

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Dr. Bajcsay Pál

MATEMATIKA III.
Komplex függvények, Differenciálegyenletek

Műegyetemi Kiadó, 1996.

Lektorálta:

Dr. Monostory Iván

LATEX szövegszerkesztés:

Géczy Flóra

© **Dr. Bajcsay Pál** egyetemi tanár, 1996.

Jegyzet azonosító: **45023**

A Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Kar megrendelése alapján
kiadja a **Műegyetemi Kiadó**

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 17.15 (A/5) ív

Nyomtatta és kötötte: Nyomda Kft.

Felelős vezető: Fekete József

Munkaszám: 96 - 0027

Tartalomjegyzék

11. Komplex függvénytan	7
11.1. Komplex változós függvények	7
11.1.1. Definíciók	7
11.1.2. Komplex változós függvény differenciálhatósága	10
11.1.3. Komplex függvény deriválhatóságának néhány tulajdonsága	11
11.1.4. Görbe menti integrál	17
11.1.5. Néhány transzcendens függvény komplexben	19
11.1.6. A Cauchy-féle tétel és következményei.	22
11.1.7. A Cauchy-Taylor-féle hatványsor	25
11.1.8. A Laurent-féle hatványsor	26
11.1.9. Reguláris és szinguláris pontok.	28
11.1.10. A reziduum-tétel	29
12. Fourier-sor, Fourier-integrál. Laplace transzformáció	31
12.1. Az approximációelmélet néhány problémájáról	31
12.1.1. Bevezetés	31
12.1.2. Adott függvény négyzetes legjobb megközelítése adott intervallumban	33
12.1.3. Ortogonális bázis-függvényrendszer választása	35
12.2. Fourier-polinom. Fourier-sor. Fourier-integrál	37
12.2.1. Fourier-polinom.	37
12.2.2. Fourier-sor	38
12.2.3. Fourier-integrál	40
12.3. Laplace-transzformáció	41
12.3.1. A Fourier-sor és a Fourier-integrál komplex alakja.	41
12.3.2. A Laplace-transzformáció bevezetése.	43
12.3.3. A Laplace-transzformáció néhány tulajdonsága.	46
13. Közöséges differenciálegyenletek	51
13.1. Bevezetés	51
13.1.1. Definíciók, osztályozás.	51
13.1.2. Differenciálegyenletek megoldása, a megoldások geometriai értelmezése.	53
13.1.3. Összefoglaló áttekintés a már tárgyalt legegyszerűbb közöséges differenciálegyenletekről	56
13.2. Egzaktt differenciálegyenlet. Integráló tényező.	58

13.2.1. Egzakt differenciálegyenlet.	58
13.2.2. Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)	60
13.3. Elsőrendű explicit differenciálegyenlet geometriai szemléltetése; a megoldás egzisztenciájának és unicitásának kérdése	63
13.3.1. Iránymező, izoklinák	63
13.3.2. Közelítő törtvonalak módszere (Euler-Cauchy)	64
13.3.3. Picard féle szukcesszív approximáció (sorozatos közelítés)	66
13.4. Elsőrendű explicit differenciálegyenlet szinguláris pontjai	72
13.4.1. Bevezetés	72
13.4.2. A megoldások jellege a szinguláris pont környezetében.	74
13.5. Görbesereg izogonális trajektóriái	82
13.5.1. Az izogonális trajektóriák problémája	82
13.5.2. Adott görbesereg izogonális trajektóriáinak meghatározása.	83
13.6. Elsőrendű differenciálegyenlet közelítő megoldása	85
13.6.1. Közelítő megoldás hatványsor részletösszegével.	85
13.6.2. A Runge-Kutta-féle közelítő eljárás	89
13.7. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszer	91
13.7.1. Bevezetés	91
13.7.2. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszer Cauchy-féle normálalakja.	94
13.7.3. A megoldás egzisztenciájának és unicitásának elégséges feltételei.	96
13.8. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletrendszer állandó együtthatókkal	98
13.8.1. Homogén lineáris differenciálegyenletrendszer.	98
13.8.2. A rezolvens mátrix néhány tulajdonsága.	100
13.8.3. Inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer.	104
13.8.4. A rezolvens mátrix konkrét előállítása konstans A együtthatómátrix esetén.	105
13.9. Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet egy ismeretlen függvénnyel.	116
13.9.1. n -edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet állandó együttha- tókkal.	116
13.9.2. n -edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet állandó együtth- atókkal.	121
13.9.3. Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet me- goldása kísérletező feltevessel.	123
13.9.4. Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet állandó együtth- atókkal.	124

13.9.5. A Laplace-transzformáció alkalmazása állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldására.	128
13.10 Lineáris differenciálegyenletek változó együtthatókkal.	130
13.10.1 Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletrendszer változó együtthatókkal.	130
13.10.2 Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer változó együtthatókkal.	134
13.10.3 A megoldások stabilitása.	134
13.10.4 A másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásairól.	135
13.11 A másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása hatványsor alakjában	141
13.11.1 Megoldás hatványsor alakjában.	141
13.11.2 Nem lényeges szingularitás.	143
13.11.3 A Bessel-féle differenciálegyenlet.	145
13.11.4 Bessel-függvényekre vonatkozó néhány összefüggés.	149
13.11.5 A Bessel-függvények ortogonalitása.	153
14. Másodrendű, állandó együtthatójú lineáris parciális differenciál- egyenletek.	157
14.1. Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek osztályozása.	157
14.1.1. Bevezetés	157
14.1.2. Másodrendű egyenletek két független változóval.	158
14.1.3. Másodrendű (főrészükből) lineáris parciális differenciálegyenletek kanonikus alakja.	160
14.1.4. Állandó együtthatók esete.	164
14.1.5. Cauchy-féle feladat.	166
14.2. A matematikai fizika néhány egyszerű másodrendű parciális diffe- renciálegyenlete	169
14.2.1. Bevezetés	169
14.2.2. Perem- és kezdetiérték feladat megoldása a változók szétválasztásával.	170
14.3. A rezgő húr problémája.	173
14.3.1. Derékszögű négyszög alakú membrán rezgései.	176
14.3.2. Kör alakú membrán rezgései.	178
14.3.3. Egydimenziós hővezetési feladat.	180
14.3.4. Kétdimenziós hővezetési feladatok.	182
14.3.5. Kétdimenziós stacionárius hőeloszlási feladatok.	185
14.3.6. A körre vonatkozó Dirichlet-féle feladat.	188

11. Komplex függvénytan

11.1. Komplex változós függvények

11.1.1. Definíciók

Ha a komplex számok halmazának ($\mathbb{C}$) egy meghatározott részhalmaza ($X \subset \mathbb{C}$) minden egyes eleméhez ($z \in X \subset \mathbb{C}$) egy meghatározott komplex számot ($w \in Y \subset \mathbb{C}$) rendelünk hozzá, akkor *komplex értékű komplex változós függvényről* beszélünk:

$$f: X \rightarrow Y,$$

$$\text{ahol } z \in X \subset \mathbb{C},$$

$$w \in Y \subset \mathbb{C}.$$

X elemei alkotják a függvény *értelmezési tartományát* és Y elemei alkotják a függvény *értékkészletét*:

$$X = D(f) \quad \text{és} \quad Y = R(f).$$

Ha $x \in D(f)$, akkor

$$f(z) \in R(f)$$

a függvény *helyettesítési értéke*. Ezt a helyettesítési értéket sokszor célszerű egyetlen betűvel jelölni, pl.

$$f(z) = w$$

és szokás ezt a függvény *függő változójának* hívni, míg z a *független változó (argumentum)* konkrét értéke.

Szokás a komplex függvényt $\mathbb{C}$ -ből $\mathbb{C}$ -be vezető *leképezésnek* is hívni.

Ha

$$z \in D(f)$$

és

$$f(z) = w \in R(f),$$

akkor a

$$(z, w) \in D(f) \times R(f) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$$

elemek (rendezett komplex számpárok) összessége az f függvény *grafikonját* alkotja. (Megjegyzendő az, hogy ennek a grafikonnak nincs a szó szoros értelmében véve "megrajzolható" szemléletes tartalma.)

A komplex függvények konkrét megadásakor rendszerint a független változót is és a függvényértéket is a komplex számok algebrai alakjában adjuk meg:

$$z = x + iy,$$

$$w = u + iv;$$

tehát

$$x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbf{R}, \quad y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbf{R},$$

illetve

$$u = \operatorname{Re}(w) \in \mathbf{R}, \quad v = \operatorname{Im}(w) \in \mathbf{R}$$

azaz

$$f(z) = f(x + iy) = w = u + iv.$$

Nyilvánvaló, hogy $f(z)$ valós része is és képzetes része is tulajdonképpen egy-egy valós értékű kétváltozós valós függvény (a komplex z független változó valós és képzetes része, tehát x és y a független változók), azaz $f(z)$ megadása ekvivalens az

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

kétváltozós valós függvényrendszer megadásával. Ha megadjuk az

$$\begin{cases} u(x, y), \\ v(x, y) \end{cases}$$

függvényrendszert, akkor ebből

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

módon kapjuk $f(z)$ -t.

Ebből rögtön következik, hogy az $f(z)$ komplex függvény egy *síkbeli (kétdimenziós) vektor-vektor függvény* (vektoreloszlás, vektormező) megfelelője. Ha ugyanis a független változó vektor

$$\mathbf{r} = xi + yj$$

és a függő változó vektor

$$\mathbf{v} = ui + vj,$$

akkor a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}$$

vektor-vektor függvény megfelel a

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

komplex függvénynek. Az $\mathbf{r}$ helyvektor koordinátáit a z komplex változó valós illetve képzetes részével és a $\mathbf{v}$ függő változó vektor koordinátáit a w függvényérték valós, illetve képzetes részével lehet azonosítani.

Az a tény, hogy a komplex számok tulajdonképpen olyan síkvektorok, melyekre a műveleteket azonos módon definiáljuk, mint a valós számokra, bizonyos előnyt jelent a síkbeli vektoreloszlásoknak, vektormezőknek komplex függvényekkel való leírásánál. Az alkalmazásoknál (pl. kontinuumok mechanikájában, áramlástanban, elektrotechnikában, stb) ezt a körülményt messzemenően ki szokták használni.

Komplex változós függvényeknek a *szemléltetése* rendszerint úgy történik, hogy a független változó $z = x + iy$ értékeket az (x, y) -sík, röviden z -sík pontjaival, a függő változó $w = u + iv$ értékeket pedig az (u, v) -sík, röviden w -sík pontjaival ábrázoljuk. Ha tehát

$$f(z) = w,$$

akkor mondhatjuk azt, hogy az $f(z)$ függvény a z -sík pontjainak a w -sík pontjaira való *leképezését* értelmezi: a z -sík bizonyos pontjaihoz, mint alappontokhoz a w -sík megfelelő pontjait, mint képpontokat rendeli hozzá. Egy ilyen leképezést rendszerint úgy teszünk szemléletessé, hogy a z -sík bizonyos jellegzetes görbéinek a képgörbéit adjuk meg a w -síkban.

A valósból jól ismert fogalmak megfelelő általánosításával mondhatjuk, hogy

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

állítás, vagyis hogy $f(z)$ *határértéke*, a z tart z_0 -hoz határatmenet mellett, A azt jelenti, hogy a z_0 alappontnak bármely (tőle különböző) $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ pontokkal való megközelítésénél a megfelelő $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), \dots, w_n = f(z_n), \dots$ képpontsorozat egy és ugyanazt a w -síkbeli A pontot közelíti meg. Más szóval a z_0 elegendő kis δ -sugarú környezetében fekvő z -pontok képe a w -sík A pontjának előírt ε -sugarú környezetébe esik:

bármely kicsiny pozitív ε megadásához létezik olyan, ugyancsak kicsiny pozitív δ , hogy fennáljon

$$|f(z) - A| < \varepsilon,$$

hacsak

$$|z - z_0| < \delta.$$

A határatmenetet illetően megjegyezzük azt, hogy

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ z_0 &= x_0 + iy_0 = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0) \end{aligned}$$

miatt, ha

$$z \rightarrow z_0,$$

akkor

$$x \rightarrow x_0 \quad \text{és} \quad y \rightarrow y_0,$$

illetve

$$r \rightarrow r_0 \quad \text{és} \quad \varphi \rightarrow \varphi_0$$

egymástól függetlenül és egyszerre. (Az $\arcsin$ többértékűsége miatt természetesen az $\arcsin$ főértékére szorítkozunk.)

Ha most még feltesszük azt is, hogy $f(z)$ a z_0 helyen is értelmezve van és $f(z_0) = A$, azaz

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

akkor $f(z)$ a z_0 helyen *folytanos*.

11.1.2. Komplex változós függvény differenciálhatósága

Az

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = w$$

komplex változós függvény a $z = x + iy$ helyen *differenciálható*, ha – a határátmenet módjától függetlenül – létezik a következő határérték:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = f'(z).$$

Ennek egyik (szükséges) feltétele az, hogy $f(z)$ valós és képzetes részének létezzene x és y szerint a folytonos elsőrendű parciális deriváltjai, vagyis hogy a valós $u(x, y)$ és $v(x, y)$ kétváltozós függvények az adott helyen totálisan deriválhatók legyenek. Ez azonban még csak szükséges, de nem elégséges feltétele $f(z)$ deriválhatóságának. A deriválhatóság elégséges feltétele az, hogy $u(x, y)$ és $v(x, y)$ folytonos elsőrendű parciális deriváltjai kielégítsék az ún. *Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Hogy ezt belássuk, vegyük figyelembe azt, hogy a deriváltat definiáló

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

határértéknek függetlennek kell lennie a határátmenet módjától, azaz e határérték ugyanaz kell legyen akármilyen $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenet mellett. Rögzítsük le először y -t, azaz z képzetes részét és tegyük fel azt, hogy csak x , azaz z valós része változik: $\Delta z \equiv \Delta x$. Ekkor

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ha viszont állandó x mellett csak y változik, azaz $\Delta z \equiv i\Delta y$, akkor

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{i\Delta y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

mert hiszen $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

Mivel a két különböző határátmenet mellett számított derivált azonos, azért kell, hogy

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

fennáljon, tehát

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}$$

amint állítottuk.

Ebben az esetben az $f(z)$ függvényt *reguláris* vagy *analitikus függvénynek* nevezzük. (Az *analitikus* jelző arra a később tárgyalandó tulajdonságra utal, hogy egy differenciálható komplex változós $f(z)$ függvény *akárhányszor differenciálható!*)

11.1.3. Komplex függvény deriválhatóságának néhány tulajdonsága

a.) Legyen

$$f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$$

egy reguláris komplex változós függvény és tekintsük a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$$

síkbeli vektoreloszlást.

Ennek a vektoreloszlásnak a divergenciája:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial v}{\partial y}$$

és a rotációjának az (x, y) -síkra merőleges, azaz $\mathbf{k}$ -irányú összetevője:

$$\mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ha komplexben a nabla vektort, azaz a ∇ operátort így definiáljuk:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

és ennek a konjugáltja:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y},$$

akkor

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} w &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v})i = \\ &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{dw}{dz}.\end{aligned}$$

Innen látható egyrészt az, hogy egy reguláris komplex változós függvény deriváltjának a kétszeresét formálisan a $\bar{\nabla}$ komplex operátorral való szorzás útján lehet származtatni, másrészt pedig a $\bar{\nabla}w$ valós része a síkbeli $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektoreloszlás divergenciáját, a képzetes része pedig rotációja (x, y) -síkra merőleges komponensét adja:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{Re} (\bar{\nabla} w) = \operatorname{Re} \left(2 \frac{dw}{dz} \right),$$

$$\mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{Im} (\bar{\nabla} w) = \operatorname{Im} \left(2 \frac{dw}{dz} \right).$$

b.) A későbbiekből elővételezzük azt, hogy a reguláris komplex függvény valós és képzetes részének léteznek a folytonos másodrendű parciális deriváltjai is.

Bármely reguláris komplex változós függvény valós és képzetes része kielégíti az ún. *Laplace-féle parciális differenciálegyenletet*:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Az olyan folytonos másodrendű parciális deriváltakkal rendelkező többváltozós függvényt, amely kielégíti a Laplace-féle parciális differenciálegyenletet, *harmonikus függvénynek* nevezzük. Tehát a reguláris $f(z)$ komplex függvény valós és képzetes része harmonikus függvény.

Az állítás helyessége közvetlenül adódik a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletekből és a másodrendű deriváltak folytonosságából.

Ugyanis a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

egyenletet x -szerint deriválva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

adódik, viszont a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

egyenletet y -szerint deriválva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

adódik. Így tehát

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Fordított sorrendben deriválva a Cauchy-Riemann-féle egyenleteket és a két eredményt egymásból kivonva, kapjuk:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

Az állítás megfordításaként adódik, hogy egy egyszeresen összefüggő síkrészben az $u(x, y)$ harmonikus függvényhez mindig található olyan $v(x, y)$ "harmonikus társ", amellyel együtt képezett

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

komplex változós függvény reguláris. Az adott $u(x, y)$ harmonikus függvény harmonikus társát a kvadratura-probléma megoldásához hasonlóan számíthatjuk, a reguláris komplex változós függvények esetén fennálló Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek felhasználásával. Ezek szerint ugyanis az ismeretlen $v(x, y)$ függvény teljes differenciálja:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

tehát

$$v(x, y) = \int_{(L)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C,$$

ahol az integrált az (x, y) -sík szóbanforgó, egyszeresen összefüggő részében futó, tetszőleges L görbe mentén kell számítani, egy rögzített $z_0 = x_0 + iy_0$ pontból a változó $z = x + iy$ pontig. C tetszőleges valós állandó. ($v(x, y)$ az adott $u(x, y)$ -ből egy additív konstans erejéig van egyértelműen meghatározva!)

Figyelembe véve azt, hogy

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u,$$

$$\Delta v = \operatorname{div} \operatorname{grad} v$$

és ezek a fentiek szerint 0-val egyenlők, azért egy reguláris komplex változós függvény valós (vagy képzetes) részét pl. egy síkbeli forrásmentes áramlás sebességeloszlása skaláris potenciáljának lehet tekinteni.

Legyen pl. egy síkbeli áramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j}.$$

Akkor, mivel u harmonikus függvény

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u \equiv 0,$$

azaz $\mathbf{v}$ forráserősségének a sűrűsége mindenütt 0, tehát $\mathbf{v}$ forrásmentes; másrészt pedig

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u \equiv 0,$$

tehát $\mathbf{v}$ örvénymentes is. Tehát a harmonikus $u(x, y)$ függvény egy forrás- és örvénymentes síkáramlás sebességi potenciálja.

$u(x, y)$ harmonikus társának, a $v(x, y)$ függvénynek is van mechanikai jelentése. Vizsgáljuk ugyanis egy folyadékrezecske dt idő alatt történő $v dt$ elmozdulása alatt a $v(x, y)$ függvény megváltozását.

A $v dt$ útelemnak x -irányú komponense:

$$dx = \frac{\partial u}{\partial x} dt,$$

ugyanis $\frac{\partial u}{\partial x}$ az x -irányú sebességkomponens, amely dt -vel szorozva a dx elmozdulást adja. És hasonlóan az y -irányú útkomponens:

$$dy = \frac{\partial u}{\partial y} dt.$$

A $v(x, y)$ függvény teljes megváltozásának a főrésze (azaz $v(x, y)$ teljes differenciálja) a pillanatnyi elmozdulás irányában:

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt; \end{aligned}$$

azonban a Cauchy-Riemann-féle egyenleteket figyelembe véve, ebből lesz:

$$dv = \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt = 0,$$

tehát

$$v(x, y) = \text{állandó}$$

a folyadékrészecskék pillanatnyi sebessége elmozdulásának az irányában, vagyis

$$v(x, y) = \text{állandó}$$

egy *áramvonalnak* az egyenlete. Ezért a $v(x, y)$ függvényt *áramfüggvénynek* szokás nevezni.

Ha valamely reguláris komplex változós függvény valós (vagy képzetes) része a síkáramlás sebességpotenciálja, akkor a másik része az áramfüggvény. A

$$w = u + iv$$

függvényt szokás a síkáramlás *komplex potenciáljának* nevezni.

Megállapodva abban, hogy a komplex potenciál valós része a sebességpotenciál és képzetes része az áramfüggvény, az

$$u(x, y) = \text{állandó}$$

egyenlet a potenciálfüggvény szintvonalait, az ekvipotenciális vonalakat, a

$$v(x, y) = \text{állandó}$$

egyenlet pedig az áramvonalakat határozza meg. Az ekvipotenciális vonalak és az áramvonalak együttesen egy ortogonális trajektória-hálózatot képeznek az (x, y) -síkban (azaz a z -síkban), azaz egymást derékszög alatt metszik. Ugyanis egy-egy ilyen vonal

metszéspontjában $\text{grad } u$ az ekvipotenciális vonal, $\text{grad } v$ pedig az áramvonal normálisát adja és e két vektor skaláris szorzata, a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek alapján beláthatóan 0, azaz merőlegesek egymásra:

$$\begin{aligned}\text{grad } u \cdot \text{grad } v &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Még megjegyezzük azt, hogy a komplex potenciál deriváltjának a konjugáltja a sebesség komplex vektorát adja:

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{dw}{dz} \right)} &= \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

és ez éppen a

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j}$$

sebességvektor komplex megfelelője.

c.) Tegyük fel, hogy a reguláris $f(z)$ függvény (ahol $f(z) = w$) a z -sík egy tetszőleges és önmagát nem metsző L zárt görbével határolt T tartományát a w -sík önmagát ugyancsak nem metsző L' görbével határolt T' tartományára képezi le. Legyen T -ben mindenütt $f'(z) \neq 0$. Ebben az esetben a *leképezés* kölcsönösen egyértelmű és megfordítható (*invertálható*). Ugyanis

$$f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$$

valós és képzetes része eleget tesz a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletnek és így az

$$\begin{cases} u(x, y), \\ v(x, y) \end{cases}$$

függvényrendszerhez tartozó függvénydetermináns (Jacobi-féle determináns):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2 \neq 0.\end{aligned}$$

Az $f(z) = w$ függvénynek van tehát ebben az esetben egyértelmű inverze:

$$f^{-1}(w) = \varphi(w) = z$$

és fennáll, hogy

$$\varphi'(w) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{f'(z)}.$$

d.) Jelentsen $f(z)$, ahol $f(z) = w$, egy a z_0 hely környezetében reguláris komplex függvényt. Legyen $f(z_0) = w_0$, azaz z_0 képe a w -síkon w_0 , továbbá legyen $f'(z_0) \neq 0$.

Ekkor

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0,$$

függetlenül a $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenet módjától.

Vizsgálva az $f(z)$ által létesített leképezést a z_0 hely kis környezetében a következőket állapíthatjuk meg.

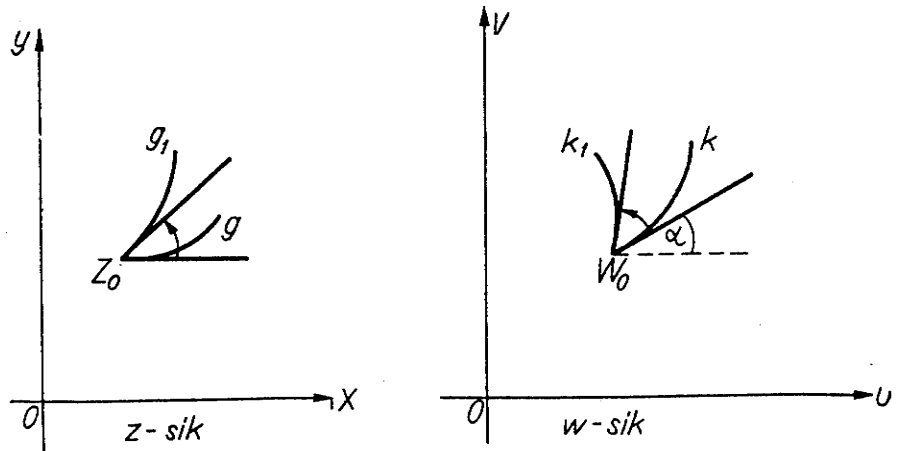
A $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ komplex számsorozat határértékét arkuszának és abszolút értékének a határértékére bontva, egyrészt

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \arg f'(z_0) = \alpha,$$

másrészt

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|,$$

függetlenül attól, hogy Δz hogyan tart 0-hoz.



1. ábra

Legyen mármost g egy a z_0 -ból kiinduló síma görbe és k ennek w_0 -ból kiinduló ugyan-csak síma képe; Δz a g -nek z_0 -ból kiinduló és Δw a k -nak w_0 -ból kiinduló húrvektora.

Az arkuszokra vonatkozó összefüggés szerint Δw és Δz egymással képezett $\arg \Delta w - \arg \Delta z$ hajlásszöge $\Delta z \rightarrow 0$ esetén az α szöghöz tart. Ha tehát $\arg \Delta z$ -nek van határértéke, tehát a g görbének a z_0 pontban érintője, akkor a k görbe w_0 -beli érintőjéről is beszélhetünk

és ez utóbbi az előbbihez képest α -szöggel fordul el. Ugyanekkora szöggel fordul el azonban a z_0 -ból egy más irányban kiinduló g_1 -görbe k_1 -képének w_0 -beli érintője is, mert hiszen $f'(z_0)$ és így $\arg f'(z_0) = \alpha$ is független a $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenet módjától. Tehát az $f(z) = w$ által létesített *leképezés* z_0 -ban *szögtartó*.

Az abszolút értékekre vonatkozó összefüggés szerint pedig a $|\Delta w|$ és $|\Delta z|$ húrok hosszúságának az aránya, a *leképezés* torzításának a mértéke, határértékben a g és k , valamint a g_1 és k_1 görbék megfelelő húrjai között ugyanez: $|f'(z_0)|$, úgyhogy az $f(z) = w$ függvénnyel előállított *leképezés* egyszersmind kicsinyben *aránytartó* is.

E két tulajdonság szerint tehát a *leképezés*nél kicsinyben *hasonlóság* áll fenn, vagyis a *leképezés konformis*.

11.1.4. Görbe menti integrál

A valós egyváltozós függvényeknél megismert Riemann-integrál fogalmának komplex függvényekre való kiterjesztése egy z -síkban megadott síma és irányított L görbére kiterjesztett görbe menti integrálra vezet.

Legyen

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

folytonos és legyen adott egy síma, irányított, rektifikálható L görbe a t paraméter függvényeként:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t_0 < t;$$

ahol $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$. Ekkor az $f(z)$ függvénynek az L görbe mentén vett integrálja:

$$\begin{aligned} \int_{(L)} f(z) dz &= \int_{(L)} (u + iv)(dx + idy) = \\ &= \int_{(L)} (u dx - v dy) + i \int_{(L)} (v dx + u dy); \end{aligned}$$

illetve átterve a paraméteres alakra:

$$\begin{aligned} \int_{(L)} f(z) dz &= \int_{t_0}^t f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt = \\ &= \int_{t_0}^t \{u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t)\} dt + \\ &+ i \int_{t_0}^t \{v(x(t), y(t))\dot{x}(t) + u(x(t), y(t))\dot{y}(t)\} dt = \\ &= U + iV. \end{aligned}$$

Az itt szereplő és rövideg kedvéért U -val, ill. V -vel jelölt két valós görbe menti integrál értéke, folytonosan differenciálható u és v függvények esetén akkor és csakis akkor független

az L görbe megválasztásától, és csak az integrálási út kezdő- és végpontjától függ, ha az L görbét tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományban fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}$$

vagyis, ha $f(z)$ e tartományban reguláris komplex változós függvény.

Ennek az igazolására elég azt meggondolni, hogy a görbe menti integrálnak az integrálási úttól való függetlensége ekvivalens azzal, hogy egy tetszőleges zárt görbe menti integrál értéke 0. Ezekután figyelembe véve azt, hogy reguláris $f(z)$ esetén fennállnak a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek és alkalmazva a síkbeli Gauss-Osztogradskij-féle tételt, írhatjuk:

$$\oint_{(L)} (u dx - v dy) = \int_{(T)} \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = 0$$

és

$$\oint_{(L)} (v dx + u dy) = \int_{(T)} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

ahol most L a T egyszeresen összefüggő síkrészt körülzáró zárt görbe.

Ebben az esetben tehát ha az L görbe a rögzített z_0 pontból egy tetszőleges, változó z pontba vezet, akkor az

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = U(x, y) + iV(x, y) = F(z)$$

függvényre fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= u(x, y), & \frac{\partial U}{\partial y} &= -v(x, y); \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= v(x, y), & \frac{\partial V}{\partial y} &= u(x, y),\end{aligned}$$

tehát a fenti integrállal definiált

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

függvény szintén reguláris és a deriváltjára igaz, hogy

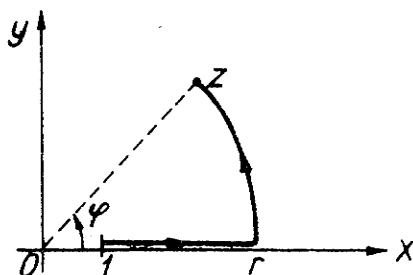
$$\begin{aligned}F'(z) &= \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = \\ &= u(x, y) + i v(x, y) = f(z).\end{aligned}$$

11.1.5. Néhány transzcendens függvény komplexben

A *logaritmus függvényt* komplexben analóg módon definiálhatjuk, mint valósban, a következő integrállal:

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Az integrandusz $\frac{1}{z}$ minden az origót tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományban reguláris, tehát az integrál ugyanitt független az integrálás útjától. Válasszunk az ábra szerint egy egyenesszakaszból és egy ehhez csatlakozó körívből álló integrálási utat.



2. ábra

Az egyenesszakaszon az integrálási út paramétere: $t = x \in [1, r]$ és így

$$\int_1^r \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{dx}{x} = \ln r = \ln |z|.$$

A körív mentén a paraméter: $t = \varphi \in [0, \arccos z]$; ezzel

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ \dot{x} &= -r \sin \varphi, & \dot{y} &= r \cos \varphi, \end{aligned}$$

továbbá

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{r},$$

tehát

$$\int_r^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{r} (-r \sin \varphi + ir \cos \varphi) d\varphi = i\varphi = i \arccos z.$$

Végül tehát

$$\ln z = \ln |z| + i \arccos z = \ln r + i\varphi.$$

Ha az integrálás útja az origót egyszer körülveszi, akkor φ megváltozik 2π -vel és $\ln z$ értéke $(i2\pi)$ -vel. Tehát komplexben a logaritmus függvény "végtelen sok értékű", s az egyes értékek egymástól $2\pi i$ egészszámu többszörösében különbözhetnek egymástól.

A definíció alapján $\ln z$ deriváltja $\frac{1}{z}$:

$$\frac{d(\ln z)}{dz} = \frac{1}{z}$$

és ez az origó kivételével mindenütt értelmezve van és nyilván 0-tól különbözik, ezért $\ln z$ -nek – az origó kivételével mindenütt – létezik az inverze:

$$\begin{aligned} a \quad w &= \ln z \quad \text{egyenletből} \\ z &= e^w \end{aligned}$$

következik. Ezzel az inverz kifejezéssel lehet komplexben az *exponenciális függvényt* definiálni.

Legyen speciálisan $|z| = 1$; amikor is ($\varphi = \arg z$ -vel)

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi ;$$

akkor

$$\ln(\cos \varphi + i \sin \varphi) = i\varphi ,$$

ahonnan a nevezetes *Euler-féle összefüggést* kapjuk:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi .$$

Ennek felhasználásával, most már tetszőleges (1-től különböző) abszolútértékű z komplex számmal:

$$z = e^w = e^{\ln z} = e^{\ln |z|} e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi} = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) .$$

Innen kiolvasható az, hogy az $\ln z$ függvény többértékűségének az felel meg, hogy komplexben az exponenciális függvény periodikus, a periódusa: $2\pi i$.

Az Euler-féle összefüggést használjuk fel arra, hogy komplexben értelmezzük a *trigonometrikus függvényeket* és a *hiperbolikus függvényeket* is.

Ugyanis

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

és

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

alapján

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \operatorname{ch}(i\varphi) , \\ \sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(i\varphi) . \end{aligned}$$

Ezekre az összefüggésekre támaszkodva $\sin z$ -t és $\cos z$ -t:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(iz) , \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch}(iz) . \end{aligned}$$

illetve megfordítva:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} z &= \frac{1}{i} \sin(iz), \\ \operatorname{ch} z &= \cos(iz).\end{aligned}$$

A $\sin z$ és $\cos z$ függvények 2π szerint, $\operatorname{sh} z$ és $\operatorname{ch} z$ pedig $2\pi i$ szerint periodikusak.

A megfelelő valós változós trigonometrikus és hiperbolikus függvényekre vonatkozó formulák érvényesek maradnak az egész komplex számtartományban is. Így egyebek között $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, és $\operatorname{ch} z$ értéke, ahol $z = x + iy$, meghatározható a $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\operatorname{sh}(\alpha + \beta)$, illetve $\operatorname{ch}(\alpha + \beta)$ ismert kifejtései alapján. Például

$$\begin{aligned}\cos(x + iy) &= \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy) = \\ &= \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y,\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\cos z) &= \cos(\operatorname{Re}(z)) \cdot \operatorname{ch}(\operatorname{Im}(z)), \\ \operatorname{Im}(\cos z) &= -\sin(\operatorname{Re}(z)) \cdot \operatorname{sh}(\operatorname{Im}(z)).\end{aligned}$$

A $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ függvények értelmezése:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{1}{\operatorname{tg} z} = \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \\ \operatorname{cth} z &= \frac{1}{\operatorname{th} z} = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.\end{aligned}$$

A trigonometrikus függvények inverzeinek, az *arcus függvényeknek*, valamint a hiperbolikus függvények inverzeinek, az *arca függvényeknek* az értelmezése teljesen hasonló a megfelelő valós függvényekéhez. Így például

$$w = \arcsin z,$$

ha

$$z = \sin w.$$

Ezek a komplex függvények – ugyanúgy, mint a logaritmus komplexben – végtelen sok értékűek. A logaritmussal való kifejezéseik a következők:

$$\begin{aligned}\arcsin z &= -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}), \\ \arccos z &= -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \operatorname{arctg} z &= \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}, \\ \operatorname{arcctg} z &= -\frac{1}{2i} \ln \frac{iz + 1}{iz - 1};\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}\operatorname{arsh} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \\ \operatorname{arch} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \operatorname{arth} z &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}, \\ \operatorname{arcth} z &= \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}.\end{aligned}$$

11.1.6. A Cauchy-féle tétel és következményei.

Tegyük fel azt, hogy $f(z)$ a z -sík egyszeresen összefüggő T tartományában mindenütt reguláris. Ekkor egy tetszőleges, T -ben futó, rektifikálható L görbe mentén képezve $f(z)$ integrálját, az integrál értéke nem függ az úttól, hanem csak a kezdő- és végponttól. Ennek következtében, ha L zárt görbe, akkor e mentén

$$\oint_{(L)} f(z) dz = 0$$

(Cauchy tétele).

Ha viszont valamely $f(z)$ függvényre egy zárt görbe menti integrál 0-tól különbözik, akkor nyilvánvaló, hogy a görbe által körülzárt tartományban $f(z)$ nem mindenütt reguláris.

Vizsgáljuk meg példaként az

$$f(z) = (z - z_0)^k$$

függvény integrálját a z_0 mint középpont köré húzott R sugarú zárt körvonal mentén, pozitív körüljárással. A k kitevő tetszőleges egész számot jelent.

E kör pontjaiban legyen

$$z = z_0 + R(\cos t + i \sin t),$$

ahol $0 \leq t \leq 2\pi$. Ebből következik:

$$\begin{aligned}dz &= R(-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= iR(\cos t + i \sin t) dt.\end{aligned}$$

Ezt és az ismert

$$(\cos t + i \sin t)^k = \cos kt + i \sin kt$$

Moivre-féle képletet felhasználva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\oint_{(L)} (z - z_0)^k dz &= \\ &= \int_0^{2\pi} R^k (\cos t + i \sin t)^k \cdot iR(\cos t + i \sin t) dt = \\ &= iR^{k+1} \int_0^{2\pi} [\cos(k+1)t + i \sin(k+1)t] dt.\end{aligned}$$

Ez az integrál pedig $(k+1)$ -nek minden 0-tól különböző, pozitív vagy negatív egész számú értéke mellett 0-val egyenlő. Ha azonban $k+1=0$, vagyis $k=-1$, akkor

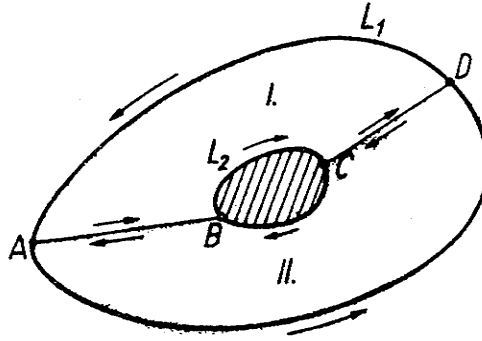
$$\oint_{(L)} \frac{dz}{z-z_0} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Tehát végeredményben:

$$\oint_{(L)} (z-z_0)^k dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{ha } k = -1, \\ 0, & \text{ha } k \neq -1 \text{ és tetszőleges egész szám.} \end{cases}$$

(Megjegyzendő az, hogy integrálási útnak választhatunk kör helyett bármilyen a z_0 pontot pozitív irányban körüljáró zárt vonalat.)

A Cauchy-féle tételtől a többszörösen összefüggő tartományokban futó zárt görbe menti integrálokra a következő fontos szabályt vezethetjük le.



3. ábra

Az ábrán látható kétszeresen összefüggő tartományban az L_2 zárt görbével határolt "sziget" nem tartozik a tartományhoz, mert például a "szigeten" belül $f(z)$ nem reguláris.

Az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ vonalakkal az L_1 - és L_2 -vel határolt gyűrűszerű terület két egyszeresen összefüggő tartományra (I. és II.) osztható. Mivel ezek egyszeresen összefüggők, mindegyik határvonalára (G_I és G_{II}) érvényes Cauchy tétele alapján:

$$\oint_{(G_I)} f(z) dz = \oint_{(G_{II})} f(z) dz = 0,$$

vagyis

$$\oint_{(G_I)} f(z) dz - \oint_{(G_{II})} f(z) dz = 0.$$

Az ábrán jól látható, hogy e helyett írható:

$$\oint_{(L_1)} f(z) dz + \oint_{(-L_2)} f(z) dz = 0,$$

hiszen az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ utak mentén kétszer megyünk végig ellenkező irányítás mellett és így az ezek mentén vett integrálok az összegezéskor egymást megsemmisítik. Tehát végül is igaz, hogy

$$\oint_{(L_1)} f(z) dz = \oint_{(L_2)} f(z) dz .$$

Legyen most $f(z)$ egy bizonyos T tartományban reguláris és valamely L belső zárt út minden ζ pontjában legyen ismert $f(\zeta)$. Ekkor az L zárt görbe által határolt síkrész bármelyik z belső pontjában érvényes a következő *Cauchy-féle integrálformula*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

A jobboldal ugyanis így írható:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta .$$

A jobboldal első tagja azonban

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z) .$$

A második integrálban L helyett vehetünk bármilyen a z pontot pozitív irányban körülvevő zárt utat, például egy z középpontú ρ sugarú kört. Ha $\rho \rightarrow 0$, akkor $f(z)$ folytonossága miatt

$$f(\zeta) \rightarrow f(z) ,$$

azaz, ha ρ elég kicsiny, akkor bármilyen kicsiny $\varepsilon > 0$ mellett

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

és így erre az integrálra érvényes a következő becslés:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \left| \oint_{(L)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| = \varepsilon ,$$

azaz

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 .$$

A Cauchy-féle integrálformulából $f(z)$ akárhányadik deriváltját is kiszámíthatjuk, mert – amint azt ki lehet mutatni – az integráljel alatt z szerint deriválhatunk. Fennáll, hogy

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta .$$

Ha tehát $f(z)$ egy tartományban reguláris, akkor ott akárhányszor deriválható.

11.1.7. A Cauchy-Taylor-féle hatványsor

Ha valamely $f(z)$ függvény a T tartomány minden pontjában reguláris és z_0 e tartomány egy tetszőszerinti pontja, akkor létezik egy és csakis egy

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

hatványsor, amely a z_0 pont bizonyos környezetében konvergens és ott az $f(z)$ függvényt definiálja. E hatványsor, az ún. *Cauchy-Taylor-féle hatványsor*, képzésének szabálya teljes analógiát mutat a valós függvények Taylor-sorával:

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) ;$$

tehát

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (z - z_0)^k .$$

Állításunk bizonyítására vegyünk fel z_0 körül egy teljes egészében a T tartományban fekvő r sugarú kört és legyen z ennek bármely, z_0 -tól különböző belső pontja. A z pontnak z_0 -tól való távolsága:

$$|z - z_0| = \rho < r .$$

Legyen most ρ_1 egy másik, ugyancsak z_0 középpontú K_1 kör és legyen

$$\rho < \rho_1 < r .$$

Jelölje ζ a K_1 kör kerületének futó pontját.

Mivel a feltevés szerint

$$|z - z_0| = \rho < |\zeta - z_0| = \rho_1 ,$$

azaz

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1 ,$$

azért

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k . \end{aligned}$$

Mindkét oldalt a K_1 kör mentén integrálva:

$$\oint_{(K_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{(K_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k d\zeta .$$

A baloldal a Cauchy-féle integrálformula szerint éppen

$$2\pi i f(z) ,$$

a jobboldal pedig az $f(z)$ deriváltjára vonatkozó formula szerint:

$$2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k .$$

Tehát valóban

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (z - z_0)^k ,$$

hacsak $|z - z_0| < r$.

11.1.8. A Laurent-féle hatványsor

Tegyük fel, hogy a T tartomány belsejében vannak olyan helyek, ahol $f(z)$ nem reguláris, más szóval az $f(z)$ függvény viselkedését olyan tartományban vizsgáljuk, amelyben szinguláris helyek vannak. Legyen például a z_0 belső pont ilyen szinguláris hely. Hogy a szinguláris pontokat e tartományból egyelőre kizárjuk, vonjunk a z_0 mint középpont körül R_1 sugarú kört (kerületét az L_1 körvonal alkotja), mely az összes belső szinguláris pontokat mint egy T tartománybeli sziget, a T -ből kizárja. Vegyünk fel egy másik, ugyancsak teljes egészében T -ben fekvő, z_0 középpontú R_2 sugarú kört ($R_2 > R_1$), amelynek a kerületét az L_2 körvonal alkotja. Ily módon egy körgyűrű alakú, kétszeresen összefüggő tartományhoz jutunk, amelynek minden belső pontjában most már $f(z)$ reguláris; az L_1 körvonalon belül és az L_2 körvonalon kívül viszont a regularitás egyes helyeken megszűnik.

Vegyünk fel a kétszeresen összefüggő tartományon belül $r_2 < R_2$ és $r_1 > R_1$ sugarakkal két kört (K_2 és K_1) úgy hogy fennáljon:

$$R_1 < r_1 < r_2 < R_2 .$$

Ekkor Cauchy tétele szerint a K_2 és K_1 körök közötti síkrész tetszőleges z pontjában:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(K_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{(K_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

A körüljárás mindkét körön pozitív irányú.

A jobboldal első integráljában ζ a K_2 kör futópontját jelöli, tehát

$$|\zeta - z_0| > |z - z_0| ,$$

vagyis

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1 ,$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k . \end{aligned}$$

A második integrálban viszont ζ a K_1 kör futópontját jelöli, tehát

$$|\zeta - z_0| < |z - z_0| ,$$

vagyis

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1 ,$$

tehát most

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k+1}} (z - z_0)^{-k} . \end{aligned}$$

Ezeket az átalakításokat figyelembe véve írhatjuk:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(K_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^k - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(-K_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(K_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(K_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^{-k} . \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(K_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = a_k , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

és

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(K_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k+1}} d\zeta = a_{-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

jelöléseket, végeredményben ezt írhatjuk:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Ezt hívjuk $f(z)$ *Laurent-sorának*.

11.1.9. Reguláris és szinguláris pontok.

Legyen $f(z)$ a z_0 pont körül írt K kör belsejében mindenütt, legfeljebb a z_0 pont kivételével, reguláris függvény. Aszerint, amint $f(z)$ a z_0 pontban is reguláris, illetve nem, a z_0 pontot az $f(z)$ *reguláris pontjának*, illetve *izolált (elszigetelt) szinguláris pontjának* nevezzük.

Egy reguláris z_0 pont környezetében a Cauchy-Taylor-féle sorfejtés szerint

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

Ha most $f(z_0) = 0$, akkor z_0 az $f(z)$ függvénynek *zérushelye*, azaz az $f(z) = 0$ *egyenletnek gyöke*. Mégpedig, ha

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

de

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0,$$

akkor z_0 n -szeres zérushely, illetve n -szeres gyök.

Az elszigetelt szinguláris pontokat a környezetükben érvényes Laurent-sor legalacsonyabb fokszáma szerint osztályozzuk. Aszerint, amint ez a sor a $(z - z_0)$ n -edik hatványát tartalmazza és

$$n \geq 0, \quad n < 0, \quad n = -\infty,$$

vagyis a $(z - z_0)$ negatív hatványt tartalmazó

$$\dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

ún. *kritikus, vagy főrész*

hiányzik, véges számú, végtelen sok.

tagból áll, a szinguláris pont

megszüntethető, pólus, lényeges.

Végül megemlíjtük azt, hogy egy $f(z)$ függvény ∞ -beli magatartását a $z = \frac{1}{\zeta}$ bevezetésével adódó

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F(\zeta)$$

függvény $\zeta = 0$ pontbeli magatartásától tesszük függővé. Ha itt $F(\zeta)$ reguláris, akkor $f(z)$ a végtelenben reguláris, ha pedig $F(\zeta)$ -nak az origó elszigetelt szinguláris pontja, akkor $f(z)$ -nek a végtelen ugyancsak elszigetelt, mégpedig ugyanilyen jellegű szinguláris pontja.

11.1.10. A reziduum-tétel

Cauchy tétele szerint ha az $f(z)$ függvény a z_0 pontban és ennek a környezetében reguláris, akkor a z_0 körüli zárt L görbe mentén vett integrál eltűnik, vagyis

$$\oint_{(L)} f(z) dz = 0 .$$

Ha azonban z_0 szinguláris pont, akkor $f(z)$ Laurent-sora a következő alakú:

$$f(z) = \dots + a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \\ + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

Ha most ezt egy z_0 -t körülvevő zárt L görbe mentén integráljuk, akkor ezt kapjuk:

$$\oint_{(L)} f(z) dz = \oint_{(L)} a_{-1}(z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i \cdot a_{-1} .$$

Innen következik:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} f(z) dz = \text{Res } (f(z))_{z=z_0}$$

és ezt nevezzük $f(z)$ reziduumának.

Ha az L zárt görbe több izolált szinguláris pontot zár körül, akkor az

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} f(z) dz$$

integrál értéke egyenlő a szinguláris pontokhoz tartozó reziduumok összegével. Ez a *reziduum tétel*.

A reziduum-tételnek fontos szerepe van pl. a síkáramlások vizsgálatánál, minthogy a síkáramlásnak azok a pontjai, amelyekben a sík pl. az izolált "örvényszálakat" metszi, szinguláris pontok. Az ilyen pontok körül képezett zárt vonalintegrálokra a reziduum-tétel alkalmazható, ami a vizsgálatokat messzemenően megkönnyítheti.

A reziduum-tétel matematikai alkalmazásával bizonyos határozott integrálok kiszámításánál találkozunk.

12. Fourier-sor, Fourier-integrál. Laplace transzformáció

12.1. Az approximációelmélet néhány problémájáról

12.1.1. Bevezetés

A gyakorlati alkalmazások körében sokszor merül fel annak a szüksége, hogy egy (például megfigyelések, mérések eredményeit tartalmazó) táblázattal, vagy grafikusan adott függvényre (valós egyváltozós függvényre) közelítő analitikus kifejezést találjunk. Szükség lehet erre képlettel megadott függvény esetében is olyankor, amikor a képlet túlságosan bonyolult, vagy a kitűzött célok szempontjából alkalmatlan. Az adott $f(x)$ függvényt közelítőleg előállító $\phi(x)$ *approximáló (közelítő) függvényt* rendszerint valamilyen lineárisan független $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) függvényrendszer függvényeinek a lineáris kombinációja alakjában választjuk meg:

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x).$$

(A $\varphi_k(x)$ függvények lineáris függetlensége azt jelenti, hogy minden szóbjázható x -re az azonosan 0-t adó lineáris kombináció csak úgy állhat elő, ha valamennyi c_k együttható egyszerre 0.)

Ha például $\varphi_k(x) = x^k$, akkor a

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

függvény *n-edfokú polinom*; vagy ha a választott alapfüggvények a $\sin kx$, $\cos kx$ trigonometrikus függvények, akkor ezek lineáris kombinációja, a

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

függvény ún. *n-edfokú trigonometrikus (Fourier-) polinom*.

Közönséges interpolációról beszélünk akkor, ha előírjuk, hogy

$$\phi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

legyen, azaz, hogy $n + 1$ különböző x_i helyen az approximáló $\phi(x)$ függvény $\phi(x_i)$ helyettesítési értéke megegyezzen az adott $f(x_i)$ helyettesítési értékkel. Ezek a feltételi egyenletek a $\phi(x)$ -et definiáló képletben szereplő ismeretlen c_k (vagy az a_k és b_k) együtthatók

számára (a felvétel szerinti lineáris kombináció miatt) egy megoldandó (inhomogén) lineáris egyenletrendszerre vezetnek. Ennek az egyenletrendszernek a megoldásaként kapott együtthatókkal azután $\phi(x)$ már felírható.

Az ún. *Hermite-féle interpoláció* feladata ettől – a közönséges interpolációtól – abban különbözik, hogy a különböző x_i helyeken nemcsak $f(x_i)$ függvényértékeket, hanem még különböző rendű $f^{(j)}(x_i)$ deriváltértékeket is előírunk.

A közönséges interpoláció feladatát nem lehet megoldani akkor, ha az adott (x_i, y_i) értékpárok száma (itt $y_i = f(x_i)$) nagyobb, mint a $\phi(x)$ -ben felvett ismeretlen c_k együtthatók száma. Ilyenkor szokták alkalmazni az ún. *legkisebb négyzetek módszerét*. Ennek az a lényege, hogy feltesszük azt, hogy a

$$Q_n = \sum_{i=0}^m \left\{ y_i - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x_i) \right\}^2, \quad m > n$$

ún. *kvadrátikus (négyzetes) eltérés* legyen a legkisebb (azaz minimális). Hogy Q_n minimum legyen, annak az a feltétele, hogy

$$\frac{\partial Q_n}{\partial c_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

legyen. Ezek a feltételi egyenletek az ismeretlen c_k együtthatók számára egy megoldandó (inhomogén) lineáris egyenletrendszerre vezetnek, amelynek a megoldása után az approximáló függvény felírható. (Ezzel a feladattal találkozunk pl. a matematikai statisztikában, vagy a kiegyenlítőszámításban.)

Gyakran fordul elő az az eset, amikor a közelítés jóságát kifejező feltételt (vagy feltételeket) nem (véges számú) diszkrét pontokra támaszkodva fogalmazzuk meg, hanem valamely adott (véges) intervallumban: $x \in [a, b]$. Legyen pl. $\phi(x)$ az adott $f(x)$ függvényt approximáló függvény és előírjuk azt, hogy az $a \leq x \leq b$ intervallumban

$$|f(x) - \phi(x)| < \varepsilon$$

legyen, ahol $\varepsilon > 0$ a megközelítés mértékét jellemző állandó. Az ilyen *egyenletes megközelítés* tényleges realizálására – speciális esetektől eltekintve – nincsenek módszereink. Az egyenletes megközelítéseket főleg elméleti megfontolásokban alkalmazzák.

A leginkább használatos az $f(x)$ függvénynek olyan $\phi_n(x)$ függvénnyel való megközelítése, amelyre a

$$Q_n = \int_a^b \{f(x) - \phi_n(x)\}^2 dx$$

kvadrátikus (négyzetes) eltérés a legkisebb (minimum). Ha ez a feltétel teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\phi_n(x)$ az $f(x)$ -et $[a, b]$ -ben azaz az adott intervallumban *négyzetesen legjobban közelíti meg*.

(Megjegyezzük azt, hogy sokszor a Q_n -et definiáló integrálban az integranduszt valamely előre felvett és (a, b) -ben folytonos $\rho(x) > 0$ ún. *súlyfüggvénnyel*, mint szorzó

tényezővel bővítik:

$$Q_n = \int_a^b \{f(x) - \phi_n(x)\}^2 \rho(x) dx .$$

Ilyenkor, ha $Q_n = \text{minimum}$, akkor azt mondják, hogy $\phi_n(x)$ az $f(x)$ -et $[a, b]$ -ben a $\rho(x)$ súlyfüggvény mellett négyzetesen legjobban közelíti meg.)

12.1.2. Adott függvény négyzetes legjobb megközelítése adott intervallumban

Legyen adott az approximálandó $f(x)$ függvény, amelyről feltesszük azt, hogy $x \in [a, b]$ és ebben az intervallumban a négyzetével együtt integrálható. Választunk egy $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) lineárisan független bázisfüggvényekből álló rendszert. (Feltesszük, hogy $\varphi_k(x)$ függvények az adott intervallumban szintén a négyzetükkel együtt integrálhatók.) A bázisfüggvények lineáris kombinációjával képezzük a

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$$

függvényeket. A lineáris kombinációt meghatározó c_k együtthatókat úgy akarjuk meghatározni, hogy ha $x \in [a, b]$, akkor $\phi_n(x)$ az $f(x)$ -et négyzetesen (vagy négyzetes átlagban) a legjobban közelítse meg, azaz legyen

$$Q_n = \int_a^b \left\{ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right\}^2 dx$$

a legkisebb (minimum).

Látható az, hogy Q_n az $n + 1$ határozatlan c_k paramétereknek közös valós többváltozós függvénye. Ennek keressük a minimumát. A minimum létezésének szükséges feltétele az, hogy

$$\frac{\partial Q_n}{\partial c_i} = -2 \int_a^b \left\{ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right\} \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

legyen. (Be lehet azt bizonyítani, hogy annak következtében, hogy a bázisfüggvényrendszer függvényei lineárisan függetlenek, a szükséges feltétel a minimum létezéséhez egyben elégséges is).

A c_i paramétereket meghatározó egyenletrendszer átrendezve így fest:

$$\sum_{k=0}^n c_k \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n .$$

Vezessünk be egyszerűbb jelöléseket:

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = (\varphi_i, \varphi_k) ,$$

illetve

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx = (f, \varphi_i) .$$

(Szokták ezeket az integrálokat a (φ_i, φ_k) ill. (f, φ_i) *skaláris szorzatoknak* is hívni; $(f, f) = \|f\|^2$ pedig f -nek önmagával vett skaláris szorzata, azaz f *normájának a négyzete*.)

Tehát a feltételi egyenletrendszer röviden a következő lesz:

$$\sum_{k=0}^n c_k(\varphi_i, \varphi_k) = (f, \varphi_i) , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n .$$

Ennek az inhomogén lineáris egyenletrendszernek az együtthatómátrixa (a $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ függvényrendszerből képezett ún. Gram-féle mátrix):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

bizonyíthatóan (a bázisfüggvények lineáris függetlensége alapján) definit pozitív, tehát nem szinguláris ($\det(\mathbf{G}) \neq 0$), azaz létezik az inverze, azért a c_k együtthatók egyértelműen határozhatók meg. Az ezekkel képezett

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$$

approximáló függvény valóban Q_n minimumát adja. Ezt a minimumot, felhasználva a

$$\sum_{i=0}^n c_i(\varphi_i, \varphi_k) = (f, \varphi_k) , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

összefüggéseket és a Q_n képletében az integráljel alatt a négyzetreemelést elvégezve, így írhatjuk:

$$\begin{aligned} (Q_n)_{\min} &= \int_a^b \left\{ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right\}^2 dx = \\ &= \int_a^b \left\{ f^2(x) - 2 \sum_{k=0}^n c_k f(x) \varphi_k(x) + \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n c_k c_i \varphi_k(x) \varphi_i(x) \right\} dx = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n c_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^n c_k \left(\sum_{i=0}^n c_i (\varphi_k, \varphi_i) \right) = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k (f, \varphi_k) \geq 0 . \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a négyzetesen legjobban közelítő ϕ_n esetén:

$$\sum_{k=0}^n c_k (f, \varphi_k) \leq \|f\|^2 .$$

12.1.3. Ortogonális bázis-függvényrendszer választása

A négyzetesen legjobb közelítés – előző pontban bemutatott – eljárása messzemenően leegyszerűsödik akkor, ha olyan $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) bázisfüggvényrendszert választunk, amely az $[a, b]$ intervallumban *ortogonális*, azaz

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k, \\ \|\varphi_k\|^2 > 0, & \text{ha } i = k. \end{cases}$$

Ekkor ugyanis a függvényrendszer Gram-féle mátrixa, a csupa pozitív $\|\varphi_k\|^2$ normanégyzetet a fődiagonálisában tartalmazó diagonálmátrix lesz:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \|\varphi_0\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|\varphi_1\|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|\varphi_n\|^2 \end{pmatrix}$$

és a

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$$

approximáló függvényben szereplő c_k együtthatókat meghatározó feltételi egyenletrendszer ilyen alakú egyenletekre redukálódik:

$$\|\varphi_k\|^2 c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Innen pedig a megoldás egyszerűen

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Még egyszerűbb a dolgunk, ha a bázis függvényrendszer nemcsak ortogonális, hanem normált is (ortogonális és normált = ortonormált), azaz

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k, \\ 1, & \text{ha } i = k. \end{cases}$$

Ennek a függvényrendszernek a Gram-féle mátrixa $(n+1)$ -edrendű egységmátrix és így az approximáló függvényben szereplő c_k együtthatók egyszerűen a következők:

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Az approximálandó és approximáló függvények négyzetes eltérésének a minimuma

a.) ortogonális bázisfüggvények rendszere esetén:

$$(Q_n)_{\min} = \int_a^b \{f(x) - \phi_n(x)\}^2 dx = \|f - \phi_n\|^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \|f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k\|^2 = \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \geq 0 ;
\end{aligned}$$

b.) ortonormált bázisfüggvények rendszere esetén:

$$(Q_n)_{\min} = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \geq 0 .$$

Ebben az utóbbi esetben tehát teljesül az ún. *Bessel-féle egyenlőtlenség*:

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq \|f\|^2 .$$

Ha az ortonormált bázisfüggvény-rendszer függvényei végtelen sorozatot alkotnak és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n)_{\min} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \phi_n\|^2 = 0 ,$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \phi_n\| = 0$$

(a bázisfüggvényrendszer teljes), akkor azt mondjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

az $[a, b]$ intervallumban *négyzetes átlagban konvergál* $f(x)$ -hez.

Ekkor érvényes a c_k együtthatókra az ún. *Parseval-féle egyenlőség*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 .$$

A négyzetes átlagban $f(x)$ -hez konvergáló $\phi_n(x)$ függvényt sorozatban szereplő $c_k = (f, \varphi_k)$ együtthatók sorozata nullasorozat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 .$$

A négyzetes átlagban való konvergencia nem tévesztendő össze az ún. *pontonkénti konvergenciával*. Pontonkénti konvergencia (azaz, hogy bármely $x \in [a, b]$ mellett

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) = f(x)$$

legyen) általában nem teljesül. Ez ugyanis azon múlik, hogy a c_k együtthatók milyen gyorsan tartanak 0-hoz; ez pedig az f függvény lokális tulajdonságaitól függ. Ha pl. $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban kétszer folytonosan deriválható, akkor biztosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) = f(x)$$

az $[a, b]$ -ben egyenletesen.

A pontonkénti konvergencia elégséges feltétele az, hogy $f(x)$ az (a, b) intervallumban kielégíti az ún. *Dirichlet-féle feltételeket*, azaz minden $x \in (a, b)$ -helyen, legfeljebb végezzámú hely kivételével $f(x)$ folytonos és a szakadási helyeken létezik $f(x)$ -nek és $f'(x)$ -nek véges jobb- és baloldali határértéke. Ilyenkor minden $x_0 \in (a, b)$ helyen

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

azaz a sor összege egyenlő az x_0 -helyhez tartozó $f(x_0 - 0)$ baloldali és $f(x_0 + 0)$ jobboldali határérték számtani középértékével.

12.2. Fourier-polinom. Fourier-sor. Fourier-integrál

12.2.1. Fourier-polinom.

Legyen adva egy integrálható $f(x)$ függvény, amely 2π szerint periodikus, azaz

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Keressük azt a

$$\phi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

approximáló trigonometrikus polinomot (Fourier-polinomot), amely $f(x)$ -et a tetszőleges $a \leq x \leq a + 2\pi$ intervallumban négyzetesen a legjobban megközelíti. (Az első tagban – bizonyos képletek egyöntetűsége kedvéért – $\frac{a_0}{2}$ -t írtunk a_0 helyett.)

Mindenekelőtt könnyű azt belátni, hogy a $\phi_n(x)$ -ben szereplő $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots, \cos nx, \sin nx$ függvények bármely 2π hosszúságú intervallumban ortogonális függvényrendszert alkotnak, azaz e függvények közül tetszőleges két különböző függvénynek a szorzatát bármely 2π hosszúságú intervallumban integrálva, eredményül 0 adódik.

Valóban

$$\int_a^{a+2\pi} 1 \cdot \cos kx dx = \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_a^{a+2\pi} = \frac{\sin(ka + k2\pi) - \sin ka}{k} = 0, \quad (k \neq 0)$$

és

$$\int_a^{a+2\pi} 1 \cdot \sin kx dx = \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_a^{a+2\pi} = \frac{-\cos(ka + k2\pi) + \cos ka}{k} = 0, \quad (k \neq 0)$$

mert $\sin kx$ és $\cos kx$ 2π szerint periodikus függvények. Hasonló ok miatt

$$\int_a^{a+2\pi} \cos px \cdot \cos qx dx = \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} \{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x\} dx = 0, \quad (p \neq q)$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin px \cdot \sin qx dx = \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} \{\cos(p-q)x - \cos(p+q)x\} dx = 0, \quad (p \neq q)$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin px \cdot \cos qx dx = \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} \{\sin(p+q)x + \sin(p-q)x\} dx = 0. \quad (p \neq q)$$

Másrészt viszont

$$\int_a^{a+2\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2 kx dx = \int_a^{a+2\pi} \sin^2 kx dx = \pi.$$

Ezért az $f(x)$ függvényt approximáló trigonometrikus polinomban szereplő együtthatókra a következő ún. Euler-Fourier-féle képletek adódnak:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx dx,$$

ahol $k = 1, 2, \dots, n$.

12.2.2. Fourier-sor

Felmerül az a kérdés, hogy ha az $f(x)$ függvényt approximáló Fourier-polinomban n értéket minden határon túl növeljük, azaz véges tagszámú összeg helyett a

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

végtelen függvényt képezzük (ezt hívjuk $f(x)$ *Fourier-sorának*), akkor milyen feltétel biztosítja azt, hogy $\phi(x)$ konvergens legyen és összegként $f(x)$ -et előállítsa.

A Fourier-sor konvergenciáját illetően – azon túlmenően, amiket a 12.1.3. pontban már általánosságban mondtunk – megjegyezzük, hogy mivel $|\cos kx| \leq 1$ és $|\sin kx| \leq 1$ minden k egész szám esetén, azért – Weierstrass tétele alapján – ha az együtthatók abszolút értékeiből alkotott végtelen numerikus sor konvergens, akkor biztos, hogy a

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sor abszolút és egyenletesen konvergens.

Példák

1.) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 2\pi, \\ f(x+2\pi) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Állítsuk elő $f(x)$ -et Fourier-sorával.

A Dirichlet-féle feltételek teljesülnek: $f(x)$ az $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) helyek kivételével folytonos, tehát e helyek kivételével mindenütt $f(x)$ egyenlő a Fourier-sorával. Az $x = 2k\pi$ helyeken pedig, mivel $f(x)$ -nek a jobb- és baloldali határértékei számtani középértéke 0, azért itt a Fourier-sor összege is 0.

$f(x)$ páratlan függvény, azért $a_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) és a Fourier-sor tiszta sinus-sor lesz. Mivel pedig

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin kx \, dx = \frac{1}{k},$$

azért

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

2.) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ \pi + x, & \text{ha } -\pi \leq x \leq 0, \\ f(x+2\pi) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Állítsuk elő $f(x)$ Fourier-sorát.

$f(x)$ mindenütt folytonos, tehát Fourier-sora mindenütt előállítja $f(x)$ -et. Továbbá, mivel $f(x)$ páros függvény, azért $b_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Legyen először $k \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi k^2} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros szám,} \\ \frac{4}{\pi k^2}, & \text{ha } k \text{ páratlan szám.} \end{cases} \end{aligned}$$

Végül

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \, dx = \frac{\pi}{2},$$

tehát

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Eredményünkben x helyébe 0-t helyettesítve, érdekes eredményre jutunk:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

ahonnan

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

12.2.3. Fourier-integrál

Legyen $f(x)$ olyan periodikus függvény, amelynek nem 2π , hanem (tetszőleges l mellett) $2l$ a periódusa. Akkor, ha $f(x)$ -et a Fourier-sora előállítja, akkor ez ilyen alakú lesz:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

ahol most

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2l} \int_a^{a+2l} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Helyettesítsük be ezeket az együtthatókra nyert képleteket $f(x)$ Fourier-sorába, legyen továbbá – a szimmetria kedvéért – $a = -l$ és jelöljük az integrációs változót ξ -vel. Ekkor lesz:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \left\{ \cos \frac{k\pi \xi}{l} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} + \sin \frac{k\pi \xi}{l} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \right\} d\xi = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi(x-\xi)}{l} d\xi. \end{aligned}$$

Tegyük most fel azt, hogy a függvény $2l$ hosszúságú periódusa minden határon túl növekszik, azaz $f(x)$ aperiódikus; továbbá azt, hogy $|f(x)|$ -nek a $(-\infty, \infty)$ intervallumra kiterjesztett improprius integrálja véges érték. Ekkor egyrészt $\frac{a_0}{2} \rightarrow 0$, másrészt a $\frac{\pi}{l} = \varepsilon$, azaz $l = \frac{\pi}{\varepsilon}$ választással (amikor is $l \rightarrow \infty$ -nek megfelel $\varepsilon \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}}^{\frac{\pi}{\varepsilon}} f(\xi) \cdot \cos k\varepsilon(x-\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \nu(x-\xi) d\xi d\nu. \end{aligned}$$

Ez az $f(x)$ függvény ún. *Fourier-integrálja*.

Ugyanezt még így is írhatjuk:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{a(\nu) \cos \nu x + b(\nu) \sin \nu x\} d\nu,$$

ahol

$$\begin{aligned}a(\nu) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \nu x \, dx, \\b(\nu) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \nu x \, dx.\end{aligned}$$

Be lehet bizonyítani, hogy $f(x)$ Fourier-integrálja létezik (konvergens), ha $f(x)$ bármely véges intervallumban kielégíti a Dirichlet-feltételeket és ezenfelül az

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

improprius integrál véges értékhez konvergál.

12.3. Laplace-transzformáció

12.3.1. A Fourier-sor és a Fourier-integrál komplex alakja.

Legyen a $2l$ szerint periódikus $f(x)$ függvény a konvergens Fourier-sorával előállítható:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{\pi}{l} x + b_k \sin k \frac{\pi}{l} x \right).$$

Át akarjuk fogalmazni ezt a sort komplex alakba. Vezessük be ebből a célból a sor valós együtthatói helyébe a következő együtthatókat:

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ez utóbbi két összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ezeket felhasználva, a következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned}f(x) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos k \frac{\pi}{l} x + c_{-k} \cos k \frac{\pi}{l} x \right) + \\&\quad + i \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \sin k \frac{\pi}{l} x - c_{-k} \sin k \frac{\pi}{l} x \right) = \\&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\cos k \frac{\pi}{l} x + i \sin k \frac{\pi}{l} x \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \left(\cos k \frac{\pi}{l} x - i \sin k \frac{\pi}{l} x \right) =\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\cos k \frac{\pi}{l} x + i \sin k \frac{\pi}{l} x \right).$$

És ha most még figyelembe vesszük az Euler-féle összefüggést, akkor végül:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{\pi}{l} x}.$$

Ha feltesszük azt, hogy $f(x)$ ezzel a komplex alakú függvénysorral állítható elő, akkor a c_k együtthatók kiszámítására új módszert is találhatunk. Ha ugyanis megszorozzuk az egyenletünk mindkét oldalát az $e^{-im \frac{\pi}{l} x}$ függvénnyel és mindkét oldalt integráljuk $-l$ -től l -ig, akkor lesz:

$$\int_{-l}^l f(x) e^{-im \frac{\pi}{l} x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-l}^l e^{i(n-m) \frac{\pi}{l} x} dx.$$

Azonban könnyen belátható, hogy

$$\int_{-l}^l e^{i(n-m) \frac{\pi}{l} x} dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m, \\ 2l, & \text{ha } n = m \end{cases}$$

és így

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in \frac{\pi}{l} \xi} d\xi, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Ha figyelembe vesszük ezt az együtthatókra kapott eredményt, akkor a Fourier-sort így is írhatjuk:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-ik \frac{\pi}{l} (\xi-x)} d\xi.$$

Tegyük fel most azt, hogy $l \rightarrow \infty$ és a nem periódikus $f(x)$ olyan, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

konvergens, akkor nyerjük a Fourier-integrál komplex alakját:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-iy(\xi-x)} d\xi dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-iy\xi} d\xi \right\} dy. \end{aligned}$$

Ezt az eredményt szét lehet bontani két képletre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-iy\xi} d\xi = g(y) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{iyx} dy = f(x).$$

Még megjegyezzük azt, hogy – a szimmetria kedvéért – szokták az

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-iy\xi} d\xi \right\} dy$$

Fourier-integrálban a zárójelbe tett – az y paramétertől függő – függvényt $g(y)$ helyett $\sqrt{2\pi}g(y)$ -nak választani és akkor

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{iyx} dy$$

és

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx .$$

Ha feltesszük azt, hogy az első egyenletben $f(x)$ ismert és $g(y)$ ismeretlen, akkor ennek az “integrálegyenletnek” a megoldását a második egyenlet szolgáltatja, és viszont.

Adott $f(x)$ -hez a megfelelő $g(y)$ -t egy ún. *függvénytranszformáció* (Fourier-transzformáció) rendel hozzá:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx = g(y) ;$$

és viszont, ennek a transzformációnak az inverzeként:

$$\mathcal{F}^{-1}\{g(y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{iyx} dy = f(x) .$$

12.3.2. A Laplace-transzformáció bevezetése.

Legyen a t időtől függő $F(t)$ függvény Fourier-integrállal előállítható:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) e^{-iy\tau} d\tau \right\} e^{iyt} dy ,$$

amit a következő két integrálegyenletre lehet szétválasztani:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} f(y) dy ,$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} F(t) dt .$$

Az első integrálegyenletet úgy lehet értelmezni, hogy az az időtől függő $F(t)$ függvényt

$$f(y) e^{iyt}$$

“rezgésekből”, mint összetevőkből állítja elő, ahol a rezgések “frekvenciaspektruma” folytonos a $-\infty < y < \infty$ intervallumban. A frekvenciafüggő $f(y)$ amplitúdófüggvényt pedig, amely $F(t)$ -hez tartozik, a második integrál állítja elő, ha csak ez a $F(t)$ olyan, hogy ez az integrál konvergens.

Válasszunk most $F(t)$ helyett egy tetszőleges $x > 0$ paramétertől függő

$$e^{-xt} F(t)$$

alakú függvényt, azzal a feltevéssel, hogy $F(t) = 0$, ha $t < 0$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(y; x) = \int_0^{\infty} e^{-iyt} \cdot e^{-xt} F(t) dt .$$

Be lehet azt bizonyítani, hogy ez az integrál konvergens minden olyan $F(t)$ -re, amely az integrálás intervallumában egyenletesen korlátos, azaz

$$|F(t)| \leq M , \quad \text{ha } t > 0 .$$

Az is bizonyítható, hogy az integrál akkor is konvergens, ha $F(t)$ minden véges $[a, b]$ intervallumban ($0 < a \leq t \leq b$) korlátos és van olyan x_0 ($x > x_0 > 0$), hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|F(t)|}{e^{x_0 t}} \leq A ,$$

vagyis $t \rightarrow \infty$ mellett $|F(t)|$ -nek a nagyságrendje megegyezik $e^{x_0 t}$ nagyságrendjével.

Ezekkel a feltevésekkel tehát ezt írhatjuk:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+iy)t} f(y; x) dy = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 , \\ F(t), & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

és

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+iy)t} F(t) dt = f(y; x) .$$

Vezessük be az

$$s = x + iy$$

komplex változót, amikor is az első integrálban egyrészt írhatjuk, hogy

$$f(y; x) = f(s) ,$$

továbbá az integrálást a komplex s -síkban a rögzített $x > x_0 > 0$ mellett $x - i\infty$ és $x + i\infty$ között végezhetjük s szerint ($ds = i dy$):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s) ds = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 , \\ F(t), & \text{ha } t > 0 , \end{cases} \quad (x > x_0 > 0)$$

és

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s) , \quad \text{Re}(s) > x_0 .$$

Ha ez az utóbbi integrál konvergens, akkor azt mondjuk, hogy ez az integráltranszformáció, mely $F(t)$ -hez $f(s)$ -t rendeli hozzá, az $F(t)$ függvény *Laplace-transzformációja* és így jelöljük:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt , \quad \text{Re}(s) > x_0 ;$$

Az inverz Laplace-transzformáció pedig:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s) ds = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ F(t), & \text{ha } t > 0, \end{cases} \quad (x > x_0 > 0).$$

Szokásos elnevezések: $F(t)$ a *tárgyfüggvény* és ennek Laplace-transzformáltja $f(s)$ a *képfüggvény*.

Példaként számítsuk ki néhány egyszerű függvény Laplace-transzformáltját.

1.) Legyen

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$

(Heaviside-féle "egységugrás" függvény.)

Ekkor – feltételezve azt, hogy $\operatorname{Re}(s) > 0$ –

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

2.) Legyen $a > 0$ valós állandó és

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > a, \\ 0, & \text{ha } t < a. \end{cases}$$

Ekkor

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s},$$

$\operatorname{Re}(s) > 0$.

Eredményünket összevetve az előző példa eredményével, azt mondhatjuk, hogy ha

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s),$$

akkor

$$\mathcal{L}\{F(t-a)\} = e^{-as} f(s); \quad a > 0.$$

3.) Legyen λ tetszőleges komplex állandó ($\operatorname{Re}(\lambda) < \operatorname{Re}(s)$) és

$$F(t) = e^{\lambda t} \quad (t > 0).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{\lambda t}\} &= \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-\lambda)t} dt = \left[-\frac{1}{s-\lambda} e^{-(s-\lambda)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-\lambda}. \end{aligned}$$

Erre az eredményre támaszkodva kapjuk a következő képleteket:

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\right\} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) =$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \text{ahol } \operatorname{Re}(s) > 0 \text{ és } \omega > 0.$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right).$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \text{ahol } \operatorname{Re}(s) > 0 \text{ és } \omega > 0.$$

Megjegyezzük azt, hogy különböző képletekkel megadott függvények Laplace-transzformáltját (és ezek inverz transzformáltjait) kézikönyvek táblázataiban lehet összefoglalva megtalálni.

12.3.3. A Laplace-transzformáció néhány tulajdonsága.

Az előző példákban láttuk néhány egyszerű függvény Laplace-transzformációját. Most függvényekre alkalmazott néhány speciális művelet Laplace-transzformáltjára vonatkozó tételeket foglalunk össze.

Hasonlósági tétel: ha

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s),$$

akkor

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0;$$

hiszen

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} F(\tau) d\tau = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right),$$

az $at = \tau$ helyettesítéssel.

E tételt – inverz módon – így is lehet fogalmazni:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(bs)\} = \frac{1}{b}F\left(\frac{t}{b}\right), \quad b > 0.$$

Eltolás a valós t -tengely mentén:

Legyen $a > 0$ valós állandó. Két esetet kell megkülönböztetni aszerint, hogy $F(t)$ helyett $F(t - a)$ -ról, vagy $F(t + a)$ -ról van szó.

Az első esetben egyszerűen, a $t - a = \tau$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{F(t - a)\} = e^{-as}f(s).$$

A második esetben viszont, "balra" toláskor, le kell "vágni" az eredeti függvényből annak a -hosszúságú kezdeti szakaszát és így

$$\mathcal{L}\{F(t + a)\} = e^{as}\left(f(s) - \int_0^a e^{-st}F(t)dt\right).$$

Eltolási tétel a képfüggvényre nézve:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s + a)\} = e^{-at}F(t),$$

ahol a tetszőleges komplex szám lehet. E tételt szokták csillapítási tételnek is nevezni. Valóságos csillapítás a tárgyfüggvényben persze csak akkor lép fel, ha $a > 0$ valós szám.

A tárgyfüggvény deriváltjának Laplace-transzformáltja.

Feltesszük azt, hogy $F(t)$ minden $t > 0$ mellett deriválható és létezik a

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = F(+0)$$

jobboldali határérték.

Induljunk ki a következő egyenlőségből:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-st} F'(t) dt = e^{-\beta s} F(\beta) - e^{-\alpha s} F(\alpha) + s \int_{\alpha}^{\beta} e^{-st} F(t) dt .$$

Ha most $\alpha \rightarrow +0$ és $\beta \rightarrow \infty$ mellett léteznek a megfelelő improprius integrálok, akkor

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt - F(+0) ,$$

vagyis

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(+0) . \quad (\text{Feltesszük, hogy } \operatorname{Re}(s) > \gamma > 0.)$$

Analóg módon lehet – megfelelő feltevések mellett – a következő eredményekre eljutni ($\operatorname{Re}(s) > \gamma > 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F''(t)\} &= s^2 \mathcal{L}\{F(t)\} - sF(+0) - F'(+0) , \\ \mathcal{L}\{F'''(t)\} &= s^3 \mathcal{L}\{F(t)\} - s^2 F(+0) - sF'(+0) - F''(+0) , \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} &= s^n \mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1} F(+0) - s^{n-2} F'(+0) - \dots - \\ &\quad - sF^{(n-2)}(+0) - F^{(n-1)}(+0) . \end{aligned}$$

A képfüggvény deriválását illetően megjegyezzük azt, hogy az

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$$

komplex változós függvény analitikus, következésképpen akárhányszor deriválható.

Tehát az

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (\operatorname{Re}(s) > \gamma > 0)$$

egyenletből következik, hogy

$$\begin{aligned} f'(s) &= - \int_0^{\infty} e^{-st} t F(t) dt = -\mathcal{L}\{tF(t)\} , \\ f''(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^2 F(t) dt = \mathcal{L}\{t^2 F(t)\} , \\ &\vdots \\ f^{(n)}(s) &= (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-st} t^n F(t) dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n F(t)\} . \end{aligned}$$

Vagy az inverz Laplace-transzformációval megfogalmazva:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} &= F(t), \\ \mathcal{L}^{-1}\{f'(s)\} &= -tF(t), \\ \mathcal{L}^{-1}\{f''(s)\} &= t^2F(t), \\ &\vdots \\ \mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} &= (-1)^n t^n F(t).\end{aligned}$$

Ezeknek az összefüggéseknek az alapján lehet igazolni például azt, hogy mivel

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$

Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

azért

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vagy mivel

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\} = \frac{1}{s - \lambda}, \quad (\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\lambda))$$

azért

$$\mathcal{L}\{te^{\lambda t}\} = \frac{1}{(s - \lambda)^2}, \quad (\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\lambda)).$$

A tárgyfüggvény integráljára vonatkozólag érvényes a következő összefüggés:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(\tau) d\tau\right\} = \frac{f(s)}{s},$$

ahol

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} \quad (\operatorname{Re}(s) > \gamma > 0)$$

(Feltesszük, hogy ez létezik).

Befejezésül definiáljuk először két függvénynek ($F_1(t)$ és $F_2(t)$) ún. *konvolúcióját*:

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau = F_1 * F_2.$$

A konvolúció (az $F_1 * F_2$ jelölés a szorzásra emlékeztet!) a szorzáshoz hasonlóan kommutatív és asszociatív művelet:

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1,$$

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3).$$

A Laplace-transzformáció alkalmazása, pontosabban megfordításának gyakorlati kivitele szempontjából alapvető az ún. *konvolúciótétel*:

$$\mathcal{L}\{F_1(t) * F_2(t)\} = \mathcal{L}\{F_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{F_2(t)\} = f_1(s) \cdot f_2(s) ,$$

azaz

$$\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s) \cdot f_2(s)\} = F_1(t) * F_2(t) .$$

A tétel érvényességét illetően megjegyezzük azt, hogy az állítás igaz, ha $\mathcal{L}\{F_1(t)\}$ és $\mathcal{L}\{F_2(t)\}$ létezik és legalább az egyik abszolút konvergens.

13. Közönséges differenciálegyenletek

13.1. Bevezetés

13.1.1. Definíciók, osztályozás.

A valós egyváltozós függvények integrálszámításának alkalmazásai között tárgyaltuk a kvadratura problémát és annak egyik általánosításaként az n -edrendű kvadratura problémát, valamint ezekkel összefüggésben a legegyszerűbb, kvadraturával megoldható differenciálegyenletek néhány típusát. A vektor-vektor függvények egyértékű skaláris potenciálja létezése kérdésének vizsgálata és a potenciál meghatározása ugyancsak a kvadratura probléma egyik általánosítására vezetett. Mindezek a kérdések a differenciálegyenletek tárgykörébe tartoznak. A következőkben a differenciálegyenletek elméletének és gyakorlatának néhány, az alkalmazások szempontjából legfontosabb kérdésének a vizsgálatával foglalkozunk. Mindenekelőtt lássunk néhány definíciót!

Az olyan egyenletet, amelyben állandókon kívül egy (vagy több) független változó, ennek (vagy ezeknek) valamilyen ismeretlen függvénye (vagy függvényei) és ennek a függvénynek (vagy függvényeknek) a független változó (ill. változók) szerinti közönséges (ill. parciális) deriváltja vagy deriváltjai szerepelnek, *differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha a differenciálegyenletben szereplő ismeretlen függvény egyváltozós (pl. $y(x)$), s így ennek a független változója (x) szerinti ún. közönséges deriváltjai ($y', y'', \dots, y^{(n)}$) lépnek fel, akkor a differenciálegyenletet *közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük. Pl.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

vagy esetleg a legmagasabbrendű deriváltra kifejtett (explicit) alakban:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Ha viszont a differenciálegyenletben szereplő ismeretlen függvény két- vagy többváltozós (pl. $u(x_1, x_2, \dots, x_k)$) s így ennek a független változói szerinti parciális deriváltjai $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots\right)$ lépnek fel, akkor a differenciálegyenletet *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük. Pl.

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_k, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_k^n}\right) = 0.$$

Ha az ismeretlen függvények (akár egy-, akár többváltozósak) száma egynél több, akkor – az ismeretlen függvények meghatározhatósága szükséges feltételének megfelelően – az ismeretlen függvények számával egyenlő számú differenciálegyenletből álló (közönséges, illetve parciális) *differenciálegyenletrendszerrel* van dolgunk.

Mind a közönséges, mind a parciális differenciálegyenleteknél és differenciálegyenletrendszereknél alapvető osztályozási szempont az egyenletekben szereplő *deriváltak rendszáma*. A differenciálegyenlet rendszámát a

benne szereplő legmagasabbrendű derivált határozza meg. Ennek megfelelően beszélünk elsőrendű, másodrendű, ..., n -edrendű közönséges, vagy parciális differenciálegyenletről, illetve differenciálegyenletrendszerről.

Egy másik, szintén lényeges szempont szerint a differenciálegyenlet (ill. differenciálegyenletrendszer) lehet *lineáris*, vagy *nem lineáris*. Ha a differenciálegyenlet (ill. differenciálegyenletrendszer) olyan, hogy – esetleg megengedett átrendezés után – az ismeretlen függvény (ill. függvények) és ennek (ill. ezeknek) deriváltjai csak első hatványon szerepelnek benne és ezek szorzatai egyáltalán nem lépnek fel, akkor a differenciálegyenlet (ill. differenciálegyenletrendszer) lineáris, ellenkező esetben nem lineáris.

Pl.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

egy n -edrendű lineáris differenciálegyenlet. Viszont

$$y'y = xy^2 + \sin x$$

nem lineáris elsőrendű differenciálegyenlet.

Legyen adva általános alakjában egy n -edrendű közönséges differenciálegyenlet, a legmagasabbrendű deriváltra explicit alakban:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Ha az y ismeretlen függvény mellett még $n - 1$ további ismeretlen segédfüggvényt vezetünk be, amelyek y -nal és egymással a következő módon függenek össze:

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \\ y_2 &= y'_1 = \frac{dy_1}{dx} = y', \\ y_3 &= y'_2 = \frac{dy_2}{dx} = y'', \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= y'_{n-1} = \frac{dy_{n-1}}{dx} = y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

akkor az adott differenciálegyenlettel ekvivalens, n ismeretlen függvényt tartalmazó következő elsőrendű differenciálegyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n). \end{aligned}$$

Éppen ezért alapvető fontosságú az elsőrendű differenciálegyenletek és differenciálegyenletrendszerek tárgyalása, mert minden olyan magasabbrendű differenciálegyenletet, ill. differenciálegyenletrendszert, mely a legmagasabbrendű deriváltakra

nézve explicit alakban adott, az előző fogással át lehet fogalmazni elsőrendű differenciálegyenletrendszerre.

13.1.2. Differenciálegyenletek megoldása, a megoldások geometriai értelmezése.

Egy *differenciálegyenletet megoldani* annyit jelent, mint meghatározni mindazokat a függvényeket, amelyek deriváltjaikkal együtt az adott differenciálegyenletet azonosan kielégítik. Ezek a függvények a *differenciálegyenlet megoldásai*. A differenciálegyenletek elméletének alapfeladata adott differenciálegyenlet összes megoldásának megkeresése és ezen megoldások sajátosságainak a vizsgálata. Mivel a differenciálegyenletek megoldását általában integrálokra vezetjük vissza, a megoldást szokták a *differenciálegyenlet integráljának* is nevezni, magát a megoldások megkeresését pedig a *differenciálegyenlet integrálásának*.

A differenciálegyenletek megoldásai között megkülönböztetünk *általános megoldást* és *partikuláris megoldásokat*; más szempont szerint *reguláris* (közönséges) és *szinguláris megoldásokat*.

Az n -edrendű közönséges differenciálegyenlet *általános megoldása* az a differenciálegyenletet azonosan kielégítő függvény, mely pontosan n tetszőleges, egymástól független állandó paramétert tartalmaz. Pl. az

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása ilyen alakú:

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

ahol $C_1, C_2, \dots, C_n$ tetszőleges, egymástól független állandók.

Az n -edrendű közönséges differenciálegyenlet *partikuláris megoldásai* olyan, a differenciálegyenletet azonosan kielégítő függvények, amelyek legfeljebb $n - 1$ tetszőleges, egymástól független állandó paramétert tartalmaznak. Speciális esetben a partikuláris megoldás egyetlen paramétert sem tartalmaz. Partikuláris megoldásokat az általános megoldásból úgy lehet előállítani, hogy a benne szereplő állandóknak konkrét értéket adunk.

Ahhoz persze, hogy az általános megoldásból konkrét partikuláris megoldásokat kiválaszthassunk, bizonyos mellékfeltételeket szokás előírni. Ilyen mellékfeltételek lehetnek ún. *kezdeti feltételek*, vagy pedig *kerületi feltételek* (más néven *peremfeltételek*). Kezdeti feltételek előírása esetén beszélünk *kezdeti érték feladatáról*; peremfeltételek előírása esetén pedig *peremértékfeladatáról*. Egyetlen partikuláris megoldás kiválasztásához pontosan annyi kezdeti-, ill. peremfeltételt kell előírni, ahányadrendű a differenciálegyenlet.

Pl. ha a megoldandó elsőrendű differenciálegyenlet

$$f(x, y, y') = 0,$$

akkor kezdeti feltételként előírjuk, hogy az $y(x)$ megoldásfüggvénynek az x_0 helyen y_0 legyen a helyettesítési értéke:

$$y(x_0) = y_0.$$

Vagy, ha a megoldandó differenciálegyenlet n -edrendű:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

akkor előírjuk az x_0 helyen az ismeretlen $y(x)$ függvénynek és az összes deriváltjának, egészen az $(n-1)$ -edrendű deriváltig bezárólag a helyettesítési értékét:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

(Ez összesen pontosan n darab mellékfeltétellel!)

Kerületi feltételek, peremfeltételek csak elsőnél magasabbrendű differenciálegyenletekhez csatlakozhatnak. Pl. az

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

másodrendű differenciálegyenlet esetén előírjuk, hogy az $y(x)$ ismeretlen függvény két különböző helyen (egy intervallum két végén, a "kerületen", a "peremen"), pl. az $x = x_1$ és $x = x_2$ helyen ($x_1 < x_2$) vegye fel a megadott

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

konkrét értékeket.

Az elsőrendű

$$F(x, y, y') = 0$$

közönséges differenciálegyenlet

$$\phi(x, y, C) = 0$$

általános megoldása az (x, y) -síkbán egy *egyparaméteres görbesereget* határoz meg. A másodrendű

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

közönséges differenciálegyenlet

$$\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

általános megoldása egy *kétparaméteres görbesereget* határoz meg.

Általában az

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

n -edrendű közönséges differenciálegyenlet

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

általános megoldása egy n -paraméteres *görbesereget* határoz meg.

Egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletnél az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti feltétel megadása geometriailag a $P_0(x_0, y_0)$ pont megadását jelenti és az ezt az előírt kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatározása annak a görbének a

kiválasztását jelenti, a differenciálegyenlet megoldásait ábrázoló görbeseregéből, amelyik az adott P_0 ponton keresztül megy.

Másodrendű közönséges differenciálegyenletnél az

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

kezdeti feltételek megadása geometriailag egy $P_0(x_0, y_0)$ "kezdeti" pont és egy $\text{tg } \alpha'_0 = y'_0$ "kezdeti" irány megadását jelenti; a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást az a görbe fogja ábrázolni, amelyik a P_0 ponton átmegy és $\text{tg } \alpha_0$ iránytangensű érintővel rendelkezik ebben a pontban.

Ha a másodrendű

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

közönséges differenciálegyenlethez az

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

kerületi (perem-) feltételek csatlakoznak, akkor az ezeknek is megfelelő partikuláris megoldást az a görbe fogja ábrázolni, amelyik átmegy mind a $P_1(x_1, y_1)$, mind a $P_2(x_2, y_2)$ ponton.

Ha az adott

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

n -edrendű közönséges differenciálegyenlet jobboldalán álló f függvény az összes argumentumának egy D zárt tartományához tartozó bármely

$$(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$$

kezdeti értékrendszeréhez egyetlen (unicitás) $y(x)$ megoldás tartozik, akkor azt mondjuk, hogy egy ilyen $y(x)$ megoldás *reguláris* (közönséges).

Egy differenciálegyenlet olyan megoldását, mely egyik pontjában sem tesz eleget az unicitás feltételének, a differenciálegyenlet *szinguláris megoldásának* nevezzük. Ennek értelmében egy szinguláris megoldást ábrázoló görbe bármely (x, y) -pontjának tetszőleges kicsiny környezetében legalább két olyan "megoldásgörbe" létezik, amely a kezdeti feltételeket is kielégíti.

Megjegyzés.

A differenciálegyenletekkel kapcsolatban elsősorban és általában nem a megoldásnak az elemi függvényekkel felírható "zárt" alakban való előállítása iránt érdeklődünk. Hiszen ez a feladat igen sokszor megoldhatatlan, s ha esetleg meg is oldható, de bonyolult eredményre vezet, teljesen érdektelen. Elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontosabb a megoldás levezetéséről (*egzisztenciájáról*) és esetleges egyértelműségéről (*unicitásáról*) meggyőződést szerezni, a megoldásnak különböző sajátságaira, tulajdonságaira, egész menetére felvilágosítást nyerni és ha zárt alakban való előállítása reménytelennek látszana, a megoldásra jó és gyakorlati szempontból kielégítő közelítéseket adni.

13.1.3. Összefoglaló áttekintés a már tárgyalt legegyszerűbb közönséges differenciálegyenletekről

Az integrálszámítás alkalmazásai között tárgyaltuk már a "kvadraturával" megoldható differenciálegyenletek néhány típusát. Eredményeinket a következőkben foglaljuk össze.

a.) Szétválasztható változójú differenciálegyenlet

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Innen

$$g(y)dy = f(x)dx$$

és ebből integrálással:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

Ez az általános megoldás.

b.) Változó transzformációval szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

α .)

$$y' = f(ax + by + c),$$

ahol $a \neq 0$ és $b \neq 0$.

Új változót vezetünk be:

$$u(x) = ax + by(x) + c.$$

Ezzel végül is

$$x = \int \frac{du}{a + bf(u)} + C$$

vezet az általános megoldásra.

β .) Homogén fokszámú differenciálegyenlet:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Új változót vezetünk be:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad x \neq 0.$$

Ezzel

$$\ln x = \int \frac{du}{f(u) - u} + C$$

vezet az általános megoldásra.

c.) Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

α .) Homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$y' + g(x)y = 0.$$

Általános megoldása

$$y(x) = C'e^{-\int g(x)dx}$$

vagy ha adott az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétel, akkor

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x g(\xi)d\xi}$$

a keresett partikuláris megoldás.

β .) Inhomogén lineáris differenciálegyenlet:

$$y' + g(x)y = h(x) ,$$

ahol $h(x) \neq 0$.

Először megoldjuk az

$$Y' + g(x)Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletet. Ennek általános megoldása

$$Y = CY_1$$

alakú. Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását y_p -t ugyanilyen alakban lehet keresni a C állandó variálásával:

$$y_p = C(x)Y_1 .$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása azután

$$y = Y + y_p$$

alakú lesz. Végül is:

$$y(x) = e^{-\int g(x)dx} \left\{ C + \int e^{\int g(x)dx} h(x) dx \right\} .$$

Ha $y(x_0)$ adott kezdeti feltétel, akkor a megfelelő partikuláris megoldás:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x g(\xi)d\xi} \left\{ y(x_0) + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^{\xi} g(\eta)d\eta} h(\xi)d\xi \right\} .$$

d.) *Hiányos másodrendű differenciálegyenletek.*

α .)

$$y'' = f(x)$$

közvetlenül kétszeri integrálással oldható meg.

β .) A differenciálegyenletből y hiányzik:

$$F(x, y', y'') = 0 .$$

Elsőrendűre redukálható az

$$y' = p , \quad y'' = p'$$

helyettesítéssel.

γ .) A differenciálegyenletből x hiányzik:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Elsőrendűre redukálható az

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy}p$$

helyettesítéssel.

13.2. Egzakt differenciálegyenlet. Integráló tényező.

13.2.1. Egzakt differenciálegyenlet.

Legyen adva egy síkbeli (kétdimenziós) vektoreloszlás (vektor-vektor függvény):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = p(x, y)\mathbf{i} + q(x, y)\mathbf{j}.$$

Mint ismeretes, ez a vektor-vektor függvény (egyértékű) skaláris potenciálból származtatható (röviden potenciálos) akkor, ha az egyszerűen összefüggő T tartományban az x és y irányú összetevőiből alkotott

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

kifejezés teljes differenciál. Ekkor ugyanis az

$$\int_{(L)} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{(L)} \{p(x, y)dx + q(x, y)dy\}$$

görbementi integrál értéke független a (T -ben futó) L integrálási úttól és csak a kezdő- és végponttól függ. Az $u(x, y)$ potenciálfüggvény görbementi integrállal számítható:

$$u(x, y) = \int_{P_0(x_0, y_0)}^{P(x, y)} \{p(x, y)dx + q(x, y)dy\}.$$

Ellenőrzésül szolgál az, hogy

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} = p(x, y)\mathbf{i} + q(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{v}(\mathbf{r}),$$

azaz

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y).$$

Az $u(x, y)$ potenciálfüggvény szintvonalakkal, az ún. ekvipotencialis vonalakkal szemléltethető. Ezek egyenlete:

$$u(x, y) = C$$

(ahol C tetszőleges állandó). Ez a görbesereg a

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

differenciálegyenlettel jellemezhető. A görbesereg egyes görbéi ennek a differenciálegyenletnek a megoldásait szemléltetik (integrálgörbék, megoldás-görbék).

A

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0,$$

vagy

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

differenciálegyenletet *egzakt differenciálegyenletnek* nevezzük, ha van egy olyan folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező $u(x, y)$ függvény, melyre fennáll, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y).$$

Ha ez a függvény ismeretes, akkor

$$u(x, y) = C$$

a differenciálegyenlet általános megoldásának implicit alakja.

Ha az (x, y) -sík egyszeresen összefüggő T tartományában $p(x, y)$, $q(x, y)$, $p'_y(x, y)$, $q'_x(x, y)$ létezik és folytonos, akkor az adott differenciálegyenlet egzakt, ha teljesül a következő, ún. integrálhatósági feltétel:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \equiv \frac{\partial q}{\partial x}.$$

(Ez ekvivalens azzal, hogy T -ben mindenütt $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$.)

Ha az integrálhatóság feltétele teljesül, akkor a differenciálegyenlet általános megoldását adó $u(x, y)$ függvényt az egyszeresen összefüggő T tartomány valamely $P_0(x_0, y_0)$ pontjából kiinduló, tetszőleges $P(x, y)$ pontba vezető és teljes egészében e tartományban futó, tetszésszerű görbe mentén vett vonalintegrállal lehet meghatározni. Célszerűen ezt a görbét úgy szokták megválasztani, hogy az a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesszakaszokból álljon. Ha pl. az integrálás útja P_0 -ból kiindulva, először az x -tengellyel, majd az y -tengellyel párhuzamosan halad, akkor

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x p(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y q(x, y)dy.$$

Ha viszont fordítva, az integrálás útja először az y -tengellyel, majd azután az x -tengellyel párhuzamosan halad, akkor

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x p(x, y)dx.$$

Sok esetben kényelmesebb, ha – görbementi integrálás helyett – először integrálással meghatározunk egy olyan $\phi(x, y)$ függvényt, amelyre fennáll, hogy

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = p(x, y),$$

majd ezután az

$$u(x, y) = \phi(x, y) + \psi(y)$$

összegben szereplő $\psi(y)$ függvényt úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y)$$

legyen. Eszerint:

$$u(x, y) = \int p(x, y) dx + \psi(y),$$

majd a

$$q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y) dx + \frac{d\psi}{dy}$$

egyenletből végül is

$$u(x, y) = \int p(x, y) dx + \int \left\{ q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y) dx \right\} dy.$$

Ha ennek mintájára fordított sorrendben számolunk, akkor

$$u(x, y) = \int q(x, y) dy + \int \left\{ p(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int q(x, y) dy \right\} dx.$$

13.2.2. Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)

Tegyük fel azt, hogy a

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

differenciálegyenlet nem egzakt, azaz

$$\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x},$$

egyébként $p(x, y), q(x, y), p'_y(x, y), q'_x(x, y)$ az egyszerűen összefüggő T tartományban folytonosak. Ekkor a folytonosan deriválható $\mu(x, y)$ függvényt a differenciálegyenlet egy integráló tényezőjének nevezzük, ha a differenciálegyenletet ezzel megszorozva a

$$\mu(x, y)p(x, y)dx + \mu(x, y)q(x, y)dy = 0$$

differenciálegyenlet már egzakt, azaz

$$\frac{\partial(\mu \cdot p)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot q)}{\partial x}$$

a T tartományban mindenütt.

Kimutatható az, hogy az integráló tényezővel megszorított differenciálegyenlet megoldásai egyben az eredeti differenciálegyenletnek is megoldásai.

A $\mu(x, y)$ integráló tényezőt a

$$\frac{\partial(\mu \cdot p)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot q)}{\partial x}$$

feltételi egyenlet, azaz a

$$p(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} = q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu(x, y) \frac{\partial q}{\partial x},$$

vagy rendezve, a

$$q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - p(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(x, y) \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

elsőrendű parciális differenciálegyenlet határozza meg.

Ennek a parciális differenciálegyenletnek valamennyi megoldását (bár a mondott feltételek mellett kimutathatóan végtelen sok megoldása létezik) általában nem tudjuk előállítani. Azonban – mivel egyetlen azonosan el nem tűnő partikuláris megoldás ismerete a mi számunkra elégséges – sok esetben ez a feladat megoldható.

A következőkben bemutatunk néhány speciális esetet.

a.) μ csak x -től függ, azaz

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv 0.$$

Ebben az esetben kell, hogy

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q(x, y)} = f(x)$$

legyen, azaz a baloldali tört csak x -től függhet. A μ -re vonatkozó differenciálegyenlet most így fest:

$$q(x, y) \frac{d\mu}{dx} = \mu(x) \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right),$$

azaz

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(x) dx,$$

ahonnan

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx}.$$

Például az

$$y' + g(x)y = h(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletnek létezik csak x -től függő integráló tényezője.

Az egyenletet így is írhatjuk:

$$(g(x) \cdot y - h(x)) dx + dy = 0,$$

vagy $\mu(x)$ -szel megszorozva:

$$\mu(x)(g(x)y - h(x)) dx + \mu(x) dy = 0.$$

Ha most dx szorzóját y -szerint és dy szorzóját x -szerint deriváljuk, akkor az integrálhatóság feltétele szerint ezek a deriváltak egyenlők:

$$\mu(x)g(x) = \frac{d\mu}{dx} ,$$

azaz

$$\frac{d\mu}{\mu} = g(x)dx ,$$

ahonnan

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx} .$$

Az ezzel szorzott eredeti differenciálegyenlet már egzakt:

$$e^{\int g(x)dx}(g(x)y - h(x))dx + e^{\int g(x)dx}dy = 0 .$$

Átrendezve:

$$e^{\int g(x)dx}g(x)ydx + e^{\int g(x)dx}dy = e^{\int g(x)dx}h(x)dx ,$$

vagy

$$d\left(e^{\int g(x)dx}y\right) = e^{\int g(x)dx}h(x)dx ,$$

ahonnan

$$e^{\int g(x)dx}y = \int e^{\int g(x)dx}h(x)dx + C ,$$

vagy végül is

$$y = e^{-\int g(x)dx} \left\{ C + \int e^{\int g(x)dx}h(x)dx \right\}$$

b.) μ csak y -től függ, ha

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p(x,y)} = f(y) ,$$

azaz a baloldal csak y -től függ.

A részleteket mellőzve most végül is

$$\mu(y) = e^{\int f(y)dy}$$

egy integráló tényező.

c.) Vizsgáljuk meg azt, hogy mi a feltétele annak, hogy a tetszőleges $\omega(x,y)$ függvény függvénye integráló tényező legyen:

$$\mu(\omega(x,y)) .$$

Ekkor az integrálhatóság feltétele így alakul:

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(q(x,y) \frac{\partial \omega}{\partial x} - p(x,y) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \mu(\omega) \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) .$$

Kell tehát, hogy csak $\omega(x, y)$ függvénye legyen a következő kifejezés:

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p(x, y)\frac{\partial \omega}{\partial y} - q(x, y)\frac{\partial \omega}{\partial x}} = f(\omega(x, y)) .$$

Ha ez teljesül, akkor

$$\mu(\omega(x, y)) = e^{\int f(\omega) d\omega} .$$

13.3. Elsőrendű explicit differenciálegyenlet geometriai szemléltetése; a megoldás egzisztenciájának és unicitásának kérdése

13.3.1. Iránymező, izoklinák

Tekintsük az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletet, ahol $f(x, y)$ az (x, y) -sík egy bizonyos T tartományában adott folytonos függvény. Ez a differenciálegyenlet a T tartomány minden egyes pontjában meghatározza a megoldás görbéjének érintő-meredekségét. Ha a T tartomány minden egyes $P(x, y)$ pontjában az f függvény $f(x, y)$ helyettesítési értékével meghatározott érintő irányát egy rövid egyenesszakasszal, ún. *vonalelemmel* ábrázoljuk, akkor egy *iránymezőt* nyerünk. Ez az iránymező az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet geometriai képe.

A vonalelemek megszerkesztését megkönnyíti az $f(x, y)$ függvény szintvonalainak a megrajzolása. Egy-egy szintvonal mentén ugyanis az $f(x, y)$ függvény értéke azonos. Pl. az

$$f(x, y) = m$$

egyenlettel megadott görbe minden egyes pontjában

$$y' = m ,$$

tehát a vonalelem meredksége m . Az

$$f(x, y) = m$$

egyenletű görbéket (ahol m helyébe különböző állandókat helyettesíthetünk), azaz az $f(x, y)$ függvény szintvonalait az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet *izoklináinak* (izoklin vonalainak) szokás nevezni. (Izoklin = azonos hajlású; az $f(x, y) = m$ egyenletű görbe minden egyes pontjához tartozó vonalelem ugyanis

azonos szöget zár be az x -tengely pozitív szárával, ti. a vonalelemek meredeksége a görbe mentén mindenütt m .)

Ahogy egy vektormező szemléltetésekor vektorvonalakról beszélhetünk, azaz azokról a görbéről, amelyek úgy haladnak át a vektormezőn, hogy minden egyes pontjaihoz tartozó vektor iránya megegyezik a vektorvonal érintőjének irányával, ugyanígy beszélhetünk egy *iránymező irányvonalairól* is. Ezek azok a görbék, amelyek az iránymezőbe úgy símulnak bele, hogy minden pontjukban az érintőjük iránya azonos az illető ponthoz tartozó vonalelem irányával. De ez a tulajdonság éppen a differenciálegyenlet megoldásgörbéit jellemzi. Éppen ezért az iránymező irányvonalai a differenciálegyenlet megoldásgörbéi.

Az izoklinák segítségével az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet közelítő megoldásait grafikusán úgy származtathatjuk, hogy az "eléggé sűrűn" megrajzolt izoklin görbék seregén – szintén "eléggé sűrűn" – kijelöljük az ott érvényes vonalelemeket és ebbe az iránymezőbe olyan görbéket rajzolunk, amelyek a megfelelő vonalelemekhez mint érintőkhöz hozzásimulnak. Minden egyes ilyen görbe a differenciálegyenlet egy megoldásának lesz a közelítő képe.

Megjegyezzük azonban azt, hogy ez a módszer gyakorlatilag kevésbé használatos, mert a közelítés pontossága általában igen kevésbé kielégítő és általában nincsen arányban az izoklinák felrajzolásának a nehézségével. Viszont ez a szerkesztő eljárás igen sok esetben elvileg lényegesen hozzájárulhat a differenciálegyenlet megoldásával kapcsolatos geometriai viszonyok tisztázásához.

13.3.2. Közelítő törtvonalak módszere (Euler-Cauchy)

Többször fordul elő az az eset, hogy egy adott elsőrendű differenciálegyenlet megoldásainak teljes rendszerét szükségtelen meghatározni, elegendő egyetlen partikuláris megoldást megtalálni. Egy megoldás általában jellemezhető azáltal, hogy a neki megfelelő görbe a sík melyik pontján halad át, mert a sík egy pontján át – kivételes esetektől eltekintve – csak egy megoldásgörbe halad át.

Az ilyen esetekben felesleges pl. az izoklin vonalak teljes rendszerét meghatározni.

Pontosan megfogalmazva a feladat a következő:

Adott egy

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet, amelynek jobboldala az (x, y) -sík egy bizonyos T tartományában folytonos. Keresendő ennek a differenciálegyenletnek az a megoldása, amely az x_0 helyen az y_0 értéket veszi fel. (*Kezdetiérték feladat*). Feltesszük azt, hogy a $P_0(x_0, y_0)$ pont a T tartomány egy belső pontja.

A következőkben a geometriai képhez kapcsolódva egy numerikus számításra is alkalmas eljárást, a közelítő törtvonalak módszerét ismertetjük.

Egyszerűség kedvéért a megoldásgörbének csak azt a részét közelítjük meg, amely görberész pontjainak abszcisszái x_0 -nál nagyobbak. De természetesen, megfelelő

változtatással a megoldásgörbe a másik irányban is hasonlóan közelíthető meg.

Vegyünk fel az x -tengelyen egy monoton növekvő abszcisszasorozatot:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

és jelöljük két szomszédos abszcisszaérték különbségét a következőképpen:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(Speciális esetben lehet ez a sorozat ekvidisztáns is, amikor is

$$\Delta x_i = h > 0$$

minden i -re és az abszcisszák egymast egyenlő h lépésközben, azaz ekvidisztáns módon követik.)

Vegyünk fel egy P_0 ponton átmenő

$$m_0 = f(x_0, y_0)$$

meredkségű egyenest, amely az $x = x_1$ egyenletű függőleges egyenest az

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x_1$$

ordinátájú P_1 pontban metszi.

A $\overline{P_0 P_1}$ egyenesszakaszt a megoldásgörbe lineáris közelítésének tekinthetjük az $x_0 \leq x \leq x_1$ intervallumban.

Ezután felvesszünk egy $P_1(x_1, y_1)$ ponton átmenő

$$m_1 = f(x_1, y_1)$$

meredkségű egyenest, amely az $x = x_2$ egyenletű függőleges egyenest az

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot \Delta x_2$$

ordinátájú P_2 pontban metszi.

A $\overline{P_1 P_2}$ egyenesszakaszt a megoldásgörbe lineáris közelítésének tekintjük az $x_1 \leq x \leq x_2$ intervallumban.

Ezt az eljárást addig folytathatjuk, amíg a $P_0 P_1 P_2 \dots P_n$ törtvonal az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományában fekvő T tartományon belül marad. A törtvonal a megoldásgörbe megközelítésének tekinthető. A megközelítés annal pontosabb, minél kisebbek a választott Δx_i lépésközök.

Be lehet azt bizonyítani, hogy ha a T tartományban $f(x, y)$ és elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak és korlátosak, akkor

$$\max \Delta x_i \rightarrow 0$$

esetén a törtvonalak sorozata egy olyan határgörbéhez tart, amely a differenciálegyenlet megoldásgörbéje.

13.3.3. Picard féle szukcesszív approximáció (sorozatos közelítés)

A differenciálegyenletek a természettudományokban és a műszaki alkalmazásokban a természeti folyamatok leírásának eszközei. Hogy adott kezdeti feltételből, vagyis kezdeti állapotból a folyamat egyértelműleg zajlik le, az azt jelenti, hogy a folyamatot jellemző differenciálegyenletnek egyetlen (egy és csakis egy) olyan megoldása létezik, amely az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti feltételt kielégíti. Nyilvánvaló tehát, hogy az alkalmazások szempontjából is alapvető fontosságú a megoldás *létezésének* (egzisztenciájának) és *egyértelműségének* (unicitásának) a kérdése.

A differenciálegyenletek elméletében több jelentős tétel foglalkozik a differenciálegyenlet kezdetiérték feladata megoldásának egzisztenciájával és unicitásával. Ezek közül a következőkben csak azzal a tétellel foglalkozunk, amelynek bizonyításában a Picardtól származó szukcesszív approximáció (sorozatos közelítés) módszerét használjuk fel. Ezzel a módszerrel nemcsak az egzisztencia és unicitás kérdése intézhető el, hanem lehetőség adódik egyben a megoldás közelítő előállítására is (konstruktív bizonyítás).

Adva van a következő differenciálegyenlet:

$$y' = f(x, y)$$

és az x_0, y_0 kezdeti értékek, azaz az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti feltétel. Tekintsük a következő (röviden T -vel jelölt) derékszögű négyszög alakú zárt tartományt:

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b,$$

azaz

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b.$$

A kezdeti értékeknek megfelelő (x_0, y_0) pont T -nek a középpontja. A megoldás létezését (egzisztenciáját) és egyértelműségét (egyetlenségét = unicitását) biztosítják a következő *elégséges feltételek*:

1.) $f(x, y)$ T -ben folytonos.

Miután egy zárt tartományban folytonos függvény ott korlátos is, azért e feltétel értelmében egyben

2.) $f(x, y)$ T -ben korlátos is, azaz

$$|f(x, y)| \leq M,$$

ahol M egy pozitív állandó.

3.) Ugyancsak T -ben az $f(x, y)$ függvény az y változóra nézve ⁴eleget tesz egy a folytonosságnál erősebb feltételnek, az ún. *Lipschitz-feltételnek*, azaz létezik olyan N pozitív

szám (Lipschitz-féle állandó), hogy tetszőleges x mellett ($|x - x_0| \leq a$) és az y változó tetszőleges y_1, y_2 különböző értékeire ($|y_1 - y_0| \leq b$ és $|y_2 - y_0| \leq b$) teljesül az

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$$

egyenlőtlenség.

(Ha ezt az egyenlőtlenséget $|y_1 - y_2| > 0$ miatt ebbe az alakba rendezzük át:

$$\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq N,$$

akkor innen látható, hogy ez a Lipschitz-feltétel a kétváltozós $f(x, y)$ függvénynek az y változóra vonatkozó parciális differencia-hányadosai korlátosságát írja elő.

Megjegyezzük azt, hogy a Lipschitz-feltétel biztosan teljesül, ha T -ben $f'_y(x, y)$ létezik és korlátos.)

Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletnek egyetlen olyan $y(x)$ megoldása létezik, amely az x változónak az

$$|x - x_0| \leq h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

intervallumban értelmezett és folytonosan deriválható függvénye, amely az x_0 helyen y_0 értéket vesz fel:

$$y(x_0) = y_0.$$

(h jelenti az a és $\frac{b}{M}$ számok közül a kisebbiket.)

A tétel bizonyítására alkalmazzuk a szukcesszív approximációk (sorozatos közelítések) Picard-féle módszerét.

Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy az adott differenciálegyenlet az előírt kezdeti feltétellel együtt egyenértékű a következő *integrálegyenlettel*:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

(Ezt az egyenletet azért hívjuk integrálegyenletnek, mert benne az ismeretlen $y(x)$ függvény szerepel az integráljel alatt!)

Ez az integrálegyenlet valóban ekvivalens az adott differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladattal, mert hiszen deriválva éppen

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

adódik és az x_0 helyen

$$y(x_0) = y_0.$$

Picard módszerével ezt az integrálegyenletet oldjuk meg.

Nulladrendű közelítésnek választjuk az adott y_0 értéket: $y_0(x) \equiv y_0$.

Az elsőrendű közelítést így számítjuk:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_0) d\xi .$$

Mint ahogy most az integráljel alatt ismert függvény áll, azért $y_1(x)$ kvadratúrával meghatározható. Nyilvánvaló, hogy

$$y_1(x_0) = y_0 ,$$

vagyis az első közelítés kielégíti a kezdeti feltételt. Az is nyilvánvaló, hogy y_1 folytonos és differenciálható. (Folytonos függvény határozott integrálja a felső határ folytonos és differenciálható függvénye.) Belátható az is, hogy $y_1(x)$ nem lép ki a T tartományból, ha $|x - x_0| \leq h$, mert

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_0) d\xi \right| \leq M \cdot |x - x_0| \leq Mh \leq b$$

és a feltevés szerint $h \leq \frac{b}{M}$.

A másodrendű közelítés:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_1(\xi)) d\xi$$

és általában, az $(n-1)$ -edrendű közelítés felhasználásával, az n -edrendű közelítés:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi .$$

Feltéve, hogy az $(n-1)$ -edik közelítés az x változó folytonos és deriválható függvénye, az n -edik közelítés is ilyen. Nyilvánvaló az is, hogy

$$y_n(x_0) = y_0 ,$$

vagyis ez a közelítés is eleget tesz az előírt kezdeti feltételnek. Könnyű azt is belátni, hogy ha az $(n-1)$ -edik közelítés nem lép ki a T tartományból, ha csak $|x - x_0| \leq h$, akkor ez az n -edik közelítésre is igaz. Valóban az $(n-1)$ -edrendű közelítésre teljesülő feltételek szerint

$$|f(x, y_{n-1}(x))| \leq M , \quad \text{ha} \quad |x - x_0| \leq h$$

és így

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b .$$

Mivel ezt az egyenlőtlenséget $n = 1$ esetre bebizonyítottuk, azért minden n természetes számra is érvényes. Ennek értelmében a szukcesszív approximációval nyert $y_n(x)$ függvények mind T -hez tartoznak, ha $|x - x_0| \leq h$.

Most kimutatjuk azt, hogy a szukcesszív approximációval nyert függvények konvergens sorozatot képeznek, vagyis a $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ határfüggvény létezik.

Ennek céljából tekintsük az

$$y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots$$

végteles sort. Becsüljük meg a második tagtól kezdve a sor tagjainak abszolút értékét, a Lipschitz-feltétel felhasználásával:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_0) d\xi \right| \leq M|x - x_0|; \\ |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0)) d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0)| d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x N |y_1(\xi) - y_0| d\xi \right| \leq \\ &\leq MN \left| \int_{x_0}^x |\xi - x_0| d\xi \right| \leq \frac{MN}{2!} |x - x_0|^2; \end{aligned}$$

és így tovább. Általában (matematikai indukcióval beláthatóan)

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{M(N(x - x_0))^n}{n!}.$$

Ha most még figyelembe vesszük azt, hogy $|x - x_0| \leq h$, akkor láthatjuk, hogy a vizsgált sor valamennyi tagja, a másodiktól kezdve, abszolút értékben nem nagyobb, mint a konvergencia

$$\frac{M}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^n h^n}{n!} = \frac{M}{N} (e^{Nh} - 1)$$

numerikus sor megfelelő tagja. E szerint a vizsgált sor az $|x - x_0| \leq h$ intervallumban egyenletesen konvergens és létezik az összege, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = Y(x).$$

Az közvetlenül belátható, hogy a $Y(x)$ határfüggvény kielégíti az előírt kezdeti feltételt, vagyis

$$Y(x_0) = y_0,$$

mert hiszen minden n -re

$$y_n(x_0) = y_0$$

és így

$$Y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0) = y_0.$$

Kimutatjuk továbbá azt is, hogy $Y(x)$ kielégíti az adott differenciálegyenletet. Ugyanis egyrészt az egyenletes konvergencia alapján, ha $n-1 > n_0$, $|x - x_0| \leq h$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges kicsiny pozitív szám, akkor van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|y_{n-1}(x) - Y(x)| < \delta = \frac{\varepsilon}{Nh},$$

másrészt ennek az egyenlőtlenségnek és a Lipschitz-feltételnek a felhasználásával

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi - \int_{x_0}^x f(\xi, Y(\xi)) d\xi \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, y_{n-1}(\xi)) - f(\xi, Y(\xi))| d\xi \right| \leq \\ &\leq N \left| \int_{x_0}^x |y_{n-1}(\xi) - Y(\xi)| d\xi \right| < \\ &< N \frac{\varepsilon}{Nh} h = \varepsilon, \end{aligned}$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi,$$

vagyis

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, Y(\xi)) d\xi.$$

Innen pedig deriválással adódik:

$$Y'(x) = f(x, Y(x)),$$

amint állítottuk.

Ezzel tételünknek a megoldás egzisztenciájára vonatkozó állítását minden részletében bebizonyítottuk. Most még kimutatjuk azt, hogy a nyert megoldás az egyetlen olyan, amely eleget tesz az előírt kezdeti feltételnek (unicitás).

Tegyük fel ugyanis – állításunkkal ellentétben – azt, hogy az $Y(x)$ megoldáson kívül létezik egy másik, tőle különböző $Z(x)$ megoldás, mely kielégíti az előírt kezdeti feltételt, azaz

$$Z(x_0) = Y(x_0) = y_0,$$

és bármely x_0 -tól különböző x -re, mely az $|x - x_0| \leq h$ intervallumhoz tartozik:

$$Z(x) \neq Y(x).$$

Válasszunk tetszőlegesen kicsiny, állandó $\varepsilon > 0$ számot. Feltevésünk szerint az $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon$ zárt intervallumban Z nem mindenütt egyenlő Y -nal, következésképpen az

$$|Y(x) - Z(x)| \geq 0$$

folytonos függvény ezen intervallum valamely x' helyén felveszi legnagyobb H értékét és biztos, hogy $x' \neq x_0$, mert hiszen az x_0 helyen Y és Z azonos helyettesítési értékkel rendelkeznek. Fennállnak a következő azonosságok:

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, Y(\xi)) d\xi, \\ Z(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, Z(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Vonjuk ki e két azonosságot egymásból és tegyük x helyébe x' -t:

$$\begin{aligned} |Y(x') - Z(x')| &= H \leq \left| \int_{x_0}^{x'} |f(\xi, Y(\xi)) - f(\xi, Z(\xi))| d\xi \right| \leq \\ &\leq N \left| \int_{x_0}^{x'} |Y(\xi) - Z(\xi)| d\xi \right|. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség annál inkább fennáll, ha az utolsó integrálban az integrandusz helyére annak legnagyobb értékét H -t írjuk és ha az integrálás intervallumaként (x_0, x') helyett az $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumot választjuk. Ekkor azonban Y -nal,

$$H \leq NH\varepsilon ;$$

ebből viszont, miután a feltevés szerint $H \neq 0$, ezt nyerjük:

$$1 \leq N\varepsilon ,$$

ami viszont ellentmondás, mert ε akármilyen kicsinynek választható, pl. lehetne

$$\varepsilon < \frac{1}{N} .$$

Következésképpen egy második $Z(x)$ megoldásnak a feltételezése, mely az $Y(x)$ -től különbözne és azonos kezdeti feltételt elégít ki, ellentmondásra vezet. Ezzel a megoldás unicitásait is bebizonyítottuk. Épp ezért $Y(x)$ helyett $y(x)$ -et írhatunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x) ; \quad y(x_0) = y_0 .$$

Előző becsléseink alapján belátható, hogy ha az adott differenciálegyenletnek az előírt kezdeti feltételhez tartozó $y(x)$ egzakt megoldását az

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

iterációval közelítjük meg, akkor érvényes a következő becslés:

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{M}{N} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(N|x-x_0|)^k}{k!} , \quad \text{ha } |x-x_0| \leq h .$$

Ennek az egyenlőtlenségnek az alapján becsülhetjük meg az n -edik iterációs lépésben nyert közelítő megoldásnak az egzakt megoldástól való eltérést.

Megjegyezzük azt, hogy a szukcesszív approximációval nyert megoldást – a bizonyítás során – csak az $|x-x_0| \leq h$ intervallumban értelmeztük. Ki lehet azonban mutatni, hogy az (x_0, y_0) pontból kiinduló megoldást mindkét irányban a T tartomány határáig lehet folytatni.

A bizonyítás során az adott differenciálegyenletnek egy bizonyos adott kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását határoztuk meg. A bizonyítás azonban lehetővé

teszi (legalábbis valamely korlátos intervallumban) az általános megoldás meghatározását is. Ehhez csak a kezdeti feltételben szereplő (x_0, y_0) adatokat kell változó paramétereknek tekinteni. Ezzel a kérdéssel itt részleteiben nem foglalkozunk. Megjegyezzük azonban, hogy a tett feltevések mellett azt is ki lehet mutatni, hogy a kapott megoldás a kezdeti feltételben szereplő paramétereknek is folytonos függvénye. Ez azt jelenti, hogy az (x_0, y_0) adatok "kicsiny" változtatása esetén a megoldásfüggvény is csak "kicsit" változhat.

A szukcesszív approximáció közölt eljárása közelítő numerikus számolásra is alkalmas.

13.4. Elsőrendű explicit differenciálegyenlet szinguláris pontjai

13.4.1. Bevezetés

Az előzőekben láttuk azt, hogy milyen elégséges feltételek biztosítják az

$$y' = f(x, y)$$

explicit alakú elsőrendű differenciálegyenlet

$$y(x_0) = y_0$$

előírt kezdeti feltételhez tartozó megoldásának egzisztenciáját és unicitását.

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk, amikor az egzisztencia és unicitás feltételei közül nem teljesül $f(x, y)$ -ra a korlátosság. Feltesszük tehát azt, hogy $f(x, y)$ az (x_0, y_0) helyen nem korlátos. Két esetet vizsgálunk:

1.) $|f(x, y)| \rightarrow \infty$, ha $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Ekkor biztosan

$$\frac{1}{f(x, y)} \rightarrow 0, \quad \text{ha } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Ha most a differenciálegyenletben a független és függő változó szerepét felcseréljük (x lesz a függő változó és y a független változó) és a differenciálegyenletet

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

alakban szemléljük, feltételezve azt, hogy erre a differenciálegyenletre az egzisztencia és unicitás feltételei teljesülnek, akkor létezik egyetlen olyan $x(y)$ megoldásfüggvény, amelyre

$$x(y_0) = x_0$$

és ebben a pontban a $\frac{dx}{dy}$ értéke 0, ami azt jelenti, hogy az

$$x = x(y)$$

egyenletű megoldásgörbének az (x_0, y_0) pontban az érintője párhuzamos az y -tengellyel.

2.) $f(x, y)$ azonkívül, hogy nem korlátos az (x_0, y_0) pontban, nincs egyértelmű $+\infty$ vagy $-\infty$ határértéke, ha $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, hanem a határátmenettől függő határértékhez tart. Ilyenkor $f(x, y)$ -nek és magának a differenciálegyenletnek is az (x_0, y_0) pont ún. *szinguláris pontja*.

Ha pl. $f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, azaz a differenciálegyenlet ilyen alakú:

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

és az (x_0, y_0) pontban P és Q egyszerre 0, azaz

$$\begin{aligned} P(x_0, y_0) &= 0, \\ Q(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

és ha még

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

akkor (x_0, y_0) *szinguláris pont*.

Az általánosság megszorítása nélkül – és egyszerűség kedvéért – feltehetjük, hogy $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$, azaz a szinguláris pont az origó.

Tegyük fel még azt, hogy $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ az origóban és ennek a környezetében legalább kétszer folytonosan deriválhatók és helyettesítsük ezeket a függvényeket elsőfokú Taylor-polinomjukkal, azaz szorítkozzunk az origó elegendően kicsiny környezetére. Legyen tehát az eredetiből csonkítással nyert differenciálegyenlet a következő:

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y},$$

ahol $a_{11} = Q'_x(0, 0)$, $a_{12} = Q'_y(0, 0)$, $a_{21} = P'_x(0, 0)$ és $a_{22} = P'_y(0, 0)$.

Kimutatható az, hogy ha az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeinek, azaz a

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökeinek valós része nem 0, akkor a szinguláris pont jellegének megállapítása szempontjából elégséges az eredeti helyett a csonkított differenciálegyenletet vizsgálni. A szinguláris pont jellegét a szinguláris pont környezetében haladó megoldásgörbék határozzák meg.

Ha ez a sajátértékekre mondott feltétel nem teljesül, akkor $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ Taylor-polinomjának elsőfokú tagjai nem határozzák meg a szinguláris pont jellegét és további vizsgálatra van szükség.

13.4.2. A megoldások jellege a szinguláris pont környezetében.

A következőkben az origóban lévő szinguláris pont jellegére vonatkozó különböző esetek áttekintésére az

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$$

differenciálegyenlet megoldásait fogjuk vizsgálni az origó környezetében.

Bár ezt a differenciálegyenletet több, különböző módszerrel lehet kezelni, azt a speciális utat fogjuk követni, hogy a differenciálegyenletben szereplő mindkét változót (x -et és y -t is) ugyanazon t paraméter függvényeinek fogjuk tekinteni és az adott differenciálegyenlet helyett a vele ekvivalens

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}$$

differenciálegyenletből álló rendszert fogjuk vizsgálni. Ez az $x(t)$, $y(t)$ ismeretlen függvényekre vonatkozóan egy elsőrendű állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletrendszer.

Ha bevezetjük az ismeretleneket összefoglaló

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

oszlopvektort és az együtthatókból alkotott

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

másodrendű kvadratikus mátrixot, akkor a differenciálegyenletrendszert mátrixalakban így írhatjuk:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

vagy röviden:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{r}.$$

Ez a differenciálegyenletrendszer egy síkbeli pontmozgást ír le olyképpen, hogy a sík minden $\mathbf{r}$ helyvektorú pontjához hozzárendeli az

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

sebességösszetevőket. A megoldással felírható

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t)\end{aligned}$$

egyenletrendszer megadja e mozgás lehetséges pályagörbéit és menetrendjüket.

A pályagörbék egyébként az

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$$

differenciálegyenlet megoldásgörbéi.

A megoldás előállítására és a különböző esetek áttekintése céljából úgy lehet eljárni, hogy az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixot hasonlósági transzformációval a lehető legegyszerűbb alakra transzformáljuk. Tegyük fel azt, hogy $\mathbf{U}$ az a nem szinguláris transzformáló matrix, amellyel fennáll, hogy

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{B}$$

és $\mathbf{B}$ a kívánt legegyszerűbb alak. Ekkor írhatjuk:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{r}) = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{r}),$$

azaz

$$\frac{d}{dt}\underline{\rho} = \mathbf{B}\underline{\rho},$$

ahol

$$\underline{\rho} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Ez az átalakítás lényegében azt jelenti, hogy x és y helyett egy alkalmas lineáris transzformációval a ξ és η új változókat vezetjük be. Ez a lineáris transzformáció jelentheti egyszerűen csak a koordinátarendszer origó körüli elforgatását, de jelenthet áttérést egy általános, ferdeszögű affin koordinátarendszerre.

Amint az a mátrixszámításból ismeretes, a kívánt transzformációhoz első lépésben meg kell határozni az $\mathbf{A}$ mátrix

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$$

karakterisztikus egyenletét és ennek gyökeit, az $\mathbf{A}$ mátrix λ_1, λ_2 sajátértékeit. A transzformációt is, meg a vizsgált szinguláris pont jellegét is ezek a sajátértékek határozzák meg.

A következő esetek lehetségesek:

a.) *Mindkét sajátérték valós és különbözők:* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Ebben az esetben $\mathbf{A}$ diagonálalakra transzformálható. Legyen $\mathbf{u}_1$ a λ_1 -hez és $\mathbf{u}_2$ a λ_2 -hez tartozó sajátvektor. Ezek a

$$(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{u}_1 = \mathbf{0},$$

$$(\lambda_2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszerek nem triviális megoldásaiként adódnak.

Legyen

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2).$$

Mivel $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ lineárisan függetlenek, ezért $\det(\mathbf{U}) \neq 0$ és létezik az $\mathbf{U}^{-1}$ inverz mátrix.

A sajátvektorokat össze lehet foglalni a következőképpen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{u}_1 & \lambda_2 \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{B},$$

ahonnan

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a differenciálegyenletrendszer a transzformáció után így fest:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2 \eta, \end{aligned}$$

ahonnan közvetlenül kapjuk a megoldások paraméteres alakját:

$$\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Ha viszont a differenciálegyenletrendszer egyenleteit egymással elosztva a t paramétert kiköszöböljük, akkor a

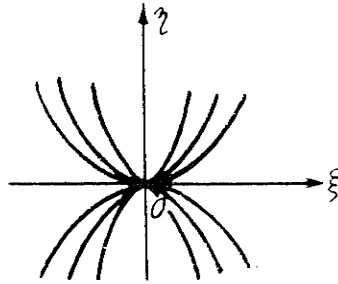
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2 \eta}{\lambda_1 \xi}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletre jutunk, ahonnan az

$$\eta = C' |\xi|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

megoldásokat nyerjük.

Ha most feltesszük, hogy λ_1 és λ_2 azonos előjelűek, azaz $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = k > 0$, akkor az $\eta = C' |\xi|^k$ egyenletből látható, hogy az integrálgörbék mind átmennek a $\xi = 0$, $\eta = 0$ kezdőponton, valamennyien érintik a ξ -tengelyt az origóban. A $\xi = 0$ és az $\eta = 0$ egyenletű egyenesek is megoldásgörbék. A $(0,0)$ szingularis pont úgynevezett *csomópont*.

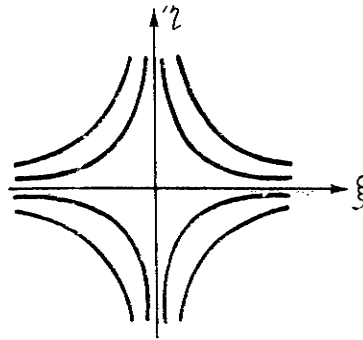


4. ábra

Ha viszont λ_1 és λ_2 különböző előjelűek, azaz $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -k < 0$, akkor az

$$\eta = C|\xi|^{-k}$$

egyenletből látható, hogy az integrálgörbék nem mennek át az origón, a szinguláris ponton, hanem azt elkerülve aszimptotikusan simulnak a ξ - ill. η - tengelyhez, a végtelenben. Kivétel a $\xi = 0$ és $\eta = 0$ megoldásoknak megfelelő két egyenes. A $(0, 0)$ szinguláris pont úgynevezett *nyeregpont*.



5. ábra

b.) A sajátértékek konjugált komplex számok:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= p - qi, \\ \lambda_2 &= p + qi.\end{aligned}$$

(Feltesszük, hogy $p \neq 0$ és $q \neq 0$.)

Annak érdekében, hogy valós alakú megoldásokra jussunk, célszerű még egy lineáris transzformációt alkalmazni:

$$\begin{aligned}\xi &= u + iv, \\ \eta &= u - iv.\end{aligned}$$

Ezzel valós x, y mellett u és v is valósak lesznek. A

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2 \eta}{\lambda_1 \xi}$$

differenciálegyenletből most a következőt nyerjük:

$$\frac{du - idv}{du + idv} = \frac{(p + qi)(u - iv)}{(p - qi)(u + iv)},$$

vagy összevonás és rendezés után:

$$(pv - qu)du = (pu + qv)dv.$$

Ezt még így is írhatjuk:

$$\frac{udu + vdv}{u^2 + v^2} + \frac{p}{q} \frac{-vdu + u dv}{u^2 + v^2} = 0,$$

ahonnan integrálással

$$\ln \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{v}{u} = \ln C$$

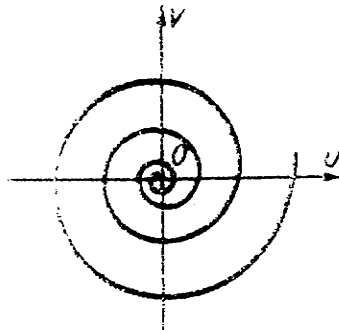
adódik és innen az (u, v) -síkból az

$$\begin{aligned}u &= r \cos \varphi \\ v &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

összefüggésekkel polárkoordinátákra térve át, nyerjük az

$$r = C e^{-\frac{p}{q}\varphi}$$

egyenletet. Ez az egyenlet az (u, v) -síkból logaritmikus spirálisok seregét határozza meg, melyeknek az origó aszimptotikus pontja; mindegyik görbe közeledik a kezdőponthoz ($p > 0, q > 0$ feltételezéssel), anélkül, hogy az érintő eközben valamilyen határhelyezethez közeledne. Mindegyik görbe a $(0, 0)$ pontot végtelen sokszor megkerüli. A szinguláris pont ún. *fókusz* (örvénypont).



6. ábra

c.) A sajátértékek tiszta képzetes számok, egymásnak konjugáltjai:

$$\lambda_1 = -qi ,$$

$$\lambda_2 = qi ,$$

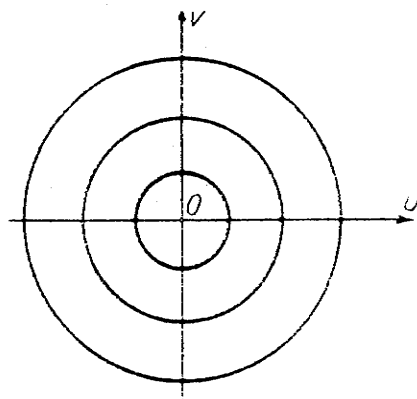
tehát az előző pontban tárgyalt eset azzal a különlegességgel, hogy most $p = 0$ és $q \neq 0$. Így ugyanazzal a gondolatmenettel a következő differenciálegyenletre jutunk:

$$u du + v dv = 0 ,$$

ahonnan viszont az

$$u^2 + v^2 = C$$

egyenletű görbékhez jutunk. A megoldásgörbék serege most zárt görbék serege (az (u, v) -síkbán körök), melyek a szinguláris pontot körülfogják, anélkül, hogy valamelyikük e ponton keresztül menne. A szinguláris pont ún. *centrum* (középpont).



7. ábra

d.) *Egyetlen (kétszeres) valós sajátérték van:*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda .$$

Ebben az esetben (feltesszük, hogy A nem diagonálmátrix) A -t nem lehet hasonlósági transzformációval diagonalizálni. λ -hoz csak egy sajátvektor tartozik (nincsen több tőle lineárisan független sajátvektor), ugyanis a $\lambda E - A$ mátrix rangja 1. Legyen ez a sajátvektor u_1 , azaz

$$A u_1 = \lambda u_1 .$$

Lehet azonban találni egy u_1 -től lineárisan független olyan u_2 vektort, hogy az

$$A u_2 = u_1 + \lambda u_2$$

egyenlet fennáljon. Mindkét egyenletet összefoglalva, írhatjuk:

$$\begin{aligned} A (u_1 \ u_2) &= (A u_1 \ A u_2) = (\lambda u_1 \ u_1 + \lambda u_2) = \\ &= (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

tehát ebben az esetben az A -hoz legegyszerűbb, hasonlósági transzformációval előállítható mátrix a következő lesz:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

A transzformáció után tehát a következő differenciálegyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda \xi + \eta , \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda \eta . \end{aligned}$$

Először a második egyenletet kell megoldanunk:

$$\eta = C_1 e^{\lambda t}$$

és ezt az elsőbe helyettesítve:

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi + C_1 e^{\lambda t},$$

kapjuk, hogy

$$\xi = C_1 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}.$$

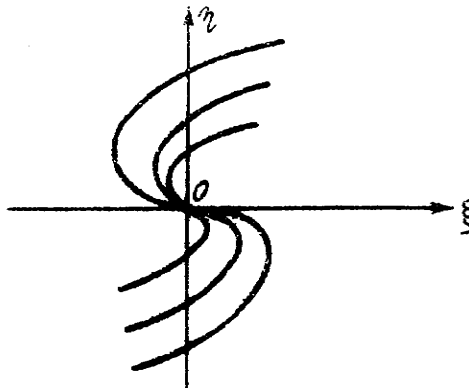
Tehát a megoldások paraméteres alakban:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= C_1 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}, \\ \eta(t) &= C_1 e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Ha viszont a t paramétert kiköszöböljük, akkor a következő megoldásokat nyerjük:

$$\xi = \frac{1}{\lambda} \eta (\ln(|\eta|) + C).$$

Ezen kívül még $\eta = 0$ is megoldás.



8. ábra

Ezúttal a megoldásgörbék áthaladnak az origón és érintőjük itt a ξ -tengely. A szinguláris pont ismét *csomópont*.

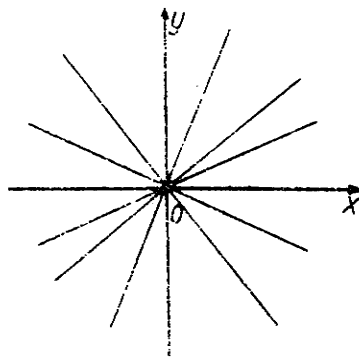
c.) Végül tegyük fel, hogy $A = \lambda E$. Ekkor lineáris transzformáció nélkül, az eredeti egyenlet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

alakú, ahonnan az

$$y = Cx$$

általános megoldás adódik. Valamennyi megoldásgörbe átmegy az origón határozott "érintő-iránnyal", de – ellentétben az eddigi esetekkel – ezek az érintő-merevedségeket minden lehetséges valós értéket felvehetnek. A szinguláris pont most is *csomópont*.



9. ábra

13.5. Görbesereg izogonális trajektóriái

13.5.1. Az izogonális trajektóriák problémája

Legyen adva két görbesereg a következő egyenletekkel:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0, \\ g(x, y, \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Ezekben az egyenletekben α illetve β tetszőleges állandó paraméterek. α egyes értékei mellett kapjuk az első görbesereg egyes görbéit; β egyes értékei mellett pedig a második görbesereg egyes görbéit. Ha a második görbesereg mindegyik görbéje ugyanakkora ($\omega = \text{állandó}$) szög alatt metszi az első görbesereg valamennyi görbét, akkor azt mondjuk, hogy a második görbesereg egyes görbéi az elsőnek *izogonális trajektóriái*. Ha speciálisan ez a metszési szög derékszög, azaz $\omega = \frac{\pi}{2}$, akkor az izogonális trajektóriákat *ortogonális trajektóriáknak* nevezzük. Pl. egy kétdimenziós potenciális vektoreloszlás esetén a vektoreloszlás vektorvonalai az ekvipotenciális vonalak ortogonális trajektóriái.

Jelölje a két görbesereg egy-egy görbéjének a metszéspontjában az érintők irányszögét φ ill. ψ . Fennáll, hogy

$$\varphi = \psi - \omega,$$

azaz az érintők iránytangense között a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{tg} \omega}$$

összefüggés áll fenn.

Ha speciálisan $\omega = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi}.$$

13.5.2. Adott görbesereg izogonális trajektóriáinak meghatározása.

Mindenekelőtt az adott egyparaméteres görbsereg egyenletéből kell egy a görbesereget jellemző differenciálegyenletet előállítani. Az

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

adott egyenletből és az ennek x -szerinti deriválásával nyert

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0$$

egyenletből kell az α paramétert kiküszöbölni. Ha ez sikerül, akkor nyerjük az adott görbesereg

$$F(x, y, y') = 0$$

differenciálegyenletét. Az izogonális trajektóriák differenciálegyenletét ebből úgy nyerjük, hogy y' helyére az

$$\frac{y' - \operatorname{tg} \omega}{1 + y' \operatorname{tg} \omega}$$

kifejezést írjuk:

$$F\left(x, y, \frac{y' - \operatorname{tg} \omega}{1 + y' \operatorname{tg} \omega}\right) = 0.$$

Ha speciálisan $\omega = \frac{\pi}{2}$, akkor az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Példák:

1.) Határozzuk meg az

$$y = ax$$

egyenletű egyenessereg izogonális trajektóriáit, ha a két görbesereg egyes görbéinek a metszési szöge $\omega \neq \frac{\pi}{2}$. (Legyen a továbbiakban $\operatorname{tg} \omega = k$.)

Az egyenessereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Az izogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$\frac{y' - k}{1 + ky'} = \frac{y}{x},$$

vagy

$$xy' - kx = y + kyy'.$$

Ezt még így is lehet írni:

$$xdy - ydx = k(xdx + ydy).$$

Ennek a (nem egzakt) differenciálegyenletnek egy integráló tényezője:

$$\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Ha ezzel végigszorozunk és az egyenletet átrendezzük, akkor nyerjük az

$$\frac{x \cdot dx + y \cdot dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{k} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

egzakt differenciálegyenletet. Ennek az általános megoldása:

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{k} \arctg \frac{y}{x} + \ln C.$$

Polárkoordinátákra áttérve ezt meg így is írhatjuk:

$$r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

A keresett görbék tehát logaritmikus spirálisok.

Ha most speciálisan $\omega = \frac{\pi}{2}$, akkor az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x},$$

vagy a változók szétválasztása után:

$$xdx + ydy = 0.$$

Ennek az általános megoldása:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Ez pedig origó középpontú koncentrikus körök egyenlete ($C > 0$).

2.) Tegyük fel azt, hogy homogén testben a stacionárius hőáramlás az (x, y) -síkal párhuzamos síkokban azonosan folyik le (síkáramlás) és így a hőáramlási viszonyok leírására elegendő az (x, y) -síkból lejártszó folyamatot vizsgálni. Legyen az egyenlő hőmérsékletű pontokat összekötő görbék (izotermák) egyenlete:

$$\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{C} = 1 \quad (\text{ahol most } C > 0).$$

Határozzuk meg a hőáramlás áramvonalainak (az adott görbék ortogonális trajektóriáinak) az egyenletét.

Az izotermák konfokális ellipszisek, amelyeknek a fókuszai az $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ pontok. Ennek a görbseregnek a differenciálegyenletét az

$$\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{C} = 1 ,$$

$$\frac{x}{1+C} + \frac{yy'}{C} = 0$$

egyenletekből, a C paraméter kiküszöbölésével nyerjük. A második egyenletből:

$$C = -\frac{yy'}{yy' + x}$$

és így

$$1 + C = \frac{x}{yy' + x} .$$

Ha ezeket behelyettesítjük az ellipszisek megadott egyenletébe, átrendezés után nyerjük a következő differenciálegyenletet:

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - xy = 0 .$$

A hőáramlás áramvonalainak a differenciálegyenletét ebből úgy kapjuk, hogy y' helyébe $(-\frac{1}{y'})$ -t írunk. Így lesz

$$\frac{xy}{y'^2} - \frac{x^2 - y^2 - 1}{y'} - xy = 0 ,$$

vagy $(-y'^2)$ -vel végigszorozva:

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - xy = 0 ,$$

vagyis ugyanazt a differenciálegyenletet kapjuk. Ennek az a magyarázata, hogy mivel az adott differenciálegyenlet y' -ben másodfokú, azért minden ponton két megoldásgörbe halad át, melyek közül az egyik ellipszis ($C > 0$), a másik pedig egy konfokális hiperbolasereg egyik görbéje ($-1 < C < 0$). A konfokális hiperbolák a konfokális ellipszisek ortogonális trajektóriái. Tehát a keresett áramvonalak egyenlete:

$$\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{C} = 1 , \quad \text{ahol most} \quad -1 < C < 0 .$$

13.6. Elsőrendű differenciálegyenlet közelítő megoldása

13.6.1. Közelítő megoldás hatványsor részletösszegével.

Igen sok esetben a differenciálegyenlet megoldására előnyösen alkalmazható az az eljárás, hogy a megoldást hatványsor alakjában keressük. Sokszor a megoldás teljes hatványsorának előállítása gyakorlati nehézségekbe ütközik és megelégszünk azzal, hogy a hatványsornak csak valamely részletösszegét határozzuk meg. Tehát ez a módszer közelítő megoldási módszerként is használható.

A hatványsor alakú megoldás formális előállítására általában kétféle utat szoktak követni. Az egyik út az, hogy felírják a várható hatványsort határozatlan együtthatókkal és az együtthatókat úgy határozzák meg, hogy a differenciálegyenletbe való behelyettesítés után az azonos hatványú tagok együtthatóit összehasonlítva annyi feltételi egyenletet fogalmaznak meg, ahány együtthatót meg akarnak határozni. Ez a *határozatlan együtthatók módszere*. A másik út az, hogy *Taylor-sor alakjában* keresik a megoldást úgy, hogy a differenciálegyenletből sorozatos deriválással előállítják az ismeretlen függvény különböző rendű deriváltjait, majd az előírt kezdeti értékek felhasználásával rekurzív úton kiszámítják a Taylor-sor (illetve Taylor-polinom) együtthatóit.

Mindkét módszer esetében felmerül az az alapvető probléma, hogy a formálisan előállított hatványsor mikor konvergens és ha konvergens, mikor állítja elő a keresett megoldást. Ennek a kérdésnek az eldöntése utólagos vizsgálatot igényel. Anélkül, hogy a részletekbe bocsátkoznánk, bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt:

Ha az

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték-feladatban szereplő $f(x, y)$ függvény az

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$$

tartományban folytonos, korlátos, azaz

$$|f(x, y)| \leq M$$

és analitikus, azaz

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

alakban konvergens hatványsorral előállítható, akkor az adott differenciálegyenletnek az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő $y(x)$ megoldása az x_0 hely környezetében a konvergens

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

hatványsor alakjában előállítható, ahol a konvergencia legalább az

$$|x - x_0| < \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

intervallumban biztosítva van.

A határozatlan együtthatók módszerénél az ismeretlen c_k a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k \cdot (x - x_0)^{k-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \right\}^j$$

azonosságból az $(x - x_0)$ két oldalon szereplő azonos kitevőjű hatványainak együtthatóiból összehasonlítással felírható feltételi egyenleteket fogalmazunk meg:

$$\begin{aligned} 1 \cdot c_1 &= a_{00} \\ 2 \cdot c_2 &= a_{10} + a_{01}c_1 \\ 3 \cdot c_3 &= a_{20} + a_{11}c_1 + a_{01}c_2 + a_{02}c_1^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből kell az ismeretlen c_k -kat meghatározni. Ha viszont a megoldást Taylor-sor alakjában keressük, akkor mivel

$$y' = f(x, y),$$

azért innen

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y', \\ y''' &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' \end{aligned}$$

és így tovább.

A Taylor-sor

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

együtthatóiban szereplő $y^{(k)}(x_0)$ derivált értékek az $y', y'', y''', \dots$ -re kapott kifejezésekből számítható egymásután az x_0, y_0 kezdeti értékeknek és a már kiszámított deriváltértékeknek a behelyettesítése útján.

Példaként határozzuk meg az

$$y' = x + y$$

differenciálegyenlet általános megoldását hatványsor alakjában.

Feltesszük azt, hogy a megoldást az

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

hatványsor adja, amely bizonyos $|x| \leq \rho$ intervallumban egyenletesen konvergens és így

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

Ez pedig x -ben azonosan csak akkor állhat fenn, ha x megfelelő hatványainak együtthatói mindkét oldalról megegyeznek, azaz

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, \\ 2a_2 &= a_1 + 1, \\ 3a_3 &= a_2, \\ 4a_4 &= a_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, \\ a_2 &= \frac{a_0 + 1}{2!}, \\ a_3 &= \frac{a_0 + 1}{3!}, \\ &\dots \end{aligned}$$

és általában

$$a_n = \frac{a_0 + 1}{n!} \quad (n \geq 2).$$

Tehát

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_0 x + \frac{a_0 + 1}{2!} x^2 + \frac{a_0 + 1}{3!} x^3 + \frac{a_0 + 1}{4!} x^4 + \dots + \frac{a_0 + 1}{n!} x^n + \dots = \\ &= (a_0 + 1) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) - x - 1 = \\ &= (a_0 + 1)e^x - x - 1. \end{aligned}$$

Minden x -re konvergens, ismert függvény hatványsorára jutottunk. Ha még $a_0 + 1$ helyett tetszőleges C állandót írunk, akkor végeredményben:

$$y(x) = Ce^x - x - 1.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk akkor, ha a megoldást Taylor-sor alakjában keressük.

Feltesszük először azt, hogy $y(0) = a_0$. Ekkor az adott differenciálegyenlet szerint

$$y'(0) = a_0.$$

Képezzük ezután az ismeretlen függvény magasabbrendű deriváltjait a differenciálegyenletet deriválva:

$$\begin{aligned} y''(x) &= 1 + y'(x), \\ y'''(x) &= y''(x), \\ y^{IV}(x) &= y'''(x), \\ &\dots \\ y^{(n)}(x) &= y^{(n-1)}(x), \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

Behelyettesítve az $x = 0$, $y(0) = y'(0) = a_0$ értékeket:

$$\begin{aligned} y''(0) &= 1 + a_0, \\ y'''(0) &= 1 + a_0, \\ y^{IV}(0) &= 1 + a_0, \\ &\dots \\ y^{(n)}(0) &= 1 + a_0, \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Tehát a keresett Taylor-sor:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_0 x + \frac{a_0 + 1}{2!} x^2 + \frac{a_0 + 1}{3!} x^3 + \frac{a_0 + 1}{4!} x^4 + \dots + \frac{a_0 + 1}{n!} x^n + \dots = \\ &= (a_0 + 1) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) - x - 1 = \\ &= (a_0 + 1) e^x - x - 1, \end{aligned}$$

vagyis végeredményben:

$$y(x) = C e^x - x - 1.$$

13.6.2. A Runge-Kutta-féle közelítő eljárás

Legyen a megoldandó differenciálegyenlet:

$$y' = f(x, y)$$

és az előírt kezdeti feltétel:

$$y(x_0) = y_0.$$

Választunk egy $h > 0$ lépéstávolságot és ezzel egy

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

abszcisszasorozatot képezünk. Az x_i helyeken az ismeretlen $y(x)$ függvény helyettesítési értékeit jelölje

$$y_i = y(x_i).$$

Ezeknek a közelítő értékek kívánjuk meghatározni, mégpedig oly módon, hogy y_i -ből egy Δy_i korrekciós tag hozzáadásával képezzük y_{i+1} -et:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Az ún. Euler-féle "törtvonalmódszernél"

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + H$$

lenne, azonban ezzel a közelítéssel a H hiba általában túlságosan nagyra adódnék. Éppen ezért ezt a módszert különféle módon szokták javítani. Ezek közül a javított eljárások közül a gyakorlatban leginkább a Runge-Kutta-féle eljárást szokták alkalmazni.

A Runge-Kutta-féle eljárásnak az a lényege, hogy az x_i helyhez tartozó y_i közelítő függvényértékből az $x_{i+1} = x_i + h$ helyhez tartozó y_{i+1} közelítő függvényértéket a Δy_i korrekciós tag hozzáadásával számítjuk, ahol

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}).$$

Az egyes $k_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) korrekciós tagokat, amelyeknek a súlyozott számtani középértéke adja Δy_i -t a következőképpen lehet meghatározni:

$$\begin{aligned}k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}).\end{aligned}$$

Be lehet azt bizonyítani, hogy az

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

közelítő érték hibája a lépéstávolság ötödik hatványával lesz arányos, azaz a hiba nagyságrendje: $O(h^5)$.

Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, megjegyezzük azt, hogy a Runge-Kutta-féle eljárás abban az esetben, ha a differenciálegyenletben szereplő f függvény nem függ y -től és csak x -nek a függvénye, a numerikus integrálásnál megismert Simpson-féle eljárással ekvivalens. Ha ugyanis

$$y' = f(x),$$

akkor

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x), \\k_2 &= k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}\right), \\k_4 &= hf(x + h)\end{aligned}$$

és ekkor

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + h) - y(x) = \int_x^{x+h} f(x) dx = \\&= \frac{h}{6} \left(f(x) + 4f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(x + h) \right) + O(h^5),\end{aligned}$$

amint az a Simpson-formulával adódik.

Példaként legyen

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

és $h = 0,2$.

Csak egy lépést számoljunk végig:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(0; 1) = 0,2(0 + 1) = 0,2, \\k_2 &= h \cdot f(0,1; 1,1) = 0,2(0,1 + 1,1) = 0,24 \\k_3 &= h \cdot f(0,1; 1,12) = 0,2(0,1 + 1,12) = 0,244, \\k_4 &= h \cdot f(0,2; 1,244) = 0,2(0,2 + 1,244) = 0,288.\end{aligned}$$

Ezekkel

$$y(0, 2) \approx 1 + \frac{1}{6}(0, 2 + 2 \cdot 0, 24 + 2 \cdot 0, 244 + 0, 2888) = 1, 2428 .$$

13.7. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszer

13.7.1. Bevezetés

Az eddigiekben tárgyalt elsőrendű közönséges differenciálegyenleteket két irányban lehet általánosítani:

a.) a derivált rendszámát egynek hagyva, egy helyett két egyváltozós ismeretlen függvényt tekintünk és persze egy helyett két egyenletet adunk meg. Így jutunk pl. az $y(x)$ és $z(x)$ ismeretlen függvényekre vonatkozó, két elsőrendű differenciálegyenletből álló következő elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszerre:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y, z) , \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z) .\end{aligned}$$

b.) az ismeretlen függvény marad $y(x)$, viszont a differenciálegyenletben szerepeltetjük az y' elsőrendű derivált mellett az y'' másodrendű deriváltat is. Így jutunk pl. az egy ismeretlen függvényt tartalmazó következő másodrendű közönséges differenciálegyenletre:

$$y'' = F(x, y, y') .$$

A két feladat ekvivalens egymással. Pl. a másodrendű differenciálegyenlet így írható át elsőrendű rendszerre:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= z , \\ \frac{dz}{dx} &= F(x, y, z) .\end{aligned}$$

Általában egy n -edrendű egy ismeretlen függvényt tartalmazó differenciálegyenlet ekvivalens módon átírható n elsőrendű differenciálegyenletből álló rendszerre. Éppen ezért a következőkben magasabbrendű differenciálegyenletek helyett elsőrendű differenciálegyenletrendszerekkel fogunk foglalkozni és tételeinket ilyen rendszerekre fogjuk kimondani.

Magasabbrendű differenciálegyenletekből álló rendszer esetén is meg lehet adni az ekvivalens elsőrendű egyenletekből álló rendszert.

Felmerülhet az a kérdés, hogy lehet-e geometriailag szemléltetni egy differenciálegyenletrendszert, illetőleg egy magasabbrendű differenciálegyenletet?

Erre a következőt lehet válaszolni:

A háromdimenziós térben maradó szemléltetést lehet adni a két ismeretlen függvényt tartalmazó elsőrendű differenciálegyenletrendszernek. Jelentsenek ugyanis

x, y, z derékszögű koordinátákat. Akkor a

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z)\end{aligned}$$

differenciálegyenletrendszer a tér $P(x, y, z)$ pontjához két számot rendel. $\frac{dy}{dx}$ jelentheti az (x, y) -síkbán egy vonalelem iránytényezőjét, $\frac{dz}{dx}$ pedig az (x, z) -síkbán egy iránytényezőt. Ez a két szám egy térbeli iránymezőt határozhat meg: a P ponthoz tartozó térbeli vonalelem (x, y) - és (x, z) -síkon lévő vetületeinek iránytényezői a $\frac{dy}{dx}$, ill. $\frac{dz}{dx}$ számok. A differenciálegyenletrendszert integrálni (megoldani) annyit jelent, mint megadni mindazokat az

$$\begin{aligned}y &= y(x), \\ z &= z(x)\end{aligned}$$

egyenletrendszerrel meghatározott térgörbék, amelyek minden pontjukban érintik az előbbi térbeli iránymező vonalelemeit. Ha a differenciálegyenletrendszerben szereplő $f(x, y, z)$ és $g(x, y, z)$ függvények bizonyos feltételeknek eleget tesznek, akkor a megoldások sokaságából egy egyednek a kiválasztása az

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0$$

kezdőértékek előírásával érhető el. A kezdeti feltételeknek megfelelő megoldás annak a térgörbének a kiválasztását jelenti az integrálgörbék (megoldásgörbék) közül, amely a megadott $P_0(x_0, y_0, z_0)$ kezdőponton átmegy.

Ez a tény az

$$y'' = F(x, y, y')$$

másodrendű differenciálegyenlettel ekvivalens

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= F(x, y, z)\end{aligned}$$

rendszerre azt mondja, hogy itt x_0 -hoz az $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ értékeket lehet kezdeti feltételként előírni.

Az $y'' = F(x, y, y')$ differenciálegyenletnek pusztán az (x, y) -síkbán már nincs a megfelelő rendszerhez hasonló egyszerű szemléltetése. Egy kezdetiértékfeladat esetében legfeljebb annyit lehet mondani, hogy most egy pontban megadunk egy érintőt (érintőmeredekséget) és a differenciálegyenletből meghatározva a megfelelő $y'_0 = F(x_0, y_0, y'_0)$ másodrendű derivált-értéket, akkor ezzel meg van határozva a megadott ponton átmenő, adott vonalelemhez érintőlegesen simuló integrálgörbének e pontbeli görbülete (görbületi sugara, görbületi középpontja) és akkor ennek megfelelően lehetne e pontban egy körívet rajzolni, amely kis szakaszon helyettesíthetné a megfelelő integrálgörbét.

Sok esetben előnyös és mechanikai interpretációra ad lehetőséget, ha pl. a

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z)\end{aligned}$$

elsőrendű differenciálegyenletrendszert átírjuk "szimmetrikus" alakba. Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy az adott differenciálegyenletrendszer így is írható:

$$dx = \frac{dy}{f(x, y, z)} = \frac{dz}{g(x, y, z)}.$$

Vagy ha itt minden tagot a "szimmetria" kedvéért ugyanazzal a $P(x, y, z)$ függvénnyel végigosztjuk és a jelölés egyszerűsítése kedvéért feltesszük, hogy

$$\begin{aligned}Q(x, y, z) &= P(x, y, z) \cdot f(x, y, z), \\ R(x, y, z) &= P(x, y, z) \cdot g(x, y, z),\end{aligned}$$

akkor írhatjuk, hogy

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Ha feltesszük azt, hogy P, Q, R egy háromdimenziós térbeli vektoreloszlás vektorának a koordinátái, azaz

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

(itt $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$), akkor ez a differenciálegyenletrendszer a vektoreloszlást szemléltető vektorvonalak (áramvonalak, erővonalak) differenciálegyenletrendszerének tekinthető.

Ha még bevezetünk egy t paramétert és a differenciálegyenletrendszerünket bővítjük, akkor a következő "szimmetrikus" alakra jutunk:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= R(x, y, z).\end{aligned}$$

Ugyanezt tömören, vektorosan így is lehet írni:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}).$$

E bővített differenciálegyenletrendszer megoldásai, az integrálgörbék (megoldásgörbék) a következő paraméteres egyenletrendszert fogják adni:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t).\end{aligned}$$

Ha ebből az egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölhető, akkor visszajutunk az

$$\begin{aligned}y &= y(x), \\z &= z(x),\end{aligned}$$

egyenletrendszernek megfelelő $y(x)$, $z(x)$ megoldásokhoz.

Ha a t paramétert az idővel azonosítjuk, akkor a differenciálegyenletrendszernek kinematikai jelentést lehet tulajdonítani: egy mozgó pont a tér egyes pontjaiban a P, Q, R megszabta sebességgel mozog.

13.7.2. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszer Cauchy-féle normálalakja.

Mindaz, amit a bevezetésben két ismeretlen függvényt tartalmazó elsőrendű differenciálegyenletrendszerről, illetve egy ismeretlen függvényt tartalmazó másodrendű differenciálegyenletről mondtunk, megfelelő változtatásokkal általánosítható n ismeretlen függvényt tartalmazó elsőrendű differenciálegyenletrendszerre, illetve egy ismeretlen függvényt tartalmazó n -edrendű differenciálegyenletre.

Az elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszer ún. Cauchy-féle normálalakja a következő:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Egy n -edrendű explicit differenciálegyenlet:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

és az ezzel ekvivalens elsőrendű differenciálegyenletrendszer:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= F(x, y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}$$

A mechanikai és egyéb fizikai alkalmazásokra való tekintettel egy n ismeretlen függvényt tartalmazó elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszernek a következő interpretációt lehet adni:

A független változót x helyett jelöljük t -vel és ez jelentse az időt. Az ismeretlen függvényeket jelöljük $x_1, x_2, \dots, x_n$ és ezeknek a függő változóknak értékrendszereit tekintjük az n -dimenziós tér pontjai koordinátáinak. Ezt az n -dimenziós teret sokszor *fázistérnek (állapottérnek)* nevezik.

A differenciálegyenletrendszer i -edik egyenlete tehát a következő alakú:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Azt mondjuk, hogy ez a differenciálegyenletrendszer egy-egy t időpillanatban és a fázistér valamely $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontjában meghatározza egy mozgó pont sebességének $f_1, f_2, \dots, f_n$ komponenseit. Az n -dimenziós tér vizsgált tartományát, amelyben a megoldás egzisztenciájának és unicitásának a feltételei teljesülnek, úgy képzelhetjük el, hogy azt folytonos, mozgó közeg tölti ki és a közeg részecskéinek a sebességét a differenciálegyenletrendszer fejezi ki.

A differenciálegyenletrendszer megoldásának a problémája – e felfogás szerint – abban áll, hogy meg kell határozni az $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinátákat, mint a t idő függvényeit, ha meg vannak adva a $t = t_0$ kezdő pillanatban a koordináták kezdeti értékei: $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$, vagyis ez azt jelenti, hogy meg kell határozni azokat az $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ függvényeket, melyek minden szóbjöhethető t időpillanatban megadják annak a mozgó pontnak a helyzetét, amely a t_0 kezdő pillanatban a $P_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ kezdeti pontban volt.

Egy ilyen interpretáció mellett az adott differenciálegyenletrendszert *dinamikai rendszernek*, minden megoldást pedig *mozgásnak* nevezhetünk. Azt a görbét, melyet a pont mozgása közben leír, a *mozgás pályájának* lehet nevezni. A mozgás pályájának egy paraméteres egyenletrendszere (a t idő a paraméter):

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Az alkalmazások szempontjából fontos az a speciális eset, amelynél a differenciálegyenletrendszer jobboldali függvényei nem függenek expliciten a t időtől (*autonóm rendszer*):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek a közegnek egy *stacionárius mozgását* írják le: a tér egyes pontjaiban a sebesség független az időtől és ezért a mozgás egész tartama alatt a kérdéses pontokban a sebesség állandó marad. Stacionárius mozgás esetében minden pályán végtelen sok mozgás mehet végbe; az összes olyan közegrészecskék, melyek a kezdeti időpontban egy adott pályán helyezkedtek el, a fázistérben egy és ugyanazt a vonalat írják le, ezen vonal

mentén egymásután haladva. Ezeket a pályákat gyakran *áramvonalaknak* (vagy általában *trajektóriáknak*) szokás nevezni.

Az autonóm rendszer vizsgálatánál fontos megállapítani, hogy mely pontokban lesz valamennyi sebességkomponens zérus. Egy ilyen pontot, amelyben tehát valamennyi f_i helyettesítési értéke zérus, az autonóm rendszer *kritikus (szinguláris) pontjának*, vagy *egyensúlyi pontjának* hívják. Az ilyen egyensúlyi pontok esetében azt vizsgálják, hogy valamilyen értelemben ez az *egyensúly stabilis-e*, vagy sem.

13.7.3. A megoldás egzisztenciájának és unicitásának elégséges feltételei.

Legyen adva a

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots &\dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}$$

elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszer a Cauchy-féle normálalakban. x a független változó, $y_1, y_2, \dots, y_n$ pedig az ismeretlen függvények. Legyen adva a kezdeti értékeknek egy $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ értékrendszere. Az egyenletek jobboldali f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) függvényei tegyenek eleget a következő feltételeknek:

Az $n + 1$ dimenziós T tartományban, amelyet az

$$|x - x_0| < a, \quad |y_i - y_{i0}| < b, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenlőtlenségek határoznak meg.

- a.) valamennyi f_i folytonos;
- b.) és korlátos:

$$|f_i| \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ahol $M > 0$ és állandó;

c.) valamennyi f_i az $y_1, y_2, \dots, y_n$ argumentumokra nézve kielégíti a Lipschitz-feltételt, azaz ha egy adott x érték mellett az $y_1, y_2, \dots, y_n$ és $y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \dots, y_n + \Delta y_n$ értékrendszerek a T tartományhoz tartoznak, akkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned}&|f_i(x, y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \dots, y_n + \Delta y_n) - f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \\ &\leq K(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \dots + |\Delta y_n|), \quad i = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

ahol $K > 0$ és állandó.

(Megjegyezzük azt, hogy ha a T tartományban léteznek és folytonosak a $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, ($i, k = 1, 2, \dots, n$) parciális deriváltak és ezek korlátosak, azaz $\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right| \leq K$, akkor biztosan teljesül a Lipschitz-feltétel).

Mármost, ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor az adott differenciálegyenletrendszernek egy és csakis egy olyan

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

megoldásrendszere létezik, amely értelmezve van, ha

$$|x - x_0| \leq h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

és az $x = x_0$ helyen felveszi az előírt

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$$

kezdeti értékeket.

A tétel bizonyítására alkalmazni lehet a *szukcesszív approximációk (sorozatos közelítések)* Picard-féle módszerét. Zérusrendű közelítésnek az adott y_{i0} kezdeti értéket választjuk. Az elsőrendű közelítések:

$$y_{i1}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(\xi, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A másodrendű közelítések az elsőrendűek felhasználásával adódnak:

$$y_{i2}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(\xi, y_{11}(\xi), y_{21}(\xi), \dots, y_{n1}(\xi)) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

és általában az $(m-1)$ -edrendű közelítések felhasználásával, az m -edrendű közelítések:

$$y_{im}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(\xi, y_{1,m-1}(\xi), y_{2,m-1}(\xi), \dots, y_{n,m-1}(\xi)) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Az elsőrendű, egy ismeretlen függvényre vonatkozó differenciálegyenletnél követett gondolatmenet szerint belátható, hogy az $|x - x_0| \leq h$ intervallumban a kapott közelítések sorozatai egyenletesen konvergálnak az adott kezdeti feltételeknek megfelelő megoldásokhoz:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_{im}(x) = y_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Fennáll, hogy

$$y_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(\xi, y_1(\xi), y_2(\xi), \dots, y_n(\xi)) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Az m -edik lépésben nyert közelítésnek az egzakt megoldástól való eltérésére a következő becslés érvényes:

$$|y_{im}(x) - y_i(x)| \leq \frac{M}{nK} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\{nK|x - x_0|\}^k}{k!}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

hacsak $|x - x_0| \leq h$.

13.8. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletrendszer állandó együtthatókkal

13.8.1. Homogén lineáris differenciálegyenletrendszer.

Legyen adva a következő elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletrendszer:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n,\end{aligned}$$

ahol az a_{ik} együtthatók megadott állandók, $y_1, y_2, \dots, y_n$ pedig az x független változó ismeretlen függvényei. Keressük a differenciálegyenletrendszernek azt a partikuláris megoldását, mely eleget tesz az

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$$

kezdeti feltételnek. Itt $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ megadott állandók. Esetünkben a differenciálegyenletek jobboldalain álló függvényekre

$$|x - x_0| < \infty, \quad |y_i - y_{i0}| < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

mellett teljesülnek a megoldás egzisztenciáját és unicitását biztosító feltételek.

Vezessük be az ismeretlen függvényekből álló

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

ismeretlen oszlopvektort és az adott állandó együtthatókból álló

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

n -edrendű kvadratikus mátrixot. Az adott kezdeti feltételeknek megfelel az

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

konstans oszlopvektor.

(Még megjegyezzük azt, hogy vektor, illetve mátrix deriváltján, illetve integrálján azt a vektort, illetve mátrixot fogjuk érteni, amelynek az egyes elemeit az eredeti vektor, illetve mátrix elemek deriváltja, illetve integrálja alkotja.)

Feladatunkat ekkor röviden, mátrixalakban így lehet fogalmazni:

Megoldandó a

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}$$

homogén lineáris mátrix-differenciálegyenlet, az előírt $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltétel mellett.

A megoldás előállítására alkalmazzuk a Picard-féle szukcesszív approximációk módszerét. Figyelembe véve azt, hogy az adott differenciálegyenlettel, az előírt kezdeti feltétel mellett ekvivalens az

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{A} \mathbf{y}(\xi) d\xi$$

integrálegyenlet, képezzük a következő iterációsorozatot:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{A} \mathbf{y}_0 d\xi, \\ \mathbf{y}_2(x) &= \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{A} \mathbf{y}_1(\xi) d\xi, \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_m(x) &= \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{A} \mathbf{y}_{m-1}(\xi) d\xi, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ezt azonban így is írhatjuk, hiszen az integrálokat – $\mathbf{A}$ = állandó miatt – egymásután elvégezhetjük:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= \{\mathbf{E} + \mathbf{A} \cdot (x - x_0)\} \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{y}_2(x) &= \left\{ \mathbf{E} + \mathbf{A} \cdot \frac{(x - x_0)}{1!} + \mathbf{A}^2 \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} \right\} \mathbf{y}_0, \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_m(x) &= \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{\mathbf{A}^k \cdot (x - x_0)^k}{k!} \right\} \mathbf{y}_0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{E}$ az n -edrendű egységmátrix és megállapodás szerint $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$.

Mivel pedig a megoldás egzisztenciájára és unicitására vonatkozó tétel alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_m(x) = \mathbf{y}(x)$$

a differenciálegyenletrendszer adott kezdeti feltételeknek megfelelő egzakt megoldása, végeredményként írhatjuk:

$$y(x) = \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{A^k \cdot (x - x_0)^k}{k!} \right\} y_0 ,$$

azaz

$$y(x) = e^{A \cdot (x - x_0)} y_0 .$$

A megoldás tehát úgy állt elő, hogy a kezdeti feltételeket tartalmazó $y_0 = y(x_0)$ oszlopvektort kell szorozni egy bizonyos, x -től függő mátrix-függvénnyel, amely a szukcesszív approximációk iteráció-sorozatában szereplő, x_0 -tól x -ig kijelölt iterált integrálok végtelen soraként áll elő. Ez – bizonyíthatóan – általánosságban is így van, akkor is, ha az együtthatókból képezett A mátrix elemei nem állandók, hanem x -nek megadott folytonos függvényei. Erre utal az

$$y(x) = \underline{\Omega}|_{x_0}^x y(x_0)$$

jelölés.

Az $\underline{\Omega}|_{x_0}^x$ kvadratikus mátrixot, amely az általunk vizsgált speciális esetben ($A =$ állandó) $e^{A \cdot (x - x_0)}$, az adott homogén lineáris differenciálegyenletrendszer *rezolvens mátrixának* fogjuk nevezni. (Szokták még *matrizánsnak* is nevezni.)

Vizsgáljuk meg a következőkben ennek a rezolvens mátrixnak néhány (általános esetben is érvényes) tulajdonságát.

13.8.2. A rezolvens mátrix néhány tulajdonsága.

a.) A rezolvens mátrix nem szinguláris, azaz

$$\det \left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x \right) \neq 0$$

és így létezik az

$$\left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x \right)^{-1}$$

inverz mátrix.

Ennek igazolása többféleképpen is lehetséges.

Először is az nyilvánvaló, hogy ha az y ismeretlen függvénynek az x helyhez tartozó helyettesítési értékét írjuk elő kezdeti feltételnek és az x_0 helyen keressük a megoldást, akkor fennáll:

$$y(x_0) = \underline{\Omega}|_x^{x_0} y(x) .$$

Tehát

$$y(x) = \underline{\Omega}|_{x_0}^x \underline{\Omega}|_x^{x_0} y(x) ,$$

azaz

$$\left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x \right)^{-1} = \underline{\Omega}|_x^{x_0}$$

és ez azt jelenti, hogy a rezolvens mátrix inverzét egyszerűen úgy nyerjük, hogy a rezolvens mátrix előállítására szolgáló iterációsorozatban valamennyi integrálnál a határokat felcseréljük, vagy ami ezzel ekvivalens, valamennyi integrálnál a határokat megtartva előjelet váltunk.

Az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszerrel ez egyszerűen azt jelenti, hogy

$$\left(e^{\mathbf{A} \cdot (x-x_0)} \right)^{-1} = e^{-\mathbf{A} \cdot (x-x_0)}.$$

Másképpen okoskodva, legyen a rezolvens mátrix részletesen kiírva a következő:

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = \begin{pmatrix} \omega_{11}(x) & \omega_{12}(x) & \dots & \omega_{1n}(x) \\ \omega_{21}(x) & \omega_{22}(x) & \dots & \omega_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1}(x) & \omega_{n2}(x) & \dots & \omega_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Képezzük most a rezolvens mátrix determinánsának, $\det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x)$ -nek az x -szerinti deriváltját. Ez n darab determináns összege lesz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) \right) &= \begin{pmatrix} \omega'_{11}(x) & \omega_{12}(x) & \dots & \omega_{1n}(x) \\ \omega'_{21}(x) & \omega_{22}(x) & \dots & \omega_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega'_{n1}(x) & \omega_{n2}(x) & \dots & \omega_{nn}(x) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \omega_{11}(x) & \omega'_{12}(x) & \dots & \omega_{1n}(x) \\ \omega_{21}(x) & \omega'_{22}(x) & \dots & \omega_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1}(x) & \omega'_{n2}(x) & \dots & \omega_{nn}(x) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \omega_{11}(x) & \omega_{12}(x) & \dots & \omega'_{1n}(x) \\ \omega_{21}(x) & \omega_{22}(x) & \dots & \omega'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1}(x) & \omega_{n2}(x) & \dots & \omega'_{nn}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vegyük most figyelembe azt, hogy

$$\frac{d}{dx} \left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x \right) = \mathbf{A} \cdot \underline{\Omega}|_{x_0}^x,$$

azaz

$$\omega'_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{jk}$$

és így

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) \right) &= \begin{vmatrix} \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \omega_{j1} \right) & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} \omega_{j1} \right) & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^n a_{nj} \omega_{j1} \right) & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \omega_{11} & \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \omega_{j2} \right) & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} \omega_{j2} \right) & \dots & \omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1} & \left(\sum_{j=1}^n a_{nj} \omega_{j2} \right) & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \omega_{jn} \right) \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} \omega_{jn} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \left(\sum_{j=1}^n a_{nj} \omega_{jn} \right) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Válasszuk most külön ebben az összegben azokat a tagokat, amelyekben a_{ik} közös tényezőként szerepel.

Belátható az, hogy a_{ii} csak az $\omega'_{i1}, \omega'_{i2}, \dots, \omega'_{in}$ deriváltakban szerepelhet és így az első determinánsban a szorzója $\omega_{i1}\Omega_{i1}$, a második determinánsban $\omega_{i2}\Omega_{i2}, \dots$, az n -edik determinánsban pedig $\omega_{in}\Omega_{in}$, ahol most Ω_{ik} -val a $\det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x)$ -ben szereplő ω_{ik} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst jelöltük. Tehát az a_{ii} -t tartalmazó tagok, a közös tényező kiemelése után ezt adják:

$$a_{ii} \sum_{j=1}^n \omega_{ij}\Omega_{ij} = a_{ii} \cdot \det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) .$$

Viszont az összes a_{ik} ($i \neq k$) elem szorzói: az első determinánsban $\omega_{k1}\Omega_{i1}$, a második determinánsban $\omega_{k2}\Omega_{i2}, \dots$, az n -edik determinánsban pedig $\omega_{kn}\Omega_{in}$. Így tehát az a_{in} -t tartalmazó tagok, a közös tényező kiemelése után

$$a_{ik} \sum_{j=1}^n \omega_{kj} \cdot \Omega_{ij} = 0 , \quad \text{mert } i \neq k .$$

Ezek szerint

$$\frac{d}{dx} \left\{ \det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) \right\} = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \cdot \det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) ,$$

vagy, mivel

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Sp}(\mathbf{A})$$

($\mathbf{A}$ főátlóbeli elemeinek az összege, azaz $\mathbf{A}$ nyoma), azért

$$\frac{d}{dx} \left\{ \det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) \right\} = \text{Sp}(\mathbf{A}) \cdot \det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) .$$

Ebből pedig

$$\det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) = C e^{\int_{x_0}^x \text{Sp}(\mathbf{A}) d\xi}$$

Ha most még azt is figyelembe vesszük, hogy

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^{x_0} = \mathbf{E} ,$$

akkor $C = 1$ kell, hogy legyen és így végeredményben:

$$\det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) = e^{\int_{x_0}^x \text{Sp}(\mathbf{A}) d\xi} \neq 0 .$$

(Ez az ún. Jacobi-féle azonosság.)

b.) A rezolvens matrix kielégíti a

$$\frac{d}{dx} \mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{Y}$$

mátrixdifferenciálegyenletet. (Itt most $\mathbf{Y}$ x -től függő ismeretlen n -edrendű mátrixfüggvény.)

Ugyanis, ha

$$\mathbf{Y} = \underline{\Omega}|_{x_0}^x,$$

akkor ennek a deriváltja:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Y} = \frac{d}{dx}\left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x\right) = \mathbf{A} \cdot \underline{\Omega}|_{x_0}^x = \mathbf{A}\mathbf{Y}.$$

Jelölje most $\mathbf{e}_i$ azt az oszlop-egységvektort, amelynek i -edik eleme 1 és a többi 0. Ekkor az oszlopvektorokra particionált rezolvens mátrixot így is írhatjuk:

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = (\underline{\omega}_1(x) \quad \underline{\omega}_2(x) \quad \dots \quad \underline{\omega}_n(x))$$

és ennek az i -edik oszlopát az $\mathbf{e}_i$ -vel képezett szorzat adja:

$$\underline{\omega}_i(x) = \underline{\Omega}|_{x_0}^x \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ez azonban nem más, mint az eredetileg adott

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

homogén lineáris differenciálegyenletrendszernek az a megoldása, amely eleget tesz az

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{e}_i$$

kezdeti feltételnek. Mivel pedig a rezolvens mátrix determinánsa zérustól különbözik, azért nyilván az

$$\underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_2(x), \dots, \underline{\omega}_n(x)$$

oszlopvektorai egymástól lineárisan függetlenek. A rezolvens mátrix oszlopvektorai tehát n darab lineárisan független megoldását adják a homogén lineáris differenciálegyenletrendszernek. Ez az n darab lineárisan független megoldás együttesen a *homogén lineáris differenciálegyenletrendszer megoldásainak egy alarendszerét* adja. A homogén lineáris differenciálegyenletrendszer minden megoldását ezeknek egy tetszőleges lineáris kombinációja adja:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= \underline{\Omega}|_{x_0}^x \mathbf{c} = (\underline{\omega}_1(x) \quad \underline{\omega}_2(x) \quad \dots \quad \underline{\omega}_n(x)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \\ &= c_1 \underline{\omega}_1(x) + c_2 \underline{\omega}_2(x) + \dots + c_n \underline{\omega}_n(x), \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, \dots, c_n$ tetszőleges állandók. (A megoldások egy alarendszerét oszloponként tartalmazó mátrixot szokták *alpmátrixnak* is nevezni. Tehát az adott homogén lineáris differenciálegyenletrendszer rezolvens mátrixa egy alpmátrix. Valamennyi alpmátrixhoz el lehet jutni úgy, hogy a rezolvens mátrixot jobbról szorozzuk egy tetszőleges nonsinguláris mátrixszal.)

13.8.3. Inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer.

Tekintsük most a

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszert, ahol az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix megadott állandó, n -edrendű kvadratikusan mátrix és az $\mathbf{f}(x)$ oszlopvektor tartalmazza a megadott folytonos $f_i(x)$ zavarófüggvényeket ($i = 1, 2, \dots, n$), amelyek a feltevés szerint nem mind zérusok. Előírjuk az x_0 helyhez tartozó $y_i(x_0) = y_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) kezdeti értékeket, amelyeket az

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

oszlopvektorba foglalunk egybe.

Legyen a megfelelő homogén lineáris differenciálegyenletrendszer a következő:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y}_h = \mathbf{A} \mathbf{y}_h .$$

Ennek az $\mathbf{y}_h(x_0) = \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása:

$$\mathbf{y}_h(x) = \underline{\Omega}|_{x_0}^x \mathbf{y}_0 = e^{\mathbf{A} \cdot (x-x_0)} \mathbf{y}_0 .$$

Keressük az inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer megoldását az állandók variálásának a módszerével a következő alakban:

$$\mathbf{y}(x) = \underline{\Omega}|_{x_0}^x \mathbf{z}(x) = e^{\mathbf{A} \cdot (x-x_0)} \mathbf{z}(x) ,$$

ahol $\mathbf{z}(x)$ egyelőre ismeretlen. Mivel

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y}(x) = \mathbf{A} \mathbf{y}(x) + \underline{\Omega}|_{x_0}^x \frac{d}{dx} \mathbf{z}(x) ,$$

azért kell, hogy

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x \frac{d}{dx} \mathbf{z}(x) = \mathbf{f}(x)$$

legyen, ahonnan

$$\frac{d}{dx} \mathbf{z}(x) = \left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x \right)^{-1} \mathbf{f}(x)$$

és ebből viszont

$$\mathbf{z}(x) = \int_{x_0}^x \left(\underline{\Omega}|_{x_0}^\xi \right)^{-1} \mathbf{f}(\xi) d\xi + \mathbf{y}_0 .$$

Igy a keresett megoldás:

$$\mathbf{y}(x) = \underline{\Omega}|_{x_0}^x \left\{ \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \left(\underline{\Omega}|_{x_0}^\xi \right)^{-1} \mathbf{f}(\xi) d\xi \right\} ,$$

vagyis az állandó A együtthatómátrix esetében:

$$y(x) = e^{A \cdot (x-x_0)} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x e^{-A \cdot (\xi-x_0)} f(\xi) d\xi \right\}.$$

Érdeemes megfigyelni, hogy az $y(x_0) = y_0$ előírt kezdeti feltételhez tartozó megoldása az inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszernek két megoldás összege:

a.) $\Omega|_{x_0}^x y_0 = e^{A \cdot (x-x_0)} y_0$ a megfelelő homogén lineáris differenciálegyenletrendszernek az előírt $y(x_0) = y_0 (\neq 0)$ "inhomogén kezdeti feltételhez" tartozó megoldása;

b.)

$$\Omega|_{x_0}^x \left(\Omega|_{x_0}^\xi \right)^{-1} f(\xi) d\xi = e^{A \cdot (\xi-x_0)} \int_{x_0}^x e^{-A \cdot (\xi-x_0)} f(\xi) d\xi$$

az inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszernek az $y(x_0) \equiv 0$ "homogén kezdeti feltételhez" tartozó megoldása.

Még megjegyezzük azt, hogy ha az adott inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer általános megoldását keressük, akkor $y(x) = c$ előírást alkalmazunk, ahol a c oszlopvektor elemei tetszőleges állandók.

Az általános megoldás előállítása érdekében egyszerűsíthetjük a végeredményünket azáltal, hogy az általánosságot nem sértő feltevessel, hogy $x_0 = 0$ kezdőértéket választunk. Ezzel tehát a végeredmény így fest:

$$y(x) = e^{A \cdot x} \left\{ c + \int_0^x e^{-A \cdot \xi} f(\xi) d\xi \right\}.$$

13.8.4. A rezolvens mátrix konkrét előállítása konstans A együtthatómátrix esetén.

Előző vizsgálatainkból látható az, hogy egy homogén, vagy inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer adott kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldásának, vagy általános megoldásának az előállításához nélkülözhetelen az $\Omega|_{x_0}^x$ rezolvens mátrix ismerete.

Feltesszük azt, hogy az A együtthatómátrix elemei állandók és megvizsgáljuk azt, hogy ebben az esetben az

$$\Omega|_{x_0}^x = e^{A \cdot (x-x_0)}$$

mátrixfüggvényt hogyan lehet előállítani.

Erre lényegében két különböző módszert lehet találni:

a.) Megkeressük A -nak valamennyi sajátértékét és attól függően, hogy ezek az A minimálpolinomjának mind egyszeres vagy esetleg többszörös zérushelyei, megkeressük A -nak teljes sajátvektorrendszerét, vagy pedig teljes fővektorrendszerét. Ha A -nak van teljes sajátvektorrendszere (n darab lineárisan független sajátvektora), akkor ezekből, mint oszlopvektorokból meg lehet alkotni azt a nem-szinguláris transzformáló matrixot, amellyel végrehajtott hasonlósági transzformáció A -t *diagonálalakra transzformálja*, és akkor ez a

transzformáció az $\mathbf{A}$ -val felírt homogén lineáris differencialegyenletrendszerből olyan differencialegyenletrendszerhez vezet, amely egyenként csak egy ismeretlen függvényt tartalmaz, és amelyet külön-külön meg lehet oldani; a megoldásokból pedig vissza lehet állítani a rendszer megoldását, amiből már leválasztható a rezolvens mátrix.

Ha viszont $\mathbf{A}$ minimálpolinomjának van egynél többszörös multiplicitású zérushelye is és így n -nél kevesebb számú lineárisan független sajátvektora van, akkor ezekből a sajátvektorokból "láncszerűen" kiegészítő fővektorokat lehet találni és a láncszerűen összetartozó fővektorokat oszlopvektorokként egymás mellé írva meg lehet konstruálni azt a nem-szinguláris transzformáló mátrixot, amellyel végrehajtott hasonlósági transzformáció $\mathbf{A}$ -t ún. *Jordan-féle normálalakra* transzformálja. Ezzel a transzformációval elérhető az, hogy az eredeti differencialegyenletrendszer szétesik különálló olyan differencialegyenletek csoportjaira, amelyeknél mindegyik csoportban csak annyi ismeretlen függvény szerepel, amennyi a Jordan-féle normálalakú mátrixban egy blokk rendszáma; és ebben a csoportban az ismeretlen függvényeket egymás után rekurzív módon meg lehet határozni. A kapott megoldásokból össze lehet állítani azt a mátrixfüggvényt, amelyből a már ismert hasonlósági transzformáció inverzével le lehet választani a rezolvens mátrixot.

(A következőkben nem követjük ezt az utat, de megjegyezzük, hogy ezt az utat lényegében végigjártuk már a legegyszerűbb esetben, nevezetesen a másodrendű $\mathbf{A}$ együtthatómátrix esetében a 13.4. fejezetben.)

b.) Előállítjuk $\mathbf{A}$ minimálpolinomját. Legyen ennek a fokszáma $m \leq n$. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $f(\mathbf{A})$ analitikus függvényét előállító hatványsor skaláris megfelelője – az $f(\lambda)$ – hatványsorának konvergenciasugara nagyobb, mint bármelyik λ_i sajátérték abszolút értéke, akkor $f(\mathbf{A})$ előállítható egy legfeljebb $(m-1)$ -edfokú mátrixpolinom alakjában, amelyet a sajátértékekre támaszkodó *Lagrange- ill. Hermite-féle interpoláló alappolinomok segítségével* elő lehet állítani.

A következőkben ezt az utat fogjuk részletezni.

Mindenekelőtt bemutatunk egy algoritmust (Leverrier-, Fagyejev-eljárása) – az elméleti háttér részletezése nélkül – amellyel az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrix

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = D(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

karakterisztikus polinomját és egyidejűleg a karakterisztikus mátrix adjungáltját elő lehet állítani.

Legyen	$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A},$	akkor	$\text{Sp}(\mathbf{A}_1) = -a_{n-1},$	amivel	$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + a_{n-1}\mathbf{E};$
ezután	$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}\mathbf{B}_1,$	ahonnan	$\text{Sp}(\mathbf{A}_2) = -2a_{n-2},$	amivel	$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 + a_{n-2}\mathbf{E};$
ezután	$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}\mathbf{B}_2,$	ahonnan	$\text{Sp}(\mathbf{A}_3) = -3a_{n-3},$	amivel	$\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}_3 + a_{n-3}\mathbf{E};$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
ezután	$\mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-2},$	ahonnan	$\text{Sp}(\mathbf{A}_{n-1}) = -(n-1)a_1,$	amivel	$\mathbf{B}_{n-1} = \mathbf{A}_{n-1} + a_1\mathbf{E};$
ezután	$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1},$	ahonnan	$\text{Sp}(\mathbf{A}_n) = -na_0,$	amivel	$\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n + a_0\mathbf{E} = \mathbf{0};$

Ebből a sorozatból:

$$a_{n-1} = -\text{Sp}(\mathbf{A}_1),$$

$$\begin{aligned}
a_{n-2} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\mathbf{A}_2), \\
a_{n-3} &= -\frac{1}{3} \operatorname{Sp}(\mathbf{A}_3), \\
&\vdots \\
a_1 &= -\frac{1}{n-1} \operatorname{Sp}(\mathbf{A}_{n-1}), \\
a_0 &= -\frac{1}{n} \operatorname{Sp}(\mathbf{A}_n) = (-1)^n \cdot \det(\mathbf{A})
\end{aligned}$$

és végül a karakterisztikus polinom:

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Bizonyíthatóan az $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ mátrix a következő:

$$\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^{n-1}\mathbf{E} + \lambda^{n-2}\mathbf{B}_1 + \lambda^{n-3}\mathbf{B}_2 + \dots + \lambda\mathbf{B}_{n-2} + \mathbf{B}_{n-1};$$

ennek a mátrixnak az elemei λ -nak legfeljebb $(n-1)$ -edfokú polinomjai. Ha valamennyiük legnagyobb közös osztója $\theta(\lambda)$, akkor

$$\frac{D(\lambda)}{\theta(\lambda)} = \Delta(\lambda)$$

az $\mathbf{A}$ mátrix minimálpolinomja.

(Megjegyezzük még azt, hogy a $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ karakterisztikus mátrix adjungáltját, az $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ mátrixot – aldeterminánsok kiszámítása nélkül – még így is kiszámíthatjuk feltéve, hogy ismerjük a $D(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ karakterisztikus polinomot:

Egyszerű osztással képezzük a λ, μ skalárok következő polinomját:

$$F(\lambda, \mu) = \frac{D(\lambda) - D(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

Ha most ebben λ helyére a $\lambda\mathbf{E}$ mátrixot és μ helyére az $\mathbf{A}$ mátrixot helyettesítjük, akkor előáll a keresett mátrix:

$$\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = F(\lambda\mathbf{E}, \mathbf{A}).$$

Ugyanis $D(\lambda\mathbf{E}) = D(\lambda) \cdot \mathbf{E}$, $D(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ és igaz, hogy

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \operatorname{adj}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{E} \cdot \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}),$$

ami a

$$(\lambda - \mu) \cdot F(\lambda, \mu) = D(\lambda) - D(\mu)$$

skalárazonosság mátrix-megfelelője, ha a λ és μ skalárok helyére a szorzás szempontjából felcserélhető $\lambda\mathbf{E}$ és $\mathbf{A}$ mátrixokat helyettesítjük.)

Legyenek az $\mathbf{A}$ mátrix különböző sajátértékei: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$.

A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s},$$

ahol $s \leq \sum_{i=1}^s \alpha_i = n$.

A minimálpolinom gyöktényezős alakja:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\beta_1} (\lambda - \lambda_2)^{\beta_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\beta_s},$$

ahol

$$s \leq \sum_{i=1}^s \beta_i = m \leq n.$$

Legyen most $f(\lambda)$ egy olyan hatványsorával adott analitikus függvény, amelynek konvergenciasugara nem kisebb, mint a λ_i sajátértékek abszolút értékének egy felső korlátja. Elő akarjuk állítani az $\mathbf{A}$ mátrix $f(\mathbf{A})$ analitikus függvényét az $\mathbf{A}$ mátrix valamely legfeljebb $(m-1)$ -edfokú polinomjával.

Képezzük az $f(\lambda)$ függvény hatványsora N -edik részletösszegének ($N > m$), az $S_N(\lambda)$ polinomnak a $\Delta(\lambda)$ osztóra vonatkozó (legfeljebb $(m-1)$ -edfokú) $R_N(\lambda)$ osztási maradékát, azaz legyen

$$S_N(\lambda) = \Delta(\lambda)Q_N(\lambda) + R_N(\lambda).$$

Ebből $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ miatt következik:

$$S_N(\mathbf{A}) = R_N(\mathbf{A}).$$

Mármint az $R_N(\lambda)$ osztási maradék kifejezhető Lagrange-féle, illetve Hermite-féle interpolációs alappolinomok segítségével. $S_N(\lambda) - R_N(\lambda)$ ugyanis maradék nélkül osztható $\Delta(\lambda)$ -val:

$$S_N(\lambda) - R_N(\lambda) = \Delta(\lambda) \cdot Q_N(\lambda),$$

és éppen ezért $\Delta(\lambda)$ valamennyi 0-helye legalább ugyanakkora multiplicitással 0-helye az $S_N(\lambda) - R_N(\lambda)$ különbségnek.

Tegyük fel először azt, hogy $\beta_i = 1$ minden i -re, vagyis mindegyik λ_i sajátérték *egyszeres* 0-helye a $\Delta(\lambda)$ minimálpolinomnak (most tehát $s = m$).

Akkor ez azt jelenti, hogy

$$R_N(\lambda_i) = S_N(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m (= s).$$

Ez pedig pontosan m számú feltétel a legfeljebb $(m-1)$ -edfokú $R_N(x)$ számára.

Ha bevezetjük a

$$L_i(\lambda_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = i, \\ 0, & \text{ha } k \neq i \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

összefüggésekkel definiált $(m-1)$ -edfokú Lagrange-féle interpolációs alappolinomokat, az $R_N(\lambda)$ osztási maradéknak a következő előállítására jutunk:

$$R_N(\lambda) = \sum_{i=1}^m S_N(\lambda_i) L_i(\lambda).$$

Ebből pedig

$$S_N(\mathbf{A}) = R_N(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m S_N(\lambda_i) L_i(\mathbf{A}) .$$

Minthogy a jobboldalon álló matrixok N -től függetlenek, az $N \rightarrow \infty$ határátmenet nehézség nélkül elvégezhető, éspedig tekintettel arra, hogy feltevésünk szerint $\mathbf{A}$ sajátértékei az

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^j$$

hatványsor konvergenciakörének belsejébe esnek, azért

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\lambda_i) = f(\lambda_i)$$

és így végeredményben:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m f(\lambda_i) L_i(\mathbf{A}) .$$

Ezt az általánosan érvényes előállítást felhasználva, az $e^{\mathbf{A} \cdot x}$ rezolvens mátrixot a következőképpen írhatjuk fel:

$$e^{\mathbf{A} \cdot x} = \sum_{i=1}^m e^{\lambda_i x} L_i(\mathbf{A}) .$$

(Érdemes még azt megjegyezni, hogy mivel $\text{rang}(L_i(\mathbf{A})) = \alpha_i$, azért $L_i(\mathbf{A})$ -nak az oszlopvektorai az n -dimenziós tér egy pontosan α_i -dimenziójú alterét feszítik ki és ennek α_i -dimenziójú bázisrendszere $\mathbf{A}$ -nak a λ_i -hez tartozó α_i számú lineárisan független sajátvektorát adja. Ha tehát valamennyi $L_i(\mathbf{A})$ -t minimális számú diád összegére bontjuk, akkor az összes ($\sum_{i=1}^m \alpha_i = n$) sajátvektort és ezzel azt a nem szinguláris transzformáló mátrixot is megkapjuk, amellyel végrehajtott hasonlósági transzformációval akár $\mathbf{A}$ -t vagy akár $f(\mathbf{A})$ -t és így $e^{\mathbf{A} \cdot x}$ -et is diagonálalakra lehet transzformálni.)

Tegyük most fel azt, hogy van olyan i -index, amelyre $\beta_i > 1$, tehát van olyan λ_i sajátérték, amelyik a $\Delta(\lambda)$ minimálpolinomnak egynél többszörös 0-helye (most tehát $s < m$). Ez tehát azt jelenti, hogy ha egy λ_i a $\Delta(\lambda)$ polinomnak β_i -szeres 0 helye, akkor

$$\Delta^{(k)}(\lambda_i) = 0 , \quad \text{ha } k = 0, 1, 2, \dots, \beta_i - 1 .$$

Ekkor tehát

$$R_N^{(k)}(\lambda_i) = S_N^{(k)}(\lambda_i) , \quad k = 0, 1, 2, \dots, \beta_i - 1; \quad i = 1, 2, \dots, s .$$

Ezek az összefüggések $R_N(\lambda)$ -ra és deriváltjaira nézve összesen

$$\sum_{i=1}^s \beta_i = m$$

számú feltételt írunk elő. Mivel pedig $R_N(\lambda)$ fokszáma legfeljebb $m-1$, azért ez az m -számú feltétel $R_N(\lambda)$ -t egyértelműen meghatározza. Bevezetve

$$H_{ik}^{(l)}(\lambda_j) = \delta_{ij} \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \text{ és } k = l \text{ egyszerre;} \\ 0, & \text{ha akár } i \neq j, \text{ akár } k \neq l \end{cases}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, s; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, \beta_i - 1)$$

összefüggésekkel definiált $(m-1)$ -edfokú Hermite-féle $H_{ik}(\lambda)$ interpolációs alappolinomokat, az $R_N(\lambda)$ osztási maradéknak a következő előállítására jutunk:

$$R_N(\lambda) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{\beta_i-1} S_N^{(k)}(\lambda_i) H_{ik}(\lambda).$$

Ebből pedig

$$S_N(\mathbf{A}) = R_N(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{\beta_i-1} S_N^{(k)}(\lambda_i) H_{ik}(\mathbf{A})$$

adódik, illetve végül $N \rightarrow \infty$ határátmenet után:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{\beta_i-1} f^{(k)}(\lambda_i) H_{ik}(\mathbf{A}).$$

A rezolvens mátrix végül is:

$$e^{\mathbf{A} \cdot x} = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{\beta_i-1} \frac{d^k}{d\lambda_i^k} (e^{\lambda_i x}) H_{ik}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{\beta_i-1} x^k e^{\lambda_i x} H_{ik}(\mathbf{A}).$$

A követendő eljárást két konkrét példán mutatjuk be.

1.) Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenletrendszer.

Mátrixos alakban írva:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

azaz

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y},$$

ahol

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az együtthatók $\mathbf{A}$ mátrixa valós, szimmetrikus matrix, ezért a minimálpolinomjának biztosan csak egyszeres 0-helyei vannak, és így hasonlósági transzformációval diagonálalakra transzformálható.

Az $\mathbf{A}$ matrix karakterisztikus polinomját, a

$$D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

polinomot, akár a karakterisztikus mátrix determinánsának, a

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

determinánsnak a kifejtésével, akár az ún. Fagyejev-féle eljárással határozhatjuk meg. Ez utóbbi eljárásnak ugyan a mi példánkban ($\mathbf{A}$ rendszáma csak 3) nem látszik előnye (az igazi előny csak magasabb rendszámú esetben nyilvánvaló), mégis gyakorlásul ezt mutatjuk be. Képezzük az $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$, illetve $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ mátrixok sorozatát a következőképpen:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{Sp}(\mathbf{A}_1) = 0 = -a_2; \quad \underline{a_2 = 0}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + a_2 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A} \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{Sp}(\mathbf{A}_2) = 6 = -2a_1; \quad \underline{a_1 = -3}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 + a_1 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A} \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{Sp}(\mathbf{A}_3) = 6 = -3a_0; \quad \underline{a_0 = -2}$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}_3 + a_0 \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Tehát

$$D(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

A sajátértékek tehát: $\lambda_1 = -1$ és ez a karakterisztikus polinom kétszeres 0-helye ($\alpha_1 = 2$); $\lambda_2 = 2$ és ez egyszeres 0-helye ($\alpha_2 = 1$).

Bár a szimmetria miatt nyilvánvaló, hogy a sajátértékek a minimálpolinomnak egyszerűes 0-helyei ($\beta_1 = \beta_2 = 1$), mégis gyakorlásképpen határozzuk meg a minimálpolinomot úgy, hogy $D(\lambda)$ -t elosztjuk az $\text{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ mátrix valamennyi elemének a legnagyobb közös osztójával, $\theta(\lambda)$ -val.

$$\begin{aligned}\text{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \lambda^2 \mathbf{E} - \lambda \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda^2 - 1) & (\lambda + 1) & (\lambda + 1) \\ (\lambda + 1) & (\lambda^2 - 1) & (\lambda + 1) \\ (\lambda + 1) & (\lambda + 1) & (\lambda^2 - 1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\text{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ valamennyi elemének legnagyobb közös osztója:

$$\theta(\lambda) = \lambda + 1,$$

így a minimálpolinom:

$$\Delta(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\theta(\lambda)} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Állítsuk elő a sajátértékekhez tartozó Lagrange-féle interpoláló alappolinomokat. λ_1 -nek megfelel az

$$L_1(\lambda) = \frac{\lambda - 2}{-1 - 2} = -\frac{1}{3}(\lambda - 2),$$

λ_2 -nek megfelel az

$$L_2(\lambda) = \frac{\lambda + 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}(\lambda + 1)$$

alappolinom. Ezekkel lesz:

$$\begin{aligned}L_1(\mathbf{A}) &= -\frac{1}{3}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \\ L_2(\mathbf{A}) &= \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ezzel már a rezolvens mátrix felírható:

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{-x} \cdot L_1(\mathbf{A}) + e^{2x} \cdot L_2(\mathbf{A}).$$

Azonban azt is megtehetjük, hogy $L_1(\mathbf{A})$ és $L_2(\mathbf{A})$ minimális diádösszeg alakú felbontásából kiolvassuk az

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

transzformáló mátrixot és ennek az inverzét:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ezekkel pedig a differenciálegyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{y}(0) ,$$

azaz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} ,$$

vagy ha rövideg kedvéért bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} ,$$

akkor végeredményben:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} ,$$

azaz

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (-2c_1 + c_2)e^{-x} + c_3e^{2x} , \\ y_2(x) &= c_1e^{-x} + c_3e^{2x} , \\ y_3(x) &= (c_1 - c_2)e^{-x} + c_3e^{2x} . \end{aligned}$$

2.) Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 3y_1 - y_2 - 2y_3 , \\ \frac{dy_2}{dx} &= -8y_1 + 6y_2 + 10y_3 , \\ \frac{dy_3}{dx} &= 5y_1 - 3y_2 - 5y_3 \end{aligned}$$

differenciálegyenletrendszert.

Most az együtthatók mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -8 & 6 & 10 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

A karakterisztikus polinom:

$$D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 .$$

Ennek az együtthatóit a következő sorozatból kapjuk:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -8 & 6 & 10 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix} ; \quad \text{Sp}(\mathbf{A}_1) = 4 = -a_2; \quad \underline{a_2 = -4}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + a_2 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -8 & 2 & 10 \\ 5 & -3 & -9 \end{pmatrix} ;$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A} \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 10 & -10 & -14 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix} ; \quad \text{Sp}(\mathbf{A}_2) = -10 = -2a_1; \quad \underline{a_1 = 5}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 + a_1 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -5 & -14 \\ -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} ;$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A} \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \text{Sp}(\mathbf{A}_3) = 6 = -3a_0; \quad \underline{a_0 = -2}$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}_3 + a_0 \mathbf{E} = \mathbf{0} .$$

Tehát

$$D(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) .$$

azaz $\lambda_1 = 1$ és ez kétszeres 0-hely, $\lambda_2 = 2$ pedig egyszeres 0-hely.

A karakterisztikus mátrix adjungáltja:

$$\begin{aligned} \text{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \lambda^2 \mathbf{E} + \lambda \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & -\lambda & -2\lambda \\ -8\lambda & 2\lambda & 10\lambda \\ 5\lambda & -3\lambda & -9\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -5 & -14 \\ -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda^2 - \lambda) & (-\lambda + 1) & (-2\lambda + 2) \\ (-8\lambda + 10) & (\lambda^2 + 2\lambda - 5) & (10\lambda - 14) \\ (5\lambda - 6) & (-3\lambda + 4) & (\lambda^2 - 9\lambda + 10) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Könnyű azt belátni, hogy ennek a mátrixnak nem mindegyik eleme osztható maradék nélkül $(\lambda-1)$ -gyel, tehát $D(\lambda) \equiv \Delta(\lambda)$, vagyis a minimálpolinomnak van egynél többszörös 0-helye. Figyelembe véve azt, hogy $\lambda_1 = 1$ a minimálpolinomnak kétszeres 0-helye és $\lambda_2 = 2$ egyszeres 0-hely, írhatjuk, hogy

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_1 x} H_{10}(\mathbf{A}) + x e^{\lambda_1 x} H_{11}(\mathbf{A}) + e^{\lambda_2 x} H_{20}(\mathbf{A}) ,$$

ahol a $H_{ik}(\mathbf{A})$ Hermite-féle interpoláló alappolinomokat a következő feltételi egyenletek határozzák meg:

$$\begin{aligned} H_{10}(1) &= 1 , & H_{11}(1) &= 0 , & H_{20}(1) &= 0 , \\ H'_{10}(1) &= 0 , & H'_{11}(1) &= 1 , & H'_{20}(1) &= 0 , \\ H_{10}(2) &= 0 , & H_{11}(2) &= 0 , & H_{20}(2) &= 1 . \end{aligned}$$

E feltételeknek megfelelnek:

$$\begin{aligned} H_{10}(\lambda) &= -\lambda^2 + 2\lambda , \\ H_{11}(\lambda) &= -\lambda^2 + 3\lambda - 2 , \\ H_{20}(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 , \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} H_{10}(\mathbf{A}) &= -\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} , \\ H_{11}(\mathbf{A}) &= -\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{E} , \\ H_{20}(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{E} , \end{aligned}$$

vagyis konkrét elemekkel részletesen kiírva:

$$\begin{aligned} H_{10}(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -6 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} , \\ H_{11}(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} , \\ H_{20}(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

A keresett rezolvens mátrix tehát végeredményben:

$$e^{\mathbf{A} \cdot x} = e^x \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -6 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} + x e^x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} .$$

Ezzel pedig

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A} \cdot x} \cdot \mathbf{y}(0) .$$

13.9. Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet egy ismeretlen függvénnyel.

13.9.1. n -edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet állandó együtthatókkal.

Az előző (13.8) az elsőrendű állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert tárgyaló részben kapott eredményeink szóról szóra átvihetők n -edrendű, egy ismeretlen függvényt tartalmazó homogén lineáris differenciálegyenletre, a következő megfontolás alapján.

Legyen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

a vizsgált differenciálegyenlet és legyenek

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad y''(0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}_0$$

az előírt kezdeti feltételek.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$y(x) = y_1(x), \quad y'(x) = y_2(x), \quad y''(x) = y_3(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = y_n(x).$$

Ekkor az adott differenciálegyenlettel ekvivalens következő differenciálegyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= -a_0y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-1}y_n, \end{aligned}$$

amit mátrix-alakban így is írhatunk:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

azaz, ha

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

akkor röviden:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}$$

és az előírt kezdeti feltétel:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

Ennek pedig $\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{y}_0$ a megoldása.

(Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix ún. *Frobenius-féle normálalakú mátrix*.)

Könnyű számolással ellenőrizni, hogy $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja, amely egyben minimálpolinom is, a következő:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &\equiv D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) - \\ &= \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0. \end{aligned}$$

(Ezt a polinomot tulajdonképpen az adott differenciálegyenletből közvetlenül is fel lehet írni, ha abban $y^{(k)}$ helyére λ^k -t helyettesítünk; $k = 0, 1, 2, \dots, n$.)

Mármost két eset lehetséges: 1.) A karakterisztikus (és egyben minimál-) polinomnak n darab különböző 0-helye van; 2.) a karakterisztikus (és egyben minimál-) polinomnak van többszörös 0-helye is. Az első esetben $\mathbf{A}$ hasonlósági transzformációval diagonalizálható; a második esetben $\mathbf{A}$ hasonlósági transzformációval Jordan-féle normálakra hozható.

1. eset. A karakterisztikus (és egyben minimál-) polinom gyöktényezős alakja:

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n),$$

ahol $\lambda_i \neq \lambda_k$, ha $i \neq k$ és $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Be lehet azt bizonyítani, hogy a λ_i sajátértékhez tartozó és az

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$$

egyenlettel meghatározott sajátvektor a következő:

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tehát az

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

transzformáló mátrixszal (amelynek biztosan létezik U^{-1} inverze, ez ugyanis egy Vandermonde-típusú mátrix, a különböző λ_i számok hatványaival képezve):

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

továbbá a rezolvens mátrix:

$$e^{Ax} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} U^{-1}$$

és ezzel már felírható a megoldás:

$$y(x) = e^{Ax} y_0.$$

Ennek a megoldásként kapott $y(x)$ oszlopvektornak azonban csak az első elemére van szükségünk, amit az

$$e_1^T = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$$

sorvektorral balról szorozva állíthatunk elő. (Ennek a sorvektornak az első eleme 1, a többi mind 0.)

$$y(x) = e_1^T y(x) = e_1^T e^{Ax} y_0 = e_1^T U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} U^{-1} y_0.$$

Ha most figyelembe vesszük azt, hogy

$$e_1^T U = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$$

és megállapodunk abban, hogy

$$U^{-1} y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

akkor végeredményben ezt kapjuk:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Ha tehát $c_1, c_2, \dots, c_n$ tetszőleges állandók (ami megfelel annak, hogy a 0 helyen tetszőleges $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ kezdeti feltételeket írunk elő), akkor ez az adott n -edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása.

Az egyes $e^{\lambda_i x}$ függvények egymástól lineárisan független megoldásai az adott differenciálegyenletnek, és az általános megoldás az n lineárisan független megoldás lineáris kombinációja. Azt szoktuk mondani, hogy a lineárisan független $e^{\lambda_i x}$ megoldások a megoldások egy alrendszerét alkotják.

Az alrendszert alkotó függvényeket jelöljük így:

$$e^{\lambda_i x} = Y_i ; \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Ekkor az általános megoldás:

$$y(x) = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n .$$

Ebből deriválásokkal nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1 Y_1' + c_2 Y_2' + \dots + c_n Y_n' , \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= c_1 Y_1^{(n-1)} + c_2 Y_2^{(n-1)} + \dots + c_n Y_n^{(n-1)} . \end{aligned}$$

Ezeknek az egyenleteknek a mátrix-alakba való összefoglalása:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots & Y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = W(x)c ,$$

ahol

$$W(x) = e^{Ax} U = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots & Y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

a differenciálegyenlethez tartozó ún. *Wronski-féle mátrix*. Ennek a determinánsa pedig az ún. *Wronski-féle determináns*. Ezt a determinánst ki lehet fejezni a differenciálegyenlettel ekvivalens elsőrendű differenciálegyenletrendszer rezolvens mátrixának a determinánsával:

$$\begin{aligned} \det(W(x)) &= W(x) = \det(U) \cdot e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} = \\ &= \det(U) e^{-a_{n-1}x} \end{aligned}$$

(Ez a Jacobi-féle azonosság megfelelője, az ún. Liouville-formula.)

Könnyű belátni azt, hogy

$$W(0) = \det(U) .$$

Érdeemes még azt kiemelni, hogy ha a differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának vannak komplex 0-helyei is (ezek mindig párosával fordulnak elő, mert hiszen az a_k együtthatók mind valósak), akkor az alrendszer megfelelő függvényeit – az Euler-féle összefüggés figyelembevételével – ki lehet cserélni valós függvényekkel. Pl. ha

$$\lambda_i = \alpha + i\beta \quad \text{és} \quad \lambda_{i+1} = \alpha - i\beta ,$$

akkor az ezekkel felírt

$$Y_i = e^{(\alpha+i\beta)x} \quad \text{és} \quad Y_{i+1} = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

helyett lehet a következő megoldásokat venni:

$$Y_i = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{és} \quad Y_{i+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x .$$

2. eset A karakterisztikus (és egyben minimál-) polinom gyöktényezős alakja:

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s} ,$$

ahol $\lambda_i \neq \lambda_k$, ha $i \neq k$ ($i, k = 1, 2, \dots, s$) és

$$s < \sum_{i=1}^s \alpha_i = n .$$

Most minden $\alpha_i > 1$ mellett a megfelelő λ_i -hez α_i -nél kevesebb lineárisan független sajátvektor tartozik és így az **A** együttható mátrixot nem lehet hasonlósági transzformációval diagonalizálni. Azonban az egyes sajátértékekhez tartozó egyes sajátvektorokat "láncszerűen" ki lehet egészíteni megfelelő számú – együttesen lineárisan független – ún. fővektorokkal úgy, hogy ezek összessége az n -dimenziós tér egy teljes bázisrendszerét alkotja. Ebben a bázisrendszerben – a megfelelő hasonlósági transzformációval elérhetően – az együtthatómátrix Jordan-féle normálalakú lesz. Ez egy olyan diagonál-hipermátrix, amelyiknek a fődiagonálisa mentén sorakozó különböző α_i -edrendű kvadratikus blokkjai ilyen szerkezetűek lesznek:

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} .$$

Fennáll, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_s \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

és a rezolvens mátrix:

$$e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} e^{\mathbf{J}_1 x} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{J}_2 x} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & e^{\mathbf{J}_s x} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} ,$$

ahol most

$$e^{\mathbf{J}_i x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i x} & x e^{\lambda_i x} & \frac{x^2}{2!} e^{\lambda_i x} & \dots & \frac{x^{\alpha_i-1}}{(\alpha_i-1)!} e^{\lambda_i x} \\ 0 & e^{\lambda_i x} & x e^{\lambda_i x} & \dots & \frac{x^{\alpha_i-2}}{(\alpha_i-2)!} e^{\lambda_i x} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{x^{\alpha_i-3}}{(\alpha_i-3)!} e^{\lambda_i x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i x} \end{pmatrix}$$

Ebben az esetben a megoldásként adódó

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{y}_0$$

oszlopvektor első eleme ilyen alakú lesz:

$$\begin{aligned} y(x) = \mathbf{e}_1^T e^{\mathbf{A}x} \mathbf{y}_0 &= e^{\lambda_1 x} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_{\alpha_1} x^{\alpha_1-1}) + \dots + \\ &+ e^{\lambda_2 x} (c_{\alpha_1+1} + c_{\alpha_1+2} x + c_{\alpha_1+3} x^2 + \dots + c_{\alpha_2} x^{\alpha_2-1}) + \dots + \\ &+ e^{\lambda_s x} (c_{n-\alpha_s} + c_{n-\alpha_s+1} x + c_{n-\alpha_s+2} x^2 + \dots + c_{\alpha_s} x^{\alpha_s-1}). \end{aligned}$$

A Wronski-féle mátrixot, illetve determinánst most a következő függvényekből, illetve deriváltjaikból kell képezni:

$$\begin{aligned} Y_1 &= e^{\lambda_1 x}, Y_2 = x e^{\lambda_1 x}, Y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, Y_{\alpha_1} = x^{\alpha_1-1} e^{\lambda_1 x}, \dots, \\ Y_{n-\alpha_s} &= e^{\lambda_s x}, Y_{n-\alpha_s+1} = x e^{\lambda_s x}, Y_{n-\alpha_s+2} = x^2 e^{\lambda_s x}, \dots, Y_n = x^{\alpha_s-1} e^{\lambda_s x}; \end{aligned}$$

azaz

$$\mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots & Y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

13.9.2. n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet állandó együtthatókkal.

Legyen adva az

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet, ahol az a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) együtthatók állandók és $f(x)$ – az ún. zavarótag – adott, folytonos függvény.

Az adott differenciálegyenlettel ekvivalens elsőrendű differenciálegyenletrendszer a következő:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix},$$

vagy röviden írva:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{f}(x) .$$

Tegyük fel, hogy már meghatároztuk az $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$ esetnek megfelelő

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y}_h = \mathbf{A} \mathbf{y}_h$$

homogén lineáris differenciálegyenletrendszer általános megoldását az

$$\mathbf{y}_h(x) = \mathbf{W}(x) \mathbf{c}$$

alakban. Ekkor az inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer általános megoldása így adódik:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}(x) \mathbf{c} + \mathbf{W}(x) \int \mathbf{W}^{-1}(x) \mathbf{f}(x) dx .$$

Az eredményül kapott oszlopvektor első eleme ($y_1(x) \equiv y(x)$) adja az adott n -edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását. Amint a végeredményből kitűnik, az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása két részből tevődik össze: a megfelelő homogén differenciálegyenlet általános megoldása és ehhez hozzáadva az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása.

Ha tehát $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ jelölik $\mathbf{W}(x)$ első sorának elemeit, azaz az adott differenciálegyenlethez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet lineárisan független megoldásait (ez a megoldások egy alaprendszere), amikor is

$$y_h(x) = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n$$

a homogén differenciálegyenlet általános megoldása, akkor az ehhez még hozzáadandó partikuláris megoldását az inhomogén differenciálegyenletnek az *„állandók variálásának” módszerével*

$$y_p(x) = c_1(x) Y_1 + c_2(x) Y_2 + \dots + c_n(x) Y_n$$

alakban lehet keresni. A $c_k(x)$ ismeretlen függvények első deriváltjaira a következő inhomogén lineáris egyenletrendszer írható fel:

$$\mathbf{W}(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x) ,$$

azaz részletesen:

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots & Y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} .$$

Mivel $\det(\mathbf{W}(x)) \neq 0$, azért innen a $c_k'(x)$ deriváltak egyértelműen meghatározhatók, és ezekből integrálással adódnak a $c_k(x)$ függvények, majd ezekkel az $y_p(x)$ keresett partikuláris megoldás. Végül is az általános megoldás:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) = \\ &= c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n + y_p(x) . \end{aligned}$$

13.9.3. Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása kísérletező feltevéssel.

Ha az állandó együtthatójú

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet jobboldalán álló $f(x)$ zavarófüggvény csak olyan tagokból áll, melyeknek csak véges számú lineárisan független deriváltjaik vannak, akkor az állandók variálásának módszerét el lehet kerülni és az inhomogén egyenlet egy $y_p(x)$ partikuláris megoldását *kísérletező feltevéssel (próbafüggvénnyel)* is meg lehet határozni. Ilyen függvények az alábbiak:

$$\alpha e^{\beta x},$$

$$\alpha \cos \beta x, \quad \alpha \sin \beta x,$$

$$\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

vagy ezek tetszőleges lineáris kombinációja.

Mindenekelőtt összeírjuk az $f(x)$ függvényben szereplő tagokat és különböző deriváltjaikat (az állandó együtthatók nélkül). Mármint két eset lehetséges:

1. *eset.* Ha ezek közül a függvények közül egyik sem szerepel az adott differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet megoldásai között, akkor egyszerűen ezeknek a lineáris kombinációját – határozatlan együtthatókkal – tekintjük próbafüggvénynek és ennek alakjában “próbáljuk” megkeresni az $y_p(x)$ megoldást.

Pl. ha

$$f(x) = x^2 e^{2x} + \sin 3x,$$

akkor, mivel a jobboldalon álló tagok és deriváltjaik (az állandó együtthatók nélkül):

$$x^2 e^{2x}, \quad x e^{2x}, \quad e^{2x}, \quad \sin 3x, \quad \cos 3x,$$

ha ezek egyike sem megoldása a megfelelő homogén differenciálegyenletnek, akkor feltezzük, hogy

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x} + D \sin 3x + E \cos 3x,$$

ahol A, B, C, D, E egyelőre határozatlan állandókat jelentenek. Értéküket a differenciálegyenletbe való behelyettesítés után, a két oldalon szereplő tagok együtthatóinak az összehasonlításával felírt egyenletekből lehet meghatározni.

2. *eset.* Ha az előbb említett függvények közül némelyek szerepelnek a homogén egyenlet megoldásai között, akkor mindenekelőtt úgy osztjuk csoportokba az előbb említett függvényeket, hogy egy-egy csoportban az egymásból deriválással származtatott tagok legyenek. Ha ezen csoportok valamelyikének egyik tagja a homogén egyenlet megoldása, akkor ennek a csoportnak mindegyik tagját megszorozzuk x -nek azzal a legkisebb kitevőjű hatványával, amellyel megszorozva már e csoport valamennyi tagja különbözni fog a homogén egyenlet megoldásaitól. A próbafüggvényben azután ezekkel a tagokkal cseréljük ki a szóbanforgó csoport eredeti tagjait.

Pl. ha $f(x)$ ugyanaz, mint előbb, akkor két csoportunk van:

$$x^2 e^{2x}, \quad x e^{2x}, \quad e^{2x}$$

és

$$\sin 3x, \quad \cos 3x.$$

Tegyük fel, hogy a homogén egyenlet általános megoldása:

$$(c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^x.$$

Mivel az első csoportból e^{2x} és $x e^{2x}$ szerepel a homogén egyenlet megoldásai között, ezért a próbafüggvényt így kell megválasztanunk:

$$y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{2x} + D \sin 3x + E \cos 3x.$$

A lengéstanból vett analógia alapján a 2. esetben azt mondjuk, hogy *rezonancia esete* áll fenn. x -nek az a kitevője, amellyel képezett x hatványt szorozóként alkalmazzuk, rezonancia esetében jelzi a rezonancia többszörösségének a számát. Így a felhozott példában kétszeres rezonancia áll fenn.

13.9.4. Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet állandó együtthatókkal.

Az alkalmazásokban játszott fontos szerepére tekintettel vizsgáljuk meg az általános eset után az $n = 2$ esetnek megfelelő

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a \neq 0)$$

másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletet, ahol a, b, c állandók.

Ezzel ekvivalens a következő elsőrendű rendszer:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Az együtthatók mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

és a karakterisztikus egyenlet:

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{c}{a} & \lambda + \frac{b}{a} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0,$$

vagy a -val végigszorozva:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

A sajátértékek:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mármost három eset lehetséges.

1. eset. $b^2 - 4ac > 0$, azaz $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tehát két különböző valós sajátérték van. Ekkor **A** hasonlósági transzformációval diagonalizálható.

Figyelembe véve azt, hogy

$$\frac{b}{a} = -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{és} \quad \frac{c}{a} = \lambda_1 \lambda_2 ,$$

tehát

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & (\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix} ,$$

könnyű ellenőrizni, hogy a sajátértékekhez tartozó, lineárisan független sajátvektorok:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} , \quad \text{ill.} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

és az $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2)$ transzformáló mátrixszal:

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

A megoldások egy alaprendszere tehát

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} , \quad Y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

és az általános megoldás:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} .$$

A Wronski-féle determináns könnyen kiszámítható:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{W}(x)) &= \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} = \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\frac{b}{a}x} . \end{aligned}$$

$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ nem egyéb, mint a Wronski-féle determináns értéke az $x = 0$ helyen.

2. eset. $b^2 - 4ac < 0$, azaz $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, vagyis a sajátértékek konjugált komplex számok. Ebben az esetben, az előzőkhöz teljesen hasonlóan

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = \\ &= e^{\alpha x} (c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}) = \\ &= e^{\alpha x} \{ (c_1 + c_2) \cos \beta x + (ic_1 - ic_2) \sin \beta x \} = \\ &= e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) . \end{aligned}$$

Ez pedig az általános megoldás valós alakja.

3. eset. $b^2 - 4ac = 0$, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ és ez valós ($\alpha = -\frac{b}{2a}$).

Most tehát

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & (\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

és

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \alpha^2 & (\lambda - 2\alpha) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 = (\lambda - \alpha)^2.$$

Most α -hoz csak egyetlen sajátvektor tartozik:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_1 = \alpha \mathbf{u}_1,$$

ahol

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Ehhez hozzá lehet rendelni egy tőle lineárisan független $\mathbf{u}_2$ "fővektort" a következő szerint:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_2 = \alpha \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1,$$

ahol

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Válasszuk transzformáló mátrixnak a következőt:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

amelynek az inverze:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezekkel kapjuk az $\mathbf{A}$ -hoz hasonló Jordan-féle normálalakot:

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

A megoldások egy alrendszeré tehát

$$Y_1 = e^{\alpha x}, Y_2 = x e^{\alpha x}$$

és az általános megoldás:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x}.$$

A Wronski-féle determináns:

$$\det(\mathbf{W}(x)) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & (1 + \alpha x) e^{\alpha x} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} = e^{-\frac{b}{a}x},$$

a korábbi eredményeinkkel összhangban.

Megjegyzés. Az

$$ay'' + by' + cy = 0$$

állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet

$$y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

általános megoldásában szereplő, alaprendszert képező Y_1 és Y_2 lineárisan független megoldásaira – differenciálegyenletrendszerre való átfogalmazás nélkül – a következő egyszerű megfontolással is eljuthatunk.

A differenciálegyenletnek mindig van $e^{\lambda x}$ alakú megoldása, egyelőre határozatlan λ -val. Ha ezt a függvényt, a deriváltjaival együtt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, az $e^{\lambda x}$ közös tényező kiemelése után kapjuk, hogy

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 ,$$

ahonnan (mivel $e^{\lambda x} \neq 0$) az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletre jutunk.

Ha $b^2 - 4ac \neq 0$, akkor $\lambda_1 \neq \lambda_2$ és

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} , \quad Y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

egy alaprendszert képeznek, tehát valós λ_1 és λ_2 esetén ($b^2 - 4ac > 0$)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

lesz az általános megoldás.

Ha pedig $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($b^2 - 4ac < 0$), akkor

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

lesz az általános megoldás valós alakja. Ha viszont $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, akkor tulajdonképpen csak egy megoldást kapunk:

$$Y_1 = e^{\alpha x}$$

és egy ettől lineárisan független megoldást azzal a feltevéssel nyerhetünk, hogy

$$Y_2 = u \cdot Y_1 ,$$

ahol $u(x)$ egyelőre ismeretlen függvény, azonban

$$\begin{aligned} Y_2' &= u'Y_1 + uY_1' \\ Y_2'' &= u''Y_1 + 2u'Y_1' + uY_1'' \end{aligned}$$

és ezeket a differenciálegyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$aY_1 u'' + (2aY_1' + bY_1)u' + (aY_1'' + bY_1' + cY_1)u = 0 ,$$

azaz, mivel Y_1 kielégíti az adott homogén lineáris differenciálegyenletet, azért az utolsó tag eltűnik és továbbá, mivel

$$\begin{aligned} Y_1 &= e^{\alpha x} = e^{-\frac{b}{2a}x}, \\ Y_1' &= -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}, \end{aligned}$$

azért

$$2aY_1' + bY_1 = 0$$

és így marad, hogy

$$u'' = 0,$$

azaz

$$u = x,$$

tehát

$$Y_2 = xe^{\alpha x}$$

és így végül

$$y = (c_1 + c_2x)e^{\alpha x},$$

összhangban a korábbi eredményeinkkel.

13.9.5. A Laplace-transzformáció alkalmazása állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldására.

A 12.3-ban megismert Laplace-transzformáció alkalmazásával igen egyszerűen lehet előállítani az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek adott kezdeti feltételhez tartozó megoldásait.

Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, a követendő eljárást néhány egyszerű példán mutatjuk be.

1.) Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= e^{3t}, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

kezdetiérték feladatot. (A 12.3-ban leírtakkal összhangban, itt és a következő példákban is t -vel jelöltük a független változót.)

Legyen $\phi(t)$ a megoldás. Alkalmazva az egyenlet mindkét oldalára a Laplace-transzformációt, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{\phi''(t) - 3\phi'(t) + 2\phi(t)\} = \mathcal{L}\{e^{3t}\},$$

azaz

$$[s^2\mathcal{L}\{\phi(t)\} - s\phi(+0) - \phi'(+0)] - 3[s\mathcal{L}\{\phi(t)\} - \phi(+0)] + 2\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \mathcal{L}\{e^{3t}\}.$$

Mivel a kezdeti feltételek szerint $\phi(+0) = 0$ és $\phi'(+0) = 0$, továbbá

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \int_0^{\infty} e^{3t} e^{-st} dt = \frac{1}{s-3},$$

azért

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\}[s^2 - 3s + 2] = \frac{1}{s-3},$$

azaz, mivel

$$s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2),$$

végül is

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-3}.$$

Tehát a keresett megoldás, inverz Laplace-transzformációval, a következő lesz:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-3} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} e^t - e^{2t} + \frac{1}{3} e^{3t}. \end{aligned}$$

2.) Állítsuk elő az

$$y'' + 4y = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

Előírt mellékfeltételek hiányában feltehetjük, hogy

$$\begin{aligned} y(0) &= A, \\ y'(0) &= B, \end{aligned}$$

ahol A és B tetszőleges állandók.

Ha $\phi(t)$ a keresett megoldás, akkor a felvett kezdeti feltételek figyelembevételével a Laplace-transzformációnak alávetett egyenletünk így alakul:

$$s^2 \mathcal{L}\{\phi(t)\} - As - B + 4\mathcal{L}\{\phi(t)\} = 0.$$

Ebből viszont

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \frac{As + B}{s^2 + 4}$$

és így, inverz Laplace-transzformáció után:

$$\phi(t) = A \cos 2t + B \sin 2t.$$

3.) Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= f(t), \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

kezdetiérték feladatot, ha az adott $f(t)$ zavaró függvény olyan, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{x_0 t}} \leq A \quad (x_0 > 0, A > 0 \text{ állandók.})$$

Ha $\phi(t)$ jelöli a keresett megoldást, akkor a kezdeti feltételek figyelembevételével:

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{(s-1)(s-2)}.$$

Mivel

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)(s-2)} \right\} = -e^t + e^{2t},$$

azért a "konvolúciós tétel" felhasználásával ezt kapjuk:

$$\phi(t) = \int_0^t (-e^{t-\xi} + e^{2(t-\xi)}) f(\xi) d\xi.$$

13.10. Lineáris differenciálegyenletek változó együtthatókkal.

13.10.1. Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletrendszer változó együtthatókkal.

Legyen adva a következő homogén lineáris differenciálegyenletrendszer, az ún. Cauchy-féle normálalakban:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n, \end{aligned}$$

ahol az $a_{ik}(x)$ együtthatók az $|x - x_0| \leq a$ zárt intervallumban megadott folytonos függvények. Keressük ennek a differenciálegyenletrendszernek azt a megoldásrendszerét, amely eleget tesz az előírt

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$$

kezdeti feltételeknek. A differenciálegyenletrendszerben a jobboldali függvények eleget tesznek az $|x - x_0| \leq a, |y_i - y_{i0}| \leq b$ ($i = 1, 2, \dots, n$) tartományban a megoldás egzisztenciáját és unicitását biztosító feltételeknek. Alkalmazhatjuk tehát a szukcesszív approximációk Picard-féle módszerét.

Vezessük be a következő mátrixokat:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Ekkor a feladatot röviden így lehet fogalmazni:

Keressük a

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$$

homogén lineáris mátrix-differenciálegyenletnek az előírt

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Ezzel a differenciálegyenlettel ekvivalens az

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi)\mathbf{y}(\xi)d\xi$$

integrálegyenlet. Tehát a Picard-féle iterációnak megfelel az

$$\mathbf{y}_k(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi)\mathbf{y}_{k-1}(\xi)d\xi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

sorozat. E sorozat az $|x - x_0| \leq a$ intervallumban abszolút és egyenletesen konvergál a differenciálegyenlet egyetlen megoldásához:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(x) = \mathbf{y}(x).$$

Mivel

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= \left\{ \mathbf{E} + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_1)d\xi_1 \right\} \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{y}_2(x) &= \left\{ \mathbf{E} + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_1)d\xi_1 + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)d\xi_1d\xi_2 \right\} \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{y}_3(x) &= \left\{ \mathbf{E} + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_1)d\xi_1 + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)d\xi_1d\xi_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_3) \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)d\xi_1d\xi_2d\xi_3 \right\} \mathbf{y}_0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

azért

$$\mathbf{y}(x) = \underline{\Omega}|_{x_0}^x \mathbf{y}_0,$$

ahol

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = \mathbf{E} + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_1)d\xi_1 + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)d\xi_1d\xi_2 +$$

$$+ \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_3) \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \dots$$

az adott homogén lineáris differenciálegyenletrendszerhez tartozó *rezolvens mátrix*.

A rezolvens mátrixot iterált integrálok végtelen sora állítja elő. Minden egyes tagot az előző tagból úgy nyerünk, hogy $\mathbf{A}(x)$ -szel balról szorzunk (ügyeljünk a tényezők sorrendjére!) és x_0 -tól x -ig integrálunk. A korábban tárgyalt, $\mathbf{A}$ = állandó esetben közölt gondolatmenet alapján igazolni lehet, hogy a rezolvens mátrix – többek között – a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a.) $\underline{\Omega}|_{x_0}^{x_0} = \mathbf{E};$

b.) $\det \left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x \right) = e^{\int_{x_0}^x \text{Sp}(\mathbf{A}(\xi)) d\xi} \neq 0$ (Jacobi-féle azonosság);

c.)

$$\begin{aligned} \left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x \right)^{-1} &= \underline{\Omega}|_x^{x_0} = \mathbf{E} - \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_3) \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \dots; \end{aligned}$$

d.) ha $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < x$, akkor

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = \underline{\Omega}|_{x_n}^x \underline{\Omega}|_{x_{n-1}}^{x_n} \dots \underline{\Omega}|_{x_1}^{x_2} \underline{\Omega}|_{x_0}^{x_1};$$

e.) $\frac{d}{dx} \left(\underline{\Omega}|_{x_0}^x \right) = \mathbf{A}(x) \underline{\Omega}|_{x_0}^x.$

A b.) és e.) tulajdonságokból következik, hogy az $\underline{\Omega}|_{x_0}^x$ rezolvens mátrix egyes oszlopvektorai az adott homogén lineáris differenciálegyenletrendszernek lineárisan független partikuláris megoldásai, tehát a megoldásnak egy alarendszerét alkotják. Az általános megoldás az alarendszert alkotó oszlopvektoroknak tetszőleges állandókkal képezett lineáris kombinációja.

Abban a különleges esetben, amikor

$$\mathbf{A}(x) \text{ és } \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi$$

a szorzás szempontjából fecserélhetők (ez biztosan igaz akkor, ha $\mathbf{A}$ elemei állandók), azaz

$$\mathbf{A}(x) \cdot \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi \cdot \mathbf{A}(x),$$

akkor a rezolvens mátrix igen egyszerű alakot ölt:

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = e^{\int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi}.$$

Ugyanis ekkor

$$\int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{x_0}^x \left\{ \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 \right\} \mathbf{A}(\xi_2) d\xi_2 =$$

$$= \int_{x_0}^x \left\{ \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 \right\} \cdot d \left\{ \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi \right\}^2 ;$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi_3) \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left\{ \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi) d\xi \right\}^2 \cdot d \left\{ \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi) d\xi \right\} = \frac{1}{3!} \left\{ \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi \right\}^3 ; \end{aligned}$$

és így tovább, azaz

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi \right\}^k = e^{\int_{x_0}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi} .$$

A rezolvens mátrix előállítása – néhány egyszerű, speciális esettől eltekintve – túlságosan bonyolult. Éppen ezért gyakorlati számításoknál a rezolvens mátrixot valamilyen módon approximálni kell. Erre több lehetőség adódik.

Mindenekelőtt felosztjuk az $[x_0, x]$ intervallumot az $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ abszcisszák közbeiktatásával úgy, hogy

$$|x_i - x_{i-1}| \leq h \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad x_n \equiv x)$$

legyen, ahol $h > 0$ elegendően kicsiny. És alkalmazzuk a rezolvens mátrix szorzatalakját:

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = \underline{\Omega}|_{x_{n-1}}^x \cdots \underline{\Omega}|_{x_1}^{x_2} \underline{\Omega}|_{x_0}^{x_1} .$$

Feltesszük azt, hogy

$$\mathbf{A}(x) \approx \mathbf{A}(x_{i-1}) = \text{állandó} , \quad \text{ha } x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

és akkor

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x \approx e^{(x-x_{n-1})\mathbf{A}(x_{n-1})} \cdot e^{(x_{n-1}-x_{n-2})\mathbf{A}(x_{n-2})} \cdots e^{(x_1-x_0)\mathbf{A}(x_0)}$$

Ki lehet azt mutatni, hogy ebben az esetben a közelítés hibája a h "lépéstávolság" első hatványával nagyságrendben egyezõ.

A rezolvens mátrix egy másik közelítése a következõképpen adódik:

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x \approx \left\{ \mathbf{E} + \int_{x_{n-1}}^x \mathbf{A}(\xi) d\xi \right\} \left\{ \mathbf{E} + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \mathbf{A}(\xi) d\xi \right\} \cdots \left\{ \mathbf{E} + \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}(\xi) d\xi \right\}$$

Ki lehet azt mutatni, hogy ebben az esetben is a közelítés hibája h első hatványával nagyságrendben egyezõ lesz.

13.10.2. Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer változó együtthatókkal.

Vizsgáljuk most a

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y} = \mathbf{A}(x) \mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszert az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltétel mellett. Itt

$$\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

adott, folytonos $f_i(x)$ függvényekből áll ($i = 1, 2, \dots, n$).

Ugyanúgy, mint az $\mathbf{A} =$ állandó esetben, a keresett megoldást az állandók variálásának a módszere alapján lehet előállítani. Tehát, ha ismerjük a megfelelő homogén rendszerhez tartozó $\underline{\Omega}|_{x_0}^x$ rezolvens mátrixot, akkor ezzel:

$$\mathbf{y}(x) = \underline{\Omega}|_{x_0}^x \left\{ \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x (\underline{\Omega}|_{x_0}^\xi)^{-1} \mathbf{f}(\xi) d\xi \right\}.$$

13.10.3. A megoldások stabilitása.

Legyen

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a vizsgált differenciálegyenletrendszer egy dinamikai rendszer, azaz jelentse a független változó x az időt és az $y_1, y_2, \dots, y_n$ ismeretlen függvények egy-egy értékrendszere határozza meg az n -dimenziós tér egy-egy pontját. Valamennyi megoldás egy mozgást határoz meg. Tegyük fel azt, hogy a jobboldalon álló f_i függvények teljesítik a megoldás egzisztenciájának és unicitásának a feltételeit. Legyenek $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ megadott kezdeti értékek és tekintsük az ezeknek a kezdeti feltételeknek megfelelő

$$y_i(x) = \varphi_i(x; x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

megoldásrendszert, mely az $x \geq x_0$ mellett egy az $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ kezdőponton átmenő pályagörbét határoz meg. Az ennek a pályagörbének megfelelő *megoldást* (*Ljapunov-értelemben*) *stabilisnak* nevezzük, ha minden a kezdőpont egy elegendően kicsiny környezetében fekvő más kezdőponton átmenő pályagörbe az $x \geq x_0$ mellett az előbbi görbéhez eléggé közel halad, azaz pontosabban, ha minden $\varepsilon > 0$ értékhez található olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $x_0 \leq x < \infty$ esetén minden

$$y_i(x) = \psi_i(x; x_0, \eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{n0}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

megoldásra teljesül a

$$\sum_{k=1}^n |\psi_k(x; x_0; \eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{n0}) - \varphi_k(x; x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenség, hacsak

$$\sum_{k=1}^n |\eta_{k0} - y_{k0}| \leq \delta(\varepsilon) .$$

Ha most még fennáll, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\psi_i(x; x_0, \eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{n0}) - \varphi_i(x; x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

akkor az

$$y_i(x) = \varphi_i(x; x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

megoldást *aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük.

A stabilitára vonatkozó vizsgálatokat vissza lehet vezetni állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletrendszer együtthatómátrixa sajátértékeinek a meghatározására. Ha ugyanis

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + h_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

és az a_{ij} együtthatókból kepezett

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrix

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

karakterisztikus egyenletének valamennyi λ gyöke (azaz A sajátértékei) olyan, hogy valós része vagy negatív előjelű, vagy 0 (azok a λ gyökök, amelyeknek valós része 0, az A minimálpolinomjának egyszeres 0-helyei), akkor az adott kezdeti feltételeknek megfelelő megoldás stabilis, ha viszont kivétel nélkül valamennyi λ valós része 0, akkor aszimptotikusan stabilis.

13.10.4. A másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásairól.

Tekintsük az

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet, ahol az $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ együtthatófüggvények és az $f(x)$ zavarófüggvény az $a \leq x \leq b$ intervallumban megadott folytonos függvények és $a(x)$ ebben az intervallumban sehol sem válik 0-vá. Elosztva az egyenletet $a(x)$ -szel és bevezetve a

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, \quad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}, \quad s(x) = \frac{f(x)}{a(x)}$$

jelöléseket, egyenletünket így írhatjuk:

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = s(x) .$$

Ezzel ekvivalens a következő, mátrixalakban írt differenciálegyenletrendszer:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s(x) \end{pmatrix} .$$

Előírva az $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ kezdeti feltételeket ($a \leq x_0 \leq b$), a megoldás egzisztenciáját és unicitását biztosító feltételek teljesülnek, ezért az előírt kezdeti feltételeknek megfelelő megoldás egyértelműen meghatározható. Könnyen belátható az, hogy ha az adott inhomogén lineáris differenciálegyenletnek megfelelő

$$y_h'' + p(x)y_h' + q(x)y_h = 0$$

homogén egyenletnek egy partikuláris megoldását ismerjük, akkor az inhomogén egyenlet általános megoldását kvadratúrákkal (integrálokkal) elő lehet állítani. Mielőtt ezt megvizsgálánk, előbb lássuk a homogén egyenlet általános megoldását.

Tegyük fel, hogy a

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_h \\ y_h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_h \\ y_h' \end{pmatrix}$$

homogén lineáris differenciálegyenletrendszer rezolvens mátrixa

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = \begin{pmatrix} \omega_{11}(x) & \omega_{12}(x) \\ \omega_{21}(x) & \omega_{22}(x) \end{pmatrix} = (\underline{\omega}_1(x) \quad \underline{\omega}_2(x)) ,$$

amelynek $\underline{\omega}_1(x)$ és $\underline{\omega}_2(x)$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, mert

$$\det(\underline{\Omega}|_{x_0}^x) \neq 0 .$$

Ezért

$$\begin{aligned} y_h(x) &= (1 \quad 0) \underline{\Omega}|_{x_0}^x \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \omega_{11}(x)y_0 + \omega_{12}(x)y'_0 , \\ y_h'(x) &= (0 \quad 1) \underline{\Omega}|_{x_0}^x \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \omega_{21}(x)y_0 + \omega_{22}(x)y'_0 \equiv \\ &\equiv \omega'_{11}(x)y_0 + \omega'_{12}(x)y'_0 . \end{aligned}$$

Ha $y_0 = c_1$ és $y'_0 = c_2$ tetszőleges állandók, akkor

$$y_h(x) = c_1\omega_{11}(x) + c_2\omega_{12}(x)$$

az általános megoldás. $\omega_{11}(x)$ és $\omega_{12}(x)$ két lineárisan független megoldása a homogén lineáris differenciálegyenletnek: $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$ választással adódik az $\omega_{11}(x)$ és $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ választás mellett az $\omega_{12}(x)$ partikuláris megoldás. E két függvény a homogén

lineáris differenciálegyenlet megoldásainak egy alaprendszerét alkotja. Ezek tetszőleges, nem szinguláris

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \quad (\det(K) \neq 0)$$

konstans mátrix elemeivel képezett

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= k_{11}\omega_{11}(x) + k_{21}\omega_{12}(x), \\ Y_2(x) &= k_{12}\omega_{11}(x) + k_{22}\omega_{12}(x), \end{aligned}$$

lineáris kombinációja szintén egy alaprendszert képez. $\omega_{11}(x)$ és $\omega_{12}(x)$ egymástól való lineáris függetlensége ugyanis azt jelenti, hogy

$$\alpha_1\omega_{11}(x) + \alpha_2\omega_{12}(x) = 0$$

csak úgy állhat fenn, hogy $\alpha_1 = 0$ és $\alpha_2 = 0$ egyszerre. Ebből az egyenletből azonban deriválással következik, hogy

$$\alpha_1\omega'_{11}(x) + \alpha_2\omega'_{12}(x) = 0,$$

vagy figyelembevéve azt, hogy $\omega'_{11}(x) = \omega_{21}(x)$ és $\omega'_{12}(x) = \omega_{22}(x)$, egyidejűleg fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \alpha_1\omega_{11}(x) + \alpha_2\omega_{12}(x) &= 0 \\ \alpha_1\omega_{21}(x) + \alpha_2\omega_{22}(x) &= 0 \end{aligned}$$

csakis akkor, ha $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Ez azonban valóban így van, mert – mátrixos írásmódban:

$$\begin{pmatrix} \omega_{11}(x) & \omega_{12}(x) \\ \omega_{21}(x) & \omega_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

ahonnan

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x = \begin{pmatrix} \omega_{11}(x) & \omega_{12}(x) \\ \omega_{21}(x) & \omega_{22}(x) \end{pmatrix}$$

determinánsának 0-tól különböző volta miatt egyértelműen $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ következik.

De akkor

$$\underline{\Omega}|_{x_0}^x K = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{pmatrix} = W(x)$$

determinánsa is 0-tól különbözik és így $Y_1(x)$ és $Y_2(x)$ is egy alaprendszert képez.

Jelölje $W(x) = \det(W(x))$ az Y_1, Y_2 alaprendszerhez tartozó, ún. *Wronski-féle determinánst*:

$$W(x) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1'.$$

Mivel $Y_1(x)$ és $Y_2(x)$ kielégítik a homogén lineáris differenciálegyenletünket, azért

$$\begin{aligned} Y_1'' + p(x)Y_1' + q(x)Y_1 &= 0, \\ Y_2'' + p(x)Y_2' + q(x)Y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Szorozzuk meg a második egyenletet Y_1 -gyel és az első $(-Y_2)$ -vel, majd adjuk őket össze:

$$(Y_1 Y_2'' - Y_2 Y_1'') + p(x)(Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1') = 0 ,$$

azaz

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0 ,$$

ahonnan

$$W(x) = C e^{-\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$$

következik (ahol $C = W(x_0)$). Ha x_0 tetszőleges és figyelembe vesszük azt, hogy a határozatlan integrál csak egy additív konstans erejéig van meghatározva, akkor írhatjuk:

$$W(x) = e^{-\int p(x) dx} .$$

Tegyük fel most azt, hogy $Y_1(x) \neq 0$, akkor

$$\frac{W}{Y_1^2} = \frac{Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1'}{Y_1^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{Y_2}{Y_1} \right) ,$$

ahonnan integrálással:

$$Y_2(x) = Y_1(x) \int \frac{W(x)}{Y_1^2(x)} dx = Y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{Y_1^2(x)} dx .$$

Tehát valóban $Y_1(x)$ ismeretében egy tőle lineárisan független $Y_2(x)$ megoldás kvadrátúrával nyerhető.

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának előállítására felhasználhatjuk a (rezolvens mátrixból csak a tetszőleges, konstans, nem-szinguláris K mátrix-szorzóval képezett)

$$\mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Wronski-féle mátrixot:

$$\begin{aligned} y(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x) \left\{ \mathbf{c} + \int_{x_0}^x \mathbf{W}^{-1}(\xi) \mathbf{s}(\xi) d\xi \right\} = \\ &= c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{Y_2(x) Y_1'(\xi) - Y_1(x) Y_2'(\xi)}{Y_1(\xi) Y_2'(\xi) - Y_2(\xi) Y_1'(\xi)} s(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

(A végeredmény felírásánál felhasználtuk azt, hogy

$$\mathbf{W}^{-1}(\xi) = \frac{1}{Y_1(\xi) Y_2'(\xi) - Y_2(\xi) Y_1'(\xi)} \begin{pmatrix} Y_2'(\xi) & -Y_2(\xi) \\ -Y_1'(\xi) & Y_1(\xi) \end{pmatrix}$$

és így

$$\mathbf{W}^{-1}(\xi) \mathbf{s}(\xi) = \frac{1}{Y_1(\xi) Y_2'(\xi) - Y_2(\xi) Y_1'(\xi)} \begin{pmatrix} Y_2'(\xi) & -Y_2(\xi) \\ -Y_1'(\xi) & Y_1(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s(\xi) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Y_1(\xi)Y_2'(\xi) - Y_2(\xi)Y_1'(\xi)} \begin{pmatrix} -Y_2(\xi)s(\xi) \\ Y_1(\xi)s(\xi) \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x) \mathbf{W}^{-1}(\xi) \mathbf{s}(\xi) &= \begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Y_2(\xi) \\ Y_1(\xi) \end{pmatrix} \frac{s(\xi)}{Y_1(\xi)Y_2'(\xi) - Y_2(\xi)Y_1'(\xi)} = \\ &= \frac{Y_2(x)Y_1(\xi) - Y_1(x)Y_2(\xi)}{Y_1(\xi)Y_2'(\xi) - Y_2(\xi)Y_1'(\xi)} s(\xi). \end{aligned}$$

Tehát a másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása valóban előállítható kvadratúrákkal, ha a megfelelő homogén lineáris differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldását már ismerjük. Megjegyezzük azonban azt, hogy általános esetben nincs módszer arra, hogy egy ilyen partikuláris megoldást előállítsunk.

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának szerkezetét tekintve:

$$y(x) = \{c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)\} + y_p(x),$$

látható, hogy az két részből tevődik össze:

$$c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$$

a megfelelő homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása és

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{Y_2(x)Y_1(\xi) - Y_1(x)Y_2(\xi)}{Y_1(\xi)Y_2'(\xi) - Y_2(\xi)Y_1'(\xi)} s(\xi) d\xi$$

az inhomogén lineáris differenciálegyenletnek az a partikuláris megoldása, amelyik az $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$ kezdeti feltételnek tesz eleget.

Megjegyzés.

Ha az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = s(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó

$$y_h'' + p(x)y_h' + q(x)y_h = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek ismerjük egy partikuláris megoldását, az $Y_1(x)$ függvényt, akkor az egész – kvadratúrákhoz vezető – gondolatmenetünket leegyszerűsíthetjük, a következőképpen.

Feltesszük, hogy a homogén egyenlet $Y_1(x)$ megoldásától lineárisan független másik megoldása

$$Y_2(x) = u(x) \cdot Y_1(x)$$

alakú, ahol $u(x)$ egyelőre ismeretlen. Azonban, ha

$$Y_2 = uY_1$$

is megoldás, akkor

$$\begin{aligned} Y_2' &= u'Y_1 + uY_1' \\ Y_2'' &= u''Y_1 + 2u'Y_1' + uY_1'' \end{aligned}$$

és ezeket behelyettesítve a homogén egyenletbe:

$$u''Y_1 + (2Y_1' + pY_1)u' = 0$$

adódik, azaz

$$\frac{u''}{u'} + 2\frac{Y_1'}{Y_1} + p = 0,$$

ahonnan integrálással:

$$\ln(u'Y_1^2) = - \int p(x)dx,$$

vagy

$$u' = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{Y_1^2}$$

és végül

$$u = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{Y_1^2} dx,$$

vagyis

$$Y_2 = Y_1 u = Y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{Y_1^2} dx.$$

Ezzel már a homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását felírhatjuk:

$$y_h = c_1 Y_1 + c_2 Y_2.$$

Most még keresünk egy partikuláris megoldást az inhomogén lineáris differenciálegyenlet számára, az állandók variálásának a módszerével, a következő alakban:

$$y_p = c_1(x)Y_1 + c_2(x)Y_2,$$

ahol $c_1(x)$ és $c_2(x)$ egyelőre ismeretlen függvények.

Ebből

$$y_p' = c_1(x)Y_1' + c_2(x)Y_2' + \{c_1'(x)Y_1 + c_2'(x)Y_2\}$$

és – ha nem akarjuk, hogy a behelyettesítés után kapott egyenletben a $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvények második deriváltjai is szerepeljenek – feltesszük, hogy

$$c_1'(x)Y_1 + c_2'(x)Y_2 = 0$$

legyen, így pedig

$$y_p'' = c_1(x)Y_1'' + c_2(x)Y_2'' + c_1'(x)Y_1' + c_2'(x)Y_2'.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenletbe ezeket behelyettesítve, ezt kapjuk:

$$c_1(x)\{Y_1'' + p(x)Y_1' + q(x)Y_1\} + c_2(x)\{Y_2'' + p(x)Y_2' + q(x)Y_2\} + \\ + c_1'(x)Y_1' + c_2'(x)Y_2' = s(x) .$$

Itt azonban

$$Y_1'' + p(x)Y_1' + q(x)Y_1 = 0 , \\ Y_2'' + p(x)Y_2' + q(x)Y_2 = 0 ,$$

mert Y_1 és Y_2 megoldásai a homogén lineáris differenciálegyenletnek és így az ismeretlen $c_1(x)$ $c_2(x)$ függvények első deriváltjaira a következő meghatározó egyenletrendszert kapjuk:

$$c_1'(x)Y_1 + c_2'(x)Y_2 = 0 \\ c_1'(x)Y_1' + c_2'(x)Y_2' = s(x) .$$

Ennek az egyenletrendszernek az együtthatómátrixa az Y_1, Y_2 alaprendszerrel képezett nem-szinguláris Wronski-féle mátrix, tehát $c_1'(x)$ és $c_2'(x)$ egyértelműen meghatározható.

13.11. A másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása hatványsor alakjában

13.11.1. Megoldás hatványsor alakjában.

Láttuk azt, hogy egy másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásait elő tudjuk állítani, ha ismerjük a homogén egyenletnek legalább egy megoldását. Bizonyos feltételek teljesülése esetén egy ilyen megoldást hatványsor alakjában szokás keresni.

Legyen a vizsgált homogén lineáris differenciálegyenlet a következő:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 .$$

Tegyük fel azt, hogy az együttható függvényeket az $|x| < R$ intervallumban x hatványai szerint haladó hatványsorokkal lehet előállítani:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i , \\ q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j .$$

Keressük a megoldást

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

alakban. Egyelőre feltesszük azt, hogy ez a sor is konvergens és így a tagonkénti deriválással nyert

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

hatványsorok is konvergenssek.

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe, a következőt nyerjük:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k b_i x^{i+k-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_j \cdot x^{j+k} = 0.$$

Az azonos kitevőjű x hatványokat összevonva és a tagok együtthatóit 0-val egyenlővé téve nyerjük az ismeretlen a_k együtthatók számára a következő egyenleteket:

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 + b_0 a_1 + c_0 a_0 = 0,$$

$$3 \cdot 2 \cdot a_3 + 2b_0 a_2 + (b_1 + c_0) a_1 + c_1 a_0 = 0,$$

$$4 \cdot 3 \cdot a_4 + 3b_0 a_3 + (2b_1 + c_0) a_2 + (b_2 + c_1) a_1 + c_2 a_0 = 0,$$

és így tovább.

Ezekből az egyenletekből két partikuláris megoldás hatványsorának az együtthatóit lehet meghatározni: $y_1(x)$ -et kapjuk az $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ választással és $y_2(x)$ -et az $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ speciális választással, ami megfelel az

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0,$$

illetve

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1$$

speciális kezdeti feltételeknek. A differenciálegyenlet általános megoldása ezeknek a partikuláris megoldásoknak a lineáris kombinációja, tetszőleges C_1 és C_2 állandókkal:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Ami a megoldásként nyert hatványsorok konvergenciáját illeti, arra nézve fennáll a következő tétel:

Ha a

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad \text{és} \quad q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

hatványsorok az $|x| < R$ intervallumban konvergenssek, akkor az előbbi eljárással nyert $y_1(x)$, ill. $y_2(x)$ megoldások hatványsorai is ugyanitt konvergenssek és az adott homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásait adják.

Ha speciálisan $p(x)$ és $q(x)$ polinomok, akkor a megoldásul nyert hatványsorok minden x -re konvergensek.

Ha a differenciálegyenlet

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

alakú, ahol most $P_0(x)$, $P_1(x)$ és $P_2(x)$ polinomok, akkor ez a

$$\frac{P_1(x)}{P_0(x)} = p(x), \quad \frac{P_2(x)}{P_0(x)} = q(x)$$

választással visszavezethető az előzőre, azonban nem minden további nélkül. Ugyanis, ha $P_0(0) \neq 0$, akkor $p(x)$ és $q(x)$ x hatványai szerint haladó hatványsorba fejthetők és az előbb ismertetett eljárás szerint meg lehet határozni a megoldásokat. Az eredményül kapott sorok konvergenciájára azonban azt lehet mondani, hogy e sorok az $|x| < r$ intervallumban konvergensek és a differenciálegyenlet megoldásait adják, ahol most r a $P_0(x) = 0$ egyenlet legkisebb abszolút értékű gyökének az abszolút értékét jelenti.

Az eljárást ebben az esetben célszerűbb úgy alkalmazni, hogy a $P_0(x)$ polinommal való osztást nem végezzük el.

13.11.2. Nem lényeges szingularitás.

Az alkalmazásokban igen gyakran szerepel a következő alakú differenciálegyenlet:

$$x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0.$$

Ennek a differenciálegyenletnek – mint mondani szokás – az $x = 0$ helyen *nem lényeges szingularitása* van. Itt is feltesszük azt, hogy $p(x)$ és $q(x)$ hatványsorokkal előállíthatók.

A megoldást most a következő, módosított hatványsor alakjában keressük:

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

ahol ρ egyelőre határozatlan. Természetes az, hogy most $a_0 \neq 0$. A differenciálegyenletbe helyettesítjük a következő sorokat:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j,$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\rho+k},$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k) a_k x^{\rho+k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k)(\rho+k-1) a_k x^{\rho+k-2}.$$

Ekkor az ismeretlen a_k együtthatókra a következő egyenleteket kapjuk:

$$[\rho(\rho - 1) + b_0\rho + c_0]a_0 = 0 ,$$

$$[(\rho + 1)\rho + b_0(\rho + 1) + c_0]a_1 + [b_1\rho + c_1]a_0 = 0 ,$$

$$[(\rho + 2)(\rho + 1) + b_0(\rho + 2) + c_0]a_2 + [b_1(\rho + 1) + c_1]a_1 + [b_2\rho + c_2]a_0 = 0$$

és így tovább.

Vegyük észre azt, hogy mindegyik egyenletben egy új ismeretlen a_k együttható szerepel és ennek az együtthatója mindig az

$$F(\rho) = \rho(\rho - 1) + b_0\rho + c_0$$

polinom helyettesítési értéke: $F(\rho + k)$, ahol $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ($b_0 = p(0)$ és $c_0 = q(0)$).

Mivel a feltevés szerint $a_0 \neq 0$, azért az első egyenletből ρ meghatározására az

$$F(\rho) = 0 ,$$

azaz

$$\rho(\rho - 1) + b_0\rho + c_0 = 0$$

jellemző másodfokú egyenletet kapjuk.

Legyenek ennek az egyenletnek a gyökei ρ_1 és ρ_2 és állapodjunk meg abban, hogy ρ_1 jelöli a gyökök közül a nem kisebbet, azaz $\rho_1 \geq \rho_2$.

Ha most az a_k együtthatókat meghatározó egyenletekbe ρ helyébe ρ_1 -et helyettesítjük, akkor $-a_0$ értékét tetszőlegesen megválasztva – valamennyi a_k értékét egymásután ($k = 1, 2, 3, \dots$) meg tudjuk határozni.

Ha most még ρ_2 olyan, hogy a $\rho_1 - \rho_2$ különbség nem 0, vagy egész szám, akkor ρ_2 -vel ugyanúgy végig számolva egy másik – az előzőtől lineárisan független – partikuláris megoldást tudunk előállítani:

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad (\alpha_0 \neq 0) ,$$

$$y_2(x) = x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \quad (\beta_0 \neq 0) .$$

Ha viszont a $\rho_1 - \rho_2$ különbség 0, vagy egész szám, akkor egyelőre csak egy megoldásunk van:

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad (\alpha_0 \neq 0) .$$

Egy ettől lineárisan független másik partikuláris megoldást az

$$y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)$$

alakban kereshetjük. Az ismeretlen $u(x)$ függvényre a következő differenciálegyenletet nyerjük:

$$x^2 u'' + x \left(2 \frac{x y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right) u' = 0 .$$

Ha itt most $u'(x)$ -et az

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{\alpha+k} \quad (\gamma_0 \neq 0)$$

hatványsor alakjában keressük, akkor α -ra a következő eredményt kapjuk (a részletszámolásokat mellőzve):

$$\alpha = \rho_2 - \rho_1 - 1$$

és így

$$u'(x) = x^{\rho_2 - \rho_1 - 1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k \quad (\gamma_0 \neq 0).$$

Ebből pedig integrálással adódik:

$$u(x) = \beta \cdot \ln x + x^{\rho_2 - \rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^* x^k ;$$

ahol $\beta = \gamma_{\rho_1 - \rho_2}$.

Végül

$$y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) = \beta \cdot y_1(x) \cdot \ln x + x^{\rho_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k .$$

Előfordulhat az az eset is, hogy $\beta = 0$. Ha azonban $\rho_1 - \rho_2 = 0$, akkor biztos, hogy $\beta \neq 0$.

13.11.3. A Bessel-féle differenciálegyenlet.

Az alkalmazásokban – különösen hengerszimmetrikus problémák tárgyalásánál – fontos szerepet játszik a *Bessel-féle differenciálegyenlet*:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0 ,$$

vagy másképpen írva:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0 ,$$

ahol $p =$ állandó.

Keressük a megoldást az

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_0 \neq 0)$$

hatványsor alakjában.

A ρ kitevőt meghatározó jellemző egyenlet:

$$F(\rho) \equiv \rho(\rho - 1) + \rho - p^2 = 0 ,$$

azaz

$$\rho^2 - p^2 = 0 ,$$

ahonnan

$$\rho_1 = p, \quad \rho_2 = -p. \quad (p \neq 0).$$

Az egyik partikuláris megoldás tehát ilyen alakú:

$$y_1(x) = x^p(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots).$$

Behelyettesítve ezt a differenciálegyenletbe, az együtthatókra a következő egyenletek adódnak:

$$a_0 = \text{tetszőleges},$$

$$[(p+1)^2 - p^2]a_1 = 0,$$

$$[(p+2)^2 - p^2]a_2 + a_0 = 0,$$

.....

$$[(p+k)^2 - p^2]a_k + a_{k-2} = 0,$$

.....

Mivel $a_1 = 0$, azért

$$a_{2n+1} = 0$$

és

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n(n+p)}.$$

Válasszuk a_0 értékét a következőképpen:

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}.$$

(Itt Γ az ún. gamma-függvényt jelöli, melyet a

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

improprius integrál definiál. E függvényt a következő függvényegyenletek jellemezznek:

$$1.) \quad \Gamma(1) = 1,$$

$$2.) \quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad \text{tetszőleges } p \text{ mellett},$$

$$3.) \quad \Gamma(p+1) = p! \quad \text{ha } p \text{ pozitív egész szám.})$$

A páros indexű együtthatók:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1!(p+1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2 \cdot (p+2)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(p+1)(p+2)},$$

$\vdots$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} \cdot n!(p+1)(p+2) \dots (p+n)};$$

A páratlan indexűek mind zérusok.

Igy tehát az ún. p -indexű elsőfajú Bessel-függvény (differenciálegyenletünknek egyik partikuláris megoldása, azaz $y_1(x)$) a következő lesz:

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(p+k+1)}.$$

Ha speciálisan $p = 0$, akkor a 0-indexű elsőfajú Bessel-függvényt kapjuk:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

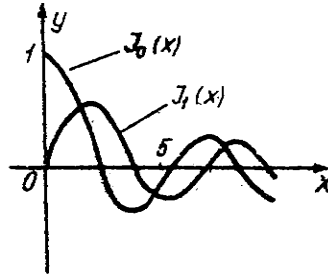
$p = 1$ esetén adódik az 1-indexű elsőfajú Bessel-függvény:

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{(k!)(k+1)!} = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots\right)$$

és általában $p = n$ esetén, ha n pozitív egész szám, az n -indexű elsőfajú Bessel-függvény:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} = \\ &= \frac{x^n}{2^n \cdot n!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - + \dots\right) \end{aligned}$$

E formulából látszik, hogy ha n egész szám és páros (vagy 0), akkor $J_n(x)$ páros függvény, viszont páratlan n egész esetén $J_n(x)$ is páratlan függvény.



10. ábra

Ha n egész szám, akkor (a sor elejéről a 0 értékű tagokat elhagyva)

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{(k!)(n-k)!} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!} = (-1)^n J_n(x).$$

A differenciálegyenlet általános megoldásához szükség van még egy, az $y_1(x)$ -től lineárisan független partikuláris megoldásra: $y_2(x)$ -re.

Ha p nem egész szám, vagy nem 0, akkor $J_p(x)$ -től lineárisan független másik megoldás a következő függvény:

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p+k+1)}$$

és az általános megoldás:

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x) .$$

Ha azonban $p = n$ egész szám, vagy 0, akkor amint láttuk

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) ,$$

tehát ezek lineárisan összefüggenek. Ebben az esetben egy másik megoldást az

$$y_2(x) = \beta J_n(x) \cdot \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$$

alakban kereshetjük. Alkalmas állandó szorzótényezővel így jutunk az n -indexű másodfajú Bessel-függvényre:

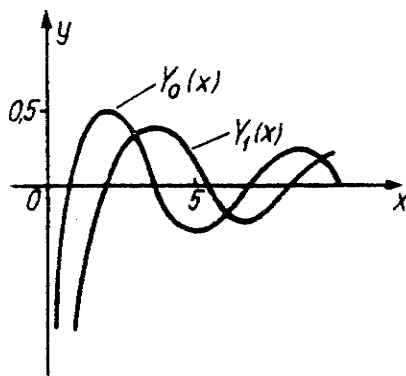
$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \cdot \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m-n} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) ,$$

ahol $C = 0,577215 \dots$ az ún. Euler-Mascheroni-féle állandó. Ezzel az általános megoldás:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) .$$

Ha speciálisan $n = 0$, akkor

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \cdot \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) .$$



11. ábra

13.11.4. Bessel-függvényekre vonatkozó néhány összefüggés.

Lássunk most néhány nevezetes összefüggést.

Mindenekelőtt deriváljuk az $x^p J_p(x)$ szorzatot:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2p+2k}}{2^{p+2k} \cdot \Gamma(k+1) \Gamma(p+k+1)} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2p+2k-1}}{2^{p+2k-1} \cdot \Gamma(k+1) \Gamma(p+k)} = x^p J_{p-1}(x). \end{aligned}$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^p J_{-p}(x)) &= -x^p J_{-p+1}(x), \\ \frac{d}{dx}(x^{-p} J_{-p}(x)) &= x^{-p} J_{-p-1}(x), \end{aligned}$$

Ezekből nyerjük a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned} x J_p'(x) + p J_p(x) &= x J_{p-1}(x), \\ x J_p'(x) - p J_p(x) &= -x J_{p+1}(x), \\ J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) &= 2 J_p'(x), \\ J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) &= \frac{2p}{x} J_p(x). \end{aligned}$$

Analóg formulák érvényesek a másodfajú Bessel-függvényekre.

Mint specialis esetet megemlíjtük, hogy

$$J_0'(x) = -J_1(x) ,$$

illetve

$$Y_0'(x) = -Y_1(x) .$$

Most vizsgáljuk meg a $p = \frac{2n+1}{2}$ indexű elsőfajú Bessel-függvényeket (ahol n egész szám).

Mindenekelőtt legyen $p = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma(\frac{3}{2})} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma(\frac{3}{2})} \sin x . \end{aligned}$$

Vagy, mivel kimutathatóan

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} ,$$

azért végül is

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x .$$

Teljesen analóg módon kapjuk azt, hogy

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x .$$

Konstans szorzótól eltekintve, ugyanezre az eredményre jutunk akkor is, ha az

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

differenciálegyenletet ún. normálalakra transzformáljuk, azaz olyan alakúra, hogy a differenciálegyenletből hiányozzék az ismeretlen függvény első deriváltja. Ezt így lehet elérni:

Legyen

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) ,$$

amikor is

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'v + u \cdot v' , \\ y''(x) &= u''v + 2u'v' + u \cdot v'' \end{aligned}$$

és így

$$u'' \cdot v + \left(2v' + \frac{v}{x}\right) u' + \left(v'' + \frac{1}{x}v' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)v\right) u = 0.$$

Ha most

$$2v' + \frac{v}{x} = 0,$$

azaz

$$v = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

akkor

$$y = \frac{u}{\sqrt{x}}$$

és a differenciálegyenlet ilyen alakúra redukálódik:

$$u'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) u = 0.$$

Ha most $p = \frac{1}{2}$, akkor az

$$u'' + u = 0$$

differenciálegyenletre jutunk, ahonnan

$$u(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

és így a korábbi eredménnyel összhangban:

$$y(x) = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Legyen most általában $p = \frac{2n+1}{2}$, ahol n egész szám. Ekkor a

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$$

formula felhasználásával, rekurzív úton valamennyi $J_{\frac{2n+1}{2}}(x)$ függvényt kifejezhetjük elemi függvényekkel. Így pl. ha $p = \frac{1}{2}$, akkor

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x),$$

ahonnan

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

és így tovább.

Az

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

differenciálegyenletet, mint láttuk az

$$y = \frac{u}{\sqrt{x}}$$

transzformációval az

$$u'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) u = 0$$

normál alakra lehet transzformálni. Innen az

$$m = \frac{1}{4} - p^2, \quad \frac{m}{x^2} = \rho(x)$$

helyettesítéssel kapjuk az

$$u'' + (1 + \rho(x))u = 0$$

differenciálegyenletet. Ha $|x|$ igen nagy, akkor $|\rho(x)|$ igen kicsiny és 1 mellett elhanyagolható, így jó közelítéssel az

$$u'' + u = 0$$

differenciálegyenletre jutunk, ahonnan

$$u = A \sin(x + \omega)$$

(A és ω állandók) adódik.

Ennek alapján kimutatható, hogy igen nagy $|x|$ értékekre fennáll, hogy

$$\begin{aligned} J_p(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi p}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{r_p(x)}{x\sqrt{x}}, \\ Y_p(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\rho_p(x)}{x\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

ahol $|r_p(x)|$ és $|\rho_p(x)|$ véges korlát alatt marad, ha $|x| \rightarrow \infty$. Így aszimptotikusan, jó közelítéssel, nagy $|x|$ esetén:

$$\begin{aligned} J_p(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi p}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_p(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Tekintsük ismét az

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

Bessel-féle differenciálegyenlet normál alakját:

$$u'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)u = 0.$$

Ha ezt az egyenletet a

$$w'' + w = 0$$

egyenlettel összehasonlítjuk, akkor azt találjuk, hogy a Bessel-féle differenciálegyenlet bármely megoldásának szomszédos 0-helyei közti távolságok nagyobbak π -nél, ha $p > \frac{1}{2}$ és kisebbek π -nél, ha $0 \leq p < \frac{1}{2}$. Másrészt a Bessel-függvények aszimptotikus viselkedésére előbb talált eredmények alapján, azaz figyelemmel arra, hogy igen nagy $|x|$ értékeknél jó közelítéssel

$$1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \approx 1,$$

azt találjuk, hogy a Bessel-féle differenciálegyenlet megoldásainak szomszédos 0-helyei közti távolságok egyre kevesebbel térnek el π -től, ahogyan $|x|$ növekszik.

Ezt látjuk megerősítve, ha függvénytáblázatból kiolvassuk pl. a következő 0-helyeket:

$$J_0(x_k) = 0, \quad \text{ha} \quad x_1 = 2,4048$$

$$x_2 = 5,5201$$

$$x_3 = 8,6537$$

$$x_4 = 11,7915$$

$$x_5 = 14,9309$$

$$\vdots$$

$$J_1(x_k) = 0, \quad \text{ha} \quad x_1 = 3,8317$$

$$x_2 = 7,0156$$

$$x_3 = 10,1735$$

$$x_4 = 13,3237$$

$$x_5 = 16,4706$$

$$\vdots$$

13.11.5. A Bessel-függvények ortogonalitása.

Jelölje $y(x)$ az

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0$$

Bessel-féle differenciálegyenlet egy megoldását.

Cseréljük ki a független változót t -re és legyen $t = \lambda x$, ahol λ tetszőleges állandó paraméter. Ekkor $y(t)$ a

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - p^2) y = 0$$

egyenlet megoldása, azonban $t = \lambda x$ miatt

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{dx} \quad \text{és} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

és így egyenletünk a következő alakot ölti:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - p^2) y = 0.$$

Ha tehát $y(x)$ megoldása az

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

egyenletnek, akkor $y(\lambda x)$ lesz a megoldása az

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0$$

differenciálegyenletnek.

Megállapíthatjuk tehát azt, hogy ha a Bessel-féle differenciálegyenletben az y együtthatóját $(x^2 - p^2)$ helyett $(\lambda^2 x^2 - p^2)$ -re változtatjuk, akkor ennek eredményeként a megoldás, vagyis a p -indexű Bessel-függvény argumentuma fog x -ről λx -re változni.

Legyen most λ és μ két tetszőleges nem negatív szám. Tegyük fel, hogy $p > -1$ és tekintsük a

$$J_p(\lambda x) = y ,$$

$$J_p(\mu x) = z$$

Bessel-függvényeket. Fennáll, hogy

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0 ,$$

$$x^2 z'' + xz' + (\mu^2 x^2 - p^2)z = 0 ,$$

vagy mindkét egyenletet $x \neq 0$ -val végigosztva és átrendezve:

$$xy'' + y' - \frac{p^2}{x}y = -\lambda^2 xy ,$$

$$xz'' + z' - \frac{p^2}{x}z = -\mu^2 xy .$$

Kombináljuk össze ezt a két egyenletet úgy, hogy az első $(-z)$ -vel és a másodikat y -nal szorozzuk, majd összeadjuk:

$$x(yz'' - zy'') + (yz' - zy') = (\lambda^2 - \mu^2)xyz ,$$

vagy

$$x(yz' - zy')' + (yz' - zy') = (\lambda^2 - \mu^2)xyz ,$$

és végül

$$(x(yz' - zy'))' = (\lambda^2 - \mu^2)xyz .$$

Integráljunk mindkét oldalon x szerint 0-tól 1-ig:

$$[x(yz' - zy')]_{x=0}^1 = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 xyz dx .$$

Vegyük most figyelembe azt, hogy $y = J_p(\lambda x)$ és $z = J_p(\mu x)$ és feltettük azt, hogy $p > -1$, amikor is nyilván a baloldal $x = 0$ helyettesítésekor 0 lesz. Továbbá

$$\begin{aligned} y(1) &= J_p(\lambda), & z(1) &= J_p(\mu); \\ y'(1) &= \lambda J_p'(\lambda), & z'(1) &= \mu J_p'(\mu). \end{aligned}$$

Igy végül ezt kapjuk:

$$\mu J_p(\lambda) J_p'(\mu) - \lambda J_p(\mu) J_p'(\lambda) = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx.$$

Most tegyük fel azt, hogy λ és μ a $J_p(x)$ Bessel-függvény két különböző pozitív 0-helye, azaz legyen

$$J_p(\lambda) = 0, \quad J_p(\mu) = 0, \quad \lambda \neq \mu.$$

Ekkor $\lambda^2 - \mu^2 \neq 0$ miatt azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy ha $\lambda \neq \mu$ és mindketten a $J_p(x)$ Bessel-függvény 0-helyei, akkor a $J_p(\lambda x)$ és $J_p(\mu x)$ függvények a $(0, 1)$ intervallumban az x súlyfüggvényre nézve ortogonális függvények.

Legyen most $\lambda \neq \mu$ és tetszőleges nem negatív paraméter, amikor is

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = \frac{\lambda J_p(\mu) J_p'(\lambda) - \mu J_p(\lambda) J_p'(\mu)}{\mu^2 - \lambda^2}.$$

A Bernoulli-l'Hospital szabály alkalmazásával határozzuk meg ennek a határértékét a $\mu \rightarrow \lambda$ határártmenet mellett:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx &= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda J_p(\mu) J_p'(\lambda) - \mu J_p(\lambda) J_p'(\mu)}{\mu^2 - \lambda^2} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda J_p'(\mu) J_p'(\lambda) - \mu J_p(\lambda) J_p''(\mu) - J_p(\lambda) J_p'(\mu)}{2\mu} = \\ &= \frac{\lambda J_p'^2(\lambda) - \lambda J_p(\lambda) J_p''(\lambda) - J_p(\lambda) J_p'(\lambda)}{2\lambda} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ J_p'^2(\lambda) - J_p(\lambda) J_p''(\lambda) - \frac{J_p(\lambda) J_p'(\lambda)}{\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

$J_p(\lambda)$ mint a λ paraméter függvénye eleget tesz a következő Bessel-féle differenciálegyenletnek:

$$\lambda^2 J_p''(\lambda) + \lambda J_p'(\lambda) + (\lambda^2 - p^2) J_p(\lambda) = 0,$$

ahonnan

$$-J_p(\lambda) J_p''(\lambda) - \frac{J_p(\lambda) J_p'(\lambda)}{\lambda} = \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) J_p^2(\lambda).$$

Ezt figyelembe véve:

$$\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx = \frac{1}{2} \left\{ J_p'^2(\lambda) + \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) J_p^2(\lambda) \right\} .$$

Ha most feltesszük azt, hogy $J_p(\lambda) = 0$, azaz λ a $J_p(x)$ Bessel-függvény 0-helye, akkor végül

$$\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx = \frac{1}{2} J_p'^2(\lambda) \neq 0 .$$

(A jobboldal bizonyíthatóan nem egyenlő 0-val.)

Ha felhasználjuk ezt az összefüggést:

$$\lambda J_p'(\lambda) - p J_p(\lambda) = -\lambda J_{p+1}(\lambda) ,$$

ahonnan ($J_p(\lambda) = 0$ esetén)

$$J_p'(\lambda) = -J_{p+1}(\lambda) ,$$

akkor a végeredmény így is írható:

$$\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx = \frac{1}{2} J_{p+1}^2(\lambda) .$$

Mindezeknek az összefüggéseknek fontos szerepe van valamely négyzetével együtt, a $[0, 1]$ intervallumban integrálható $f(x)$ függvénynek Bessel-függvények szerint haladó

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k J_p(\lambda_k x)$$

alakú sorbafejtése esetén ($J_p(\lambda_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$). Erre pedig bizonyos parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos peremérték-feladatok megoldásakor van szükség.

14. Másodrendű, állandó együtthatójú lineáris parciális differenciálegyenletek.

14.1. Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek osztályozása.

14.1.1. Bevezetés

Egy olyan egyenletet, amely valamely két- vagy többváltozós ismeretlen függvény parciális deriváltjait tartalmazza, *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük. Az ismeretlen függvény legmagasabbrendű deriváltja, amely az egyenletben szerepel, meghatározza a *parciális differenciálegyenlet rendszámát*.

A közönséges differenciálegyenletekhez hasonlóan azt mondjuk, hogy a parciális differenciálegyenlet *lineáris*, ha az egyenlet az ismeretlen függvényben és annak a deriváltjaiban lineáris. Ha a lineáris egyenlet valamennyi tagja tartalmazza vagy az ismeretlen függvényt, vagy annak valamelyik parciális deriváltját, akkor *homogén lineáris*, ellenkező esetben *inhomogén lineáris*.

Például

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{az egydimenziós hullámeqyenlet;} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{az egydimenziós hővezetési egyenlet;} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & \text{a kétdimenziós Laplace-egyenlet;} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, & \text{a háromdimenziós Laplace-egyenlet}\end{aligned}$$

másodrendű, homogén lineáris parciális differenciálegyenletek. (Itt mindenütt u jelöli az ismeretlen függvényt; a független változók közül t az idő; x, y, z pedig helykoordináták; c megadott állandó.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad \text{a kétdimenziós Poisson-egyenlet,}$$

ahol $f(x, y) \neq 0$ megadott függvény, másodrendű, inhomogén lineáris parciális differenciálegyenlet.

A parciális differenciálegyenlet *megoldásának* nevezünk minden olyan többváltozós függvényt, amelynek léteznek a független változók valamely T tartományában az egyenletben szereplő összes parciális deriváltjai és amely a T tartományban mindenütt azonosan kielégíti a megadott egyenletet.

Általában egy parciális differenciálegyenlet megoldásainak a halmaza rendkívül nagy és áttekinthetetlen. Így pl. könnyen ellenőrizhető, hogy a merőben különböző

$$\begin{aligned}u(x, y) &= x^2 - y^2, \\u(x, y) &= e^x \cos y, \\u(x, y) &= \ln(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

kétváltozós függvények mind megoldásai a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-egyenletnek.

A következőkben látni fogjuk azt, hogy egy konkrét fizikai-problémát leíró parciális differenciálegyenlet egyértelmű, egyetlen megoldásának meghatározásához szükségünk van arra, hogy a differenciálegyenleten kívül, a konkrét fizikai körülményekhez illeszkedő mellékfeltételeket is előírjuk. Így pl. bizonyos esetekben elő kell írunk a T tartomány határán (peremén) lévő pontokban érvényes *peremfeltételeket*; vagy ha a t idő az egyik független változó, akkor a $t = 0$ kezdeti időpillanatban érvényes ún. *kezdeti feltételeket* kell ismernünk.

A közönséges differenciálegyenleteknél láttuk azt, hogy a homogén lineáris esetben az egyenlet megoldásainak bármilyen konstans együtthatókkal képezett lineáris kombinációi szintén megoldások. Ez a tulajdonság a homogén lineáris differenciálegyenletek esetében is érvényes. Ha pl. u_1 és u_2 egy homogén lineáris parciális differenciálegyenlet megoldásai, akkor

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

szintén megoldás.

14.1.2. Másodrendű egyenletek két független változóval.

Általánosságban a másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet az n -változós ismeretlen u függvény számára ilyen alakú:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i u'_{x_i} + F u = G,$$

ahol feltesszük, hogy $A_{ij} = A_{ji}$ és A_{ij}, B_i, F , valamint G megadott n változós folytonos függvények, az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ független változók valamely összefüggő T tartományában.

A következőkben – egyszerűség kedvéért – az általános esetet leszűkítjük a kétváltozós esetre. Tehát az ismeretlen $u(x, y)$ kétváltozós függvényre adottnak vesszük a következő másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$A u''_{xx} + 2B u''_{xy} + C u''_{yy} + D u'_x + E u'_y + F u = G,$$

ahol az együtthatók az (x, y) -sík valamely T tartományában megadott folytonos függvények.

Az ilyen típusú egyenletek osztályozása hasonlít ahhoz, ahogyan (konstans együtthatók mellett) az analitikus geometriában egy

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

alakú egyenlettel megadott másodrendű görbéről azt mondjuk, hogy hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus típusú aszerint, hogy $B^2 - AC$ pozitív, zérus, vagy negatív.

Az

$$Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} + Du'_x + Eu'_y + Fu = G$$

parciális differenciálegyenlet típusát annak alapján határozzuk meg, hogy ezt az egyenletet egy meghatározott (x_0, y_0) pontban egy alkalmas koordinátatranszformációval *kanonikus* (standard) *alakra* lehet hozni. A differenciálegyenletet *hiperbolikusnak*, *parabolikusnak* vagy *elliptikusnak* nevezzük az (x_0, y_0) pontban, ha

$$B^2(x_0, y_0) - A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$$

pozitív, zérus vagy negatív. Ha ez fennáll a T tartomány minden pontjában, akkor a differenciálegyenlet hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus az egész tartományban.

A kétváltozós esetben mindig el lehet érni azt, hogy a differenciálegyenletet az adott tartományban kanonikus alakra transzformáljuk. Ezzel szemben a több változós esetben általában (speciális esetektől eltekintve) nem lehet ilyen transzformációt végrehajtani.

Mármost ennek a transzformációnak a lényege abban áll, hogy az (x, y) független változók helyett új (ξ, η) független változókat vezetünk be. Legyenek

$$\begin{aligned} \xi(x, y), \\ \eta(x, y) \end{aligned}$$

azok a legalább kétszer folytonosan deriválható függvények, amelyek az új független változókat a régiakkal összekapcsolják. Feltesszük azt, hogy a

$$\Delta = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix}$$

függvény-determináns (Jacobi-féle determináns) sehol sem zérus abban a T tartományban, amelyben az adott differenciálegyenletet vizsgáljuk, tehát egy-egy értelmű a kapcsolat a régi és az új független változók között.

Fejezzük ki az u ismeretlen függvény első és másodrendű parciális deriváltjait az új változók szerinti parciális deriváltakkal:

$$\begin{aligned} u'_x &= u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x, \\ u'_y &= u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y, \\ u''_{xx} &= u''_{\xi\xi} \xi'^2_x + 2u''_{\xi\eta} \xi'_x \eta'_x + u''_{\eta\eta} \eta'^2_x + u''_{\xi\xi} \xi'^2_x + u'_\xi \xi''_{xx} + u'_\eta \eta''_{xx}, \\ u''_{xy} &= u''_{\xi\xi} \xi'_x \xi'_y + u''_{\xi\eta} (\xi'_x \eta'_y + \xi'_y \eta'_x) + u''_{\eta\eta} \eta'_x \eta'_y + u'_\xi \xi''_{xy} + u'_\eta \eta''_{xy}, \\ u''_{yy} &= u''_{\xi\xi} \xi'^2_y + 2u''_{\xi\eta} \xi'_y \eta'_y + u''_{\eta\eta} \eta'^2_y + u'_\xi \xi''_{yy} + u'_\eta \eta''_{yy}. \end{aligned}$$

Helyettesítsük most be ezeket az adott differenciálegyenletbe:

$$\begin{aligned} & (A\xi_x'^2 + 2B\xi_x'\xi_y' + C\xi_y'^2)u_{\xi\xi}'' + (A\eta_x'^2 + 2B\eta_x'\eta_y' + C\eta_y'^2)u_{\eta\eta}'' + \\ & + 2\{A\xi_x'\eta_x' + B(\xi_x'\eta_y' + \xi_y'\eta_x') + C\xi_y'\eta_y'\}u_{\xi\eta}'' = \\ & = H^*(\xi, \eta, u, u_\xi', u_\eta') , \end{aligned}$$

ahol most rövidség kedvéért a H^* függvénybe foglaltuk a részletesen ki nem írt tagokat.

Vezessük még be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} A^* &= A\xi_x'^2 + 2B\xi_x'\xi_y' + C\xi_y'^2 , \\ B^* &= A\xi_x'\eta_x' + B(\xi_x'\eta_y' + \xi_y'\eta_x') + C\xi_y'\eta_y' , \\ C^* &= A\eta_x'^2 + 2B\eta_x'\eta_y' + C\eta_y'^2 . \end{aligned}$$

Ha tehát az eredeti differenciálegyenlet rövidített alakja

$$Au_{xx}'' + 2Bu_{xy}'' + Cu_{yy}'' = H(x, y, u, u_x', u_y') ,$$

akkor a transzformáció után nyert egyenlet ilyen alakú:

$$A^*u_{\xi\xi}'' + 2B^*u_{\xi\eta}'' + C^*u_{\eta\eta}'' = H^* .$$

Megfelelő számolással ellenőrizhető az, hogy

$$B^* - A^*C^* = (B^2 - AC) \cdot \Delta^2 ,$$

tehát, ha a feltevésnek megfelelően $\Delta \neq 0$, akkor $B^* - A^*C^*$ ugyanúgy pozitív, zérus, vagy negatív, amint ez fennáll $(B^2 - AC)$ -re, tehát a differenciálegyenlet hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus marad egy (ξ, η) pontban, ahogyan hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus volt a megfelelő (x, y) pontban.

14.1.3. Másodrendű (főrészükből) lineáris parciális differenciálegyenletek kanonikus alakja.

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy amikor az

$$Au_{xx}'' + 2Bu_{xy}'' + Cu_{yy}'' = H(x, y, u, u_x', u_y')$$

parciális differenciálegyenletet a

$$\left. \begin{aligned} &\xi(x, y) \\ &\eta(x, y) \end{aligned} \right\}$$

függvényrendszer közvetítésével bevezetett új változókra áttérve az

$$A^*u_{\xi\xi}'' + 2B^*u_{\xi\eta}'' + C^*u_{\eta\eta}'' = H^*(\xi, \eta, u, u_\xi', u_\eta')$$

alakra transzformáljuk, akkor hogyan kell a változó-transzformációt definiáló függvényrendszert megválasztani ahhoz, hogy ez az új alak a lehető legegyszerűbb, vagyis kanonikus legyen.

Mindenekelőtt feltesszük azt, hogy az A, B, C együtthatók egyike sem zérus. Azt akarjuk, hogy a transzformáció után A^* és C^* zérus legyen:

$$\begin{aligned} A^* &= A\xi_x'^2 + 2B\xi_x'\xi_y' + C\xi_y'^2 = 0, \\ C^* &= A\eta_x'^2 + 2B\eta_x'\eta_y' + C\eta_y'^2 = 0. \end{aligned}$$

Ez a két feltételi egyenlet

$$A\zeta_x'^2 + 2B\zeta_x'\zeta_y' + C\zeta_y'^2 = 0$$

alakú, ahol $\zeta(x, y)$ ismeretlen függvény jelentheti akár a $\xi(x, y)$, akár az $\eta(x, y)$ függvényt. Feltételezve azt, hogy $\zeta_y' \neq 0$, ez az egyenlet így is írható:

$$A \left(\frac{\zeta_x'}{\zeta_y'} \right)^2 + 2B \left(\frac{\zeta_x'}{\zeta_y'} \right) + C = 0.$$

A $\zeta(x, y) = \text{állandó}$ egyenlettel meghatározott görbe mentén

$$d\zeta = \zeta_x' dx + \zeta_y' dy = 0,$$

azaz

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\zeta_x'}{\zeta_y'}$$

és így jutunk a következő közösleges differenciálegyenletre:

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0.$$

Ez a *karakterisztikák differenciálegyenlete*. Ez a differenciálegyenlet valójában két differenciálegyenletet foglal magában:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{A}(B + \sqrt{B^2 - AC}), \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{A}(B - \sqrt{B^2 - AC}). \end{aligned}$$

E két közösleges differenciálegyenlet megoldásai az (x, y) -síkbán olyan görbéket határoznak meg, amelyek mentén $\xi = \text{állandó}$, illetve $\eta = \text{állandó}$. E két görbesereg görbéit nevezzük *karakterisztikáknak*. Ha tehát a két közösleges differenciálegyenlet megoldásai

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= C_1, \\ \phi_2(x, y) &= C_2, \end{aligned}$$

(ahol C_1, C_2 állandók), akkor a keresett transzformáció a következő:

$$\begin{aligned} \xi &= \phi_1(x, y) \\ \eta &= \phi_2(x, y). \end{aligned}$$

Ezekután nézzük meg részletesebben a három lehetséges esetet.

1.) *Hiperbolikus differenciálegyenlet esete.*

Feltesszük azt, hogy $B^2 - AC' > 0$. Emiatt a karakterisztikákat két valós közönséges differenciálegyenlet határozza meg és ezek megoldásaival két valós karakterisztikus görbesereget kapunk:

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= C_1, \\ \phi_2(x, y) &= C_2.\end{aligned}$$

Új változóknak választjuk a következőket:

$$\begin{aligned}\xi &= \phi_1(x, y), \\ \eta &= \phi_2(x, y).\end{aligned}$$

Ezekkel

$$A^* = 0 \quad \text{és} \quad C^* = 0,$$

viszont

$$B^* \neq 0$$

és így a hiperbolikus egyenlet ún. *első kanonikus alakja* a következő lesz:

$$u''_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta),$$

ahol most

$$H_1 = \frac{H^*}{B^*}.$$

Megtehetjük azt is, hogy ξ, η helyett α, β független változókat választunk a következőképpen:

$$\begin{aligned}\alpha &= \xi + \eta, \\ \beta &= \xi - \eta.\end{aligned}$$

Könnyű számolással ellenőrizhető, hogy ekkor

$$u''_{\alpha\alpha} - u''_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, u, u'_\alpha, u'_\beta)$$

adódik. Ezt szokták a hiperbolikus egyenlet *második kanonikus alakjának* hívni.

2.) *Parabolikus differenciálegyenlet esete.*

Most $B^2 - AC = 0$ és így a karakterisztikák számára csak egyetlen közönséges differenciálegyenletünk van és ennek a megoldásaiént egyetlen valós karakterisztikus görbesereget kapunk:

$$\phi(x, y) = C.$$

Új független változóknak a következőket választjuk:

$$\begin{aligned}\xi &= x, \\ \eta &= \phi(x, y).\end{aligned}$$

Ezzel a transzformációval $u''_{\eta\eta}$ együtthatója 0 lesz, viszont $2u''_{\xi\eta}$ együtthatójára $A\eta'_x + B\eta'_y$ adódik. Mivel azonban $B^2 - AC = 0$ és így

$$-\frac{\eta'_x}{\eta'_y} = \frac{B}{A},$$

azért $u''_{\xi\eta}$ együtthatója:

$$A\eta'_x + B\eta'_y = 0.$$

Ezek szerint a normál alak a következő lesz:

$$u''_{\xi\xi} = H_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta).$$

3.) *Elliptikus differenciálegyenlet esete.*

$B^2 - AC < 0$ miatt az

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

differenciálegyenletnek két komplex megoldásfüggvény felel meg, tehát esetünkben komplexek a karakterisztikák. Ha valósban akarunk maradni, akkor a karakterisztikák differenciálegyenletéből nyert $\phi_1(x, y)$ és $\phi_2(x, y)$ megoldásokkal így számolunk tovább:

$$\begin{aligned}\xi + i\eta &= \phi_1(x, y), \\ \xi - i\eta &= \phi_2(x, y),\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2), \\ \eta &= \frac{1}{2i}(\phi_1 - \phi_2).\end{aligned}$$

$\phi_1(x, y)$ eleget tesz az

$$A\phi'^2_{1x} + 2B\phi'_{1x}\phi'_{1y} + C\phi'^2_{1y} = 0$$

egyenletnek és ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}A\xi'^2_x + 2B\xi'_x\xi'_y + C\xi'^2_y - (A\eta'^2_x + 2B\eta'_x\eta'_y + C\eta'^2_y) + \\ + 2i\{A\xi'_x\eta'_y + B(\xi'_x\eta'_x + \xi'_y\eta'_x) + C\xi'_y\eta'_y\} = 0,\end{aligned}$$

ami csak úgy állhat fenn, ha a valós rész is és a képzetes rész is 0. Tehát az új (ξ, η) független változókra való áttérés után $u''_{\xi\eta}$ együtthatója eltűnik és $u''_{\xi\xi}$ -nek, valamint $u''_{\eta\eta}$ -nak az együtthatója azonos lesz:

$$A\xi'^2_x + 2B\xi'_x\xi'_y + C\xi'^2_y = A\eta'^2_x + 2B\eta'_x\eta'_y + C\eta'^2_y.$$

Ha ide behelyettesítjük pl. a $\xi = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$ összefüggést, akkor azt nyerjük, hogy

$$\phi'_{1y}\phi'_{2y}\frac{AC - B^2}{A} \neq 0,$$

tehát ezzel a transzformáció után kapott differenciálegyenletet végig lehet osztani és így az elliptikus differenciálegyenlet következő *kanonikus alakját* kapjuk:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta).$$

14.1.4. Állandó együtthatók esete.

Ha az

$$Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} = H(x, y, u, u'_x, u'_y)$$

másodrendű, főrészében lineáris parciális differenciálegyenletben az A, B, C együtthatók állandók, akkor $B^2 - AC$ is állandó és a differenciálegyenlet típusa az egész vizsgált tartományban azonos lesz.

A karakterisztikákat meghatározó

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0$$

$\left(\frac{dy}{dx} \right)$ -ben másodfokú egyenletnek most meg lehet feleltetni az

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0$$

egyenletet, ahonnan

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

és a karakterisztikák

$$\begin{aligned} y - \lambda_1 x &= C_1, \\ y - \lambda_2 x &= C_2, \end{aligned}$$

lesznek.

1.) *Hiperbolikus differenciálegyenlet esete.*

$B^2 - AC > 0$ miatt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ és mindkettő valós. A karakterisztikák két valós, párhuzamos egyenesseregből állnak. Ha a

$$\begin{aligned} \xi &= y - \lambda_1 x, \\ \eta &= y - \lambda_2 x \end{aligned}$$

összefüggésekkel új változókat vezetünk be, akkor az

$$u''_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta)$$

kanonikus alakra jutunk.

Ha speciálisan $A = 0$, akkor persze a $\lambda_{1,2}$ -re előbb felírt képletek nem érvényesek, viszont a karakterisztikákat meghatározó egyenlet így írható:

$$-2B \left(\frac{dx}{dy} \right) + C \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = 0,$$

ahonnan ezt kapjuk:

$$\frac{dx}{dy} = 0$$

és

$$-2B + C \left(\frac{dx}{dy} \right) = 0 .$$

A karakterisztikák tehát a következők lesznek:

$$\begin{aligned} x &= C_1 , \\ x - \frac{2B}{C}y &= C_2 . \end{aligned}$$

Új változóknak tehát ezeket választhatjuk:

$$\begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= x - \frac{2B}{C}y \end{aligned}$$

és a kanonikus alak a következő lesz:

$$u''_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta) .$$

2.) *Parabolikus differenciálegyenlet esete.*

$B^2 - AC = 0$ miatt most

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{B}{A}$$

és csak egyetlen (valós) karakterisztikus görbeseregünk van:

$$y - \frac{B}{A}x = C_1 .$$

Új változóknak választjuk a következőket:

$$\begin{aligned} \xi &= y - \frac{B}{A}x \\ \eta &= hy + kx , \end{aligned}$$

ahol h és k tetszőleges olyan állandók lehetnek, amelyek mellett a

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{B}{A} & 1 \\ k & h \end{vmatrix} = -\frac{B}{A}h - k$$

függvénydetermináns nem zérus, azaz

$$Ak + Bh \neq 0 .$$

A kanonikus alak:

$$u''_{\eta\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta) .$$

(Még megemlíjtük azt, hogy ha $B = 0$, akkor $B^2 - AC = 0$ miatt szükségképpen vagy A , vagy C 0-val egyenlő és nincs szükség transzformációra. Hasonló a helyzet, ha megfordítva vagy A , vagy C 0-val egyenlő, mert akkor $B^2 - AC = 0$ miatt kell, hogy $B = 0$ legyen.)

3.) *Elliptikus differenciálegyenlet esete.*

$B^2 - AC < 0$ miatt most λ_1 és λ_2 komplex konjugáltak:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a + ib, \\ \lambda_2 &= a - ib,\end{aligned}$$

ahol

$$a = \frac{B}{A} \quad \text{és} \quad b = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A},$$

tehát a karakterisztikák komplexek:

$$\begin{aligned}y - \lambda_1 x &= C_1, \\ y - \lambda_2 x &= C_2.\end{aligned}$$

Hogy a komplex mennyiségeket elkerüljük, a következő transzformációt hajtjuk végre:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}\{(y - \lambda_1 x) + (y - \lambda_2 x)\} = y - ax, \\ \eta &= \frac{1}{2i}\{(y - \lambda_1 x) - (y - \lambda_2 x)\} = -bx.\end{aligned}$$

Ezzel a következő kanonikus alakra jutunk:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta).$$

(Megjegyezzük, hogy $B^2 - AC < 0$ miatt sem A , sem C nem lehet 0.)

14.1.5. Cauchy-féle feladat.

Láttuk azt, hogy a közönséges differenciálegyenleteknél kitűzött feladat esetében szokásosan a differenciálegyenletnek olyan megoldását keressük, amely eleget tesz bizonyos előírt kezdeti feltételeknek. Pl. ha adott a

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}\right)$$

másodrendű közönséges differenciálegyenlet és előírjuk az

$$\begin{aligned}u(t_0) &= \alpha, \\ \frac{du}{dt}\bigg|_{t=t_0} &= \beta\end{aligned}$$

kezdeti feltételeket, akkor ez egy ún. kezdetiérték feladat.

Analóg problémákat lehet definiálni a parciális differenciálegyenletek körében is. Szorítkozzunk csak a kétváltozós másodrendű parciális differenciálegyenletekre.

Legyen adva az ismeretlen $u(x, y)$ kétváltozós függvény számára egy olyan másodrendű parciális differenciálegyenlet, amely u''_{yy} -ra explicit alakú:

$$u''_{yy} = F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}).$$

Valamely $y = y_0$ érték mellett legyenek adva u és u'_y a következőképpen:

$$\begin{aligned}u(x, y_0) &= f(x), \\u'_y(x, y_0) &= g(x).\end{aligned}$$

Ez egy ún. *kezdeti-érték feladat*. Pl. a rezgő húr

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$$

differenciálegyenletének kereshetjük olyan megoldásait, amelyekre előírjuk az

$$\begin{aligned}u(x, t_0) &= u_0(x), \\u'_t(x, t_0) &= v_0(x)\end{aligned}$$

kezdeti feltételeket, ahol $u_0(x)$ meghatározza a $t = t_0$ időpillanatban a kezdeti alakot és $v_0(x)$ a kezdeti sebességet.

Az említett kezdeti-érték feladatoknál szokásosan az $y = y_0$ egyenletű vonal mentén írunk elő kezdeti feltételeket. Az ún. *Cauchy-féle feladatnál* ennél általánosabban, az (x, y) -sík valamely L_0 síma görbéje mentén írjuk elő a teljesítendő mellékfeltételeket. Tehát az említett kezdeti-érték feladat tulajdonképpen egy speciális Cauchy-féle feladat.

Tekintsük most a következő, főrészében lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet:

$$Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} = F(x, y, u, u'_x, u'_y),$$

ahol A, B, C megadott folytonos függvényei az (x, y) változóknak. Legyenek (x_0, y_0) a síma L_0 görbe pontjai az (x, y) -síkban:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0(t), \\y_0 &= y_0(t),\end{aligned}$$

ahol t a változó paraméter.

Legyen adott az L_0 görbe mentén az $f(t)$ és $g(t)$ függvény. Mármint a Cauchy-féle feladat a következő:

Keressük az adott differenciálegyenletnek olyan $u(x, y)$ megoldásait az L_0 görbe környezetében, amelyek kielégítik a következő ún. Cauchy-féle feltételeket az L_0 görbe pontjaiban:

$$\begin{aligned}u|_{L_0} &= f(t), \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{L_0} &= g(t).\end{aligned}$$

Itt $\frac{\partial u}{\partial n}$ jelenti az L_0 görbe valamely t paraméterű pontjában azt a normális irányú deriváltat, amelynél a normális úgy van megválasztva, hogy a t növekedésének megfelelően irányított L_0 -hoz tartozó érintővektort az (x, y) -síkban $\frac{\pi}{2}$ -vel pozitív irányban elforgatjuk.

Az L_0 görbe pontjaiban u értéke meg van határozva az első előírt feltétel szerint. Az összetartozó (x, y, u) koordináta-hármasokkal egy L térgörbe van meghatározva, amelynek

az (x, y) -síkon a vetülete az L_0 síkgörbe. A Cauchy-féle feladat megoldásai az (x, y, u) térbeli koordinátarendszerben egy-egy felületet (integrálfelületet) határoznak meg, amely illeszkedik az L térgörbére és amelynek az L görbe pontjaiban meg van határozva az érintősíkjuk a második előírt feltétel szerint.

Tegyük fel azt, hogy az $f(t)$ függvény deriválható az L_0 görbe mentén. Ekkor

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt}.$$

Másrésről

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dn} = g.$$

Azonban

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{dy}{ds} \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dn} = \frac{dx}{ds} \quad (\text{ahol } s \text{ az ívhossz-paraméter})$$

miatt ezt így is írhatjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds} = g.$$

Az L_0 görbe pontjaiban ismeretlen u'_x és u'_y számára van tehát egy inhomogén lineáris egyenletrendszerünk:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} u'_x + \frac{dy}{dt} u'_y &= f'(t), \\ -\frac{dy}{ds} u'_x + \frac{dx}{ds} u'_y &= g'(t), \end{aligned}$$

amelynek az együtthatóiból alkotott determinánsa:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ -\frac{dy}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix} = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{ds dt} \neq 0,$$

tehát u'_x és u'_y egyértelműen meghatározhatók az L_0 görbe pontjaiban.

Az u függvény másodrendű deriváltjait a következő egyenletrendszer fogja meghatározni:

$$\begin{aligned} Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} &= F, \\ \frac{dx}{dt} u''_{xx} + \frac{dy}{dt} u''_{xy} &= \frac{d}{dt} u'_x, \\ \frac{dx}{dt} u''_{xy} + \frac{dy}{dt} u''_{yy} &= \frac{d}{dt} u'_y. \end{aligned}$$

Innen u''_{xx} , u''_{xy} , u''_{yy} meghatározhatók akkor, ha

$$\begin{vmatrix} A & 2B & C \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = A \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - 2B \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + C \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \neq 0.$$

Feltéve, hogy $\frac{dx}{dt} \neq 0$, ez így is írható:

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C \neq 0.$$

Ha most figyelembe vesszük azt, hogy

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0$$

az adott differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikákat meghatározó egyenlet, akkor ki-
mondhatjuk, hogy annak a szükséges feltétele, hogy az L_0 görbe pontjaiban az u függvény
másodrendű deriváltjai meghatározhatók legyenek az, hogy az L_0 görbe ne legyen karak-
terisztika.

Az előbbi gondolatmenetet tovább lehet folytatni az $u(x, y)$ függvény magasabbrendű
deriváltjainak kiszámítására, az L_0 görbe tetszőleges (x_0, y_0) pontjában és akkor ezek-
kel formálisan felírható $u(x, y)$ Taylor-sora. Be lehet azt bizonyítani, hogy ha az L_0
görbe pontjainak elegendően kicsiny környezetében A, B, C, F , valamint f és g analitikus
függvények, akkor ugyanott konvergens az $u(x, y)$ megoldást előállító következő Taylor-sor:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot (x-x_0)^k (y-y_0)^{n-k}.$$

(Ez a *Cauchy-Kovalevszkaja-féle tétel* speciális esete.)

Megjegyezzük még azt, hogy a matematikai fizika legtöbb, parciális dife-
renciálegyenletekkel kapcsolatos konkrét feladatánál a mellékfeltételek a Cauchy-féle fe-
ladattól eltérő formában kerülnek megfogalmazásra.

14.2. A matematikai fizika néhány egyszerű másodrendű parciális differenciálegyenlete

14.2.1. Bevezetés

A matematikai fizika klasszikus, legegyszerűbb parciális differenciálegyenletei, a
másodrendű – főrészükből lineáris – parciális differenciálegyenletekre vonatkozó
osztályozás szerint a következők:

1.) hiperbolikus típusú a *hullámegyenlet*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ahol $u(x, y, z, t)$ az ismeretlen függvény, x, y, z helykoordináták, t az idő és $c(> 0)$ állandó,
a hullámterjedés sebessége;

2.) parabolikus típusú a *hővezetési egyenlete*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

ahol $u(x, y, z, t)$ az ismeretlen függvény, x, y, z helykoordináták, t az idő és a h^2 állandó a hővezetés tényezője;

3.) elliptikus típusú a *Laplace-egyenlet*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

ahol $u(x, y, z)$ az ismeretlen függvény, x, y, z helykoordináták.

Ilyen egyenletekkel találkozhatunk különféle konkrét fizikai problémák matematikai leírásakor pl. hullámterjedési, hővezetési, stacionárius hőeloszlási, potenciálméleti és egyéb hasonló feladatokkal összefüggésben. A konkrét fizikai feladatok vizsgálatakor mindig meg kell adni azt, hogy a független változók melyik konkrét tartományában tekinthető érvényesnek a szóban forgó egyenlet, amelyre rendszerint különböző megengedett közelítések, elhanyagolások mellett jutunk el. Mivel egy-egy konkrét fizikai problémánál az adott tartományban érvényesnek tekintett differenciálegyenlet egyértelmű (egyetlen) megoldását keressük, azért szükséges, hogy konkrét mellékfeltételeket is megfogalmazzunk. Ilyen mellékfeltételek lehetnek kezdeti feltételek és peremfeltételek. Az ezeknek is megfelelő feladatokat szokás *peremérték-feladatoknak*, illetve *perem- és kezdetiérték-feladatoknak* nevezni.

14.2.2. Perem- és kezdetiérték feladat megoldása a változók szétválasztásával.

Általánosan elterjedt eljárás bizonyos perem- és kezdetiérték-feladatok megoldására a (*Bernoulli-Fourier-féle*) változók szétválasztásán alapuló *eljárás*. Ezt az eljárást a következő, általánosan megfogalmazott feladaton mutatjuk be.

Legyen a megoldandó differenciálegyenlet a következő:

$$P(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R(x) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ahol $P(x), Q(x), R(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban megadott folytonos függvények. Keressük az $a \leq x \leq b, t \geq 0$ tartományban azt az $u(x, t)$ megoldást, amely eleget tesz, tetszőleges $t \geq 0$ mellett az

$$\begin{aligned} \alpha u(a, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) &= 0, \\ \gamma u(b, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) &= 0 \end{aligned}$$

peremfeltételeknek ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ megadott állandók és $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$), valamint az $a \leq x \leq b$ intervallumban az

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

kezdeti feltételeknek, ahol $f(x)$ és $g(x)$ megadott folytonos függvények.

Tegyük fel azt, hogy $P(x)$ sehol sem zérus $[a, b]$ -ben és akkor végigszorozva a differenciálegyenletet a

$$\rho(x) = \frac{1}{P} e^{\int \frac{P}{P} dx}$$

függvénnyel, nyerjük a következő (az általános vizsgálatok szempontjából célszerűbb alakú) differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x)u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ahol

$$p(x) = \rho(x)P(x) \quad \text{és} \quad q(x) = \rho(x)Q(x).$$

Keressük a differenciálegyenlet megoldását a következő szorzat alakjában:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Behelyettesítve ezt a differenciálegyenletbe, lesz:

$$T(t) \cdot \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX}{dx} \right) + q(x)T(t)X(x) = \rho(x) \frac{d^2 T}{dt^2} X(x),$$

ahonnan, a változók szétválasztásával ezt kapjuk:

$$\frac{(pX')' + qX}{\rho X} = \frac{\ddot{T}}{T},$$

ahol vesszővel jelöltük az x -szerinti és fölül ponttal a t -szerinti deriválást. A baloldal csak x -től, a jobboldal pedig csak t -től függ, ezért az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha mind a két oldal egy közös állandóval egyenlő. Legyen ez az állandó $-\lambda < 0$. Ekkor azonban a következő két közönséges differenciálegyenletet nyerjük:

$$(pX')' + (\lambda\rho + q)X = 0,$$

$$\ddot{T} + \lambda T = 0.$$

Mivel a keresett $u(x, t)$ nem lehet azonosan 0, azért sem $X(x)$, sem $T(t)$ nem lehetnek azonosan 0-val egyenlők.

Az előírt peremfeltételek miatt a $X(x)$ megoldásfüggvénynek ki kell elégítenie a következő peremfeltételeket:

$$\alpha X(a) + \beta X'(a) = 0,$$

$$\gamma X(b) + \delta X'(b) = 0$$

és természetesen a homogén lineáris

$$(pX')' + (\lambda\rho + q)X = 0$$

másodrendű közönséges differenciálegyenletet.

Az ilyen típusú ún. *Sturm-Liouville-féle peremértékfeladatokra* érvényesek a következő tételek:

1.) A

$$(pX')' + (\lambda\rho + q)X = 0$$

differenciálegyenlettel kapcsolatos,

$$\alpha X(a) + \beta X'(a) = 0,$$

$$\gamma X(b) + \delta X'(b) = 0$$

peremfeltételeknek megfelelő peremértékfeladathoz megszámlálhatóan végtelen sok

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

állandó számérték, ún. *sajátérték* tartozik, amelyek közül mindegyiknek megfelel egy

$$X_0(x), X_1(x), X_2(x), \dots$$

ún. *sajátfüggvény*, mint megoldás.

2.) Ha $\rho(x) > 0$ és $q(x) \leq 0$, akkor mindegyik λ_n sajátérték *pozitív*.

3.) A sajátfüggvények az $a \leq x \leq b$ intervallumban, a $\rho(x)$ súlyfüggvényre nézve *ortogonális és normált függvényrendszert* képeznek, azaz

$$\int_a^b \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n, \\ 1, & \text{ha } m = n. \end{cases}$$

4.) Minden olyan $F(x)$ függvény, mely eleget tesz az

$$\alpha F(a) + \beta F'(a) = 0,$$

$$\gamma F(b) + \delta F'(b) = 0$$

peremfeltételeknek, azonkívül az $a \leq x \leq b$ intervallumban folytonos első deriválttal és legalább szakaszonként folytonos második deriválttal rendelkezik, az $X_n(x)$ sajátfüggvények szerint haladó, abszolút és egyenletesen konvergens sorba (ún. *általános Fourier-sorba*) fejthető:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x),$$

ahol

$$c_n = \int_a^b \rho(x) F(x) X_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Térjünk most vissza a változók szétválasztásával nyert második differenciálegyenlethez:

$$\ddot{T} + \lambda T = 0.$$

Ennek a λ_n sajátértékhez tartozó általános megoldása:

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ahol A_n és B_n egyelőre határozatlan állandók.

Igy a kitűzött feladatunknak megszámlálhatóan végtelen sok, a peremfeltételeket is kielégítő megoldása van:

$$u_n(x, t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

Az adott parciális differenciálegyenlet homogén lineáris, ezért az ilyen megoldások összege, tetszőleges A_n , B_n együtthatók mellett, szintén megoldás. Feltesszük azt, hogy az

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x)$$

végtelen sor, valamint az ebből tagonként kétszeri x és t szerinti deriválásokkal nyert sorok egyenletesen konvergensek. Ekkor a sor kielégíti a differenciálegyenletünket és a peremfeltételeket. A kezdeti feltételek szerint teljesülniük kell a következő egyenlőségeknek:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} B_n X_n(x) = g(x). \end{aligned}$$

Feltéve, hogy e sorok egyenletesen konvergensek (ez az adott $f(x)$ és $g(x)$ függvények lokális tulajdonságaitól függ), az A_n , B_n együtthatók meghatározhatók:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_a^b \rho(x) X_n(x) f(x) dx, \\ B_n &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_a^b \rho(x) X_n(x) g(x) dx, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ezzel a kitűzött feladatot megoldottuk.

További részletek helyett a következő konkrét példákra utalunk.

14.3. A rezgő húr problémája.

Az x -tengely mentén kifeszített s hosszúságú tökéletesen hajlékony és rugalmas húr transzverzális rezgéseit (jó közelítéssel) a következő hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenlet írja le:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$0 \leq x \leq s, \quad t \geq 0.$$

$c > 0$ a feltevés szerint állandó.

Mindenekelőtt vizsgáljuk ezt a differenciálegyenletet *d'Alembert eljárása* szerint.

Egyszerűsítés kedvéért alkalmazzuk az $y = ct$ transzformációt, amivel az

$$u''_{xx} - u''_{yy} = 0$$

egyenletre jutunk. Az ehhez tartozó karakterisztikák:

$$\begin{aligned} x + y &= C_1, \\ x - y &= C_2 \end{aligned}$$

Ha végrehajtjuk a

$$\begin{aligned} \xi &= x + y, \\ \eta &= x - y \end{aligned}$$

változó transzformációt, akkor az

$$u''_{\xi\eta} = 0$$

kanonikus alakra jutunk. Ebből pedig az általános megoldás:

$$u(\xi, \eta) = F_1(\xi) + F_2(\eta),$$

vagyis

$$u(x, t) = F_1(x + ct) + F_2(x - ct),$$

ahol F_1 és F_2 tetszőleges kétszer folytonosan deriválható függvények.

Ha most feltesszük azt, hogy a húr rezgéseit leíró differenciálegyenlet mellett konkrét perem- és kezdeti feltételek is elő vannak írva, pl.

$$u(0, t) = u(s, t) = 0, \quad \text{ha } t \geq 0$$

és

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

$$\text{ha } 0 \leq x \leq s,$$

akkor az általános megoldásban szereplő F_1 és F_2 függvényeket ezeknek a feltételeknek megfelelően kellene konkrétizálni. Ennél azonban egyszerűbb, ha más módszert (a *Bernoulli-Fourier-féle, változók szétválasztásának a módszerét*) választunk, vagyis megoldásokat keresünk a következő szorzat alakjában:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe és a változókat szétválasztva, a következő két közöségi differenciálegyenletre jutunk:

$$\begin{aligned} X'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X &= 0, \\ \ddot{T} + \omega^2 T &= 0. \end{aligned}$$

ahol ω egyelőre határozatlan állandó.

Az előírt peremfeltételek szerint kell, hogy

$$X(0) = X(s) = 0$$

legyen.

A $X(x)$ -re vonatkozó differenciálegyenlet általános megoldása:

$$X(x) = A \sin \frac{\omega}{c} x + B \cos \frac{\omega}{c} x.$$

A peremfeltételek miatt azonban

$$B = 0$$

és

$$A \sin \frac{\omega s}{c} = 0.$$

Ez utóbbiból (ha $A \neq 0$) adódik:

$$\frac{\omega s}{c} = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A feladathoz tartozó *sajátértékek* tehát

$$\omega_k = \frac{k\pi c}{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Minden sajátértéknek megfelel egy

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sajátfüggvény, mint megoldás. (Ezek közül a $k = 0$ -nak megfelelő $X_0(x) \equiv 0$ megoldást elhagyhatjuk!)

A $T(t)$ -re vonatkozó differenciálegyenlet k -tól függő általános megoldása:

$$T_k(t) = C_k \cos \frac{k\pi ct}{s} + D_k \sin \frac{k\pi ct}{s},$$

így tehát

$$u_k(x, t) = \left(C_k \cos \frac{k\pi ct}{s} + D_k \sin \frac{k\pi ct}{s} \right) \sin \frac{k\pi x}{s}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

ahol C_k és D_k tetszőleges állandók.

Összegezve minden k -ra (feltételezzük azt, hogy a nyert végtelen sor olyan jól konvergál, hogy még a tagonkénti kétszeri deriválásokkal nyert sorok is egyenletesen konvergenssek maradnak), nyerjük a következő, az előírt peremfeltételeket is kielégítő, általános megoldást:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \cos \frac{k\pi ct}{s} + D_k \sin \frac{k\pi ct}{s} \right) \sin \frac{k\pi x}{s} .$$

A kezdeti feltételek szerint kell, hogy teljesüljenek a következő egyenlőségek:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{s} ,$$

illetve

$$u'_t(x, 0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{s} D_k \sin \frac{k\pi x}{s} .$$

Ezek teljesülnek akkor, ha

$$C_k = \frac{2}{s} \int_0^s f(x) \sin \frac{k\pi x}{s} dx , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$D_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^s g(x) \sin \frac{k\pi x}{s} dx , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ezzel a kitűzött kezdeti-perem-érték feladatot megoldottuk.

14.3.1. Derékszögű négyszög alakú membrán rezgései.

A megoldandó differenciálegyenlet a következő:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ; \quad 0 \leq x \leq a , \quad 0 \leq y \leq b , \quad t \geq 0 .$$

A peremfeltételek legyenek a következők:

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 ,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$$

és a kezdeti feltételek:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) ,$$

$$u'_t(x, y, 0) = 0 .$$

Keressük a megoldást a következő alakban:

$$u(x, y, t) = e^{i\omega t} \cdot v(x, y) .$$

Ekkor a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0$$

differenciálegyenletre jutunk, ahol $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ egyelőre határozatlan állandó. A peremfeltételek szerint .

$$\begin{aligned} v(0, y) &= v(a, y) = 0 , \\ v(x, 0) &= v(x, b) = 0 . \end{aligned}$$

Feltesszük, hogy van

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

alakú megoldás. Ezt behelyettesítve a $v(x, y)$ -ra vonatkozó differenciálegyenletbe és a változókat szétválasztva, lesz

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - k^2 = -m^2 ,$$

ahol m egyelőre határozatlan állandó.

Tehát a feladat a következő közönséges differenciálegyenletek megoldására vezet:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + m^2 X &= 0 , \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + q^2 Y &= 0 , \quad q^2 = k^2 - m^2 . \end{aligned}$$

Mivel a feltételek szerint a membrán a kerületén be van fogva, azért a következő peremfeltételeknek kell teljesülniük:

$$\begin{aligned} X(0) &= X(a) = 0 , \\ Y(0) &= Y(b) = 0 . \end{aligned}$$

Az első differenciálegyenletből és a megfelelő peremfeltételek alapján:

$$X(x) = A_1 \sin mx ,$$

ahol

$$ma = n\pi , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

és így

$$m = \frac{n\pi}{a} , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A második differenciálegyenletből és a neki megfelelő peremfeltételek alapján:

$$Y(y) = A_2 \sin qy ,$$

ahol

$$qb = r\pi , \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

azaz

$$q = \frac{r\pi}{b} , \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Mivel

$$k^2 = m^2 + q^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} \right),$$

azért a lehetséges körfrekvenciák:

$$\omega_{nr} = c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Mivel a második kezdeti feltétel szerint a membrán pontjainak kezdeti sebessége 0, azért elég, ha $e^{i\omega t}$ valós részére szorítkozunk.

Mindezek alapján

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} A_{nr} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} \cdot \cos \omega_{nr} t,$$

ahol egyelőre határozatlanok az A_{nr} együtthatók. Az első kezdeti feltétel szerint azonban kell, hogy

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} A_{nr} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b}$$

legyen.

Legyen először y egy rögzített paraméter. Ekkor

$$[f(x, y)]_{y=\text{áll.}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a},$$

ahonnan

$$A_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Másrészről azonban

$$A_n(y) = \sum_{r=1}^{\infty} A_{nr} \sin \frac{r\pi y}{b}$$

és így

$$\begin{aligned} A_{nr} &= \frac{2}{b} \int_0^b A_n(y) \sin \frac{r\pi y}{b} dy = \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad r = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

14.3.2. Köralakú membrán rezgései.

Fogalmazzuk meg a

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

differenciálegyenletet mindjárt polárkoordinátákban:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0.$$

Legyen előírva az

$$u(a, \varphi, t) = 0$$

peremfeltétel és az

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, 0) &= f(r), \\ u_t'(r, \varphi, 0) &= 0 \end{aligned}$$

kezdeti feltételek.

Az adott kezdeti feltételek alapján feltesszük azt, hogy u nem függ φ -től (teljes körszimmetria esete) és így szorítkozhatunk az $u(r, t)$ ismeretlen kétváltozós függvényre vonatkozó következő feladatra:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad 0 \leq r \leq a, \quad t \geq 0;$$

$$\begin{aligned} u(a, t) &= 0; \\ u(r, 0) &= f(r), \\ u_t'(r, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Keressük a megoldást

$$u(r, t) = e^{i\omega t} v(r)$$

alakban. Ekkor $v(r)$ -re a következő Bessel-féle differenciálegyenletet nyerjük:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + k^2 v = 0,$$

ahol $k = \frac{\omega}{c}$. Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$v(r) = A J_0(kr) + B Y_0(kr),$$

ahol A és B tetszőleges állandók. J_0 és Y_0 pedig a 0-indexű első, illetve másodfajú Bessel-függvények.

Mivel Y_0 az origóban nem korlátos, viszont a megoldásfüggvénynek korlátosnak kell lennie az origóban is, azért kell, hogy $B = 0$ legyen.

Az adott peremfeltétel szerint

$$v(a) = 0 = A J_0(ka).$$

Ha feltesszük, hogy $A \neq 0$, akkor

$$J_0(ka) = 0.$$

Függvénytáblázatból kiolvashatók a J_0 függvény 0-helyei. E szerint (ka) rendre a következő értékekkel kell, hogy megegyezzenek:

$$\begin{aligned} &2,4048, \\ &5,5201, \\ &8,6537, \\ &11,7915, \\ &14,9309, \dots \end{aligned}$$

Azaz az alapfrekvencia:

$$\omega_1 = \frac{2,4048c}{a}.$$

A többi frekvencia hasonlóan adódik a J_0 függvény további 0-helyeinek és $\frac{c}{a}$ -nak a szorzataként. Megszámíthatóan végtelen sok ω_n frekvencia lehetséges és ha mindezeket figyelembe vesszük, valamint azt, hogy a második kezdeti feltétel szerint $u'_i(r, 0) = 0$, akkor a következő alakú megoldásra jutunk:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\omega_n}{c} r\right) \cdot \cos(\omega_n t).$$

Az előírt első kezdeti feltétel szerint $u(r, 0) = f(r)$, ezért

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\omega_n}{c} r\right),$$

ami akkor teljesül, ha

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2\left(\frac{\omega_n}{c} a\right)} \int_0^a r J_0\left(\frac{\omega_n}{c} r\right) f(r) dr, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

14.3.3. Egydimenziós hővezetési feladat.

Legyen adva egy s hosszúságú, állandó keresztmetszetű, homogén hővezető rúd ($0 \leq x \leq s$), amelynek a felülete teljesen hőszigetelt és a két végpontjában ($x = 0$, ill. $x = s$) a hőmérséklet állandó: zérus.

Megoldandó a hővezetés (Fourier-féle) egyenlete, a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq s, \quad t \geq 0$$

parabolikus típusú differenciálegyenlet, az

$$u(0, t) = u(s, t) = 0$$

peremfeltételek és az

$$u(x, 0) = f(x)$$

kezdeti feltétel mellett. Feltesszük továbbá azt, hogy $u(x, t)$ korlátos marad, ha $t \rightarrow \infty$.

Keressük a megoldást

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

alakban. Ekkor a differenciálegyenletből ezt kapjuk:

$$X \cdot \dot{T} = h^2 X'' T ,$$

vagy a változókat szétválasztva

$$\frac{X''}{X} = \frac{\dot{T}}{h^2 T} .$$

Mindkét oldalnak egy határozottan negatív állandóval kell egyenlőnek lennie (különben nem kaphatnánk mindenütt korlátos megoldásokat) és így:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 ,$$

$$\dot{T} + \lambda^2 h^2 T = 0 ,$$

Az első differenciálegyenlet általános megoldása:

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

és a másodiké:

$$T(t) = C e^{-\lambda^2 h^2 t} .$$

A peremfeltételek alapján

$$X(0) = B = 0 ,$$

$$X(s) = A \sin \lambda s = 0 .$$

Feltesszük, hogy $A \neq 0$ és így

$$\lambda s = n\pi ,$$

azaz

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{s} , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Igy tehát egy-egy n -től függő és a peremfeltételeknek megfelelő megoldás a következő:

$$u_n(x, t) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi h}{s}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{n\pi}{s} x ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Összegezve minden n -re:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi h}{s}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{n\pi}{s} x .$$

Az előírt kezdeti feltétel miatt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{s} x ,$$

tehát

$$c_n = \frac{2}{s} \int_0^s f(x) \sin \frac{n\pi}{s} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ha a feladatot úgy módosítjuk, hogy a rúd két végpontja hőszigetelt, akkor a peremfeltételek a következők lesznek:

$$u'_x(0, t) = u'_x(s, t) = 0.$$

Most a $X(x)$ -re vonatkozó

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

differenciálegyenlethez a

$$X'(0) = X'(s) = 0$$

peremfeltételek csatlakoznak. Mivel

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

és

$$X'(x) = \lambda A \cos \lambda x - \lambda B \sin \lambda x,$$

azért kell, hogy $A = 0$ legyen és $\sin \lambda s = 0$ miatt

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{s}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A megoldás tehát a következő:

$$u(x, t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{n\pi h}{s}\right)^2 t} \cdot \cos \frac{n\pi}{s} x,$$

ahol

$$B_0 = \frac{1}{s} \int_0^s f(x) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{s} \int_0^s f(x) \cos \frac{n\pi}{s} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

14.3.4. Kétdimenziós hővezetési feladatok.

1.) *Derékszögű négyszög alakú lemez* esetén keressük a következő kezdeti- peremérték feladat megoldását:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0;$$

a peremfeltételek:

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0;$$

a kezdeti feltétel:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) ;$$

ezen kívül feltesszük, hogy $u(x, y, t)$ korlátos marad, ha $t \rightarrow \infty$.

Keressük a megoldást az

$$u(x, y, t) = e^{-\lambda^2 t} X(x) Y(y)$$

alakban, ahol $\lambda^2 \geq 0$ állandó. Behelyettesítés és egyszerűsítés után ezt kapjuk:

$$-\lambda^2 XY = h^2(X''Y + XY''),$$

vagy átrendezve:

$$\frac{X''}{X} + \frac{\lambda^2}{h^2} = -\frac{Y''}{Y} = k^2 ,$$

ahol k egyelőre határozatlan állandó.

Vezessük be a

$$\frac{\lambda^2}{h^2} - k^2 = q^2$$

jelölést, akkor a következő két differenciálegyenletet kapjuk:

$$X'' + q^2 X = 0 ,$$

$$Y'' + k^2 Y = 0 ,$$

ahonnan

$$X(x) = A_1 \sin qx + B_1 \cos qx ,$$

$$Y(y) = A_2 \sin ky + B_2 \cos ky .$$

Az előírt peremfeltételek miatt kell, hogy $B_1 = B_2 = 0$ legyen és

$$\sin qa = 0 ,$$

$$\sin kb = 0 ,$$

ahonnan

$$q = \frac{m\pi}{a} , \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = \frac{n\pi}{b} , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

és így

$$\lambda_{mn}^2 = h^2 \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) .$$

A peremfeltételeket kielégítő megoldás tehát

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} .$$

A kezdeti feltétel miatt kell, hogy

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

legyen és így

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy ,$$

$m = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$

2.) *Kör alakú lemez* esetén, a körszimmetria feltételezése mellett a következő a feladat:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) ; \quad 0 \leq r \leq a , \quad t \geq 0 .$$

A peremen:

$$u(a, t) = 0$$

és a kezdeti feltétel:

$$u(r, 0) = f(r) .$$

Keressük a megoldást

$$u(r, t) = e^{-\lambda t} \cdot v(r)$$

alakban, ahol $\lambda > 0$ egyelőre határozatlan állandó. Behelyettesítve ezt a differenciálegyenletbe és egyszerűsítve, lesz:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + k^2 v = 0 ,$$

ahol

$$k^2 = \frac{\lambda}{h^2} .$$

Ennek a Bessel-féle differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$v(r) = A J_0(kr) + B Y_0(kr) .$$

Mivel az $u(r, t)$ függvénynek korláatosnak kell lennie az origóban, azért $B = 0$. Az előírt peremfeltétel miatt ($A \neq 0$)

$$J_0(ka) = 0 .$$

Jelöljük ennek az egyenletnek a gyökeit $(k_n a)$ -val, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$. Minden k_n értékhez tartozik egy λ_n érték is:

$$\lambda_n = (k_n h)^2 , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A peremfeltételnek megfelelő megoldás tehát

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n^2 h^2 t} \cdot J_0(k_n r) .$$

Az előírt kezdeti feltétel alapján:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) ,$$

ahonnan végül

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(k_n a)} \int_0^a r f(r) J_0(k_n r) dr ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

14.3.5. Kétdimenziós stacionárius hőeloszlási feladatok.

A hővezetés differenciálegyenlete:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \nabla^2 u .$$

Stacionárius esetben, vagyis amikor u nem függ a t időtől, akkor ez az egyenlet az elliptikus típusú

$$\nabla^2 u = 0$$

Laplace-féle differenciálegyenletre redukálódik.

Két speciális problémát vizsgálunk.

1.) Egy vékony lemezben keressük az ismeretlen $u(x, y)$ hőmérsékleteloszlást, ha a lemezt az $x = 0$, $x = s$, $y = 0$ egyenesek határolják. A lemez a pozitív y -tengely irányában "végtelen" kiterjedésű. (Az (x, y) -síkból a $0 \leq x \leq s$, $y \geq 0$ tartományról van tehát szó.) Itt érvényes a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

differenciálegyenlet.

A peremfeltételek legyenek a következők:

$$u(0, y) = u(s, y) = 0 ,$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

és

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 .$$

Keressük a megoldást

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

alakban. Ekkor a differenciálegyenletből ezt kapjuk:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 ,$$

ahol k egyelőre határozatlan állandó. Azaz

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$$

és

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - k^2 Y = 0.$$

Ezekből az egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos kx + C_2 \sin kx, \\ Y(y) &= C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky}, \end{aligned}$$

Ahol C_1, C_2, C_3, C_4 tetszőleges állandók.

Ennek alapján

$$u(x, y) = e^{-ky} (A \cos kx + B \sin kx) + e^{ky} (M \cos kx + N \sin kx),$$

ahol A, B, M, N tetszőleges állandók.

Mivel

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$$

kell, hogy legyen, azért $M = N = 0$. Hasonlóképpen $u(0, y) = 0$ miatt $A = 0$. Ha most végül figyelembe vesszük azt, hogy $u(s, y) = 0$, ha $y > 0$, akkor fennáll, hogy

$$B \sin ks = 0,$$

ahonnan $B \neq 0$ feltételezésével adódik, hogy

$$ks = n\pi,$$

azaz

$$k = \frac{n\pi}{s}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Minden pozitív egész n mellett kapunk egy-egy

$$u_n(x, y) = B_n e^{-\frac{n\pi}{s}y} \cdot \sin \frac{n\pi x}{s}$$

alakú megoldást. Ezeket összegezve lesz

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi}{s}y} \cdot \sin \frac{n\pi x}{s},$$

ahol a B_n együtthatók egyelőre határozatlanok. Azonban $u(x, 0) = f(x)$ adott és így fennáll, hogy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{s},$$

ahonnan

$$B_n = \frac{2}{s} \int_0^s f(x) \sin \frac{n\pi x}{s} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2.) Végges kiterjedésű lemez esetén tegyük fel azt, hogy a peremfeltételek a következők:

$$u(0, y) = u(s, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(x, l) = f(x).$$

Az előző feladathoz hasonlóan járva el, azt fogjuk találni, hogy

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &= e^{-\frac{n\pi y}{s}} \cdot B_n \sin \frac{n\pi x}{s} + e^{\frac{n\pi y}{s}} N_n \sin \frac{n\pi x}{s} = \\ &= (B_n e^{-\frac{n\pi y}{s}} + N_n e^{\frac{n\pi y}{s}}) \sin \frac{n\pi x}{s}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

ahol B_n és N_n egyelőre határozatlan állandók.

Mivel $u(x, 0) = 0$, ha $0 \leq x \leq s$, azért kell, hogy

$$B_n + N_n = 0$$

legyen, azaz pl.

$$B_n = -N_n = \frac{C_n}{2}$$

és akkor

$$u_n(x, y) = C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{s} \cdot \sin \frac{n\pi x}{s}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ezeket összegezve:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{s} \sin \frac{n\pi x}{s},$$

ahol a C_n együtthatók egyelőre határozatlanok. A még figyelembe nem vett utolsó peremfeltétel alapján azonban fennáll, hogy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi l}{s} \sin \frac{n\pi x}{s},$$

ahonnan végül

$$C_n = \frac{2}{s \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi l}{s}} \int_0^s f(x) \sin \frac{n\pi x}{s} dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

14.3.6. A körre vonatkozó Dirichlet-féle feladat.

Tekintsük a Laplace-féle differenciálegyenletet polárkoordinátákban:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0; \quad 0 \leq r \leq \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Keressük ennek a megoldását

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \phi(\varphi)$$

alakban. Ekkor jutunk a következőkre:

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = n^2,$$

ahol n egyelőre határozatlan állandó. a feladat tehát a következő közönséges differenciálegyenletre redukálódik:

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + n^2 \phi = 0,$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0.$$

Ha $n \neq 0$, akkor ezek általános megoldása:

$$\begin{aligned} \phi_n(\varphi) &= A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \\ R_n(r) &= C_n r^n + D_n r^{-n}; \end{aligned}$$

ha pedig $n = 0$, akkor

$$\begin{aligned} \phi_0(\varphi) &= A_0 \varphi + B_0, \\ R_0(r) &= C_0 \ln r + D_0, \end{aligned}$$

ahol a különböző indexű A, B, C, D együtthatók határozatlan állandók.

Igy tehát lesz

$$\begin{aligned} u_0(r, \varphi) &= (A_0 \varphi + B_0)(C_0 \ln r + D_0), \\ u_n(r, \varphi) &= (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)(C_n r^n + D_n r^{-n}). \end{aligned}$$

A legtöbb esetben (az alkalmazásokban) kell, hogy $u(r, \varphi)$ egyértékű legyen, ezért teljesülnie kell az

$$u_n(r, \varphi + 2\pi) = u_n(r, \varphi)$$

feltételnek, amiből következik, hogy n csak egész szám lehet.

Mivel a Laplace-egyenlet homogén lineáris, azért az előző megoldások összege is megoldás. Így jutunk a következő általános megoldásra:

$$u(r, \varphi) = c_0 \ln r + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi) ,$$

ahol a különböző indexű a, b, c, d együtthatók lehetnek tetszőleges állandók. A konkrét meghatározásuk adott peremfeltételek alapján lehetséges.

Igy pl. az ún. Dirichlet-féle feladatnál előírjuk azt, hogy

$$u(\rho, \varphi) = f(\varphi)$$

legyen. Konkrétan lehet arra gondolni, hogy az origó középpontú, ρ -sugarú kör alakú tartomány egy végtelen hosszú, körhenger-alakú test keresztmetszete; keressük a stacionárius hőmérsékleteloszlást, ha a peremfeltétel a ρ -sugarú kör kerületén az $f(\varphi)$ függvénnyel adott.

Mivel a megoldásunknak korláatosnak kell lennie az origóban, azért

$$c_0 = c_n = d_n = 0 .$$

A megoldás tehát ilyen alakú:

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) .$$

Az előírt peremfeltétel miatt kell, hogy fennáljon:

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

és így

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi , \\ a_n &= \frac{1}{\rho^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi , \\ b_n &= \frac{1}{\rho^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi , \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Helyettesítsük be ezeket az együtthatókat a megoldásra nyert képletünkbe és a félreértések elkerülése végett jelöljük ψ -vel az integrációs változót, akkor ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \left\{ \sin n\varphi \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi + \right. \\ &\quad \left. + \cos n\varphi \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi \right\} . \end{aligned}$$

Ezt még így is lehet írni:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\psi - \varphi) d\psi .$$

Mivel $r < \rho$ esetén a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\psi - \varphi)$$

sor a ψ változóra nézve egyenletesen konvergens, azért a tagonkénti integrálás megengedett és így az összegezés és az integrálás sorrendje felcserélhető:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\psi - \varphi) \right\} d\psi.$$

A kapcsos zárójelben lévő sor összegét zárt alakban elő lehet állítani, ha figyelembe vesszük azt, hogy

$$\cos n(\psi - \varphi) = \operatorname{Re} (e^{in(\psi - \varphi)}) .$$

Igy ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\psi - \varphi) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cdot \operatorname{Re} (e^{in(\psi - \varphi)}) = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho} e^{i(\psi - \varphi)}\right)^n \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\frac{r}{\rho} e^{i(\psi - \varphi)}}{1 - \frac{r}{\rho} e^{i(\psi - \varphi)}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho + r e^{i(\psi - \varphi)}}{\rho - r e^{i(\psi - \varphi)}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\rho + r e^{i(\psi - \varphi)})(\rho - r e^{-i(\psi - \varphi)})}{(\rho - r e^{i(\psi - \varphi)})(\rho - r e^{-i(\psi - \varphi)})} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho^2 - r^2 + i2\rho r \sin(\psi - \varphi)}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi) + r^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi) + r^2} . \end{aligned}$$

Végül (ha még figyelembe vesszük azt, hogy a párosság miatt $\cos(\psi - \varphi) = \cos(\varphi - \psi)$), ezt kapjuk:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi .$$

Ez a potenciálméletben fontos szerepet játszó *Poisson-féle integrálformula*. Segítségével a Laplace-féle differenciálegyenletet kielégítő $u(r, \varphi)$ harmonikus függvényt elő lehet állítani az $r < \rho$ körlap belsejében, ha adott a ρ sugarú kör kerületén az

$$u(\rho, \varphi) = f(\varphi)$$

függvény.