

**BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZÉRNÖKI KAR**

Kertész Viktor

FUNKCIONÁLANALÍZIS

Műegyetemi Kiadó, 1995.

Jegyzet azonosító: **41035**

A Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Kar megrendelése alapján
kiadja a **Műegyetemi Kiadó**.

Felelős vezető: Veress János

Műszaki vezető: Hóman József

Terjedelem: 11,2 A/5 ív

Készült az **AGRÁRSZÖVETKEZET, Magyaralmás**

Nyomdaipari Önelszámoló részlegében

Felelős vezető: Frigy Ottóné

Munkaszám: **95/035**

Az olvasóhoz

Ez a jegyzet a Matematika c. jegyzetsorozat kiegészítő kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

- I. kötet: A matematika alapjai
 - II. kötet: Egyváltozós valós függvények
 - III. kötet: Lineáris algebra
 - IV. kötet: Végtelen sorok
 - V. kötet: Többváltozós valós függvények
 - VI. kötet: Differenciálgeometria és vektoranalízis
 - VII. kötet: Komplex függvények
 - VIII. kötet: Differenciálegyenletek
- Funkcionálanalízis

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza.

A sorozat nyolc kötete több mint tízéves. Erre a kiegészítő kötetre a következő okokból volt szükség. Egyrészt - tekintettel a funkcionálanalízis növekvő jelentőségére a műszaki alkalmazásokban - célszerű volt a nyolc kötetben elszórva, nem hangsúlyozottan szereplő idevágó ismereteket egysegesen, bizonyos mértékig kiegészítve tárgyalni. Másrészt a nyolc kötetben egy sor olyan, látszólag önálló újból és újból megtanulandó anyagrész fordul elő, amely a funkcionálanalízis keretein belül egységesen, egy ismeretként tárgyalható. Ilyen módon lehetővé válik pl., hogy az egyváltozós valós függvények megismerése után a határérték folytonosság és deriválhatóság fogalmát általánosan, absztrakt módon tárgyaljuk és az így szerzett ismereteket később az összes tanult függvénytípusra (többváltozós függvények, vektorvektor függvények, komplex függvények stb.) közvetlenül alkalmazzuk. Az absztrakt ismeretek elsajátításának természetesen megvan a maga nehézsége. A megszerzett absztrakt ismereteknek ugyanakkor azt az előnyét élvezhetjük, hogy igen szemléletesen tudunk látni és mélyen megértünk bonyolult, látszólag eltérő fogalmakat. Ezen az alapon válik igazán érthetővé bonyolult függvénytípusok határértéke, folytonossága és deriválhatósága az egyváltozós függvényeknél megszerzett szemléletre támaszkodva. A közönséges vektorokról kialakított szemléletes ismereteink alapján így válik igazán hozzáférhetővé a Fourier-sorok elmélete stb. Harmadrészt az elmúlt években a szigorlati matematika anyag kiegészítése, új ismeretek felvétele is szükségessé vált.

Ezért került az anyagba a műszaki alkalmazásokat tekintve kiemelkedő fontosságú Laplace-transzformáció.

A jegyzet azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztratív példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. A sorozatot a Matematika Példatár kötetei egészítik ki, amelyhez Kiegészítő Példatár a Matematika Tárgyhoz címmel egy kiegészítő kötet készül. Ezekben az olvasó nagy számú kidolgozott és kidolgozatlan példát, feladatot talál.

Budapest, 1984. március

A szerző

Tartalomjegyzék

Bevezetés	7
1. Lineáris terek	13
Példák	16
2. Normált terek	24
Példák	34
3. Operátorok normált terekben	42
3.A) Operátorok.	
Operátorok határértéke, folytonossága,	
deriválhatósága	42
3.B) A szukcesszív approximáció	46
3.C) Lineáris egyenletek	49
3.D) A homogén lineáris operátorok normált tere	51
Példák	54
4. Hilbert-terek	70
Példák	82
5. Fourier-sorok	90
Példa	98
Feladatok	99
6. Laplace-transzformáció	101
Irodalom	126

Bevezetés

A matematikának ez az ága alig 50 éves múltra tekint vissza, tehát meglehetősen új.

Kifejlesztésében kimagasló érdemeket szereztek többek között David Hilbert német, Neumann János magyar származású amerikai, Riesz Frigyes és Haar Alfréd magyar matematikusok.

A funkcionálanalízis jelentős, sőt, ma már azt kell mondanunk, hogy alapvető ága a matematikának, segítségével a matematika látszólag egészen különböző fejezetei is egységesen tárgyalhatók. E tudományág nélkül egy sor, az alkalmazás szempontjából nélkülözhetetlen eredmény nem létezne.

A műszaki tudományokban, műszaki problémák megoldásában egyre inkább tért hódítanak a funkcionálanalízis módszerei, eljárásai. A sok fontos alkalmazási területből, amelyek közül néhányat a hallgató a későbbi tanulmányai során találkozik, példaképpen a következőket említjük: lineáris szabályozások, optimális irányítások, nemlineáris problémák kezelése, véges elemek módszere, numerikus analízis. A parciális differenciálegyenletnél nélkülözhetetlenek a funkcionálanalízis eszközei és szinte nincs is olyan mérnöki tudomány, ahol parciális differenciálegyenletek ne fordulnának elő.

A funkcionálanalízis lényegét tanulmányaink szempontjából egészen tömören a következőképpen foglalhatjuk össze. A közönséges vektorok fogalmát általánosíthatjuk. Ennek az általánosításnak a révén a legkülönbözőbb matematikai struktúrák (pl. függvény halmazok) vektortereként kezelhetők. Ezekben az absztrakt vektorterekben sorozatokat és sorokat értelmezünk és ezzel általánosítjuk a numerikus sorozatok és sorok fogalmát is. Végül a függvények fogalmát is általánosítjuk: az egyváltozós valós függvények tulajdonságait kiterjesztjük absztrakt vektorokon értelmezett és absztrakt vektor értékű (illetve skalár értékű) függvényekre, más néven operátorokra (illetve funkcionálokra).

Ebből a rövid összefoglalóból az is kiderül, hogy a "funkcionálanalízis" elnevezés nem híven tükrözi annak tárgyát, inkább a matematika ezen ágának a történeti kialakulásával függ össze.

Érdekes áttekinteni, hogy a minket körülvevő háromdimenziós teret leíró vektorok milyen tulajdonságait általánosítjuk, miket "mentünk át" egyes absztrakt vektorterekbe. Röviden felsoroljuk a tulajdonságok közül a legfontosabbakat:

- a vektorok összegezhetőek: $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$,
- skalárral szorozhatók: $\lambda \underline{v}$,
- létezik nullvektor: $\underline{0}$,
- az összeggel, skalárszoróssal és zérus vektorral kapcsolatosan érvényesek az ismert műveleti szabályok,
- beszélhetünk adott vektorok lineáris összefüggéséről és függetlenségéről,
- létezik bázis,
- bármely vektor a bázis alkotta koordináta-rendszerben koordinátaival (x, y, z) egyértelműen megadható,
- a vektoroknak létezik abszolút értéke vagy hossza, vagy normája: $|\underline{v}|$,
- két vektor skalárisan összeszorozható: $\underline{v}_1 \underline{v}_2$, a két vektor egymással meghatározott szöveget zár be, pl. egymásra merőlegesek (ortogonálisak) is lehetnek,
- létezik ortonormált bázis $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ és a koordináták kiszámítása e bázis alkotta koordináta-rendszerben a következőképpen történik:
ha $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$, akkor

$$x = \underline{v} \underline{i}$$

$$y = \underline{v} \underline{j}$$

$$z = \underline{v} \underline{k},$$
- az ortonormált bázisban a vektor normája a koordinátái ismeretében a

$$|\underline{v}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

összefüggés alapján határozható meg.

A numerikus sorozatok és sorok konvergenciájának, valamint a torlódási pontnak a fogalmát ki tudjuk terjeszteni a közönséges vektorokra és ezen keresztül absztrakt vektorokra is.

Mint említettük, az egyváltozós valós függvényeknél bevezetett alapvető jelentőségű fogalmakat ugyancsak sikerül kiterjeszteni operátorokra, ill. funkcionálokra:

határérték,
folytonosság,
homogén linearitás (cx) ,
deriválhatóság, derivált,
stb.

Bár általánosan nem, de a tananyag későbbi részeiben tárgyalandó konkrét struktúrák esetében az integrál fogalmát is ki fogjuk terjeszteni.

Ezek után ejtsünk néhány szót arról, hogy milyen eszközök állnak a matematikusok rendelkezésére a fent vázolt absztrakciók, általánosítások végrehajtásához. Ezeket az eszközöket, módszereket úgy érthetjük meg, ha világosan látjuk az axiómák szerepét a matematikában.

Nagyon leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a matematika definíciókból és tételekből épül fel. A definíciók célszerű, új fogalmak bevezetését szolgálják és önkényesek abban az értelemben, hogy a matematika belső törvényszerűségei teljes szabadságot engednek a matematikusnak a definíciók megalkotásában. Természetesen, ha azt akarjuk, hogy a matematika a kívánt irányban fejlődjön és a valóság ilyen vagy olyan részének leírására, modellezésére alkalmas legyen, akkor a matematikus keze, már erősen meg van kötve.

A tételek ezzel szemben éppen, hogy nem önkényesek, hanem objektív törvényszerűségeket tükröznek. A tételek igazságát egzakt matematikai eszközökkel be kell bizonyítani. A bizonyítás során már bebizonyított tételeket használunk fel. Ha ebben a bizonyítási láncban visszafelé haladunk, akkor triviális, nyilvánvaló, bizonyításra már nem szoruló tételekhez jutunk. A matematika mindennapos művelése, a tanulás stb. során itt legtöbbször meg is állhatunk. Azonban a matematika alapjait kutató, vagy egy-egy új matematikai tudományágat kifejleszteni akaró matematikusnak mélyebbre kell ásni. Meg kell keresnie azokat az elemi "tételeket", amelyeket már nem is lehet bizonyítani (tehát nem lehet még egyszerűbb igazságokra visszavezetni), és amelyek segítségével minden tétel bizonyítható. Ezek az axiómák.

(Pontosabban: az axiómákkal "szinte minden" tétel bizonyítható. Századunkban kiderült ugyanis, hogy ha egy matematikai rendszer egy bizonyos értelemben elég kifejező, akkor mindig vannak benne bizonyíthatatlan tételek. Szerencsére azonban ennek csak elvi jelentősége van, mert e bizonyíthatatlan tételek a gyakorlatban - legalábbis az alkalmazott matematika mai gyakorlatában - nem fordulnak elő.)

Az előző évszázadokban az axiómákat örökérvényű igazságoknak tekintették. Eredetüket a materialisták az anyagi világban keresték, az idealisták pedig istenben.

A matematika fejlődése és elsősorban a halmazelméleti kutatások eredményeképpen századunk elejére kiderült, hogy az axiómákat (feltéve, hogy azok egymásnak nem mondanak ellent) matematikai szempontból önkényesen vehetjük fel, tehát az axiómák ilyen értelemben lényegében definíciók.

Ezt a rendkívül fontos felismerést úgy kell értenünk, hogy bármely ellentmondásmentes axiómarendszerre felépíthető matematikai diszciplína. A matematika belső törvényszerűségeiből sokszor még az sem derül ki, hogy milyen axiómarendszer érdemes felvenni és milyent nem.

Egy-egy axiómarendszer értékét akkor ítéldhetjük meg, ha a matematikát arra használjuk, amire való: a valóság megismerésére és ezen keresztül átalakítására. Ha a valóságnak ezt vagy azt az oldalát híven akarjuk matematikailag modellezni, visszatükrözni, akkor a valóságnak az adott oldalát leíró, adott matematikai részterület axiómái már nem vehetők fel önkényesen!

Végző soron azt mondhatjuk, hogy a matematikában elvileg bármely ellentmondásmentes axiómarendszer felvehető. A bevezetett axiómarendszer jogosságát, értelmét használhatósága dönti el.

Ez a felismerés rendkívül termékenynek bizonyult a matematikában. Az axiómák ilyen kezelése mellett hallatlan eredmények születtek.

Mindezek tükrében tekintsük át, hogy milyen főbb útjai vannak az axiómarendszerek létrejöttének, ill. létrehozásának.

Bizonyos matematikai struktúrák (pl. a természetes számok, az euklideszi geometria, többé-kevésbé a valós számok és a közönséges tér vektorai) a közvetlen gyakorlati tapasztalat révén alakultak ki. Itt a matematikusok dolga az volt, hogy olyan axiómarendszereket keressenek, amelyekre valóban felépíthető az adott struktúra, illetve a régi felfogás szerint megkeressék az eleve adott axiómákat.

Habár ezek az axiómák semmiképpen nem voltak eleve adottak, annyi mindenestre igaz, hogy ezeket szinte kivétel nélkül, - kimondva vagy kimondatlanul, tudatosan vagy ösztönösen: más kérdés - a szabatos megfogalmazás előtt is használták az adott területeken.

Bolyai János korszakalkotóan más utat követett. Az euklideszi geometria párhuzamossági axiómáját elvetette és helyette önkényesen egy sokkal általánosabb axiómát vezetett be. Csak jóval később századunkban derült ki, hogy több évezredes hiedelemmel ellentétben a valóságos fizikai tér nem euklideszi szerkezetű (csak közelítőleg az!), hanem olyan geometriával írható le (legalábbis mai ismereteink szerint), amely a Bolyai által megkezdett úton érhető el.

A valószínűségszámítás a XVIII.-XIX. században lendületes fejlődésnek indult. A továbbfejlődés érdekében döntő lépés volt, hogy Kolmogorov szovjet matematikus a 30-as években elvégezte a tudományág axiomatikus felépítésének a munkáját. Olyan új, eddig nem létező axiómarendszert konstruált, amelynek alapján a valószínűségszámítás virágzó fejlődésnek indult.

Végül nézzük meg, hogy mi történik voltaképpen a funkcionálanalízis axiomatikus felépítése során.

Jól ismert, régen bevált és viszonylag egyszerű matematikai struktúrák axiómáit rendszerbe foglaljuk. Semmiképpen nem azért, mintha a struktúrák gyakorlati alkalmazása során erre szükség lenne (bárki kitűnően megtanulhat pl. a vektorokkal dolgozni anélkül, hogy rendszerbe tudná fog-

lalni az axiómákat, amelyek mellesleg végtelenül egyszerűeknek, magától értetődőeknek tűnnek), hanem azért, hogy a kapott axiómarendszert (ill. annak egy részét) merőben más és többnyire bonyolultabb struktúrára is ráhúzhassuk annak érdekében, hogy így ezt az utóbbi struktúrát lényegesen jobban megértsük, lényegesen egyszerűbben tudjuk kezelni és az analógiák messzemenő kihasználásával sokkal eredményesebben tudjuk művelni.

Ha pl. axiomatikusán meg tudjuk ragadni a vektorok skaláris szorzatának lényegét, és, ha pl. az egyváltozós valós függvények körében önkényesen (bár a célszerűség szem előtt tartásával) olyan műveletet definiálunk, amely eleget tesz a skaláris szorzat axiómáinak, akkor ezt a műveletet most már joggal nevezhetjük sakláris szorzatnak és élvezhetjük mindazokat az előnyöket, amelyek az analógiából származnak.

Az analógiából eredő számtalan előny között az egyik legnagyobb, hogy a kiindulási egyszerűbb struktúra jól bevált definíciói (pl. derivált) roppant egyszerűen vihetők át az új bonyolult struktúrákba.

A kiindulási struktúra axiómái és definíciói nem csak egyetlen, hanem beláthatatlanul sok más struktúrára is ráhúzhatók. Sőt, nem túlzás, ha azt mondjuk, hogy sokszor a mérnök gyakorlati matematikai munkájának a része, hogy örfállóan olyan műveleteket konstruáljon, "gyártson", amelyek eleget tesznek az adott axiómáknak. Éppen ezért felesleges lenne, sőt az általános vizsgálatot gátolná, ha a funkcionálanalízis kifejtése során valamely konkrét struktúrához (pl. az I intervallumon értelmezett egyváltozós valós folytonos függvények) kötődnénk. Ehelyett eltekintünk a vizsgált struktúra minden egyedi, speciális tulajdonságától és kizárólag azokat a tulajdonságokat tekintjük csak, amelyek az adott axiómákból erednek. Ilyen értelemben absztrakt halmazokat fogunk tekinteni, ezeken értelmezzük az adott axiómákat, és így absztrakt struktúrákat hozunk létre. Ezeknek az absztrakt struktúráknak néhány konkrét realizációját példák kapcsán mutatjuk meg.

Az általánosnak és a speciálisnak ezt a megkülönböztetését fogják tükrözni a különböző struktúrákra vonatkozó jelöléseink is, amelyekről érdemes lesz néhány szót ejteni.

A jelölések egy része konkrét struktúrákra utal. Pl.

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $\mathbb{R}^n$ a valós rendezett szám n-esek halmaza, $\mathbb{Q}^n$ ill. $\mathbb{S}^n$ n elemű oszlopvektorok, ill. sorvektorok (mint speciális mátrixok) halmaza, E^3 a közösleges 3-dimenziós vektortér, C_I^0 az I intervallumon folytonos függvények halmaza stb.

A jelölések másik része absztrakt struktúrákra utal, tehát lényegében az összes - az adott absztrakt struktúrát leíró axiómáknak eleget tevő - konkrét struktúra közös jele.

Pl.: L lineáris tér, K normált tér, E^n n -dimenziós euklideszi tér stb. Ha több ugyanolyan típusú absztrakt struktúráról beszélünk egyidejűleg, amelyek helyett a konkrét realizáció során különböző konkrét struktúrák állhatnak, akkor a megkülönböztetést indexezéssel érjük el. Pl. K_1 és K_2 két normált tér, amelyek nem feltétlen azonosak. Mivel - mint látni fogjuk - $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^n$ is normált tér, így egy lehetséges realizáció:

$$K_1 = \mathbb{R} \quad \text{és} \quad K_2 = \mathbb{R}^n.$$

Előfordul, hogy ezt az elvet nem mindig követjük következetesen, sőt néha nem is egyértelműek a jelöléseink. Ez már az említett példákból is kitűnik, hiszen E^3 egyrészt a közönséges teret és absztrakt 3-dimenziós euklideszi teret egyaránt jelenti.

Erre most csupán a figyelmet hívjuk fel, az okra a megfelelő anyagrész tárgyalásakor utalunk.

I. Lineáris terek

Jelöljük $\mathbb{K}$ -val azt a halmazt, amely tetszőlegesen lehet a valós számok ($\mathbb{R}$) illetőleg a komplex számok ($\mathbb{C}$) (skalárok) halmaza.

I.1 Definíció

Az L nem üres halmaz lineáris tér (más néven vektortér), ha teljesülnek az alábbi axiómák L elemeire:

- értelmezett az összeadás és a skalárral való szorzás az ismert műveleti szabályok érvényesülése mellett, vagyis, ha $x, y, z \in L$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, akkor $x + y \in L$ és $\lambda x \in L$, továbbá

$$x + y = y + x$$

$$(x+y) + z = x + (y+z)$$

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$$

$$(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$$

$$1 \cdot x = x$$

- L -ben létezik egy 0 -val jelölt ún. nullelem vagy zérus elem, vagy nullvektor, hogy minden $x \in L$ -re

$$x + 0 = x$$

- minden $x \in L$ -nek van ún. $-x \in L$ ellentettje, hogy

$$x + (-x) = 0.$$

$x + (-y)$ -t egyszerűen $x-y$ -nak írjuk.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor L valós lineáris tér, ha pedig $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor komplex lineáris tér.

1.2 Definíció

1.2.1. Az $x_1, \dots, x_n \in L$ vektorok lineárisan összefüggők, ha van $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, amelyekre

$$|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| > 0 \text{ és } \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

1.2.2. Az $x_1, \dots, x_n \in L$ vektorok lineárisan függetlenek, ha nem lineárisan összefüggők.

Ha az $x_1, \dots, x_n$ L vektorok lineárisan függetlenek, akkor nem lehet közöttük zérus vektor. Ugyanis, ha feltesszük az ellenkezőjét (pl. $x_k = 0$), akkor $\lambda_i = 0$, ha $i \neq k$ és $\lambda_k \neq 0$ választásával éppen e vektorok lineáris összefüggése mutatható ki.

Belátható, hogy ha $x_1, \dots, x_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor a $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

1.3 Definíció

1.3.1. Az L vektortér n dimenziós (jelben L^n) ($n \in \mathbb{N}$), ha van L -ben n számú lineárisan független vektor, de bármely $n+1$ számú vektor lineárisan összefüggő.

1.3.2. Az L vektortér végtelen dimenziós, ha 1.3.1. semmilyen $n \in \mathbb{N}$ -re sem teljesül.

1.4 Definíció

1.4.1. Ha $x_1, \dots, x_n \in L^n$ és e vektorok lineárisan függetlenek, akkor L^n -ben bázist (koordináta-rendszert) alkotnak.

1.4.2. Az $\{x_n\}$, $x_n \in L$, $n \in \mathbb{N}$ vektorok (ahol $L \infty$ - dimenziós) lineárisan független rendszert alkotnak, ha belőlük bármely véges számú vektor lineárisan független.

1.1 Tétel

Bármely $x \in L^n$ elem előállítható L^n bázisa elemeinek lineáris kombinációjaként:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n,$$

ahol az $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ egyértelműen meghatározott skalárokat x koordinátáinak nevezzük.

BIZONYÍTÁS:

$x_1, \dots, x_n, x$ nyilván lineárisan összefüggőek, így létezik $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n, \lambda'$ nem csupa zérus skalár, hogy

$$\lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_n x_n + \lambda' x = 0.$$

Ha $\lambda' = 0$, akkor $\lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_n x_n = 0$, amelyből a

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_n = 0 \text{ ellentmondás következne.}$$

Tehát $\lambda' \neq 0$.

Ekkor azonban:

$$x = \frac{\lambda'_1}{\lambda'} x_1 + \dots + \frac{\lambda'_n}{\lambda'} x_n = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Tegyük fel, hogy x-nek létezik ettől eltérő előállítása is a bázis elemeinek lineáris kombinációjával:

$$x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n.$$

A két előállításból azonban következik, hogy

$$(\lambda_1 - \mu_1) x_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) x_n = 0.$$

A bázis lineárisan függetlensége miatt azonban

$$\lambda_i - \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tehát az előállítás létezik és egyértelmű!

Ha L végtelen-dimenziós és $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ lin. független rendszer, akkor L elemei általában nem állíthatók elő e rendszer véges sok elemének lineáris kombinációjaként.

1.5 Definíció

Legyenek L_1 és L_2 lineáris terek. Ha $L_2 \subset L_1$ és L_2 -ben az 1.1. Definíció szerinti műveletek, a nullelem és az ellentettek ugyanazok mint L_1 -ben, akkor L_2 L_1 -nek altere. Ha ezen felül $L_2 \neq L_1$, akkor L_2 L_1 -nek valódi altere. Egyszerűen beláthatók az alábbi állítások helyessége:

- ha L_1 n -dimenziós (L_1^n), akkor L_2 L_1^n -nek pontosan akkor valódi altere, ha $L_2 \subset L_1^n$, a műveletek, a nullelem és ellentettek L_1 -ben és L_2 -ben megegyeznek és L_2 m -dimenziós (L_2^m), ahol $m < n$.
- ha L_2^m L_1 -nek altere, ahol L_1 ∞ -dimenziós, akkor L_2^m L_1 -nek valódi altere.
- L_2 L_1 -nek akkor is lehet valódi altere, ha mindkettő ∞ -dimenziós.

PÉLDÁK

Az alábbi halmazok az összeadás, skalárral való szorzás, a zéruselem és az ellentett szokásos értelmezése mellett lineáris teret alkotnak. Ahol ez a szokásos értelmezés az eddigi tanulmányok alapján nem nyilvánvaló, ott ezt ismer-tetjük.

1. $\mathbb{R}$

A valós számok halmaza egydimenziós valós lineáris tér. Az egyetlen elemű bázis bármely nem zérus valós szám lehet.

$\mathbb{C}$

A komplex számok halmaza egydimenziós komplex lineáris tér. Az egyetlen elemű bázis bármely nem zérus komplex szám lehet.

$\mathbb{C}$ két-dimenziós valós lineáris térnek is tekinthető.

Ebben az esetben a kételemű bázis bármely z_1 és z_2 komplex szám, amelyek nem zérusok és mint síkvektorok nem párhuzamosak. Legcélszerűbben: $z_1 = 1$, és $z_2 = i$.

2. $\mathbb{R}^n$

A rendezett valós szám n -esek n -dimenziós valós lineáris teret alkotnak, ha a műveleteket és a zérus elemet a következőképpen értelmezzük:

$$x \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \quad y \in \mathbb{R}^n, \text{ ahol}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{és}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{akkor}$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$-x = (-x_1, \dots, -x_n)$$

$$0 = (0, \dots, 0).$$

Egy lehetséges bázis:

$$(1, 0, \dots, 0)$$

$$(0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$(0, 0, \dots, 1).$$

$\mathbb{C}^n$

A rendezett komplex szám n -esek n -dimenziós komplex vagy $2n$ -dimenziós valós lineáris teret alkotnak.

3.

$n \times m$ -es mátrixok. Ezek $n \times m$ -dimenziósak.

4. $\mathbb{Q}^n$

Az $n \times 1$ méretű mátrixok, tehát az n -elemű oszlopvektorok n -dimenziós lineáris teret alkotnak.

$\mathbb{S}^n$

Az $1 \times n$ méretű mátrixok, tehát az n -elemű sorvektorok n -dimenziós lineáris teret alkotnak.

Attól függően, hogy e mátrixokban az elemek valósak vagy komplexek, a lineáris terek is valósak vagy komplexek.

5. E^3

A közös (háromdimenziós euklideszi) tér, vagyis a közös vektorok tere háromdimenziós lineáris tér. A síkvektorok E^2 és az egyenes vektorainak E^1 tere két, ill. egydimenziós lineáris tér.

Tekintsük most E^3 egy két-dimenziós valódi alterét. Ebben az alterben vegyünk fel egy bázist: $\underline{a}, \underline{b}$. Ez az eltér az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített (és természetesen az origón átmenő) sík. Fordítva is igaz: egyszerűen belátható, hogy minden origón átmenő sík a tér egy két-dimenziós altere. A nem origón átmenő síkok a tér részhalmazai ugyan, de nem képeznek lineáris teret, így a térnek nem alterei. Tanulságos ezt bebizonyítani. E sík helyvektorait

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \lambda \underline{p} + \mu \underline{q}$$

alakban írhatjuk fel, ahol $\underline{r}_0$, $\underline{p}$ és $\underline{q}$ nem komplanárisak.

Legyen $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ a sík tetszőleges két (különböző) pontja:

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_0 + \lambda_1 \underline{p} + \mu_1 \underline{q}$$

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_0 + \lambda_2 \underline{p} + \mu_2 \underline{q}$$

Akkor $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ már nem eleme a síknak:

$$\underline{r}_1 + \underline{r}_2 = 2\underline{r}_0 + (\lambda_1 + \lambda_2) \underline{p} + (\mu_1 + \mu_2) \underline{q} !$$

Ha E^3 kétdimenziós altereit keressük, akkor tekintsük tehát az origón átmenő síkokat.

E síkok közül melyik E^2 ? Nyilvánvalóan nem létezik kitüntetett sík, hiszen a térnek sincs kitüntetett dimenziója.

Ilyen értelemben E^2 nem egyértelműen meghatározott: először találkozunk a bevezetőben említett többértelműséggel.

Ha a tér összes, vagy legalábbis több 2-dimenziós alterét egyszerre tekintjük, akkor ez a többértelmű jelölés természetesen elfogadhatatlan, a megkülönböztetés nélkülözhetetlen. Ha pl. E^3 -ban szokásos módon az $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$ bázist vettük fel, akkor az ezekkel kialakuló Descartes-féle koordináta-rendszerben nyilván élesen meg kell különböztetnünk pl. az xy , az yz és az xz síkokat.

Ha azonban egyetlen síkot ragadunk ki és ezt csak önmagában vizsgáljuk, még csak nem is úgy, mint E^3 egy alterét, akkor teljesen érdektelen, hogy melyik ez az éppen ki-

ragadott sík, sőt az sem lényeges, hogy e sík E^3 -nak valóban altere-e vagy sem. A síkokat önmagukban vizsgálva a síkok megkülönböztethetetlenek (a sík geometriája teljesen független attól, hol fekszik ez a sík a térben). Ilyen értelemben beszélhetünk a síkról, tehát mint egy egyértelműen meghatározott objektumról és ilyen értelemben használjuk az E^2 jelölést.

Ez a jelenség nagyon fontos a matematikában, ezért valamelyest általánosabban is érdemes megfogalmazni, habár a kérdés mélyebb taglalására itt nincs módunk.

Tekintsük bizonyos matematikai struktúrák (jelen esetben síkok) $\mathcal{S}$ halmazát. Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ bármely két S_1 és S_2 elemére (tehát az S_1 és S_2 struktúrára, vagyis jelen esetben S_1 és S_2 síkra) igaz a következő: e struktúrák között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, vagyis az egyik struktúra minden egyes elemének, az elemeken értelmezett minden egyes műveletnek, az elemek között értelmezett minden egyes relációnak egy-egy értelmű módon felel meg a másik struktúra egy bizonyos eleme, egy bizonyos művelete, egy bizonyos relációja. Ezt a körülményt más szóval úgy fejezzük ki, hogy a két struktúra izomorf. Mindez nem jelent mást, minthogy e struktúrák egyenként "belülről" tekintve nem különböznek egymástól, vagyis megkülönböztethetetlenek. A megkülönböztetés csak "kívülről" (példánkban tehát a térből, ahol e síkok konkrét helyzetét is tekintjük) lehetséges. Így, ha $\mathcal{S}$ elemeit egyenként, "belülről" vizsgáljuk, akkor $\mathcal{S}$ valamennyi eleméről mint egyetlen elemről, egyetlen struktúráról beszélhetünk.

6. C_I^0, C_I^n, C_I^∞ , ahol I valamely intervallum.

Nullelem az azonosan nulla függvény. E lineáris terek mindegyike ∞ -dimenziós.

Tekintsük példaképpen $C_{\mathbb{R}}^\infty$ -t, tehát az egész számegyenesen értelmezett, akárhányszor deriválható függvények lineáris terét. E térben egy lehetséges független rendszer:

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$$

E rendszer véges sok eleméből képezett lineáris kombinációk a polinomok. Nyilván nem minden $C_{\mathbb{R}}^\infty$ -beli függvény polinom:

Látni fogjuk azonban, hogy a függvények általában igen jól közelíthetők polinomokkal. Később azt is látni fogjuk, hogy e rendszer összes eleméből képzett lineáris kombinációkkal (ún. hatványsorokkal) már nem csak e polinomok, hanem a legtöbb ismert függvény előállítható, azonban még ezekkel

sem állítható elő $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ minden eleme. Ezért az ilyen lineárisan független rendszereket nem nevezhetjük bázisnak. Tekintsük most $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ néhány (véges sok) lineárisan független (egyébként tetszőleges) elemét: $f_1, \dots, f_n$. Akkor ezen függvények összes lineáris kombinációja $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ egy n -dimenziós alterét alkotja (feszíti ki) és ebben az L^n altérben az $f_1, \dots, f_n$ függvények bázist alkotnak. Pl. A legfeljebb n -edfokú polinomok halmaza $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ $n+1$ -dimenziós altere, amelynek egy lehetséges bázisa: $1, x, x^2, \dots, x^n$. Tekintsük további példaképpen az $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ függvények által kifeszített $2n+1$ dimenziós alteret. Később látni fogjuk, hogy ennek az alternek az elemeivel a 2π -szerint periodikus függvények általában igen jól közelíthetők. Az említett közelítésnek óriási gyakorlati és elméleti jelentősége van.

7. Σ_I , ahol I valamely zárt intervallum.

E tér is ∞ -dimenziós.

A műveletek szokásos értelmezése mellett nem képeznek valós vagy komplex lineáris teret az alábbi halmazok:

- a nem negatív valós számok halmaza ($\mathbb{R}^+$),
- az egész számok halmaza,
- racionális számok halmaza.

Nem képeznek lineáris teret az alábbi halmazok, mert a szükséges műveletek nincsenek értelmezve

- síkidomok halmaza,
- testek halmaza stb.

Legyen L^n valamely n -dimenziós lineáris tér. Rögzítsünk le ebben egy bázist: $e_1, \dots, e_n$. E bázist koordináta-rendszernek is nevezzük (ld. 1.4.1. Definíció).

Mivel L^n bármely x eleme egyértelműen írható fel az

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

alakban, ezért az $x \leftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ hozzárendeléssel L^n és $\mathbb{R}^n$ elemeit kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltetjük egymásnak.

A $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ számokat x koordinátáinak nevezzük az $e_1, \dots, e_n$ koordináta-rendszerben. (Ha a koordinátákat oszlop, ill. sorvektor formájában rendezzük el, akkor L^n és Q^n , ill. S^n között létesíthető ilyen megfeleltetés és akkor x koordináta oszlop, ill. sorvektorairól beszélhetünk). Természetesen más koordináta-rendszerben más lesz ez a megfeleltetés, vagyis a vektoroknak mások lesznek a koordinátái (koordináta transzformáció).

1.2 Tétel

Tekintsük az L^n lineáris térben az $e_1, \dots, e_n$, valamint az $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ bázisokat. Akkor létezik S mátrix, ún. koordináta vagy bázis transzformáció mátrixa, amely bármely $x \in L^n$ elem kétféle bázisbeli koordináta oszlopvektorai között az alábbi kapcsolatot adja:

$$u = S \tilde{u}, \quad \tilde{u} = S^{-1} u$$

$$u = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n \tilde{e}_n$$

BIZONYÍTÁS:

Az első koordináta-rendszerben a második bázis elemek koordináta oszlopvektorai legyenek $s_1, \dots, s_n$:

$$s_i = \begin{bmatrix} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{ni} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_i = s_{1i} e_1 + \dots + s_{ni} e_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Az s_i oszlopokból építsük fel az S $n \times n$ -es mátrixot:

$$S = [s_1 s_2 \dots s_n]$$

Ha tetszőleges $x \in L^n$ vektor koordináta oszlopvektora a régi koordináta-rendszerben u , akkor ugyanennek a vektornak az új koordináta-rendszerbeli koordinátá oszlopvektora legyen $\tilde{u}$.

Bizonyítsuk be, hogy $u = S\tilde{u}$ igaz és S reguláris, amelyből azután az $\tilde{u} = S^{-1}u$ egyenlőség is következik.

u ilyen módon írható fel:

$$\tilde{u} = \tilde{\lambda}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \tilde{\lambda}_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ koordináta oszlopvektor (ahol az 1 az i -edik helyen

áll) nem más, mint $\tilde{e}_i$ koordináta oszlopvektora az új koordináta-rendszerben.

Ugyanennek a vektornak a régi rendszerbeli koordinátáit az s_i oszlopvektor tartalmazza. Tehát:

$$u = \tilde{\lambda}_1 s_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n s_n = S \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix} = S\tilde{u}.$$

S reguláris, ami abból a tényből következik, hogy az $s_1, \dots, s_n$ oszlopvektorok lineárisan függetlenek!

A bizonyítás rendkívül tömörre és áttekinthetővé válik, ha az $e_1, \dots, e_n$, ill. $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ vektorokat ugyancsak mátrix formában rendezzük el és a skalár elemű, valamint vektor elemű mátrixok között a szorzást értelemszerűen hajtjuk végre (mátrixok szorzása a szokásos módon, egy skalár szám és egy vektor szorzása ugyancsak az ismert módon).
Legyen tehát:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}; \quad e_i \in L^n$$

$$\tilde{e} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{bmatrix} ; \quad \tilde{e}_i \in L^n .$$

Akkor (T-vel a transzponáltat jelölve):

$$u^T = e^T S ,$$

$$x = \tilde{e}^T \tilde{u} ,$$

$$x = e^T u ,$$

amelyből $u = S\tilde{u}$ azonnal következik.

2. Normált terek

A lineáris tér axiómáival a közönséges vektorok egy sor tulajdonságait sikerült kiterjeszteni halmazokra is (pl. függvényekre). Azonnal feltűnik azonban, hogy ugyanakkor más nem kevésbé fontos műveletek, tulajdonságok (norma, skaláris szorzás stb.) nem értelmezhetők a lineáris tér keretein belül. Ezért újabb általánosított fogalmak, axiómák bevezetésére van szükség. Ezen az úton haladva a soron következő lépés a norma definiálása. Látni fogjuk, hogy a néhány igen egyszerű axiómával definiálható norma a lineáris tér milyen roppant mértékű gazdagítását teszi lehetővé.

2.1 Definíció

A K lineáris tér normált tér (vagy normával ellátott lineáris tér), ha értelmezett egy a K -t $\mathbb{R}$ -ra leképező függvény (az ún. norma, jelben $\|x\|$, $x \in K$), hogy teljesülnek a következő axiómák:

$$\|x\| = 0 \text{ pontosan akkor, ha } x = 0,$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{K},$$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög-vagy Minkowski-egyenlőtlenség).

MEGJEGYZÉS:

ha a normára, csak mint függvényre utalunk, és nem kívánjuk jelölni a független változót, akkor a szokásos jelölés: $\|\cdot\|$.

Figyeljük meg, hogy definíciónkba belefér az, amit éppen általánosítani akartunk. Nevezetesen: a közönséges vektorok tere (E^3) normált tér, ha $\|\cdot\|$ a vektorok abszolút értékét, hosszát jelöli. Axiómáink ezzel igen szemléletes jelentést is nyernek. Pl. a háromszög axióma E^3 -ban valóban háromszögre vonatkozik: bármelyik oldal hossza kisebb vagy (legfeljebb egyenlő) a másik két oldal hosszának összegénél.

Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

A háromszög egyenlőtlenséget használjuk fel:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|,$$

amelyekből

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

és ezekből pedig adódik a bizonyítandó azonosság!

2.2 Definíció

A K normált tér tetszőlegesen $x, y \in K$ elemének távolságán a

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

függvényt értjük.

Az utóbbi definícióval a normált térbe ún. metrikát vezettünk be, ezáltal normált terünket metrikus térre tettük. Távolság fogalmat más módon is be lehetne vezetni, sőt nemcsak normált térben, hanem más halmazon is lehetséges lehet a metrika bevezetése és így az adott halmaz metrikus térre való alakítása. Mi csak azokkal a metrikus terekkel foglalkozunk, amelyek egyben normált terek is és ahol a metrikát a 2.2. Definíció definiálja. Ez a definíció E^3 -ban valóban a megszokott távolságfogalmat adja.

2.3 Definíció

Az $x_0 \in K$ elem ϱ_0 ($\varrho_0 > 0$) sugarú környezetén $(K_{x_0 \varrho_0})$ a következő halmazt értjük:

$$K_{x_0 \varrho_0} = \{x \in K: \varrho(x_0, x) < \varrho_0\}.$$

Ha ϱ_0 értéke lényegtelen, akkor egyszerűen K_{x_0} -t írunk.

2.4 Definíció

Az $x_0 \in K$ elem Q -nak torlódási pontja ($Q \subset K$), ha x_0 minden környezetében van Q -beli (x_0 -tól eltérő) elem.

Megjegyezzük, hogy ha x_0 Q -nak torlódási pontja, akkor x_0 minden környezetében végtelen sok Q -beli elem is van.

2.5 Definíció

A K halmaz x_0 pontja Q -nak ($Q \subset K$)

2.5.1. belső pontja, ha van K_{x_0} , hogy $K_{x_0} \subset Q$;

2.5.2. külső pontja, ha $x_0 \notin Q$ és ha van K_{x_0} ,

hogy $K_{x_0} \cap Q \neq \emptyset$,

2.5.3. határpontja, ha sem belső, sem külső pontja.

Nyilvánvaló, hogy ha x_0 Q -nak belső pontja, akkor $x_0 \in Q$, ha külső pontja, akkor pedig $x_0 \notin Q$. Határpontnál $x_0 \in Q$ és $x_0 \notin Q$ egyaránt lehet. A torlódási pont belső pont vagy határpont.

Ha pl. $K = E^2$ és Q egy téglalap, akkor a téglalap "belseje" csupa belső pontot tartalmaz, oldalai csupa határpontot tartalmaznak és a téglalapon kívül külső pontok vannak. Bonyolultabb halmaz esetén az osztályozás nem ilyen egyszerű.

2.6 Definíció

Az $Q \subset K$ halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont.

2.7 Definíció

Az $Q \subset K$ halmaz zárt, ha minden határpontját tartalmazza.

2.8 Definíció

Az $Q \subset K$ halmaz korlátos, ha van K_0 , hogy $Q \subset K_0$.

2.9 Definíció

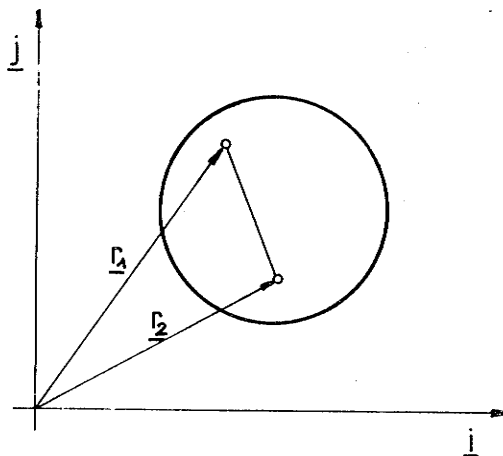
Az $Q \subset K$ halmaz konvex, ha bármely $x_1, x_2 \in Q$ -ra és bármely $t \in [0, 1]$ -re igaz, hogy

$$x_1 + t (x_2 - x_1) \in Q \dots$$

Az $x = x_1 + t (x_2 - x_1)$ egyenlettel definiált $x: \mathbb{R} \rightarrow K$ függvény ugyanazt a szerepet tölti be, a normált terekben, mint az $\underline{x} = \underline{x}_1 + t (\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$ egyenletű egyenes a közönséges térben. Az

$$\{x : x = x_1 + t (x_2 - x_1), \quad t \in [0, 1]\}$$

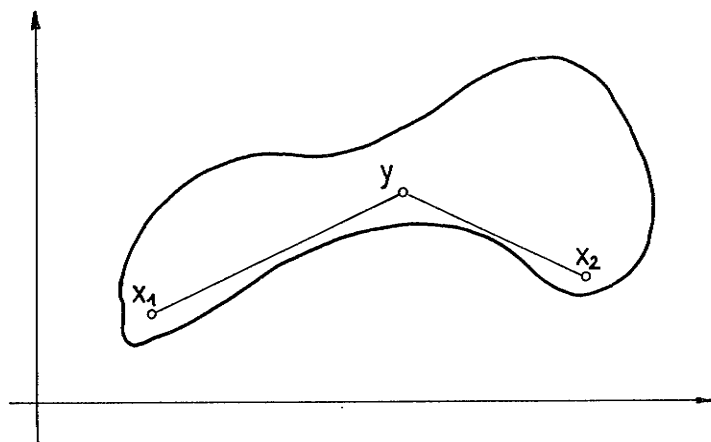
halmaz az x_1 és x_2 pontokat összekötő "szakasza" (lásd: 1. ábra).



1. ábra

Az eddigi ismeretek alapján még nem tudjuk megadni az "összefüggő halmaz" legáltalánosabb fogalmát. Egy szűkebb fogalom lehet az "összefüggés" definiálására a következő: $Q \subset K$ összefüggő, ha bármely $x_1, x_2 \in Q$ -hoz vannak

$y_1, y_2, \dots, y_n$ (n tetszőleges) pontok, hogy az x_1 és y_1 , y_1 és $y_2, \dots, y_n$ és x_2 pontokat összekötő szakaszok benne vannak Q -ban (lásd: 2. ábra).



2. ábra

2.10 Definíció

Legyen $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ a K normált tér elemeinek egy végtelen sorozata. Azt mondjuk, hogy e sorozat elemei az $x \in K$ vektorhoz konvergálnak (jelben $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$), ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Ebben az esetben x a sorozat határértéke. A sorozat konvergens, ha van határértéke.

A továbbiakban sorozatokkal és sorokkal foglalkozunk. Az alanti definíciók természetesen $\mathbb{R}$ -ben (mint legegyszerűbb normált térben) is igazak és akkor az ismert fogalmakat adják változatlanul vissza.

2.11 Definíció

Legyen $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ a K normált térben egy sorozat.

Az $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$ (végtelen) soron (más jelöléssel:

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$) az

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$s_n = x_1 + \dots + x_n$$

ún. részletösszegek sorozatát értjük. E sor akkor konvergens, ha az $s_1, s_2, \dots$ sorozat konvergens. Konvergencia esetében a sor határértékén a részletösszegek sorozatának határértékét kell érteni.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

(Figyeljük meg, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ szimbólumot tehát két-

féle értelemben használjuk. Egyrészt egy sorozat (a részletösszegek sorozata) jelölésére, másrészt e sorozat határértékének a jelölésére, ha ez a határérték egyáltalán létezik.)

2.12 Definíció

Legyen $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ a K normált térben egy sorozat.

$t \in K$ a sorozat torlódási pontja, ha t bármely környezetében van a sorozatnak t -től különböző eleme.

A sorozat torlódási pontja a következő alapvető tulajdonságokkal rendelkezik:

- lehet, hogy t eleme, de az is lehet, hogy nem eleme az adott sorozatnak;
- t bármely környezetében végtelen sok sorozatbeli elem is van. Tekintettel azonban arra, hogy a sorozat különböző elemei (tehát különböző indexű elemei) nem

feltétlenül különböző elemei K -nak is, ezért a 2.4. és 2.12. Definíciók között itt lényeges különbség van;

- ha a sorozat konvergens és határértéke x , akkor x egyben torlódási pont is. Fordítva azonban nem áll;
- ha a sorozatnak van(nak) torlódási pontja(i), ebből még nem következik, hogy a sorozat konvergens;
- a sorozat akár konvergens, akár nem, ha van torlódási pontja, akkor kiválasztható a sorozatból ahhoz konvergáló részsorozat (részsorozaton a következőt értjük:

az $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ sorozat rész sorozata az

$x_1, x_2, \dots, x_{j_1}, \dots$ sorozatnak, ha bármely $k_1 < k_2$ -höz van $j_1 < j_2$, hogy $y_{k_1} = x_{j_1}$, $y_{k_2} = x_{j_2}$.

2.13 Definíció

A K normált tér $x_1, x_2, \dots$ sorozata Cauchy-sorozat, ha

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

2.1 Tétel

Konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

BIZONYÍTÁS:

Legyen $x_1, \dots, x_n, \dots$ konvergens: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny. Válasszunk olyan N küszöbindexet, hogy

$$n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon/2.$$

Legyen most, $n, m > N$. Ekkor

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) + (x - x_m)\| \leq$$

$$\leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \varepsilon!$$

A következő tétel bizonyításához egy segédteételre van szükségünk.

SEGÉDTÉTEL

Legyen $e_1, \dots, e_n$ bázis K^n -ben. $|x|$ jelölje az alábbi számot:

$$|x| = \max_k |\lambda_k|, \quad \text{ahol}$$

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in K^n.$$

Tekintsük a következő H halmazt:

$$H = \{x \in K^n: |x| = 1\}.$$

Legyen d az alábbi szám:

$$d = \inf_{x \in H} \|x\|$$

akkor $d > 0$.

BIZONYÍTÁS

Nyilván $d \geq 0$.

Tegyük fel, hogy $d = 0$. Ekkor létezik egy olyan $x_1, x_2, \dots, \dots, x_n, \dots$ H -beli sorozat, amelyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = 0$$

Vizsgáljuk e sorozat elemeinek koordinátáit!

$$x_k = \lambda_1^{(k)} e_1 + \dots + \lambda_n^{(k)} e_n.$$

Nyilvánvalóan $|\lambda_i^{(k)}| \leq 1$ ($i=1, \dots, n$). A $\lambda_1^{(k)}$ sorozat kor-

látos lévén kiválasztható belőle konvergens részsorozat:

$\lambda_1^{(k_1)}, \lambda_1^{(k_2)}, \dots, \lambda_1^{(k_i)}, \dots$. A $\lambda_2^{(k_i)}$ sorozat is korlátos lévén, ebből is kiválasztható egy konvergens részsorozat stb. Végző soron az x_k , $k=1, 2, \dots$ sorozatból kiválasztható egy $y_1, y_2, \dots$ részsorozat, hogy az elemek koordinátái konvergensek:

$$y_k = \mu_1^{(k)} e_1 + \dots + \mu_n^{(k)} e_n, \quad |y_k| = 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^{(k)} = \mu_j$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k\| = 0$$

Vizsgáljuk most az $y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$ vektort.

Lássuk be, hogy $y \in H$, vagyis $\max_j |\mu_j| = 1$. Ugyanis, bármely

k -hoz van i , hogy $y_k = x_i$, vagyis $\mu_j^{(k)} = \chi_j^{(i)}$, $x_i \in H$

miatt $\max_j |\chi_j^{(i)}| = \max_j |\mu_j^{(k)}| = 1$, így valóban $\max_j |\mu_j| = 1$.

Továbbá $\|y\| = 0$, hiszen

$$\|y\| \leq \|y - y_k\| + \|y_k\| \leq \varepsilon/2 + \|y - y_k\| =$$

$$= \|(\mu_1 - \mu_1^{(k)})e_1 + \dots + (\mu_n - \mu_n^{(k)})e_n\| + \varepsilon/2 \leq$$

$$\leq \varepsilon/2 + n \max_j |\mu_j - \mu_j^{(k)}| \max_j \|e_j\| < \varepsilon,$$

ha $\max_j |\mu_j - \mu_j^{(k)}| < \varepsilon / (2n \max_j \|e_j\|)$, ami teljesül, ha

k elég nagy. Ebből következik, hogy

$$y = 0 = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n,$$

$$1 \leq |\mu_1| + |\mu_2| + \dots + |\mu_n| \neq 0.$$

Ez pedig ellentmondás, tehát $d > 0$!

2.2 Tétel

2.2.1. K^n -ben (n -dimenziós) minden Cauchy-sorozat konvergens.

2.2.2. K^n -ben a konvergencia koordinátánként számítható, vagyis a sorozat elemeinek koordinátái rendre a határérték megfelelő koordinátáihoz konvergálnak.

BIZONYÍTÁS

Vegyük egy tetszőleges $x \in K^n$ vektort:

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Legyen $\tilde{x} = \frac{x}{|x|}$. Nyilván $\tilde{x} \in H$. Így segédállításunk értelmében:

$$\|x\| = \|\tilde{x} \cdot |x|\| = \|\tilde{x}\| |x| \geq d |x|; d \neq 0.$$

Ha $\|x\| < \varepsilon$, akkor $|x| < \varepsilon/d$.

Legyen most $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ egy Cauchy-sorozat:

$$x_k = \lambda_1^{(k)} e_1 + \dots + \lambda_n^{(k)} e_n$$

$$\begin{aligned} \|x_j - x_k\| &= \|(\lambda_1^{(j)} - \lambda_1^{(k)}) e_1 + \dots \\ &\dots + (\lambda_n^{(j)} - \lambda_n^{(k)}) e_n\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\max_i |\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(k)}| < \varepsilon/d,$$

tehát a $\lambda_i^{(k)}$ sorozat valós Cauchy-sorozat, így konvergens:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{(k)} = \lambda_i.$$

Most már egyszerűen belátható, hogy $x_k, k=1,2,\dots$ Cauchy-sorozatunk az

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

sorozathoz konvergál és a konvergencia koordinátánként is fennáll!

Figyeljük meg, hogy a bizonyítás ∞ -dimenziós normált térre nem vihető át. Ez nem véletlen: a ∞ -dimenziós normált terekben a Cauchy-sorozatok nem feltétlenül konvergensek.

(A bizonyításban elsősorban ott használtuk ki, hogy K^n véges dimenziós, ahol az n db koordináta, ill. n db bázis elem közül a legnagyobb abszolút értékűt, ill. normáját kiválasztottuk. Ugyanis végtelen valós számhalmaznak jól tudjuk, hogy nem feltétlenül van legnagyobb eleme, - még ha korlátozott, akkor sem!)

2.14 Definíció

A K normált tér teljes, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens. A B teljes normált tereket Banach-tereknek nevezzük.

Mint láttuk, minden véges dimenziós normált tér teljes. Így a "teljes - nem teljes" megkülönböztetésnek csak ∞ -dimenzió esetén van értelme. Ezért ha Banach-térről beszélünk, általában ∞ -dimenziós térre gondolunk. Véges dimenziós normált tereknél pedig a "Banach-tér" vagy "n-dimenziós Banach-tér" kifejezés helyett jobb az "n-dimenziós normált tér" kifejezést használni.

Teljes terekben definíciónk értelmében a "Cauchy-sorozat" és "konvergens-sorozat" ekvivalens fogalmak. Hasonlóképpen ekvivalens fogalmak a "nem Cauchy-sorozat" és a "nem konvergens (divergens) sorozat". A nem teljes terekben minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat, azonban itt létezik olyan Cauchy-sorozat, amely nem konvergens. A nem teljes terekben olyan korlátozott sorozat is létezik, amelynek nincs konvergens részsorozata sem.

PÉLDÁK:

A lineáris tereknél szereplő példák eseteiben megmutatjuk, miképpen lehet normákat definiálni.

1. $\mathbb{R}$ -ben és $\mathbb{C}$ -ben norma lehet az abszolút érték.
2. $\mathbb{R}^n$ -ben kétféle lehetséges normát mutatunk:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ akkor}$$

$$2.1. \quad \|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad \text{az ún. euklideszi norma}$$

$$2.2. \quad \|x\| = \max_k |x_k| \quad \text{az ún. maximum norma.}$$

Az $\mathbb{R}^n$ -beli bármely norma átvihető tetszőleges L^n -be a következő módon. L^n -ben felvesszünk egy koordináta-rendszert (bázist). Legyenek az $y \in L^n$ vektor koordinátái az $x \in \mathbb{R}^n$

szám n -es elemei. Ekkor definíciószerűen

$$\|y\| = \|x\|.$$

így pl. Q^n -ben és S^n -ben azonnal adódik az euklideszi és a maximum norma.

FELADAT:

- a) Mutassuk meg, hogy az L^n -ben ilyen módon definiált függvény valóban norma!
- b) Vezessünk be C^n -ben normát!

3. $n \times n$ -es mátrixok:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|; \quad x \in Q^n.$$

FELADAT:

Bizonyítsuk be, hogy $\|A\|$ nem más, mint az $A^T A$ mátrix legnagyobb sajátértékének négyzetgyöke!

4. Q^n , S^n lásd: 2.,

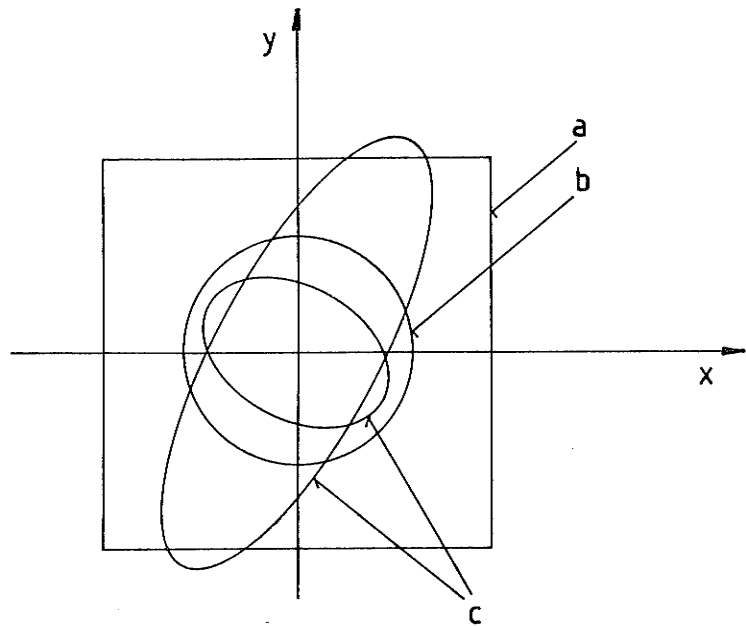
5. E^3 , E^2 és E^1 -ben a vektor normája a vektor hossza (abszolút értéke)
Ez az ún. euklideszi vektornorma. Az elnevezés egyezése 2.1. elnevezésével indokolt, hiszen a vektor hossza valóban koordinátáinak euklideszi normája (derékszögű koordináta-rendszerben!)

Figyeljük meg, hogy a vektor euklideszi normája bármely ortonormált koordináta-rendszerben ugyanannyinak adódik a koordinátákból kiszámítva. Ezzel szemben ha a vektor normáját mint koordináta oszlopvektorának maximum normáját definiáljuk (lásd a 2.2. Tétel bizonyításában a $|\cdot|$ -t!), akkor ez a norma már koordináta-rendszer függő! Másképpen: a maximum norma nem egyértelmű, minden koordináta-rendszerhez más maximum norma tartozik.

A lehetséges normák sokféleségéről kitűnő képet kapunk, ha pl. E^2 -ben ábrázoljuk a norma egység "körét", vagyis a

$$H = \{ \underline{r} \in E^2 : \|\underline{r}\| = 1 \}$$

halmazt. Ez a halmaz egy az origóra centrálisan szimmetrikus, zárt, konvex alakzat (lásd: 3. ábra).



3. ábra

- a: maximum norma (egy c konstanssal szorozva)
 b: euklideszi norma
 c: egyéb lehetséges normák "egységkörei"

FELADAT:

- a) Mutassuk meg, hogy az

$$\| \underline{r} \| = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

összefüggés (ahol $\underline{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ és a, b adott konstansok) normát definiál és e "norma" "egység köre" ellipszis!

- b) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ -ben az $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}$ összefüggés normát definiál, ahol $\mathbf{V}$ pozitív definit $n \times n$ -es mátrix (lásd: 4.6. Definíciót).

6. Tekintsük C_I^0 -t, ahol I korlátos, zárt intervallum.

6.1. Vezessük be az ún. maximum normát:

$$f \in C_I^0 ; \| f \| = \sup_{x \in I} | f(x) | .$$

Az így definiált számérték valóban minden $f \in C_I^0$ -re létezik, (sőt bármely f -hez létezik x_0 , hogy $| f(x_0) | = \| f \|$,

így $\sup$ helyett $\max$ is írható) és ez az egyenlet valóban normát definiál.

Mutassuk meg, hogy ezzel a normával C_I^0 Banach-tér.

Legyen $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ Cauchy-sorozat.

Legyen N olyan nagy, hogy adott $\varepsilon > 0$ -ra

$$n, m > N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Ez a következőt jelenti:

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\| = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)|.$$

Rögzített x -re tehát a numerikus $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ sorozat is Cauchy-sorozat így konvergens, határértéke legyen $f(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Ha most ismét teljesül, hogy $n > N$, akkor becsüljük meg rögzített x -re $|f_n(x) - f(x)|$ -t. Mivel bármely $n, m > N$ -re $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ és $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$, így nyilvánvalóan

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Mivel ez bármelyik $x \in I$ -re igaz, így

$$\max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\| \leq \varepsilon.$$

Most már csak azt kell belátnunk, hogy $f \in C_I^0$.

$f(x)$ folytonos x_0 -ben, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $x_0 + \Delta x \in I, \|\Delta x\| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)| < \varepsilon$.

Legyen N most olyan, hogy

$$n > N \Rightarrow \max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon / 3$$

és legyen $\delta > 0$ olyan, hogy valamely $n_0 > N$ -re

$$x_0 + \Delta x \in I, \|\Delta x\| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x_0 + \Delta x)| < \varepsilon / 3$$

Ezzel

$$\begin{aligned}
 |f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)| &= |f(x_0) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x_0 + \Delta x) + \\
 &+ f_{n_0}(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)| \leq |f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| + \\
 &+ |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x_0 + \Delta x)| + |f_{n_0}(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)| < \epsilon.
 \end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy x_0 tetszőleges, így valóban $f \in C_I^0$!

6.2. Megmutatható, hogy az $\int_a^b |f(x)| dx$ ($I=[a,b]$) határozott integrál is normát definiál. Tehát

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Most bebizonyítjuk, hogy ilyen normával C_I^0 nem Banach-tér.

Legyen $f_n(x) = (\operatorname{sgn} x) \sqrt[n]{|x|}$, $I = [-1; 1]$. f_n korlátos sorozat: $\|f_n\| \leq 1$.

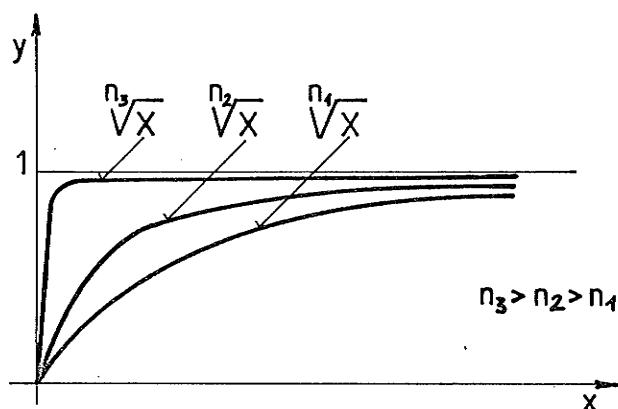
Legyen most $m \geq n$, akkor

$$\begin{aligned}
 \|f_m - f_n\| &= \int_{-1}^1 |(\operatorname{sgn} x) \sqrt[m]{|x|} - (\operatorname{sgn} x) \sqrt[n]{|x|}| dx = \\
 &= 2 \int_0^1 (\sqrt[m]{x} - \sqrt[n]{x}) dx \leq 2 \int_0^1 (1 - \sqrt[n]{x}) dx.
 \end{aligned}$$

Ha felrajzoljuk $\sqrt[n]{x}$, $x > 0$ grafikonját (lásd: 4. ábra), akkor nyilvánvaló, hogy bármely $\epsilon > 0$ -ra elég nagy n esetén

$$\|f_m - f_n\| \leq 2 \int_0^1 (1 - \sqrt[n]{x}) dx < \epsilon.$$

Tehát $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ Cauchy-sorozat, de nem konvergens.



4. ábra.

Tegyük ui. fel az ellenkezőjét:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, f \in C_I^0.$$

Legyen most $\delta > 0$ tetszőlegesen kicsiny és $0 < \varepsilon_0 < 1$ rögzített.

Legyen N_1 akkora, hogy $n > N_1$ esetén

$$\sqrt[n]{\delta/2} > 0,5 + \varepsilon$$

valamely $\varepsilon > 0$ -ra. N_2 -re pedig:

$$n > N_2 \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Ezzel

$$\left| f\left(-\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{\delta}{2}\right) \right| = \left| f\left(-\frac{\delta}{2}\right) - f_n\left(-\frac{\delta}{2}\right) + f_n\left(-\frac{\delta}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - f_n\left(\frac{\delta}{2}\right) + f_n\left(\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{\delta}{2}\right) \right| \geq \left| f_n\left(-\frac{\delta}{2}\right) - f_n\left(\frac{\delta}{2}\right) \right| - 2\varepsilon \geq 1 > \varepsilon_0,$$

ha $n > \max(N_1, N_2)$.

Ez pedig ellentmond $f(x)$ folytonosságának, vagyis annak,

hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, f \in C_I^0$ létezik!

f_n tehát korlátos és nem konvergens sorozat, sőt - egyszerűen belátható - konvergens részsorozata sincs.

Függvénysorozat konvergenciája a fenti két példa szerint a választott normától függ. Lehetséges azonban olyan konvergencia fogalom bevezetése is, amely független mindenféle normától:

2.10 Definíció

Az $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ ($f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$) függvénysorozat pontonként konvergál az f függvényhez, ha bármely rögzített $x \in D$ -re az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ numerikus sorozat $f(x)$ -hez konvergál:

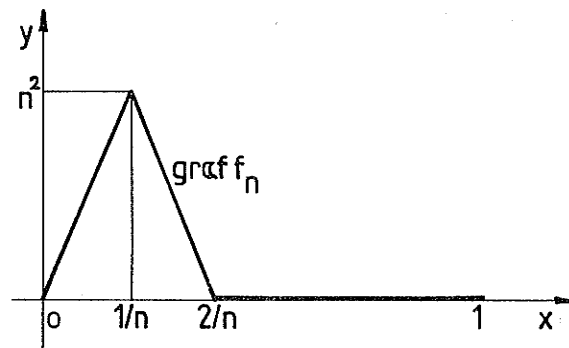
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) .$$

Láttuk, hogy C_I^0 a maximum-normával Banach-tér. Ennek Bizonyításából az is kiderül, hogy ha f_n f -hez konvergál Banach-térbeli értelemben, akkor ugyancsak f -hez konvergál a pontonkénti konvergencia értelmében is. A Banach-térbeli értelemben vett konvergenciát a maximum-norma esetében egyenletes konvergenciának nevezzük. Nem természetes, hogy ha folytonos függvények pontonként konvergálnak, akkor a határérték függvény folytonos. Erre éppen a már említett

$(\operatorname{sg} x)^{\sqrt[n]{|x|}}$ függvény jó példa, amely pontonként konvergál:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{sg} x)^{\sqrt[n]{|x|}} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 . \end{cases}$$

Ez a függvény valóban nem folytonos az $x = 0$ helyen. Ha folytonos függvények a zárt I intervallumon pontonként folytonos függvényhez konvergálnak, még nem biztos, hogy az említett két másik C_I^0 -beli konvergencia relációkkal is konvergálnak. Ezt egy ropant egyszerű példával tudjuk bizonyítani. Legyen f_n az a függvény, amelynek grafikonját az ábrán láthatjuk:



5. ábra

Nyilvánvalóan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Ugyanakkor maximum normában:

$$\|f_m - f_n\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_m(x) - f_n(x)| \approx m^2, \text{ ha } m \gg n;$$

a tárgyalt másik normában:

$$\|f_m - f_n\| = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|^2 dx \approx m^{-n}, \text{ ha } m \gg n.$$

3. Operátorok normált terekben

A normált tér fogalma elég gazdag ahhoz, hogy szinte minden lényegest, amit az egyváltozós valós függvényekről tanultunk, nagymértékben általánosítani tudjunk. A valós függvények általánosításai az operátorok, ill. funkcionálok.

3.A) Operátorok. Operátorok határértéke, folytonossága, deriválhatósága

3.1 Definíció

Legyenek K_1 és K_2 normált terek. Az $f: Q \rightarrow K_1$, $Q \subset K_2$ függvényt operátornak (vagy leképezésnek, vagy transzformációnak) nevezzük. Ha $K_1 = \mathbb{K}$, akkor f (valós vagy komplex) funkcionál.

3.2 Definíció

Az $f: Q \rightarrow K_1$, $Q \subset K_2$ operátor határértéke az $x_0 \in K_2$ helyen (ahol x_0 Q torlódási pontja) $y_0 \in K_1$ (jelben: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$), ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik

$\delta > 0$, hogy $x \in Q$ és $0 < \|x_0 - x\| < \delta$ -ból

$$\|y_0 - f(x)\| < \varepsilon \text{ következik.}$$

3.3 Definíció

3.3.1. Az $f: \mathcal{Q} \rightarrow K_1$, $\mathcal{Q} \subset K_2$ operátor folytonos az $x_0 \in \mathcal{Q}$ torlódási pontban, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$$

3.3.2. f folytonos $H \subset \mathcal{Q}$ -ban, ha annak minden pontjában folytonos.

3.4 Definíció

Az $f: K_2 \rightarrow K_1$ operátor

3.4.1. homogén, ha $f(\lambda x) = \lambda f(x)$,

3.4.2. additív, ha $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$,

3.4.3. lineáris, ha additív és folytonos K_2 -ben.

Az A homogén lineáris operátor esetében $A(x)$ helyett Ax -t írunk.

MEGJEGYZÉS:

a szakirodalomban gyakran azt értik lineáris operátoron, amit itt a 3.4. Definíció értelmében homogén lineárisnak nevezünk.

3.1 Tétel

Legyen az $f: K_2 \rightarrow K_1$ operátor homogén és additív.

Ha K_2 n -dimenziós, akkor f folytonos.

BIZONYÍTÁS:

Feltételezés szerint f egész K_2 -n értelmezett. Nyilván $f(0) = 0$, hiszen

$$f(0) = f(0x) = 0 f(x) = 0,$$

Most megmutatjuk, hogy f 0 -ban folytonos, vagyis

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Legyen K_2^n -ben $e_1, \dots, e_n$ bázis. E bázisban valamely $x \in K_2$ -re

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

A 2.2 Tétel előtti segédteétel értelmében:

$$\|x\| \geq d \max_k |\lambda_k|, \quad d > 0,$$

ahol d az adott bázisban rögzített konstans. Ezzel

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(0)\| &= \|f(x)\| = \|\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)\| \leq \\ &\leq |\lambda_1| \|f(e_1)\| + \dots + |\lambda_n| \|f(e_n)\| \leq \frac{\|x\|}{d} n \max_k \|f(e_k)\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

amennyiben

$$\|x\| < \frac{d\varepsilon}{n \max_k \|f(e_k)\|} = \delta.$$

Tehát f 0-ban valóban folytonos. Ebből azonban az következik, hogy f mindenhol folytonos. Ugyanis:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f(x) + f(\Delta x) - f(x) = f(\Delta x),$$

így valóban

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x) !$$

3.5 Definíció

A K normált térben folytonos útnak nevezzük a $\gamma: I \rightarrow K$; $I \subset \mathbb{R}$; (I intervallum) folytonos operátort.

3.6 Definíció

Az $Q \subset K$ halmaz összefüggő, ha bármely két $x_1, x_2 \in Q$ pont összeköthető Q -ban haladó γ folytonos úttal:

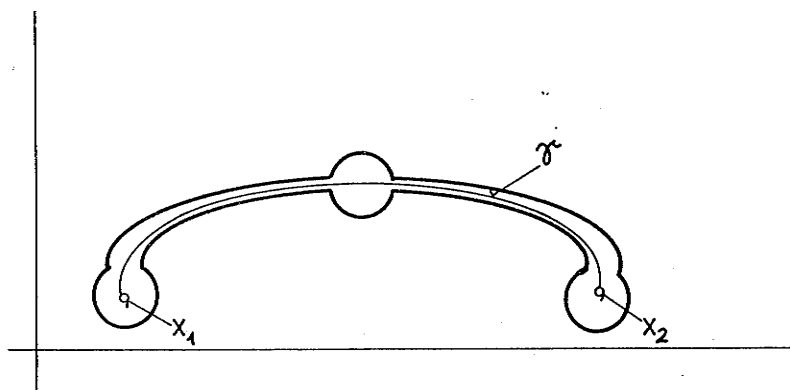
$$I = [a, b]$$

$$\gamma(a) = x_1, \quad \gamma(b) = x_2,$$

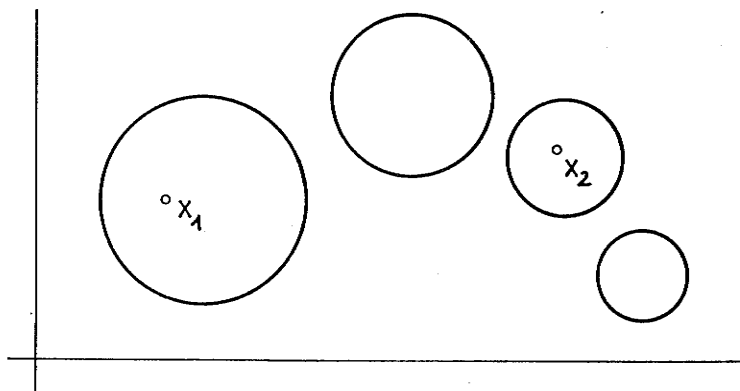
$$\gamma(t) \in Q \quad \text{ha} \quad t \in [a, b].$$

MEGJEGYZÉS:

a 3.6. Definíció szerinti fogalom pontosabban az ún. ívszerűen összefüggőség és az összefüggőségen egy bonyolultabb fogalmat kell érteni, amellyel itt nem foglalkozunk. A rövidebb szóhasználat értelmében mi az ívszerűen összefüggőt



6. ábra



7. ábra

fogjuk egyszerűen összefüggőnek nevezni. E^2 -beli összefüggő halmazt a 6. ábra, a 7. ábra pedig nem összefüggő halmazt mutat.

3.7 Definíció

Az $f: Q \rightarrow K_1$, $Q \subset K_2$ operátor deriválható az $x_0 \in Q$ torlódási pontban, ha x_0 -nak van olyan K_{x_0} környezete, hogy minden $x \in K_{x_0} \cap Q$ -ra

$$f(x) - f(x_0) = A \Delta x + \varepsilon(\Delta x),$$

ahol

$$\Delta x = x - x_0,$$

A homogén lineáris operátor,
 ε pedig 0-ban folytonos operátor,

ezenfelül

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{\|x\|} = 0.$$

A Δx -t szokás a megváltozás fő részének, míg $\varepsilon(\Delta x)$ -t az elenyésző résznek nevezni. Ha A nem a zérus operátor (amely minden $x \in K_2$ -hoz a 0-t rendeli), akkor ezt az elnevezést az indokolja, hogy az $\|A \Delta x\|/\|\varepsilon(\Delta x)\|$ hányados tetőzetlegesen nagy lehet, ha $\|\Delta x\|$ megfelelően kicsiny.

Az A és az ε operátorok x_0 -nak függvényei, amennyiben minden $x_0 \in Q$ pontban más és más az A valamint az ε operátor a fenti egyenlőségben.

3.B) A szukcesszív approximáció

3.8 Definíció

Tekintsük az $f: Q \rightarrow K$, $Q \subset K$ operátort. f -nek $x_0 \in Q$ fix pontja, ha $f(x_0) = x_0$.

3.9 Definíció

Tekintsük az $f: Q \rightarrow K, Q \subset K$ operátort. Szukcesszív approximációnak nevezzük (amennyiben létezik) az alábbi rekurzív megadáású sorozatot:

$$x_0 \in Q \quad (\text{kiindulási elem})$$

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.2 Tétel

Ha a szukcesszív approximáció konvergens, $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \in Q)$ és f folytonos Q -ban, akkor x_n az operátor valamelyik fix pontjához konvergál (vagyis: $f(x^*) = x^*$).

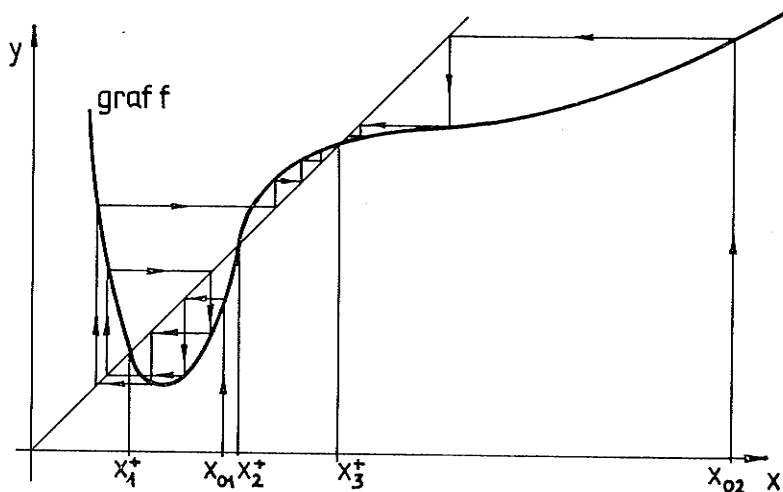
BIZONYÍTÁS:

f x^* -beli folytonossága a következőt is jelenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x^*).$$

Tekintettel arra, hogy

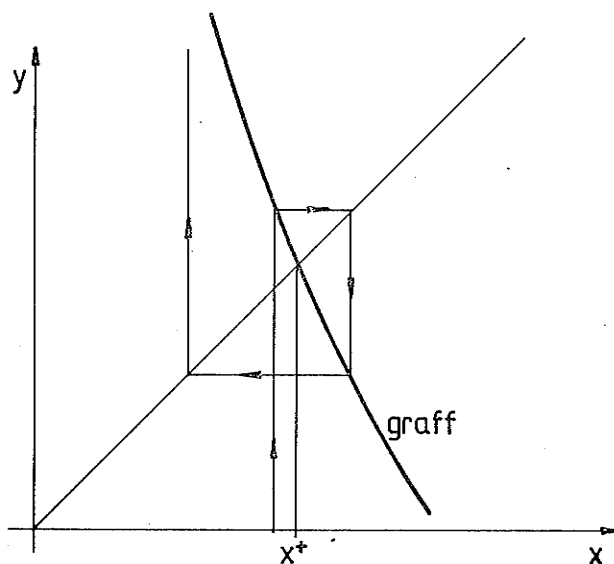
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*,$$



8. ábra

így az $x_{n+1} = f(x_n)$ egyenlőséget figyelembe véve állításunkat igazoltuk!

Szukcesszív approximáció a jól ismert iteráció is. A 8. ábrán egy egyváltozós valós függvény (f) grafikonát látjuk. f -nek három fix pontja van: x_1^* , x_2^* , x_3^* . Láthatjuk, hogy bármely kiindulási elemet választunk is (pl. x_{01} vagy x_{02}) két eset lehetséges: vagy véges lépésben elérjük valamelyik fix pontot, vagy az iteráció x_3^* -hoz konvergál (x_1^* és x_2^* -höz nem konvergálhat!



9. ábra

A szukcesszív approximációra egy további egyszerű illusztratív példát a 59. oldalon találunk.

3.C) Lineáris egyenletek

3.10 Definíció

Legyen $A:K \rightarrow K$ homogén lineáris operátor.
Az $\lambda \in K$ számot A sajátértékének nevezzük, ha van $s \in K$,
 $s \neq 0$ (e sajátértékhez tartozó) ún. sajátvektora, hogy

$$As = \lambda s .$$

3.11 Definíció

Tekintsük az $A:K \rightarrow K$ homogén lineáris operátort. Ha a leképezés egy-egy értelmű, akkor A nem elfajuló. Ellenkező esetben A elfajuló.

3.3 Tétel

Az A homogén lineáris operátornak $\lambda = 0$ pontosan akkor sajátértéke, ha A elfajuló.

BIZONYÍTÁS:

Legyen A elfajuló. Ekkor létezik $x_1 \neq x_2$ és x_3 , hogy

$$Ax_1 = Ax_2 = x_3$$

hiszen a leképezés nem egy-egy értelmű. Ebből

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = 0,$$

tehát $x_1 - x_2 = s \neq 0$ sajátvektor $\lambda = 0$ sajátértékkel.

Ezután nézzük meg, hogy ha A -nak létezik $\lambda = 0$ sajátértéke, akkor következik-e ebből A elfajuló volta. Legyen s e zérus sajátértékhez tartozó sajátvektor.

$$As = 0, s \neq 0 .$$

Válasszunk tetszőleges x_1 elemet. Legyen $Ax_1 = x_3$.

Ekkor $x_2 = x_1 + s \neq x_1$ választással bizonyítottuk, hogy A elfajuló, hiszen

$$Ax_2 = A(x_1 + s) = Ax_1 + As = Ax_1 = x_3 !$$

3.4 Tétel

Ha A -nak $s_1, \dots, s_r$, $\lambda = 0$ -hoz tartozó saját vektorai, akkor ezek tetszőleges lineáris kombinációi is $\lambda = 0$ -hoz tartozó saját vektorok.

BIZONYÍTÁS:

$$\begin{aligned} A(\mu_1 s_1 + \dots + \mu_r s_r) &= \\ &= \mu_1 A s_1 + \dots + \mu_r A s_r = 0 ! \end{aligned}$$

3.12 Definíció

3.12.1. Legyen $A: K \rightarrow K$ homogén lineáris operátor. Az

$$Ax = 0$$

egyenletet homogén lineáris egyenletnek nevezzük, ahol $x \in K$ ismeretlen. Ennek az egyenletnek $x_0 \in K$ megoldása, ha az $Ax_0 = 0$ egyenlőség fennáll.

3.12.2. Az $Ax = b$, egyenletet inhomogén lineáris egyenletnek nevezzük, ahol $x \in K$ ismeretlen, $b \in K$ adott vektor. Adott $x_0 \in K$ megoldás, ha az $Ax_0 = b$ egyenlőség fennáll.

Az $Ax = 0$ egyenletet az $Ax = b$ inhomogén egyenlethez rendelt homogén egyenletnek nevezzük.

3.5 Tétel

3.5.1. Az $Ax = 0$ homogén egyenletnek a nullvektor megoldása (triviális megoldás).

3.5.2. Az $Ax = 0$ homogén egyenlet nem triviális megoldásai pontosan a zérus saját értékhez tartozó saját vektorok. (Tehát nem triviális megoldás csak akkor létezik, ha A elfajuló.)

3.5.3. Az $Ax = b$ inhomogén egyenlet bármely megoldása egy tetszőleges megoldás (partikuláris megoldás) és a hozzárendelt homogén egyenlet valamely megoldásának összegeként írható fel.

BIZONYÍTÁS:

A 3.5.1. és 3.5.2. állítás nyilvánvaló. 3.5.2.-ben a zárójeles állítás a 3.3. Tétel közvetlen következménye.

3.5.3. Legyen x_p egy partikuláris megoldás:

$$Ax_p = b$$

és x_o a homogén egyenlet valamely megoldása:

$$Ax_o = 0.$$

Ekkor $x_p + x_o$ valóban megoldása az inhomogén egyenletnek:

$$A(x_p + x_o) = Ax_p + Ax_o = b + 0 = b.$$

Fordítva: x_p mellett legyen x valamely megoldása az inhomogén egyenletnek:

$$Ax = b$$

akkor $x_o = x - x_p$ nyilván megoldása a homogén egyenletnek:

$$A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0.$$

Tehát e tetszőlegesen választott x megoldás valóban $x_p + x_o = x$ alakban írható fel!

3.D) A homogén lineáris operátorok normált tere

3.13 Definíció

Az $A:K_2 \rightarrow K_1$ homogén lineáris operátor korlátos, ha létezik $m \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy

$$\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq m.$$

A korlátos homogén lineáris operátorok halmazát (amelyek K_2 -t K_1 -be képezik le) $[K_2 \rightarrow K_1]$ -vel fogjuk jelölni.

3.6 Tétel

$[K_2 \rightarrow K_1]$ lineáris tér a műveletek szokásos értelmezése mellett.

A műveletek szokásos értelmezésén a következőket értjük:

$$(A + B) x = Ax + Bx$$

$$(\lambda A) x = \lambda (Ax)$$

$$(-A) x = - (Ax)$$

Null elem a minden $x \in K_2$ -t a $0 \in K_1$ -be leképező operátor.
Az 1.1. Definíció axiómái nyilvánvalóan teljesülnek.

3.7 Tétel

A norma alábbi definíciója mellett $[K_2 \rightarrow K_1]$ normált tér:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|$$

BIZONYÍTÁS:

A második egyenlőség nyilvánvaló, hiszen

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|Ay\|, \text{ ahol } y = \frac{x}{\|x\|} \text{ és } \|y\| = 1.$$

Nézzük meg, $\|A\|$ valóban norma-e!

$\|A\|$ létezik és $\mathbb{R}^+$ -beli.

$\|0\| = 0$ nyilvánvalóan. Legyen $\|A\| = 0$, ekkor

$$0 = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq 0.$$

Ha $x \neq 0$, akkor $\|Ax\| = 0$, amelyből következik, hogy $Ax = 0$ minden x -re, tehát $A = 0$.

$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ nyilvánvaló. Végül ellenőrizzük a háromszög egyenlőtlenségét:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} = \sup \frac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} \leq \\ &\leq \sup \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \leq \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\| ! \end{aligned}$$

Ha K_1 és K_2 véges dimenziós Banach-tér, akkor mindig létezik $x_0 \in K_2$, hogy

$$\|A\| = \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad \text{tehát akkor } \sup \text{ helyett}$$

max írható.

$[K \rightarrow K]$ -ben egyéb speciális elemeket is megnevezünk és szorzást is definiálunk.

3.14 Definíció

$[K \rightarrow K]$ -ben E -vel jelöljük azt az (egyértelműen meghatározott) operátort, amelyre $Ex = x$ minden $x \in K$ -re.

3.15 Definíció

$[K \rightarrow K]$ -ban az A nem elfajuló operátor inverzét A^{-1} -gyel jelöljük.

3.16 Definíció

Legyen $A, B \in [K \rightarrow K]$. AB -vel jelöljük azt (az ugyancsak $[K \rightarrow K]$ -beli?) operátort, amelyre

$$(AB)x = A(Bx).$$

Általában $AB \neq BA$.

Egyszerűen beláthatók a következő tétel állításai:

3.8 Tétel

Legyenek $A, B, C \in [K \rightarrow K]$, E egység, 0 null operátor, akkor:

$$EA = AE = A$$

$$0A = A0 = 0$$

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

$$\|E\| = 1$$

$$\|0\| = 0$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

$$\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$$

PÉLDÁK

1. Legyen K normált tér. E térben a norma funkcionál, de nem lineáris funkcionál. Ugyanis a norma folytonos, de nem additív és nem homogén:

$$\|\cdot\| : K \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Van $x_1 \in K$ és $x_2 \in K$, hogy $\|x_1 + x_2\| \neq \|x_1\| + \|x_2\|$.

Nevezetesen: legyen $\|x_1\| = 1$ és $x_2 = -x_1$, akkor

$$\|x_1 + x_2\| = 0 \neq \|x_1\| + \|x_2\| = 2.$$

Van $x \in K$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\|\lambda x\| \neq \lambda \|x\|$. Nevezetesen:

$x \neq 0$ és $\lambda < 0$, ekkor $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = -\lambda \|x\| \neq \lambda \|x\|$.

Végül a folytonosság bizonyítása:

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, akkor definíciószerűen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0, \text{ másrészt}$$

$$\|x - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\| = 0.$$

2. A tananyagban (eddig ill. a jövőben) a következő táblázatban felsorolt alapvető függvénytípusok fordulnak elő. Az 1. táblázatban az adott függvénytípusoknál szerepeltetjük a homogén lineáris függvényeket is, bizonyos esetekben a lehetséges geometriai jelentéssel vagy a grafikon leírásával együtt.

1. Táblázat

Függvénytípus		homogén lineáris függvény	grafikon vagy geometriai függvény által megvalósított leképezés jelentése
szimbólum	megnevezés		
$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $f(x)$	(egyváltozós) valós függvények	$f(x) = c \cdot x$ $c \in \mathbb{R}$	origón átmenő egyenes
$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$ $f(x, y)$	kétváltozós valós függvények	$f(x, y) = c_1 x + c_2 y$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$	origón átmenő sík
$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$ $f(x_1, \dots, x_n)$	többváltozós valós függvények	$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$	-
$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ $f(z)$	komplex függvények	$f(z) = dz$ $d \in \mathbb{C}$	forgatás és nagyítás (kicsinyítés)
$\underline{f}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{E}^3, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\underline{f}(t)$	egyparaméteres vektor-skalár függvények	$\underline{f}(t) = \underline{d} \cdot t$ $\underline{d} \in \mathbb{E}^3$	origón átmenő egyenes
$\underline{f}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{E}^3, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$ $\underline{f}(u, v)$	kétparaméteres vektor-skalár függvények	$\underline{f}(u, v) = \underline{d}_1 u + \underline{d}_2 v$ $\underline{d}_1, \underline{d}_2 \in \mathbb{E}^3$	origón átmenő sík
$\underline{v}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{E}^3, \mathbb{Q} \subset \mathbb{E}^3$ $\underline{v}(\underline{r})$	vektor-vektor függvények	$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{A} \underline{r}$ $\underline{A}$ ún. tenzor	homogén lineáris geometriai transzformáció (forogatás, nyújtás, vetítés, tükrözés)
$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^n, \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}^m$ $f(x)$	n-változós m-elemű (valós) függvény rendszer	$f(x) = Ax$ A nxm-es mátrix	-
$u: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{E}^3$ $u(\underline{r})$	skalár-vektor függvények	$u(\underline{r}) = \underline{d} \cdot \underline{r}$ $\underline{d} \in \mathbb{E}^3$	olyan skalár tér, amelynek ún. szintfelületei párhuzamos síkok

A táblázatban átfedések is vannak: az $f(x_1, \dots, x_n)$ típusú függvények speciális esetei a $f(x, y)$ típusúak, és mindkettő az $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ típusú függvényrendszerek speciális esetei (ha $m=1$ és $n=2$, továbbá ha Q helyett $\mathbb{R}$ -t Q^2 helyett $\mathbb{R}^2$ -t veszünk, illetve $m=1$ és a $Q^1 - \mathbb{R}, Q^n - \mathbb{R}^n$ cseréket hajtjuk végre). Többváltozós függvényeknél a homogén lineáris függvény mátrixos felírása:

$$(c_1 \dots c_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ha $m=n=1$, akkor az egyváltozós valós függvényekhez jutunk. Ha E^3 -ban lerögzítünk egy bázist, akkor a koordináták oszlopvektorban történő elrendezésével kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre az E^3 és a Q^3 terek között. Így az egyparaméteres vektor-skalár függvények $m=3, n=1$, a kétparaméteres vektor-skalár függvények $m=3, n=2$, a vektorvektor függvények $m=n=3$, végül a skalár-vektor függvények $m=1, n=3$ választással függvény rendszerekként tárgyalhatók. Ekkor a megfelelő homogén lineáris függvények rendre:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} [t]$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \\ d_{13} & d_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(d_1 \ d_2 \ d_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy a homogén lineáris függvényrendszerek valóban Ax alakúak.

Egyrészt nyilvánvaló, hogy minden Ax alakú függvény homogén lineáris, hiszen a mátrixalgebra műveleti szabályai-
ból következik, hogy

$$A(x_1 + x_2) = (Ax_1) + (Ax_2) \quad \text{és}$$

$$A(\lambda x) = \lambda(Ax) .$$

Másrészt legyen most $f(x)$ ($f(x) \in Q^m$, $x \in Q^n$) homogén lineáris. Vegyük fel Q^n -ben az alábbi bázist:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Legyen

$$f(e_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in Q^m .$$

Ekkor tetszőleges $x \in Q^n$ -re

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ;$$

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ax !$$

Most azt is mutassuk meg, hogy a komplex függvényeknél is pontosan ez alakúak a homogén lineáris függvények. Egy-

részt $d(z_1+z_2) = dz_1+dz_2$, $d(\lambda z) = \lambda(dz)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ miatt minden dz alakú függvény homogén lineáris. Másrészt, legyen $f(z)$ homogén lineáris, és legyen $f(1)=d$. Ekkor bármely $z \in \mathbb{C}$ -re $z=z \cdot 1$, így $f(z) = z f(1) = z d$!

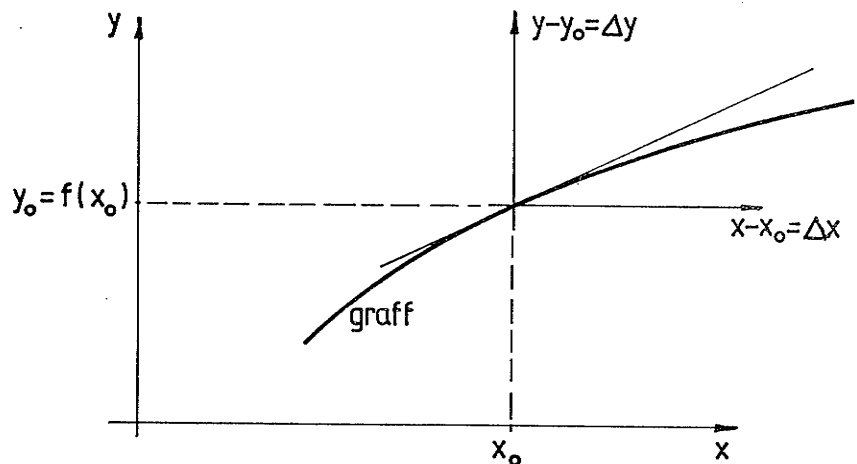
A homogén lineáris függvényeknek a matematikán kívül a gyakorlati jelentőségük is óriási: ezek - szemben azokkal, amelyekre nem igaz, hogy homogén lineárisak, vagy szokásos elnevezéssel: szemben a nemlineáris függvényekkel - lényegesen egyszerűbben kezelhetők a matematikusok és a mérnökök számára egyaránt. Ezért érthető az a törekvés, hogy a nemlineáris függvényeket homogén lineáris (röviden: lineáris) függvényekkel közelítsük.

Amelyeknél ez a közelítés lehetséges, azokat a függvényeket nevezzük differenciálhatóknak. Pontosabban - tekintsük a differenciálhatóság definícióját! - arról van szó, hogy ha

az $f: \mathcal{Q} \rightarrow K_1$, $\mathcal{Q} \subset K_2$ függvény az $x_0 \in \mathcal{Q}$ pontban differenciálható, akkor a függő változó megváltozása ($\Delta y = f(x) - f(x_0)$), a független változó megváltozásának ($\Delta x = x - x_0$) jó közelítéssel homogén lineáris függvénye ($\Delta y \approx A \Delta x$); a közelítés annál jobb, minél kisebb $\|\Delta x\|$. Más szavakkal: (az x_0

pontba eltolt) lokális koordinátarendszerben függvényünk jó közelítéssel homogén lineáris (lásd: 10. ábra), vagy röviden: a függvény az x_0 pontban lokálisan homogén lineáris.

Ezek szerint a deriválás nem más, mint a lokális Δy és Δx változók közötti közelítő homogén lineáris függvénykapcsolat meghatározása.



10. ábra

3. Legyen f egyváltozós valós függvény. Ismeretes, hogy az $f(x) = x$ egyenlet megoldható a szukcesszív approximációval (iterációval), ha $|f'(x)|$ elég kicsiny a keresett gyök megfelelő környezetében. Próbáljuk megoldani ezek után az

$$1 - zp = z ; \quad p \in \mathbb{C} ; \quad p \neq -1$$

komplex egyenletet z -re a szukcesszív approximációval!
(Az egyenlet természetesen közvetlenül is megoldható:

$$z_0 = \frac{1}{1+p}.)$$

Legyen a kiindulási elem:

$$z_1 = 1.$$

Ekkor

$$z_2 = 1 - p$$

$$z_3 = 1 - z_2 p = 1 - p + p^2$$

$$z_4 = 1 - z_3 p = 1 - p + p^2 - p^3$$

⋮

$$z_n = 1 - z_{n-1} p = 1 - p + p^2 - p^3 + \dots (-1)^{n-1} p^{n-1}$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1+p} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k p^k$$

amennyiben a jobboldalon álló sor valóban konvergens.

Látni fogjuk, hogy ez az ún. mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|p| < 1$.

A példánk természetesen csak szemléltetési célt szolgál. Az iterációt vagy szukcesszív approximációt olyankor célszerű alkalmazni, amikor az egyenlet egyszerűbb módon vagy egyáltalán máshogy nem oldható meg.

4. Legyen A $n \times n$ -es mátrix, $x \in \mathbb{Q}^n$. Akkor az Ax homogén lineáris függvény pontosan akkor nem elfajuló, ha A reguláris, ezzel szemben elfajuló, ha A szinguláris.

Az $Ax = 0$; $x \in \mathbb{Q}^n$ homogén lineáris algebrai egyenletrend-

szernek pontosan akkor van a triviálistól eltérő megoldása, ha A szinguláris.

Ha A reguláris, akkor az $Ax = b$ inhomogén egyenletnek pontosan egy megoldása van.

Ha az A mátrix rangja $r < n$, akkor a homogén egyenletnek pontosan $n-r$ lineárisan független megoldása van:

$x_{H1}, \dots, x_{H(n-r)}$ és az inhomogén egyenlet minden x megoldása az alábbi általános alakban írható fel:

$$x_1 = x_p + c_1 x_{H1} + \dots + x_{H(n-r)} c_{(n-r)} = x_p + x_c,$$

ahol

x_p egy tetszőleges partikuláris megoldás,

$$x = \begin{bmatrix} x_{H11} & \dots & x_{H1(n-r)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{Hn1} & \dots & x_{Hn(n-r)} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{a homogén egyenlet} \\ \text{ún. alaplátixa,} \end{array}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{(n-r)} \end{bmatrix} \quad \text{konstans oszlopvektor.}$$

5. Tekintsük a $\sum_{[a,b]}$ lineáris teret és vezessük itt be a supremum normát:

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Ebben a normált térben már ismerünk néhány igen fontos funkcionált.

Elsőnek tekintsük az $\int_a^b f(x) dx$ határozott integrált, amely lineáris funkcionál.

Bizonyítsuk be ezt az állítást.

Az additivitás és homogenitás nyilván teljesül:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx .$$

A folytonosság a következőképpen mutatható ki:

A $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ reláció definíciószerűen azt jelenti, hogy létezik $f \in \Sigma_{[a,b]}$ függvény, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

Ezzel a folytonosság azt jelenti, hogy

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx ,$$

másképpen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx = 0 .$$

A következő becslés adható:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \int_a^b \|f - f_n\| dx = \\ &= \|f - f_n\| (b - a) < \varepsilon , \end{aligned}$$

ha

$$\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ami elegendően nagy n -re teljesül. Ezzel az állítást bizonyítottuk!

Legyen $q(x) \in \Sigma_{[a,b]}$ és $\int_a^b q(x) dx \neq 0$.

Legyen az f függvénynek a q súlyfüggvényre vett integrál közepe definíciószerűen:

$$I_Q f = \frac{\int_a^b \varrho(x) f(x) dx}{\int_a^b \varrho(x) dx}$$

Nyilván $\int_a^b f(x) dx = [b-a] I_1 f$. I_Q -ről - ugyanúgy, mint I_1 -ről - egyszerűen kimutatható, hogy homogén lineáris funkcionál.
 I_Q normája:

$$\|I_Q\| = \sup_{\|f\|=1} |I_Q f| = \frac{\int_a^b |\varrho(x)| dx}{\left| \int_a^b \varrho(x) dx \right|}.$$

(A supremum ugyanis olyan f -vel érhető el, amelyre $|f(x)| = 1$ és $\varrho(x)f(x) = |\varrho(x)|$).

Ebből

$$|I_Q f| \leq \|I_Q\| \|f\|, \text{ vagyis:}$$

$$\left| \frac{\int_a^b \varrho(x) f(x) dx}{\int_a^b \varrho(x) dx} \right| \leq \frac{\int_a^b |\varrho(x)| dx}{\left| \int_a^b \varrho(x) dx \right|} \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Tekintsük most a $C_{[a, b]}^0$ függvényosztályt.

Legyen δ valamely adott felosztás $[a, b]$ -n:

$$\delta = (a_0, a_1, \dots, a_n), \quad \text{ahol}$$

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b.$$

$I_\delta f$ legyen az $f \in C^0_{[a,b]}$ függvénynek az $(a_i, f(a_i))$
 $i = 0, 1, \dots, n$ alappontok felhasználásával végrehajtott
 numerikus integrálása által meghatározott szám, ahol nu-
 merikus integráláson valamelyik ismert numerikus integrá-
 lási szabályt értjük (pl. Simpson-szabály).
 I_δ lineáris funkcionál. Ennek bizonyítását az olvasóra
 bízuk.

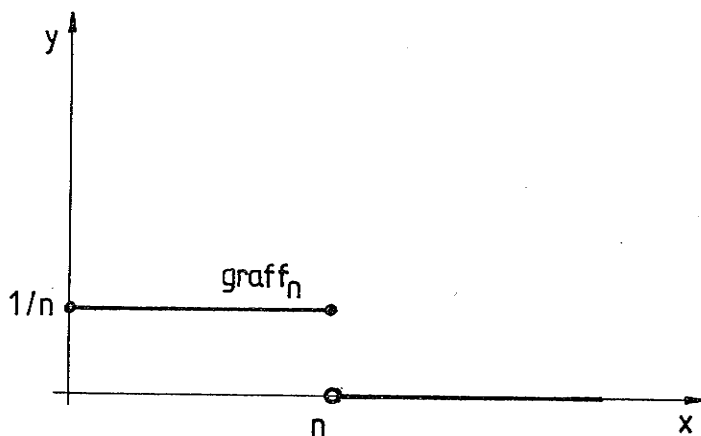
Tekintsük most az (a, ∞) intervallumon értelme-
 zett azon korlátos függvények halmazát, amelyeknek ezen
 intervallumon vett improprius integrálja létezik.
 Az $\|f\| = \sup_{x \in [a, \infty]} |f(x)|$ normával a halmaz normált teret
 alkot.

Nézzük meg e térben az $\int_a^\infty f(x) dx$ funkcionál tulajdonsá-

gait. Az additivitás és homogenitás nyilvánvalóan telje-
 sül. Nem teljesül azonban a folytonosság, amelyet az
 alábbi példával bizonyítunk.
 Legyen $a = 0$ és

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{ha } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{ha } x > n \end{cases}$$

(lásd: 11. ábrát).



11. ábra

Ekkor nyilvánvalóak az alábbi összefüggések:

$$\|f_n\| = \frac{1}{n} ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0 ;$$

$$\int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1 !$$

Jellemző, hogy e funkcionál nem is korlátos.
Legyen most ugyanis

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{ha } x > n \end{cases}$$

Ekkor

$$\int_0^{\infty} g_n(x) dx = n; \quad \|g_n\| = 1, \text{ így}$$

$$\|g\| = 1 \sup \int_0^{\infty} g(x) dx = \infty !$$

6. Figyeljük meg, hogy a 3.3., 3.4. és 3.5. tételek bizonyításában nem használtuk fel, hogy az adott operátorok folytonosak, csupán a homogenitásra és additivitásra volt szükség. Valóban, ezek a tételek homogén és additív operátorokra is érvényesek.

Tekintsük az $x: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ (I intervallum) ∞ sokszor deriválható korlátos függvények lineáris terét (C_I^{∞}) a supremum normával:

$$\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|.$$

Legyen $Dx := \dot{x}$. A D operátor additív és homogén, de nem folytonos. Ugyanis, ha

$$x_{\omega} = \frac{1}{\omega} \sin \omega t,$$

akkor

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \sin \omega t = 0 ,$$

így

$$\| D \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \sin \omega t \| = 0 ,$$

ugyanakkor

$$\| D x_{\omega} \| = \| \cos \omega t \| = 1 ,$$

így

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \| D x_{\omega} \| = 1 .$$

Legyen most D az $x: I \rightarrow Q^n$, $I \subset \mathbb{R}$ (I intervallum) ∞ sokszor deriválható függvényeken értelmezve:

$$Dx := \dot{x} ,$$

és használjuk pl. a következő normát:

$$\| x \| = \sup_{t \in I} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} .$$

D -ről ismét csupán additivitást és homogenitást állíthatunk, folytonosságot nem.

Legyen A $n \times n$ -es mátrix. A

$$(D - A)x = b, \quad b \in Q^n$$

egyenletet elsőrendű differenciálegyenlet rendszernek nevezzük. A 3.5.3. tétel értelmében ennek minden megoldása $x_p + x_H$ alakban írható fel, ahol x_p olyan partikuláris megoldás, amelyre

$$(D - A)x_p = b,$$

és x_H a homogén egyenlet megoldása:

$$(D - A)x_H = 0$$

Ha A -nak s sajátvektora λ sajátértékkel, akkor $e^{\lambda t} s$ a homogén egyenletnek megoldása, ugyanis:

$$D e^{\lambda t} s = \lambda e^{\lambda t} s$$

$$A e^{\lambda t} s = e^{\lambda t} A s = \lambda e^{\lambda t} s .$$

Tehát

$$(D - A) e^{\lambda t} s = 0 .$$

Ha b A -nak sajátvektora $\lambda \neq 0$ sajátértékkel, akkor

$$x_p = \frac{-b}{\lambda} .$$

Ha b A -nak sajátvektora $\lambda = 0$ sajátértékkel, akkor

$$x_p = tb .$$

A 3.9. és 3.13. Definíciók homogén additív operátorokra is értelmezhetők.

Vegyük észre, hogy D elfajuló. Legyen ugyanis $c \neq 0$ konstans vektor és x tetszőleges függvény. Ekkor

$$D x = \dot{x} = D(x + c) .$$

D -nek nem létezik inverze.

Tételezzük fel, hogy A reguláris és vegyük szemügyre a $D_A = A^{-1}D$ operátort.

Próbáljuk megoldani az

$$\dot{x} = Ax$$

másképpen $D_A x = x$

egyenletet. Ezt az egyenletet eddig $(D - A)x = 0$ alakban írtuk. Az új alak a szukcesszív approximáció alkalmazhatósága érdekében kell. Sajnos azonban a szukcesszív approximáció módszerét nem alkalmazhatjuk, mivel D -vel együtt D_A sem folytonos. Szűkítsük le D_A értelmezési tartományát azokra az x függvényekre, amelyekre:

$$x(0) = A^{-1} \dot{x}(0)$$

(tegyük fel, hogy $0 \in I$). Ez a leszűkített halmaz is normált tér, és itt D_A nem elfajuló.

Ugyanis, ha van x_1 és x_2 hog

$$D_A x_1 = D_A x_2 ,$$

akkor ebből

$$D_A(x_1 - x_2) = 0.$$

Legyen $x_1 - x_2 = z$. Akkor

$$D_A z = A^{-1} D z = A^{-1} \dot{z} = 0,$$

amelyből

$$\dot{z} = 0,$$

így

$$\dot{z}(0) = 0, \quad z(0) = A^{-1} \dot{z}(0) = 0.$$

A $\dot{z} = 0$ -ból következik, hogy $z = \text{állandó} = z(0) = 0$,
vagyis $x_1 = x_2$. D_A inverze egyszerűen belátható módon
kapható:

$$D_A^{-1} x = \int_0^t A x(\tau) d\tau + x(0).$$

Mutassuk meg, hogy ez az operátor korlátos I -re már folytonos. $I = [a, b]$.

Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Azt kell megmutatni, hogy

$$D_A^{-1} x = \lim_{n \rightarrow \infty} D_A^{-1} x_n,$$

vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_A^{-1} (x - x_n) = 0.$$

Ez azonban a következő becslésből következik:

$$\begin{aligned} \|D_A^{-1} (x - x_n)\| &= \sup_{t \in I} \left(\int_0^t A(x(\tau) - x_n(\tau)) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + x(0) - x_n(0) \right) \leq \|A\| \|x - x_n\| (b-a) + \|x - x_n\| < \varepsilon \end{aligned}$$

ha n elég nagy!

Az

$$x_0 = x(0)$$

$$x_{n+1} = D_A^{-1} x_n$$

szukcesszív approximáció - konvergencia esetén - a $D_A x = x$ differenciálegyenlet azon $x(t)$ megoldásához konvergál, amelyre $x(0) = x_0$.

Látni fogjuk, hogy itt a szukcesszív approximáció valóban konvergens.

Legyenek L_1 és L_2 lineáris terek. Függetlenül attól, hogy ezekben definiálunk-e normát, vagy sem, beszélhetünk az L_1 -t az L_2 -be leképező operátorról vagy transzformációról a 3.1. Definíció értelmében. Sőt egy ilyen operátornál a 3.4.1. és 3.4.2. definíció szerinti tulajdonságok és értelmezhetők, (3.4.3. már nem, ehhez nem nélkülözhetjük a normát).

Legyen $\mathcal{L} : L_1 \rightarrow L_2$ homogén additív és egy-egy értelmű operátor, amely L_2 -re képezi le L_1 -et.

$\mathcal{L}$ -nek tehát létezik $\mathcal{L}^{-1}$ inverze, amely ugyancsak homogén, additív.

$\mathcal{L}$ nem csak az L_1 -beli elemeket képezi le egy-egy értelmű módon L_2 -re, hanem L_1 -beli operátorokhoz ($g : L_1 \rightarrow L_1$) is egy-egy értelmű operátorokat rendel L_2 -ben ($f : L_2 \rightarrow L_2$) a következő kézenfekvő definícióval: g -hez $\mathcal{L}$ akkor rendeli f -t, ha minden $u \in L_1$ -re

$$g(u) = \mathcal{L}^{-1}(f(\mathcal{L}(u))) ,$$

vagy minden $v \in L_2$ -re

$$(g(\mathcal{L}^{-1}(v))) = f(v) .$$

Röviden:

$$g = \mathcal{L}^{-1} f \mathcal{L} , \quad f = \mathcal{L} g \mathcal{L}^{-1} .$$

Ha g homogén additív, akkor nyilván f is az.

Legyen L_i ($i=1,2$) valós vagy komplex függvénytér.

Mint láttuk, a deriválás és az integrálás homogén és additív operátorok. Léteznek természetesen ennél lényegesen egyszerűbb homogén és additív operátorok is.

Mutassuk meg pl., hogy a

$$(i) \quad \varphi(x) \rightarrow \frac{1}{x} \varphi(x)$$

és a

$$(ii) \quad \varphi(x) \rightarrow x \varphi(x) - \varphi(0)$$

hozzárendelések egyaránt homogén, additív operátorok. Legyen most L_1 valós, L_2 pedig komplex függvények tere. Az ún. Laplace-transzformáció olyan $\mathcal{L}: L_1 \rightarrow L_2$ homogén, additív operátor, amely az L_1 -beli integráláshoz L_2 -ben az (i) operátort, az L_1 -beli deriváláshoz pedig L_2 -ben az (ii) operátort rendeli, tehát ezeket az L_1 -beli bonyolult operátorokat egyszerű algebrai műveletekké alakítja (lásd: a 6. fejezetet).

4. Hilbert-terek

A közönséges vektorok körében a skaláris szorzás a soron következő művelet, amelyet az eddigiekben kidolgozott absztrakt struktúrákban is bevezetünk.

4.1 Definíció

Legyen L lineáris tér. A skaláris szorzás minden $x, y \in L$ elempárhoz egy $\mathbb{K}$ -beli, (x, y) -nal jelölt számot rendel úgy, hogy a következő axiómák érvényesek:

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$$

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$$

$$(x, x) \text{ valós és } (x, x) > 0 \text{ ha } x \neq 0$$

itt a felülvonás a komplex konjugáltat jelöli.

Mutassuk meg, hogy $(x, \lambda y) = \overline{\lambda} (x, y)!$
Valóban:

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \overline{\lambda} \overline{(y, x)} = \overline{\lambda} (x, y)!$$

Ha a skaláris szorzást már definiáltuk, akkor ennek a segítségével definiálható a norma:

4.1 Tétel

Az $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ definícióval értelmezett művelet norma.

BIZONYÍTÁS

Mutassuk meg, hogy $\sqrt{(x,x)}$ eleget tesz a norma három definíciójának.

$$\|x\| = 0 \text{ pontosan, akkor, ha } x = 0,$$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda(x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda(\overline{\lambda x}, x)} = \\ &= \sqrt{\lambda \overline{\lambda}(x, x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x, x)} = |\lambda| \|x\|.\end{aligned}$$

A háromszög egyenlőtlenség bizonyításához a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségre van szükség:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Ennek bizonyítása: legyen $(y, x) = |(y, x)| e^{i\varphi}$ és $\lambda = t e^{-i\varphi}$ és képezzük az

$$(x - \lambda y, x - \lambda y)$$

skaláris sorozatot.

$$\begin{aligned}0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) &= \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}[\lambda(y, x)] = \\ &= \|x\|^2 + t^2 \|y\|^2 - 2t |(y, x)|\end{aligned}$$

t másodfokú polinomja csak úgy lehet nem negatív, ha a diszkrimináns nem pozitív:

$$4 |(y, x)|^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$

amelyből állításunk következik. Ezek után a háromszög egyenlőtlenség is bizonyítható:

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \sqrt{(x+y, x+y)} = \sqrt{(x, x+y) + (y, x+y)} = \sqrt{(x+y, x) + (x+y, y)} = \\ &= \sqrt{\|x\|^2 + (\overline{y}, x) + (\overline{x}, y) + \|y\|^2} = \sqrt{\|x\|^2 + (\overline{y}, x) + (y, x) + \|y\|^2} = \\ &= [\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(y, x) + \|y\|^2]^{1/2} \leq [\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(y, x)|]^{1/2} \\ &\leq [\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|]^{1/2} = \|x\| + \|y\|!\end{aligned}$$

A bizonyítás során a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség részeredményként szerepel. Tekintettel azonban jelentőségére külön tételben is közöljük.

4.2 Tétel (Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség)

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| .$$

Megjegyzés:

A kapott összefüggések természetesen a közönséges vektorok terében is érvényesek. Így e bonyolult tételek szemléletes jelentéssel ruházhatók fel.

Ha lineáris terünk valós, akkor a 4.1. Tétel bizonyításában levezetett

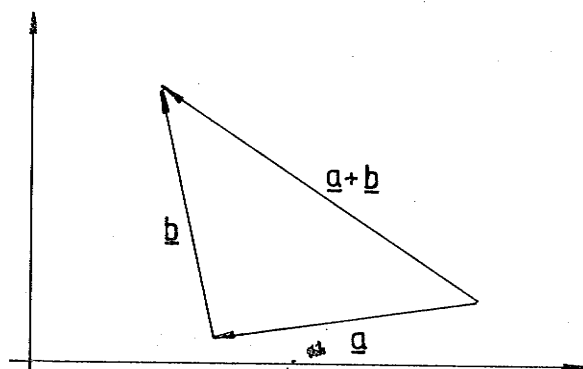
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(y, x)$$

összefüggésben $n=3$ esetén a cosinus-tételre ismerhetünk (lásd: 12. ábra), a 4.2. tétel pedig $n=3$ esetén nyilvánvaló, ha a skaláris szorzás definíciójára gondolunk:

$$\underline{v}_1 \underline{v}_2 = |\underline{v}_1| |\underline{v}_2| \cos \varphi ;$$

$$|\underline{v}_1 \underline{v}_2| \leq |\underline{v}_1| |\underline{v}_2| .$$

Különös jelentőségük van azoknak a teljes normált tereknek, amelyekben a normát skaláris szorzással definiáljuk.



12. ábra

$$(\underline{a} + \underline{b})^2 = \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + 2 \underline{a} \underline{b}$$

4.2 Definíció

A H Banach-teret (illetve az E^n n -dimenziós normált teret) Hilbert-térnek (illetve n -dimenziós euklideszi térnek) nevezzük, ha benne a normát a skaláris szorzással definiáljuk.

A skaláris szorzás egyik óriási jelentősége abban áll, hogy segítségével definiálható az ortogonalitás és így bevezethetők az ortogonális bázisok, rendszerek is.

4.3 Definíció

Ha $(x, y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy x ortogonális y -ra (a szokásos jelölés: $x \perp y$).

4.3 Tétel

4.3.1. Ha az $e_1, \dots, e_n \in E^n$ vektorok páronként ortogonálisak és egyik sem zérus, akkor e vektorok bázist alkotnak.

4.3.2. Ha az $e_1, \dots, e_n, \dots \in H$ vektorok páronként ortogonálisak és egyik sem zérus, akkor e vektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

BIZONYÍTÁS

4.3.1. Tételezzük fel az állítás ellenkezőjét:

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$$

$$|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| > 0$$

Legyen $\lambda_i \neq 0$, ekkor a fenti egyenlet mindkét oldalát skalárisan megszorozva e_i -vel a bal oldal:

$$\begin{aligned} ((\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n), e_i) &= \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_i (e_i, e_i) + \dots + \\ &+ \lambda_n (e_n, e_i) = \lambda_i \|e_i\|^2 \neq 0, \end{aligned}$$

a jobb oldal:

$$(0, e_i) = 0.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát e vektorok valóban lineárisan függetlenek, vagyis bázist alkotnak, hiszen számuk a tér dimenzió számával megegyezik.

4.3.2. Ha ismét az állítás tagadását tételezzük fel, akkor pontosan ugyanúgy ellentmondásra jutunk, mint az előbb. Vagyis akárhány (de véges sok) vektort kiválasztva, ezek mindig lineárisan függetlenek lesznek, és éppen ez jelenti a lineárisan független rendszer fogalmát!

4.4 Definíció

4.4.1. A 4.3.1. Tételben szereplő bázist ortogonális bázis-nak nevezzük. Ha $\|e_i\| = 1$, $i=1, \dots, n$, akkor a bázis ortonormált.

4.4.2. A 4.3.2. Tételben szereplő rendszert ortogonális rendszernek nevezzük. Ha $\|e_i\| = 1$, $i=1, \dots$, akkor e rendszer ortonormált.

4.4 Tétel

(Schmidt-féle ortogonalizálás)

Legyen $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, H -beli lineárisan független rendszer. Akkor ebből a következő rekurzív eljárással konstruálható $\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ortonormált rendszer:

$$\varphi_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\varphi_{n+1} = e_{n+1} - \lambda_0 e_{n+1} - \lambda_1 \varphi_1 - \dots - \lambda_n \varphi_n,$$

ahol a λ_k skalárok ($\lambda_k \in \mathbb{K}$) az ortonormáltság feltételéből egyértelműen meghatározhatók.

BIZONYÍTÁS:

Matematikai indukcióval bizonyítunk.

$$\|\varphi_1\| = 1 \text{ nyilvánvalóan.}$$

Most tegyük fel, hogy valamely n -re φ_i , $i \leq n$ már ismert és $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ ha $i \neq j$ és $i, j \leq n$,

$$\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = \dots = \|\varphi_n\| = 1.$$

φ_{n+1} -t a közölt képlettel konstruáljuk meg.

A következő feltételeknek kell a függvénynek eleget tenni:

$$(\varphi_{n+1}, \varphi_1) = \lambda_0 (e_{n+1}, \varphi_1) - \lambda_1 \|\varphi_1\|^2 = 0$$

⋮

$$(\varphi_{n+1}, \varphi_n) = \lambda_0 (e_{n+1}, \varphi_n) - \lambda_n \|\varphi_n\|^2 = 0$$

Ezekből:

$$\lambda_1 = \lambda_0 (e_{n+1}, \varphi_1), \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = (e_{n+1}, \varphi_1)$$

⋮

$$\lambda_n = \lambda_0 (e_{n+1}, \varphi_n); \quad \frac{\lambda_n}{\lambda_0} = (e_{n+1}, \varphi_n).$$

Most a még határozatlan λ_0 (amely a φ_{n+1} -t definiáló képletből kiemelhető:

$$\varphi_{n+1} = \lambda_0 \left(e_{n+1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \varphi_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} \varphi_n \right)$$

a következő összefüggéssel kapható:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\|e_{n+1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \varphi_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} \varphi_n\|} !$$

4.5 Definíció

A H Hilbert-térben az $e_1, \dots, e_n, \dots$ ortogonális rendszer teljes, ha bármely $y \in H$ -ra igaz a következő állítás: amennyiben $(y, e_k) = 0, k=1, 2, \dots$, akkor $y = 0$.

A továbbiakban e pontban az n -dimenziós euklideszi terekkel foglalkozunk.

Tudjuk, hogy a véges dimenziós terek mindig teljesek. Ha tehát bármely n -dimenziós lineáris térben skaláris szorzást vezetünk be, akkor Hilbert-teret kapunk. Megjegyezzük azonban, hogy a szokásos szóhasználat szerint csak a ∞ -dimenziós teljes tereket nevezzük Hilbert-tereknek, a véges dimenziósakat euklideszi tér elnevezéssel illetjük, (vö. a Banach-terek hasonló szóhasználati problémáját!).

Rögzítsünk le E^n -ben egy ortonormált bázist (ilyen a 4.4. tétel alapján mindig van). E rögzített bázisban

E^n és Q^n között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető: nevezetesen minden vektorhoz annak koordináta oszlopvektorát rendeljük. A koordináta oszlopvektorok révén az absztrakt 3-dimenziós euklideszi tér, illetve bármely 3-dimenziós euklideszi tér és a közönséges tér vektorai között is egy-egyértelmű megfeleltetés hozható létre. Ha valamely konkrét struktúrát a vektor-műveletek alkalmas értelmezésével 3-dimenziós euklideszi térré tettünk és e térben kizárólag azokat a tulajdonságokat tekintjük, amelyek az absztrakt vektor mivoltukból erednek, akkor ezt a teret nem is tudjuk megkülönböztetni a közönséges vektorok terétől. Ez az oka annak, hogy olyan kétértelműséget engedünk meg, ami az absztrakt 3-dimenziós euklideszi tér és a közönséges vektortér ugyanazon jelölésével (E^3) jár (lásd: 1. Lineáris terek 5. példát is!).

Ha a bázist lerögzítjük, akkor az E^n és Q^n közötti egy-egyértelmű megfeleltethetőség révén E^n helyett elegendő a Q^n tér vizsgálata, amely utóbbi a mátrixalgebra tárgykörébe tartozik. Az E^n -t E^n -be leképező homogén lineáris operátorok és az $n \times n$ -es mátrixok között is egy-egyértelmű megfeleltetés lehetséges rögzített bázisban.

Az egy-egyértelmű megfeleltetés létrehozásakor a vektor-koordináta oszlopvektor, illetve a homogén lineáris operátor - mátrix konkrét hozzárendelés megváltozik azonban, ha más bázisra térünk át (lásd: az 1. pontban a bázis-transzformációt). Nézzünk meg néhány fontos összefüggést konkrétan is.

4.6 Definíció

Az A $n \times n$ -es mátrix pozitív definit, ha bármely $\lambda \in \mathbb{Q}^n$, $\lambda \neq 0$ -ra

$$\lambda^T A \lambda > 0 .$$

4.5 Tétel

Legyen L^n n -dimenziós lineáris tér és ebben $e_1, \dots, e_n$ bázis. Legyen $g: L^n \times L^n \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre:

$$g(x, y) = g(y, x)$$

$$g(cx, y) = cg(x, y); \quad c \in \mathbb{R} .$$

$$g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y) .$$

g pontosan akkor tekinthető skaláris szorzásnak, ha az

$$a_{ik} = g(e_i, e_k)$$

számokból felépülő

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix pozitív definit.

BIZONYÍTÁS

Tekintsük a 4.1. Definíciót. Nyilván elég annyit bebizonyítanunk, hogy a " $g(x, x) > 0$, $x \neq 0$ " állítás ekvivalens azzal az állítással, hogy " A pozitív definit".

Legyen $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ és

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} , \quad (x \neq 0) .$$

$$\text{Ekkor } g(x, x) = \sum_{i, k=1}^n \lambda_k \lambda_i g(e_k, e_i) = \lambda^T A \lambda,$$

amiből a két állítás ekvivalenciája nyilvánvaló!

4.6 Tétel

A skaláris szorzással definiált vektornorma ortonormált bázisban euklideszi norma, vagyis

$$(x, x) = \|x\|^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2, \quad \text{ahol}$$

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

BIZONYÍTÁS

Ha $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázis, akkor

$$(e_k, e_i) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq k \\ 1 & \text{ha } i = k \end{cases}$$

Az előző tétel bizonyítását felhasználva, és figyelembe véve, hogy most $A = I$:

$$(x, x) = \lambda^T I \lambda = \lambda^T \lambda = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2!$$

4.7 Tétel

Legyer az $e_1, \dots, e_n$ bázisban a skaláris szorzás mátrixa A (lásd: 4.5. Tétel) és e bázist az $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ bázisba transzformáló mátrix S , tehát ha

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n \tilde{e}_n \quad \text{és}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

akkor

$$\lambda = S \tilde{\lambda} .$$

Ekkor az utóbbi bázisban a skaláris szorzás mátrixa

$$\tilde{A} = S^T A S .$$

BIZONYÍTÁS

Legyen

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n \tilde{e}_n \quad \text{és}$$

$$y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n = \tilde{\mu}_1 \tilde{e}_1 + \dots + \tilde{\mu}_n \tilde{e}_n ,$$

akkor

$$(x, y) = \lambda^T A \mu = \tilde{\lambda}^T S^T A S \tilde{\mu} = \tilde{\lambda}^T \tilde{A} \tilde{\mu} ,$$

amelyből

$$\tilde{A} = S^T A S !$$

4.7 Definíció

Az M mátrix ortogónális, ha $M^{-1} = M^T$.

4.8 Tétel

Ha az $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázisból az $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ ugyan-
csak ortonormált bázisba való transzformálás mátrixa M ,
akkor M ortogónális.

BIZONYÍTÁS

Az i. fejezetben (1.2. tétel bizonyításában) megmutattuk,
hogy M az $\tilde{e}_i$ vektorok $e_1, \dots, e_n$ bázis-beli koordináta osz-
lopvektoraiból épül fel:

$$\tilde{e}_i = m_{1i} e_1 + \dots + m_{ni} e_n$$

$$m_i = \begin{bmatrix} m_{1i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{bmatrix}$$

$$M = [m_1 \dots m_n] .$$

A 4.6. Tételből következik, hogy

$$m_i^T m_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq k \\ 1 & \text{ha } i = k \end{cases} ,$$

vagyis

$$M^T M = I$$

amelyből

$$M^T = M^{-1} !$$

4.9 Tétel

Legyen $G: E^n \rightarrow E^n$ homogén lineáris operátor és $e_1, \dots, e_n$ E^n -ben bázis. Legyen továbbá

$$\Gamma = [\gamma_1 \dots \gamma_n] ,$$

ahol γ_i a Ge_i vektor koordináta oszlopvektora, akkor

bármely $x \in E^n$ -re

$$\mu = \Gamma_\lambda ,$$

ahol

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$y = Gx$$

$$y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

BIZONYÍTÁS

$$Gx = \lambda_1 G e_1 + \dots + \lambda_n G e_n = \lambda_1 (\gamma_{11} e_1 + \dots + \gamma_{n1} e_n) + \dots$$

$$\dots + \lambda_n (\gamma_{1n} e_1 + \dots + \gamma_{nn} e_n) = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n,$$

amelyből

$$\mu_i = (\gamma_{i1} \gamma_{i2} \dots \gamma_{in}) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

vagyis

$$\mu = \Gamma \lambda$$

Γ -t G adott koordináta rendszerbeli koordináta mátrixának nevezzük.

4.10 Tétel

Az $e_1, \dots, e_n$ bázisban a $G: E^n \rightarrow E^n$ homogén lineáris operátor mátrixa legyen Γ , az $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ bázisban pedig $\tilde{\Gamma}$.

Ha a bázistranszformáció mátrixa S , akkor

$$\tilde{\Gamma} = S^{-1} \Gamma S.$$

BIZONYÍTÁS

Legyen $y = G x$ és x koordináta oszlopvektora az első bázisban λ , a második bázisban $\tilde{\lambda}$. Ugyanaz y -ra μ , ill. $\tilde{\mu}$. Ekkor

$$\mu = \Gamma \lambda$$

$$\tilde{\mu} = \tilde{\Gamma} \tilde{\lambda}$$

másrészt:

$$\lambda = S \tilde{\lambda}, \quad \mu = S \tilde{\mu},$$

amelyből

$$\tilde{\mu} = S^{-1} \Gamma S \tilde{\lambda},$$

vagyis

$$\tilde{\Gamma} = S^{-1} \Gamma S.$$

PÉLDÁK

Mutassuk meg, hogy az 1. fejezetben példa gyanánt felsorolt lineáris terekben miképpen lehet skaláris szorzást bevezetni.

1. $\mathbb{R}$ -ben a szorzás egyben skaláris szorzás is.

$$\mathbb{C}\text{-ben skaláris szorzás: } (z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_2.$$

2. $\mathbb{Q}^n$ -ben:

bármely V $n \times n$ -es pozitív definit mátrix skaláris szorzást definiál:

$$(x, y)_V = x^T V y.$$

Ha $V = I$, akkor

$$(x, y)_I = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Hasonlóképpen járhatunk el S^n és $\mathbb{R}^n$ esetében is.

3. A mátrixoknál nem szokás skaláris szorzást bevezetni. Tekintettel azonban arra, hogy az azonos típusú mátrixok tere véges-dimenziós, így semmi akadály a skaláris szorzás bevezetésének (lásd: 4.5. Tételt!).

4. E^3 -ban a skaláris szorzás a közösleges vektorok elemekből ismert ugyanilyen elnevezésű szorzata.
A 4.5. Tételből következik, hogy ettől eltérő skaláris szorzást is lehetne definiálni.

5. Tekintsük a C_I^0 teret, ahol $I = [a, b]$.

E térben definiálható az ún. q súlyfüggvényekre vonatkozó skaláris szorzás:

$$(x, y)_q := \int_a^b q(t) x(t) y(t) dt: x, y, q \in C_I^0$$

ahol $q(t) > 0$, valamely adott függvény.

Azonnal belátható, hogy ez a definíció valóban eleget tesz a skaláris szorzás 4.1. Definícióban lerögzített axiómáinak.

- 5.1. A $\{1; \sin \omega x; \cos \omega x; \dots, \sin k \omega x, \cos k \omega x, \dots\}$ függvények ortogonális rendszert alkotnak a $[-\pi/\omega; +\pi/\omega]$ intervallumon a $q(x) = 1$ súlyfüggvénnyel:

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sin \omega k x \sin n \omega x dx = 0, \quad \text{ha } n \neq m,$$

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sin^2 n \omega x dx = \frac{\pi}{\omega},$$

stb.

- 5.2. Az $\{1; x; x^2; \dots, x^k; \dots\}$ függvények lineárisan független rendszert alkotnak a $[0, 1]$ intervallumban a $q(x) = 1$ súlyfüggvénnyel. Az ortogonalitás azonban nem teljesül:

$$\int_0^1 x^n x^m dx = \frac{x^{n+m+1}}{n+m+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+m+1}.$$

alkalmazzuk a Schmidt-féle ortogonalizálási eljárást!

$$\int_0^1 1^2 dx = 1, \quad e_1 = 1$$

$$e_2 = \lambda_0 x - \lambda_1 .$$

$$0 = \int_0^1 (\lambda_0 x - \lambda_1) dx = \frac{\lambda_0}{2} - \lambda_1 ,$$

$$1 = \int_0^1 (\lambda_0 x - \lambda_1)^2 dx = \frac{\lambda_0^2}{3} - \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_1^2 ,$$

amelyből

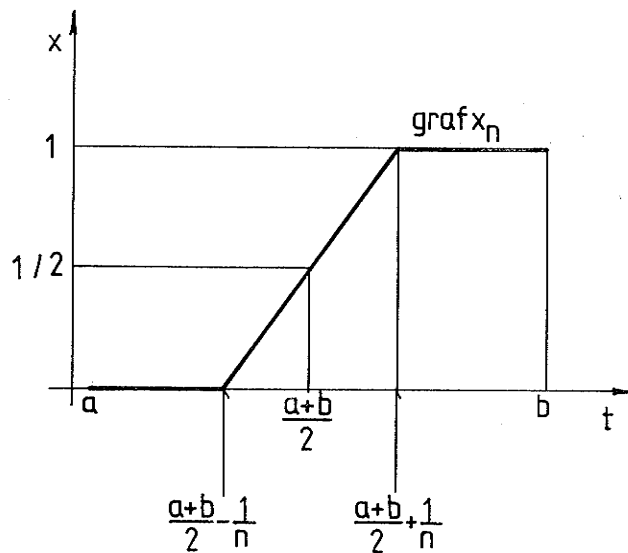
$$\lambda_0 = 2\sqrt{3}, \quad \lambda_1 = \sqrt{3} ,$$

stb.

5.3. Legyen $p_k = \alpha + ik\omega$; $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ rögzített; i imaginárius egység akkor az $\{e^{p_k t}\}$ függvényhalmaz ortogonális függvényrendszert alkot az $e^{-2\alpha t}$ súlyfüggvénnyel az $[-\pi/\omega; \pi/\omega]$ intervallumban a skalár szorzás

$$(x, y) = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} e^{-2\alpha t} x \bar{y} dt$$

definíciója mellett.



13. ábra

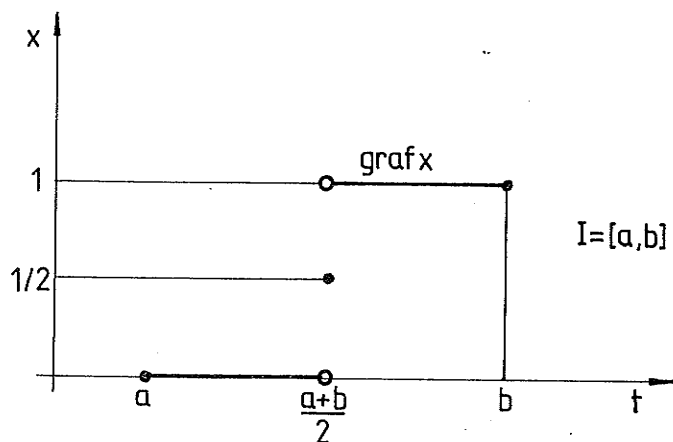
5.4. Mutassuk meg, hogy C_I^0 nem teljes.

Legyen $x_n(t)$ az a függvény, amelynek a grafikonja a 13. ábrán látható.

Ekkor

$$\|x_n - x_m\| = \int_a^b \varrho(t) (x_n(t) - x_m(t))^2 dt$$

egyenlőségből nyilvánvaló, hogy x_n Cauchy-sorozat. De tekintettel arra, hogy pontonkénti konvergenciával $x_n(t)$ egy $x(t)$ nem folytonos függvényhez konvergál, ezért x_n C_I^0 -ba nem konvergens (lásd: 14. ábra).



14. ábra

6. Példát mutatunk Hilbert-térre.

TÉTEL

Tekintsük az olyan $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (ahol $x(k)$ helyett x_k -t írunk) valós numerikus sorozatok halmazát, amelyekre a

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

sor konvergens. E halmaz Hilbert-tér a szükséges műveletek alábbi értelmezése mellett:

E teret ℓ_2 -vel jelöljük; legyen $x, y \in \ell_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$(x+y)_k = x_k + y_k$$

$$(\lambda x)_k = \lambda x_k$$

$$(-x)_k = -x_k$$

$$(0)_k = 0 \quad (\text{null elem})$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

BIZONYÍTÁS

Megmutatjuk, hogy ℓ_2 lineáris tér (a)), majd, hogy az utolsó egyenlőség valóban skaláris szorzást definiál (b)), végül, hogy ℓ_2 teljes (c)).

- a) ℓ_2 lineáris tér, mivel az 1.1. Definíció axiómáit az értelmezett műveletek egyszerűen belátható módon kielégítik.
 b) Ellenőrizzük a skaláris szorzás axiómáinak (4.1. Definíció) a teljesülését. Egyedül annak belátása nem azonnal

adódik, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ sor egyáltalán konvergens-e.

Vegyük figyelembe, hogy $(|x_k| - |y_k|)^2 \geq 0$ miatt

$$|x_k| |y_k| \leq \frac{1}{2} [x_k^2 + y_k^2].$$

Ezzel

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)$$

Vagyis a kérdéses sor abszolút konvergens, tehát konvergens.

- c) Legyen $x^{(n)}$ $n = 1, 2, \dots$ egy ℓ_2 -beli Cauchy-sorozat.
 Vagyis bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik N , hogy $n, m > N$ esetén

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy ez a sorozat konvergens.

Először is lássuk be, hogy bármely rögzített k -ra az $x_k^{(n)}$, $n=1,2,\dots$ numerikus sorozat Cauchy-sorozat, tehát konvergens.

Valóban:

$$(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon, \quad \text{ha } n, m > N.$$

Legyen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k.$$

Az x_k , $k=1,2,\dots$ sorozatot jelöljük $\bar{x}$ -szel.

Most bizonyítsuk be azt, hogy $x^{(n)}$, $n=1,2,\dots$ konvergens és határértéke éppen x , amely l_2 -nek egy eleme.

Legyen $n, m > N$, m rögzített és n_0 egy tetszőleges, de rögzített természetes szám. Ekkor:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 &= \sum_{k=1}^{n_0} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 + \\ &+ \sum_{k=n_0+1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 \end{aligned}$$

amelyből

$$\sum_{k=1}^{n_0} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon.$$

Ebből $n \rightarrow \infty$ határátmenettel:

$$\sum_{k=1}^{n_0} (x_k - x_k^{(m)})^2 \leq \varepsilon .$$

A bal oldalra egyszerű alsó becslés adható
 $(\|a\| - \|b\|)^2 \leq \|a - b\|^2$ alapján):

$$\left| \sqrt{\sum_{k=1}^{n_0} x_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n_0} x_k^{(m)2}} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n_0} (x_k - x_k^{(m)})^2 \leq \varepsilon .$$

Ha most elvégezzük az $n_0 \rightarrow \infty$ határátmenetet, akkor egyrészt azt kapjuk, hogy az $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ sorozat eleme ℓ_2 -nek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|x\|^2 ,$$

másrészt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^{(m)})^2 = \|x - x^{(m)}\|^2 \leq \varepsilon ,$$

ha $m > N$, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x !$$

7. Utolsó példaként megmutatjuk, hogy a Hilbert-terekben érvényes a Pitagorasz-tétel az alábbi formában:
 Legyen $a+b=c$, ahol $a, b, c \in H$ és $a \perp b$ ("befogók", c nevezhető "átfogónak").
 Ekkor a Pitagorasz-tétel analóg alakja:

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = \|c\|^2 .$$

BIZONYÍTÁS

$$\begin{aligned}\|c\|^2 &= (a+b; a+b) = (a; a) + (b; a) + (a; b) + (b; b) = \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 \quad !\end{aligned}$$

Célunk az, hogy egy-egy adott Hilbert-térben olyan ortogonális rendszert (4.4.2. Definíció) hozzunk létre, amely éppen olyan kedvező tulajdonságú, mint az n -dimenziós euklideszi terekben az ortogonális bázis (4.4.1. Definíció), vagyis e rendszerrel az adott H Hilbert-tér minden eleme kifejezhető legyen. Ez bizonyos esetekben valóban megvalósítható, ha a véges lineáris kombináción túlmenően a végtelen lineáris kombinációt ($\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \dots$) is megengedjük.

Ha egy ortogonális rendszer ilyen, akkor teljesnek nevezzük. A 4.5. Definícióban mást neveztünk teljesnek. Meg fogjuk mutatni, hogy ez a kétféle értelmezés ekvivalens.

Absztrakt definícióink és tételeink után megmutatjuk, hogy új struktúránk bonyolult összefüggéseiben jól ismert, egyszerű összefüggések (pl. Pitagorasz-tétel) általánosításait ismerhetjük fel.

5. Fourier-sorok

5.1 Definíció

Legyen $e_1, e_2, \dots$ H Hilbert-térbeli ortogonális rendszer. Az $x \in H$ elem (a rendszerre vonatkozó) Fourier-koefficienseinek nevezzük az alábbi $a_k \in \mathbb{K}$ számokat:

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ sort x Fourier sorának nevezzük.

5.1 Tétel

Az $\|x - \sum_{k=1}^n b_k e_k\|$ kifejezés rögzített n esetén akkor minimális, ha

$$b_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} = a_k.$$

BIZONYÍTÁS

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{k=1}^n b_k e_k\|^2 &= (x - \sum_{k=1}^n b_k e_k, x - \sum_{k=1}^n b_k e_k) = \\ &= \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} (x, \sum_{k=1}^n b_k e_k) + \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \|e_k\|^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \bar{b}_k a_k \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \|e_k\|^2 \geq \\
&\geq \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n |b_k| |a_k| \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \|e_k\|^2 = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^n (|b_k| - |a_k|)^2 \|e_k\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|e_k\|^2 \geq \\
&\geq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|e_k\|^2
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenséglánc $b_k = a_k$ helyettesítéssel egyenlőség-láncba megy át és ezzel bebizonyítottuk a tételt, sőt az alábbi tételt is:

5.2 Tétel

$$\|x - \sum_{k=1}^n a_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|e_k\|^2$$

5.3 Tétel (Bessel-egyenlőtlenség)

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \|e_k\|^2$$

BIZONYÍTÁS

Az 5.2. tétel alapján:

$$0 \leq \|x - \sum_{k=1}^n a_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|e_k\|^2,$$

amelyből

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Tekintettel arra, hogy a fenti egyenlőtlenség minden n -re igaz, így a tétel állítása $n \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik!

5.4 Tétel

Ha $e_1, e_2, \dots$ H -ban teljes ortogonális rendszer, akkor x Fourier sora x -hez konvergál:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k.$$

BIZONYÍTÁS

Először is megmutatjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ sor Cauchy-sor, tehát konvergens.

Az 5.3. tétel alapján a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \|e_k\|^2$ numerikus sor

konvergens, tehát Cauchy sor, így elég nagy n, m -re:

$$\left\| \sum_{k=n}^m a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^m |a_k|^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon.$$

A kérdéses sor valóban Cauchy-sor.

Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \neq x$. Legyen ekkor

$$y = x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k .$$

Képezzük az (y, e_n) skaláris sorozatot:

$$(y, e_n) = (x, e_n) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, e_n \right) = a_n \|e_n\|^2 - a_n \|e_n\|^2 = 0 .$$

Vagyis y minden e_n -ra ortogonális. Az $e_1, e_2, \dots$ rendszer teljes lévén, ebből következik, hogy $y = 0$!

MEGJEGYZÉS

1. A bizonyításban az

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, e_k \right) = a_k \|e_k\|^2$$

egyenlőség alkalmazásakor felhasználtuk a skalár szorzás folytonosságát, aminek a bizonyítását az olvasóra bízuk:

$$(u, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u, v_n) .$$

2. Ha az $e_1, e_2, \dots$ rendszer nem lenne teljes, akkor általában $y \neq 0$ lenne. Figyeljük meg, hogy ekkor a nem zérus y

vektor és $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ ortogonálisok.

3. Ha $e_1, e_2, \dots$ a tétel szerinti teljes rendszer, akkor a Bessel-egyenlőtlenség egyenlőséggé válik.

5.5 Tétel

(Parseval-formula)

Ha

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \quad \text{és} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k, \quad \text{akkor}$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k \|e_k\|^2.$$

BIZONYÍTÁS

Azt kell belátnunk, hogy

$$\left| (x, y) - \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k \|e_k\|^2 \right|$$

kifejezés tetszőlegesen kicsiny, ha n elég nagy.
Ez valóban belátható:

$$\begin{aligned} \left| (x, y) - \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k \|e_k\|^2 \right| &= \left| (x, y) - (x_n, y_n) \right| = \\ &= \left| (x, y) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x_n, y_n) \right| \leq \left| (x - x_n, y) \right| + \\ &+ \left| (x_n, y - y_n) \right| \leq \|x - x_n\| \|y\| + \|x_n\| \|y - y_n\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ha n elég nagy, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - y_n\| = 0 \quad \text{és} \quad \|x_n\|$$

korlátos!

5.6 Tétel
(Riesz-Fischer-tétel)

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ sor konvergens, akkor van pontosan egy

$x \in H$, hogy $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, ahol $e_1, e_2, \dots$ ortonormált rendszer.

BIZONYÍTÁS

Először is megmutatjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ sor Cauchy-sor, tehát konvergens. A $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ sor Cauchy-sor, így elég nagy n, m -re:

$$\left\| \sum_{k=n}^m c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^m |c_k|^2 < \varepsilon,$$

ahol ε tetszőlegesen kicsiny. Legyen most

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k !$$

5.7 Tétel

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k,$$

ahol mindkét sor konvergens és $e_1, e_2, \dots$ ortogonális rendszer, akkor

$$a_k = b_k; \quad k = 1, 2, \dots$$

BIZONYÍTÁS

Legyen

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \quad .$$

Ekkor

$$(x, e_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, e_n \right) = a_n \|e_n\|^2$$

illetve

$$(x, e_n) = b_n \|e_n\|^2 \quad .$$

Ebből a tétel állítása következik!

Az 5.4.—5.7. Tételeket a következőképpen interpretálhatjuk.
Legyen H Hilbert-tér és benne $e_1, e_2, \dots$ teljes ortonormális (sőt az egyszerűség érdekében: ortonormált) rendszer.
Akkor:

- H minden x eleme egyértelműen állítható elő

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

alakban, ahol

$$a_k = (x, e_k) \quad .$$

Az $(a_1, a_2, \dots)$ sorozat, amely ℓ_2 -nek eleme, x koordinátáit tartalmazza az $e_1, e_2, \dots$ teljes ortonormált rendszerben.

- Pontosan az ℓ_2 -beli sorozatok azok, amelyek valamely H -beli elem koordinátái.
- A skaláris szorzás és vektornorma a koordinátákkal az E^3 közösleges vektortérben érvényes szabályokkal analóg módon számolható:

Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in E^3$ és

$$\underline{x} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

$$\underline{y} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$$

akkor

$$\|\underline{x}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 ,$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Legyen most $\underline{x}, \underline{y} \in H$ és

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k ,$$

$$\underline{y} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k ,$$

akkor

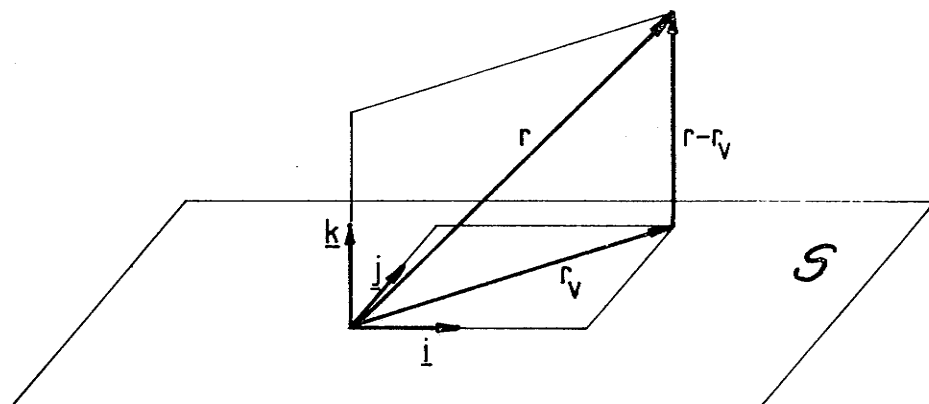
$$\|\underline{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots$$

Az 5.1. – 5.7. Tételek a 3-dimenziós "Hilbert-térben", vagyis a közönséges vektorok terében is természetesen érvényesek. Itt e tételeknek rendkívül szemléletes jelentésük van, ami megkönnyíti, hogy a tételek tartalmát jobban megértsük, ezért ismertetjük e tételek E^3 -ra vonatkozó megfogalmazásait.

5.1. tétel: Az $\underline{s}$ vektorok legyenek E^3 egy S alterében (pl. az origón átmenő S síkban).

$|\underline{r} - \underline{s}|$ akkor minimális, ha $\underline{s}$ éppen $\underline{r}$ merőleges vetülete S -re: $\underline{s} = \underline{r}_v$ (lásd: 15. ábra).



15. ábra

5.2. tétel: Pitagorasz tétel, $|\underline{r} - \underline{r}_v|^2 = |\underline{r}|^2 - |\underline{r}_v|^2$

5.3. tétel: $|\underline{r}| \geq |\underline{r}_v|$. Ha $\underline{r} \notin S$, akkor $|\underline{r}| > |\underline{r}_v|$
ha $\underline{r} \in S$, akkor $|\underline{r}| = |\underline{r}_v|$.

5.4., 5.6. és 5.7. tétel:

Rögzített $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban az

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

koordinátás megadás egy-egy értelmű.

$$|\underline{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

5.5. tétel: Ha $\underline{r}_1 = x_1\underline{i} + y_1\underline{j} + z_1\underline{k}$ és

$$\underline{r}_2 = x_2\underline{i} + y_2\underline{j} + z_2\underline{k}, \quad \text{akkor}$$

$$\underline{r}_1 \underline{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

illetve, ha H valós Hilbert-tér, akkor

$$\|x\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots$$

$$(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

PÉLDA

Bebizonyítható, hogy létezik olyan Hilbert-tér (az ún. négyzetesen integrálható függvények L_2 tere), amelynek teljes ortogonális rendszere a 4. fejezet 5.1. példában szereplő

függvényrendszer. $\mathcal{L}_2$ -nek elemei pl. a $\frac{2\pi}{\omega}$ periódusú folytonosan deriválható függvények.

A Hilbert-terekben - éppúgy, mint az euklideszi terekben - adott teljes rendszerben minden additív homogén operátornak egy mátrix (de itt " $\infty \times \infty$ " dimenziós!) felel meg. Itt azonban az additív homogén operátorok nem feltétlenül folytonosak.

Legyen pl. $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $x \in \mathcal{L}_2$, továbbá

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \omega k t + b_k \cos \omega k t .$$

Ekkor

$$Dx = \dot{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \omega k a_k \cos \omega k t - \omega k b_k \sin \omega k t .$$

"Mátrixosan":

$$x \cong \begin{bmatrix} b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} ; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ a_1 \\ -2 b_2 \\ 2 a_2 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \\ 0 & \omega & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

FELADATOK:

1. Mutassuk meg, hogy D-nek létezik D^{-1} inverze, ha D-t leszűkítjük azokra $\mathcal{L}_2$ -beli függvényekre, amelyek deriváltja is $\mathcal{L}_2$ -beli és

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} x(t) dt = 0 .$$

Mutassuk meg továbbá, hogy

$$D^{-1}x = \int_0^t x(\tau) d\tau - \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \int_0^t x(\tau) d\tau dt .$$

Mi D^{-1} koordináta mátrixa?

2. Nézzük most $\mathcal{L}_2$ bizonyos speciális altereit!

Teljesek-e ezek az alterek? Adjuk meg ezeknek az altereknek egy teljes ortogonális rendszerét!

- páros $\mathcal{L}_2$ -beli függvények;
- páratlan $\mathcal{L}_2$ -beli függvények.

3. Tekintsük a 4. fejezet 6. példájában szereplő Tételt.

Az 5. fejezet tételei alapján úgy tűnik, hogy a 6. példa Tétele nyilvánvalóan adódik: Hiszen bármely x -nek ($x \in H$, ahol H olyan Hilbert-tér, amelyben van $e_1, e_2, \dots$ teljes ortonormált rendszer), egy-egyértelműen megfeleltethető egy ℓ_2 -beli elem, így mivel H teljes, ℓ_2 is az.

Helyes-e ez az okoskodás?

Felesleges-e a 6. példa Tételének hosszadalmas és az 5. fejezet bizonyításaitól merőben eltérő bizonyítása?

6. Laplace-transzformáció

A műszaki gyakorlatban előforduló feladatok igen tekintélyes hányada az állandó együtthatós közönséges lineáris differenciálegyenletek matematikai apparátusát igényli. Az ilyen egyenletek megoldásában, kezelésében a mérnökök számára nehezen nélkülözhető eszköz a Laplace-transzformáció, amely ezen kívül más lineáris probléma megoldásában is fontos szerepet játszik.

A Laplace-transzformáció hasznossága elsősorban onnan ered, hogy az integrálás és deriválás műveleteit algebrai műveletekké alakítja. Az e^{zt} ($z \neq 0$, z állandó, t változó) eleve olyan tulajdonságú, hogy egyik primitív függvényét z -vel való osztással, deriváltját pedig z -vel való szorzással kapjuk meg:

$$\int e^{zt} dt = \frac{1}{z} e^{zt} + C; \quad (e^{zt})' = z e^{zt}.$$

Ezáltal az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenleteket algebrai egyenletekként tudjuk megoldani. A Laplace-transzformáció tulajdonképpen ezt a módszert tovább általánosítja: az inhomogén egyenleteket is algebrai egyenletekként fogjuk tudni megoldani, sőt a megoldás során a kezdeti feltételek is figyelembe vehetők lesznek.

A Laplace-transzformációt - mint látni fogjuk a 2. Definícióban - egy komplex improprius integrál segítségével definiálják. A Laplace-transzformációnak az e definícióból következő általános tulajdonságait jórészt csak a tanulmányainkat meghaladó komplex függvénytan eszközeivel lehet bizonyítani. Éppen ezért először csak bizonyos - az alkalmazásokban leggyakrabban előforduló - függvényekre vezetjük be a Laplace-transzformációt (1. Definíció), így a legfontosabb módszereket igen kevés új ismerettel elsajátíthatjuk. E speciális függvényekre korlátozva a Laplace-transzformációt elérhetjük, hogy a rendelkezésünkre álló komplex függvénytan eszközeinek birtokában is egzaktul építhetjük fel az elméletet.

A Laplace-transzformáció általános definícióját tehát csak ezután adjuk meg (2. Definíció). Erre építve az elméletet, több tétel bizonyításáról le kell mondanunk. A mélyebben érdeklődők számára utalunk [7,8]-ra.

6.1 Definíció

Legyen $T \in \mathbb{R}$ rögzített szám. Legyen L_{1T} az

$$f(t) = (t-T)^n e^{a(t-T)}; \quad a \in \mathbb{C}; \quad n \in \mathbb{N}; \quad t \geq T$$

függvények komplex lineáris kombinációiból (tehát a

$$\sum_{i=1}^m c_i (t-T)^{n_i} e^{a_i(t-T)}, \quad c_i, a_i \in \mathbb{C}$$

alakban felírható függvényekből) felépülő komplex lineáris tér (amelyből sem a t szerinti deriválás, sem a

$\int_T^t f(\tau) d\tau$ integrál nyilvánvalóan nem vezet ki),

$$L_2 \text{ pedig az } F(z) = \frac{1}{(z-a)^{n+1}}; \quad z, a \in \mathbb{C}; \quad n \in \mathbb{N}$$

függvények komplex lineáris kombinációiból felépülő komplex lineáris tér (ahol a függvények értelmezési tartományát az egész $\mathbb{C}$ -re kiterjesztjük azáltal, hogy egyrészt a ∞ -t, mint függvényértéket megengedjük, másrészt a megszüntethető szakadási helyeken folytonossá tesszük a függvényeket).

Az $\mathcal{L}_T: L_{1T} \rightarrow L_2$ operátort Laplace-transzformációnak nevezzük, ha

1. $\mathcal{L}_T$ homogén és additív, vagyis

$$\mathcal{L}_T(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}_T f_1 + c_2 \mathcal{L}_T f_2$$

$$2. \quad \mathcal{L}_T 1 = \frac{1}{z}$$

$$3. \quad \mathcal{L}_T \int_T^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{z} \mathcal{L}_T f$$

6.1 Tétel

$$\mathcal{L}_T f^{(n)} = z^n \mathcal{L}_T f - z^{n-1} f(T) - z^{n-2} f'(T) - \dots - f^{(n-1)}(T) ;$$

BIZONYÍTÁS

Matematikai indukcióval bizonyítunk. Felhasználva, hogy

$$f(t) = f(T) + \int_T^t f'(\tau) d\tau$$

kapjuk:

$$\mathcal{L}_T f = \frac{1}{z} f(T) + \frac{1}{z} \mathcal{L}_T f'$$

amelyből:

$$\mathcal{L}_T f' = z \mathcal{L}_T f - f(T) .$$

Tegyük fel, hogy n-re igaz a tételből szereplő egyenlőség, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T f^{(n+1)} &= z \mathcal{L}_T f^{(n)} - f^{(n)}(T) = \\ &= z^{n+1} \mathcal{L}_T f - z^n f(T) - z^{n-1} f'(T) - \dots - f^{(n)}(T) ! \end{aligned}$$

6.2 Tétel

$$\mathcal{L}_T (t - T)^n e^{a(t-T)} = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}} ; \quad n \in \mathbb{N} .$$

BIZONYÍTÁS

Matematikai indukcióval:

Mutassuk meg, hogy n=0-ra igaz az állítás:

$$(e^{a(t-T)})' = a e^{a(t-T)}$$

$$\mathcal{L}_T(e^{a(t-T)})' = a \mathcal{L}_T e^{a(t-T)} ,$$

$$\mathcal{L}_T(e^{a(t-T)})' = z \mathcal{L}_T e^{a(t-T)} - 1 ,$$

amelyből

$$\mathcal{L}_T e^{a(t-T)} = \frac{1}{z-a} .$$

Most tegyük fel, hogy igaz az állítás valamely n -re.
Akkor:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T((t-T)^{n+1} e^{a(t-T)})' &= \mathcal{L}_T((n+1)(t-T)^n e^{a(t-T)} + \\ &+ a(t-T)^{n+1} e^{a(t-T)}) = \frac{(n+1)!}{(z-a)^{n+1}} + \\ &+ a \mathcal{L}_T((t-T)^{n+1} e^{a(t-T)}) , \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_T((t-T)^{n+1} e^{a(t-T)})' = z \mathcal{L}_T((t-T)^{n+1} e^{a(t-T)}) ,$$

amelyből a tétel valóban következik!

6.3 Tétel

$\mathcal{L}_T$ egy-egy értelmű, létezik $\mathcal{L}_T^{-1} : L_2 \rightarrow L_{1T}$ inverze, amely homogén és additív és

$$\mathcal{L}_T^{-1} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} = \frac{(t-T)^n}{n!} e^{a(t-T)} ; \quad n \in \mathbb{N} .$$

BIZONYÍTÁS

A tétel a 6.1. Definíció és a 6.2. Tétel közvetlen következménye. Ugyanis L_{1T} minden eleme egyértelműen írható fel

$$c_1 (t-T)^{n_1} e^{a_1(t-T)} + \dots + c_k (t-T)^{n_k} e^{a_k(t-T)}$$

alakban, ahol ha $l \neq j$, akkor $n_l \neq n_j$ és/vagy $a_l \neq a_j$ és $c_i \in \mathbb{C}$; $c_i \neq 0$. Hasonlóképpen L_2 minden eleme egyértelműen írható fel

$$\frac{d_1}{(z-a_1)^{n_1+1}} + \dots + \frac{d_k}{(z-a_k)^{n_k+1}}$$

alakban, ahol ha $l \neq j$, akkor $n_l \neq n_j$ és/vagy $a_l \neq a_j$ és $d_i \in \mathbb{C}$; $d_i \neq 0$. A 6.2. Tételből, valamint $\mathcal{L}_T$ homogén és additív voltából következik, hogy $\mathcal{L}_T$ egy-egy értelmű megfeleltetést létesít L_{1T} és L_2 elemei között. Ugyancsak a 6.2. Tételből következik a visszatranszformálás fenti egyenlősége!

Eddigi eredményeink lehetővé teszik, hogy a gyakorlatban felmerülő feladatok tekintélyes részét meg tudjuk oldani a Laplace-transzformáció alkalmazásával.

PÉLDÁK

1. Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' + 2y' + y = \sin t + e^{-t}$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

és vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformációját. Nyilván $\sin t, e^{-t} \in L_{10}$. Tegyük fel, hogy $y \in L_{10}$ és legyen $\mathcal{L}_0 y = Y$. Ekkor:

$$\begin{aligned} z^2 Y - z + 1 + 2 z Y - 2 + Y &= \\ = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+1} \right) + \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

Y-t kifejezve:

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{z^2+2z+1} \left(z+1 + \frac{1}{2i} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2i} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+1} \right) = \\
 &= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2i} \frac{1}{(z+1)^2(z-1)} - \frac{1}{2i} \frac{1}{(z+1)^2(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^3} = \\
 &= \frac{3}{2} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{4} \frac{1}{z+i} .
 \end{aligned}$$

Visszatranszformálva ($\mathcal{L}_0^{-1}$ -al):

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{t}{2} e^{-t} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4} (e^{it} + e^{-it}) = \\
 &= \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{t}{2} e^{-t} + \frac{t^2}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t .
 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\begin{aligned}
 y' + y &= f(t); & f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq t < 2.5 \\ 0 & \text{ha } t \geq 2.5 \end{cases} . \\
 y(0) &= 1
 \end{aligned}$$

A szuperpozíció elve értelmében először az

$$y' + y = 1 = f_1(t)$$

$$y(0) = 1$$

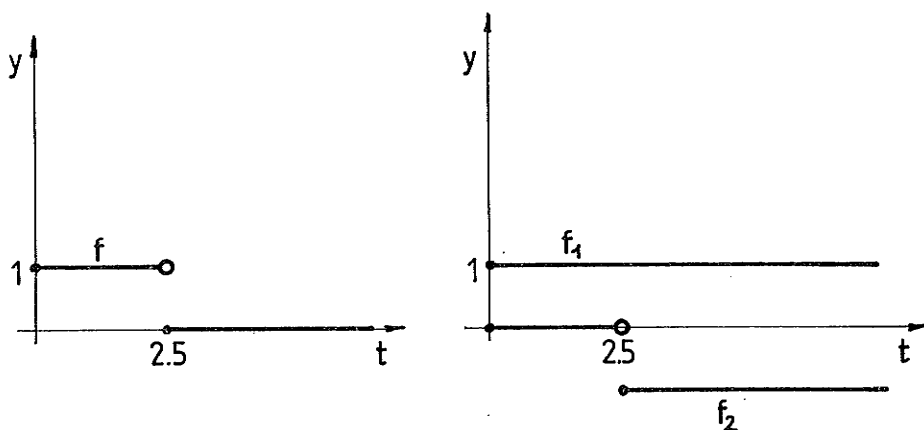
feladatot kell megoldani (a kapott függvény legyen

$$y_1(t), \quad t \geq 0), \quad \text{majd az}$$

$$y' + y = -1 = f_2(t)$$

$$y(2.5) = 0$$

kezdeti érték feladatot ($y_2(t); t \geq 2.5$) (lásd: 16. ábra).



16. ábra

Ezzel

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) & \text{ha } 0 \leq t < 2.5 \\ y_1(t) + y_2(t) & \text{ha } t \geq 2.5 \end{cases}$$

Az első esetben az $\mathcal{L}_0$, a második esetben pedig az $\mathcal{L}_{2.5}$ transzformációt kell alkalmaznunk. Legyen

$$\mathcal{L}_0 y_1 = Y_1 \quad \text{akkor}$$

$$z Y_1 - 1 + Y_1 = \frac{1}{z}$$

$$Y_1 = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{z(1+z)} = \frac{1}{z}$$

$$y_1(t) = 1; \quad t \geq 0$$

Legyen $\mathcal{L}_{2.5} y_2 = Y_2$, akkor

$$z Y_2 + Y_2 = -\frac{1}{z}$$

$$Y_2 = -\frac{1}{z(1+z)} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{z}$$

$$y_2(t) = e^{-(t-2.5)} - 1; \quad t \geq 2.5$$

Ezzel

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq t < 2.5 \\ e^{-(t-2.5)} & \text{ha } t \geq 2.5 \end{cases} .$$

Példáinkból láthatjuk - és általánosan is igaz (ennek igazolását az olvasóra bízjuk) -, hogy L_{1T} -beli zavaró függvények esetében mindig racionális törtfüggvényeket kell szatranszformálnunk, amelyeknél a nevező a számlálónál magasabb fokszámú. Ilyenkor a parciális törtekre bontás módszerét kell alkalmaznunk. Ennek megkönnyítésére szolgál a következő

6.4 (Kifejtési) Tétel

A $p_n(z)$ n -edfokú polinomnak legyen csupa egyszeres gyöke ($z_k, k=1, \dots, n$ és $z_i \neq z_j$, ha $i \neq j$). Legyen $q_m(z)$ m -edfokú polinom ($m < n$). Ekkor

$$\frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{q_m(z_k)}{p'_n(z_k)} \frac{1}{z-z_k} .$$

A bizonyítást az olvasóra bízjuk.

PÉLDÁK

3. Bontsuk parciális törtekre a $\frac{z^2 + 1}{z(z+1)(z-1)}$ racionális törtfüggvényt!

$$z_1=0, z_2=-1, z_3=1. \quad p_3(z)=z^3-z, \quad p'_3(z)=3z^2-1 .$$

$$q_2(0) = 1; \quad p'_3(0) = -1;$$

$$q_2(-1) = 2; \quad p'_3(-1) = 2;$$

$$q_2(1) = 2; \quad p'_3(1) = 2.$$

így

$$\frac{z^2 + 1}{z(z+1)(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} .$$

4. Bontsuk parciális törtekre a

$$\frac{z-1}{z(z+1)^2} \text{ racionális törtfüggvényt! } z_1 = 0,$$

$z_2 = z_3 = -1$. A kétszeres gyök miatt a kifejtési tételt csak két lépésben tudjuk alkalmazni:

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z(z+1)^2} &= \frac{1}{z+1} \frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{1}{z+1} \left\{ \frac{z-1}{2z+1} \right\}_{z=0} \cdot \frac{1}{z} + \\ &\quad + \frac{z-1}{2z+1} \Big|_{z=-1} \cdot \frac{1}{z+1} \Big\} = \\ &= \frac{1}{z+1} \left\{ -\frac{1}{z} + \frac{2}{z+1} \right\} = -\frac{1}{z(z+1)} + \frac{2}{(z+1)^2} = \\ &= \frac{2}{(z+1)^2} - \left\{ \frac{1}{2z+1} \right\}_{z=0} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2z+1} \Big|_{z=-1} \cdot \frac{1}{z+1} \Big\} = \\ &= \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

5. A 4. példa alapján határozzuk meg $\mathcal{L}_T^{-1} \frac{z-1}{z(z+1)^2} -t$!

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T^{-1} \frac{z-1}{z(z+1)^2} &= 2 \mathcal{L}_T^{-1} \frac{1}{(z+1)^2} + \mathcal{L}_T^{-1} \frac{1}{(z+1)} - \mathcal{L}_T^{-1} \frac{1}{z} = \\ &= 2(t-T) e^{-(t-T)} + e^{-(t-T)} - 1; \quad t \geq T. \end{aligned}$$

Annak érdekében, hogy az L_{2T} -beli függvényektől eltérő - bár lényegesen ritkábban előforduló - függvényekre is alkalmazni tudjuk a Laplace-transzformációt, célszerű a 6.1. Definíciónál általánosabb definíciót adni.

6.2 Definíció

Jelöljük C^{∞} -gal azokat az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeket, amelyekre

$$f(t) = 0, \text{ ha } t < 0,$$

$f(t)$ minden véges intervallumon korlátos, integrálható és véges sok szakadási ponttal rendelkezik, szakadási pontjaiban jobbról folytonos. Az $f \in C^{\infty}$ függvény $\mathcal{L}f$ Laplace-transzformáltján az

$$\mathcal{L}f = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} e^{-zt} f(t) dt = F(z)$$

integrállal definiált függvényt értjük, amennyiben ennek értelmezési tartománya nem üres, vagyis van $z \in \mathbb{C}$, hogy a fenti improprius integrál konvergens.

6.5 Tétel

Ha valamely $f \in C^{\infty}$ -ra létezik $K > 0$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $|f(t)| < K e^{\alpha t}$, akkor $\mathcal{L}f$ létezik a $\operatorname{Re} z > \alpha$ félsíkon, más szóval az

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

improprius integrál konvergens $\operatorname{Re} z > \alpha$ -ra.

A 6.1. és 6.2. Definíciók között a következő 2 tétel teremt kapcsolatot.

6.6 Tétel

Ha $\mathcal{L}$ -t L_{10} -ra szűkítjük le (L_{10} elemeit $\mathbb{R}$ -re oly módon kiterjesztve, hogy $f(t) \equiv 0$, ha $t < 0$), akkor $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, olyan értelemben, hogy $\mathcal{L}f = \mathcal{L}_0 f$, ahol $\mathcal{L}f$ értelmezve van.

BIZONYÍTÁS

A 6.5. Tételből következik, hogy ha $f \in L_{10}$ (és f -t természetesen a fenti módon kiterjesztjük), akkor $\mathcal{L}f$ létezik, ha $\operatorname{Re} z$ elég nagy. Ezt a továbbiakban kihasználjuk. Azt kell belátnunk, hogy $\mathcal{L}$ -re $T = 0$ mellett igaz az 1. Definícióban lerögzített 3 tulajdonság.

1. $\mathcal{L}$ homogenitása és additivitása nyilvánvaló: tegyük fel, hogy $\mathcal{L}f_1$ és $\mathcal{L}f_2$ létezik, akkor $\mathcal{L}(c_1f_1 + c_2f_2)$ is létezik az értelmezési tartományok közös részén és

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(c_1f_1 + c_2f_2) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} (c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) dt = \\ &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-zt} f_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-zt} f_2(t) dt = \\ &= c_1 \mathcal{L}f_1 + c_2 \mathcal{L}f_2 .\end{aligned}$$

$$2. \quad \mathcal{L}1 = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z} = \mathcal{L}_0 1 ; \quad (\text{ha } \operatorname{Re} z > 0).$$

3. Először megmutatjuk, hogy ha $f \in L_{10}$, akkor

$$\mathcal{L}f' = z \mathcal{L}f - f(0) .$$

Ugyanis parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f' &= \int_0^{\infty} e^{-zt} f'(t) dt = e^{-zt} f(t) \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \\ &= z \mathcal{L}f - f(0) ,\end{aligned}$$

mivel $f \in L_{10}$ -ból következik, hogy $|f(t)| < K e^{\alpha t}$ valamely $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ -re és $\operatorname{Re} z > \alpha$, így

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) = 0 .$$

Az
$$f(t) = \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right]$$

azonosságból:

$$\mathcal{L} f = \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right]' = z \mathcal{L} \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^0 f(\tau) d\tau,$$

amelyből

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{z} \mathcal{L} f$$

valóban következik, ha $\operatorname{Re} z$ elég nagy!

6.7 Tétel

(1.eltolási tétel)

Legyen $f \in C^x$ és létezzen $\mathcal{L} f$. Legyen $T > 0$ és $f_T(t) := f(t-T)$, akkor $\mathcal{L} f_T$ is létezik ugyanott, ahol $\mathcal{L} f$ és $\mathcal{L} f_T = e^{-zT} \mathcal{L} f$ (vagy másképpen: $\mathcal{L} f(t-T) = e^{-zT} \mathcal{L} f(t)$).

BIZONYÍTÁS

Legyen $s = t-T$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(t-T) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t-T) dt = \int_{-T}^\infty e^{-z(s+T)} f(s) ds = \\ &= e^{-zT} \int_0^\infty e^{-zs} f(s) ds = e^{-zT} \mathcal{L} f(t) ! \end{aligned}$$

E tételből az következik, hogy a Laplace-transzformáltban az e^{-zT} szorzó olyan utasításnak fogható fel, amely szerint a szorzó nélküli függvény visszatranszformáltját T -vel

"jobbra el kell tolni", vagyis a t változó helyére $t-T$ változót kell írni. Tehát ha $F \in L_2$, (L_2 -re lásd: 6.1. Definiációt), akkor

$$\mathcal{L}_T^{-1} F = \mathcal{L}^{-1} (e^{-zT} F) .$$

Az eltolási tétel alkalmazásával a Laplace-transzformáció eddig tanult módszerei még egyszerűbbé tehetők.

PÉLDA

6. Oldjuk meg ismét a 2. Példa feladatát, de most alkalmazzuk az eltolási tételt: az $e^{-2.5 z}$ tényezőt, mint a visszatranszformáláskor egy eltolás végrehajtására vonatkozó utasítást kezeljük:

$$\mathcal{L} f = \frac{1}{z} - \frac{e^{-2.5 z}}{z}$$

$$zY - 1 + Y = \frac{1}{z} - \frac{e^{-2.5 z}}{z}$$

$$Y = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{z(1+z)} - \frac{e^{-2.5 z}}{z(1+z)} =$$

$$= \frac{1}{z} + e^{-2.5 z} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1} Y = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq t < 2.5 \\ e^{-(t-2.5)} & \text{ha } t \geq 2.5 \end{cases}$$

A továbbiakban az $\mathcal{L}$ transzformáció néhány egyéb tulajdonságát vizsgáljuk. A tételek hiányzó bizonyításai megtalálhatók [7]-ben.

6.8 Tétel

Ha a Laplace-integrál (tehát $\int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$) z_0 -ban abszolút konvergens

$$(\text{tehát } \int_0^{\infty} |e^{-z_0 t} f(t)| dt \text{ létezik}),$$

akkor minden olyan z -re abszolút konvergencia, amelyre $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$.

6.9 Tétel

Ha $f \in C^{\infty}$ folytonos $[0, \infty]$ -ben és $\mathcal{L}f$ létezik, akkor ahol létezik, ott analitikus.

Ahol $\mathcal{L}f$ ugyan nem létezik, de analitikusan kiterjeszthető, ott a kiterjesztett függvényt is f Laplace-transzformáltjának nevezzük.

(pl. $\mathcal{L}1 = \frac{1}{z}$, ha $\operatorname{Re} z > 0$, de $\frac{1}{z}$ minden $z \neq 0$ -ra analitikus és így kiterjesztve ez a függvény 1 Laplace-transzformáltja).

6.10 Tétel

(2. eltolási tétel)

Legyen $f \in C^{\infty}$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{L}f = F(z)$ létezik, ha $\operatorname{Re} z \geq \varrho$. Akkor $\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(z-a)$, ahol $\operatorname{Re}(z-a) \geq \varrho$, $a \in \mathbb{C}$.

BIZONYÍTÁS

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{at} f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(z-a)t} f(t) dt = \\ &= F(z-a) ! \end{aligned}$$

6.11 Tétel

(Periodikus függvény Laplace-transzformáltja)

Legyen $f \in C^{\times}$ és $f(t+T) = f(t)$; $T > 0$ adott.

$$\text{Legyen } f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{ha } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{ha } t \geq T, \text{ vagy } t < 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}f_0$ létezzék $\operatorname{Re} z \geq \varrho$ -ra.

$$\text{Akkor } \mathcal{L}f = \frac{1}{1-e^{-zT}} \mathcal{L}f_0; \quad \operatorname{Re} z > \max(0; \varrho) .$$

BIZONYÍTÁS

Az eltolási tétel alkalmazásával:

$$\mathcal{L}f = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-zkT} \mathcal{L}f_0 = \mathcal{L}f_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-zkT} = \frac{1}{1-e^{-zT}} \mathcal{L}f_0 ,$$

ha egyrészt $\operatorname{Re} z \geq \varrho$, másrészt $|e^{-zkT}| < 1$, vagyis $\operatorname{Re} z > 0$,
tehát végeredményben $\operatorname{Re} z > \max(0; \varrho) !$

MEGJEGYZÉS

A tételben a Laplace-transzformációknál szokásos szóhasználatnál élve beszéltünk "periodikus" függvényekről. Valójában itt nem periodikus függvényekről van szó, hanem olyan függvényekről, amely $t < 0$ zérus értékűek, a $[0, \infty]$ intervallumban pedig valamely $\mathbb{R} - n$ periodikus függvénnyel azonosak.

6.3 Definíció

Legyen $f, g \in C^{\times}$; az f és g függvény konvolúcióján (amelyet $f \times g$ -vel jelölünk) a következő függvényt értjük:

$$(f \times g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau .$$

6.12 Tétel

A konvolúció disztributív:

$$f \times (g + h) = (f \times g) + (f \times h),$$

kommutatív:

$$f \times g = g \times f$$

és asszociatív

$$f \times (g \times h) = (f \times g) \times h.$$

BIZONYÍTÁS

A disztributivitás nyilvánvaló. A kommutativitás is egyszerűen bizonyítható az integrálási változó megfelelő megváltoztatásával ($u = t - \tau$):

$$\begin{aligned} (f \times g)(t) &= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = - \int_t^0 f(t-u) g(u) du = \\ &= \int_0^t g(u) f(t-u) du = (g \times f)(t). \end{aligned}$$

Most bizonyítsuk be az asszociativitást:

$$\begin{aligned} (f \times (g \times h))(t) &= \int_0^t f(s) \int_0^{t-s} g(\tau) h(t-s-\tau) d\tau ds = \\ &= \int_0^t \left[\int_0^{t-s} f(s) g(\tau) h(t-s-\tau) d\tau \right] ds. \end{aligned}$$

Az utolsó integrál a

$$0 \leq \tau \leq t-s$$

$$0 \leq s \leq t$$

tartományon végrehajtott kettős integrálként kezelhető.

Cseréljük meg az integrálás sorrendjét:

$$\begin{aligned} (f \times (g \times h))(t) &= \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} f(s) g(\tau) h(t-s-\tau) ds \right] d\tau = \\ &= \int_0^t g(\tau) \left[\int_0^{t-\tau} f(s) h(t-\tau-s) ds \right] d\tau = (g \times (f \times h))(t). \end{aligned}$$

Ha figyelembe vesszük az imént bizonyított kommutativitást, akkor

$$f \times (h \times g) = (f \times h) \times g,$$

amelyből h és g szerepének felcserélésével igazoltuk állításunkat!

6.13 Konvolúció tétele

Ha $\int_0^\infty e^{-z_0 t} f(t) dt$ és $\int_0^\infty e^{-z_0 t} g(t) dt$ létezik és abszolút konvergens, $f, g \in C^X$, akkor $\mathcal{L}(f \times g)$ létezik minden $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$ -ra és

$$\mathcal{L}(f \times g) = (\mathcal{L}f) \cdot (\mathcal{L}g).$$

A bizonyítást csak vázlatosan közöljük.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f) \cdot (\mathcal{L}g) &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-z\tau} d\tau \cdot \int_0^\infty g(s) e^{-zs} ds = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau) g(s) e^{-z(\tau+s)} d\tau ds. \end{aligned}$$

Térjünk át τ helyett az $u = \tau + s$ új változóra.

Akkor a

$$0 \leq \tau \leq \infty$$

$$0 \leq s \leq \infty$$

tartomány helyett a

$$0 \leq s \leq u$$

$$0 \leq u \leq \infty$$

tartományon kell integrálnunk és vegyük még figyelembe, hogy a Jacobi-determináns egy. Ezzel:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} f) \cdot (\mathcal{L} g) &= \int_0^\infty \int_0^u f(u-s) g(s) e^{-zu} ds du = \\ &= \int_0^\infty e^{-zu} \left[\int_0^u f(u-s) g(s) ds \right] du = \mathcal{L}(f \times g) ! \end{aligned}$$

6.14 Tétel

(Integrál Laplace-transzformáltja)

Legyen $\int_0^\infty e^{-z_0 t} f(t) dt$ abszolút konvergens,

$f \in C^x$, $a \geq 0$, akkor

$$\mathcal{L} \left[\int_a^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{\mathcal{L} f}{z} - \frac{1}{z} \int_0^a f(\tau) d\tau ,$$

ahol a fenti integrál Laplace-transzformáltja létezik $\operatorname{Re} z > \max(\operatorname{Re} z_0, 0)$ -ra ($t < 0$ esetén az integrál helyett zérus veendő!).

BIZONYÍTÁS

Vegyük figyelembe, hogy

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = (f * 1)(t) .$$

Ezzel, ha $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int_a^t f(\tau) d\tau \right] &= \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^a f(\tau) d\tau \right] = \\ &= \mathcal{L}(f * 1) - \mathcal{L} \left[\int_0^a f(\tau) d\tau \right] = \frac{\mathcal{L} f}{z} - \frac{1}{z} \int_0^a f(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

Mivel $z \neq 0$, így z -re valóban a $\operatorname{Re} z > \max(\operatorname{Re} z_0, 0)$ megkötés kell!

6.15 Tétel

(Derivált Laplace-transzformáltja)

Legyen $f \in C^n$ n -szer folytonosan deriválható, és legyen

$$\int_0^\infty e^{-z_0 t} f^{(k)}(t) dt \text{ abszolút konvergens, } k \leq n. \text{ Akkor}$$

$$\mathcal{L} f^{(n)} = z^n \mathcal{L} f - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) .$$

BIZONYÍTÁS

Matematikai indukciót alkalmazhatunk pontosan ugyanúgy, mint a 6.1. Tétel bizonyításában!

FELADAT

Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{t} * \sqrt{t} = \frac{\pi}{8} t^2 !$$

Ezzel az eredménnyel a következőket kapjuk:

$$(\mathcal{L}\sqrt{t})^2 = (\mathcal{L}\sqrt{t}) \cdot (\mathcal{L}\sqrt{t}) = \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{8} t^2\right) = \frac{\pi}{8} \frac{2}{z^3},$$

amelyből

$$\mathcal{L}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 z^{3/2}}.$$

Továbbá:

$$(t^{3/2})' = \frac{3}{2} \sqrt{t},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{3}{2} \sqrt{t}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4 z^{3/2}},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{3}{2} \sqrt{t}\right) = \mathcal{L}(t^{3/2})' = z \mathcal{L}t^{3/2},$$

amelyből

$$\mathcal{L}t^{3/2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4 z^{5/2}}.$$

A legutolsó eredményhez a következő tétel felhasználásával is éljuthatunk (hogyan?).

6.16 Tétel

Legyen $f \in C^{\infty}$ és $\mathcal{L}f$ analitikus (lásd: 6.9. Tételt).
Akkor

$$\frac{d^n \mathcal{L}f}{dz^n} = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)].$$

A bizonyítás alapgondolata a következő:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dz} e^{-zt} f(t) dt = \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-zt} t f(t) dt = - \mathcal{L}(t f(t)). \end{aligned}$$

Ezzel

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt &= - \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-zt} t f(t) dt = \\ &= (-1)^2 \int_0^{\infty} e^{-zt} t^2 f(t) dt = (-1)^2 \mathcal{L}(t^2 f(t)), \text{ stb.} \end{aligned}$$

Ezek után foglalkozzunk azzal a kérdéssel, hogy egy f függvény $\mathcal{L}f$ Laplace-transzformáltja ismeretében hogyan lehet magát az f függvényt megkapni? Vagyis: létezik-e $\mathcal{L}$ -nek inverze és ez hogyan határozható meg? Az L_{1T} -beli függvényekre már megoldottuk ezt a feladatot. Ennél általánosabb esetekre érvényes a következő

6.17 Tétel

Ha $f, g \in C^{\infty}$, $\mathcal{L}f, \mathcal{L}g$ létezik és $\mathcal{L}f \equiv \mathcal{L}g$, akkor $f(t) \equiv g(t)$.

Tehát $\mathcal{L}$ -nak létezik inverze a C^{∞} -beli függvények Laplace-transzformáltjainak halmazán (más néven: C^{∞} képterében).

$\mathcal{L}^{-1}$ nyilván homogén és additív. A visszatranszformálás túlnyomórészt azon alapul, hogy az adott $F(z)$ függvényről felismerjük (esetleg bizonyos átalakítások után), hogy mi-nek a Laplace-transzformáltja.

Ezért célszerű, hogy minél több C -beli függvény Laplace-transzformáltja táblázatosan rendelkezésünkre álljon. Ilyen táblázatok nagy számban léteznek, lásd pl.: [8].

PÉLDÁK

7.

$$\begin{aligned} \int \frac{1+z}{z^{5/2}} &= \int \frac{1}{z^{5/2}} + \int \frac{1}{z^{3/2}} = \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}; \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{i}{z+i} - \frac{1}{2} \frac{i}{z-i} \right) dz = \\ &= \frac{i}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+i} dz - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-i} dz \right) = \frac{i}{2} (e^{-it} - e^{it}) = \\ &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t; \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

A teljesség kedvéért megemlítjük - bár a gyakorlatban ritkán használják - az ún. Riemann-Mellin inverziós integrált. Legyen $F(z)$ analitikus a $\operatorname{Re} z > \alpha$ félsíkon. Bizonyos egyéb feltételek teljesülése esetén igaz a Riemann-Mellin-féle formula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{zt} F(z) dz, \quad \beta > \alpha.$$

Az integrálási határok azt jelentik, hogy a vonalmenti integrálást az $\operatorname{Re} z = \beta$ egyenlet által meghatározott egyenes mentén kell végrehajtani. Az integrálás értéke független β -tól. Ha az inverziós integrál kiértékelése mégis szükséges, akkor itt jó hasznát vehetjük a reziduum tételnek.

Most a Fourier-transzformációról és az ún. spektrumról ejtünk néhány szót. Itt is a Laplace-transzformáció fontos alkalmazási lehetőségét látjuk. Ha $f \in C^{\infty}$ abszolút integrálható $[0, \infty)$ -n, akkor $\mathcal{L}f$ létezik $\operatorname{Re} z = 0$ -nál, hiszen

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \quad \text{is abszolút konvergens.}$$

Legyen $\mathcal{L}f = F(z)$.

Valamely f nem periodikus függvény Fourier-transzformáltján, vagy más néven (komplex) spektrumán az

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt;$$

integrállal meghatározott függvényt értjük (ha ez az integrál létezik). (A spektrumnak periodikus függvények esetében a függvény (komplex) Fourier-sorának $s(\omega)$ együtthatói felelnek meg, amelyek a Fourier-sorban előforduló körfrekvenciáktól eltérő ω -kra zérusak).

Láthatjuk, hogy abszolút integrálható C^{∞} -beli függvények esetében:

$$F(i\omega) = 2\pi s(\omega),$$

hiszen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \Big|_{z=i\omega} = \frac{1}{2\pi} F(i\omega). \end{aligned}$$

(Nyomatékosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy C^{∞} -beli függvények - az $f(t) \equiv 0$ eset kivételével - a szó szigorú értelmében nem lehetnek periodikusak, így Fourier-soruk sem létezhet. Ennek az az oka, hogy ha $f \in C^{\infty}$, akkor $f(t) \equiv 0$ ha $t < 0$, így az $f(t) = f(t+T)$, $t > 0$ egyenlőségből nem következik az $f(t) = f(t-T)$; $t > 0$ és ez általában nem is igaz. Tehát pl. $\sin t$ periodikus a szó szigorú értelmében, ugyanakkor az

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$

függvényt ($f \in C^{\infty}$) a C^{∞} -beli függvények között periodikusnak nevezzük, de szigorúan véve nem az, így nem létezik Fourier-sora sem!)

A Fourier-transzformáció a Fourier-sorba fejtés általánosítása nem periodikus függvényekre.

PÉLDÁK

9. Határozzuk meg az

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{ha } t \geq 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$

függvény spektrumát!

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{z+1} = F(z), \text{ amelyből } s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i\omega + 1}.$$

10. Határozzuk meg az

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{ha } t < 0, \text{ vagy } 1 \leq t \end{cases}$$

függvény spektrumát!

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{z} - \frac{e^{-z}}{z} = F(z)$$

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} = \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}}}{\pi\omega} \frac{e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{-i\frac{\omega}{2}}}{2i} = \\ &= \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}}}{\pi\omega} \sin \frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} s(\omega) = \frac{1}{\pi\omega} \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega}{2} = \frac{\sin \omega}{2\pi\omega},$$

$$\operatorname{Im} s(\omega) = -\frac{1}{\pi\omega} \sin^2 \frac{\omega}{2} = -\frac{1}{2\pi\omega} + \frac{\cos \omega}{2\pi\omega},$$

ha $\omega \neq 0$ és $\omega = 0$ esetén ($s(\omega)$ -nak itt megszüntethető szakadása van!):

$$\operatorname{Re} s(0) = \frac{1}{2\pi},$$

$$\operatorname{Im} s(0) = 0.$$

Végezetül megmutatjuk, hogy a Laplace-transzformáció lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek megoldásának is hasznos segédeszköze. Nem kell mást tennünk, mint az előforduló, időtől függő vektorok és mátrixok elemeire alkalmazni a transzformációt.

11. PÉLDA

Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot.

$$\dot{x} = A x + b(t); x \in \mathbb{Q}^2$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad b(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} .$$

Legyen $\mathcal{L}x = \xi$; $\mathcal{L}b = \beta$. Ekkor:

$$z\xi - x(0) = A\xi + \beta ,$$

amelyből

$$(zE - A)\xi = x(0) + \beta ,$$

ahol E az egységmátrix. Fejezzük ki ξ -t!

$$\begin{aligned} \xi &= (zE - A)^{-1}(x(0) + \beta) = \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 1 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(z-1)(z-2)+1} \begin{bmatrix} z-2 & 1 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z+1}{z} \\ \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z(z+1)(z-2)+1}{z^2(z-1)(z-2)+z^2} \\ \frac{-z(z+1)+z-1}{z^2(z-1)(z-2)+z^2} \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

amelyből

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{z^3 - z^2 - 2z + 1}{z^2(z^2 - 3z + 3)} \right) ,$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-z^2 - 1}{z^2(z^2 - 3z + 3)} \right) ,$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} .$$

A feladat befejezését az olvasóra bízunk.

Irodalom

- 1 R.E. Edwards:
Functional Analysis
Theory and Applications
Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.
Orosz nyelvű kiadás: Moszkva, 1969.
- 2 A.N. Kolmogorov:
Valószínűségszámítás alapfogalmai
Gondolat, 1982.
- 3 Máté László:
Funkcionálanalízis Műszakiaknak.
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
- 4 A. Wolk:
A Course of Applied Funktional Analysis
John Woley Sons, New York, 1979.
- 5 V. Maugoldt/Knopp:
Einführung in die Höhere Mathematik
IV. Band
S. Hirzel Verlag. Leipzig, 1979.
- 6 V. Hutson, J.S. Pym:
Applications of Functional Analysis and Operator Theory
Academic Press, London, 1980.
- 7 G. Doetsch:
Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transz-
formation
Birkhäuser Verlag. Basel und Stuttgart, 1958.
- 8 Dr. Fodor György:
A Laplace-Transzformáció Műszaki Alkalmazása
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.