(-1)^k(2k+1)$,

71.• $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(-1)^k$,

72. $\displaystyle\sum_{k=7}^{20}\pi$,

73.▷ $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k \sin\frac{k\pi}{2}$.

Írjuk fel a szumma jel alkalmazásával a következő összegeket:

74.• $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$,

75.• $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}$,

76. $15 + 24 + 35 + \cdots + (n^2 - 1)$,

77. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$,

78.• $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,

79. $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

Melyek igazak az alábbi összefüggések közül minden $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ és c valós számra?

80.* $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$,

81.* $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$,

82. $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$,

83.* $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$.

84. Írjuk fel az x-ben másodfokú $\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2$ függvény diszkriminánsát, ahol $a_k, b_k \in \mathbf{R}$.

85.$^{\triangleright}$ **(Cauchy-Bunyakovszkij** egyenlőtlenség) Az előző feladat eredményét felhasználva bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget, ahol $a_k, b_k \in \mathbf{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

86. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a és b valós számra:

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ge(a^3+b^3)^2.$$

87. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b és x valós számra:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\cos x+b\sin x\le\sqrt{a^2+b^2}.$$

Számítsuk ki a következő összegeket:

88. $\sum_{k=0}^{0}(-3)$,

89. $\sum_{k=m}^{n}c \quad (n\ge m); c$ konstans,

90. $\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$,

91. $\sum_{k=2}^{20}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k-1)^2}\right)$,

92.* $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$,

93. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$, $\left(\text{Útmutatás}: \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$,

94.* $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ (Útmutatás: szorozzunk $2\sin\frac{x}{2}$-vel),

95. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}$, ahol $a_{kl}=0$, ha $k\ne l$ és $a_{kl}=1$, ha $k=l$,

96. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}$, ha $a_{kl}=k$,

97. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}$, ha $a_{kl}=k-l$.

Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

98. $\frac{10!}{8!}+\frac{10!}{3!7!}-\frac{1!}{0!}$,

99. $\frac{(n+3)!}{(n-2)!} \quad (n\ge 2)$,

100.* $\frac{n!(2n+1)!}{(n-1)!(2n+3)!} \quad (n\in\mathbf{N}^+)$,

101. $\frac{(n-k)!(2n+1)!}{n!(n+k)!} \quad (n,k\in\mathbf{N}; k\le n)$.

102.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy ha $k|m$ és $k|(m+n)$, ahol $k,m,n\in\mathbf{Z}$ és $k\ne 0$, akkor $k|n$. Igaz-e az állítás megfordítása?

Teljes indukció

D 1.5 A **teljes indukció** a direkt bizonyítás egyik fontos típusa. Jelöljön $A(n)$ olyan állítást, amely az n egész számtól függ. A bizonyítás két lépésből áll. Először megmutatjuk, hogy van olyan n_0 egész szám, hogy az $A(n_0)$ állítás igaz. Azután feltesszük, hogy valamely n egész számra $A(n)$ igaz, s ennek alapján bebizonyítjuk, hogy $A(n+1)$ is igaz. Ezekből már következik, hogy $A(n)$ igaz minden $n \geq n_0$ esetben.

Feladatok

Teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy a következő állítások igazak, ha az n pozitív egész szám nagyobb vagy egyenlő valamely n_0 pozitív egész számnál (adjuk meg a legkisebb ilyen n_0-t):

103.• $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, **104.** $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$,

105.• $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

106. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$,

107.▷ $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k^2 = 1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$,

108. $\sum_{k=1}^{n} (k-1)k^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, **109.** $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$,

110. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2}$,

111. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

112. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\ldots(k+t-1) = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+t)}{t+1}$, $t \in \mathbf{N}^+$,

113. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, **114.** $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)!-1$,

115.• $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$, **116.▷** $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} > \dfrac{13}{24}$,

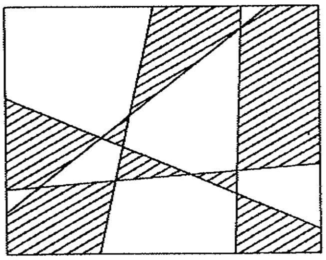
117.▷ $\sqrt{n} < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, 118.[▷] $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$, 119.[▷] $3^n > 2^n + 7n$,

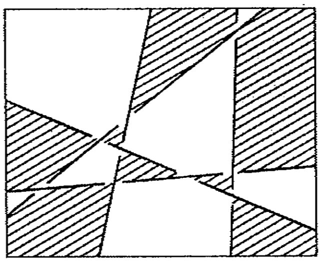
120. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}$,

121.[*] $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (a bal oldalon n darab gyökjel van),

122.[*] $3 + 33 + \cdots + 33\ldots3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$ (a bal oldalon n tagú összeg van).

123.[▷] Egy síkbeli tartományt n darab egyenessel részekre osztunk. Mutassuk meg, hogy az így kapott "térkép" két színnel színezhető úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek (l. bal oldali ábra).





124.[*] Egy országban úgy építenek autópályákat, hogy mindegyik autópálya egyenes, egyik kereszteződésben sem találkozik kettőnél több út, és minden kereszteződésben az egyik út a másik fölött halad. Mutassuk meg, hogy bármely ilyen úthálózatban elérhető az, hogy minden úton felváltva alul majd felül haladjunk át a kereszteződésen. (Útmutatás: Használhatjuk az előző feladat eredményét és a jobb oldali ábrát.)

125.[•] Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, akkor

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok között nincsenek különböző előjelűek. (l. a **49.** feladatot!)

126.[*] Mutassuk meg, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$ és $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, akkor $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

127. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$, akkor $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

128.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

azaz pozitív számok mértani közepe nem nagyobb a számtani közepüknél, egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

129. Igazoljuk, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$ esetén $nx_1x_2\ldots x_n \leq x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n$.

130. Bizonyítsuk be az $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n \geq 2)$ egyenlőtlenséget.

Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat ($n \in \mathbf{N}^+$):

131.[P] $8|5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1$, **132.**[P] $6|n(2n^2 - 3n + 1)$, **133.**[P] $133|11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

134.[*] Bizonyítsuk be, hogy minden 1-nél nagyobb pozitív egész szám sorrendtől eltekintve egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára (**a számelmélet alaptétele**).

Keressük meg a hibát a következő bizonyításokban:

135. Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Ehhez megmutatjuk, hogy minden egész szám egyenlő a rákövetkező egész számmal. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az n egész számra, azaz $n = n + 1$. Adjunk 1-et az egyenlet mindkét oldalához, ekkor azt kapjuk, hogy $n + 1 = n + 2$, tehát a tulajdonság öröklődik.

136.[*] Bebizonyítjuk, hogy a sík minden pontja egy egyenesen van. Ehhez megmutatjuk, hogy véges sok pont a síkon mindig egy egyenesen van. Az állítás $n = 2$ esetén igaz, hiszen bármely két pont egy egyenesen van. Tegyük fel, hogy bármely n pont egy egyenesen van. Bizonyítjuk, hogy akkor bármely $n+1$ pont is egy egyenesen van. Ha ugyanis nem volna, az azt jelentené, hogy van a síkon n olyan pont, amelyek egy egyenesen vannak, és egy $(n+1)$-edik pont, amely nincs ezen az egyenesen. Ekkor elhagyva az egy egyenesen lévő n pont valamelyikét, ezzel a ponttal olyan n pontot kapnánk, amelyek már nincsenek egy egyenesen, ez pedig ellentmond az indukciós feltevésnek.

2. fejezet

Halmazelmélet

D 2.1 Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok. A halmazt, melynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: $\emptyset$.

D 2.2 Az A halmazt a B halmaz **részhalmazának** nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B-nek is eleme. A **valódi része** B-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

T 2.3 A halmazok közötti tartalmazásra teljesül a következő három tulajdonság:
Reflexivitás: minden A-ra $A \subseteq A$.
Antiszimmetria: ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.
Tranzitivitás: ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.

D 2.4 **Halmazműveletek:** Az A és B halmaz $A \cap B$ **metszetén** (közös részén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak; $A \cup B$ **egyesítettjén** (unióján) azoknak a halmazát, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak. Az A és B halmaz $A - B$ **különbségén** értjük az A összes olyan elemeinek halmazát, amelyek nincsenek benne B-ben; $A \ominus B$ **szimmetrikus különbségén** azoknak a halmazát, amelyek a két halmaz közül pontosan az egyikben vannak benne; $A \times B$ **szorzatán** az (a, b) alakú rendezett pároknak a halmazát, ahol $a \in A$, $b \in B$. A H halmaz valamely A részhalmazának H-ra vonatkozó **komplementerén** a $H - A$ halmazt értjük. Jele $\overline{A}_H$. Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részhalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg. Ilyenkor az alaphalmazra vonatkozó komplementert egyszerűen $\overline{A}$ jelöli.

T 2.5 $\subseteq$ **tulajdonságai:** Tetszőleges A, B, C halmazokra igazak az alábbiak:
- ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap C \subseteq B \cap C$ és $A \cup C \subseteq B \cup C$;
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ és $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$;
- ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$, és $A \cup B = B$.

T 2.6 Bármely A, B, C halmazra fennállnak az alábbi **azonosságok:**
Asszociativitás: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
Kommutativitás: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;
Idempotencia: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;
Elnyelési tulajdonságok: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$;
Disztributivitás: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

D 2.7 Egy H halmaz összes részhalmazainak halmazát a H halmaz **hatványhalmazának** nevezzük. Jele: $P(H)$. (Megjegyzés: Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, így az üres halmaz minden halmaz hatványhalmazának eleme.)

T 2.8 Ha A és B olyan halmazok, melyekre A, $B \subseteq H$ teljesül, akkor $A - B = A \cap \overline{B}_H$.

T 2.9 **De Morgan-képletek**: bármely A, B halmazra: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ és $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Feladatok

Mik az elemei az alábbi halmazoknak?

1. $\{x \in \mathbf{N}^+ ;\ 2|x \text{ és } 100 \le x < 1000\}$,
2. $\{x \in \mathbf{Z} ;\ 3|x \text{ és } |x| < 100\}$,
3. $\{k \in \mathbf{N}^+ ;\ x = 3k + 1\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} ;\ x^2 + 2x + 1 = 0\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} ;\ x^2 - 2 = 0\}$,
6. $\{x \in \mathbf{Z} ;\ x^2 - 2 = 0\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} ;\ x^2 + 1 = 0\}$,
8. $\{x \in \mathbf{R} ;\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\}$,
9. $\{x \in \mathbf{R} ;\ 2\lg x = \lg x^2\}$,
10. $\{x \in \mathbf{R} ;\ \lg x = \lg(-x)\}$.

Az (x, y), illetve az (x_n, y_n) számpárokat az xy koordinátasík pontjainak tekintve, milyen geometriai alakzatokat alkotnak az alábbi halmazok?

11. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ x^2 + y^2 = 1\}$,
12. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \le 1\}$,
13. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ xy = yx\}$,
14. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ |x| < y \le 1\}$,
15. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4\}$,
16. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ x^2 + y^2 = 4 \text{ és } y \ge 0\}$,
17.$^\triangleright$ $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ 0 \le y \le 4,\ 0 \le x \le 6 \text{ és } 3x + 4y \le 22\}$,
18. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ 0 \le x \le 2, \text{ és } 0 \le y \le x + 2\}$,
19. $\{(x_n, y_n) ;\ n \in \mathbf{N}^+,\ x_n = 2^{-n} \text{ és } y_n = 0\}$,
20. $\{(x_n, y_n) ;\ n \in \mathbf{N}^+,\ x_n = \frac{1}{n} \text{ és } y_n = \frac{1}{n^2}\}$,
21.$^\triangleright$ $\{(x, y) ;\ x = t^2,\ y = 3t^2,\ t \in \mathbf{R}\}$,
22. $\{(x, y) ;\ x = t^3,\ y = 3t^3,\ -1 \le t \le 2\}$,
23. $\{(x, y) ;\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 < t \le 2\pi\}$.

24. Az első évfolyamos hallgatók közül jelöljük M-mel a második tanköröseket, F-fel a fiúkat, A-val az angolul, N-nel a németül tudó (nyelvvizsgával rendelkező) diákokat. Az előbbi halmazok segítségével (a **D 2.4**-ben definiált halmazműveleteket felhasználva) fejezzük ki a következő halmazokat:
a) A második tankörös fiúk. b) Az angolul és németül tudók.
c) Az angolul vagy németül tudók. d) Az angolul vagy németül tudó fiúk.
e) A vagy angolul vagy németül tudók. f) A második tankörös lányok.
g) A németül tudó lányok. h) A németül nem tudó, második tankörös lányok.

25. Legyen $M = \{m, 2m, 3m, \ldots\}$ és $N = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$, ahol m és n adott pozitív egész számok.
a) Milyen m és n esetén valódi része az M halmaz az N halmaznak?
b) Milyen m és n esetén része az M az N-nek?
c) Képezzük a két halmaz közös részét és egyesítését!

26. A következő egyenlőség jobb oldalát egészítsük ki a megfelelő halmazműveleti jellel úgy, hogy fennálljon az egyenlőség:
$$\{x ;\ x \in (A - B) \cup (B - A)\} = A \quad B\,.$$

27.▷ Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak. Válaszunkat igazoljuk!
a) Minden A, B halmazpárra $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$.
b) Minden A halmazra $A \subseteq A$.
c) Minden A halmazra $\emptyset \subset A$.
d) Van olyan A halmaz, hogy $A \subset \emptyset$.

28.▷ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén

$$A - B \subseteq C \quad \text{és} \quad A \subseteq B \cup C$$

ekvivalens állítások (vagyis bármelyik teljesülése esetén a másik is fennáll).

29.• Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges L és M halmazok esetén az alábbi A, B, C állítások ekvivalensek:

$$\begin{aligned} A &: \ L \subseteq M; \\ B &: \ L \cap M = L; \\ C &: \ L \cup M = M. \end{aligned}$$

30.▷ Legyen A, B és C három halmaz. Fejezzük ki a

$$D := A - (A - (B - (B - C)))$$

halmazt az A, B, C halmazokkal, valamint a metszés és egyesítés jelével! Ennek alapján döntsük el, mivel egyenlő D a következő esetekben:
a) Az A, B és C halmazok páronként közös elem nélküliek (diszjunktak).
b) Pontosan két diszjunkt halmaz van közöttük.
c) Nincs közöttük diszjunkt halmazpár.

31.▷ A következő egyenlőség igaz-e tetszőleges K, L és M halmazokra:

$$(M \cup K) \cap L = (M \cup L) \cap K.$$

Ha igaz, akkor bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg három olyan halmazt, melyekre nem teljesül az előbbi egyenlőség.

32.▷ Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások tetszőleges K, L és M halmazok esetén teljesülnek:

$$\text{a) } (K \cup L) - L \subseteq K, \qquad \text{b) } (K \cap L) - L \subseteq M.$$

33.• Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C halmazokra $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq C$.

34.▷ Igazoljuk, hogy az A és B halmazokra $A - B = B - A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A = B$.

35.▷ Mely A, B halmazpárokra igaz az, hogy $A - B = A \cap B$?

36.▷ Mely A, B halmazpárokra igaz az, hogy $A - B = A \cup B$?

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi feladatokban adott összefüggések tetszőleges K, L és M halmazok esetén teljesülnek! Ábrázoljuk Venn-diagrammokkal az egyenlőség mindkét oldalán álló kifejezéseket.

37.▷ $K - (K - L) = L - (L - K)$,

38.• $K - (L - M) = (K - L) \cup (K \cap M)$,

39. $(K \cap L) - (K - M) = K \cap L \cap M$,
40. $(K - L) - M = (K - M) - (L - M)$,
41.ᐅ $K = (K \cup L) \cap (K \cup \overline{L})$, 42.ᐅ $K = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$,
43.• $K = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$,
44.• $(K - L) \cup (L - M) \cup (M - K) \cup (K \cap L \cap M) = K \cup L \cup M$,
45. $(K \cup L) \cap (L \cup M) \cap (K \cup M) = (K \cap L) \cup (L \cap M) \cup (K \cap M)$.
46.ᐅ Mutassuk meg, hogy az A és B halmazokra $A - B = A$ pontosan akkor teljesül, ha $B - A = B$.
47.ᐅ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén

$$A \ominus B \subseteq (A \ominus C) \cup (B \ominus C).$$

48.ᐅ Bizonyítsuk be, hogy $A \ominus B = A \cup B$ akkor és csak akkor teljesül, ha A és B diszjunkt halmazok!

Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazokra fennállnak az alábbi azonosságok:

49.ᐅ $(A \cap \overline{B}) \ominus (\overline{A} \cap B) = A \ominus B$, 50. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A \ominus B$.
51.ᐅ Bizonyítsuk be, hogy a K, L, M és N halmazokra az alábbi egyenlőségek ekvivalensek, azaz vagy mindkettő fennáll, vagy egyik sem:

$$K \ominus L = M \ominus N \qquad K \ominus M = L \ominus N.$$

Adott A és B halmazokhoz határozzuk meg az összes olyan X halmazt, amelyre az alábbi egyenlet teljesül:

52.ᐅ $A - (B - X) = A$, 53.ᐅ $(A - X) \cup B = X$,
54.ᐅ $(A - X) \cap (B - X) = A$, 55.ᐅ $(A \cap X) \cup B = X$,
56.ᐅ $(A \cap B) \cup X = B \cup X$, 57.ᐅ $A - X = X - A$.
58. Írjuk fel a $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát!
59.ᐅ Adjuk meg a $P(P(P(\emptyset)))$ halmaz elemeit!

Igazoljuk, hogy bármely A és B halmaz esetén

60.ᐅ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, 61.ᐅ $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$,
62.ᐅ $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ akkor és csak akkor, ha $B \subseteq A$ vagy $A \subseteq B$.

Az alábbi feladatokban lévő halmazok mindegyikének véges sok eleme van. Jelölje $|M|$ az M halmaz elemeinek számát! Bizonyítsuk be az alábbi állítások helyességét:

63. $|A| \leq |B|$, ha $A \subseteq B$, 64. $|A \cup B| \leq |A| + |B|$,
65. $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$, 66. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
67.• $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$,
68. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.
69. Egy 33 fős tankörben háromféle idegen nyelvet tudnak: 20 diák tud angolul, 16 németül és 6 franciául, 5 diák tud pontosan két nyelven és 2 diák tud

mindhárom nyelven beszélni. Hányan nem tudnak egy idegen nyelvet sem, és hányan tudnak pontosan egy idegen nyelven beszélni?

70. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben televízió és 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?

71.* Hány eleme van egy n elemű A_n halmaz hatványhalmazának?

72.* Mutassuk meg, hogy nincs olyan A halmaz, amelyhez létezne A és $P(A)$ elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. (Útmutatás: tegyük fel, hogy van egy ilyen kölcsönösen egyértelmű $\varphi : A \to P(A)$ leképezés, és vizsgáljuk meg az $X := \{y \in A;\ y \notin \varphi(y)\}$ halmazt.)

73. Legyen $A = \{x \in \mathbf{R};\, 1 \leq x \leq 5\}$ és $B = \{y \in \mathbf{R};\, 3 \leq y \leq 4\}$. Az (x, y) számpárokat a sík pontjainak tekintve ábrázoljuk az $A \times B$ halmazt!

74. Legyen $A = \{a\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Soroljuk fel az $A \times B \times C$, az A^3 és a B^3 halmazok elemeit!

75. Az m elemű A halmaz és az n elemű B halmaz metszete egy k elemű halmaz. Hány eleme van az alábbi halmazoknak?
a) $A \times B$, b) $(A \cap B)^2$, c) $(A \cup B)^3$, d) $(A \setminus B)^2$, e) $(A \ominus B)^4$, f) $A \times B \times A$.

3. fejezet

Matematikai logika

Logikai műveletek, kvantorok

D 3.1 A P és Q elemi ítéletekre vonatkozó logikai alapműveleteket (**konjunkció** ($\wedge$), **diszjunkció** ($\vee$), **implikáció** ($\Rightarrow$), **ekvivalencia** ($\Leftrightarrow$), **negáció** ($\neg$)) táblázatos definíciói:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	P	$\neg P$
1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0		
0	0	0	0	1	1		

D 3.2 Két logikai kifejezést akkor és csak akkor tekintünk **azonosan egyenlőnek**, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele $\equiv$.

J 3.3 A $\forall x P(x)$ és a $\exists x P(x)$ jelölések kiejtése: „minden x-re (igaz, hogy) $P(x)$" és „van olyan x, hogy $P(x)$". A $\forall$ ill. a $\exists$ jel neve **univerzális** ill. **egzisztenciális kvantor**.

T 3.4 Azonosságok:

(1)	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	asszociativitás
(2)	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	kommutativitás
(3)	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$	idempotencia
(4)	$(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$	$(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$	elnyelés
(5)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	disztributivitás
(6)	$P \wedge 1 \equiv P \quad P \wedge 0 \equiv 0$	$P \vee 1 \equiv 1 \quad P \vee 0 \equiv P$	
(7)	$P \wedge \neg P \equiv 0$	$P \vee \neg P \equiv 1 \quad \neg(\neg P) \equiv P$	
(8)	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	De Morgan-azonosságok
(9)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$	
(10)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$		kontrapozíció
(11)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
(12)	$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$	$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$	kvantoros ítéletek tagadása

P 3.5 Bebizonyítjuk a $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ azonosságot (**T 3.4** (8)) a **D 3.1** segítségével. A táblázat kitöltésének lépéseit itt külön táblázatokban adjuk meg: 1) az értékpárok beírása, 2) a $\neg P$ értékének kiszámítása, 3) mindkét oldal kiszámítása.

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1		1			1		1
1		0			1		0
0		1			0		1
0		0			0		0

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1		1		0	1		1
1		0		0	1		0
0		1		1	0		1
0		0		1	0		0

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1	1	1		0	1	1	1
1	0	0		0	1	0	0
0	1	1		1	0	1	1
0	1	0		1	0	1	0

Feladatok

Az alábbi feladatokban P igaz, Q hamis, R hamis és S igaz logikai értékű ítéletet jelöl. Határozzuk meg a következő összetett ítéletek logikai értékét:

1.▷ $(P \wedge Q) \wedge R$, 2. $(P \wedge Q) \vee R$, 3. $(P \vee Q) \vee R$,
4. $(Q \wedge P) \vee S$, 5. $Q \wedge (P \vee S)$, 6. $R \Rightarrow (Q \vee \neg P)$,
7. $P \Rightarrow (P \Rightarrow S)$, 8. $P \Rightarrow (R \vee S)$,
9. $(P \vee R) \Leftrightarrow (Q \vee S)$, 10. $(R \wedge \neg S) \Leftrightarrow (Q \vee S)$,
11.▷ $S \Leftrightarrow (P \Rightarrow (\neg P \vee S))$, 12. $(Q \wedge S) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (R \vee \neg S))$.
13.• Az implikáció „Ha P, akkor Q" ($P \Rightarrow Q$) ítéletét írjuk le több módon, például az alábbi kifejezések felhasználásával: „implikálja", „maga után vonja", „szükséges feltétele", „elégséges feltétele", „csak akkor", ...
14. Ha egy n számú logikai változót tartalmazó kifejezés logikai értékét meg akarjuk határozni a változók minden lehetséges értéke mellett, akkor hány esetet kell megvizsgálni? Más szóval: a **P 3.5** példa szerint elkészített táblázatnak a vízszintes vonal alatt hány sora van, ha a logikai változók száma n?
15.▷ A p, q és r logikai változókból képezzük a következő két logikai kifejezést: $p \wedge (q \vee r)$ és $(p \wedge q) \vee r$. Azonosan egyenlők-e ezek a kifejezések?

Igazoljuk a következő azonosságokat táblázattal és/vagy a **T 3.4** tételbeli azonosságok felhasználásával:

16.• $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$, (implikáció tagadása, **T 3.4** (8)),
17.▷ $p \wedge q$, 18. $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$,
19.▷ $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, 20. $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$,
21. $(p \vee q) \equiv \neg p \Rightarrow q$, 22. $\neg(p \wedge q) \equiv p \Rightarrow \neg q$,
23. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv 1$, 24. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv 1$,
25. $[\neg p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p \equiv 1$, 26. $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$,
27. $\neg [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$,
28. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv [\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$,
29.▷ $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$,
30. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
31. $\neg(((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Állítsuk elő az alábbi ítéleteket a logikai műveletek és tovább már nem bontható elemi ítéletek segítségével, majd ahol lehet, azonosságok alkalmazásával hozzuk egyszerűbb alakra:

32. „Márta nem szőke."
33. „Nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz."
34.▷ „Esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár."
35. „Éva vagy Pista ott volt."

36. „Ha a hegy nem megy Mohamedhez, Mohamed megy a hegyhez."
37. „Elmegyünk kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj."
38. „Kizárt, hogy se matekból, se fizikából ne menjek át elsőre."
39. „Ha a szemtanú megbízható, és az ujjlenyomatok a tettestől származnak, akkor téved az írásszakértő."
40. „Szivárvány csak akkor van, ha esik az eső, a Nap is süt, de nincs dél."

A dőlt betűs mondatok mindegyike tekinthető két elemi ítélet logikai függvényének. Írjuk fel e függvények logikai értékeit táblázat segítségével! (Vigyázzunk, a 'vagy' szót a hétköznapi beszédben többféle értelemben is használjuk.)

41. *Az n egész szám vagy páros, vagy páratlan.*
42. – Megyünk ma kirándulni és strandolni?
 – *Vagy kirándulni megyünk, vagy strandolni.*
43. – Melyik állomás következik?
 – *Vagy Ecser, vagy Maglód.*

A következő feladatokban $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $H(x)$ jelentse a következő, x-től függő, $S(x,y)$ pedig az x, y változóktól függő ítéleteket, ahol x és y pozitív egész számok:

$T(x)$: x prímszám; $P(x)$: x páros szám; $S(x,y)$: x osztója y-nak.

Mi az alábbi ítéletek logikai értéke:

44. $T(7)$, 45. $T(2) \wedge P(2)$, 46. $\exists x T(x)$,
47. $\forall y \exists x\, S(x,y)$, 48. $\exists x T(x) \wedge P(x))$, 49. $\forall x T(x)$,
50. $\forall y(S(2,y)) \Rightarrow P(y))$, 51. $\exists x\, \exists y\, (S(x,y) \Rightarrow y < x)$,
52. $\forall x \forall y(S(x,y) \Rightarrow x \leq y)$, 53.• $\exists x\, (S(6,x) \Rightarrow T(x))$.

Jelöljön x egy tetszőleges négyszöget. Tekintsük a következő ítéleteket:
$p(x)$: az x négyszög húrnégyszög;
$q(x)$: az x négyszög téglalap;
$r(x)$: az x négyszög szemközti szögeinek összege 180°;
$s(x)$: az x négyszög átlói felezik egymást.

Fogalmazzuk meg a következő összetett ítéleteket, majd határozzuk meg azok logikai értékét:

54. $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$, 55. $\forall x[q(x) \Rightarrow p(x)]$, 56. $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$,
57. $\forall x[p(x) \Leftrightarrow r(x)]$, 58. $\forall x[q(x) \Rightarrow s(x)]$, 59. $\forall x[\neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)]$,
60. $\forall x[(p(x) \wedge \neg q(x)) \Rightarrow s(x)]$.

Írjuk fel logikai műveletek és kvantorok segítségével az alábbi ítéleteket, majd fogalmazzuk meg mindegyik tagadását a **T 3.4** (12) azonosság felhasználásával:

61.▹ „Minden ajtón van kilincs."
62.▹ „Nem mind molnár, ki szekercét fog hóna alá." (közmondás)
63. „Ki nem szólt, csak bégetett,/ az kapott dicséretet." (Weöres Sándor)
64.• „Minden pozitív ε számhoz van olyan δ pozitív szám, hogy bármely x valós számra, ha $|x-a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$."
65. „Mindig fázom, ha fúj a szél."

Logikai műveletek kapcsolata a halmazműveletekkel

M 3.6 Halmazokhoz természetes módon hozzárendelhetünk logikai ítéleteket. Legyen H az alaphalmaz, és legyen abban P egy halmaz. Valamely $x \in H$ elemre $p(x)$ logikai értéke legyen igaz, ha $x \in P$, és hamis, ha $x \notin P$, azaz $p(x)$ legyen maga az $x \in P$ ítélet.
A $\neg p(x)$ negáció halmazelméleti megfelelője a P halmaz H-ra vonatkozó komplementere. Definíció szerint a $p(x)$ és $q(x)$ logikai értékekre a $p(x) \wedge q(x)$ **konjunkció** akkor és csak akkor igaz, ha $p(x)$ igaz, és $q(x)$ is igaz. Ugyanakkor, valamely x dologra $x \in P \cap Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in P$ és $x \in Q$. Ezek alapján mondhatjuk, hogy a $p(x) \wedge q(x)$ konjunkció halmazelméleti megfelelője a $P \cap Q$, és fordítva. Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy a **diszjunkció** halmazelméleti megfelelője a halmazok egyesítése. E megfeleltetéseket képletekkel is felírva:

$$(x \in \overline{P}) \equiv \neg(x \in P) \equiv \neg p(x),$$

$$(x \in P \cap Q) \equiv (x \in P) \wedge (x \in Q) \equiv p(x) \wedge q(x),$$

$$(x \in P \cup Q) \equiv (x \in P) \vee (x \in Q) \equiv p(x) \vee q(x).$$

Fordítva, egy $p(x)$ logikai ítélethez hozzárendelhetünk egy P halmazt a következő módon: legyen H azon x dolgok halmaza, amelyekre p igaz vagy hamis értéket vesz fel; és legyen P a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre $p(x)$ igaz. Ilyen módon minden logikai kifejezés átírható halmazelméleti formulára, és így ábrázolható Venn-diagrammal. Például, ha $p(n)$ az az ítélet, hogy „az n szám páros", akkor H-nak választhatjuk az egész számok halmazát, és ekkor a $p(n)$ ítéletnek megfelelő P halmaz a páros számok halmaza, vagyis a $p(n)$ ítélet megegyezik az $n \in P$ ítélettel. Az 1-gyel jelölt azonosan igaz ítélet halmazelméleti megfelelője a H alaphalmaz, a 0-val jelölt azonosan hamis ítéleté pedig az üres halmaz.

Feladatok

Írjuk fel és ábrázoljuk Venn-diagrammokkal az alábbi logikai kifejezések halmazelméleti megfelelőit, ha a $p(x)$, $q(x)$ és $r(x)$ ítéleteknek a P, Q és R halmazok felelnek meg.

66.* $p(x) \Rightarrow q(x)$, **67.** $p(x) \Leftrightarrow q(x)$,

68. $p(x) \vee \neg(q(x) \wedge r(x)) \equiv p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg r(x)$,

69. $p(x) \vee (q(x) \wedge r(x)) \equiv (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))$,

70. $p(x) \Rightarrow 0 \equiv \neg p(x)$,

71. $[(p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee \neg q(x))] \vee [(\neg p(x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(x))] \equiv 1$.

Ha a $p(x)$ és $q(x)$ $(x \in H)$ ítéleteknek a P és Q halmazok felelnek meg, akkor milyen halmazok közti összefüggések, illetve relációk felelnek meg az alábbi kvantoros kifejezéseknek:

72. $\forall x\, p(x)$, **73.** $\forall x\, \neg p(x)$, **74.** $\exists x\, p(x)$,

75. $\forall x\, (p(x) \Leftrightarrow q(x))$, **76.?** $\forall x\, (p(x) \Rightarrow q(x))$, **77.** $\neg \exists x\, (p(x) \wedge q(x))$.

Melyek azonosságok az alábbi egyenlőségek közül:

78. $\forall x\,(p(x) \wedge q(x)) = (\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x))$,

79. $\forall x\,(p(x) \vee q(x)) = (\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x))$.

A következő feladatokban megadott halmazelméleti azonosságokat logikai műveletek és azonosságok segítségével igazoljuk:

80.$^{\triangleright}$ $(P \cup Q) \cap (P \cup R) \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (Q \cap R)$.

81. $P - (Q \cap R) \equiv (P - Q) \cup (P - R)$.

82. $(P \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}) \cap (\overline{P} \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q}) \equiv \emptyset$.

83. $(P \cap \overline{Q}) \ominus (\overline{P} \cap Q) \equiv P \ominus Q$.

84. $P \cup Q \cup R \equiv (P - Q) \cup (Q - R) \cup (R - P) \cup (P \cap Q \cap R)$.

85.* Tudjuk, hogy $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv 1$ (l. **25.** feladat). Hogyan lehet, hogy az alábbi állítás mégsem azonosan igaz: „ha esik az eső, akkor fúj a szél, vagy ha fúj a szél, akkor esik az eső."

86.$^{\triangleright}$ Kontrapozíció alkalmazásával igazoljuk, hogy ha n és m olyan pozitív egészek, hogy $n + m \geq 49$, akkor $n \geq 25$, vagy $m \geq 25$.

87. A hét mely napjain igaz és mely napjain hamis az alábbi két állítás:
(1) „Ha ma kedd van, akkor holnap szerda",
(2) „Ha ma kedd van, akkor holnap szombat"!

Az $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ állítást egymás megfordításainak nevezzük. Írjuk fel az alábbi matematikai állítások megfordítását, és döntsük el mindegyikről, igaz-e vagy nem:

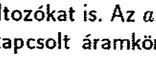
88. „Ha egy természetes szám osztható ab-vel, akkor osztható a-val is és b-vel is".

89. „Ha két négyszög egybevágó, akkor megfelelő oldalaik egyenlők egymással".

90. „Ha egy háromszög derékszögű, akkor két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik négyzetével".

Logikai áramkörök

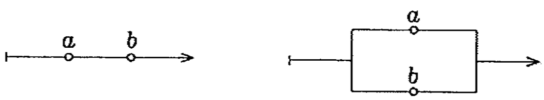
M 3.7 Az $A, B, C, \ldots$ betűk jelöljenek kétpólusú kapcsolókat. Legyenek $a, b, c, \ldots$ rendre az előbbi kapcsolókhoz rendelt logikai változók a következő megállapodással: az a logikai változó értéke igaz, ha az A kapcsoló be van kapcsolva, azaz képes az áram vezetésére, és hamis, ha nincs bekapcsolva, azaz nem képes az áram vezetésére. Az A kapcsolót a hozzá tartozó logikai értékkel a következő módon jelöljük:



Hasonlóan definiáljuk a $b, c, \ldots$ logikai változókat is. Az $a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c, \ldots$ jelű kapcsolókból soros és párhuzamos kapcsolással összekapcsolt áramkört logikai, vagy kapcsoló áramkörnek nevezzük. Ha több kapcsoló is a jelű, akkor ezek mindig azonos állásúak, míg egy a és egy $\neg a$ jelű mindig ellenkező állású. Az $a, b, c, \ldots$ változókat tartalmazó ítélet akkor tartozik az $A, B, C, \ldots$ kapcsolókból álló áramkörhöz, ha az ítélet pontosan akkor igaz, amikor az áramkör vezeti az áramot.

Feladatok

91.* Milyen logikai ítélet felel meg az A és B kapcsolók soros illetve párhuzamos kapcsolásával kapott áramköröknek?



Az alábbi logikai kifejezésekhez milyen áramkörök tartoznak:

92. $a \Rightarrow b$,

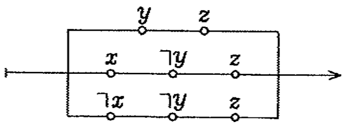
93. $a \Leftrightarrow b$,

94. $a \wedge b \wedge c \wedge \neg(a \wedge b)$,

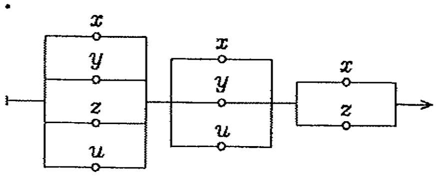
95. $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

Írjuk fel az alábbi két kapcsoló áramkörhöz tartozó logikai kifejezéseket, hozzuk egyszerűbb alakra, és ennek alapján rajzoljuk fel az eredetivel ekvivalens, de egyszerűbb kapcsoló áramkört:

96.



97.



98. Készítsünk kapcsoló áramkört egy négyszemélyes szavazógépre, mely a „többség dönt" elvét követi, — azaz vezeti az áramot, ha legalább három kapcsoló be van kapcsolva, — döntetlen esetén pedig egy kitüntetett (elnöki) kapcsoló állásának megfelelően működik.

4. fejezet

Vektoralgebra

Vektorok összeadása, kivonása és számmal szorzása

T 4.1 (**Háromszögegyenlőtlenség**) Minden a, b vektorpárra

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\,.$$

T 4.2 (**Paralelogrammaszabály**) Ha az a és b vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az a és b vektorral, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának az az átlóvektora, amely az összeadandók közös kezdőpontjából indul ki.

Feladatok

1. Adott az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorpár. Szerkesszük meg a következő vektorokat:
   a) $\mathbf{c}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}$; b) $\mathbf{d}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$; c) $\mathbf{e}=\mathbf{a}\sqrt{2}-\mathbf{b}\sqrt{3}$; d) $\mathbf{f}=\mathbf{a}\sqrt{5}-2\mathbf{b}$.
2. Legyen $\mathbf{m}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{n}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorral a következő vektorokat:
   a) $3\mathbf{m}-3\mathbf{n}$; b) $4\mathbf{m}+4\mathbf{n}$; c) $2\mathbf{m}-\frac{1}{2}\mathbf{n}$; d) $3\mathbf{m}+\frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{n}$.
3. Legyen $\mathbf{m}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{n}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ vektorral a következő vektorokat:
   a) $3\mathbf{a}-4\mathbf{b}$; b) $5\mathbf{a}+2\mathbf{b}$; c) $-\mathbf{a}+\frac{1}{10}\mathbf{b}$; d) $2\mathbf{a}-\sqrt{3}\mathbf{b}$.
4. Legyen a szabályos $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög köré írt kör középpontja O. Fejezzük ki az $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ $(i=1,2,3,4,5)$, $\overrightarrow{A_6A_1}$ oldalvektorokat az $\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{b}$ vektorokkal, és számítsuk ki az $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_6}$ összeget!
5. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert. Határozzuk meg a következő összegeket:
   a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$.
6. Legyen $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n számú (nem szükségképpen különböző) pont. Egyetlen vektorral adjuk meg az $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ összeget:
7. ᴾ Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor lehetnek egy (esetleg szakasszá, vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha vagy $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, vagy ha valamelyikük előállítható a másik kettő összegeként!

8. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két, nem kollineáris vektor. Bizonyítsuk be, hogy van olyan háromszög, melynek oldalvektorai: $\mathbf{a}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\frac{3}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}$.

9. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két nem kollineáris vektor. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan háromszög, amelynek oldalvektorai a $2\mathbf{a}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ vektorok!

10. Legyen $\mathbf{a}$ $(\neq \mathbf{0})$ tetszőleges vektor. Írjuk fel azokat az egységvektorokat, amelyek $\mathbf{a}$-val egyező állásúak!

11. Az $\mathbf{a}$ $(\neq \mathbf{0})$ és $\mathbf{b}$ $(\neq \mathbf{0})$ vektorok merőlegesek egymásra. Írjuk fel azt az egységvektort, amely komplanáris az adott vektorokkal, és felezi azok szögét!

12. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyállású vektorok, akkor a következő egyenlőségek közül legalább az egyik igaz: $|\mathbf{a}|\mathbf{b}+|\mathbf{b}|\mathbf{a}=\mathbf{0}$; $|\mathbf{a}|\mathbf{b}-|\mathbf{b}|\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

13. Az alábbi feladatokban az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoroknak milyen feltételt kell kielégíteni, hogy teljesüljön a leírt kikötés?
a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|>|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|<|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, c) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$,
d) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$, e) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$, f) $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ $(\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{b}\neq\mathbf{0})$,
g) Az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor felezze az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét.

14.ᴾ Az $A_1A_2A_3A_4A_5$ szabályos ötszög köré írt kör középpontja legyen az O pont. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=\mathbf{0}$.

15. Az $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$ szabályos n-szög köré írt kör középpontja legyen az O pont. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$.

16.ᴾ Egy háromszög oldalainak felezőpontjai adva vannak. A felezőpontoknak a háromszög síkjában felvett valamely O pontra vonatkozó helyvektorai segítségével fejezzük ki a háromszög egyik csúcsának helyvektorát, és ezt az összefüggést felhasználva szerkesszük meg a háromszöget!

17.ᴾ Az előző feladatban leírt módon dolgozzunk ki eljárást sokszög szerkesztésére, ha ismerjük oldalainak felezőpontjait!

18. Egy páratlan oldalszámú síksokszögben ismerjük az oldalak felezőpontjait. A 16. feladatban leírt módon adjunk meg eljárást a sokszög megszerkesztésére!

19. Legyen az ABC háromszög két oldalvektora $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$. Fejezzük ki $\mathbf{b}$-vel és $\mathbf{c}$-vel a háromszög súlyvonalvektorait!

A továbbiakban kitűzött bizonyításokat vektoralgebrai módszerekkel végezzük el.

20. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög súlyvonalaival, mint oldalakkal, szerkeszthető háromszög!

21. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalaival szerkesztett háromszög súlyvonalai az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoznak meg!

22. Legyen $A_1A_2A_3A_4$ egy síknégyszög. Jelölje F_1 az A_1A_2, F_2 az A_2A_3, F_3 az A_3A_4 és F_4 az A_4A_1 oldal felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma!

23. Legyen A, B, C és D a tér négy pontja. Jelölje K az AD szakasz, L pedig a BC szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

24.* A P pont az AB szakaszt $\left|\overrightarrow{AP}\right| : \left|\overrightarrow{PB}\right| = m : n$ arányban osztja. Legyen O a tér tetszőleges pontja. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OP}$ vektort az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ vektorok segítségével!

25.* Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban, harmadolva metszik egymást!

26. Legyen O a tér tetszőleges pontja. Írjuk fel az ABC háromszög S súlypontjába mutató $\overrightarrow{OS}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, és $\overrightarrow{OC}$ vektorokkal kifejezve!

27. Az ABC háromszög $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ oldalvektoraival fejezzük ki az S súlypontba mutató $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ és $\overrightarrow{CS}$ vektorokat, és számítsuk ki ezek összegét!

28.* Igazoljuk, hogy az S pont akkor és csak akkor súlypontja az ABC háromszögnek, ha $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$.

29.* Legyen ABC és $A_1B_1C_1$ egy sík két háromszöge. Súlypontjaikat jelölje rendre S, illetve S_1. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{SS_1}$.

30.* Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy két (nem szükségképpen ugyanabban a síkban fekvő) háromszög súlypontja közös legyen!

31.* Igazoljuk, hogy a tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át, és negyedelve metszik egymást!

32.* Igazoljuk, hogy ha $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ két, tetszőleges térbeli helyzetű paralelogramma, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 és DD_1 szakaszok felezőpontjai szintén egy paralelogramma csúcsai!

33.* Adva van az $ABCD$ paralelogramma. A tér tetszőleges O pontjának a tükörképe az A pontra legyen O_1, ennek tükörképe a D-re pedig O_2. Tükrözzük az O pontot a B csúcsra is, majd ezt a tükörképet a C-re. Az így kapott tükörképek legyenek rendre O_3 és O_4. Bizonyítsuk be, hogy O_2 és O_4 egybeesik!

34.* Legyen A, B, C és D a tér négy pontja, és O egy tetszőleges pont. Tükrözzük az O pontot az A ponton, majd ezt az O_1 tükörképet a D-n. A másodszori tükörkép legyen O_2. Tükrözzük az O pontot a B ponton is, majd ezt a tükörképet a C-n. Az így kapott tükörképek legyenek rendre O_3 és O_4. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C és D pontok akkor és csak akkor csúcsai egy paralelogrammának, ha O_2 és O_4 egybeesik!

Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége; vektor koordinátái

D 4.3 Valamely $\mathbf{b}$ vektorról akkor mondjuk, hogy előállítható az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ vektorok **lineáris kombináció**jaként, ha találhatók olyan $k_1, k_2, \ldots, k_r$ valós számok, hogy $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r$.

D 4.4 Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ vektorrendszert **lineárisan független**nek nevezzük, ha a $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ egyenlőség csak a $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$ értékekkel teljesül.

T 4.5 Két vektor akkor és csak akkor egyező állású, ha legalább egyikük a másik számszorosa, mégpedig, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyező állásúak és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor van olyan $k \in \mathbf{R}$, hogy $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$.

T 4.6 Ha két vektor nem kollineáris, akkor a velük komplanáris bármely vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként, és ez az előállítás egyértelmű.

T 4.7 Három vektor akkor és csak akkor komplanáris, ha van közöttük olyan, amelyik a másik kettőnek lineáris kombinációja.

T 4.8 Három, nem komplanáris vektor lineáris kombinációjaként a tér bármely vektora előállítható, és ez az előállítás egyértelmű.

T 4.9 Ha az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely

$$p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + \ldots + p_r\mathbf{a}_r = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_r\mathbf{a}_r$$

egyenlőség csak úgy teljesülhet, hogy $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots, p_r = q_r$.

T 4.10 Legalább két vektorból álló rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a rendszer egyetlen eleme sem állítható elő a többiek lineáris kombinációjaként.

D 4.11 Vegyük fel, közös kezdőponttal, a páronként egymásra merőleges, egységnyi hosszúságú $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ kötött vektorokat úgy, hogy ebben a sorrendben jobbrendszert alkossanak. A **T 4.8** tétel értelmében a tér bármely $\mathbf{v}$ vektorához megadható egyetlen olyan a, b, c valós számhármas, hogy $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Az a, b, c számokat a $\mathbf{v}$ vektor ($\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ alapvektor-rendszerre vonatkozó) **koordinátáinak** nevezzük. Azt, hogy a, b, c a $\mathbf{v}$ koordinátái, így jelöljük:

$$\mathbf{v} = [a, b, c] \quad \text{vagy} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

T 4.12 Ha $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ és k adott szám, akkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \quad \text{és} \quad k\mathbf{a} = [ka_1, ka_2, ka_3].$$

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Megjegyzés: A vektor koordinátái függnek az alapvektorok megválasztásától. Az előbbi (és a később felírandó) minden koordinátás egyenlőség természetesen úgy értendő, hogy az egyenlőségben szereplő vektorok koordinátái ugyanarra az alapvektor-rendszerre vonatkoznak.

Feladatok

35.$^{\triangleright}$ Tegyük fel, hogy az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Legyen

$$\mathbf{v} = p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} \quad \text{és} \quad \mathbf{w} = q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b} + q_3\mathbf{c}$$

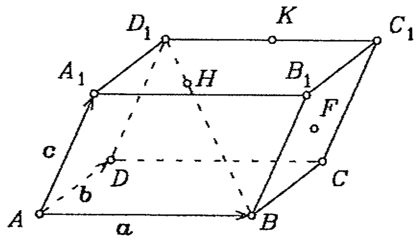
az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok két olyan lineáris kombinációja, ahol $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $q_3 \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ akkor és csak akkor kollineáris (egyező állású), ha $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_3}{q_3}$.

36. Az alábbi feladatokban megadott $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok az α és β paraméterek mely értékeinél kollineárisak, ha az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független?

a) $\mathbf{v}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{w}=4\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$,
b) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+4\mathbf{b}$, $\mathbf{w}=2\mathbf{a}+8\mathbf{b}+\alpha\mathbf{c}$,
c) $\mathbf{v}=2\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=4\mathbf{a}+2\alpha\mathbf{b}+2\mathbf{c}$,
d) $\mathbf{v}=-2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\alpha\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$,
e) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=3\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
f) $\mathbf{v}=5\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+3c$, $\mathbf{w}=\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
g) $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+2\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
h) $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+2\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+4\alpha\mathbf{b}+2\mathbf{c}$,
i) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$,
j) $\mathbf{v}=3\mathbf{a}-3\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}-\mathbf{c}$.

37.$^{\triangleright}$ Legyen az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan független-e. Állításainkat igazoljuk!
a) $\mathbf{r}=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=5\mathbf{a}-3\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{0}$,
b) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=-2\mathbf{a}-2\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
c) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$,
d) $\mathbf{r}=\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
e) $\mathbf{r}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}-3\mathbf{c}$,
f) $\mathbf{r}=\mathbf{a}$, $\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
g) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=-\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
h) $\mathbf{r}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

38. Az ábrán egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedont adtunk meg. A F pont az BCC_1B_1 lap középpontját, a H a BD_1 testátló D_1-hez közelebbi negyedelő pontját és a K pont a C_1D_1 él felezőpontját jelöli. A koordinátáival adott $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}=[4,2,-3]$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}=[5,6,-2]$ és $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}=[1,4,-3]$ vektorok lineáris kombinációjaként adjuk meg, és ezt felhasználva koordinátáikkal is írjuk fel, a következő vektorokat: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HK}$.



39. Az $ABCD$ tetraéder A csúcsából kiinduló három élvektor $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}=[4,3,-2]$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}=[2,-1,5]$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}=[6,4,9]$. Állítsuk elő a B csúcsból kiinduló három élvektor lineáris kombinációjaként az ACD lap S_B súlypontjába, illetve a tetraéder S súlypontjába mutató $\overrightarrow{BS_B}$, illetve $\overrightarrow{BS}$ vektort. Írjuk fel ezeket a vektorokat koordinátás alakban is!

40.$^{\triangleright}$ Legyen O a tér adott pontja. Vegyük fel az A, B és C pontokat úgy, hogy azok egy egyenesre illeszkedjenek, és az A ne essék egybe a B ponttal. A következő feladatokban, a koordinátáikkal adott $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ vektort a megadott feltétel mellett. Számítsuk ki a $\mathbf{c}$ vektor koordinátáit is!

a) $\mathbf{a} = [3,4,2]$, $\mathbf{b} = [1,5,7]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 2$,
b) $\mathbf{a} = [4,3,-2]$, $\mathbf{b} = [2,2,4]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 2 : 1$,
c) $\mathbf{a} = [-3,2,5]$, $\mathbf{b} = [0,4,1]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 1$,
d) $\mathbf{a} = [a_1,a_2,a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1,b_2,b_3]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = m : n$.

41. Az ABC háromszögben az AB, a BC és a CA oldal felezőpontját jelöljük rendre D-vel, E-vel és F-fel. Legyen O a tér tetszőleges pontja és S a háromszög súlypontja. Adva vannak a $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = [4,3,-2]$, $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE} = [2,1,-3]$ és $\mathbf{f} = \overrightarrow{OF} = [3,2,-7]$ vektorok. Állítsuk elő a $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ és $\mathbf{s} = \overrightarrow{OS}$ vektorokat! Számítsuk ki a koordinátákat is !

42. Az $ABCD$ tetraéderben az ABC, az ABD és az ACD lap súlypontját jelöljük rendre S_1-gyel, S_2-vel és S_3-mal. Az $\mathbf{s}_1 = \overrightarrow{AS_1} = [3,1,4]$, $\mathbf{s}_2 = \overrightarrow{AS_2} = [2,2,-2]$ és $\mathbf{s}_3 = \overrightarrow{AS_3} = [1,3,4]$ vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a tetraéder S súlypontjába mutató $\overrightarrow{AS}$, a BCD lap S_4 súlypontjába mutató $\overrightarrow{AS_4}$ vektort, valamint az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{CD}$ élvektorokat! Számítsuk ki a koordinátáikat is!

43. Az alábbi feladatokban szereplő $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat (az $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ alapvektorrendszerre vonatkoztatott) koordinátáikkal adtuk meg. Fejezzük ki a $\mathbf{v}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!
a) $\mathbf{a} = [1,1,0]$, $\mathbf{b} = [1,-1,0]$, $\mathbf{c} = [1,1,-1]$, $\mathbf{v} = [3,5,7]$,
b) $\mathbf{a} = [1,0,0]$, $\mathbf{b} = [0,1,0]$, $\mathbf{c} = [1,1,0]$, $\mathbf{v} = [2,1,3]$,
c) $\mathbf{a} = [1,0,0]$, $\mathbf{b} = [1,1,1]$, $\mathbf{c} = [0,0,1]$, $\mathbf{v} = [3,1,-2]$.

44.° Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ közös kezdőpontú komplanáris vektorok, de $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ne legyen kollineáris. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha a $\mathbf{c}$ vektornak $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ alakú előállításában az α és β konstansokra $\alpha + \beta = 1$ teljesül.

45. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok kezdőpontjai egybeesnek, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem komplanárisak. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy síkon, ha a $\mathbf{d}$ vektornak $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ alakú előállításában az α, β és γ konstansokra $\alpha + \beta + \gamma = 1$ teljesül.

46. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két, közös kezdőpontú, nem kollineáris vektor. Milyen esetben felezi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorral közös kezdőpontú $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét?

47.$^\triangleright$ Vektorok segítségével igazoljuk, hogy a háromszög bármelyik belső szögének felező egyenese a szöggel szemben fekvő oldalt a másik két oldal arányában osztja.

48.$^\triangleright$ Az ABC háromszög AC oldalát a B csúcsnál lévő belső szög felező egyenese a D pontban metszi. Állítsuk elő a $\overrightarrow{BD}$ szögfelező vektort a $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

49.$^{\triangleright}$ Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóját a C csúcsból kiinduló magasságvonal a D pontban metszi. A $\overrightarrow{CD}$ magasságvektort állítsuk elő a $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CA}$ befogóvektorok lineáris kombinációjaként!

50.* Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja az E, a CD oldalé az F pont. Az AE és BF szakaszok metszéspontját jelöljük M-mel. Állítsuk elő az $\overrightarrow{AM}$ vektort az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

Vektorok skaláris szorzata

D 4.13 Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{ab}$-vel jelöljük, és azon a következő számot értjük: $\mathbf{ab} := |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{ab})\angle$. Egy a vektor önmagával képezett skaláris szorzatát az a vektor négyzetének is nevezzük, és ennek megfelelően $\mathbf{a}^2$-tel is jelöljük.

T 4.14 Ha $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ és $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$, akkor $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

T 4.15 Tetszőleges a vektorra $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$. Ha $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, akkor $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

T 4.16 Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor zérus, ha a két vektor merőleges egymásra.

T 4.17 Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor az $\mathbf{ea}$ skaláris szorzat abszolút értéke egyenlő az a vektor e irányába eső merőleges vetületének hosszával. Ha az $\mathbf{ea}$ szorzat nem zérus, akkor előjele aszerint pozitív, illetve negatív, hogy az előbbi vetületi vektor iránya megegyező, vagy ellentétes az e irányával.

Feladatok

51.$^{\triangleright}$ Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge $\frac{\pi}{3}$, abszolút értékük: $|\mathbf{a}| = 3$ és $|\mathbf{b}| = 4$. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatok értékét!
a) $\mathbf{ab}$. b) $\mathbf{a}^2$. c) $\mathbf{b}^2$. d) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$.
e) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$. f) $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$. g) $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})^2$.

52. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok abszolút értéke rendre 3, 5 és 8. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges egymásra, a $\mathbf{c}$ vektor pedig mindkettővel 120°-os szöget zár be. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatokat:
a) $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})(\mathbf{b}+3\mathbf{c})$. b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2$. c) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-3\mathbf{c})^2$.

53.$^{\triangleright}$ Tegyük fel, hogy az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ olyan egységvektorok, amelyekre $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ teljesül. Számítsuk ki az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ összeg értékét!

54. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok abszolút értékei: $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$, továbbá $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Számítsuk ki az $\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{bc}$ összeg értékét!

55. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{c}$ vektorok páronkénti szöge 60°, abszolút értékeik: $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$ és $|\mathbf{c}| = 6$. Számítsuk ki az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektor abszolút értékét!

56. Bizonyítsuk be a következő azonosságot: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)$. Mi ennek az azonosságnak a geometriai jelentése?

57. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges **a** és **b** vektorokra $-|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \le \mathbf{ab} \le |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$. Milyen esetekben teljesül az egyenlőség?

58. Az $\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$) vektorok az α paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra?

59.ᐅ Mutassuk ki, hogy az $\mathbf{r}=\mathbf{b}-\mathbf{a}(\mathbf{ab})/\mathbf{a}^2$ ($\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$) vektor merőleges az **a** vektorra!

60. Mutassuk ki, hogy az $\mathbf{r}=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab})$ vektor merőleges az **a** vektorra!

61.ᐅ Milyen feltételt kell az **a** és **b** vektoroknak kielégíteni ahhoz, hogy az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

62.ᐅ Az **a** és **b** vektorok szöge 30°. Abszolút értékük: $|\mathbf{a}|=\sqrt{3}$ és $|\mathbf{b}|=1$. Számítsuk ki az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorok szögét!

63. Legyen **a** és **b** két, a zérusvektortól különböző vektor. Határozzuk meg a két vektor szögének koszinuszát, ha
a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|$; b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

64.ᐅ Ha az $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ vektor pedig merőleges a $7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ vektorra, akkor mekkora az **a** és **b** vektorok szögének koszinusza?

65. Legyen $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=5$ és a két vektor szöge 120°. A t paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra a $t\mathbf{a}+17\mathbf{b}$ és a $3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorok?

66.ᐅ Mi jellemzi azokat az **a**, **b** ($\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$) vektorpárokat, amelyekre teljesül az, hogy az **a**-nak a **b** irányába eső merőleges vetülete ugyanolyan hosszú, mint a **b**-nek az **a** irányába eső merőleges vetülete?

67.• Legyen O a tér adott pontja, $\mathbf{e}=\overrightarrow{OE}$ egységvektor és k egy pozitív konstans. Hol helyezkednek el azok a X pontok, amelyekkel $\mathbf{e}\cdot\overrightarrow{OX}=k$?

68. Számítsuk ki a megadott vektorok hajlásszögének koszinuszát!
a) $[3,1,3]$, $[1,-2,2]$. b) $[2,3,-1]$, $[-1,1,6]$. c) $[4,2,-3]$, $[3,6,8]$.

69. Milyen z szám esetén merőleges a $\mathbf{b}=[6,-2,z]$ vektor az $\mathbf{a}=[2,-3,1]$ vektorra?

70. A következő feladatokban megadott **a** és **b** vektorok valamelyik koordinátája egy t paraméterrel egyenlő. A két vektor szöge a t mely értékénél lesz az adott α szög?
a) $\mathbf{a}=[1,t,1]$, $\mathbf{b}=[-1,2,1]$, $\alpha=60°$,
b) $\mathbf{a}=[1,t,1]$, $\mathbf{b}=[+1/2,1,+1]$, $\alpha=45°$,
c) $\mathbf{a}=[t,1,2]$, $\mathbf{b}=[0,-1,1]$, $\alpha=90°$.

71. Számítsuk ki annak az **x** vektornak a koordinátáit, amely kollineáris az $\mathbf{a}=[2,1,-1]$ vektorral és kielégíti az $\mathbf{ax}=3$ egyenletet!

72. Legyen $\mathbf{a}=[1,0,-1]$ és $\mathbf{b}=[1,1,-1]$. Határozzuk meg azokat az **e** egységvektorokat, amelyekre
$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{e})_\angle=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \cos(\mathbf{b},\mathbf{e})_\angle=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

73.• Állítsuk elő az **a** vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos a **b** vektorral, a másik pedig merőleges **b**-re! Számítsuk ki e két vektort, ha pl. $\mathbf{a}=[3,2,2]$ és $\mathbf{b}=[4,-2,2]$!

74. Adva vannak az $\mathbf{a} = [1,0,1]$, $\mathbf{b} = [1,2,2]$ és $\mathbf{c} = [-1,2,1]$ vektorok. Merőlegesen vetítsük a $\mathbf{c}$ vektort mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ vektor egyenesére. Határozzuk meg a két vetületvektor összegét!

75. Az alábbiakban megadott vektorpárok közül melyik lehet rombusznak és melyik lehet téglalapnak két szomszédos oldalvektora?
a) $\mathbf{a}=[3,5,-4]$, $\mathbf{b}=[2,-10,-11]$,
b) $\mathbf{a}=[1,-10,-7]$, $\mathbf{b}=[2,5,-11]$,
c) $\mathbf{a}=[3,1,-2]$, $\mathbf{b}=[2,1,1]$.

76. Számítsuk ki annak a 6 egységnyi hosszú $\mathbf{x}$ vektornak a koordinátáit, amely kollineáris a $[2,-1,2]$ vektorral és tompaszöget zár be a $[0,0,1]$ vektorral!

77. Számítsuk ki annak az $\mathbf{x}$ vektornak a koordinátáit, amely eleget tesz a következő feltételeknek:
1.) $\mathbf{x}$ merőleges az $\mathbf{a} = [1,1,-1]$ és $\mathbf{i} = [1,0,0]$ vektorokra;
2.) $\mathbf{x}$ abszolút értéke 2;
3.) $\mathbf{x}$ hegyesszöget zár be a $\mathbf{j} = [0,1,1]$ vektorral.

78. Számítsuk ki az $\mathbf{x}$ vektor koordinátáit, ha $\mathbf{x}$ merőleges a $[2,3,-1]$ és $[1,-2,3]$ vektorokra és kielégíti az $\mathbf{x}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) = -6$ egyenletet!

79.ᵖ Adva vannak az $\mathbf{a} = [7,-1,0]$, $\mathbf{b} = [3,-4,5]$ és $\mathbf{c} = [4,3,5]$ vektorok. Számítsuk ki azon $\mathbf{x}$ egységvektorok koordinátáit, melyek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal egyenlő szöget zárnak be! Határozzuk meg e szögek koszinuszait is!

80.ᵖ A $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$ vektor merőleges vetületének hossza az $\mathbf{a} = [3,4]$ vektor egyenesén 1, a $\mathbf{b} = [1,1]$ vektorén $\sqrt{2}$. Számítsuk ki $\mathbf{v}$ koordinátáit!

81. A $\mathbf{v}$ vektor merőleges vetületének hossza az $[1,-1,1]$, $[2,0,1]$, $[1,1,2]$ vektorok egyenesein rendre $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$. Határozzuk meg a $\mathbf{v}$ vektort!

82. Az $\mathbf{e}$ egységvektor merőleges vetületének hossza mind az $[1,1,0]$, mind a $[0,1,1]$ vektor egyenesén $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Határozzuk meg az $\mathbf{e}$ vektort!

83. Az $\mathbf{m}$ vektor abszolút értéke $\sqrt{10}$ és $\mathbf{m}$ merőleges mind az $\mathbf{a} = [-1,3,1]$, mind a $\mathbf{k} = [0,0,1]$ vektorra. Határozzuk meg az $\mathbf{m}$ vektort!

84.• Igazoljuk, hogy bármely $ABCD$ tetraéderre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

85. Az előző feladat állítására támaszkodva igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két kitérő élpárjának két-két egyenese merőleges egymásra, akkor a harmadik kitérő élpár egyenesei is merőlegesek egymásra.

86.ᵖ Vektoralgebrai módszerekkel bizonyítsuk be Thales tételét!

87.ᵖ Igazoljuk, hogy a paralelepipedon testátlóinak négyzetösszege egyenlő az éleinek négyzetösszegével!

88. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}$ vektor merőleges a nem komplanáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok mindegyikére, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

89.* Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder magasságvonalai akkor és csak akkor tartalmaznak egy közös pontot (magasságpontot), ha a tetraéder szemközti élvektorai merőlegesek egymásra.

Vektorok vektori szorzása

D 4.18 A háromdimenziós $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok **vektori szorzatát** így jelöljük: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, és ezen azt a vektort értjük, amelynek
1.) abszolút értéke: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| := |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$,
2.) állása $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re merőleges,
3.) iránya pedig olyan, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ebben a sorrendben, jobbrendszert alkot.

T 4.19 Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által meghatározott paralelogramma területének mérőszámával egyenlő. Skaláris szorzatokkal kifejezve:
$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2}$.

T 4.20 Két vektor vektori szorzata akkor és csak akkor zérusvektor, ha a két vektor egyező állású.

T 4.21 Az $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ és $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ vektorok vektori szorzata determinánsokkal

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

alakban írható fel.

T 4.22 **Kifejtési tétel:** Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokra $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$.

T 4.23 Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokra és k valós számra

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ (2) & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \\ (3) & (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \\ (4) & k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b}. \end{array}$$

Feladatok

90.* Készítsük el az $\mathbf{0}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ vektorok vektori szorzatainak művelettábláját!

91. Végezzük el az alábbi feladatokban kijelölt vektori szorzásokat, majd hozzuk egyszerűbb alakra az így kapott kifejezéseket!
a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$,
c) $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + 3\mathbf{a})$, d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$,
e) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$,
f) $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (3\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 7\mathbf{c})$.

92. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:
a) $(\mathbf{i} \times \mathbf{j})^2$, b) $(2\mathbf{i} \times 3\mathbf{j})^2$, c) $[(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} \times 2\mathbf{j})]^2$.

93. Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma területe T, akkor mekkora a $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ és a $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma T' területe?

94.▷ Az $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ egyenlőségből következik-e, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?

95.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

96.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorok, és $\mathbf{v}$ olyan vektor, amellyel $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ teljesül, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

97.▷ Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem kollineáris vektorok és $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

98.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$, akkor $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ egyállású vektorok.

99.▷ Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok kezdőpontja közös. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesre illeszkednek.

100.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ vektorok kollineárisak, de egyikük sem zérusvektor, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok komplanárisak.

101. Ha az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a $\mathbf{b}$ vektorra, akkor mivel egyenlő az $\mathbf{a} \times \{\mathbf{a} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]\}$ szorzat?

102. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

b) $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = (\mathbf{bd})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})$.

103. Igazoljuk, hogy ha az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorra, de a nem merőleges $\mathbf{b}$-re, akkor az $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorok egyállású vektorok!

104.▷ Lehet-e az $\mathbf{a} = [6, 2, -3]$ és a $\mathbf{b} = [-3, 6, -2]$ vektor egy kocka egyik csúcsából kiinduló két élvektor? Ha lehet, akkor határozzuk meg az ugyanebből a csúcsból kiinduló harmadik élvektort!

105. Az ABC háromszögben $|\overrightarrow{AB}| = 8$, $|\overrightarrow{BC}| = 4$, $|\overrightarrow{CA}| = 6$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektor abszolút értékét!

106. Az ABC háromszögben legyen $\overrightarrow{AB} = [2, -3, 1]$ és $\overrightarrow{AC} = [1, 4, 6]$. Számítsuk ki az A csúcshoz tartozó m_a magasság hosszúságát!

107.• Legyen $\mathbf{e}$ egységvektor, $\mathbf{a}$ egy tetszőleges vektor. Mi az $|\mathbf{e} \times \mathbf{a}|$ szám és az $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$ vektor geometriai jelentése? Ennek ismeretében adjunk új megoldást a **73.** feladatra!

108.▷ Adva van három, közös kezdőpontú $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 1, 1]$ és $\mathbf{c} = [1, 2, 2]$ vektor. Bontsuk fel a $\mathbf{c}$ vektort két olyan vektor összegére, melyek közül az egyik az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjában van, a másik e síkra merőleges!

109. Egy paralelogramma két, közös kezdőpontból kiinduló élvektora $\mathbf{a} = [3, -1, 1]$ és $\mathbf{b} = [t, 2, 1]$. Számítsuk ki a t paraméter értékét, ha a paralelogramma területe $3\sqrt{6}$ egység.

110. Adva van az $ABCD$ négyszög három oldalvektora: $\overrightarrow{AB} = [2, -3]$, $\overrightarrow{BC} = [6, 2]$ és $\overrightarrow{CD} = [1, 3]$. Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét!

111.▷ Adva van három vektor: $\mathbf{a} = [2, -1]$, $\mathbf{b} = [1, 1]$ és $\mathbf{v} = [7, 1]$. Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelynek egyik átlója a $\mathbf{v}$ vektor és oldalai $\mathbf{a}$-val, illetve $\mathbf{b}$-vel párhuzamosak!

112. Legyen $\overrightarrow{OA} = [0,1,1]$, $\overrightarrow{OB} = [-1,1,2]$ és $\overrightarrow{OC} = [1,0,1]$. Határozzuk meg az $ABCO$ tetraédernek az O csúcshoz tartozó magasságát!

113. Adott $\mathbf{a}\,(\neq \mathbf{0})$ vektor esetén melyek azok a $\mathbf{b}\,(\neq \mathbf{0})$ vektorok, amelyekre $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \mathbf{ab}$ teljesül?

Vektorok vegyes szorzata

D 4.24 Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok $\mathbf{abc}$-vel jelölt **vegyes szorzatán** az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ számot értjük.

T 4.25 Az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzat abszolút értéke annak a paralelogramma alapú hasábnak a térfogatát adja, amelynek egy csúcsából kiinduló három élvektora éppen az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor. Az $\mathbf{abc}$ előjele aszerint pozitív ill. negatív, hogy a három vektor jobb- ill. balsodrású vektorhármas-e? Az $\mathbf{abc}$ értéke pontosan akkor 0, ha a három vektor komplanáris.

T 4.26 Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatára teljesülnek a következő összefüggések:
(1) $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba}$,
(2) $\mathbf{abc} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

T 4.27 Az $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ és $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$ vektorok vegyes szorzata a következő harmadrendű determinánssal egyenlő:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Feladatok

114. Fejezzük ki a következő vegyes szorzatokat az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzattal:
a) $\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c})$, ahol λ és μ adott valós számok,
b) $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$.

115. Komplanárisak-e a $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $3\mathbf{b}-4\mathbf{c}$, $2\mathbf{a}+5\mathbf{c}$ vektorok, ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok nem komplanárisak?

116. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok kielégítik az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ feltételt, akkor komplanárisak.

117. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas esetén $|\mathbf{abc}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$. Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

118. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata V. Mennyi az $\mathbf{r} = 2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{t} = 2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V' térfogata?

119. Az $\mathbf{a} = [2,-1,2]$, $\mathbf{b} = [3,1,5]$ és $\mathbf{c} = [\alpha, 2, -1]$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata α milyen értéke mellett lesz 10 egység?

120. A következő feladatokban megadott $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer az α paraméter mely értékeinél lineárisan független, és mely értékeinél lineárisan függő?
a) $\mathbf{a}=[0,2,3]$, $\mathbf{b}=[\alpha,-1,2]$, $\mathbf{c}=[1,2,1]$,
b) $\mathbf{a}=[2,\alpha,4]$, $\mathbf{b}=[0,0,0]$, $\mathbf{c}=[3,-1,2]$,
c) $\mathbf{a}=[\alpha,1,2]$, $\mathbf{b}=[3,-1,0]$, $\mathbf{c}=[2,1,0]$,
d) $\mathbf{a}=[\alpha,2,1]$, $\mathbf{b}=[0,\alpha,2]$, $\mathbf{c}=[1,-1,3]$,
e) $\mathbf{a}=[\alpha,5,1]$, $\mathbf{b}=[3,0,3]$, $\mathbf{c}=[1,0,1]$,
f) $\mathbf{a}=[3,\alpha,0]$, $\mathbf{b}=[0,3,\alpha]$, $\mathbf{c}=[1,0,-1]$.

121. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas oly jobbrendszert alkot, amelynek elemei páronként merőlegesek egymásra. Számítsuk ki az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzat értékét, ha $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$ és $|\mathbf{c}| = 3$.

122. Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $\overrightarrow{AB} = [2,-1,4]$, $\overrightarrow{BC} = [6,1,-4]$ és $\overrightarrow{CD} = [1,1,2]$?

123. A 8 egység térfogatú $ABCD$ tetraéder két élvektora: $\overrightarrow{AB} = [3,2,1]$ és $\overrightarrow{AC} = [1,0,1]$. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ élvektort úgy, hogy az egyállású legyen a $\mathbf{d} = [-1,2,1]$ vektorral!

124. Legyenek a 4 egység térfogatú paralelepipedon, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ élvektorai $\overrightarrow{AB} = [3,1,0]$ és $\overrightarrow{AD} = [2,0,1]$ (l. a **38.** feladat melletti ábrát). Határozzuk meg az $\overrightarrow{AA_1}$ élvektort azzal a feltétellel, hogy az merőleges legyen az $\mathbf{r} = [2,-4,1]$ és $\mathbf{s} = [1,1,2]$ vektorokra! Számítsuk ki a paralelepipedonnak az $ABCD$ laphoz tartozó magasságát!

125.[P] Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ három adott vektor és $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ három tetszőleges lineáris kombinációjuk, azaz

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c},$$
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a} + v_2\mathbf{b} + v_3\mathbf{c},$$
$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{a} + w_2\mathbf{b} + w_3\mathbf{c}$$

álljon fenn valamely u_i, v_i, w_i $(i = 1,2,3)$ számokra. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{uvw} = \mathbf{abc} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

126.[P] Legyen $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ és $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ a tér két lineárisan független vektorrendszere. Ismeretes, hogy ekkor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ kifejezhetők

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c} & & \qquad \mathbf{a} = a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w}, \\ \mathbf{v} &= v_1\mathbf{a} + v_2\mathbf{b} + v_3\mathbf{c} & \text{illetve} & \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{v} + b_3\mathbf{w}, \\ \mathbf{w} &= w_1\mathbf{a} + w_2\mathbf{b} + w_3\mathbf{c} & & \qquad \mathbf{c} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} \end{aligned}$$

alakban, ahol u_i, v_i, w_i, a_i, b_i, c_i $(i = 1,2,3)$ alkalmasan választott valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 1.$$

5. fejezet

Analitikus térgeometria

Kezdő és végpontjuk koordinátáival adott vektorok

D 5.1 A koordináta-rendszer O kezdőpontjából a P pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ kötött vektort a P pont **helyvektorának** nevezzük.

T 5.2 A tér tetszőleges P pontjának derékszögű koordinátái az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor koordinátáival megegyeznek. Azaz, ha $P(x, y, z)$, akkor $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $(= [x, y, z])$.

T 5.3 Ha $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ koordinátáikkal adott pontok, akkor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

Rövidebben írva: $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$. A P_1 és P_2 pontok $d(P_1, P_2)$ távolsága pedig a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor hosszával egyenlő: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Feladatok

1. Számítsuk ki az $A(1, -2, -3)$ pontból a $B(2, -3, 0)$, $C(3, 1, -9)$, illetve $D(-1, 1, -12)$ pontba mutató $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok koordinátáit!
2. Számítsuk ki az $A(4, -2, -4)$, $B(-4, 12, 6)$, $C(12, -4, 3)$, $D(5, 7, 11)$ pontoknak az origótól mért távolságát!
3. Döntsük el, hogy az alábbiakban megadott ABC, DEF és GHK háromszögek között van-e egyenlő szárú: $A(5, 1, 0)$, $B(2, -1, 3)$, $C(-2, 3, 1)$; $D(3, -1, 2)$, $E(0, -4, 2)$, $F(-3, 2, 1)$; $G(3, -3, 5)$, $H(2, -2, 5)$, $K(2, -3, 6)$.

4.$^{\triangleright}$ Adjunk meg az x tengelyen olyan pontot, mely az $A(-3, 4, 8)$ ponttól 12 egység távolságra van!

5.$^{\triangleright}$ Adjunk meg a z tengelyen olyan pontot, mely egyenlő távolságra van az $A(1, -3, 7)$ és $B(5, 7, -5)$ pontoktól!

6. Lehet-e $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$ és $C(3, 1, 8)$ egy téglalap három csúcsa?

7.$^{\triangleright}$ Van-e tompaszöge annak a háromszögnek, amelynek csúcsai: $A(4, -1, 4)$, $B(0, 7, -4)$, $C(3, 1, -2)$?

8.▷ Számítsuk ki a következő feladatokban adott ABC háromszög területét, az AB oldalhoz tartozó magasságot és az A csúcsnál lévő szög tangensét!
a) $A(5,4,1)$, $B(1,6,2)$, $C(3,3,2)$.
b) $A(5,7,1)$, $B(3,6,-4)$, $C(2,8,-1)$.
c) $A(6,1,5)$, $B(4,1,4)$, $C(3,0,3)$.

9.▷ Az ABC háromszög csúcsai: $A(3,2,5)$, $B(3,2,-5)$, $C(-5,0,3)$. Számítsuk ki a háromszög súlyvonalainak hosszát!

10.• Határozzuk meg annak a P pontnak a koordinátáit, amely az $A(a_1,a_2,a_3)$ és $B(b_1,b_2,b_3)$ pontokat összekötő szakaszt $AP:PB=m:n$ arányban osztja!

11. Számítsuk ki az $A(4,-1,2)$ és $B(-2,2,5)$ pontok által meghatározott szakasz harmadoló pontjainak koordinátáit!

12. A következő feladatokban a megadott A pontot tükrözzük a B ponton. Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit!
a) $A(3,4,-1)$, $B(0,0,0)$. b) $A(0,0,0)$, $B(3,4,-1)$.
c) $A(-1,-2,-5)$, $B(2,-1,3)$. d) $A(5,-1,2)$, $B(0,-1,2)$.

13.▷ Adva van az 5 egység területű ABC háromszög $A(2,-1,3)$ és $B(5,2,4)$ csúcspontja. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit, ha a C pont
a) az x tengelyen; b) a z tengelyen
fekszik.

14.▷ Adott az $A(3,-1,0)$ és a $B(2,2,1)$ pont. Ha a $C(0,y,0)$ pont végigfut az y tengelyen, akkor az ABC háromszög területe milyen értékek között változik?

15.▷ Egy paralelogramma három csúcsa: $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-4)$ és $C(-1,1,2)$. Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit!

16.▷ A következő feladatokban adott négy-négy pont egy síkban van-e?
a) $A(2,-1,4)$, $B(-1,0,3)$, $C(3,-1,0)$, $D(1,1,2)$.
b) $A(1,2,3)$, $B(3,1,6)$, $C(0,3,4)$, $D(1,3,8)$.
c) $A(1,-9,-12)$, $B(2,-7,-13)$, $C(0,-11,-11)$, $D(3,-5,-14)$.

17.▷ Egy tetraéder csúcspontjai: $A(-2,0,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(1,2,-1)$, $D(2,1,-1)$. Számítsuk ki a tetraéder térfogatát, felszínét és az ABC laphoz tartozó magasságát!

18.▷ Egy tetraéder csúcsai: $A(2,-4,3)$, $B(1,-4,4)$, $C(-3,2,0)$ és $D(2,0,u)$. Hogyan kell megválasztani a D pont u-val jelölt koordinátáját, hogy a tetraéder térfogata 4 egység legyen?

19.▷ Az $A(1,0,u)$, $B(2,-1,3)$, $C(2,0,v)$, $D(1,1,-1)$ pontnégyes milyen u és v értékekre lesz egysíkú?

20.▷ Az $ABCD$ tetraéder három csúcspontja: $A(3,1,0)$, $B(2,1,1)$ és $C(-1,-1,1)$. Melyek azok $D(x,y,z)$ pontok, amelyekkel a tetraéder térfogata 10 egység?

A sík egyenletei

D 5.4 Az adott P_0 ponton áthaladó $\mathcal{S}$ sík **normálvektorának** nevezünk minden olyan $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely merőleges az $\mathcal{S}$ síkra.

T 5.5 Ha egy sík átmegy a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton és merőleges a zérusvektortól különböző $\mathbf{n} = [A, B, C]$ vektorra, akkor egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,.$$

T 5.6 Minden sík egyenlete

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakú, és minden ilyen egyenlet sík egyenlete, ha A, B és C közül legalább az egyik zérustól különböző.

Feladatok

21. A következő feladatokban adva van egy A pont és egy $\mathbf{n}$ vektor. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelynek egyik pontja az A pont és normálvektora az $\mathbf{n}$ vektor!

a) $A(2,1,4)$, $\mathbf{n} = [3,2,-4]$. b) $A(0,0,0)$, $\mathbf{n} = [1,2,4]$.
c) $A(7,2,-2)$, $\mathbf{n} = [2,0,3]$. d) $A(3,2,0)$, $\mathbf{n} = [0,-2,1]$.
e) $A(0,0,0)$, $\mathbf{n} = [1,0,0]$. f) $A(0,0,0)$, $\mathbf{n} = [0,1,0]$.
g) $A(0,0,0)$, $\mathbf{n} = [0,0,1]$. h) $A(-1,2,0)$, $\mathbf{n} = [0,3,0]$.

22.$^{\triangleright}$ Vizsgáljuk meg, hogy a három pont egy egyenesbe esik-e; ha nem, akkor írjuk fel a megadott pontokon áthaladó sík egyenletét!

a) $P(0,-1,2)$, $Q(2,-1,1)$, $R(4,3,-2)$.
b) $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$, $R(0,0,1)$.
c) $P(-3,0,4)$, $Q(4,1,2)$, $R(0,0,0)$.
d) $P(4,0,-1)$, $Q(5,0,2)$, $R(-2,0,0)$.
e) $P(-2,3,1)$, $Q(0,5,2)$, $R(-4,1,0)$.

23.$^{\bullet}$ Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(1,5,2)$ ponton és párhuzamos a $7x - y + 3z + 2 = 0$ egyenletű síkkal!

24. Határozzuk meg az $x + 2y - 3z + 6 = 0$ egyenletű síknak a koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjait!

25. Igazoljuk, hogy a $2x+y-z-2 = 0$, $x-3y+z+1 = 0$, $x+y+z-3 = 0$ egyenletű síkoknak egyetlen közös pontjuk van. Ezen a közös ponton át fektessünk olyan síkot, amely párhuzamos az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkkal!

26. Mutassuk ki, hogy az $x - y - z = 0$, $3x - y - z + 2 = 0$ és $4x - y - z + 4 = 0$ egyenletű síkoknak nincs közös pontjuk!

27.* Normálvektorok segítségével mutassuk ki, hogy az $x+y+z=6$, $2x-y+z=3$ és $x+2y-z=2$ egyenletű síkoknak pontosan egy közös pontjuk van.

28. Számítsuk ki a következő síkok által határolt tetraéder térfogatát:

$$x+y+z-1=0, \qquad x-y-1=0, \qquad x-z-1=0, \qquad z-2=0.$$

29. Mi az egyenlete annak a síknak, amely áthalad az $A(-2,3,1)$ és $B(4,2,-1)$ pontokon és merőleges a $3x-y+z-3=0$ egyenletű síkra?

30. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a $-x+2y+3z-2=0$ és $2x-y-z+1=0$ egyenletű síkokra és átmegy a $P(4,1,2)$ ponton!

31. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $A(1,-3,0)$ és $B(3,7,-4)$ pontokat összekötő szakaszt felezi és merőleges rá!

32.▹ Adott az $A(1,3,5)$, $B(2,5,3)$ és $C(4,7,5)$ pont. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az A ponton és merőleges az ABC háromszög A csúcsánál lévő a) belső szög; b) külső szög felező egyenesére!

33.▹ Egy háromszög három csúcsa: $A(1,1,1)$, $B(5,1,4)$ és $C(3,3,2)$. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az A ponton és merőleges az A csúcshoz tartozó magasságvonalra!

Egyenesekre és síkokra vonatkozó helyzetgeometriai feladatok

D 5.7 Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes **irányvektorának** nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

T 5.8 Ha a P_0 pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\mathbf{v} = [a,b,c]$, akkor az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct\,, \end{aligned}$$

ahol a t paraméter az összes valós számon végigfut.

T 5.9 Ha a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ponton átmenő és $\mathbf{v} = [a,b,c]$ irányvektorú egyenes egyik tengelysíkkal sem párhuzamos ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$), akkor egyenletrendszere

(1) $$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

Ha a, b, c közül az egyik (pl. c) 0, de a másik kettő nem, akkor az egyenes egyenletrendszere

(2) $$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \quad z = z_0\,.$$

Ha a, b, c közül kettő 0 (pl. b és c) egy pedig nem, akkor az egyenes egyenletrendszere:

(3) $$y = y_0\,, \quad z = z_0\,.$$

Az (1), (2), és (3) egyenletrendszereket az egyenes paramétermentes egyenletrendszereinek nevezzük. Megállapodunk abban, hogy az „egyenes egyenletrendszere" kifejezésen (jelző nélkül) mindig ezt a paramétermentes egyenletrendszert értjük.

Feladatok

34. A következő három egyenes közül kettő paraméteres, egy pedig paramétermentes egyenletrendszerrel van megadva:

$$e:\begin{cases} x=-1+3t\\ y=2-t\\ z=3+2t\end{cases},\quad f:\begin{cases} x=2-t\\ y=4\\ z=1+2t\end{cases},\quad g:\ \frac{2-x}{3}=y-1=\frac{5-z}{2}.$$

Határozzuk meg mindhárom egyenes irányvektorát és döntsük el, hogy az $A(2,1,5)$ és $B(-1,4,7)$ pontok közül melyik van rajta az egyes egyeneseken!

35. Írjuk fel a következő, paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenesek paramétermentes egyenletrendszerét:

$$e:\begin{cases} x=5+2t\\ y=-t\\ z=1-t\end{cases},\quad f:\begin{cases} x=2-t\\ y=2\\ z=-1+3t\end{cases},\quad g:\begin{cases} x=t-5\\ y=3\\ z=4\,.\end{cases}$$

36. Írjuk fel a következő, paramétermentes egyenletrendszerrel megadott egyeneseknek azt a paraméteres egyenletrendszerét, amelynél a $t=0$ paraméterértékhez a megadott x_0, illetve y_0 koordinátájú P_0 pont tartozik!

a) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z}{4}$; $x_0=16$. b) $x=3$, $\dfrac{y-1}{2}=z$; $y_0=5$.

c) $y=4$, $z=-3$; $x_0=7$.

37. A következő feladatokban egy-egy egyenest különböző meghatározó adataival adtunk meg. Írjuk fel az egyenesek paraméteres és paramétermentes egyenletrendszereit!

a) Átmegy az $A(-2,5,1)$ ponton, és párhuzamos az $\mathbf{a}=[-1,2,3]$ vektorral.

b) Átmegy a $P(3,1,2)$ és a $Q(-1,1,3)$ ponton.

c) Párhuzamos a $\mathbf{k}=[0,0,1]$ vektorral, és átmegy az $A(5,1,4)$ ponton.

d) Merőleges az $\mathbf{a}=[-2,3,1]$ és a $\mathbf{b}=[2,0,1]$ vektorra, és átmegy az $A(6,-3,4)$ ponton.

e) Párhuzamos a $3x+y-z+1=0$ és az $x+y+z=0$ egyenletű síkkal, és metszi az yz tengelysíkot a $P(0,4,1)$ pontban.

38. A következő feladatokban szereplő egyenesek, illetve síkok az α paraméter mely értékénél (értékeinél) elégítik ki a leírt követelményt?

a) Az $\dfrac{x+2}{2}=-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ és az $\dfrac{x-3}{\alpha}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-7}{2}$ egyenletrendszerű egyenesek merőlegesek egymásra.

b) Az $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{\alpha}$ egyenletrendszerű egyenes és az $x+3y-2\alpha z=0$ egyenletű sík párhuzamos egymással.

c) Az $x=1+\alpha t$, $y=-2t$, $z=1$ egyenletrendszerű egyenes metszi a $2x+\alpha y+z+1=0$ egyenletű síkot.

d) Az $A(2,4,-1)$ és a $B(\alpha,\alpha+6,3)$ ponton átmenő egyenes merőleges a $3x+5y+\frac{\alpha}{4}z=0$ egyenletű síkra.

39. Határozzuk meg a $P(-2,1,0)$ pontra és az $e:\ x=t+2,\ y=3t,\ z=2$ egyenletrendszerű egyenesre illeszkedő sík egyenletét!

40. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3,0,1)$ ponton és párhuzamos az alábbi egyenesekkel:

$$e: \begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases} \quad \text{és} \quad f: \ \frac{x+2}{2}=y=-z.$$

41. Írjuk fel az $x-3y+z+2=0$ és $2x-5y-z+4=0$ egyenletű síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét, az x, y, z koordináták valamelyikét választva paraméterként. Ennek alapján írjuk fel a metszésvonal paraméter-mentes egyenletrendszerét is!

42. A következő feladatokban egy-egy sík és egy-egy egyenes van megadva. Határozzuk meg az egyenes és a sík közös pontját, illetve pontjait (ha van ilyen)!

a) $-2x+y+3z-3=0,\quad \begin{cases} x=3-t \\ y=2-t \\ z=3-t\,. \end{cases}$

b) $3x-y-2z-2=0,\quad \dfrac{x-1}{2}=2y+3=z-3.$

c) $x+2y-z+2=0,\quad x+2=y-3=\frac{z+1}{3}.$

d) $5x-y+3z-3=0,\quad \begin{cases} x=1 \\ y=5+3t \\ z=1+t\,. \end{cases}$

43. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az
$$x-y-4z-5=0 \quad \text{és az} \quad 2x+y-2z-4=0$$
egyenletű síkok metszésvonalával és átmegy az origón!

44. Egy háromszög csúcsai: $A(3,6,-7)$, $B(-5,2,3)$ és $C(4,-7,-2)$. Adjuk meg a C csúcson átmenő súlyvonal egyenletrendszerét!

45. Egy háromszög csúcsai: $A(3,-1,-1)$, $B(1,2,-7)$ és $C(-2,8,-5)$. Írjuk fel a B csúcshoz tartozó (belső) szög szögfelezőjének egyenletrendszerét!

46. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az

$$\frac{x-5}{3}=y-1=z$$

egyenletrendszerű egyenest és merőleges a $2x-y+z=0$ egyenletű síkra!

47.* Állapítsuk meg az alábbi hat egyenesből alkotható egyenespárok kölcsönös helyzetét! Ha metszőek, adjuk meg a metszéspontjukat! (Első lépésként vizsgáljuk meg az irányvektoraikat!)

$$e: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad f: \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \qquad g: \begin{cases} y = -1 \\ \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{z-6}{3} \end{cases}$$

$$h: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -1 \\ z = 3t + 9 \end{cases} \qquad k: \frac{8-x}{3} = y + 2 = \frac{z+3}{2} \qquad l: \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-4}.$$

Határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi két egyenes messe egymást:

48.▷ $e: \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -3t \\ z = 4t + 1 \end{cases} \qquad f: \begin{cases} x = u + 3 \\ y = 4u + 1 \\ z = 2u + \lambda \end{cases},$

49. $e: \frac{x-1}{5} = \frac{1-2y}{3} = -z, \qquad f: \frac{x+3}{\lambda} = \frac{2y-3}{4} = 1 + z,$

50. $e: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+\lambda}{3}, \qquad f:$ az x, y vagy a z tengely valamelyike.

51. $e: \begin{cases} 2x + 3y - z + \lambda = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \qquad f:$ az x, y vagy a z tengely valamelyike.

52. Tükrözzük az $A(4, -3, 5)$ pontot az $x - y + z - 9 = 0$ egyenletű síkon! Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit!

53. Tükrözzük az $A(2, -1, 3)$ pontot az $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$ egyenletrendszerű e egyenesen!

54. Tükrözzük az $x = 1 - 2t$, $y = 3 + 2t$, $z = -4 - 9t$ egyenletrendszerű e egyenest a $3x + y - 2z = 0$ egyenletű síkon!

55. Jelölje e az $x + y - z + 1 = 0$ és $2x - y + z - 1 = 0$ egyenletű síkok metszésvonalát, f pedig az e-nek az $x + 2y - z = 0$ egyenletű síkra eső merőleges vetületét. Írjuk fel az f egyenes paraméteres egyenletrendszerét, az x-et választva paraméterként!

56.▷ Mi az egyenlete annak a síknak, amely párhuzamos az $x = 2y = 3z$ egyenletrendszerű egyenessel, és áthalad az $x + y + z = 0$ és a $2x - y + 3z = 0$ egyenletű síkok metszésvonalán?

57. Egy síkról tudjuk, hogy átmegy a $3x - y + 2z + 9 = 0$ és az $x + z + 3 = 0$ egyenletű síkok metszésvonalán. Adjuk meg e sík egyenletét, ha
a) átmegy az $A(4, -2, -3)$ ponton is; b) párhuzamos az x tengellyel;
c) párhuzamos az y tengellyel; d) párhuzamos a z tengellyel;
e) párhuzamos az $\mathbf{a} = [2, -1, 2]$ vektorral.

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes), amely illeszkedik a P pontra és metszi az e és f egyeneseket:

58.▷ $P(0, 0, 0), \quad e: x - 4 = -\frac{y+7}{3} = \frac{z-2}{2}, \quad f: \frac{5-x}{3} = \frac{9-y}{5} = z + 9,$

59. $P(-4, -5, 3), \quad e: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad f: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{1-z}{5},$

60. $P(1,1,4)$ $\quad e: \dfrac{x-1}{3} = -y = \dfrac{z-1}{3}, \quad f: \begin{cases} x = -2+5t \\ y = 1-3t \\ z = -2+t \end{cases},$

61. $P(3,-2,1)$ $\quad e: \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}, \quad f: x-5 = 4-4y = 4z-8.$

62.$^{\triangleright}$ Az S : $x+y+z=1$ egyenletű sík és az e : $y=1$, $z=-1$ egyenletrendszerű egyenes K közös pontján át vegyünk fel olyan f egyenest, amely az S síkban fekszik és merőleges az e egyenesre. Írjuk fel az f paraméteres egyenletrendszerét!

63. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-1,2,-3)$ ponton, merőleges az $\mathbf{a} = [6,-2,-3]$ vektorra, és metszi az

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{5}$$

egyenletrendszerű egyenest!

64.$^{\triangleright}$ Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes), amely merőleges a $2x+4y-z+5=0$ egyenletű síkra és metszi a következő egyenletrendszerű egyeneseket:

$$e: \frac{x}{2} = -y = z, \quad f: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}.$$

65.$^{\triangleright}$ Igazoljuk, hogy az $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$, $4x-y-2z+\lambda=0$ egyenletű síkok páronként metszik egymást és a metszésvonalak egyező állásúak! Ezt követően határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy a három síknak a) legyen közös pontja; b) ne legyen közös pontja.

Egyenesekre és síkokra vonatozó távolság- és szögfeladatok

D 5.10 Az $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű sík **normálegyenletén** az

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

egyenletet értjük.

T 5.11 A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pont távolsága az $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű S síktól:

$$d(P_0,S) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

T 5.12 A P pont távolsága az e egyenestől:

$$d(P,e) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QR}\right|},$$

ahol Q és R az e egyenes két tetszőleges különböző pontját jelöli.

T 5.13 Legyen az a egyenes egy irányvektora az $\mathbf{a}$, a b egyenesé pedig a $\mathbf{b}$ vektor. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem egyező állásúak, és $\mathbf{c}$ olyan vektor, amely a két egyenes egy-egy pontját köti össze, akkor a két egyenes távolsága:

$$d(a,b) = \frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}|}{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}.$$

T 5.14 Ha az a egyenes egy irányvektora az $\mathbf{a}$, a b egyenesé pedig a $\mathbf{b}$ vektor, akkor hajlásszögük a következő képlet segítségével számítható ki:

$$\cos(a,b)\angle = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

T 5.15 A $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes és az $\mathbf{n}$ normálvektorú S sík szögét a következő képlet alapján számíthatjuk ki:

$$\sin(e,S)\angle = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}.$$

Feladatok

66. Igazoljuk, hogy a következő két egyenes egymással párhuzamos:

$$e: \begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+t \\ z = 2+t \end{cases}, \quad f: \ x-5 = 4y-16 = 4z-28.$$

Írjuk fel annak a g egyenesnek az egyenletrendszerét, amely az e és f egyenesek síkjában van, azok között halad, mindkettővel párhuzamos és mindkettőtől egyenlő távolságra van!

67.[P] Adjuk meg azokat a pontokat, amelyek rajta vannak az

$$e: \ \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+3}{3}$$

egyenesen és 2 egység távolságra vannak az $x+2y+2z+11=0$ egyenletű síktól!

68. Igazoljuk, hogy a $2x-4y+2z-1=0$, és az $x-2y+z-1=0$ egyenletű síkok egymással párhuzamosak. Határozzuk meg a két sík távolságát!

69. Mutassuk meg, hogy az

$$e: \ \frac{x-1}{3} = y-2 = \frac{z}{5}, \qquad f: \begin{cases} x = 4-t \\ y = 3+3t \\ z = 5+5t \end{cases} \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = 3+u \\ y = 6-3u \\ z = 5u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesek egy közös K pontban metszik egymást, és határozzuk meg a K pont koordinátáit! Továbbá számítsuk ki

a) az e, f és g egyenesek páronkénti szögének koszinuszát;

b) az e és f egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_1$, az e és g egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_2$, valamint az f és g egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_3$ sík egy-egy normálvektorát;

c) az $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)_\angle$, az $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_3)_\angle$ és az $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)_\angle$ tangensét;

d) az $(e, \mathcal{S}_3)_\angle$, az $(f, \mathcal{S}_2)_\angle$ és az $(g, \mathcal{S}_1)_\angle$ szögek szinuszát!

70.▷ Van-e a t paraméternek olyan értéke, hogy az $\mathcal{S}: x+ty+z-1=0$ egyenletű sík $60°$-os szöget zár be

a) az x tengellyel; b) az y tengellyel; c) a z tengellyel?

Ha van, akkor adjuk meg az összes ilyen valós t értéket!

71.▷ Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenleteit, amelyek átmennek az $x+y=2$ egyenletű sík $P(1,1,\sqrt{2})$ és $Q(0,2,\sqrt{2})$ pontján, és az adott síkkal $45°$-os szöget zárnak be.

72.▷ Az e egyenesről tudjuk, hogy benne van az $x-2y+1=0$ egyenletű síkban, áthalad a $P(2,1,4)$ ponton és az xy tengelysíkkal $60°$-os szöget zár be. Írjuk fel az e egyenes egyenletrendszerét!

73.▷ Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletrendszereit, amelyek átmennek az origón, továbbá az x tengellyel és az y tengellyel $60°$-os szöget zárnak be!

74.▷ Vannak-e olyan egyenesek, melyek az

$$e: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1 \\ z = 3+t \end{cases} \quad \text{és} \quad f: \ -x = \frac{z+5}{2}, \ y = 3$$

egyenletrendszerű egyenesek mindegyikével

a) $60°$-os, b) $45°$-os, c) $30°$-os

szöget zárnak be? Ha vannak, akkor ezek közül adjuk meg mindazokat, amelyek átmennek a $P_0(3,4,-1)$ ponton.

75. Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenletét, amelyek átmennek a $P(1,1,1)$ ponton, párhuzamosak az $x+2y-z-1=0$, $2x-y+z-1=0$ síkok metszésvonalával, és mindkét síkkal ugyanakkora szöget zárnak be! Határozzuk meg ennek a szögnek a koszinuszát!

76.▷ Számítsuk ki minden olyan egyenesnek az egyenletrendszerét, amely áthalad az origón és a három koordinátatengellyel egyenlő szöget zár be! Határozzuk meg ennek a szögnek a koszinuszát!

77.▷ Tekintsük a következő három egyenest:

$$e: \ \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = z, \quad f: \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 4-2t, \\ z = -t \end{cases} \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = 2-u \\ y = -1+3u \\ z = -3+2u. \end{cases}$$

Írjuk fel minden olyan egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy az $A(1,2,-1)$ ponton és egyenlő szöget zár be az adott egyenesekkel! Számítsuk ki a szög koszinuszát is!

78. Határozzuk meg az $x-3y+2z-2=0$ és a $2x+y+3z-5=0$ egyenletű síkok szögfelező síkjainak egyenleteit!

79. Az e egyenes egyenletrendszere: $x = -2+2t$, $y = 3+2t$, $z = 1+t$. Az egyenes $A(-2,3,1)$ pontjából mérjünk fel egy 6 egységnyi szakaszt az egyenesre. Számítsuk ki a szakasz másik végpontjának koordinátáit!

80. Határozzuk meg a z tengelyen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van a $12x+9y-20z+19=0$ és $16x-12y+15z-9=0$ egyenletű síkoktól!

81. Adjunk meg a z tengelyen olyan pontot, amelynek az $M(1,-2,0)$ ponttól mért távolsága egyenlő a $3x-2y+6z-9=0$ egyenletű síktól mért távolságával!

82. Határozzuk meg az $x+y+z-2=0$ és az $x+2y-z-1=0$ egyenletű síkok metszésvonalán azt a pontot, amely egyenlő távol van az $x+2y+z+1=0$ és az $x+2y+z-3=0$ egyenletű síkoktól!

83. Határozzuk meg az alábbiakban adott P pont távolságát az e egyenestől!

a) $P(-2,3,7)$; e: $\dfrac{x-1}{3} = 2-y\,,\ z=2\,,$

b) $P(-1,2,1)$; e: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 12-t \\ z = 3+3t\,, \end{cases}$

c) $P(2,2,1)$; e: $\dfrac{9-x}{4} = \dfrac{y+2}{2} = z+5\,,$

d) $P(3,1,2)$; e: az $A(0,2,1)$ és $B(1,-1,3)$ ponton áthaladó egyenes,

e) $P(-2,4,1)$; e: az $A(-1,4,1)$ ponton és az origón áthaladó egyenes.

84. Igazoljuk, hogy a következő feladatokban adott két-két egyenes kitérő, és számítsuk ki távolságukat!

a) $e:\ x+4 = 8-2y = -z-1\,,\quad f:\ \begin{cases} x = 4t-5 \\ y = -3t+5 \\ z = -5t+5\,, \end{cases}$

b) $e:\ \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{3-y}{3} = \dfrac{5z-6}{4}\,,\quad f:\ x=y=z\,,$

c) $e:\ \begin{cases} x = 5+3t \\ y = t \\ z = 4t+9 \end{cases},\quad f:\ \begin{cases} x = 4-u \\ y = -3+u \\ z = 4-4u\,. \end{cases}$

85. Határozzuk meg az alábbi kitérő egyenespárok távolságát és normáltranszverzálisuk egyenletrendszerét!

a) $e:\ x = 1-3t,\ y = -4+4t,\ z = 1+t\quad f:\ x-4 = -y-2 = -z+2\,.$

b) $e:\ x = t+3,\ y = 3t+2,\ z = 3\,,\quad f:\ x+3 = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{4-z}{2}\,.$

c) $e:\ \begin{cases} x = -3+t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases},\quad f:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z-6}{2}\,.$

d) $e:\ \dfrac{x-1}{5} = 2-y = z-1\,,\quad f:\ 2-x = y-5 = z+1\,.$

86. Legyen $\mathcal{H}$ azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek egyenlő távolságra vannak a következő három ponttól: $P_1(2,2,1)$, $P_2(8,6,2)$, $P_3(6,3,5)$. Írjuk fel a $\mathcal{H}$ geometriai alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét!

87.$^\triangleright$ Vannak-e olyan síkok, amelyek az $x = 1$, $y = 3+3t$, $z = 4+4t$ egyenletrendszerű e egyenesre illeszkednek és egységnyi távolságra vannak a $P(2,1,3)$ ponttól? Ha vannak, akkor adjuk meg egyenleteiket, és számítsuk ki hajlásszögük koszinuszát!

88.$^\triangleright$ Egy háromszög csúcsai: $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,2,2)$, $P_3(-1,2,0)$. Határozzuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely a következő két feltételt teljesíti:
1) S illeszkedik az x tengelyre;
2) A háromszög S-re eső merőleges vetületének területe az $P_1P_2P_3$ háromszög területének fele!

Számítsuk ki továbbá a háromszög P_1 és P_2 csúcsainak S-től mért távolságait!

89. Állapítsuk meg, hogy a t paraméter mely értékeinél nem lesz kollineáris az $A(1,2,3)$, $B(4,5,6)$, $C(7,8,t)$ ponthármas, és minden ilyen t-re adjuk meg az $x+y+z-7=0$, $2x-3y-z+3=0$ és $x-y+z-5=0$ egyenletű síkok közös K pontjának az ABC síktól mért távolságát (a t paraméter függvényében)!

90.$^\triangleright$ Vannak-e olyan egyenesek, amelyek átmennek a $P(-1,0,2)$ ponton, merőlegesek az $x = 10+3t$, $y = -1-6t$, $z = 7+2t$ egyenletrendszerű egyenesre és attól 7 egység távolságra vannak? Ha léteznek ilyenek, akkor adjuk meg egyenletrendszereiket!

Vegyes feladatok

91. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(2,1,2)$ ponton, párhuzamos az $x+z=5$ egyenletű síkkal és metszi az $x = 2-t$, $y = 2t$, $z = 3$ egyenletrendszerű egyenest.

92. Az $ABCD$ tetréder térfogata $\frac{3}{2}$ egység. Három csúcsa: $A(1,2,1)$, $B(4,3,-3)$, $C(-1,2,-4)$. A D csúcs az $x = y = 2-2z$ egyenletrendszerű egyenesen van. Számítsuk ki az ABC lap B csúcsánál lévő szög koszinuszát, valamint a D csúcs koordinátáit!

93. Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az $A(1,1,1)$ pont. A B és a C csúcsa az $x+y+z=1$ és $2x-y-z=0$ egyenletű síkok metszésvonalán van. Határozzuk meg a B és a C csúcs koordinátáit!

94. Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder C és D csúcsainak koordinátáit, ha a következő feltételek mindegyike teljesül:
a) az ABC lap az xy tengelysíkon fekvő szabályos háromszög,
b) $A(1,3\sqrt{3},0)$, $B(5,\sqrt{3},0)$,
c) a tetraéder térfogata $28/\sqrt{3}$ egység,
d) a D csúcs az $x=2$, $y=t$, $z=6-2t$ egyenletrendszerű egyenesen van.

Hány ilyen tetraéder van?

95. Adva van az $e: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{r}$ egyenes és az S: $x + 3y - 2rz = 0$ sík, ahol r paraméter.

a) Állapítsuk meg az r értékét úgy, hogy az e egyenes párhuzamos legyen az S síkkal, és ehhez az r-hez számítsuk ki az e és S távolságát!

b) Állapítsuk meg az r értékét úgy, hogy e merőleges legyen S-re!

96. Tükrözzük az $P(1,-1,3)$ pontot a $Q(-1,3,2)$ ponton, az $x = -\frac{y+1}{2} = -z$ egyenesen és a $2x - y + 3z - 2 = 0$ egyenletű síkon. Számítsuk ki a P pont és a három tükörkép által meghatározott sík távolságát!

97. Vegyük fel az $e: x = 2t + 1,\ y = 2t,\ z = t$ egyenletrendszerű egyenesen azt az A, az $f: \frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{3}$ egyenesen pedig azt a C pontot, amelynek z-koordinátája 2. Az e egyenesre az A pontból mérjünk fel egy 3 egység hosszúságú AB, az f egyenesre pedig a C pontból egy 7 egység hosszúságú CD szakaszt. Számítsuk ki az így kapott négy tetraéder térfogatát!

98. Létezik-e olyan szakasz, amelynek merőleges vetülete

az $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = -\dfrac{z}{6}$ egyenletrendszerű egyenesen 2 egység,

az $x = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{1-z}{8}$ egyenletrendszerű egyenesen 3 egység,

az $\dfrac{1-2x}{2} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z+1}{4}$ egyenletrendszerű egyenesen pedig 1 egység?

Ha létezik, akkor határozuk meg a hosszát!

99. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az

$$\frac{1-x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{5-z}{4}$$

egyenletrendszerű egyenesre, és a $P(3,-1,1)$ ponttól olyan távolságra van, mint amennyi az adott egyenes és a P pont távolsága!

100. Tekintsük a következő két egyenespárt:

$$e: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, \quad f: x - 3 = -y - 2 = z - 3;$$

$$g: x - 2 = y - 2 = \frac{z+5}{2}, \quad h: \frac{x-1}{3} = y - 1 = \frac{z}{3}.$$

Mutassuk ki, hogy mind a két egyenespár kitérő! Messe az e, illetve f egyenest a normáltranszverzálisuk a E, illetve a F pontban. Hasonlóan, legyen G, illetve H a g, illetve a h egyenesek és normáltranszverzálisuk metszéspontja. Számítsuk ki az E, F, G és H pontok koordinátáit és a két normáltranszverzális szögének koszinuszát!

101. Bontsuk fel a $\mathbf{v} = [10, 6, -8]$ vektort az

$$e: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \end{cases}, \quad f: 2x = \frac{1-y}{5} = \frac{1+z}{2} \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = -\dfrac{3+3u}{2} \\ y = -5 + 4u \\ z = -u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesekkel párhuzamos összetevőkre, ha lehetséges.

102.▷ Adjuk meg azoknak a síkoknak az egyenleteit (ha léteznek ilyen síkok), amelyek tartalmazzák a $P(3,-2,-2)$ és $Q(-2,3,-2)$ pontokat, továbbá az $x=0$, $y=0$ és az $x+y-1=0$ egyenletű síkok által határolt hasábot egyenlő oldalú háromszögben metszik!

103.▷ Igazoljuk, hogy az $x+y-2z-4=0$, $3x-y-2z-8=0$, $x-3y+2z+8=0$ egyenletű síkok páronkénti metszésvonalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a három sík által meghatározott hasábból a $P(1,1,1)$ ponton áthaladó és az $\mathbf{a}=[1,-1,0]$ vektorral párhuzamos síkok mindegyike egyenlőszárú háromszöget metsz ki! Vannak-e ezen síkok között olyanok, amelyek derékszögű háromszöget metszenek ki? Ha léteznek ilyenek, akkor adjuk meg ezek egyenleteit; ha nincsenek, akkor ezt mutassuk ki!

104. Léteznek-e olyan síkok, amelyek tartalmazzák a $P(2,1,2)$ és $Q(1,-1,0)$ pontot, továbbá az $x+y=0$, $y=1$ és az $x-2y=0$ síkok által határolt hasábot derékszögű háromszögben metszik? Ha léteznek, akkor adjuk meg ezek egyenleteit, ha nem, akkor ezt mutassuk ki!

105.▷ Egy tetraéder csúcsai: $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(1,-1,1)$ és $D(1,1,-1)$. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos a BCD síkkal és a tetraédert egyenlő térfogatú részekre osztja!

106. Bizonyítsuk be, hogy az

$$e:\begin{cases} x=x_1+a_1t\\ y=y_1+b_1t\\ z=z_1+c_1t\end{cases} \quad \text{és} \quad f:\begin{cases} x=x_2+a_2u\\ y=y_2+b_2u\\ z=z_2+c_2u\end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesek akkor és csak akkor egysíkúak, ha

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=0.$$

107. Legyen az $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, $z=z_0+ct$ egyenletrendszerű e egyenes olyan, amely nem merőleges az $S:\ Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű síkra. Igazoljuk, hogy az e-t tartalmazó és az S-re merőleges sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a & b & c\\ A & B & C\end{vmatrix}=0.$$

108.▷ Igazoljuk, hogy a tetraéder élfelező merőleges síkjai egy ponton mennek át!

109.▷ Két kitérő egyenesen mozogjon egy-egy adott hosszúságú szakasz. Bizonyítsuk be, hogy a két szakasz tetszőleges helyzeténél a négy végpont által meghatározott tetraéder térfogata konstans!

6. fejezet

Komplex számok

A komplex szám algebrai alakja

D 6.1 **Komplex számnak** nevezünk minden olyan $a+bi$ alakú kifejezést, amelyben a és b valós szám, i pedig az összes valós számtól különböző — **képzetes egységnek** nevezett — szimbólum. Az a illetve b valós számot a $z = a+bi$ komplex szám **valós részének** illetve **képzetes részének** hívjuk. Jelölésük: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Az $a+bi$ alakú kifejezés a komplex szám **algebrai alakja**.

D 6.2 Algebrai alakban adott komplex számok **összeadását** és **szorzását** a többtagú algebrai kifejezések összeadási, ill. szorzási szabálya szerint végezzük, hozzátéve, hogy $i^2 := -1$.

D 6.3 Az $z = a+bi$ komplex szám **konjugáltján** az $a-bi$ komplex számot értjük. Jele: $\bar{z}$.

T 6.4 Tetszoleges z_1, z_2 komplex számokra $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

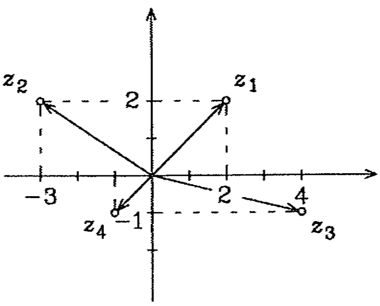
D 6.5 A $z = a+bi$ komplex szám **abszolút értékén** a $|z| = |a+bi| := \sqrt{a^2+b^2}$ nemnegatív valós számot értjük.

T 6.6 Bármely z, z_1 és z_2 komplex számra érvényesek a következő egyenlőségek: $z\bar{z} = |z|^2$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, és a háromszögegyenlőtlenség: $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

Feladatok

1.▷ Ábrázoljuk a Gauss-féle számsíkon az alábbi komplex számokat és helyvektorukat:
$z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1+4i$,
$z_3 = -2+3i$, $z_4 = -2-3i$.

2.▷ Írjuk fel a mellékelt ábrán helyvektoraikkal feltüntetett komplex számokat algebrai alakban:



3. Írjuk fel az alábbi komplex számok konjugáltját: $z_1 = 2+7i$, $z_2 = -3-5i$, $z_3 = 5i$, $z_4 = -i$, $z_5 = -9$, $z_6 = 0$.

Legyen $n > 2$ természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

4. $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_n$,

5. $\overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \dots \overline{z}_n$, **6.** $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám összegét és különbségét:

7. $2+5i$, $4-3i$, **8.** $3-4i$, $-5+2i$, **9.** $4-3i$, $-2-i$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám szorzatát:

10. $3-5i$, $-4+i$, **11.** $1-3i$, $-i$, **12.** $2+5i$, $4-3i$.

Számítsuk ki az alábbi komplex számok hányadosát:

13.ᵖ $3+2i$, $1-i$, **14.** $5-i$, $1-2i$, **15.**• $-5-2i$, $-3i$.

Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezéseket:

16.ᵖ $\dfrac{2}{(1-i)(3+i)}$, **17.** $\dfrac{1}{(3+4i)^2}$, **18.** $\dfrac{2+i}{i(-3+4i)}$,

19. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$, **20.** $\dfrac{1}{i(3-2i)(1+i)}$, **21.** $\dfrac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$.

22. Legyen $z_1 = 1-5i$ és $z_2 = 3+4i$. Számítsuk ki a következőket:

$$\frac{z_1}{z_2},\quad \frac{\overline{z}_1}{z_2},\quad \frac{z_1}{\overline{z}_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)},\quad \frac{z_1}{|z_2|},\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|.$$

23. Legyen $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-2i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

$$z_1 - \frac{z_1}{z_2},\quad \frac{z_1-1}{z_2},\quad z_1^2 - \frac{iz_1}{z_2},\quad \frac{z_1}{iz_2}.$$

Legyen $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$ és $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Számítsuk ki a következőket:

24. $|3z_1 - 4z_2| + z_3\overline{z}_3$, **25.** $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$, **26.** $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|$.

Számítsuk ki az alábbi komplex számok abszolút értékét:

27. $\dfrac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}$, **28.** $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x-y) + 2i\sqrt{xy}}$, $x, y \in \mathbf{R}^+$.

29.• Határozzuk meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre fennáll az alábbi egyenlőség: $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.

Adjuk meg a következő, xy-síkbeli görbék komplex változós egyenletét:

30.• $(-2;1)$ középpontú 4 sugarú kör, **31.**• $y = mx + b$ egyenletű egyenes,

32. $(-3;0)$ és $(3;0)$ fókuszpontú ellipszis, nagytengelyének hossza 10.

Adjuk meg a Gauss-féle számsíkon az alábbi feltételeket kielégítő pontok halmazát:

33. $1 < |z| < 2$, **34.** $|z| = 2$, **35.**• $|z-i| = |z+i|$,

36. $|z+i| \le 1$, **37.**ᵖ $|2z - 4i| < 1$, **38.**ᵖ $|z| \le |z+i|$,

39. $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$.

40.* Bizonyítsuk be, hogy bármely kör vagy egyenes egyenlete a Gauss-féle számsíkon felírható $az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$ alakban, ahol $a, c \in \mathbf{R}$ és $b \in \mathbf{C}$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

41. $x^2+2=0$, 42.* $x^2-2x+2=0$, 43. $x^2-6x+13=0$,

44. $x^2+8x+17=0$, 45. $x^4-x^2-6=0$, 46. $x^2+5+\frac{6}{x^2}=0$.

47.▷ Oldjuk meg a $|z|+z=2+i$ egyenletet!

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a komplex számok halmazán:

48. $iz_1-iz_2=-2$
$2z_1+z_2=i$,

49. $z_1+z_2=2$
$z_1-z_2=2i$,

50. $z_1+2z_2=1+i$
$3z_1+iz_2=2-3i$,

51. $(1+i)z_1-(1-i)z_2=0$
$(2+i)z_1-(1-2i)z_2=0$,

52. $(1+2i)z_1+z_2=1-2i$
$-iz_1-iz_2=-2+3i$,

53. $2z_1-iz_2=-3+4i$
$iz_1+3z_2=-7-4i$,

54. $iz_1+2z_2=1-2i$
$4z_1-iz_2=-1+3i$,

55. $(1+2i)z_1-(2+i)z_2=-6-2i$
$-z_1+(2-i)z_2=4-4i$.

56.* Tegyük fel, hogy a z komplex számra $z^2+z+1=0$ teljesül. Számítsuk ki a $z^{65}+z^{-65}$ kifejezés értékét!

Binomiális együtthatók, binomiális tétel

D 6.7 Legyen k és n két nemnegatív egész szám, melyekre $k\le n$. Az $\binom{n}{k}$ kifejezést az $\binom{n}{k}:=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ egyenlőséggel definiáljuk és **binomiális együtthatónak** nevezzük.

T 6.8 Minden nemnegatív egész n-re és $k=0,1,\dots,n$-re érvényes az $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ **szimmetriatulajdonság**, és $k=0,1,\dots,(n-1)$-re az $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ **additív tulajdonság**.

T 6.9 **(Binomiális tétel)** Egységelemes kommutatív gyűrű tetszőleges (u,v) elempárjára és tetszőleges nemnegatív egész n számra

$$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k.$$

Feladatok

Az alábbiakban a hatványok binomiális tétel szerinti kifejtésében k-**adik tagon** ($k = 0, 1, \ldots, n$) azt a tagot értjük, amelynek együtthatója $\binom{n}{k}$. Továbbá, ha n páros, akkor az (előbbi értelemben vett) $n/2$-edik tagot a kifejezés **középső tagjának** mondjuk:

57.[▷] Határozzuk meg az $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$ hatvány kifejtésének középső tagját.

58. Írjuk fel a $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ hatvány kifejtésének negyedik tagját!

59. A $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ hatvány kifejtésének hányadik tagjában lesz az a kitevője 7?

60. A $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{18}$ hatvány kifejtésének hányadik tagjában lesz az a és a b kitevője egyenlő egymással?

61. Írjuk fel a $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{m}$ kifejtésének 12. tagját, ha a második tag binomiális együtthatója 105.

62. Az $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^{m}$ kifejtésében a harmadik és a tizenkettedik tag binomiális együtthatója azonos. Írjuk fel azt a tagot, amelyben x nem szerepel.

63. Az $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{m}$ kifejtésében az együtthatók összege 128. Írjuk fel a kifejtésnek azt a tagját, amelyben x az ötödik hatványon szerepel.

64. Határozzuk meg az n kitevőnek azt az értékét, amelyre az $(a+b)^n$ kifejtésében a második, harmadik és negyedik tag együtthatója egy számtani sorozat egymást követő elemei.

65. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $\left(x + x^{\lg x}\right)^5$ hatvány kifejtésében a második tag értéke 10^6 legyen.

66. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy a $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\lg x+1}} + \sqrt[12]{x}\right]^6$ kifejtésben a harmadik tag 200 legyen.

Igazoljuk az alábbi összefüggéseket, amelyekben n tetszőleges pozitív egész, k pedig olyan egész szám, amelyre $k \leq n$:

67.[•] $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n,$

68.[•] $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0,$

69.$^{\triangleright}$ $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + 99\cdot 99! = 100! - 1,$

70.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1},$

71.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n} = (n+2)\cdot 2^{n-1},$

72.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n} = (n-2)\cdot 2^{n-1} + 1,$

73.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \cdots + 1 = \binom{n+1}{k},$

74.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k},$

75. $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1},$

76. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}$, ha $m \in \mathbb{N}^+$

77.* $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1},$

78. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1},$

79.* $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n},$

80.* $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}^2 = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ (-1)^m\binom{2m}{m}, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$

81.* $1 - \binom{8n}{2} + \binom{8n}{4} - \binom{8n}{6} + \cdots + \binom{8n}{8n} = 16^n.$

A binomiális tétel alkalmazásával végezzük el a következő hatványozásokat:

82.$^{\bullet}$ $\left(-3 + \sqrt{3}i\right)^4,$

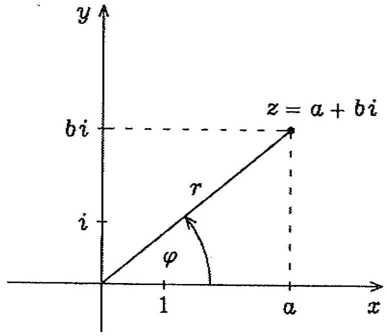
83. $(2 + 2i)^5,$

84. $(-1 + i)^7,$

85. $(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i)^6.$

A komplex szám trigonometriai alakja

D 6.10 Vegyünk fel a síkban egy O kezdőpontú p félegyenest, és a sík minden egyes O-tól különböző P pontjához rendeljük hozzá az (r, φ) számpárt, ahol $r = |\overrightarrow{OP}|$ **(pólustávolság)** és $\varphi = (p, \overrightarrow{OP})\angle$ **(irányszög)**. Az O pontra $r = 0$, φ tetszőleges. Az így definiált koordináta rendszert **síkbeli polárkoordináta rendszernek** nevezzük.



T 6.11 Derékszögű koordináta-rendszerben adott (x, y) pont (r, φ) polárkoordinátáit az

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

egyenletek felhasználásával, a polárkoordináta-rendszerben adott (r, φ) pont (x, y) derékszögű koordinátáit az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

egyenletek felhasználásával számítjuk ki. (Az $r = r(\varphi)$ egyenletű geometriai alakzat egyenletében az irányszöget mindig radiánban mérjük.)

D 6.12 Ha a $z = x + yi$ komplex számban x-et és y-t az előző egyenletek szerint helyettesítjük, akkor a komplex szám $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **trigonometriai alakját** kapjuk.

T 6.13 Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

T 6.14 Tetszőleges komplex számra és tetszőleges egész n-re

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

D 6.15 A z komplex szám **komplex n-edik gyökein** az $u^n = z$ $(u, z \in \mathbf{C}; n \in \mathbf{N}^+)$ egyenlet összes komplex u megoldását értjük.

T 6.16 Bármely, zérustól különböző komplex számnak n darab különböző komplex n-edik gyöke van, ha n pozitív egész, és a $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r \geq 0)$ komplex szám összes különböző komplex n-edik gyökét megadja a következő képlet:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

ahol $\sqrt[n]{r}$ a valós r szám valós n-edik gyökét jelenti. A 0 komplex szám egyetlen n-edik gyöke 0.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi z komplex számok valós részét ($\operatorname{Re} z$), képzetes részét ($\operatorname{Im} z$), abszolút értékét (r), és radiánban mért legkisebb nemnegatív argumentumát (φ_0):

86. $z = 3$, **87.** $z = -8$, **88.** $z = -2i$,

89. $z = 1 + i$, **90.** $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **91.•** $z = 2 - 2\sqrt{3}i$,

92. $z = 4\sqrt{3} - 4i$.

Állapítsuk meg, hogy a Gauss-féle számsík mely pontjai tesznek eleget az alábbi egyenleteknek, ill. egyenlőtlenségeknek ($\arg z$ a z egyik argumentumát jelenti):

93.▷ $\operatorname{Im}(z + i) > 2$, **94.** $\operatorname{Im}(iz) \geq 1$, **95.** $\operatorname{Re} z = 1$,

96. $\operatorname{Re}(2z) < 4$, **97.** $\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$, **98.▷** $0 < \arg[(1+i)z] < \pi$.

Írjuk át az alábbi komplex számokat trigonometriai alakba:

99. $3i$, **100.** $\sqrt{3} - 3i$, **101.•** -4,
102. $5 + 5i$, **103.** $-6 + 6\sqrt{3}i$, **104.** $-3 - 3i$,
105.• $-i$, **106.•** $2\sqrt{3} - 2i$.

Írjuk át algebrai alakba az alábbi komplex számokat:

107.• $5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, **108.** $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

109. $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, **110.** $3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$,

111. $2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, **112.** $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Írjuk át az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbék egyenletét derékszögű koordinátás alakba. Állapítsuk meg a görbe típusát és meghatározó adatait. A feladatokban a és b pozitív konstansok.

113.• $r = a$, **114.•** $r = 2a\sin\varphi$, $0 \leq \varphi < \pi$,

115.• $r = 2a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, **116.▷** $r = \frac{2}{\cos\varphi}$, $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$,

117. $r = \frac{a}{\sin\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, **118.▷** $r = \frac{1}{1 + \cos\varphi}$,

119. $r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, **120.** $r = \frac{1}{1 - \cos\varphi}$,

121. $r = \frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, **122.** $r = \frac{1}{1 - \sin\varphi}$, **123.** $r = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$,

124. $r = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}$, **125.▷** $r = \frac{16}{3 - 5\cos\varphi}$, **126.▷** $r = \sqrt{a^2\cos 2\varphi}$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám szorzatát:

127.• $3(\cos 75° + i\sin 75°)$, $2(\cos 305° + i\sin 305°)$,
128. $2\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$, $3(\cos 175° + i\sin 175°)$,
129.• $2(\cos 30° + i\sin 30°)$, i,
130. $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Írjuk fel a következő számok trigonometriai alakját:

131.• $\cos\varphi - i\sin\varphi$, **132.**▷ $-\cos\varphi + i\sin\varphi$, **133.** $-\cos\varphi - i\sin\varphi$.

Az alábbi sokszögeknek komplex számokkal megadjuk néhány csúcsát. Határozzuk meg a sokszögek hiányzó csúcsait:

134.• $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 5 + i$ csúcspontú szabályos háromszög,
135.▷ $z_1 = -4 + i$ és $z_2 = 3 - 3i$ csúcspontú négyzet,
136. $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - 2i$ és $z_3 = 2 + 3i$ csúcspontú paralelogramma,
137. 0 középpontú és $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ csúcspontú szabályos hatszög,
138. i középpontú és $z_1 = 3 - 4i$ csúcspontú szabályos ötszög.

Számítsuk ki az alábbi z_1, z_2 komplex számok $\frac{z_1}{z_2}$ hányadosát:

139.• $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 225° + i\sin 225°)$, $z_2 = 3(\cos 122° + i\sin 122°)$,
140. $z_1 = 3(\cos 75° + i\sin 75°)$, $z_2 = 4(\cos 13° + i\sin 13°)$,
141.• $z_1 = 3(\cos 45° + i\sin 45°)$, $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$,
142. $z_1 = \cos 0° + i\sin 0°$, $z_2 = -4 + i\sqrt{3}$.

Írjuk fel algebrai alakban az alábbi hatványokat:

143.• $(1+i)^{12}$, **144.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-6}$, **145.** $\left(\sqrt{3}+i\right)^{7}$,
146. $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-10}$, **147.** $(1-i)^{-3}$, **148.**• $\left(-2\sqrt{3} + 2i\right)^{-9}$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket trigonometriai alakkal és binomiális tétellel számolva:

149.• $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{4}$, **150.** $(1+i)^{4}\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{6}$, **151.** $\left(\sqrt{3}+i\right)^{5}$,

Határozzuk meg az alábbi z komplex számok összes komplex n-edik gyökét:

152. $z = 1$, $n = 3$, **153.** $z = -1$, $n = 3$, **154.** $z = 1$, $n = 4$,
155.• $z = 1$, $n = 6$, **156.** $z = -8i$, $n = 3$, **157.** $z = i$, $n = 2$,
158. $z = -243i$, $n = 5$, **159.** $z = -1$, $n = 7$, **160.**• $z = -2+2i$, $n = 3$,
161.• $z = 3 + 4i$, $n = 2$, **162.** $z = -7+24i$, $n = 2$.

163.▷ Mutassuk meg, hogy ha c, z tetszőleges komplex számok, akkor $\sqrt[n]{c^n z} = c\sqrt[n]{z}$, ahol a gyökvonás a komplex gyökvonást jelenti. Speciálisan $\sqrt{c^2 z} = c\sqrt{z}$.

164.[▷] Bizonyítsuk be, hogy az $az^2 + bz + c = 0$ egyenlet gyökeit megkaphatjuk a

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formulával, ha a gyökvonás a komplex négyzetgyökvonást jelenti.

Határozzuk meg az alábbi egyenlet gyökeit a komplex számok halmazában. Ha a diszkrimináns nem valós, akkor használjuk az előző feladat eredményét:

165.[•] $z^2 - 2iz - 5 = 0$, **166.** $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$,

167. $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$, **168.** $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$.

Vegyes feladatok

Bizonyítsuk be a $(\cos x + i \sin x)^5$ kifejezés kétféle kiszámításával következő azonosságokat:

169.[▷] $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$,

170. $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} = 16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

171.[▷] Számítsuk ki $-15 - 8i$ négyzetgyökeinek pontos értékét!

172.[*] Szerkesszük meg a Gauss-féle számsíkon a z_1, z_2 és az 1 komplex számokhoz tartozó helyvektorok segítségével a $z_1 z_2$ komplex számhoz tartozó helyvektort!

173.[*] Oldjuk meg a $\overline{z} = z^n \quad (n \in \mathbf{N}^+)$ egyenletet!

174.[*] Számítsuk ki az $e_0^j + e_1^j + \cdots + e_n^j \quad (j \in \mathbf{Z})$ összeget, ahol $e_0, e_1, \ldots e_n$ az $(n+1)$-edik egységgyökök.

175.[*] Számítsuk ki az $1 + 2e + 3e^2 + \cdots + (n+1)e^n$ összeget, ahol e tetszőleges $(n+1)$-edik egységgyök.

176.[*] Bizonyítsuk be, hogy ha a z komplex számra $|z| < \frac{1}{2}$ teljesül, akkor $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.

Mutassuk meg, hogy minden n egész számra érvényesek az alábbi egyenlőségek:

177. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$, **178.** $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + \sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

Határozzuk meg az alábbi összegeket:

179.[*] $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$, **180.**[*] $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$.

Mutassuk meg, hogy:

181.[*] $\cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}$,

182.[*] $\cos\dfrac{2\pi}{11} + \cos\dfrac{4\pi}{11} + \cos\dfrac{6\pi}{11} + \cos\dfrac{8\pi}{11} + \cos\dfrac{10\pi}{11} = -\dfrac{1}{2}$,

183.[*] $\cos\dfrac{\pi}{13} + \cos\dfrac{3\pi}{13} + \cos\dfrac{5\pi}{13} + \cos\dfrac{7\pi}{13} + \cos\dfrac{9\pi}{13} + \cos\dfrac{11\pi}{13} = \dfrac{1}{2}$.

7. fejezet

Sorozatok

A sorozat fogalma

D 7.1 **Sorozaton** olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok halmaza vagy annak valamely valódi végtelen részhalmaza. Az n nemnegatív számhoz rendelt elemet a sorozat **n-edik elemének** nevezzük.
Ebben a fejezetben értelmezési tartományként legtöbbször a pozitív egész számok halmazát ($\mathbf{N}^+$) tekintjük, azaz általában $[a_n]$ az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatot jelöli. (Ezért a feladatoknál csak akkor adjuk meg az értelmezési tartományt, ha ettől eltérünk.)

D 7.2 Ha megadjuk a sorozat első néhány elemét s azt a szabályt, ahogyan az n-edik elemet az előzőekből megkaphatjuk, akkor azt mondjuk, hogy a sorozatot **rekurzív definícióval** adjuk meg. Szokás ebben az esetben **rekurzív sorozatról** beszélni.

D 7.3 Ha $[a_n] \subseteq \mathbf{R}$, akkor **valós számsorozatról**, ha pedig $[a_n] \subseteq \mathbf{C}$, akkor **komplex számsorozatról** beszélünk. Ha minden egyes n nemnegatív (illetve pozitív) egész számhoz a síknak vagy a térnek egy-egy P_n pontját rendeljük, akkor **pontsorozatot** ($[P_n]$) kapunk. Hasonlóan beszélhetünk **vektorsorozatról** vagy **függvénysorozatról** is. Ebben a fejezetben i mindig a képzetes egységet jelenti.

Feladatok

Írjuk fel a következő sorozatok első öt elemét:

1. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$,

2. $a_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$,

3. $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}$,

4. $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{4}$,

5. $a_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$,

6. $a_n = n + (n+1) + \cdots + 2n$,

7. $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2k$,

8. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(k-1)!}$,

9.▷ $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} j \right)$,

10.• $a_n = \left(\dfrac{i-1}{i+1} \right)^n \quad n \in \mathbf{N}$,

11. $a_n = \dfrac{(i-1)^{3n}}{2^n} \quad n \in \mathbf{N}$.

Adjunk meg egy képletet vagy utasítást, amelynek segítségével képzett sorozat kezdő elemei megegyeznek a következő feladatokban felírt elemekkel:

12. $2,4,6,\ldots,$

13. $-13,-18,-23,-28,\ldots,$

14. $0,3;\ 0,33;\ 0,333;\ldots,$

15. $-0,1;\ 0,01;\ -0,001;\ldots,$

16.* $0,235;\ 0,235235;\ldots,$

17. $2;\ 1,5;\ 1,25;\ 1,125;\ldots,$

18. $0,2,0,2,0,2,\ldots,$

19.* $-1,-1,1,1,-1,-1,\ldots,$

20. $\frac{2}{3},\frac{5}{8},\frac{10}{13},\frac{17}{18},\frac{26}{23},\ldots,$

21.* $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ldots,$

22.* $1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4,\ldots,$

23. $i,-i,i,-i,\ldots,$

24.* $1,\frac{\sqrt{3}i-1}{2},-\frac{\sqrt{3}i+1}{2},1,\frac{\sqrt{3}i-1}{2},-\frac{\sqrt{3}i+1}{2},\ldots,$

25.* $1,i-1,-2i,2(i+1),-4,-4(i-1),8i,-8(i+1),\ldots.$

Írjuk fel az alábbi, rekurzív képlettel megadott sorozatok első öt elemét:

26. $a_1=-1$ és $a_n=-4-3a_{n-1}$, $n=2,3,4,\ldots,$

27.* $a_1=2$ és $a_n=3-\frac{3}{a_{n-1}}$, $n=2,3,4,\ldots,$

28. $a_1=1$, $a_2=2$ és $a_n=\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{2}$, $n=3,4,5,\ldots,$

29. $a_0=1$ és $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$, $n\in\mathbf{N}^+,$

30. $z_0=-1$ és $z_n=z_{n-1}^2+i$, $n\in\mathbf{N}^+,$

31. $z_0=(1+i)^2$ és $z_n=z_{n-1}^2+1+i$, $n\in\mathbf{N}^+,$

32.* $\mathbf{r}_0=\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_1=\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_n=\mathbf{r}_{n-1}\times\mathbf{r}_{n-2}$, $n=2,3,4,\ldots,$

33. $\mathbf{r}_0=\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_1=\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_2=\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_n=(\mathbf{r}_{n-3}\mathbf{r}_{n-2})\mathbf{r}_{n-1}$, $n=3,4,5,\ldots.$

Metrikus tér

D 7.4 Ha az $M\neq\emptyset$ halmazhoz hozzárendelünk egy, az M^2 halmazon értelmezett valós értékű d függvényt, amely minden $a,b,c\in M$ elemre teljesíti a

$$d(a,b)\geq 0,\quad \text{és}\quad d(a,b)=0\iff a=b,$$

$$d(a,b)=d(b,a)\quad \textbf{(szimmetria tulajdonság)},$$

$$d(a,b)+d(b,c)\geq d(a,c)\quad \textbf{(háromszög-egyenlőtlenség)}$$

feltételeket, akkor azt mondjuk, hogy az M halmaz a d **távolságfüggvénnyel (metrikával) metrikus teret** alkot.

T 7.5 A valós számokból álló n elemű sorozatok (pontok) $\mathbf{R}^n$ halmaza a

$$d(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

$(A=(a_1,a_2,\ldots,a_n), B=(b_1,b_2,\ldots,b_n))$ távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot, ahol $d(A,B)$-t az A és B pontok távolságának szokás nevezni.

D 7.6 Legyen M metrikus tér a d távolságfüggvénnyel. Az M valamely nemüres H részhalmazát **korlátosnak** mondjuk, ha van olyan $O \in M$ és van olyan $v \in \mathbf{R}$, hogy a $d(O,P) \leq v$ egyenlőtlenség a H minden P elemére teljesül. v-t a H halmaz egy **korlátjának** nevezzük.

D 7.7 A H valós számhalmazt **felülről (alulról) korlátosnak** nevezzük, ha van olyan v valós szám, hogy a H minden x elemére $x \leq v (x \geq v)$ teljesül, és bármely ilyen tulajdonságú v számot a H **felső (alsó) korlátjának** nevezünk.

T 7.8 Felülről korlátos H halmaznak van legkisebb felső korlátja (**szuprémuma**), alulról korlátos H halmaznak van legnagyobb alsó korlátja (**infimuma**). (Jelölés: $\sup H, \inf H$.)

T 7.9 Valós számhalmaz akkor és csak akkor korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

T 7.10 Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér valamely ponthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a halmaz elemeinek koordinátáiból alkotott számhalmaz korlátos.

D 7.11 Az M metrikus tér A pontjának δ sugarú **környezetén (ill. teljes környezetén)** azoknak az M-beli X pontoknak a halmazát értjük, amelyek eleget tesznek a $0 < d(X,A) < \delta$ (ill. $d(X,A) < \delta$) egyenlőtlenségnek, amelyben δ adott pozitív valós szám.

D 7.12 Legyen H az M metrikus tér tetszőleges részhalmaza. Ha az M-beli P pontnak van olyan teljes környezete, amelynek minden pontja H-hoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy P a H **belső pontja**. Ha P-nek van olyan teljes környezete, amelynek metszete H-val üres, akkor P-t H **külső pontjának** nevezzük. Végül, ha P bármely teljes környezete tartalmaz H-beli pontot is, de H-n kívüli pontot is, akkor azt mondjuk, hogy P a H **határpontja**. A H halmazt **zártnak** hívjuk, ha minden határpontját tartalmazza, és **nyíltnak**, ha egyetlen határpontját sem tartalmazza. Például minden $[a,b]$ zárt ((a,b) nyílt) intervallum az $\mathbf{R}$ metrikus tér zárt (nyílt) részhalmaza, ha $a,b \in \mathbf{R}$. (A $(-\infty,\infty)$ intervallumnak és az üres halmaznak nincs határpontja, így ezek zártnak és nyíltnak is tekinthetők.)

Feladatok

34.° Mutassuk meg, hogy a komplex számok $\mathbf{C}$ halmaza a $d(u,v) = |u-v|$ $(u,v \in \mathbf{C})$ távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot.

35.$^{\triangleright}$ Legyen $M = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ és $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ $(\mathbf{a},\mathbf{b} \in M)$. Bizonyítsuk be, hogy M a d távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot.

36.$^{\triangleright}$ Mutassuk meg, hogy a közönséges háromdimenziós tér valamely H ponthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a H minden pontja egy O (origó) középpontú gömb belsejébe esik. A komplex számok $\mathbf{C}$ metrikus terének valamely H részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan v valós szám, hogy a H minden z elemére $|z| \leq v$.

37.* Mutassuk meg, hogy komplanáris egységvektorok halmaza a vektori szorzat abszolút értékével metrikus teret alkot, ha a kollineáris vektorokat egyenlőknek tekintjük.

38.° Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{R}^2$ halmaz metrikus teret alkot a

$$d(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (A = (a_1,a_2), B = (b_1,b_2))$$

metrikával. Ábrázoljuk az $(1,0)$ pont 1 sugarú (teljes) környezetét.

39. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{R}^2$ halmaz metrikus teret alkot a

$$d(A,B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \quad (A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2))$$

metrikával. Adjuk meg az $(1, -1)$ ponttól 1 távolságra lévő pontok halmazát.

40.$^{\triangleright}$ Legyen A a valós számok egy alulról korlátos nemüres halmaza. Igazoljuk, hogy ha $B = \{-x;\ \ x \in A\}$, akkor $\inf A = -\sup B$.

41.* Felhasználva a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget (l. **1.85** feladatot), bizonyítsuk be a **T 7.5** tételt.

42.$^{\triangleright}$ Legyen X tetszőleges végtelen halmaz. Bármely $p(\in X)$ és $q(\in X)$ esetén legyen

$$d(p,q) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \neq q; \\ 0, & \text{ha } p = q. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy X a d metrikával metrikus teret alkot.

43.$^{\triangleright}$ Adjuk meg az előző feladatbeli metrikus tér nyílt és zárt részhalmazait.

Döntsük el, hogy a következő d függvények metrikák-e $\mathbf{R}$-en:

44.$^{\bullet}$ $d(x,y) = (x-y)^2$,

45.$^{\triangleright}$ $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$,

46. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$,

47. $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat korlátosság szempontjából:

48.$^{\bullet}$ $P_n(\dfrac{n+1}{n}, n)$,

49.$^{\triangleright}$ $P_n(\dfrac{3n+1}{2n}, \dfrac{n-1}{n})$,

50. $P_n(\dfrac{n^2}{n^2+1}, \dfrac{n-1}{n})$,

51. $P_n(\sin n, \cos n, \dfrac{1}{n})$,

52.$^{\triangleright}$ $z_n = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$,

53.$^{\triangleright}$ $z_0 = 1, z_n = (1+i)z_{n-1}$,

54. $\mathbf{v}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathbf{i} + \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\mathbf{j}$,

55.$^{\bullet}$ $\mathbf{v}_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \dfrac{\sin n}{n}\mathbf{k}$.

Sorozat határértéke; konvergencia és divergencia

D 7.13 Metrikus térbeli pontsorozat **határértékének** a tér olyan pontját nevezzük, amelynek bármely teljes környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok eleme van. (Jelölés: $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ vagy $A_n \longrightarrow A$.) Ez azt jelenti, hogy az M metrikus tér $[A_n]$ pontsorozatának határértéke az M-beli A pont, ha bármely ε pozitív valós számhoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $d(A_n, A) < \varepsilon$. Az ilyen n_0-t az ε-hoz tartozó **küszöbszámnak** nevezzük.

Speciálisan az a számot az $[a_n]$ számsorozat határértékének mondjuk, ha bármely ε pozitív valós számhoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. A vektorsorozat határértéke hasonlóan definiálható.

Egy sorozatot **konvergensnek** mondunk, ha van határértéke, s **divergensnek**, ha nincs.

D 7.14 Sorozat **részsorozatain** azokat a sorozatokat értjük, amelyek a sorozatból véges vagy végtelen sok elem elhagyásával állíthatók elő és a megtartott elemeket eredeti sorrendjükben vesszük figyelembe.

T 7.15 Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, s határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozaté.

D 7.16 Legyen $[A_n]$ az M metrikus tér egy pontsorozata. Az $[A_n]$ sorozat **torlódási helyének (torlódási pontjának)** nevezzük az M minden olyan pontját, amely az $[A_n]$ valamely részsorozatának határértéke. (Ez azt jelenti, hogy konvergens sorozatnak egyetlen torlódási helye van, s ez a sorozat határértéke. Megjegyezzük, hogy az állítás megfordítása nem igaz.)

T 7.17 **(Bolzano-Weierstrass-tétel)** Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér minden korlátos sorozatának van konvergens részsorozata. (Minden korlátos számsorozatnak illetve vektorsorozatnak van konvergens részsorozata.)

T 7.18 **(Cauchy-féle konvergenciakritérium)** Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér $[A_n]$ pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha bármely ε pozitív valós számhoz megadható olyan n_0 valós szám, hogy ha $m, n > n_0$, akkor $d(A_m, A_n) < \varepsilon$.
Feladatok megoldásában sokszor jobban alkalmazható a következő ekvivalens megfogalmazás: Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér $[A_n]$ pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha bármely ε pozitív valós számhoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $d(A_n, A_{n+p}) < \varepsilon$ minden p pozitív egész számra teljesül.

D 7.19 A valós $[a_n]$ számsorozatról akkor mondjuk, hogy **végtelenhez divergál**, ha bármely k pozitív valós számhoz megadható olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $a_n > k$; s akkor mondjuk, hogy **mínusz végtelenhez divergál**, ha bármely k negatív valós számhoz van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ esetén $a_n < k$. (Jelölések: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ vagy $a_n \longrightarrow \infty$, illetve $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ vagy $a_n \longrightarrow -\infty$.)

T 7.20 Végtelenhez divergáló sorozat minden részsorozata végtelenhez divergál; mínusz végtelenhez divergáló sorozat minden részsorozata mínusz végtelenhez divergál.

Feladatok

A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi feladatokban megadott $[a_n]$ sorozat a-hoz konvergál, azaz minden pozitív ε-hoz adjunk meg egy n_0 küszöbszámot. Hányadik elemtől (n_1) kezdve esnek a sorozat elemei az a szám r sugarú teljes környezetébe?

56.• $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$, $a = 1$, $r = 10^{-2}$, **57.** $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $a = 0$, $r = 10^{-6}$,

58.▷ $a_n = \dfrac{n+2}{3n-8}$, $a = \dfrac{1}{3}$, $r = \dfrac{1}{900}$, **59.**• $a_n = 3^{\frac{1}{n}}$, $a = 1$, $r = \sqrt[99]{3} - 1$,

60.▷ $a_n = \dfrac{4^n}{3 \cdot 4^n + 1}$, $a = \dfrac{1}{3}$, $r = \dfrac{1}{3}$, **61.**▷ $a_n = \lg \dfrac{n+1}{n+2}$, $a = 0$, $r = \lg 1{,}002$,

62. $a_n = \sqrt{\dfrac{n+4}{n}}$, $a = 1$, $r = 0{,}1$, **63.** $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{2}{3^n}$, $a = 1$, $r = \dfrac{2}{3^{100}}$, 64.▷ $a_n = \dfrac{(-1)^n + 4n}{5n + (-1)^{n-1}}, \quad a = \dfrac{4}{5}, \quad r = 10^{-2},$

65.▷ $a_n = \dfrac{n}{n^3+1}, \quad a = 0, \quad r = 10^{-3}.$

66.* Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{R}^m$ $(m \in \mathbf{N}^+)$ metrikus tér valamely korlátos sorozatának egy torlódási helye van, akkor a sorozat konvergens.

67.* A Cauchy-féle konvergenciakritériumot (**T 7.18**) felhasználva mutassuk meg, hogy az $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ sorozat divergens.

68.• Konvergens-e az $[a_n]$ sorozat, ha teljesíti a következő feltételt: Minden pozitív ε valós szám esetén van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozatok végtelenhez divergálnak. Milyen n_1 indextől kezdve lesznek a sorozat elemei nagyobbak az adott k pozitív számnál? (Lehetőleg a legkisebb ilyen n_1-t adjuk meg.)

69. $a_n = \lg(n+1), \; k = 10,$

70.• $a_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n}+1}, \; k = 999,$

71.▷ $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}, \; k = 20.$

Monoton és korlátos sorozatok, műveletek sorozatokkal

D 7.21 Az $[a_n]$ valós számsorozatról azt mondjuk, hogy **monoton növekvő (csökkenő)**, ha:

$$n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \le a_{n_2} \quad (n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \ge a_{n_2});$$

szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha:

$$n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} < a_{n_2} \quad (n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \ge a_{n_2}).$$

T 7.22 Monoton növekvő felülről korlátos sorozat konvergens, mégpedig legkisebb felső korlátjához konvergál. Monoton csökkenő alulról korlátos sorozat szintén konvergens, s a legnagyobb alsó korlátjához tart.

D 7.23 Két számsorozat (vektorsorozat) **összegén**, **különbségén**, **szorzatán**, **hányadosán** azt a sorozatot értjük, amelynek n-edik eleme a két sorozat n-edik elemének összege, különbsége, szorzata, hányadosa. (Megjegyezzük, hogy a hányadossorozat n-edik elemének akkor van értelme, ha a nevező nem 0.)

T 7.24 Korlátos számsorozatok összege, különbsége és szorzata szintén korlátos.

D 7.25 Egy számsorozatot (ill. vektorsorozatot) **nullasorozatnak** nevezünk, ha határértéke 0 (ill. $\mathbf{0}$).

T 7.26 Egy számsorozat akkor és csak akkor korlátos, ha bármely nullasorozattal képezett szorzata szintén nullasorozat.

T 7.27 Ha a valós $[a_n]$ számsorozatra $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$. Ha pedig $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és van olyan m valós szám, hogy $n > m$ esetén $a_n > 0$, akkor

$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = \infty$; míg ha van olyan m valós szám, hogy $n > m$ esetén $a_n < 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = -\infty$.

T 7.28 Bármely $[a_n + ib_n]$ komplex számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha az $[a_n]$ és $[b_n]$ valós számsorozatok konvergensek.

T 7.29 Ha az $[a_n]$ és $[b_n]$ (komplex vagy valós) számsorozatok konvergensek, akkor:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n; \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k \ (k \in \mathbf{N}^+);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \text{ha} \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}, \text{ha} a_n \geq 0.$$

T 7.30 (**"Rendőr-elv"**) Ha $[a_n], [b_n], [c_n]$ olyan valós számsorozatok, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = h,$$

és van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, akkor a $[b_n]$ sorozat is konvergens, és $\lim_{n\to\infty} b_n = h$.

T 7.31 Ha az $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatok konvergensek, és van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

T 7.32 Végtelenhez divergáló sorozatok összege és szorzata szintén végtelenhez divergál.

T 7.33 Végtelenhez divergáló $[a_n]$ sorozat és tetszőleges alulról korlátos $[b_n]$ sorozat összege végtelenhez divergál. Ha van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ eseten $a_n > 0$ akkor a sorozatok szorzata is a végtelenhez divergál.

T 7.34 (**Bernoulli-egyenlőtlenség**) Ha $h > -1$, akkor az $(1+h)^n \geq 1 + nh$ egyenlőtlenség minden n nemnegatív egész számra teljesül.

T 7.35 Ha $q \in \mathbf{C}$ és $|q| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

T 7.36 Bármely pozitív q számra: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

T 7.37 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

T 7.38 Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér $P_n(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn})$ pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha az elemek koordinátáiból álló $[x_{1n}], [x_{2n}], \ldots, [x_{kn}]$ számsorozatok külön-külön konvergensek; mégpedig $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0})$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} x_{jn} = x_{j0}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Feladatok

72.▷ Legyen $[a_n]$ valós nullasorozat, n_0 egy rögzített pozitív egész szám, $[b_n]$ pedig olyan valós vagy komplex számsorozat, amelyre $|b_n| \leq a_n$, ha $n \geq n_0$. Bizonyítsuk be,hogy $[b_n]$ is nullasorozat.

73.• Bizonyítsuk be, hogy bármely z komplex számra: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n!} = 0$.

74.• Bizonyítsuk be, hogy bármely nemnegatív egész k-ra és 1-nél nagyobb a-ra: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

75.• Mutassuk meg, hogy minden nemnegatív egész k-ra: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{n!} = 0$.

76.▷ Bizonyítsuk be, ha $|q| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$.

77. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

78.▷ Legyen $z \in \mathbf{C}$ és $|z| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy a $[z^n]$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $z = 1$.

Vizsgáljuk meg, hogy a következő sorozatoknak van-e határértékük vagy torlódási helyeik. Mely sorozatok divergálnak végtelenhez illetve mínusz végtelenhez?

79.• $a_n = \dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}$,

80.▷ $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$,

81.• $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^n$,

82.• $a_n = \dfrac{n+2}{2n} + \dfrac{2}{(-1)^n}$,

83.▷ $0, 1, \frac{1}{2}, 4, \frac{2}{3}, 9, \frac{3}{4}, 16, \ldots$,

84.• $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}}$,

85. $a_n = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n}$,

86. $a_n = -\dfrac{n^3+1}{n^2+1}$,

87. $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n = 3k; \\ \frac{n^2-n}{n^2}, & \text{ha } n = 2k+1; \\ \frac{n+1}{2n+1}, & \text{ha } n = 2k+2 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}^+)$,

88.▷ $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n \leq 10^5; \\ \frac{n+1}{2n+1}, & \text{ha } n > 10^5 \end{cases}$,

89.• $a_n = \dfrac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_{p-1}n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_{q-1}n + b_q}$, $\quad a_j, b_k \in \mathbf{R}$,
$j = 0, 1, \ldots, p$; $\quad k = 0, 1, \ldots, q$, $\quad a_0 \neq 0$, $\quad b_0 \neq 0$.

90.• Vizsgáljuk meg konvergencia szempontjából a **48.** — **55.** feladatokban megadott sorozatokat.

Konvergensek-e az alábbi komplex számsorozatok? Ha konvergensek, akkor számítsuk ki a határértéküket. (A gyökvonás mindenütt valós gyökvonást jelent.)

91.• $z_n = \dfrac{n^2 - i(n^2-1)}{n^2 - i}$,

92.• $z_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n} + in}{n+1}$,

93.• $z_n = \sqrt{n+1} - i\sqrt{n}$,

94.• $z_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})i$,

95.▷ $z_n = \dfrac{i^n}{3^n + i^n}$,

96.▷ $z_n = (\sqrt{1-n^2} - in)n \quad (n \in \mathbf{N})$,

97.▷ $z_n = (1-i)^n$,

98.• $z_n = \left(\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)^n$,

99. $z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} i^k$,

100.▷ $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(1+i)^k}$,

101. $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{i}{1+i}\right)^k$,

102. $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1-3i}{1+2i}\right)^k$.

Vizsgáljuk meg az alábbi valós számsorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. Adjuk meg – ha léteznek – a sorozatok határértékét, infimumát és szuprémumát.

103.• $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$,

104.• $a_n = \dfrac{5n-2}{5-10n}$,

105.• $a_n = \dfrac{n^2+1}{n(n+1)}$,

106. $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+n+1}$,

107. $a_n = \dfrac{1-5^{n+2}}{5^n}$,

108.• $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+1}}$,

109.▷ $a_n = \dfrac{n!}{n^2}$,

110. $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k; \\ \frac{n-1}{n}, & \text{ha } n = 2k-1, \end{cases}$

111.▷ $a_n = \dfrac{k^n}{n!} \quad (k \in \mathbf{N}^+)$,

112.⋆ $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$,

113.▷ $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+1)(n+10)}$,

114.▷ $a_n = \dfrac{2(-1)^n}{3\sqrt[3]{n}+1}$,

115.▷ $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{5^k}$,

116. $a_n = \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} \quad (n \geq 3)$,

117. $a_n = \dfrac{n^2 - 8\cdot 4^n}{n^2 + 6\cdot 4^n}$,

118.• $a_n = \sqrt[4]{\dfrac{2^n+1}{n+2^n}}$,

119.▷ $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}\sin\dfrac{1}{n}$,

120.• $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2-1}-n)}$.

Döntsük el, hogy az alábbi valós számsorozatok konvergensek vagy divergensek. Ha konvergensek, akkor határozzuk meg a határértéküket; ha divergensek, akkor nézzük meg, divergálnak-e végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez.

121.• $a_n = \dfrac{1000n^3 + 20n^2}{0{,}001n^4 + 100n^2}$,

122. $a_n = \dfrac{(n-1)^3 - (n+1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$,

123.• $a_n = \dfrac{5}{1+(-1)^n 5n^2} - \dfrac{n+2}{n+3}$,

124.• $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^5$,

125.▷ $a_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$, **126.** $a_n = \dfrac{n!}{n! + (n+1)!}$,

127.• $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{n+1}$, **128.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{n + \sqrt{2}}$,

129. $a_n = \dfrac{n - \sqrt[3]{n^2}}{n + \sqrt{n^2+1}}$, **130.**• $a_n = \dfrac{2n^3}{2n^2+3} + \dfrac{1 - 5n^2}{5n+1}$,

131.• $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{5n^6+2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3}}$, **132.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n^6+1} - \sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{n^4 - 3} + \sqrt{n+1}}$,

133. $a_n = \dfrac{(\sqrt{n^2+1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$, **134.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$,

135.• $a_n = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(5n-1)^5}$,

136.▷ $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$, **137.**▷ $a_n = \dfrac{1 - 2 + \cdots + (2n-1) - 2n}{\sqrt{n^2+1}}$,

138.▷ $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$, **139.** $a_n = \dfrac{1{\cdot}2 + 2{\cdot}3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$,

140.* $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\left(a + \dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \dfrac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a + \dfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$, $a \in \mathbf{R}$,

141.▷ $a_n = \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n}$, $|a|, |b| < 1$,

142.• $a_n = \dfrac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$, **143.**• $a_n = \dfrac{1}{1{\cdot}2} + \dfrac{1}{2{\cdot}3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$,

144.* $a_n = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$,

145.* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}\right)$,

146.• $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$, **147.**• $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$,

148.▷ $a_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$, **149.** $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$,

150.• $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

151.• $a_n = \dfrac{(1 - 4 - 9 - \cdots - (5n-6))(\sqrt{n^4 - n^3} - \sqrt{n^4 + n^3})}{n^3}$,

152.▷ $a_n = \dfrac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}\,\dfrac{2n - \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n}\sin n!$,

153.* $a_n = \dfrac{2n + \sqrt{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^4 + n^3 - 1}}{\sqrt{n^5 + n^4 + 2n} - \sqrt{n^5 - n^4 + 2}}$,

154.▷ $a_n = \dfrac{n}{3^n}$, **155.**• $a_n = \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{n}}$,

156.• $a_n = \sqrt[3n^2]{n^2+2n+4}$,

157.▷ $\sqrt[n]{5n^2-30n+21}$, $n \geq 2$,

158. $a_n = \sqrt[2n]{\dfrac{2n-1}{2n+1}}$,

159.▷ $a_n = \sqrt[n^2]{n}$, $n \geq 2$,

160.• $\sqrt[n]{\dfrac{a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_{p-1}n + a_p}{b_0n^q + b_1n^{q-1} + \cdots + b_{q-1}n + b_q}}$; $a_j, b_k \in \mathbf{R}$

$j = 0, 1, \ldots, p$; $k = 0, 1, \ldots, q$; $\dfrac{a_0}{b_0} > 0$.

Valós számsorozatok hatványa, logaritmusa

D 7.39 Az $[a_n]$valós számsorozat $[b_n]$ valós kitevőjű **hatványának** nevezzük az $[a_n^{b_n}]$ sorozatot, ha $a_n^{b_n}$ legfeljebb véges sok elem kivételével értelmezve van a valós számok körében. Ha a_n legfeljebb véges sok elem kivételével pozitív, akkor az $[\ln a_n]$ sorozatot az $[a_n]$ sorozat természetes alapú **logaritmusának** nevezzük. (Természetesen más alapú logaritmusok is értelmezhetők.)

T 7.40 Az $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ sorozat konvergens (a határértéket e-vel jelöljük), azaz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284590 45\ldots.$$

T 7.41 Bármely $[a_n]$ valós számsorozat esetén $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^a$ $(a \in \mathbf{R})$. Bármely $[a_n]$ pozitív elemű sorozatra és a pozitív valós számra $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$.

T 7.42 Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Ha $0 < a < \infty$, $-\infty < b < \infty$ akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$. Ha $0 < a < 1$, $b = \infty$ vagy $1 < a \leq \infty$, $b = -\infty$ vagy $a = \infty$, $-\infty \leq b < 0$ vagy $a = 0$, $0 < b \leq \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$. Abban az esetben, ha $0 < a < 1$, $b = -\infty$ vagy $1 < a \leq \infty$, $b = \infty$ vagy $a = \infty$, $0 < b \leq \infty$ akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.
(Megjegyezzük, hogy az $a = \infty$, $b = 0$ valamint az $a = 1$, $b = \pm\infty$ és az $a = 0$, $b = 0$ esetekben további vizsgálatok szükségesek. $a < 0$ esetben általában nem értelmezhetők a hatványok a valós számok körében.)

Feladatok

161.▷ Bizonyítsuk be, hogy bármely k egész számra $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$.

162.• Bizonyítsuk be, hogy ha $[a_n]$ $(a_n \in \mathbf{N}^+)$ olyan sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

163.▷ Bizonyítsuk be, hogy bármely $p \in \mathbf{Z}$ és $q \in \mathbf{N}^+$ (azaz bármely $\frac{p}{q}$ racionális szám) esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}}$.

164.▷ Legyen $[a_n]$ végtelenhez és $[b_n]$ mínusz végtelenhez tartó számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{b_n}\right)^{b_n} = e^r$ $(r \in \mathbf{R})$ (A **161.** — **163.** feladatok általánosítása.)

165.• Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = e^r$ $(r \in \mathbf{R})$.

166.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < \lim_{n\to\infty} a_n = a < \infty$ és $-\infty < \lim_{n\to\infty} b_n = b < \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ és

167.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = r \quad (r \in \mathbf{R})$,

168.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,

169.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$,

170.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \in \mathbf{R}^+)$,

171.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ és

172.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \in \mathbf{R}^+)$,

173.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, amelyekre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad (a_n > 0)$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ és

174.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \geq 0)$,

175.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

176.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$.

A **T 7.41** tétel és a **161.** — **166.** feladatok alkalmazásával számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

177.• $a_n = \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{2^n}$, **178.**• $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$, **179.**▷ $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$,

180.▷ $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$, **181.**▷ $a_n = \left(\frac{n-1}{3n}\right)^{2n+1}$, **182.**• $a_n = \left(2-\frac{1}{n}\right)^n$,

183. $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$, **184.** $a_n = \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$, **185.** $a_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$,

186. $a_n = \left(\sqrt{3n^4+2n-1} - \sqrt{3n^4+n^2-n}\right)\left(\frac{-3n+1}{3n+4}\right)^{4n-2}$,

187.• $a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+4}\right)^{3n^2-6n+5} + \frac{\sqrt{n^4-n^2+6} - \sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1}$,

188.• $a_n = n^2\left(\sqrt{n^6-n+2} - \sqrt{n^6+4n-4}\right)\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2}$.

Rekurzív sorozatok

A **189.** — **202.** feladatokban a sorozatokat rekurzív képlettel adtuk meg. Számítsuk ki a határértéküket, ha létezik.

189.[▷] $a_1 = 6, \; a_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{a_n}$.

190.[•] Legyen a adott pozitív szám. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a_1 pozitív számot választva az

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$$

sorozat $\sqrt{a}$-hoz konvergál. (Pozitív szám négyzetgyöke kiszámítható a fenti sorozattal.)

191.[*] Az előző feladat általánosításaként mutassuk meg, hogy bármely a pozitív számra az

$$a_1 > 0, \; a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}\right)$$

rekurziós képlettel megadott sorozat határértéke $\sqrt[k]{a}$, ahol $k \geq 2$ egész szám.

192.[▷] $a_1 = a \quad (\in \mathbf{R}), \quad a_{n+1} = 2a_n^2 + a_n$, **193.**[•] $a_1 = 1, \; a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^3 + 1}$,

194.[▷] $a_1 = \sqrt{a}, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}, \; (a > 0)$, **195.**[▷] $a_1 = 1, \; a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$.

Legyenek $0 < b \leq a$ tetszőleges rögzített valós számok. A következő rekurzív definícióval egyszerre adunk meg két sorozatot:

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}.$$

Igazoljuk, hogy

196. $[a_n]$ monoton csökkenő, $[b_n]$ monoton növekvő sorozat,

197. Az a_n és a b_n számok mértani közepe minden n-re ugyanaz,

198. $0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$, **199.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}$.

Tekintsük az úgynevezett Fibonacci-sorozatot: $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Mutassuk meg:

200.[*] $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, **201.**[*] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

202. Ha C az AB szakasz belső pontja és $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{CB}{AB}$, akkor ez az arány $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (az aranymetszés arányszáma).

Vegyes feladatok

203.$^{\triangleright}$ Igazoljuk, hogy ha $|\lim_{n\to\infty} a_n| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$.

204.$^{\triangleright}$ Igazoljuk, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n > 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^n = \infty$.

205.* Bizonyítsuk be, hogy minden $m(\in \mathbf{N}^+)$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \cdots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{1+m}.$$

206.$^{\bullet}$ Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

207. A **206.** feladat alapján határozzuk meg az $\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right]$ sorozat határértékét.

208. a **206.** feladat alkalmazásával határozzuk meg az $\left[\left(1-\frac{1}{n^k}\right)^n\right]$ $(k \in \mathbf{N}^+)$ sorozat határértékét.

209. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n-re $b_n > 0$ és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = b < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

210.$^{\triangleright}$ Legyen $a_n \geq -1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $k \in N^+ - \{1\}$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1 + a_n} = 1$.

211.* Mutassuk meg, hogy az $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{3^k}$ sorozat konvergens.

212.* Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 1$, akkor az $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a^k+1}$ sorozat konvergens.

213.* Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemnegatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az $[\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}]$ sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét.

214. Egy egységnyi oldalú négyzetet 9 egybevágó négyzetre bontunk, ezek közül a középsőt beszínezzük. A második lépésben a megmaradó nyolc kis négyzet mindegyikét 9 egybevágó négyzetre bontjuk, majd mindegyikben a középsőt ismét beszínezzük. Az eljárást folytatjuk. Mekkora lesz az n-edik lépés után beszínezett részek területének összege? Jelöljük s_n-nel az n-edik lépés után fehéren maradó rész területét. Határozzuk meg $\lim_{n\to\infty} s_n$ értékét!

215.* Bizonyítsuk be, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata.

216.* Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$.

217.$^{\triangleright}$ Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1$.

218.$^{\triangleright}$ Számítsuk ki az $a_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ sorozat határértékét.

8. fejezet

Függvényhatárérték és folytonosság

Valós függvények és szemléltetésük

D 8.1 n-**változós valós függvényen** ($n \in \mathbf{N}^+$) olyan f függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya ($\mathrm{Dom}\, f$) az $\mathbf{R}^n$ halmaznak, értékkészlete ($\mathrm{Ran}\, f$) pedig az $\mathbf{R}$-nek valamely részhalmaza. Ha az n-et nem akarjuk hangsúlyozni, akkor röviden **valós függvényről**, speciálisan, ha $n = 1$, akkor **egyváltozós valós függvényről** beszélünk.

D 8.2 Az egyváltozós valós $x \mapsto f(x)$ $\quad (x \in \mathrm{Dom}\, f)$ függvényt síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $(x, f(x))$ koordinátájú pontok halmazával (az $y = f(x)$ egyenletű geometriai alakzattal) ábrázoljuk, ezt az alakzatot a **függvény grafikonjának** nevezzük.
A kétváltozós $(x, y) \mapsto f(x, y)$ $\quad ((x, y) \in \mathrm{Dom}\, f)$ valós függvény grafikonjának egyenlete: $z = f(x, y)$, amely térbeli derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolható. A grafikonnak az $x = a$ síkkal való metszete az $x = a$, $\quad z = f(a, y)$ egyenletrendszerű alakzat; x-**nívóvonal**. Ezt az x-nívóvonalat merőlegesen levetítve az yz-síkra, az $x = 0$, $\quad z = f(a, y)$ egyenletrendszerű görbét kapjuk. Hasonlóan származtathatók az y- és z-nívóvonalak, s ezek merőleges vetületei az xz- illetve xy-síkra.

D 8.3 Az egyetlen egyenlettel meghatározott függvényt **explicit alakban megadottnak**, röviden **explicitnek** nevezzük, ha a kiszámítandó függvényérték az egyenlet egyik oldalán magában áll, azaz n-változós függvény esetén $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\quad (x_k \in \mathbf{R},\quad k = 1, 2, \ldots, n)$ alakú. Minden más esetben a függvényt **implicit alakban megadottnak**, röviden **implicitnek** mondjuk.

Feladatok

1. Határozzuk meg az $f(-1), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{2\pi}{3}\right), f(4), f(6)$ helyettesítési értékeket, ha
$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} - 1, & \text{ha } -1 \le x < 0; \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \le x < \pi; \\ \frac{x}{x^2 - 2}, & \text{ha } \pi \le x \le 6. \end{cases}$$

2. Határozzuk meg az $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{8}), f(\sqrt{\log_2 1024})$ helyettesítési értékeket, ha
$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1, & \text{ha } x \le 2; \\ \frac{1}{x-2}, & \text{ha } 2 < x \le 3; \\ 2x - 5, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}$$

3. A 2 oldalú $ABCD$ négyzetet messük el az AC átlóra merőleges e egyenessel. Legyen az A csúcs és az e egyenes távolsága x. Írjuk fel az A csúcsot is tartalmazó lemetszett síkidom területét x függvényeként. Határozzuk meg a területet, ha $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ illetve $x = 2$.

4. Mivel egyenlő $f(2), f(-1), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f(2x), 2f(x), f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}, f(x^2), (f(x))^2$, ha $f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$?

Az 5. — 9. feladatokban adjuk meg azt az f függvényt, amely teljesíti a felírt egyenletet:

5. $f(x-2) = \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1,$

6. $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 1, \quad x \neq 0,$

7.▹ $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x, \quad x \neq -1,$

8.▹ $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^4+1}{x^2}, \quad x \neq 0,$

9.▹ $f(x^2) = 1 - |x|^3.$

10. Adott az $f(x) = \log_c \frac{1-x}{1+x}$ függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in (-1, 1)$, akkor $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

11.▹ Határozzuk meg az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ racionális egész függvény (polinom) együtthatóit, ha $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = 5$.

12.* Határozzuk meg az $f(x) = a + bc^x$ $(c > 0)$ függvényben az a, b, c paraméterek értékeit, ha $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$.

13.• Milyen a érték mellett lesz az $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + 2x}{2x-1}$ függvény az $x = \frac{1}{2}$ hely kivételével egyenlő egy másodfokú függvénnyel?

14. Milyen a és b értékeknél lesz az $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + 2b}{x^2 + x + 1}$ függvény elsőfokú?

Határozzuk meg az alábbi valós függvények értelmezési tartományát:

15. $\frac{x^2}{1+x}$,

16. $\sqrt{5-2x}$,

17.• $\sqrt[3]{\frac{2x}{x^2-2x+2}}$,

18.• $\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$,

19. $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$,

20. $\frac{|x|+10}{|x|-10}$,

21. $\lg(3x-4)$,

22. $\log_a(x^2-4)$,

23. $\log_2 \log_3 \log_4 x$,

24. $\log_a(x+2) + \log_a(x-2)$,

25.• $\lg \cos x$,

26. $\lg \frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$,

27.• $\sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$,

28.• $\lg \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(3x-8)}$,

29. $\lg(1 - \lg(x^2 - 5x + 16))$,

30. $\frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3 - x)$,

31. $\ln(\sin(\ln x))$,

32. $\ln \dfrac{1}{\ln(1-x)+1}$.

Határozzuk meg az f és $\dfrac{1}{f}$ valós függvények értelmezési tartományát, ha:

33. $f(x) = x^2 - x + 1$,
34. $f(x) = x + \sqrt{x+2}$,
35. $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$,
36. $f(x) = 5^x - 2^{x+1}$,
37. $f(x) = 3 - 2\cos x$,
38. $f(x) = 1 - \operatorname{ctg} x$.

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

39.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{1}{2-\cos 3x}$,
40.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,
41.$^\bullet$ $f(x) = \lg(1-2\cos x)$,
42.$^\bullet$ $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

Mi az értelmezési tartománya a következő függvényeknek, ha az f függvény értelmezési tartománya a $[0;1]$ intervallum?

43.$^\bullet$ $f(x-5)$,
44. $f(4x)$,
45. $f(-x)$,
46. $f(2x+1)$,
47.$^\triangleright$ $f(3x^2)$,
48.$^\bullet$ $f(\operatorname{tg} x)$.

Határozzuk meg az alábbi többváltozós valós f függvények értelmezési tartományát, valamint azt a geometriai alakzatot, amely az értelmezési tartományt a síkbeli, illetve térbeli derékszögű koordináta rendszerben ábrázolja:

49.$^\bullet$ $\sqrt{1-x^2-y^2}$,
50.$^\triangleright$ $\sqrt{x-\sqrt{y}}$,
51. $\ln(xy)$,
52. $\sqrt{x\sin y}$,
53.$^\triangleright$ $\sqrt{\ln(\sin x\cos y)}$,
54. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$,
55.$^\bullet$ $\ln(1-x^2-y^2-z^2)$,
56. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$,
57.$^\bullet$ $\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$,
58. $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$,
59.$^\triangleright$ $\dfrac{1}{\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-|x+y|}}$,
60. $\sqrt{\ln\cos\dfrac{2\pi x}{y}}$,
61.$^\triangleright$ $\sqrt{\sin\pi x\sin\pi y}$,
62.$^\bullet$ $\sqrt{z-x^2-y^2} + \sqrt{4-z-x^2-y^2}$,
63.$^\triangleright$ $\ln(x\ln(y-x))$,
64. $\ln(1-\operatorname{sgn}^2 xy)$,
65.$^\triangleright$ $\sqrt{-\sin^2\pi x} + \sqrt{-\sin^2\pi y}$,
66.$^\triangleright$ $\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2+c}{x^2-2x+y^2+c}}$, $\quad c \in \mathbf{R}$,
67. $\sqrt{r^2-x^2-y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-s^2}}$, $\quad r > s > 0$.

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

68.$^\bullet$ $f(x) = \sqrt{\sin x}$,
69.$^\triangleright$ $f(x) = x^{\frac{1}{\lg x}}$,

70.• $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } -\pi \le x \le 0; \\ 2, & \text{ha } 0 < x \le 1; \\ \frac{1}{x-1}, & \text{ha } 1 < x \le 4, \end{cases}$ **71.** $f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{ha } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0; \\ -2, & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$

72.* $\cos 3x \operatorname{sgn} \sin 2x$, **73.**▷ $f(x) = x + \sqrt{x^2}$,

74. $f(x) = \cos x + |\cos x|$, **75.** $f(x) = |x+2|x$,

76. $f(x) = 2|x-2| - |x+1| + x$.

77.• Milyen geometriai transzformációkkal származtathatók az $f(x)$ függvény grafikonjából az $f(x+a), f(x)+b, f(kx), lf(x), |f(x)|, f(|x|)$ $(a, b, k, l \in \mathbf{R} - \{0\})$ függvények grafikonjai, ha értelmezve vannak?

78.• Milyen geometriai transzformációkkal származtatható az $f(x)$ függvény grafikonjából az $lf(k(x+a)) + b$ függvény grafikonja, ha értelmezve van? Ezek segítségével ábrázoljuk a $\sqrt{x}$ függvényből kiindulva a $\frac{3}{2}\sqrt{-2x-4} - 1$ függvényt.

79.• Ábrázoljuk transzformációval az $\frac{1}{x}$ függvényből kiindulva a $\frac{2x+5}{x+1}$ függvényt.

80.* Ábrázoljuk transzformációval a $\cos x$ függvényből kiindulva a $3\cos x - \sqrt{3}\sin x$ függvényt.

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

81.• $|x^2 - 2x - 3|$, **82.**• $||x| - 1|$, **83.**• $\log_2 |x+2|$.

Nívóvonalakkal (vagy a függvény grafikonjára jellemző más síkmetszetekkel) szemléltessük az alábbi egyenletekkel megadott $(x, y) \mapsto z$ függvényeket:

84.• $z = x^2 + y^2$, **85.**▷ $z^2 = x^2 + y^2$, **86.**▷ $z = y^2 - x^2$,

87. $z = (x+y)^2$, **88.**▷ $z = x^2 + y$, **89.**▷ $z^2 = x^2 + y^2 - 1$,

90.▷ $z^2 = x^2 + y^2 + 1$.

Az alábbi $x \mapsto y$ egyváltozós valós függvényeket paraméteres egyenletrendszerrel adtuk meg. Küszöböljük ki a t paramétert!

91. $x = 3t, \quad y = 6t - t^2$, **92.**▷ $x = t^2 - 2t + 3, \quad y = t^2 - 2t + 1$,

93. $x = \cos t, \quad y = \sin 2t, \quad t \in [0, \pi]$, **94.**• $x = a\cos t, y = b\sin t \quad (a, b > 0)$,

95. $x = a\sin^3 t, y = a\cos^3 t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, **96.**• $x = \operatorname{tg} t, \quad y = \sin 2t + 2\cos 2t$,

97. $x = t^3 + 1, \quad y = t^2$, **98.** $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$,

99.* $x = a^t + a^{-t}, \quad y = a^t - a^{-t} \quad (a > 0)$.

Függvény határértéke

D 8.4 (**Heine**) Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** az x_0 helyen l, ha f értelmezve van x_0 valamely E környezetében, és minden olyan E-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Jelölés: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.
Az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen **végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál**, ha f értelmezve van x_0 valamely E környezetében, és minden olyan E-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ $(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty)$. Jelölés: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$.
Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** a végtelenben l, ha f értelmezve van a ∞ valamely E környezetében, és végtelenhez divergáló minden E-beli $[x_n]$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} f(x) = l$.
Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben a határérték, a végtelenben és a mínusz végtelenben végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez divergálás.

D 8.5 (**Cauchy**) Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** az x_0 helyen l, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha x benne van x_0-nak δ sugarú környezetében, azaz ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor az f függvény értelmezve van az x helyen és $f(x)$ benne van az l szám ε sugarú teljes környezetében, azaz $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen **végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál**, ha bármely pozitív (negatív) k számhoz van olyan pozitív δ, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x)$ értelmezve van és $f(x) > k$ $(f(x) < k)$.
Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** a végtelenben l, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív k szám, hogy ha $x > k$, akkor $f(x)$ értelmezve van és $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben a határérték, a végtelenben és a mínusz végtelenben végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez divergálás.

T 8.6 A függvényhatárérték Heine- és Cauchy-féle definíciója ekvivalens.

T 8.7

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad (\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0),$$

ha az egyenlőségek jobb oldalán álló határértékek léteznek.

Feladatok

A függvényhatárérték Heine- és Cauchy-féle definíciója (**D 8.4** és **D 8.5**) alapján bizonyítsuk be a következő állításokat:

100. $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$,

101. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$,

102. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+1}{3x+9} = \dfrac{5}{3}$, **103.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \infty$,

104. $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty (0 < a < 1)$, **105.•** $\lim\limits_{n\to 0} \sin\dfrac{\pi}{x}$ nem létezik.

106.• Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_{p-1}x + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_{q-1}x + b_q} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p < q; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ \infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} > 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} < 0; \end{cases}$$

ahol $p, q \in \mathbf{N}; a_i, b_j \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, p;\quad j = 0, 1, \ldots, q)$ és $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

107.• Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p < q; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ \infty, & \text{ha } p > q, p-q = 2k+2, \frac{a_0}{b_0} > 0; \\ \infty, & \text{ha } p > q, p-q = 2k+1, \frac{a_0}{b_0} < 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q, p-q = 2k+2, \frac{a_0}{b_0} < 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q, p-q = 2k+1, \frac{a_0}{b_0} > 0; \end{cases}$$

ahol $k, p, q \in \mathbf{N}; a_i, b_j \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, p;\quad j = 0, 1, \ldots, q)$ és $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

Az x megfelelő hatványával egyszerűsítve határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket:

108.• $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-2}$, **109.•** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2}$,

110.• $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4x^3+x^2-1}{x^2+x-1}$, **111.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$,

112.• $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$, **113.•** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x\right)$,

114.▷ $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{2x+1} + \dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$, **115.*** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+2)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket (ha szükséges, akkor az $x - x_0$ tényezővel való egyszerűsítés útján):

116.• $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$, **117.•** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$,

118.• $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$, **119.▷** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7+5x^6+x^3}{x^7+2x^3}$,

120.▷ $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3} + \dfrac{1}{x-1}\right)$, **121.*** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^p-1}{x^q-1}$ $(p, q \in \mathbf{N}^+)$,

122. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2}{2x-x^2} + \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$, **123.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-1-5x}{x^2+x^5}$.

Számítsuk ki az alábbi, végtelenbeli függvényhatárértékeket az x alkalmas hatványával való egyszerűsítése útján:

124.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$, **125.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$,

126.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, **127.**$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

Vegyes feladatok

128.* $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. **129.**$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket a $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$, illetve a $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}=\dfrac{a\pm b}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ azonosságok alapján:

130.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$, **131.**$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$,

132.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$, **133.**$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$,

134.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$, **135.*** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

136.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, **137.**$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$,

138.* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$, **139.*** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$,

140.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$, **141.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+c)(x+d)}-x\right)$,

142.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}$, **143.**$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$.

Az alábbi feladatokban szereplő kifejezéseket ismert trigonometriai azonosságok alkalmazásával olyan alakra hozhatjuk, hogy a felírt függvényhatárértéket közvetlenül leolvashatjuk. Végezzük el a átalakítást, és írjuk fel a határértéket!

144.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3x}$, **145.**$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$,

146.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$, **147.**$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left|\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}\right|$,

148.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$,

149.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x}$,

150.▷ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$,

151.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$.

Felhasználva a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ határértéket, vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi határértékek; ha igen, számítsuk ki azokat!

152.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$,

153.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$,

154.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}\quad(\beta\neq 0)$,

155.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$,

156.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$,

157.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$,

158.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

159.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{\sin^2 x}$,

160.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$,

161. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$,

162.▷ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$,

163.▷ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$,

164.▷ $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$,

165.▷ $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (a **7.164** — **7.166** feladatok és a függvényhatárérték Heine-féle definíciója (**D 8.4**) alapján):

166.• $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$,

167.• $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$,

168.• $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{1+2x}$,

169.* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3-1}\right)^{\frac{x^3}{2}}$,

170. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$,

171.▷ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x$,

172.▷ $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

173.• Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=a>0$ és $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=a^b$. (Megjegyezzük, hogy az x_0 a ∞-t vagy $-\infty$-t is jelentheti.)

174.• Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to x_0}|g(x)|=\infty \quad\text{és}\ \lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)=b,$$

akkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^b$. (Az előző feladathoz hasonlóan az x_0 itt ∞ vagy $-\infty$ is lehet.)

A **173.** és a **174.** feladatok alapján számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

175.* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$, 176. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}}$,

177.$^{\triangleright}$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$, 178.* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

179. $\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$, 180.* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$,

181.* $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$, 182.* $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$.

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

183.* $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$, 184.* $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$,

185.$^{\triangleright}$ $\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$,

186.$^{\triangleright}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$,

187.$^{\triangleright}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}$, 188.$^{\triangleright}$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2}$,

189.$^{\triangleright}$ $\lim_{x\to 0}\left(\cos^3 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$, 190.$^{\triangleright}$ $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(a\neq k\pi, k\in\mathbf{Z})$,

191. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{k(x)}\neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{k(x)},$$

$(\alpha\in\mathbf{R})$ (ahol x_0 jelentheti a ∞-t vagy a $-\infty$-t is).

Egyoldali függvényhatárérték

D 8.8 A v valós szám δ hosszúságú **bal oldali környezetén** a $(v-\delta; v)$, δ hosszúságú **jobb oldali környezetén** a $(v; v+\delta)$ intervallumot értjük.

D 8.9 Az egyváltozós valós f függvény **bal oldali határértéke** az x_0 helyen b, ha f értelmezve van x_0 valamely B bal oldali környezetében és minden olyan B-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b$; vagy, ami ezzel ekvivalens, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha x benne van x_0-nak δ hosszúságú bal oldali környezetében, azaz,ha $x_0-\delta<x<x_0$, akkor f értelmezve van az x helyen, és $f(x)$ benne van b-nek ε sugarú teljes környezetében, azaz $|f(x)-b|<\varepsilon$. (Jelölés: $\lim_{x\to x_0-0}f(x)=b$; ha $x_0=0$, akkor egyszerűen $\lim_{x\to -0}f(x)=b$.) Hasonlóan definiálható az x_0 helyen a **jobb oldali határérték** ($\lim_{x\to x_0+0}f(x)$, $\lim_{x\to +0}f(x)$), a **balról (jobbról) végtelenhez divergálás**.

T 8.10 Egyváltozós valós függvénynek valamely helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha ezen a helyen bal oldali és jobb oldali határértéke is létezik, és a két egyoldali határérték egyenlő; ebben az esetben a határérték az egyoldali határértékekkel egyenlő.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi egyváltozós valós függvények bal- és jobb oldali határértékét a megadott x_0 helyen:

192. $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{ha } x \le 1; \\ 3x-5, & \text{ha } 1 < x; \end{cases} \quad x_0 = 1,$

193.* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}; \quad x_0 = 1,$

194.* $f(x) = 3 + \dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}; \quad x_0 = 1,$

195.* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}; \quad x_0 = 0,$

196.* $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}; \quad x_0 = 0,$

197. $f(x) = \dfrac{5}{(x-2)^3}; \quad x_0 = 2,$

198. $f(x) = \dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}; x_0 = 1.$

Függvények folytonossága

D 8.11 Az egyváltozós valós f függvényt **folytonosnak** nevezzük az x_0 helyen (pontban), ha f értelmezve van az x_0 helyen, van határértéke az x_0 helyen és $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Hasonlóan értelmezhető az f függvény bal oldali, illetve jobb oldali folytonossága. (A definícióban határérték helyett bal oldali, illetve jobb oldali határértéket veszünk.)

T 8.12 Adott pontban folytonos függvények összege, különbsége és szorzata is folytonos ebben a pontban; két ilyen függvény hányadosa is folytonos, ha az osztó nem zérus az adott pontban.

D 8.13 Ha az f függvény az x_0 helyen (pontban) folytonos, akkor azt is szokás mondani, hogy x_0 az f **folytonossági helye**. Ha viszont az f függvény az x_0 helyen nem folytonos, de az x_0 valamely környezetének minden pontjában folytonos, akkor az x_0-t f **szakadási helyének** nevezzük.
A szakadási helyek típusai:
x_0 **hézagpont**, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ létezik, de az x_0 helyen a függvény nincs értelmezve;
az x_0 pontban **megszüntethető szakadása** van f-nek, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ létezik, $f(x_0)$ is létezik, de $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;
az x_0 pontban **lényeges szingularitása** van, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nem létezik. A lényeges szingularitás fontos speciális esete a pólus: Akkor mondjuk, hogy az x_0 helyen **pólusa** van a függvénynek, ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$.

Feladatok

Vizsgáljuk meg, hogy hol folytonosak az alábbi függvények. Ha a függvényeknek szakadási helyeik vannak, akkor állapítsuk meg azok típusát:

199.• $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$,

200. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$,

201. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x+7}$,

202. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$,

203.• $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$,

204. $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$,

205.• $f(x) = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$,

206. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \le 1; \\ \frac{2}{x-1}, & \text{ha } 1 < x, \end{cases}$

207.• $f(x) = \dfrac{5x^2-3x}{2x}$,

208. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

209.• $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$,

210.• $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$,

211.▷ $f(x) = \operatorname{Ent} 2x - 2x + 2$,

212.• $\operatorname{sgn}|x^4+x^2|$,

213.▷ $\operatorname{sgn}|\sin x|$,

214. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{ha } x \le 0; \\ (1-x)^2, & \text{ha } 0 < x \le 2; \\ 3-x, & \text{ha } 2 < 2, \end{cases}$

215.▷ $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{ha } x \ne 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$

216.* $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}; \\ 4-2x, & \text{ha } x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}, \end{cases}$

217.▷ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & \text{ha } x \ne 2k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z})$.

Határozzuk meg — ha lehetséges — az a és b paraméterek értékét úgy, hogy a következő függvények mindenütt folytonosak legyenek:

218.• $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \ne 0; \\ a, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$

219. $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & \text{ha } x \ne -1; \\ a, & \text{ha } x = -1, \end{cases}$

220.• $f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & \text{ha } 0 < x; \\ -x, & \text{ha } x \le 0, \end{cases}$

221. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x \le 0; \\ a(x-1), & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$

222.• $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{ha } x \le 0; \\ ax+b, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \le x, \end{cases}$

223. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \le 1; \\ x^2+ax+b, & \text{ha } 1 < |x|, \end{cases}$

224.• $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{ha } |x| \ne 1; \\ a, & \text{ha } x = -1; \\ b, & \text{ha } x = 1, \end{cases}$

225.• $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x}, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], x \ne 0, x \ne \pi; \\ a, & \text{ha } x = 0; \\ b, & \text{ha } x = \pi. \end{cases}$

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények szakadási helyeiken folytonosak-e balról vagy jobbról:

226.* $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } |x| \le 1; \\ 0, & \text{ha } |x| > 1, \end{cases}$ 227.* $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x-1}, & \text{ha } x \ne 1; \\ a(\in \mathbf{R}), & \text{ha } x = 1, \end{cases}$

228. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} + x, & \text{ha } x \ne 0; \\ 1, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$ 229.* $(-1)^{\mathrm{Ent}(x^2-1)}$,

230.* $f(x) = \ln x - \mathrm{Ent}(\ln x)$,

231.* $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \le 0; \\ 2 - \frac{2}{2x-1} - \mathrm{Ent}\left(2 - \frac{2}{2x-1}\right), & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$

Függvénygörbe aszimptotája

D 8.14 Az e egyenest a végtelenbe nyúló g görbe **aszimptotájának** nevezzük, ha a g görbén végtelenbe távolodó pontnak az e egyenestől való távolsága 0-hoz konvergál. Az f egyváltozós valós függvény görbéjének (grafikonjának) aszimptotáját szokás egyszerűen az f **függvény aszimptotájának** nevezni.

T 8.15 Az $y = f(x)$ egyenletű görbének az y tengellyel párhuzamos aszimptotája, azaz **függőleges aszimptotája** csak olyan x_0 helyen lehet, ahol az f függvény legalább egy oldalról végtelenhez vagy mínusz végtelenhez divergál, és ez esetben az $x = x_0$ egyenletű egyenes az aszimptota.

T 8.16 Az $y = f(x)$ egyenletű görbének akkor és csak akkor van az y tengellyel nem párhuzamos, azaz **ferde aszimptotája**, ha az $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ és $c = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$ vagy pedig $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ és $c = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx)$ határértékek léteznek. Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor az $y = mx + c$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota ∞-ben, illetve $-\infty$-ben. (Speciálisan, ha $m = 0$, akkor **vízszintes aszimptotáról** beszélünk.)

Feladatok

Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát! Vizsgáljuk meg folytonosságukat, és határozzuk meg aszimptotáik egyenletét:

232.* $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 233. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$,

234.* $f(x) = \sqrt{x^4 - 1}$, 235.* $f(x) = \dfrac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$,

236.* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, 237.* $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$,

238.* $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$, 239.* $f(x) = 3\sqrt{\dfrac{x^2}{4} - 1}$,

240. $f(x) = \sqrt[3]{(2-x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)^2}$, 241. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$,

242.* $f(x)=\dfrac{x^4-2a^2x^2+a^4}{x^3-3bx^2+2b^2x}\quad (a,b\neq 0)$,

243. $f(x)=\begin{cases} x+\frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x\neq 0;\\ 0, & \text{ha } x=0,\end{cases}$

244.* $f(x)=\dfrac{x-\operatorname{Ent}x}{\operatorname{Ent}x};\ x_0=n(n\in \mathbf{Z})$,

245.* $f(x)=\dfrac{\operatorname{Ent}x^3}{x^2+1}$,

246. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\cdots+a_{p-1}x+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+b_2x^{q-2}+\cdots+b_{q-1}x+b_q}$$

($a_0\neq 0,\quad b_0\neq 0,\quad p\in\mathbf{N},\quad q\in\mathbf{N}^+$) függvénynek a $p\le q+1$ feltétel mellett van ferde aszimptotája, s ebben az esetben a ferde aszimptota egyenlete:

$$y=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}x+\frac{b_0a_1-a_0b_1}{b_0^2}, & \text{ha } p=q+1;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p=q;\\ 0, & \text{ha } p<q.\end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi implicit alakban megadott $x\mapsto y=y(x)$ függvények ferde aszimptotáinak egyenletét:

247.* $(2x+y)^2(x+y)=x$,

248.* $y^3-x^3+y-2x=0$,

249.* $(x^2-y^2)^2=2x\quad (x\ge 0)$,

250. $x^3+y^3=3x^2$,

251.* $x^4-2x^2=y^3(x-1)$,

252.* $x^2y^2+y^4=4x^2$.

Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvények

D 8.17 A valós (komplex) értékű f függvényt **korlátos**nak nevezzük, ha van olyan v valós szám, hogy $|f(P)|\le v$ a $\operatorname{Dom} f$ minden P elemére érvényes. Ha ez a feltétel csak az értelmezési tartomány valamely H részhalmazának P pontjaira teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f a H **halmazon korlátos**. Megfelelő módon definiálható valós függvény alulról illetve felülről korlátossága.

D 8.18 Az M_1 metrikus térből az M_2 metrikus térbe vivő függvényt a $H(\subseteq M_1)$ **halmazon folytonos**nak nevezzük, ha f a H minden belső pontjában folytonos, továbbá a H-nak minden olyan P határpontjára, amely H-hoz tartozik, teljesül az, hogy ha $[P_n]$ olyan H-beli sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty}P_n=P$, akkor $\lim_{n\to\infty}f(P_n)=f(P)$.
Ez azt jelenti, hogy egyváltozós valós függvény valamely $[a,b]$ zárt intervallumon akkor és csak akkor folytonos, ha az (a,b) nyílt intervallum minden pontjában folytonos, a-ban jobb oldalról, b-ben pedig bal oldalról folytonos.

T 8.19 Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvény korlátos is ezen a halmazon.

T 8.20 Legyen H az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér korlátos zárt részhalmaza. Ha f a H halmazon folytonos valós függvény akkor vannak olyan $P_1, P_2 \in H$, hogy $f(P_1) = \inf\{f(P); P \in H\}$, $f(P_2) = \sup\{f(P_0); P \in H\}$, azaz az f a H-n felvett értékei halmazának infimumát és szuprémumát is felveszi a H bizonyos pontjaiban.

T 8.21 Legyen az egyváltozós valós f függvény folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon. Legyenek továbbá $x_1, x_2 \in [a,b]$ tetszőleges olyan pontok, amelyekre $f(x_1) \le f(x_2)$. Ha $f(x_1) \le c \le f(x_2)$ $(c \in \mathbf{R})$, akkor van olyan $x_0 \in [x_1, x_2]$ (vagy $x_0 \in [x_2, x_1]$), hogy $f(x_0) = c$.

T 8.22 (**Bolzano**) Ha az egyváltozós valós f függvény az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos és az intervallum két végpontjában ellentétes előjelű, akkor az intervallum belsejében van zérushelye.

Feladatok

253.• Van-e valós megoldása a $\sin x - x + 1 = 0$ egyenletnek?

254.▷ Van-e megoldása az $x^5 - 18x + 2 = 0$ egyenletnek a $[-1,1]$ intervallumban?

255.▷ Bizonyítsuk be, hogy az $a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$ $(a_i \in \mathbf{R},\ i = 0,1,\ldots,2n+1,\ a_0 \ne 0)$ egyenletnek van legalább egy valós gyöke.

256.• Felveszi-e az $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ függvény a $\frac{7}{3}$ értéket a $[-2,2]$ intervallumban?

257.▷ Legyen f a $[0,1]$ zárt intervallumon folytonos függvény és $\operatorname{Ran} f \subseteq [0,1]$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c \in [0,1]$, hogy $f(c) = c$.

258.* Feszítsünk ki egy rugalmas szalagot a $[0;1]$ zárt intervallumon úgy, hogy a szalag kezdőpontja 0, a végpontja 1 legyen. Mozgassuk a szalag két végét egyszerre úgy, hogy egy adott időpillanatban a kezdőpontja a, a végpontja pedig b legyen $(0 \le a < b \le 1)$. Mutassuk meg, hogy van a szalagnak olyan pontja, amely helyben marad.

259.* Legyen f a $[0,1]$ zárt intervallumon folytonos függvény, és legyen $f(0) = f(1) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $d \in (0,1]$ valós számhoz megadható a függvény grafikonjának olyan húrja, amely d hosszúságú.

260.▷ Bizonyítsuk be, hogy egy elhanyagolható vastagságú, körgyűrű alakú elektromos vezetőn van két olyan pont, amely ugyanolyan hőmérsékletű.

9. fejezet

Differenciálhányados, derivált

A differenciálhányados definíciója

D 9.1 Az egyváltozós valós f függvény x_0 pontbeli **differenciálhányadosának** nevezzük a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

határértéket, ha ez létezik. Ekkor azt mondjuk, hogy f az x_0 **pontban differenciálható**. E határértéket szokás

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

alakban is írni, ahol $x=x_0+h$. E definícióval ekvivalens az alábbi:

D 9.2 Azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 **pontban differenciálható**, ha megadható olyan valós szám — amelyet $f'(x_0)$-lal jelölünk — és x_0-nak olyan E teljes környezete, hogy ha $x\in E$, akkor f értelmezve van az x helyen, és

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0),$$

ahol $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

D 9.3 Az f függvény differenciálható a $H\subseteq \operatorname{Dom} f$ halmazon, ha annak minden pontjában differenciálható.

D 9.4 Az f függvény **deriváltjának** vagy differenciálhányados-függvényének nevezzük, és f'-vel jelöljük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya az összes olyan x_0 pontok halmaza, ahol f differenciálható, értéke pedig minden ilyen pontban az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosa. Szokásos jelölések $f'(x_0)$-ra:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0},\quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0},\quad Df(x_0),\quad \frac{d}{dx}f(x_0),\quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

T 9.5 Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor folytonos is x_0-ban.

D 9.6 Ha a többváltozós valós f függvény mindegyik változóját rögzítjük, kivéve az i-ediket, akkor az így kapott egyváltozós valós függvény differenciálhányadosát az f függvény i-edik változója szerinti **parciális differenciálhányadosának** nevezzük. Például a kétváltozós f függvény (x_0,y_0) pontbeli x szerinti parciális differenciálhányadosán a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

határértéket értjük, melynek szokásos jelölései:

$$f'_x(x_0, y_0),\ f_x(x_0, y_0),\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\binom{x=x_0}{y=y_0}},\ D_x f(x_0, y_0),\ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

Az $(x, y) \to f(x, y)$ függvény x szerinti **parciális deriváltján** azt a kétváltozós függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya az összes olyan (x_0, y_0) pontokból áll, ahol az f függvény x szerinti parciális differenciálhányadosa létezik, értéke pedig minden ilyen pontban ezzel a parciális differenciálhányadossal egyenlő.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az $x_0 = 2$ pontban a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

határérték segítségével:

1.ᐅ $f(x) = 4$, 2.ᐅ $f(x) = 4x + 2$,
3. $f(x) = 2x^3 - 1$, 4. $f(x) = \sqrt{x-1}$,
5. $f(x) = x^{-2}$, 6.• $f(x) = \sin x$.

Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az x_0 pontban a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

határérték segítségével:

7.ᐅ $f(x) = x^3$, 8.ᐅ $f(x) = \sqrt{x}$,
9.• $f(x) = \sin x$, 10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,
11. $f(x) = \cos x$, 12. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Bizonyítsuk be, hogy

13.ᐅ $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^+$, 14.ᐅ $(x^{\frac{1}{m}})' = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$, $x > 0$, $m \in \mathbb{N}^+$.

Határozzuk meg az alábbi f függvények x_0 pontbeli differenciálhányadosát a törtmentes alak (**D 9.2**) segítségével:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(x)\Delta x,$$

ahol $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $\varepsilon(x) \to 0$ ha $x \to x_0$. (Ellenőrizzük, hogy $\varepsilon(x) \to 0$ valóban fennáll!)

15.ᐅ $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, 16. $f(x) = x^3 + x$,
17.• $f(x) = \sin x$, $[f'(x_0) = \cos x_0]$, 18. $f(x) = \cos x$, $[f'(x_0) = -\sin x_0]$.

19.ᐅ Legyen $h(x)$ folytonos az x_0 helyen. Határozzuk meg $f'(x_0)$ értékét, ha

$$f(x) = (x - x_0)h(x),$$

és mutassuk meg, hogy a $g(x) = |x - x_0|h(x)$ függvény csak akkor differenciálható x_0-ban, ha $h(x_0) = 0$.

20.[▹] A **D 9.1** definíció felhasználásával mutassuk meg, hogy ha $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$ és $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén $f(x) = f(-x)$, akkor $f'(x) = -f'(-x)$, ha pedig $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén $f(x) = -f(-x)$, akkor $f'(x) = f'(-x)$. (Páros függvény deriváltja páratlan, páratlané páros.)

21. Tegyük fel, hogy f differenciálható az a pontban. Fejezzük ki a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

kifejezést $f'(a)$ segítségével.

22.[•] Tegyük fel, hogy f differenciálható az a pontban, és

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{ha } x \neq a \\ f'(a) & \text{ha } x = a. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy g folytonos a-ban.

Adjunk példát olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre, mely mindenütt értelmezve van és amely kielégíti az alábbi feltételt:

23. f mindenütt folytonos, de az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható;

24. f mindenütt differenciálható, de az $x_0 = 1$ pontban nem folytonos;

25. f mindenütt differenciálható, és deriváltja mindenütt folytonos;

26. f mindenütt differenciálható, de deriváltja az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

A **D 9.6** definíció alapján határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait és azok értékét a megadott P pontban:

27.[▹] $f : (x, y) \mapsto xy$, $P(1, 2)$, 28. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, $P(0, 0)$,

29. $f(x, y) = 4x + 2y - 1$, $P(1, 1)$, 30.[▹] $f(x, y, z) = xyz$, $P(1, 2, 3)$,

31. $f : (x, y, z) \mapsto 3x - 4y + 2z - 6$, $P(0, 0, 0)$,

32. $f : (x, y, z) \mapsto 0$, $P(1, 1, 1)$.

33.[▹] Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Határozzuk meg a értékét úgy, hogy f mindkét parciális differenciálhányadosa létezzék a $(0, 0)$ pontban, és számítsuk ki ezeket a parciális differenciálhányadosokat.

Differenciálási szabályok

T 9.7 Konstans függvény deriváltja az azonosan 0 függvény. Két differenciálható függvény összege, különbsége, szorzata ugyancsak differenciálható, két differenciálható függvény hányadosa, ill. differenciálható függvény reciproka minden olyan helyen differenciálható, ahol a nevező nem 0. Ha f és g két differenciálható függvény és $c \in \mathbf{R}$, akkor

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf', \quad (fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}, \quad (f^n)' = nf^{n-1}f' \ (n \in \mathbf{Z}).$$

T 9.8 $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$

T 9.9 $(x^q)' = qx^{q-1}$, ha q racionális szám, $x > 0$. (l. **34.** feladat).

D 9.10 Az f külső és g belső függvényből összetett $f \circ g$ függvényen azt a függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya g értelmezési tartományának azon x_0 pontjaiból áll, melyekre $g(x_0)$ benne van f értelmezési tartományában, azaz

$$\operatorname{Dom} f \circ g = \{x_0 \in \operatorname{Dom} g; g(x_0) \in \operatorname{Dom} f\},$$

és amelyre $x_0 \in \operatorname{Dom} f \circ g$ esetén $(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0))$.

T 9.11 Ha g folytonos x_0-ban, f folytonos a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ folytonos x_0-ban.

T 9.12 Ha a $g : x \mapsto g(x)$ függvény differenciálható x_0-ban, az $f : u \mapsto f(u)$ függvény pedig az $u_0 = g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható x_0-ban, és

$$\left(\frac{d(f \circ g)}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df}{du}\right)_{u=g(x_0)} \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

Tehát minden ilyen x_0 pontban: $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Feladatok

34.^{P} Bizonyítsuk be a **T 9.9** tételt a **T 9.7**-beli szabályok és a **14.** feladat eredményének felhasználásával.

35.$^\bullet$ Számítsuk ki az $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ függvény deriváltját, ha $m, n \in \mathbf{N}^+$, m páratlan és $x \in \mathbf{R}$.

Deriváljuk az alábbi függvényeket a **T 9.7-9**-beli szabályok felhasználásával.

36. $x^2 - 2x + 3$,	**37.** $7 - x - x^3$,	**38.** $2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}}$,
39. $2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2x}$,	**40.** $\frac{1}{x} + \sqrt{x^5}$,	**41.** $(x+2)\sqrt{x^3}$,
42. $x \sin x$,	**43.** $(x^3+1)\cos x$,	**44.** $\frac{\sin x}{x}$,

45. $\operatorname{tg} x$, 46. $\operatorname{ctg} x$, 47. $\dfrac{\sin x + 1}{\cos x - 1}$,

48. $\dfrac{x-1}{x^2}$, 49. $\dfrac{x^3+4}{1+2x}$, 50. $(x+3)^4$,

51. $(1-x)^{20}$, 52. $(x^2+1)^4$, 53. $(1-x^2)^{10}$,

54. $(7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^6$, 55. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$, 56. $\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^5$,

57. $(\sin x + 1)^{20}$, 58. $(\sin^{20} x + 1)^{20}$, 59. $\operatorname{tg}^n x$, $n \in \mathbf{N}^+$,

60. $\operatorname{ctg}^5 x$.

Legyen f differenciálható függvény. Írjuk fel f'-vel kifejezve az alábbi függvények deriváltját:

61. $f(-x)$, 62. $f(x^2)$, 63. $f(ax)$,

64. $f(1/x)$, 65. $f(\sin^2 x)$, 66. $f(\sqrt{1-x^2})$.

Határozzuk meg az alábbi függvény deriváltját:

67. $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$, 68. $F(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

69. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

Állapítsuk meg, hogy mely függvények összetételéből származnak az alábbi függvények, majd számítsuk ki a deriváltjukat:

70. $f(x) = \sin^3 x$, 71. $f(x) = \sin x^3$, 72. $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x)$,

73. $f(x) = \sin^2(\operatorname{tg} x)$, 74. $f(x) = \sin(\operatorname{tg}^2 x)$, 75. $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x^2)$.

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjának értelmezési tartományát! Vegyük észre, hogy ez egyik esetben sem egyezik meg a függvény értelmezési tartományával!

76. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 77. $f(t) = \sqrt{1-a^2t^2}$, $a \neq 0$,

78. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, 79. $f(v) = (3v + 18v^2)^{\frac{1}{3}}$,

80. $f(x) = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{-\frac{2}{3}}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, és $ac \neq 0$,

81. $g(t) = \sqrt{1 + \sin t}$.

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltjait.

82. $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^3$, 83. $g(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$,

84. $\rho(\varphi, \psi) = \sin\varphi \cos\psi$, 85. $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$,

86. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, 87. $f(x,y,z) = x\sin(xyz)$,

88. $g(x,y) = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$, **89.** $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

90. $h(x,y) = f^2(x)g(y)$, **91.** $h(x,y,z) = f^2(x,y)g^3(y,z)$,

92. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$, **93.** $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1x_2\dots x_n$,

94. $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, $(a_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,\dots,n)$.

Határozzuk meg $f_x(0,0)$ és $f_y(0,0)$ értékét, ha

95. $f(x,y) = \sqrt[3]{(x+1)(y-1)}$, **96.*** $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$,

97. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, **98.** $f(x,y) = \sqrt{|x|}$.

99.* Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható minden $x \in \mathbf{R}$ pontban, de a derivált nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

100. Mutassuk meg, hogy az $x_0 = 0$ pont tetszőleges környezetében található olyan hely, ahol az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin \frac{1}{x}|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény nem differenciálható, de a 0-ban mégis differenciálható.

A mértani sorozat összegképletéből, azaz az

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

képletből vezessünk le formulát az alábbi két összegre:

101.* $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$, **102.*** $1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$.

103.* A $2\sin x \cos kx = \sin(k+1)x - \sin(k-1)x$ azonosság felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x} \quad (x \neq k\pi),$$

és ennek segítségével számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\sin x + 3\sin 3x + \dots + (2n-1)\sin(2n-1)x.$$

Számítsuk ki az alábbi magasabb rendű deriváltakat:

104. $(\sin(3x+1))^{(4)}$, **105.** $(\cos(4-2x))^{(7)}$,

106. $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(5)}$, **107.** $\left(\sqrt{x}\right)^{(10)}$

Számítsuk ki az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait:

108. $f(x,y) = x^4 + xy^3$, **109.** $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$,

110. $f(x,y) = \sin x^2 y$, **111.** $f(x,y) = \dfrac{\cos x^2}{y}$,

112. $f(x,y,z) = (x + y^2 + z^3)^2$.

Számítsuk ki az alábbi függvények megadott magasabbrendű parciális deriváltjait:

113. $g(x,y) = x^3 \sin y + y^3 \sin x$, $\dfrac{\partial^6 g}{\partial x^3 \partial y^3}$,

114. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$,

115. $f(x,y) = (x - x_0)^n (y - y_0)^m$, $\dfrac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}$ $(m, n \in \mathbf{N})$,

116.* $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ $(m, n \in \mathbf{N},\ m + n > 0)$.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $c, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ konstansok esetén az alábbi függvények kielégítik a megadott egyenleteket:

117.$^{\triangleright}$ $y(x) = cx^2$, $y'(x)x - 2y(x) = 0$ $(x \in \mathbf{R})$,

118. $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $y'' + y = 0$ $(x \in \mathbf{R})$,

119. $y(x) = c_1 x + \dfrac{c_2}{x}$, $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$ $(x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$,

120. $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (**Laplace egyenlet**),

121. $f(x,t) = (c_1 x + c_2)(c_3 t + c_4)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (**hullámegyenlet**),

122. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket $(m, n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{R})$!

123.$^{\triangleright}$ $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$ $(m \geq n)$,

124. $(x^n)^{(n)} = n!$, **125.**$^{\triangleright}$ $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$,

126.$^{\triangleright}$ $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$, **127.** $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + \dfrac{n\pi}{2})$.

Alkalmas átalakítás után, az előző feladatok eredményeit felhasználva számítsuk ki az alábbi függvények n-edik deriváltját:

128.$^{\bullet}$ $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, **129.** $\sin x \cos x$,

130.* $\sin 3x \cos 2x$, **131.*** $\cos ax \cos bx$,

132. $\dfrac{x}{x^2 - 1}$, $|x| \neq 1$, **133.** $\dfrac{2x+1}{x^2 + x - 2}$, $x \neq -2$, $x \neq 1$.

134. Határozzuk meg az $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ függvény n-edik deriváltját! Ehhez bizonyítsuk be és használjuk fel, hogy $c \neq 0$ esetén $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c}(cx+d)^{-1}$.

135.▷ **Leibniz formula:** Ha f és g n-szer differenciálható függvények, akkor fg is:

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \cdots + \binom{n}{n} f g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Az előző feladatbeli Leibniz-formulát felhasználva határozzuk meg az alábbi deriváltakat:

136.▷ $(x^2 \sin x)''$,

137. $(x \sin x)^{(25)}$,

138. $(x^2 \sin x)^{(25)}$,

139. $(\sin 2x \cos(x+1))'''$.

Számítsuk ki az alábbi f függvények összes magasabb rendű deriváltját, és azok értékét az $x = 0$ pontban:

140. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$,

141.• $f(x) = x|x|$,

142. $f(x) = \sin x$,

143. $f(x) = \cos x$.

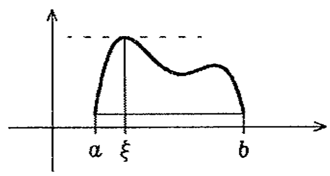
144.▷ Mutassuk meg, hogy az $f_1(x) = x^{\frac{4}{3}}$ függvény differenciálható 0-ban, de kétszer nem, az $f_2(x) = x^{\frac{7}{3}}$ függvény kétszer differenciálható 0-ban, de háromszor nem. Keressünk olyan k számot, hogy az $f_3(x) = x^k$ függvény $(n-1)$-szer legyen differenciálható 0-ban, de ne legyen differenciálható n-szer.

A differenciálszámítás középértéktételei

T 9.13 (**Rolle**-féle középértéktétel)
Ha az egyváltozós valós f függvény
1. folytonos az $[a, b]$ intervallumon,
2. differenciálható az (a, b) intervallumon,
3. $f(a) = f(b)$,

akkor van legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, ahol

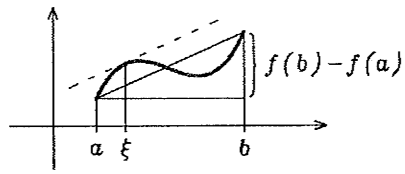
$$f'(c) = 0.$$



T 9.14 (**Lagrange**-féle középértéktétel)
Ha az egyváltozós valós f függvény
1. folytonos az $[a, b]$ intervallumon,
2. differenciálható az (a, b) intervallumon,

akkor van legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, ahol

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



T 9.15 (**Cauchy**-féle középértéktétel)
Ha az egyváltozós valós f és g függvények
1. folytonosak az $[a, b]$ intervallumon,
2. differenciálhatóak az (a, b) intervallumon,
3. és $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$,

akkor van legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, ahol $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Feladatok

Eleget tesznek-e az alábbi függvények a Rolle-tétel feltételeinek az adott intervallumon? Ha igen, adjunk meg egy c értéket, ahol $f'(c) = 0$.

145. $f(x) = 1 - |x|, \quad [-1, 1]$,
146. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, \quad [-1, 1]$,
147. $f(x) = \sin x, \quad [0, \pi]$,
148. $f(x) = |\sin x|, \quad [0, 2\pi]$.

Ellenőrizzük a Lagrange-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon:

149.$^{\triangleright}$ $f(x) = 3x^2 - 5, \ [-2, 0]$,
150. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \ [-1, 1]$,
151.* $f(x) = \sqrt[3]{x}, \ [-1, 8]$,
152. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \ [-1, 8]$.

Ellenőrizzük a Cauchy-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon:

153.$^{\triangleright}$ $f(x) = x^2 - 2x + 3, \ g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5, \ [1, 4]$,
154. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \ g(x) = x, \ [-1, 8]$,
155. $f(x) = x^2, \ g(x) = x^3, \ [-1, 1]$.

A Rolle-tétel segítségével bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

156.$^{\triangleright}$ a $3x^5 + 15x - 2 = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van;

157.$^{\triangleright}$ az
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$
függvény deriváltjának végtelen sok zérushelye van a $(0, 1)$ intervallumban;

158.$^{\triangleright}$ a $c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1} = 0$, $(c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R})$ egyenletnek van gyöke a $(0, 1)$ intervallumban, ha $c_1 + \dfrac{c_2}{2} + \cdots + \dfrac{c_n}{n} = 0$.

A Lagrange-féle középértéktétel segítségével bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:

159.$^{\triangleright}$ $|\sin x - \sin y| \le |x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}$,

160.$^{\triangleright}$ $|\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| \ge |x + y|, \quad x, y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$,

161.$^{\triangleright}$ $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}, \quad x, y > 0, \ x \ne y$.

162.* Tegyük fel, hogy f értelmezve van és differenciálható minden $x > 0$ esetén, és hogy $f'(x) \to 0$, ha $x \to \infty$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x+1) - f(x) \to 0$, ha $x \to \infty$.

Differenciálható függvények monotonitása

T 9.16 Legyen f differenciálható az (a,b) intervallumon. Az f függvény pontosan akkor monoton növekvő [csökkenő] az (a,b) intervallumon, ha $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] az (a,b) minden x pontjában.

T 9.17 Ha az (a,b) intervallumon f differenciálható, és minden $x \in (a,b)$ esetén $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$], akkor f szigorúan monoton növekszik [csökken] az (a,b) intervallumon.

T 9.18 Ha az f függvény deriváltja az (a,b) intervallum minden pontjában 0, akkor f konstans az (a,b) intervallumon.

Feladatok

A deriváltak segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk mely részhalmazán (szigorúan) monoton növekvőek és melyeken (szigorúan) monoton csökkenőek:

163. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, **164.** $f(x) = (x+2)^3$,

165. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$, **166.** $f(x) = \sin^2 2x,\ 0 < x < \pi$,

167. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$, **168.** $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)$.

Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

169.$^{\triangleright}$ $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, ha $x > 0$, **170.** $x + \dfrac{x^3}{3} > \operatorname{tg} x$, ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,

171. $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$, ha $\alpha > 1$, $x > 1$.

172.* Bizonyítsuk be, hogy a

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad (n \geq 1,\ a_0 \neq 0)$$

polinomfüggvény szigorúan monoton a $(-\infty,-b)$ és a (b,∞) intervallumokon, ha b elegendően nagy pozitív szám.

Implicit és inverz függvény differenciálása

P 9.19 Ha egy $F(x,y) = 0$ egyenlettel implicit módon megadott $x \mapsto y(x)$ függvény az egyenletből kifejezhető egy I intervallum fölött, akkor ott az $y'(x)$ derivált a már ismert módon számítható. Például:

$$xy - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Az $y'(x)$ függvény úgy is kiszámítható, hogy $F(x, y(x))$-et összetett függvényként x szerint differenciáljuk. Például:

$$(xy(x) - 1)' = y(x) + xy'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = -\frac{y(x)}{x}.$$

Ez megegyezik az előző eredménnyel, hisz $y(x) = 1/x$ behelyettesítése után $y'(x) = -1/x^2$ adódik. Azzal a kérdéssel, hogy egy $F(x, y) = 0$ alakú egyenlet mikor ír le függvénykapcsolatot és hogy $y(x)$ mikor fejezhető ki ebből az egyenletből, nem foglalkozunk.

D 9.20 Az f függvény az értelmezési tartományának egy H részhalmazán **invertálható**, ha tetszőleges két $x_1, x_2 \in H$ elem esetén

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

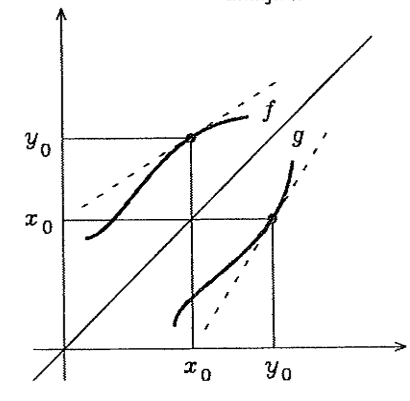
Ha f invertálható a H halmazon, akkor a $f|_H$ (azaz a H-ra korlátozott f) függvény **inverzén** azt a φ függvényt értjük, melyre

1. $\mathrm{Dom}\,\varphi = \{f(x); x \in H\}$,
2. $y_0 \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ esetén $\varphi(y_0) = x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x_0) = y_0$.

Az f függvény inverzére az f^{-1} jelölés használatos. Ez összetéveszthető a reciprok jelölésével, ezért példatárunk e pontját kivéve e jelölést külön említés nélkül nem használjuk.

T 9.21 Az egyváltozós valós f függvény legyen invertálható az x_0 pontot tartalmazó valamely $H \subseteq \mathrm{Dom}\,f$ halmazon, és legyen g az $f|_H$ függvény inverze. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pont valamely teljes környezetében, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor g differenciálható az $y_0 = f(x_0)$ pontban, és

$$\left(\frac{dg}{dy}\right)_{y=y_0} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}}.$$



Feladatok

Számítsuk ki az alábbi, implicit alakban adott $x \mapsto y(x)$ függvények deriváltját:

173. $x^2y + 3xy^3 - x = 3$, **174.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$,

175.• $3xy = (x^3 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, **176.**▷ $\sin(x^2y^2) = x$.

Számítsuk ki az alábbi, implicit alakban adott $x \mapsto y(x)$ függvények második deriváltját:

177.▷ $2xy - y^2 = 3$, **178.** $x \cos y = y$.

Határozzuk meg az alábbi $f(x)$ függvények $f^{-1}(x)$ inverzét:

179. $f(x) = x^2 + 1, \ x \geq 0$, **180.**• $f(x) = x^2 - 6x + 8, \ x \geq 3$,

181.• $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R}, \ ad - bc \neq 0)$.

Az eredeti és az inverz függvény közötti kapcsolat segítségével mutassuk meg, hogy az alábbi függvények grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenesre:

182. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, $(a, b, c \in \mathbf{R})$, **183.** $f(x) = \dfrac{3-x}{1-x}$.

184. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}$$

függvény invertálható, de nem monoton $\mathbf{R}$-en.

185. Mutassuk meg, hogy ha f nem monoton, akkor van három olyan x_1, x_2, x_3 pont, hogy $x_2 \in (x_1, x_3)$, de $f(x_2) \notin (f(x_1), f(x_3))$.

186. Mutassuk meg, hogy egy intervallumon értelmezett folytonos f függvény pontosan akkor invertálható, ha szigorúan monoton.

Határozzuk meg az alábbi függvények inverzének deriváltját és annak értékét a megadott x_0-hoz tartozó $y_0 = f(x_0)$ pontban, és ellenőrizzük az eredményt implicit függvény deriválásával:

187. $f(x) = 5x^3 + x - 7, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1,$

188. $f(x) = \operatorname{tg} 2x, \quad x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), \quad x_0 = \frac{\pi}{8},$

189. $f(x) = 7x - \sin 3x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 0,$

190. $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1.$

191. Tegyük fel, hogy az $f : B \to C$ és a $g : A \to B$ függvények kölcsönösen egyértelmű leképezések az adott halmazok között. Mutassuk meg, hogy $f \circ g$ is kölcsönösen egyértelmű függvény, és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

192. Igazoljuk, hogy az $f : x \mapsto x^4 + x^3 + 1$, $x \in (0, 3)$ függvény szigorúan monoton növekedő. Képezzük az $F(x) = f(2g(x))$ függvényt, ahol g az f inverze, és határozzuk meg az $F'(3)$ értéket.

Görbék érintkezése, érintő, simulókör

T 9.22 Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen differenciálható, akkor az f grafikonjának az x_0 abszcisszájú pontban van érintője, és az érintő iránytangense éppen $f'(x_0)$. Így az érintő egyenlete: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, míg az érintőre merőleges u.n. normális egyenes egyenlete: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, ha $f'(x_0) \neq 0$, és $x = x_0$, ha $f'(x_0) = 0$.

D 9.23 Ha két görbe közös pontja M, és mindkettőnek van érintője e pontban, akkor a görbék M pontnál bezárt szögén az érintőik által bezárt szöget értjük. Ha e szög 0, akkor azt mondjuk, hogy a két görbe az M pontban **érinti** egymást.

D 9.24 Legyenek f és g az x_0 helyen legalább r-szer differenciálható valós függvények, amelyekre $0 \leq k \leq r$ esetén $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$. Ha az $f^{(r+1)}(x_0)$ és a $g^{(r+1)}(x_0)$ differenciálhányadosok nem mindketten léteznek, vagy ha mindkettő létezik, nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű görbék az x_0 helyen r-edrendben érintik egymást.

T 9.25 Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen legalább kétszer differenciálható, és $f''(x_0) \neq 0$, akkor az $y = f(x)$ egyenletű görbének az x_0 helyen egyértelműen meghatározott simulóköre — azaz a görbét legalább másodrendben érintő köre — van, és ennek a körnek a sugara és középpontjának koordinátái:

$$r(x_0) = \frac{(1+f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|}, \quad \left(x_0 - \frac{f'(x_0)(1+f'^2(x_0))}{f''(x_0)}, f(x_0) + \frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}\right).$$

T 9.26 Ha az f függvény legalább n-szer differenciálható és $f(c) \neq 0$, akkor az

$$y = (x-c)^n f(x), \text{ és az } y = (x-c)^n f(c)$$

egyenletű görbék legalább n-edrendben érintik egymást.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának érintőjét és normálisát az adott x_0 abszcisszájú pontban:

193. $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x_0 = \pi^2$, **194.** $f(x) = \sin\dfrac{\pi^2}{x}$, $x_0 = \pi$,

195. $f(x) = x^3 - 8x$, $x_0 = 3$.

Írjuk fel az alábbi egyenletű síkgörbék adott pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét:

196.ᐅ $x^3 + y^3 - 6xy = 0$, $(3,3)$, **197.** $y = \sin(x+y)$, $(\pi, 0)$.

198.ᐅ Legyen f pozitív értékű, differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az $f(x)$ és az $f(x)\sin ax$ $(a \neq 0)$ függvények grafikonjai metszéspontjaikban érintik egymást.

199.ᐅ Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy az origón és érinti az $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ egyenletű görbét.

200. Milyen összefüggés áll fenn a, b és c között, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola érinti az x-tengelyt?

201.ᐅ Igazoljuk, hogy ha az $y(x) = x^3 + px + q$ egyenletű harmadfokú görbe érinti az x-tengelyt, akkor $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{4}\right)^2 = 0$.

Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények grafikonjai k-adrendben érintik egymást az $x_0 = 0$ helyen:

202. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$, $k = 4$,

203. $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$, $k = 5$,

204. $f(x) = 1 + x + x^2$, $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $k = 2$,

205. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, $k = 2$.

Hányad rendben érintik egymást az alábbi függvények grafikonjai a megadott pontban:

206. $x^3 \cos x$, x^2, $a = 0$,

207. $(x-1)(|x-1|+1)$, $x-1$, $a = 1$.

Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott görbék metszési szögeit:

208.$^{\triangleright}$ $y^2 = 4x - x^2$, $x^2 + y^2 = 8$,

209.$^{\triangleright}$ $2x^2 + y^2 = 20$, $4y^2 - x^2 = 8$,

210.$^{\triangleright}$ $xy = 12$, $x^2 + y^2 = 25$.

Az alábbi görbék adott P pontjaiban számítsuk ki a görbületi sugarat és a simulókör középpontjának koordinátáit:

211. $6y = x^3 - 12x - 2$, $P(2, -3)$,

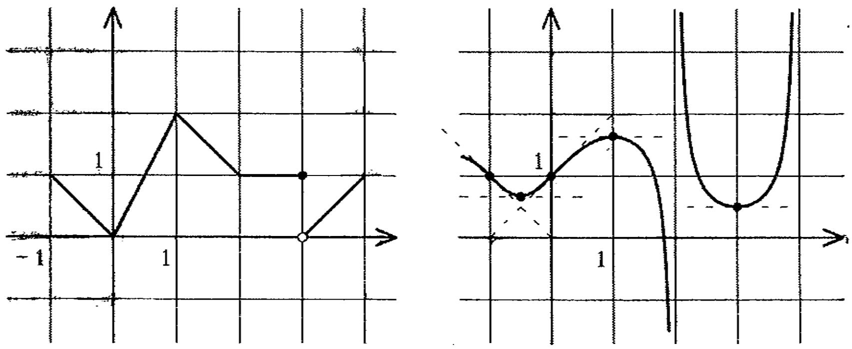
212.$^{\triangleright}$ $y^2 = 2px$, $(p > 0)$, $P(x, y)$,

213. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $P(0, b)$,

214. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $P(a, 0)$.

Vegyes feladatok

215. Vázoljuk fel szabad kézzel az alábbi grafikonokról leolvasható információk, valamint a differenciálhányados geometriai jelentése alapján az ábrázolt függvények deriváltfüggvényét!



216.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \le x_0 \\ ax + b, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen x_0-ban.

217.$^{\triangleright}$ Legyen f differenciálható x_0-ban. Mutassuk meg, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \le x_0 \\ f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény differenciálható x_0-ban. Határozzuk meg $g'(x_0)$-t! Vázoljuk fel g grafikonját!

218.▷ Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az

$$y = \begin{cases} m^2/|x|, & \text{ha } |x| > c \\ ax^2 + b, & \text{ha } |x| \le c \end{cases}$$

egyenletű görbe folytonos, és minden pontjában érintővel rendelkező legyen.

219.▷ Legyen f kétszer differenciálható minden $x \le x_0$ pontban. Határozzuk meg az a, b és c paraméterek értékét úgy, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \le x_0 \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény kétszer legyen differenciálható x_0-ban.

220. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(x) + g(x)$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható x_0-ban, de $g(x)$ nem,
b) sem $f(x)$, sem $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban.

221. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(x)g(x)$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható x_0-ban, de $g(x)$ nem,
b) sem $f(x)$, sem $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban.
Vizsgáljuk me az a) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, b) $f(x) = g(x) = |x|$ függvényeket a 0 pontban.

222. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(g(x))$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható $g(x_0)$-ban, de $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban,
b) $f(x)$ nem differenciálható $g(x_0)$-ban, de $g(x)$ differenciálható x_0-ban,
c) $f(x)$ nem differenciálható $g(x_0)$-ban, és $g(x)$ sem differenciálható x_0-ban.
Vizsgáljuk me az a) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, b) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, c) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ függvényeket a 0 pontban.

223. Legyenek f és g háromszor differenciálható függvények, és legyen $F : x \mapsto f(g(x))$. Határozzuk meg az F'' és F''' függvényeket.