BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
ÉPÍTŐMÉRNÖKI KAR

Dr. Sebestyén Lukács

MATEMATIKAI FELADATGYŰJTEMÉNY ÉS PÉLDATÁR II/1.

Műegyetemi Kiadó, 1993.

Jegyzet azonosító: **91281**

A J9 - 1281 számú KÉZIRAT tartalmi változatlan utánnyomása.

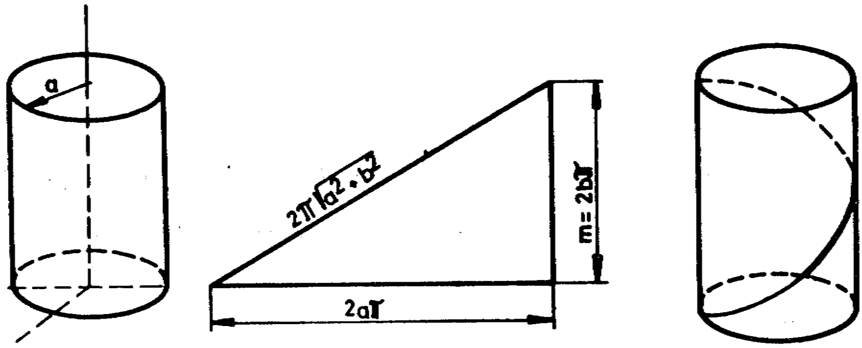
A Budapesti Műszaki Egyetem Építőmérnöki Kar megrendelése alapján
kiadja a **Műegyetemi Kiadó.**
Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 17,5 A/5 ív
Készült az **Új Élet Mg. Tsz. Magyaralmás**
Nyomdaipari Önelszámoló részlegében
Felelős vezető: Frigy Ottóné
Munkaszám: 93/264

FELADATOK

TÉRGÖRBÉK, FELÜLETEK

1. Térgörbe előállítása, az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény és határértéke, az érintővektor

1.01. Tekintsük az a sugarú, s m magasságú körhengert és az 1. ábrán látható derékszögű háromszöget. A háromszöget a hengerre tekerjük. Ily módon a háromszög átfogója egy térgörbét ír le. Írjuk fel ezen térgörbe egyenletét.



1. ábra

1.02. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = a^2$ hengerfelület és az $x + y + z = a$ sík metszésvonalának egyenletét.

1.03. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = a^2$ hengerfelület és a

$z = x\,y$ felület metszésvonalának egyenletét.

1.04. Ábrázoljuk az

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = t \cos t\, \underline{i} + t \sin t\, \underline{j} + t\underline{k}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$$

vektor-skalár fügvénnyel adott görbeszakaszt.

Határozzuk meg a következő vektor-skalár függvények határértékét a megadott pontban.

1.05. $\underline{r}(t) = \frac{\sin 5t}{t}\, i + \frac{\mathrm{tg}t - \sin t}{\sin^3 t}\,\underline{j} + \frac{\mathrm{tg}t}{t}\,\underline{k}\ ;\ t = 0.$

1.06. $\underline{r}(t) = \frac{\mathrm{ch}t - \cos t}{t^2}\,\underline{i} + \frac{\mathrm{tg}t - t}{t - \sin t}\,\underline{j} + \frac{t\,\mathrm{ctg}t - 1}{t^2}\,\underline{k}\ ;\ t = 0.$

1.07. $\underline{r}(t) = \frac{\sqrt[3]{t^2} - 2\sqrt[3]{t} + 1}{(t-1)^2}\,\underline{i} + \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}\,\underline{j} + \frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt[4]{t} - 1}\,\underline{k};$

$t = 1.$

1.08. $\underline{r}(t) = \frac{\mathrm{tg}t - \mathrm{tg}a}{t - a}\,\underline{i} + \frac{a^t - t^a}{t - a}\,\underline{j} + \frac{\mathrm{ch}t - \mathrm{ch}a}{t - a}\,k;\ t = \underline{a},$

$a > 0.$

1.09. Határozzuk meg az

$\underline{r}(t) = \underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t), u(t) = r_1(t)r_2(t),\ \underline{r}(t) = r_1(t) \times \underline{r}_2(t)$

függvények megadott pontbeli határértékét, ha

$\underline{r}_1(t) = \frac{\sin st}{t}\,\underline{i} + \frac{\mathrm{tg}t - \sin t}{\sin^3 t}\,\underline{j} + \frac{\mathrm{tg}t}{t}\,\underline{k},\ t = 0,$

$\underline{r}_2(t) = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{1 + t}\,\underline{i} + (2t + 1)\underline{j} + (t^2 + 3)\underline{k},\ t = 0.$

A feladatot oldjuk meg oly módon, hogy előbb végezzük el a kijelölt műveletet és azután képezzük a határértéket, s az alábbi tételek alkalmazásával is.

Tétel. Ha $\lim\limits_{t\to t_0} \underline{r}_1(t) = \underline{r}_1$, $\lim\limits_{t\to t_0} \underline{r}_2(t) = \underline{r}_2$, akkor

$$\lim_{t\to t_0} [\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t)] = \underline{r}_1 \pm \underline{r}_2,$$

$$\lim_{t\to t_0} \underline{r}_1(t)\underline{r}_2(t) = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2,$$

$$\lim_{t\to t_0} (\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)) = \underline{r}_1 \times \underline{r}_2.$$

Csak az utóbbi állítás igazolására emlékeztetünk (az első és a második hasonló módon igazolható), ehhez pedig elegendő azt belátni, hogy

$$\lim_{t \to to} [\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2] = \underline{0}.$$

Alkalmazzuk a következő átalakítást:

$$\lim_{t \to to} [\underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2] =$$

$$= \lim_{t \to to} [(\underline{r}_1(t) - \underline{r}_1) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1 \times (\underline{r}_2(t) - \underline{r}_2)].$$

Az $\underline{r}_1(t) \to \underline{r}_1$ feltevés miatt $(\underline{r}_1(t) - r_1) \to \underline{0}$; az $\underline{r}_2(t)$-nek a t_o pontban van véges határértéke, tehát $\underline{r}_2(t)$ a t_o környezetében korlátos, s íly módon

$$\lim_{t \to to} (\underline{r}_1(t) - r_1) \times \underline{r}_2(t) = \underline{0}.$$

Hasonló módon látható be az is, hogy

$$\lim_{t \to t_o} \underline{r}_1 \times (\underline{r}_2(t) - \underline{r}_2) = 0.$$

Folytonosak-e a következő vektor-skalár függvények a megadott pontban, s ha ott nem folytonosak, van-e határértékük?

1.10. $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + (2-t)\underline{j} + t\sin t\,\underline{k}$; $t = 0$.

1.11. $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + (2-t)\underline{j} + \frac{\sin t}{t}\underline{k}$; $t = 0$.

1.12. $\underline{r}(t) = 3t\,\underline{i} + e^{\frac{1}{t-2}}\,\underline{j} + (2-t^2)\,\underline{k}$; $t = 2$.

1.13. $\underline{r}(t) = \frac{t - \sqrt{t}}{\sqrt{t} - 1}\underline{i} + 3t\,\underline{j} + t^3\underline{k}$, $t = 1$.

1.14. $\underline{r}(t) = \frac{1}{t}\underline{i} + \frac{t^2 - 9}{t + 3}\underline{j} + t\,\underline{k}$, $t = 3$, $t = -3$.

Mely számközben folytonosak a következő vektor-skalár függvények?

1.15. $\underline{r}(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}\,\underline{i} + \dfrac{\sin 3t}{t}\,\underline{j}\ t^2\underline{k}.$

1.16. $\underline{r}(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}\,\underline{i} + t^2\underline{j} + \dfrac{2^t - t^2}{t - 2}\,k.$

1.17. Tekintsük az $\underline{r}(\varphi) = a\cos\varphi\,\underline{i} + a\sin\varphi\,\underline{j} + \underline{k}a(1-\cos\varphi-\sin\varphi)$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ görbét. Ábrázoljuk a görbét. Határozzuk meg és ábrázoljuk az

$$\frac{\underline{r}(\varphi_o + \Delta\varphi) - \underline{r}(\varphi_o)}{\Delta\varphi}, \quad \dot{\underline{r}}(\varphi_o).$$

vektorokat, ahol $\varphi_o = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_o + \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Határozzuk meg a következő vektor-skalár függvények derivált vektor-skalár függvényét!

1.18. $\underline{r}(t) = \frac{1}{2}\cos t\,\underline{i} - \dfrac{t}{1 - t^2}\,\underline{j} + \ln(1 + t)\underline{k}$, $-1<t<1$, $1<t<+\infty$

1.19. $\underline{r}(t) = \ln t^2\underline{i} + \ln t\underline{j} + \sqrt{t^2 - 1}\,\underline{k}$, $1 < t < +\infty$.

1.20. Számítsuk ki az

$$(\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t))^{\bullet}, \quad (\underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t))^{\bullet}, \quad (\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t))^{\bullet}$$

deriváltakat tetszőleges olyan pontban, ahol $\underline{r}_1(t)$ és $\underline{r}_2(t)$ is deriválható, ha

$$\underline{r}_1(t) = t^2\underline{i} + 3t\underline{j} + 5\underline{k}, \qquad -\infty<t<+\infty,$$

$$\underline{r}_2(t) = e^{2t}\underline{i} + 3\cos t\,\underline{k}, \qquad -\infty<t<+\infty.$$

Itt alkalmazhatjuk következő deriválási szabályokat:

$$(\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t))^{\bullet} = \dot{\underline{r}}_1(t) \pm \dot{\underline{r}}_2(t), \quad (\underline{r}_1(t)\underline{r}_2(t))^{\bullet} =$$
$$= \dot{\underline{r}}_1(t)\cdot\underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t)\dot{\underline{r}}_2(t),$$

$$(\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t))^{\bullet} = \dot{\underline{r}}_1(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \dot{\underline{r}}_2(t).$$

Írjuk fel a következő térgörbék adott pontjához tartozó érintőegyenes egyenletét!

1.21. $\underline{r}(t) = (t - 3)\underline{i} + (t^2 + 1)\underline{j} + t^2 k$, $t_o = 2$.

1.22. $\underline{r}(t) = \sin t\, \underline{i} + \cos t\, \underline{j} + \dfrac{1}{\cos t}\, \underline{k}$, $t_o = 0$.

1.23. $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + t^2\underline{k}$, $t_o = 2$.

1.24. $\underline{r}(t) = \dfrac{t}{1+t}\, \underline{i} + \dfrac{1+t}{t}\, \underline{j} + t^2\underline{k}$, $t_o = 1$.

1.25. $\underline{r}(t) = \cos^2 t\underline{i} + \sin^2 t\underline{j} + t^2\underline{k}$, $t_o = \dfrac{\pi}{4}$.

1.26. $\underline{r}(t) = \sqrt{t^2 + 1}\, \underline{i} + \ln 3^t\underline{j} + 3^t\underline{k}$, $t_o = 1$.

1.27. $\underline{r}(t) = \mathrm{ch}\, t\underline{i} + \mathrm{sh}\, t\underline{j} + \underline{k}$, $t_o = 0$.

1.28. $\underline{r}(t) = -t^3\underline{i} + 2t^2\underline{j} + 3t\underline{k}$, $t_o = -1$.

1.29. Van-e olyan pontja az

$$\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k} \qquad (a > 0,\ b > 0 \text{ áll.})$$

görbének a $0 \le t \le 2\pi$ szakaszon, amihez tartozó érintőegyenes párhuzamos az $\underline{r}(0)$, $\underline{r}(2\pi)$ pontokat összekötő egyenessel?

1.30. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k} \qquad (a > 0,\ b > 0 \text{ áll.})$$

görbe azon pontját, amelyhez tartozó érintőegyenes párhuzamos az $\underline{r}(0)$ ponthoz tartozó egyenesre és az $\underline{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ pontra illeszkedő síkkal! Másrészt bizonyítsuk be, hogy az $\dot{\underline{r}}(t)$ és a $\underline{k}$ vektor által meghatározott szög állandó!

1.31. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{4}t^4\underline{i} + \frac{1}{3}t^3\underline{j} + \frac{1}{2}t^2\underline{k}$$

térgörbe azon pontjait, ahol az érintőegyenes párhuzamos az $x + 3y + 2z = 0$ síkkal!

1.32. Határozzunk meg az

$$\underline{r}(t) = t^3\underline{i} + t^2\underline{j} + t\underline{k}$$

térgörbe $-1 < t < 0$ és $0 < t < 1$ szakaszán olyan pontot, amelyhez tartozó érintőegyenes párhuzamos az $\underline{r}(-1)$, $\underline{r}(-0)$, $\underline{r}(1)$ pontokra illeszkedő síkkal! Igazoljuk, hogy ilyen pont biztosan van!

1.33. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\underline{i} + (\sin t + t\cos t)\underline{j} + (t^2 + 1)\underline{k}$$

térgörbe azon pontjait, ahol az érintő párhuzamos az (y, z) síkkal!

1.34. Felírandó az

$$\underline{r}(t) = 2t^3\underline{i} + 3t^2\underline{j} - 6t\underline{k}$$

térgörbe $x + 4y + 5z - 10 = 0$ síkkal párhuzamos érintőegyeneseinek egyenlete!

1.35. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$$

térgörbét $t_0 = 2$ paraméterű pontjában érintőegyenesnek a koordináta síkokkal való metszéspontját.

2. Térgörbe ívhossza

2.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k}$$

görbe (hengerre írt csavarvonal) $0 \leq t \leq t_0$ szakaszának ívhosszát egyszerűen a Pythagoras tétellel.
Számítsuk ki a következő térgörbék megadott szakaszának ívhosszát.

2.02. $\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + b\underline{j} + a\sin t\underline{k}$, $(a > 0,\ b > 0,\ \text{áll.})$
$0 \leq t \leq t_0$.

2.03. $\underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab}\, t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}$, $(a > 0,\ b > 0,$ áll.$)$ $0 \leqq t \leqq 1.$

2.04. $\underline{r}(t) = t^4\underline{i} + \frac{4}{3} t^3\underline{j} + t^2\underline{k}$, $-1 \leqq t \leqq 2.$

2.05. $\underline{r}(t) = (t + 1)\underline{i} + \frac{1}{2} t^2\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3}\, \underline{k}$, $-1 \leqq t \leqq 1.$

2.06. $\underline{r}(t) = e^{at}(\cos t\underline{i} + \sin t\underline{j} + b\underline{k})$, $(a > 0,\ b > 0,$ áll.$)$ $-\infty < t \leqq t_o.$

2.07. $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (\sqrt{2}\, t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}$, $0 \leqq t \leqq 1.$

2.08. $\underline{r}(t) = t\cos t\underline{i} + t\sin t\underline{j} + t\underline{k}$, $0 \leqq t \leqq 9.$

2.09. $\underline{r}(t) = t\cos(3\ln t)\underline{i} + t\sin(3\ln t)\underline{j} + 2t\underline{k}$, $0 \leqq t \leqq e^{\pi/3}.$

2.10. $\underline{r}(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\, \underline{i} + \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\, \underline{j} + (t - \operatorname{th} t)\underline{k}$, $0 \leqq t \leqq 10.$

2.11. $\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + b\sin t\underline{j} + c\underline{k}$, $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,$ áll.$)$ $0 \leqq t \leqq 2\pi.$

2.12. $\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + \underline{k}\, a^2\sin t\cos t$, $(a > 0,$ áll.$)$ $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}.$

2.13. $\underline{r}(t) = a\cos\varphi\, \cos\varphi\, \underline{i} + a\cos\varphi\sin\varphi\underline{j} + a\sin\varphi\underline{k}$ $(a>0,$ áll.$)$ $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}.$

Írjuk fel a következő térgörbék egyenletét ívhossz paraméterrel.

2.14. $\underline{r}(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j} + t\underline{k}.$

2.15. $\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k}$, $a > 0,\ b > 0,$

2.16. $\underline{r}(t) = t\cos t\underline{i} + t\sin t\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}\underline{k}.$

2.17. $\underline{r}(t) = (1 - t)\underline{i} + (3 - 2t)\underline{j} + (5 + 2t)\, \underline{k}.$

2.18. $\underline{r}(t) = \operatorname{ch} t\underline{i} + \operatorname{sh} t\underline{j} + t\underline{k}.$

3. Simulósík, kisérő háromél (trieder)

Határozzuk meg a következő térgörbék kisérő triederét. Írjuk fel a kisérő trieder egyeneseinek és síkjainak egyenletét a megadott pontban.

3.01. $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$, $\quad t_o = 2.$

3.02. $\underline{r}(t) = 3\,t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}$, $\quad t_o = -1.$

3.03. $\underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3}\,t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$, $\quad t_o = 1.$

3.04. $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}\,t^3\underline{k}$, $\quad t_o = 1.$

3.05. $\underline{r}(t) = 4\cos t\underline{i} + 4\sin t\underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t_o = \frac{\pi}{3}.$

3.06. $\underline{r}(t) = t\ln t\underline{i} + t\ln t\underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t_o = 1.$

3.07. $\underline{r}(t) = \sin^2 t\underline{i} + \cos 2t\underline{j} - \frac{1}{\sin t}\,\underline{k}$, $\quad t_o = \frac{\pi}{4}$

3.08. $x = \mathrm{ch}\,t,\ y = \mathrm{sh}\,t,\ z = t$, $\quad t_o = 0.$

3.09. $x = e^t,\quad y = e^{2t},\ z = e^t - 1$, $\quad t_o = 0.$

3.10. $x = \frac{1}{4}\,t^4,\ y = \frac{1}{3}\,t^3,\ z = \frac{1}{2}\,t^2$, $\quad t_o = 1.$

4. Térgörbe görbülete

Számítsuk ki a következő térgörbék görbületét a megadott pontban.

4.01. $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$, $\quad t_o = 2.$

4.02. $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3\,t^2\underline{k}$, $\quad t_o = -1.$

4.03. $\underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3}\,t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$, $\quad t_o = 1.$

4.04. $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}\,t^3\underline{k}$, $\quad t_o = 1.$

4.05. $\underline{r}(t) = 4\cos t\ \underline{i} + 3\sin t\ \underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t_o = \frac{\pi}{3}.$

4.06. $\underline{r}(t) = t\ln t\underline{i} + t\ln t\underline{j} + t\underline{k}$, $t_o = 1$.

4.07. $\underline{r}(t) = 5\ln^2 t\underline{i} + \cos 2t\underline{j} - \frac{1}{\sin t}\underline{k}$, $t_o = \frac{\pi}{4}$.

4.08. $x = \mathrm{ch}b$, $y = \mathrm{sh}t$, $z = t$, $t_o = 0$.

4.09. $x = e^t$, $y = e^{2t}$, $z = e^t - 1$, $t_o = 0$.

4.10. $x = \frac{1}{4}t^4$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $z = \frac{1}{2}t^2$, $t_o = 1$.

Határozzuk meg a következő felületek metszésvonalai adott p pontjához tartozó kisérő trieder egyeneseinek és síkjainak egyenletét, valamint a görbületét.

4.11. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$, $P_o(1, 1, 1)$.

4.12. $x^2 + y^2 + z^2 = 56$, $x + 3y + 4z = 26$, $P_o(6, 4, 2)$.

4.13. $4x^2 - 3xy + 6y = 0$, $3x^2 + xy - 6z = 0$, $P_o(0, 0, 0)$.

4.14. $xy - z^2 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$, $P_o(1, 1, 1)$.

4.15. $2x^2 + 3yz - 6y = 0$, $3y^2 - xz - 3z = 0$, $P_o(0, 0, 0)$.

4.16. $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $P_o(1, 1, 1)$.

Számítsuk ki a következő görbék tetszőleges P pontjához tartozó görbületét.

4.17. $\underline{r}(t) = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi)\underline{i} + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi +$
$$+ \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi)\underline{j}\ (1 - 2\sin\varphi)\underline{k}.$$

4.18. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 = z^2$

4.19. $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, $z = 4t$

4.20. $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

4.21. Határozzuk meg az
$$x^2 + y^2 = 25, \quad z = x$$
görbe görbületének a szélsőértékeit.

4.22. Határozzuk meg a

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

felület és a

$$\cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y = 0 \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

síkok metszésvonalainak görbületét a (0, 0, 0) pontban, s válasszuk ki ezen görbék (síkmetszetek) közül az extremális görbületűeket.

5. Sebesség és gyorsulás

A következő vektor-skalár függvények egy pont mozgását írják le (a t paraméter az idő). Határozzuk meg a pont sebesség- és gyorsulás- vektorát. A gyorsulás-vektort bontsuk fel érintőirányú (a sebesség-vektorral párhuzamos) és erre merőleges összetevőkre. Végűl határozzuk meg a pályamenti sebességet és gyorsulást adott t_o időpontban.

5.01. $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3} t^3\underline{k},$ $\qquad t_o = 1.$

5.02. $\underline{r}(t) = 5 \cos t\ \underline{i} + 5 \sin t\ \underline{j} + t\underline{k}$ $\qquad$ (t tetszőleges).

5.03. $\underline{r}(t) = \operatorname{ch} t\ \underline{i} + \operatorname{sh} t\ \underline{j} + t\underline{k}$ $\qquad$ (t tetszőleges).

6. Torzió, Frenet-képletek

Számítasuk ki a következő térgörbék adott pontjához tartozó torzióját.

6.01. $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k},$ $\qquad t_o = 2.$

6.02. $\underline{r}(t) = 3 t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3 t^2\underline{k},$ $\qquad t_o = -1.$

6.03. $\underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3} t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k},$ $\qquad t_o = 1.$

6.04. $\underline{r}(t) = (t^3 - 3)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3} t^3\underline{k},$ $\qquad t_o = 1.$

6.05. $\underline{r}(t) = 4\cos t\,\underline{i} + 4\sin t\,\underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t_o = \frac{\pi}{3}$.

6.06. $\underline{r}(t) = t\ln t\,\underline{i} + t\ln t\underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t_o = 1$.

6.07. $\underline{r}(t) = \sin^2 t\,\underline{i} + \cos 2t\underline{j} - \frac{1}{\sin t}\,\underline{k}$, $\quad t_o = \frac{\pi}{4}$.

6.08. $x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t,\ z = t$, $\quad t_o = 0$.

6.09. $x = e^t,\ y = e^{2t},\ z = e^t - 1$, $\quad t_o = 0$.

6.10. $x = \frac{1}{4}t^4,\ y = \frac{1}{3}t^3,\ z = \frac{1}{2}t^2$, $\quad t_o = 1$.

6.11. $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ y^2 - 2x + z = 0$, $\quad P_o(1, 1, 1)$.

6.12. $x^2 + y^2 + z^2 = 56,\ x + 3y + 4z = 26$; $\quad P_o(6, 4, 2)$.

6.13. $4x^2 - 3xy + 6y = 0,\ 3x^2 + xy - 6z = 0$, $\quad P_o(0, 0, 0)$.

6.14. $xy - z^2 = 0,\ x + y + z - 3 = 0$, $\quad P_o(1, 1, 1)$.

6.15. $2x^2 - 3yx - 6y = 0,\ 3y^2 - xz - 3z = 0$, $\quad P_o(0, 0, 0)$.

6.16. $x^2 + y^2 = 2,\ x^2 + y^2 - 2z = 0$, $\quad P_o(1, 1, 1)$.

Számítsuk ki a következő térgörbék tetszőleges pontjában a görbületet és a torziót a Frenet-képletek alkalmazásával

6.17. $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + t\underline{k}$,

6.18. $\underline{r}(t) = a\cos t\,\underline{i} + a\sin t\,\underline{j} + bt\underline{k}$, $\quad a > 0,\ b > 0$,

6.19. $\underline{r}(t) = t\cos t\,\underline{i} + t\sin t\,\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\underline{k}$.

6.20. $\underline{r}(t) = (1 - t)\underline{i} + (3 - 2t)\underline{j} + (5 + 2t)\underline{k}$, $\quad t = 1$.

6.21. $\underline{r}(t) = \operatorname{ch} t\,\underline{i} + \operatorname{sh} t\,\underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t = 0$.

7. Térgörbe menetének vizsgálata

7.1. Vizsgáljuk az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k}$$

térgörbét a $t_o = 2$ paraméterü pontjának környezetében (azaz határozzuk meg a ponthoz tartozó kisérő triedert, s írjuk fel a görbe ezen rendszerre vonatkozó egyenletét).

7.2. Vizsgáljuk az

$$\underline{r}(t) = 3\,t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

térgörbét a $t_o = -1$ paraméterű pontjának környezetében.

8. Kinetikai alkalmazás

8.1. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k}$$

függvény szerint mozgó pont sebesség- és gyorsulásvektorát a $t_o = 2$ pontban. Bontsuk fel az $\underline{\ddot{r}}(t)$ vektort $\underline{t}$ és $\underline{f}$ irányú összetevőkre. Határozzuk $v(t)$-t, és $a(t)$-t!

8.2. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

mozgás $t = -1$ időponthoz tartozó sebesség- és gyorsulás-vektorát, a pályamenti sebességet és a gyorsulást.

9. A felület értelmezése, megadása, az $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ függvény

9.1. Tekintsük a tér

$$\underline{r}(u, v) = \underline{a}u + \underline{b}v \quad (-\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty)$$

vektorai által meghatározott pontjainak összességét, ahol

$$\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}, \quad \underline{b} = 2\,\underline{k}.$$

Ábrázoljuk az $u = 1$, $u = 2$, $v = \frac{1}{2}$, $v = 2$ vonalakat.

9.2. A $z = f(x,y)$ tipusú függvények tanulmányozása során vizsgáljuk a $z = xy$ felületet. Írjuk fel az origóból a felület általános pontjába mutató $\underline{r} = \underline{r}(x,y)$ vektort, azaz adjuk meg a felület egyenletét $\underline{r} = r(u,v)$ alakban ($u = x$, $v = y$).

9.3. Milyen görbék lesznek az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, a\cos u \cos v + \underline{j} \cos u \sin v + \underline{k} \sin u$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi\right)$$

felület $u = u_o$, $v = v_o$ vonalai?

9.4. Felírandó azon hengerfelület egyenlete, amelynek vezérgörbéje az

$$\underline{r}(u) = u\underline{i} + \frac{u}{2}\underline{k} \qquad (-\infty < u < +\infty)$$

alkotóinak irányvektora pedig az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$ vektor!

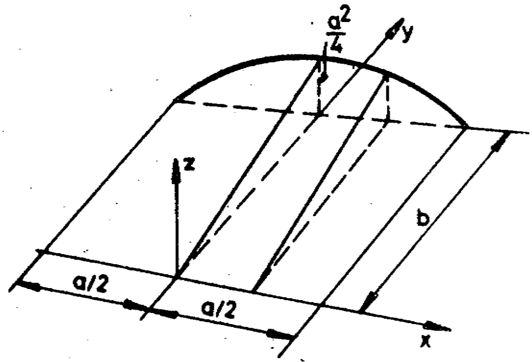
9.5. Felírandó annak a kúpfelületnek a vektor-egyenlete, amelynek vezérgörbéje a

$$\underline{r}(\varphi) = \underline{i}(a + a\cos\varphi) + \underline{j}b\sin\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

csúcspontjának koordinátái: (0, 0, 3).

9.6. Forgassuk meg a $z = 4 - x^2$ parabolát a z tengely körül, s írjuk fel az ily módon adódó felület egyenletét $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ és $z = f(x, y)$ alakban.

9.7. Egy téglalap alapterületű csarnokot oly módon fednek be, hogy az egyik falra egy parabola ívet illesztenek, s ennek minden pontját összekötik egyenessel a szemközti fal tetejének egy pontjával az ábrán látható módon. Írjuk fel az így adódó ú.n. konoid felület egyenletét!



2. ábra

9.8. Írjuk fel az $y = \frac{1}{2}x^2$ "hengerfelület" vektoregyenletét!

9.9. Írjuk fel annak a felületnek a vektoregyenletét, amelyet a $z = 1$ síkban lévő $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ kör φ paraméterű és a $z = 1$ síkban lévő $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ kör $\varphi + \frac{\pi}{3}$ paraméterű $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ pontján illeszkedő egyenesek összessége alkot. Írjuk fel a felület implicit egyenletét is!

9.10. Írjuk fel az alábbi felületek vektoregyenletét.

a) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$, b) $z = \ln xy$, c) $z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$.

9.11. Írjuk fel az alábbi felületek explicit, ill. implicit egyenletét.

a) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, a\,\mathrm{ch}u \cos v + \underline{j}\, b\,\mathrm{ch}u \sin v + \underline{k}\, c\,\mathrm{sh}u$.

b) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, 5\cos^3 u \cos v + \underline{j}\, 5\cos^3 u \sin v + \underline{k}\, 5\sin^3 u$.

c) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, a\,\mathrm{ch}^4 u\,\mathrm{ch}^4 v + \underline{j}\, a\,\mathrm{ch}u\,\mathrm{sh}v + \underline{k}\, b\,\mathrm{sh}^4 u$.

d) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, 3u \cos v + \underline{j}\, 3u \sin v + \underline{k}\, 3u^2$.

e) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\sqrt{4 + u^2}\cos v + \underline{j}\sqrt{4 + u^2}\sin v + \underline{k}\, 2\,\mathrm{arsh}\frac{u}{2}$.

10. A felületi normális és az érintősík, E, F, G

10.01. Írjuk fel a $P_1(2, 3, 0)$, $P_2(2, 5, 5)$, $P_3(0, 4, 0)$ pontokra illeszkedő sík vektoregyenletét, számítsuk a paraméter vonalak (egyenesek) irányvonalának vektoriális szorzatát.

10.02. Tekintsük az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}u + \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + v^2)$$

felületet. Írjuk fel adott u_o, v_o pontban az $u = u_o$, $v = v_o$ vonalakat (v ill. u paraméter-vonal) érintő egyenesek egyenletét, ezen egyenesek által meghatározott sík (érintősík) egyenletét, s számítsuk ki az

$$(\underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v))_{\substack{u = u_o \\ v = v_o}}$$

vektor abszolút értékét!

10.03. Írjuk fel az $x^2 + y^2 - \frac{1}{4} z^2 = 1$ felület vektoregyenletét, az $x = x_o$, vonal $(x_o, y_o, 2\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - 1})$ pontjához tartozó érintőegyenes egyenletét, s az ezen ponthoz tartozó érintősík egyenletét.

10.04. Írjuk fel a $z = \ln xy$ felület vektoregyenletét, a felület $(1, \frac{1}{e}, -1)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenletét és számítsuk ki ezen felület ezen pontjához tartozó felületi normálisának abszolút értékét.

10.05. Mely pontban nincs érintősíkja az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, u \cos v + \underline{j}\, u \sin v + \underline{k}u$$

felületnek?

11. Felületi görbék

11.01. Tekintsük az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\, xy$$

felületet (egyenesekkel lefedhető hiberbolikus paraboloid), s határozzuk meg azon felületi görbéjének vektoregyenletét, amelynek az x, y síkon lévő vetülete az

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad z = 0 \qquad (a > 0, \quad b > 0)$$

paraméteres egyenletrendszerű ellipszis, valamint az $x = x_o$, $y = y_o$ vonalak vektoregyenletét!

11.02. Írjuk fel annak a térgörbének a vektoregyenletét, amely az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, a \cos u \cos v + \underline{j}\, a \cos u \sin v + \underline{k}\, a \sin u$$

felület és az $x^2 - ax + y^2 = 0$ hengerfelület metszésvonalaként adódik. Ezen metszésvonal mindkét felületnek felületi görbéje.

11.03. Írjuk fel az

$$x = 2a + a \cos u, \quad y = 0, \quad z = a \sin u, \quad (a > 0, \; 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

paraméteres egyenletrendszerű görbe z tengely körüli forgatásával keletkező felület azon felületi görbéinek egyenletét, amelyek a $z = z_o$ sík $(-a < z_o < a)$, másrészt az $y = mx$ sík metszésvonalaként adódnak.

11.04. Írjuk fel a $z^2 = x^2 + y^2$ felület és a $z + x = 25$ sík metszésvonalának vektoregyenletét, s a metszésvonal valamely pontjához tartozó érintőegyenesének egyenletét.

11.05. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, t \cos t + \underline{j}\, t \sin t + \underline{k} t \qquad -\infty < t < +\infty$$

görbe a $z^2 = x^2 + y^2$ felület felületi görbéje (minden pontja illeszkedik a felületre).

11.06. Írjuk fel az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}u + \underline{j}v + \underline{k}uv$$

felület azon felületi görbéjének egyenletét, amely az u és v közti $v = u^2$ összefüggés alapján adódik.

11.07. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\, xy$$

felület és az $y = 1 - ax^2$ hengerfelület metszésvonalának érintővektora bármely pontban párhuzamos mindkét felület érintősíkjával.

12. Felületi görbék ívhossza

12.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\, 2 + \underline{j}\, 2\cos u + \underline{k}\, 2\sin u, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

vezérgörbéjű (0, 0, 0) csúcspontú kúpfelület

$$y(t) = e^t \cos t, \quad z(t) = e^t \sin t$$

felület görbéje $z = 1$, $z = 3$ síkok közötti szakaszának ívhosszát.

12.02. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\sqrt{x^2 + y^2}$$

felület

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t$$

felületi görbéje $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ szakaszának ívhosszát.

13. Szögmérés

13.01. Számítsuk ki, hogy a $z = xy$ felület, $x + y = 10$, $x - y = 10$ metszésvonalak mekkora szögben metszik egymást.

13.02. Határozzuk meg a $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16}}$ felület $x = 4$, $y = 3$ metszésvonalai által bezárt szöget.

14. Első- és másodrendű főmennyiségek

14.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u + 2v) - \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + 3v^2)$$

felület adott $u_o = 2$, $v_o = 4$ pontjában az E, F, G elsőrendű és az L, M, N másodrendű fő, ill. alapmennyiségek értékét.

14.02. Számítsuk ki a $zx^2 + y^3 = 12$ felület $P_o(2, 1, 1)$ pontjában az első és másodrendű alapmennyiségek értékét.

15. Meusnier-tétele

15.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u + 2v) - \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + 3v^2)$$

felület $v = u^2$ felületi görbéjének a görbületét, a felület és a felületi görbe $u_o = 1$ paraméterű pontjához tartozó simulósík metszésvonalának a görbületét (ugyanezen pontban). Messük fel a felületet a felületi görbe $u_o = 2$ pontjához tartozó érintőegyenesre illeszkedő, s a felület (3, -1, 4) pontjához tartozó érintősíkra merőleges síkkal, s ennek a síkmetszetnek is számítsuk ki a görbületét a képlettel és a Meusnier tétellel is. Ezeken kívül számítható a görbület az alapforma alapján is.

15.02. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbfelület és az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\ 2 \cos u \cos u + \underline{j}\ 2 \cos u \sin u + 0\underline{k}$$

vezérgörbéjű, $\underline{k}$-val párhuzamos alkotójú hengerfelület metszésvonalának görbületét az $u = \frac{\pi}{4}$ pontban, valamint az ezen ponthoz tartozó érintőegyenesre illeszkedő normálmetszet görbületét is ugyanezen pontban.

15.03. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ felület (0, 3, 4) pontjában a normálmetszet és az $y = 3$ síkmestzet görbületének felhasználásával a két síkmetszet szögét. Megjegyzendő, hogy a (0, 3, 4) pontra illeszkedő, s az $y = 3$ görbe (0, 3, 4) pontjához tartozó érintőre illeszkedő normálsík metszetéről van szó.

16. Főnormálgörbületek, Gauss-féle szorzatgörbület és az összeg görbület

16.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u^2 + v^2) + \underline{j}\ 2uv + \underline{k}(u - v)$$

felület főirányait az $u = 1$, $v = -1$ paraméterű pontban.

16.02. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ u \cos v + \underline{j}\ u \sin v + \underline{k}\ 2v$$

felület főirányait és a főgörbületeit tetszőleges u, v paraméterű pontban.

16.03. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u^2 + v^2) + \underline{j}(u + v) + \underline{k}u^2v^2$$

főgörbületeit és főirányait az $u = 0$, $v = -1$ pontban.

16.04. Határozzuk meg a $4x^2 + 4y^2 + z^2 - 9 = 0$ felület főirányait és főgörbületeit az $x = 1$, $y = -1$ pontban.

16.05. Mely pontokban lesz a

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}$$

felület összeg, ill. szorzat görbülete zérus?

16.06. Határozzuk meg a

$$z = 4x^2 - 2xy - 3y^2 + x + 2y + 5$$

felület főgörbületeit és főirányait az $x = 1$, $y = 3$ pontban.

16.07. Határozzuk meg a $z = xy$ felület tetszőleges pontjában a főirányokat, s írjuk fel az ú.n. főgörbületi vonalak egyenletét.

16.08. A $z = f(x, y)$ felület a $(0, 0, 0)$ pontban érinti az x, y síkot. Számítsuk ki a felület ezen pontjához tartozó főmetszetek görbületeit, ill. igazoljuk, hogy ezek léteznek és a főnormálmetszetek síkjai egymásra merőlegesek.

17. Euler-tétele

17.01. Határozzuk meg azon felületi görbék görbületét az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, 3\operatorname{ch}u \cos v + \underline{j}\, 3\operatorname{sh}u \sin v + \underline{k}\, \operatorname{th}uv$$

felület $u = 0$, $v = \frac{\pi}{2}$ pontjában, amelyek közös érintője a kisebbik főgörbület metszetének érintőjével 30°-os szöget zár be és közös simulósíkjuk az érintőn áthaladó normálmetszet síkjával 60°-os szöget zár be.

17.02. Határozzuk meg a

$$z = x^2 + y^2$$

felület $(3, 4, 25)$ pontjában a főnormálmetszetek síkjával 45°-os szöget bezáró normálmetszet görbületét ugyanezen pontban.

18. Felületdarab felszíne

18.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(\cos u - v \sin u) + \underline{j}(\sin u + v \cos u) + \underline{k}(u+v)$$

felület $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v \leqq 1$ darabjának a felszínét.

18.02. Kiszámítandó a

$$z = \frac{1}{2}\frac{x^2}{y}$$

felület azon darabjának a felszíne, amelynek az x, y síkon lévő vetülete a $0 \leqq x \leqq 1$, $1 \leqq y \leqq 2$ négyzet.

18.03. Számítsuk ki a

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ R \cos u \cos v + \underline{j}\ R \cos u \sin v + \underline{k}\ R \sin u$$

gömbfelület felszínét.

18.04. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k}\ b \sin u$$

egyenlettel adott gyűrűfelület (torus) felszínét.

18.05. Határozzuk meg

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ u \cos v + \underline{j}\ u \sin v + \underline{k}\ cu$$

felület $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$ darabjának felszínét.

18.06. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ 4 \cos u \cos v + \underline{j}\ 4 \cos u \sin v + \underline{k}\ 4 \sin u$$

gömbfelület azon darabjának a felszínét, amely az

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

henger belsejében van.

19. Felületi pontok osztályozása

19.01. Határozzuk meg a

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \\ + \underline{k}\, b \sin u \qquad (a > b)$$

felület elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait.

19.02. Határozzuk meg a

$$3z + 3xz - yz + x + y = 0$$

felület (0, 0, 0) pontjának a jellegét.

19.03. Határozzuk meg a

$$z = x^2 - y^2$$

felület felületi pontjainak a jellegét.

VEKTORANALÍZIS

1. Skalár-vektorfüggvény (skalármező)

1.01. Ábrázoljuk az $u = u(\underline{r}) = z - x^2 - y^2$ skalár-vektorfüggvény (skalármező) $u = -2$, $u = 0$, $u = 4$ szintfelületeit.

1.02. Ábrázoljuk az $u = u(\underline{r}) = x^2 - y - z$ skalár-vektorfüggvény $u_o = -2$, $u_o = 0$, $u = 2$ szintfelületeit.

1.03. Milyen felületek az $u = u(\underline{r}) = r^2$ $(\underline{r} = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}z)$ skalár-vektorfüggvény szintfelületei. Igazoljuk, hogy ez a függvény a tér minden pontjában folytonos.

Határozzuk meg a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények szintfelületeit.

1.04. $u = u(\underline{r}) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$

1.05. $u = u(\underline{r}) = \sqrt{xyz}$

2. Gradiens, iránymenti derivált

2.01. Határozzuk meg az $u = u(\underline{r}) = r^2$ skalár-vektorfüggvény gradiensét a $P_o(0, 0, 0)$ pontban. Vizsgáljuk meg a gradiens (vektor) nagyságát, irányát és értelmét.

2.02. Határozzuk meg az $u = u(\underline{r}) = \ln|\underline{r}|$ skalár-vektorfüggvény $P_o(0, 1, 3)$ pontján áthaladó szintfelületének ezen P_o pontjához tartozó érintősíkját.

2.03. Határozzuk meg az $u = u(\underline{r}) = xy^3 - 2e^x + 3\sin z$ skalár-vektorfüggvény értelmezési tartományának $\underline{r}_o = 2\underline{j} + \underline{k}$ helyvektorú pontjában az $\underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j} + 12\underline{k}$ vektor által meghatározott iránymenti deriváltját.

Számítsuk ki a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények gradiensét tetszőleges pontban.

2.04. $u = u(\underline{r}) = x^3y^2z.$

2.05. $u = u(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|}$.

2.06. $u = u(\underline{r}) = \sqrt{xyz}$.

2.07. $u = u(\underline{r}) = e^x(y + e^4) + z^3$

2.08. $u = u(\underline{r}) = x^2z - y^2z + z^2$

2.09. $u = u(\underline{r}) = x^2yz - xz^2$

2.10. Adva van az $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$ ellipszoidikus nyomáseloszlás (az izobár felületek ellipszoidok). Meghatározandó az $\underline{r}_o = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$ helyvektorú ponthoz tartozó gradiens vektor.

Határozzuk meg a következő példákban adott skalármezők gradiensét a megadott pontban.

2.11. $u = u(\underline{r}) = |\underline{r}|$, $P_o(3, -4, 1)$.

2.12. $u = u(\underline{r}) = xy + yz + xz$, $P_o(2, -3, 1)$.

2.13. $u = u(\underline{r}) = xy\ln z + x2ly + e^xy$, $P_o(1, 2, -1)$.

2.14. Határozzuk meg a $\sin^2 x - y^2 - z = 0$ felület normálvektorát (érintősíkjának normálvektorát) az $x_o = \frac{3\pi}{4}$, $y_o = \frac{1}{2}$ pontban. (A felületet tekintsük az $u = \sin^2 x - y^2 - z$ skalár-vektorfüggvény $u_o = 0$ szintfelületének.)

2.15. Határozzuk meg a $2x - y^2 - z = 0$ felület normálvektorát az $\underline{r}_o = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$ helyvektorú pontban.

Határozzuk meg a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények adott irányú deriváltját az adott pontban.

2.16. $u = 2x^2y - xyz$; $\underline{a} = \underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k}$; $P_o(1, 1, 2)$.

2.17. $u = x^3y^2z$; $\underline{a} = -2\underline{i} + 5\underline{j} - 3\underline{k}$; $P_o(1, 2, -3)$.

3. Vektor-vektorfüggvények (vektormezők)

3.01. Meghatározandó a fix tengely körül forgó merevtest pontjai sebességi vektormezője, vagyis olyan vektor-vektorfüggvény, amely tetszőleges ponthoz a merevtestnek a szóbanforgó ponton áthaladó sebességvektorát rendeli hozzá.

3.02. Milyen vektormezőt ír le a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ függvény?

3.03. Milyen vektormezőt ír le a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{a} \times \underline{r}$ és a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{r} \times \underline{9}$ függvény? Itt $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + 5\underline{k}$, $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$.

Milyen vektormezőt írnak le a következő példákban adott vektor-vektorfüggvények?

3.04. $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = (\underline{r} + \underline{a}) \times \underline{r}$; $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$; $\underline{r} = x\underline{i} + x\underline{j} + z\underline{k}$.

3.05. $\underline{v} = \underline{v}(r) = (\underline{r} \times \underline{a}) \times \underline{r}$; $\underline{a} = \underline{i} + \underline{k}$; $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$.

4. Vektormező görbementi és felületi integrálja

4.01. A koordináta rendszer kezdőpontjában elhelyezett M tömeg az (x, y, z) pontban lévő tömegegységre olyan erővel hat, amelynek abszolút értéke

$$|\underline{P}| = f \cdot M \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2},$$

iránya az $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ irányvonalával megegyezik, de vele ellentétes értelmű. Az erőteret tehát a

$$\underline{P} = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2} \left(- \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right) = - C \frac{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

vektor-vektorfüggvény írja le.
Számítsuk ki az erőtér (a vektormező most erőteret jelent) ellenében végzett munkát, miközben a tömegegység az

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

csavarvonal mentén a t = o paraméterű pontból a t = 4 paraméterű pontba megy át.

4.02. Számítsuk ki azt a munkát, amelyet a

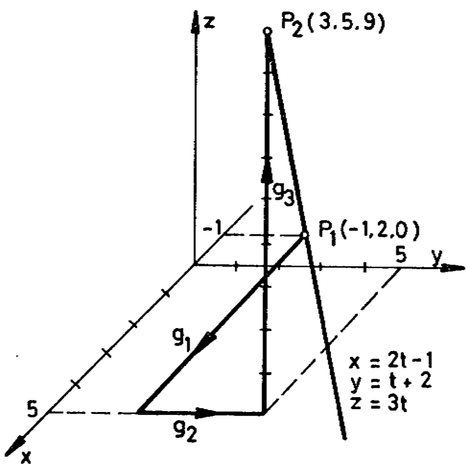
$$\underline{P} = yz\underline{i} + xz\underline{j} + xy\underline{k}$$

erőtérben a tömegegységet az

$$x = 2t - 1, \quad y = t + 2, \quad z = 3t$$

egyenes mentén a $t = 0$ ponttól a $t = 3$ pontig mozgatva végzünk.

4.03. Számítsuk ki az előző példában adott erőtérben a 3. ábrán látható g_1, g_2, g_3 egyenes szakaszokon mozgó tömegegység mozgatásához szükséges munkát.



3. ábra

4.04. Kiszámítandó a $\underline{v}(r) = -y\underline{i} + x\underline{j}$ vektormezőnek az $A(1, 0)$ és a $B(0, 1)$ pontok közötti $x^2 + y^2 = 1$ kör és $x + y = 1$ egyenes szakaszra vonatkozó vonalintegrálja.

4.05. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(r) = (x + yz)\underline{i} + (x^2 - y^2)\underline{j} + (xy + z)\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek a $P_1(1, 1, 1)$ és $P_2(0, 3, 5)$ pontokat összekötő egyenes mentén vett vonalintegrálját.

4.06. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(r) = (x^2 - y + z)\underline{i} + (x + y^2 + z)\underline{j} + (x + y + z^2)\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\ \mathrm{ch}t + \underline{j}\ \mathrm{sh}t + \underline{k}\ 2t$$

görbementi integrálját a $0 \leq t \leq 3$ határok között.

4.07. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(r) = (x^2 + y + z)\underline{i} + (x + y^2 + z)\underline{j} + (x + y + z^2)\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\ \cos t + \underline{j}\ \sin t + \underline{k}2t$$

csavarvonal mentén vett vonalintegrálját (görbementi integrál).

4.08. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\ \cos^2 t + \underline{j}\ \cos t\ \sin t + \underline{k}\ \sin t$$

görbe (Viviani-féle görbe) mentén vett vonalintegrálját a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ határok között.

4.09. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

erőtér által végzett munkát, ha az elmozdulás az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}t^2 + \underline{j} + \underline{k}\ \frac{1}{t}$$

görbe mentén történik a $t_1 = 1$ és $t_2 = 2$ pontok között.

4.10. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(r) = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}z$$

vektor-vektorfüggvény felületi integrálját az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(3 + \cos u)\cos v + \underline{j}(3 + \cos u)\sin v + \underline{k}\sin u$$

gyűrűfelület x, y sík felületi darabjára vonatkozó felfelé mutató felületi normális mellett.

4.11. Határozzuk meg a

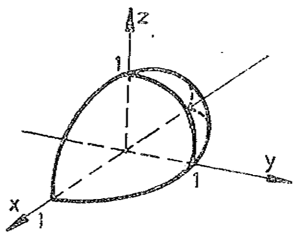
$$\underline{v}(r) = -xy\underline{i} + xy\underline{j} + z\underline{k}$$

vektormezőnek a $z = x^2 - y^2$ felület azon darabjára vonatkozó felületi integrálját, amelynek vetülete az x, y síkon a $-2 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq 3$ derékszögű négyszög, felfelé mutató felületi normális mellett.

4.12. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(r) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$$

vektormezőnek a 4. ábrán látható egységsugarú negyedgömb felületére vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató felületi normális mellett.

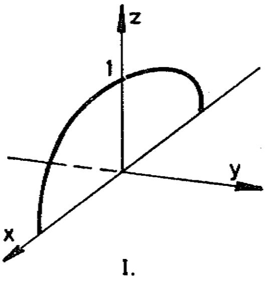


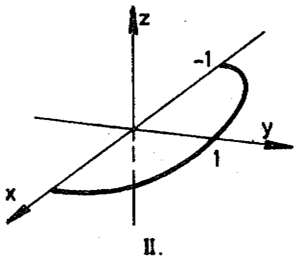
4. ábra

4.13. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(r) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$$

vektormezőnek az következő ábrákon látható két félkörlapra vonatkozó felületi integrálját:





5. ábra 6. ábra

A felületi normális értelmét oly módon válasszuk meg, hogy a két körlap és az előző példában szereplő negyedgömb felület alkotta zárt felületnél a felületi normális mindig kifelé mutató legyen.

4.14. Számítsuk ki a

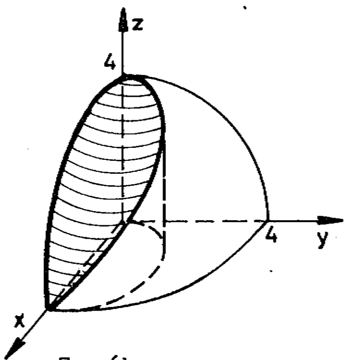
$$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{1}{xz}\,\underline{i} + \frac{1}{yz}\,\underline{k}$$

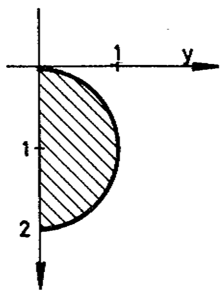
vektormezőnek az

$$x = 5\cos^3 u \cos v, \quad y = 5\cos^3 u \sin v, \quad z = 5\sin^3 u$$

forgási asztroid felület $\frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$ darabjára vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató normális mellett.

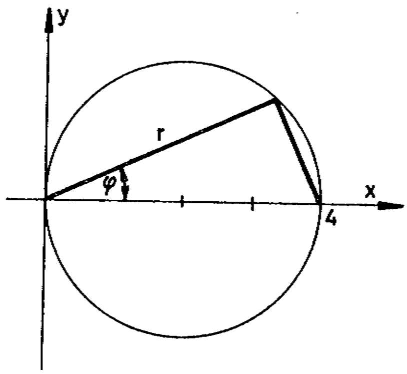
4.15. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j}$ vektormezőnek a 4 egység sugarú gömb felületére írt Viviani-görbe által határolt felületdarabnak a 7. ábrán látható részére vonatkozó felületi integrálját, felfelé mutató felületi normális mellett.





7. ábra 8. ábra

4.16. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormezőnek a $z = x^2+y^2$ felület $x^2 + y^2 + 4x = 0$ henger belsejében lévő darabjára vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató felületi normális mellett, A kettős integrál kiszámításához vezessünk be polár koordinátákat. Az integrálási tartomány a 9. ábrán látható.



9. ábra

5. Vektormező divergenciája

5.01. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(y^3 + x^2) + \underline{j}\ (12xy^2 - 3x) + \underline{k}xyz^2$$

vektormező divergenciáját tetszőleges pontban és a rögzített $P_0(1, -1, 2)$ pontban.

5.02. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(y^2 + z^2) + \underline{j}(z^2 + x^2) + \underline{k}(x^2 + y^2)$$

vektormező divergenciáját.

6. Vektormező rotációja

6.01. Képezzük a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega} x \underline{r}$ vektormező rozációját. Ez a fix forgástengely körül állandó $\underline{\omega}$ szögsebességgel forgó merevtest sebességének a vektormezője.

6.02. Számítsuk ki a $\underline{v} = (\underline{a} + \underline{r}) x \underline{r}$ vektormező rotációját tetszőleges pontban $(\underline{a} = \underline{i} + \underline{j})$.

Számítsuk ki a következő példákban adott vektormezők divergenciáját és rotációját.

6.03. $\underline{v} = x^2yz\underline{i} + xy^2z\underline{j} + xyz^2\underline{k}$

6.04. $\underline{v} = 3x\underline{i} + xy\underline{j} + z\underline{k}$, $P_o(2, 1, 0)$.

6.05. $\underline{v} = (x^2 - y^2)\underline{i} + (y^2 - z^2)\underline{j} + (z^2 - x^2)\underline{k}$.

6.06. $\underline{v} = \frac{1}{|\underline{r}|}\underline{r}$; $P_o(0, 2, 3)$.

6.07. $\underline{v} = \underline{i}\, 3x + \underline{j}(x - 2y) + (z - x)\underline{k}$.

6.08. $\underline{v} = \underline{i}\,\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\,\underline{j} + \underline{k}xz$, $P_o(1, 2, 3)$.

6.09. $\underline{v}\ |\underline{r}|^3\underline{r}$.

6.10. $\underline{v} = -\frac{ax}{x^2 + y^2}\,\underline{i} + \frac{ax}{x^2 + y^2}\,\underline{j} + a\underline{k}$.

6.11. $\underline{v} = (3x + 2y)\underline{i} - (5x + z^2)\underline{j} + (x^2 - y^2)\underline{k}$.

6.12. $\underline{v} = e^{xy}\underline{i} + e^{yz}\underline{j} + e^{z}\underline{k}$.

6.13. $\underline{v} = \underline{i}\,\sin x^2yz + \underline{j}\,\sin xy^2z + \underline{k}\,\sin xyz^2$

6.14. $\underline{v} = \underline{i}\,\ln\frac{xy}{z} + \underline{j}\,\ln\frac{yz}{x} + \underline{k}\,\ln\frac{zx}{y}$.

Bármelyik vektormezőre kimutatható, hogy divergenciája és rotációja a koordinátarendszer felvételével szemben invariáns.

A következő példákban a vektor analízis ezen ún. invariáns operációinak (divergencia, rotáció) ismételt alkalmazásával foglalkozunk.

6.15. Kiszámítandó div/grad$u(\underline{r})$/ értéke az $\underline{r}_o = 2\underline{j} - \underline{k}$ pontban, ha $u(\underline{r}) = ye^x + xe^x + yz^3$.

6.16. Meghatározandó grad/div$\underline{v}(\underline{r})$/, ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(x^3 - 2yz^2) + \underline{j}(xy^2 - z^3) + \underline{k}(z^2 - xyz).$$

6.17. Meghatározandó rot/rot$\underline{v}(\underline{r})$/, ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = e^{yz}\underline{i} + e^{zx}\underline{j} + e^{xy}\underline{k}.$$

6.18. $\text{div grad } \underline{r}^2 = ?$

6.19. $\text{rot grad } \underline{r}^2 = ?$

6.20. $\text{div grad } |\underline{r}| = ?$

6.21. $\text{rot grad } |\underline{r}| = ?$

6.22. $\text{div grad } \frac{1}{|\underline{r}|} = ?$

6.23. $\text{grad div } \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = ?$

6.24. $\text{div grad } \frac{1}{|\underline{r}|^2} = ?$

6.25. $\text{div grad}(\ln|\underline{r}|) = ?$

6.26. $\text{div grad}(e^{|\underline{r}|}) = ?$

6.27. $\text{grad /div}(|\underline{r}|^2\underline{r}) = ?$

6.28. $\text{div grad } xyz = ?$

6.29. $\text{div grad } e^{xyz} = ?$

6.30. $\text{div grad}/x^2 \sin yz)/ = ?$

7. Görbementi és felületi integrálok átalakítása

7.01. Számítsuk ki a homogén R sugarú gömb középpontjára vonatkozó inerciáját. Megjegyezzük, hogy az R sugarú homogén gömb középpontjára vonatkozó inerciáját az

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$

képlet alapján számítjuk ki. Itt a V integrációs tartomány az R sugarú gömbfelület által határolt része a térnek.

7.02. Legyen adott a $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ kocka alakú tartomány és a

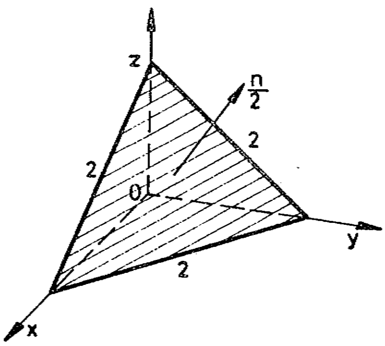
$$\underline{v}(\underline{r}) = (-x^2 + y + z)\underline{i} + (x - y^2 + z)\underline{j} + (x + y - z^2)\underline{k}$$

vektormező. Igazoljuk, ill. verifikáljuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt oly módon, hogy az

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{v}\, dV = \oint\!\!\!\oint_F \underline{v}\, d\underline{F}$$

egyenlőség bal- és jobboldalát kiszámítjuk.

7.03. Tekintsük az alábbi ábrán látható térbeli háromszöget. Irányítsuk a háromszög felületet és ennek megfelelően a háromszög oldalait. Legyen $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ az előbbi példában megadott függvény. Írjuk fel ezen $\underline{v}(\underline{r})$ függvényre és a 10. ábrán látható háromszögre Stokes-tételét.



10. ábra.

7.04. Kiszámítandó a

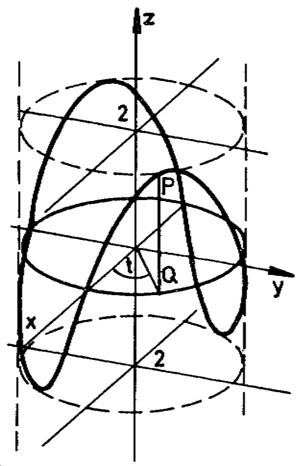
$$\underline{v}(\underline{r}) = (x - 2z)\underline{i} + (2x + y)\underline{j} + (x - y + z)\underline{k}$$

vektormezőnek a kezdőpont körüli 2 egység sugaru gömbre vonatkozó felületi integrálja befelé mutató felületi normális mellett felületi integrállal és Gauss-Osztrogradszkij tétellel.

7.05. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = (x - y)\underline{i} + (x + y)\underline{j} + xy\underline{k}$$

vektormezőnek a $z = xy$ hiberbolikus paraboloid és az $x^2 + y^2 = 4$ henger metszésvonala mentén vett vonalintegrálját vonalintegrállal és Stokes-tétellel (11. ábra).



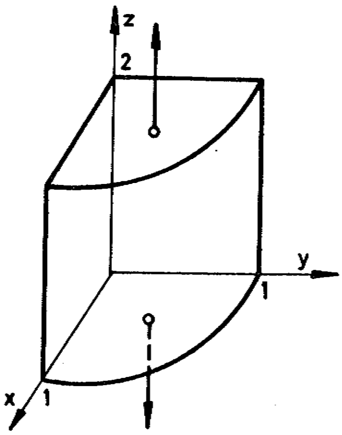
11. ábra

7.06. Határozzuk meg a

$$\underline{v} = x^3\underline{i} + y^3\underline{j} + z^3\underline{k}$$

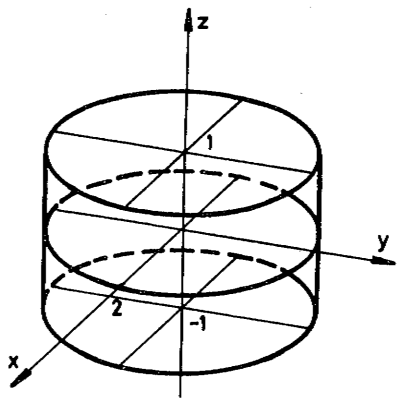
vektormező felületi integrálját az origó centrumu a sugaru gömbfelületre vonatkozóan.

7.07. Meghatározandó a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező felületi integráljának értéke az alábbi 12. ábrán látható zárt felületre vonatkozóan



12. ábra

7.08. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező felületi integrálját a 13. ábrán látható hengerpalást és a két körlap alkotta zárt felületre vonatkozóan.

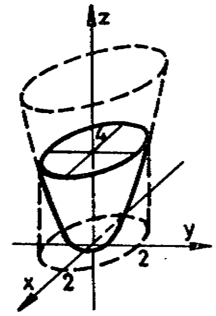


13. ábra

7.09. Legyen

$$\underline{v}(\underline{r}) = (x + y + z)\underline{i} + xyz\underline{j} + x^2\underline{k}.$$

Határozzuk meg a $\mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r})$ vektormezőnek a $z = x^2+y^2$ felület azon darabjára vonatkozó felületi integrálját, amely az $x^2 + y^2 = 4$ henger belsejébe esik (14. ábra).



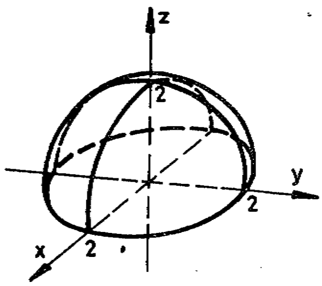
14. ábra

7.10. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező felületi integrálját az $x^2 + y^2 = 4$ alapkörű $(z = 0)$ és $(0,0,5)$ csúcspontu (5 magasságú) körkúp teljes felületére.

7.11. Adott a

$$\underline{v}(\underline{r}) = z^2\underline{i} + x^2\underline{j} + y^2\underline{k}$$

vektormező. Igazolandó Stokes tétele az $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$ felső gömbfelületre (15. ábra).

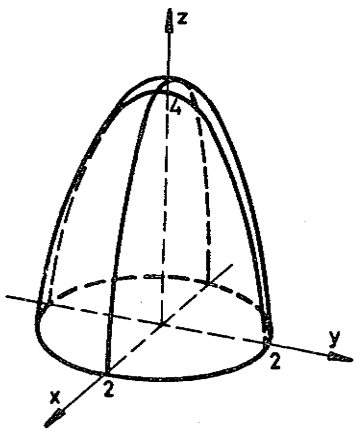


15. ábra

7.12. Adott a

$$\underline{v}(\underline{r}) = xz^2\underline{i} + zy^2\underline{j} + x^2y\underline{k}$$

vektormező. Igazolandó Stokes tétele, ha a F felület a $z = 4 - x^2 - y^2$ forgásparaboloig $z \geq 0$ része (16. ábra).



16. ábra

8. Néhány következmény

8.01. Konzervatív, ill. potenciálos-e a,

$$\underline{v}(\underline{r}) = (2xy - z^2 - yz)\underline{i} + x^2 + z^2 - xz)\underline{j} + \\ + (2yz - 2xz - xy)\,\underline{k}$$

vektormezővel jellemezhető erőtér, s igen határozzuk meg az erőtérhez tartozó potenciálfüggvényt. Megjegyzendő, hogy az időben állandó erőteret konzervatív erőtérnek nevezzük, ha van olyan $u=u(\underline{r})=U(x,y,z)$ skalár-vektorfüggvény-potenciál, ill. potenciális energia-, amelynek negatív gradiense az erőtér, vagyis ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = -\mathrm{grad}\,u(\underline{r}).$$

Ismeretes, hogy ilyen erőtérben bármely zárt görbe mentén végzett munka zérus.
Határozzuk meg a következő példákban adott vektormezők (erőterek) potenciáljait.

8.02. $\underline{v}(\underline{r}) = yze^{xyz}\underline{i} + xze^{xyz}\underline{j} + xye^{xy}\,\underline{k}.$

8.03. $\underline{v}(\underline{r}) = \dfrac{2xy}{4 - z^2}\underline{i} + \dfrac{x^2}{4 - z^2}\underline{j} + \dfrac{2x^2yz}{(4 - z^2)^2}\underline{k}.$

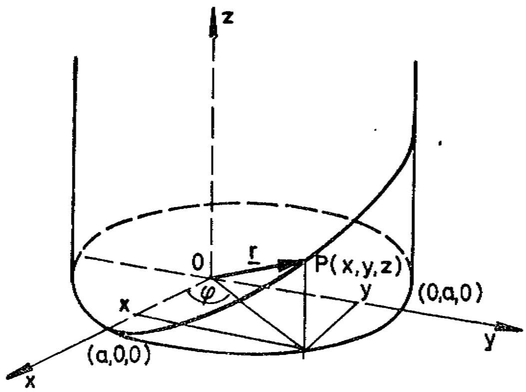
8.04. $$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{z}{x\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\underline{i} + \frac{z}{y\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\underline{j} + \frac{-1}{\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\underline{k}.$$

MEGOLDÁSOK

1. Térgörbe előállítása, az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény és határértéke, az érintővektor

1.01. Ha a koordináta-rendszert a 17. ábrán látható módon vesszük fel, akkor

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = b\varphi, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$



17. ábra

1.02. Minthogy egy geometriai alakzat valamely rendszerre vonatkozó egyenlete olyan egyenlet, amelyet az alakzat tetszőleges P pontjának (ezen rendszerre vonatkozó) koordinátát kielégítenek, s az alakzatra nem illeszkedő pont koordinátái pedig nem elégítenek ki, azért az $x^2 + y^2 = a^2$ a térben olyan hengerfelület egyenlete, amelynek tengelye a z tengely, s sugara a. Ugyanis helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletet ezen hengerfelület bármely pontjának koordinátái kielégítik, más (x,y) pedig nem. A hengerfelület és a sík metszésvonala egy görbe. Ezen görbe egyenletének felírása céljából vezessük be az $x = t$ paramétert. Ekkor

$$x = t, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - t^2}, \quad z = a - t \pm\sqrt{a^2 - t^2}, \quad -a \leqq t \leqq a.$$

1.03. Ismét az $x = t$ jelölést használva az adódik, hogy

$$x = t, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - t^2}, \quad z = \pm t\sqrt{a^2 - t^2}, \quad -a \le t \le a,$$

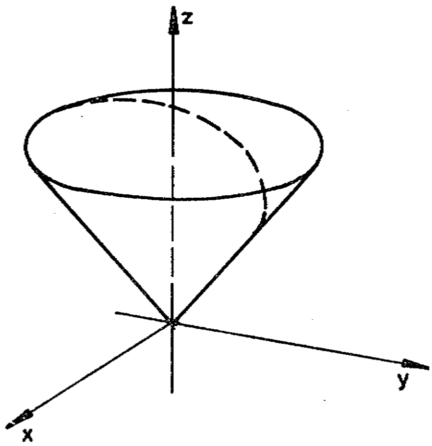
illetve

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} \pm\sqrt{a^2 - t^2}\,\underline{j} \pm t\sqrt{a^2 - t^2}\,\underline{k}, \quad -a \leq t \leq a.$$

1.04. A térgörbe tetszőleges t paraméterű pontjának koordinátái kielégítik a $z^2 = x^2 + y^2$ egyenletet, azaz a térgörbe bármely pontja illeszkedik azon kúpfelületre, amely az

$$x = \tau, \quad y = 0, \quad z = \tau, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

egyenes z tengely körüli forgatásával keletkezik. Ugyanis a $z^2 = x^2 + y^2$ ezen origó csúcspontú kúpfelület egyenlete. Ezért ezt a görbét kúpos-csavarvonalnak is nevezik. Ezt a görbét a 18. ábrán vázoltuk (szaggatott vonal).



18. ábra

1.05. Az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénynek a t_o pontban van határértéke, ha a függvény

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

alakú megadásban szereplő $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvényeknek van határértéke a t_o pontban és

$$\lim_{t\to t_o} \underline{r}(t) = \lim_{t\to t_o} x(t)\underline{i} + \lim_{t\to t_o} y(t)\underline{j} + \lim_{t\to t_o} z(t)\underline{k}.$$

Ezen tételt felhasználva

$$\lim_{t\to o} \underline{r}(t) = \lim_{t\to o} \frac{\sin 5t}{t}\underline{i} + \lim_{t\to o} \frac{\operatorname{tg}t - \sin t}{\sin^3 t}\underline{j} + \lim_{t\to o} \frac{\operatorname{tg}t}{t}\underline{k} =$$

$$= \lim_{t\to o} 5\,\frac{\sin 5t}{5t}\underline{i} + \lim_{t\to o} \frac{\sin t\left(\frac{1}{\cos t} - 1\right)}{\sin^3 t}\underline{j} +$$

$$+ \lim_{t\to o} \frac{1}{\cos t}\,\frac{\sin t}{t}\underline{k} = \lim_{t\to 0} 5\,\frac{\sin 5t}{5t}\underline{i} + \lim_{t\to o}\frac{1 - \cos t}{\cos t \sin^2 t}\underline{j} +$$

$$+ \lim_{t\to o} \frac{1}{\cos t}\,\frac{\sin t}{t}\underline{k} = \lim_{t\to o} 5\,\frac{\sin 5t}{5t}\underline{i} +$$

$$+ \lim_{t\to o} \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\cos t\; 4\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}\underline{j} + \lim_{t\to o}\frac{1}{\cos t}\,\frac{\sin t}{t}\underline{k} =$$

$$= 5\,\underline{i} + \frac{1}{2}\underline{j} + k.$$

Megjegyzendő még, hogy a $t_o = 0$ pont az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvényhez tartozó értelmezési tartományok mindegyikének torlódási pontja.

1.06. Az előbbi példában mondottaknak megfelelően az

$$x(t) = \frac{\operatorname{ch}t \sin t}{t^2}, \quad y(t) = \frac{\operatorname{tg}t - t}{t - \sin t} \quad z(t)\ \frac{t\operatorname{ctg}t - 1}{t^2}$$

függvényeket kell vizsgálni a $t = 0$ pont környezetében. A függvények a $t = 0$ pont kivételével e pont bármely környezetének minden pontjában értelmezve vannak és

$$\lim_{t\to 0} \frac{\text{cht} - \text{sint}}{t^2} = +\infty, \lim_{t\to 0} \frac{\text{tgt} - t}{t - \text{sint}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}{1 - \text{cost}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cos^2 t} \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \text{cost}} = \lim_{t\to 0} \frac{(1 + \text{cost})(1 - \text{cost})}{\cos^2 t\,(1 - \text{cost})} = 2.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\text{tctgt} - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{\text{ctgt} - t\frac{1}{\sin^2 t}} = \lim_{t\to 0} \frac{2t\,\sin^2 t}{\text{sint cost} - t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\sin^2 t + 4t\,\text{sint cost}}{\cos^2 t - \sin^2 t - 1} = 2 \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t + 2t\,\text{sint cost}}{- 2\sin^2 t} =$$

$$= - 1 \lim_{t\to 0} (1 + 2 \frac{t}{\text{sint}} \text{cost}) = - 3, \lim_{t\to 0} \frac{\text{tctgt}-1}{t^2} = -\frac{1}{3}.$$

Ezeket felhasználva

$$\lim_{t \to 0} \underline{r}(t) = (+\infty, 2, - \frac{1}{3}),$$

vagyis a függvénynek a $t = 0$ pontban nincs véges határértéke.
Megjegyzendő (előző tanulmányaink alapján ismeretes), hogy a $\lim\limits_{\to} \underline{r}(t) = (+\infty, 2, - \frac{1}{3})$ eredményünk szerint, tetszőlegesen kicsiny pozitív ε-hoz és tetszőlegesen nagy ω-hoz található olyan kicsiny pozitív δ, amelyre fennáll, hogy $\underline{r}(t)$-nek végpontjai benne vannak az

$$\omega < x < +\infty, \quad 2 - \varepsilon < y < 2 + \varepsilon,$$

$$- \frac{1}{3} - \varepsilon < z < - \frac{1}{3} + \varepsilon$$

tartományban, ha $|t| < \delta$.

1.07. $\lim\limits_{t\to o} \underline{r}(t) = \frac{1}{9}\,\underline{i} + \frac{1}{2}\,\underline{j} + \frac{4}{3}\,\underline{k}.$

1.08. $\lim\limits_{t\to a} \underline{r}(t) = \frac{1}{\cos^2 a}\,\underline{i} + a^a(\ln a - \frac{1}{a})\underline{j} + s4a\underline{k}.$

1.09. $$\lim_{t\to o} (\underline{r}_1(t) \pm r_2(t)) = \lim_{t\to o} \left\{\left[\frac{\sin 5t}{t}\,\underline{i} + \frac{tgt - \sin t}{\sin^3 t}\,\underline{j} + \frac{tgt}{t}\,\underline{k}\right] \pm \left[\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,\underline{i} + (2t+1)\underline{j} + (t^2+3)\underline{k}\right]\right\} = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}) \pm (\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}).$$

$$\lim_{t\to o} \underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t) = \lim_{t\to o}\left[\frac{\sin 5t}{t}\,\underline{i} + \frac{tgt - \sin t}{\sin^3 t}\,\underline{j} + \frac{tgt}{t}\,\underline{k}\right] \cdot \lim_{t\to o}\left[\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,\underline{i} + (2t+1)\underline{j} + (t^2+3)\,\underline{k}\right] = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k})\,(\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}) = 10.$$

$$\lim_{t\to o} \underline{r}_1(t)\;\underline{r}_2(t) = \lim_{t\to o}\left\{\frac{\sin 5t}{t}\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} + \frac{tgt - \sin t(2t+1)}{\sin^3 t} + \frac{tgt}{t}(t^3+3)\right\} = 5\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 = 10.$$

$$\lim_{t\to o} r_1(t) \times \underline{r}_2(t) = \left[\lim_{t\to o}\left(\frac{\sin 5t}{t}\,\underline{i} + \frac{tgt - \sin t}{\sin^3 t}\,\underline{j} + \frac{tgt}{t}\,\underline{k}\right]\times\left[\lim_{t\to o}\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,\underline{i} + (2t+1)\underline{j} + (t^2+3)\,\underline{k}\right.\right.\right. = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}) \times (\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & \underline{j} & k \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\underline{i} - 14\underline{j} + 3\underline{k}.$$

1.10. Az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ vektor-skalár függvényről azt mondjuk, hogy a t_o pontban folytonos, ha

$$\lim_{t \to t_o} \underline{r}(t) = \underline{r}(t_o),$$

azaz, ha a t_o pontban van véges határértéke, van helyettesitési értéke és a kettő megegyezik. Az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény valamely számközben folytonos, ha számköz minden pontjában folytonos.
Az előbbiek szerint tehát meg kell határozni az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény határértékét és helyettesítési értékét a t_o pontban.

$$\lim_{t \to o} (t^2\underline{i} + (2 - t)\underline{j} + t\sin t\underline{k}) = 2\underline{j},$$

$$\left[t^2\underline{i} + 2 - t)\underline{j}\ t\sin t\underline{k}\right]_{t=o} = 2\underline{j},$$

tehát a határérték és a helyettesítési érték is létezik, s e két érték megegyezik, ezért a függvény a t_o pontban folytonos.
Megjegyzendő, hogy ez a függvény a $-\infty < t < +\infty$ számközben mindenütt folytonos.

1.11. Ez a függvény a $t = 0$ pontban nincs értelmezve, mert a $z(t) = \frac{\sin t}{t}$ függvény itt nincs értelmezve, tehát az az $\underline{r}(t)$ függvény a $t = o$ pontban nem lehet folytonos.

$$\lim_{t \to o} \underline{r}(t) = \lim_{t \to o} (t^2\underline{i} + (2 - t)\underline{j} + \frac{\sin t}{t}\underline{k}) = 2\underline{j} + \underline{k},$$

tehát az $\underline{r}(t)$ függvénynek a $t = o$ pontban van véges értéke.
Megjegyzendő, hogy az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} t^2\,\underline{i} + (2 - t)\underline{j} + \frac{\sin t}{t}\,\underline{k} & (-\infty < t < 0,\ 0 < t < +\infty), \\ 2\,\underline{j} + \underline{k}, & t = 0 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos.

1.12. Ez a vektor-skalár függvény a $t = 2$ pontban nincs értelmezve, mert a $t = 2$ pont nincs benne az $y(t) = e^{\frac{1}{t-2}}$ függvény értelmezési tartományában,

tehát $\underline{r}(t)$-nek nincs helyettesítési értéke, s íly módon nem lehet folytonos.
Minthogy

$$\lim_{t\to 2-0} e^{\frac{1}{t-2}} = 0, \quad \lim_{t\to 2+0} e^{\frac{1}{t-2}} = +\infty,$$

azaz a bal oldali határérték nulla, a jobb oldali pedig $+\infty$, azért ezen $\underline{r}(t)$ függvénynek a $t = 2$ pontban nincs határértéke.

1.13. Ez a vektor-skalár függvény a $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ számközökben van értelmezve. Ugyanis az $\underline{r}(t)$ függvény értelmezési tartománya az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények értelmezési tartományának közös része, azaz $\underline{r}(t)$ azokban és csak azokban a pontokban van értelmezve, amelyekben az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények mindegyike értelmezve van.
Minthogy az $x(t)$ függvény a $t = 1$ pontban nincs értelmezve, azért $\underline{r}(1)$ nem létezik, tehát $\underline{r}(t)$ a $t = 1$ pontban nem lehet folytonos.
Számítsuk most a határértékét a $t = 1$ pontban!

$$\lim_{t\to 1} \frac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}} = \lim_{t\to 1} t\,\frac{\sqrt{t} - 1}{1 - \sqrt{t}} = -1, \quad \lim_{t\to 1} 3t = 3, \quad \lim_{t\to 1} t^3 = 1.$$

Tehát az $\underline{r}(t)$ függvénynek a $t = 1$ pontban van határértéke és

$$\lim_{t\to 1} \underline{r}(t) = -1\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}.$$

Ha ezen $\underline{r}(t)$ függvényt a $t = 1$ helyen a határértékével értelmezzük, azaz azt mondjuk, hogy $\underline{r}(1) = -\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}$ legyen, akkor az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} \dfrac{t - \sqrt{t}}{1 - t}\underline{i} + 3t\underline{j} + t^3\underline{k}, & \text{ha } 0 \leq t < 1,\ 1 < t < +\infty; \\ -\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}, & \text{ha } t = 1 \end{cases}$$

függvényhez jutunk, s ezen utóbbi függvény az értelmezési tartományban mindenütt folytonos. A $t = 0$ pontban természetesen csak jobb oldali folytonosságról lehet szó.

1.14. A függvény a $t = 3$ helyen folytonos, a $t = -3$ pontban nincs értelmezve, de

$$\lim_{t\to 3} \underline{r}(t) = -\frac{1}{3}\,\underline{i} - 6\,\underline{j} + 3\,\underline{k}.$$

1.15. Ez a függvény a $0 < t < 1$, $1 < t < +\infty$, számközök minden pontjában értelmezve van és ezen két intervallum minden pontjában folytonos. Másrészt

$$\lim_{t\to 0} r(t) = 3\underline{j}, \qquad \lim_{t\to 1} \underline{r}(t) = -\underline{i} + \sin 3 \cdot \underline{j} + \underline{k},$$

tehát az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} 3\,\underline{j} & \text{ha } t = 0, \\ \dfrac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}\,\underline{i} + \dfrac{\sin t3t}{t}\,\underline{j} + t^2\underline{k}, & \text{ha } 0 < t < 1, \\ & \quad 1 < t < +\infty, \\ -\underline{i} + \sin 3\underline{j} + \underline{k} & \text{ha } t = 1 \end{cases}$$

függvény az értelmezési tartományban mindenütt folytonos.

1.16. Ezen függvény értelmezési tartománya mindazon t pontok összessége, amelyekre $0 \leq t < 1$, $1 < t < 2$, $2 < t < +\infty$. A függvény e pontokban folytonos is. A $t = 1$, $t = 2$ pontokban a függvény nincs értelmezve, tehát ezekben a pontokban a függvény nem lehet folytonos.
Kérdés, hogy a $t = 1$, $t = 2$ pontokban van-e határértéke?

$$\lim_{t\to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + \frac{2^t - t^2}{t - 2}\,\underline{k} \right) = \frac{2}{3} + \underline{j} - \underline{k}.$$

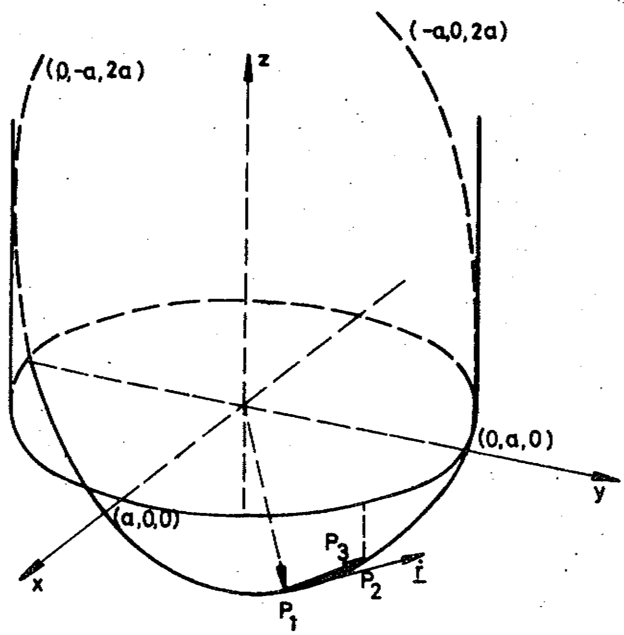
$$\lim_{t\to 2} \left(\frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}\,\underline{i} + t^2\underline{j} + \frac{2^t - t^2}{t - 2}\,\underline{k} \right) = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}\,\underline{i} + 4\underline{j} + $$
$$+ 4(\ln 2 - 1)\underline{k}.$$

1.17. Egyszerűen helyettesítéssel igazolhatjuk, hogy ezen

$$\underline{r}(\varphi) = a\cos\varphi\,\underline{i} + a\sin\varphi\,\underline{j} + a(1 - \cos\varphi - \sin\varphi)\underline{k}$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

görbe minden pontja illeszkedik az $x^2 + y^2$ hengerre és az $x + y + z = a$ síkra is, tehát a görbe ezen két geometriai alakzat metszésvonala, azaz egy ellipszis (19. ábra). Ilymódon a görbét egyszerűen szemléltethetjük.



19. ábra

Az ellipszis illeszkedik az (a, 0, 0), (0, a, 0), (-a, 0, 2a), (0, -a, 2a) és a

$$P_1\left(a\,\frac{\sqrt{2}}{2},\ a\,\frac{\sqrt{1}}{2},\ a(1 - \sqrt{2})\right),$$

$$P_2\left(a\,\frac{1}{2},\ a\,\frac{\sqrt{3}}{2},\ a\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

pontokra. Az $\underline{r}(\varphi_o + \Delta\varphi) - \underline{r}(\varphi_o)$ különbség-vektor a P_1-ből a P_2-be mutató vektor. A P_1-ből a P_3-ba mutató vektor pedig az

$$\frac{\underline{r}(\varphi_o + \Delta\varphi) - \underline{r}(\varphi_o)}{\Delta\varphi},$$

s végül az $\underline{\dot{r}}$ a φ_o pontbeli deriváltat ábrázolja, amellyel a φ_o ponthoz tartozó érintővektort értelmezzük.

1.18. $\underline{\dot{r}}(t) = -\frac{1}{2}\ \text{sint}\ \underline{i} - \frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}\ \underline{j} + \frac{1}{1+t}\ \underline{k},$

$$-1 < t < 1, \qquad 1 < t < +\infty.$$

1.19. $\underline{\dot{r}}(t) = \frac{2}{t}\ \underline{i} + \frac{1}{t}\ \underline{j} + \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\ \underline{k}, \qquad 1 < t < +\infty\ .$

1.20. $\left(\underline{r}_1(t)\cdot\underline{r}_2(t)\right)^{\bullet} = \left[(t^2\underline{i} + 3t\underline{j} + 5\underline{k})(e^{2t}\underline{i} + 3\text{cost}\underline{k})\right]^{\bullet} =$

$$=(t^2e^{2t} + 15\ \text{cost})^{\bullet}.$$

Másik megoldás:

$$\underline{r}_1(t)\cdot\underline{r}_2(t))^{\bullet} = \underline{\dot{r}}_1(t)\underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t)\ \underline{\dot{r}}_2(t) =$$

$$=(2t\underline{i} + 3\underline{j})(e^{2t}\underline{i} + 3\text{cost}\underline{k}) + (t^2\underline{i} + 3t\underline{j} +$$

$$+5\ \underline{k})(2e^{2t}\underline{i} - 3\ \text{sint}\underline{k}) =$$

$$= 2\ te^{2t} + 2t^2e^{2t} - 15\ \text{sint}.$$

$$\left[\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)\right]^{\bullet} = \underline{\dot{r}}(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \underline{\dot{r}}_2(t) =$$

$$= (2t\underline{i} + 3\underline{j}) \times (e^{2t}\underline{i} + \text{cost}\ \underline{k}) +$$

$$+ (t^2\underline{i} + 3t\underline{j} + 5\underline{k}) \times (2e^{2t}\underline{i} -$$

$$- 3\ \text{sint}\underline{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t & 3 & 0 \\ e^{2t} & 0 & 3\text{cost} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ t^2 & 3t & 5 \\ 2e^{2t} & 0 & -3\text{sint} \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cos t\, \underline{i} - 6t\cos t\, \underline{j} - 3e^{2t}\underline{k} - 9t\sin t\,\underline{i} + (3t^2 \sin t - 10e^{e^t})\underline{j} - 6te^{2t}\, k =$$

$$= 9(\cos t - t\sin t)\underline{i} + (3t^2\sin t - 6t\cos t - 10\, e^{2t})\underline{j} - e^{2t}(6t + 3)\,\underline{k}.$$

1.21. Az érintőegyenes egy pontja $\underline{r}(2) = (-1,\ 5,\ 4)$, az érintőegyenes irányvektora $v = \dot{\underline{r}}(2) = (\underline{i} + 2t\underline{j} + 2t\underline{k})\Big|_{t=2} = \underline{i} + 4\underline{j} + 4\underline{k}$. Íly módon az érintőegyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x = -1 + \tau, \quad y = 5 + 4\tau, \quad z = 4 + 4\tau, \qquad -\infty < \tau < +\infty .$$

Ez a következő alakban is írható:

$$x + 1 = \frac{y - 5}{4} = \frac{z - 4}{4} .$$

1.22. Az érintőegyenes egy pontja $\underline{r}(0) = \left[\sin t\,\underline{i} + \cos\underline{j} + \frac{1}{\cos t}k\right]_{t=0} = \underline{j} + \underline{k}.$

Az érintőegyenes irányvektora $\dot{r}(0) = \left[\cos t\,\underline{i} - \sin t\,\underline{j} - \frac{\sin t}{\cos^2 t}\underline{k}\right]_{t=0} = \underline{i}$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x = \tau, \quad y = 1, \quad z = 1, \qquad -\infty < \tau < +\infty .$$

1.23. $x = 8 + 5\tau, \quad y = 8 + 6\tau, \quad z = -1 + 2\tau,$

$$-\infty < \tau < +\infty .$$

1.24. $4x - 2 = 2 - y = \dfrac{z - 1}{2}$

1.25. $1 - 2x = 2y - 1 = \dfrac{16z - \pi^2}{8\pi}$.

1.26. $x = \sqrt{5} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\tau, \quad y = \ln 3 + \ln 3\,\pi, \quad z = 3 + 3\ln 3\,\pi$

$$-\infty < \tau < +\infty .$$

1.27. $x = 1, \quad y = \tau, \quad z = 1, \quad -\infty < \tau < +\infty$.

1.28. $x = 1 - 3\tau, \quad y = 2 - 4\tau, \quad z = -3 + 3\tau,$

$$-\infty < \tau < +\infty .$$

1.29. Minthogy

$$\underline{r}(o) = \left[a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k}\right]_{t=o} = a\,\underline{i}$$

$$\underline{r}(2\pi) = \left[a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k}\right]_{t=2\pi} = a\underline{i} + 2b2\pi\underline{k}$$

Az érintőegyenes irányvektora tetszőleges t paraméterű pontban

$$\dot{\underline{r}}(t) = -a\sin t\,\underline{i} + a\cos t\underline{j} + b\underline{k}.$$

Innen már látható, hogy nincs olyan t érték a $0 < t < 2\pi$ számkörben, amelyre fennállna, hogy

$$\underline{r}(2\pi) - \underline{r}(o) = (a\underline{i} + 4b\pi\,k) - a\underline{i} = 4b\underline{k} \,||\, \dot{\underline{r}}(t).$$

Ugyanis az $\dot{\underline{r}}(t)$-nek a $\underline{k}$-ra merőleges komponense seholsem nulla, mert

$$|-a\sin t\underline{i} + a\cos t\underline{j}| = a > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\underline{r} = (t)$ függvényekre a Legrange-féle középérték tétel nem érvényes.

1.30. Az $\underline{r}(0)$ ponthoz tartozó érintőegyenes irányvektora

$$\underline{v} \,||\, (-a\sin t, a\cos t, b)_{t=o} = (0, a, b)$$

A síkban lévő $\underline{r}(\frac{\pi}{2}) - \underline{r}(o)$ vektor pedig

$$(0, a, b\tfrac{\pi}{2}) - (a, 0, 0) = (-a, a, b\tfrac{\pi}{2}).$$

Ez azt jelenti hogy a szóbenforgó sík normálvektora

$$\underline{n} \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & a & b \\ -a & a & b\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = ab(\frac{\pi}{2} - 1)\,\underline{i} - ab\underline{j} + a^2\underline{k} \,|\, |b(\frac{\pi}{2} - 1) -$$

$$- b\underline{j} + a\underline{k}.$$

Az érintőegyenes irányvektora tetszőleges pontban

$$\dot{\underline{r}}(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b).$$

Ez azon t paraméterű pontban lesz párhuzamos a síkkal, amelyre

$$\underline{n}\cdot\dot{\underline{r}}(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)(b(\frac{\pi}{2} - 1),\ -b,\ a) = 0,$$

$$- ab\,(\frac{\pi}{2} - 1)\sin t - ab\cos t + ab = 0,$$

$$1 - \cos t - (\frac{\pi}{2} - 1)\sin t = 0,$$

$$2\sin^2\frac{t}{2} - (\pi - 2)\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 0,$$

$$\left[2\sin\frac{t}{2} - (\pi - 2)\cos\frac{t}{2}\right]\sin\frac{t}{2} = 0.$$

Ezen trigonometriai egyenlet megoldásai a

$$\sin\frac{t}{2} = 0, \qquad \mathrm{tg}\frac{t}{2} = \frac{\pi - 2}{2}$$

egyenletek megoldásai. Ezek között szerepel a

$$0 \quad t = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\pi - 2}{2} < \frac{\pi}{2}$$

megoldás. Ez azt jelenti, hogy valóban van olyan pont a $0 < t < \frac{\pi}{2}$ szakaszon, ahol az érintőegyenes párhuzamos a síkkal.

1.31. Az érintőegyenes irányvektora tetszőleges pontban

$$\dot{\underline{r}}(t) = t^3\underline{i} + t^2\underline{j} + t\underline{k}.$$

A sík normálvektora $\underline{n} = (1, 3, 2)$.

Azon t pontokban lesz az $\dot{\underline{r}}(t)$ a síkkal párhuzamos, amelyekre

$$\underline{n} \cdot \dot{\underline{r}}(t) = (t^3, t^2, t)(1, 3, 2) = t^3 + 3t^2 + 2t = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$t(t^2 + 3t + 2) = 0,$$

$$t_1 = 0, \quad t_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}.$$

1.32. Az $\underline{r}(-1) = (-1, 1, -1)$, $\underline{r}(0) = (0, 0, 0)$, $\underline{r}(1) = (1, 1, 1)$ pontokra illeszkedő sík normálvektora

$$\underline{n} \| \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\underline{i} + 2\underline{k} \,\|\, \underline{i} - \underline{k}.$$

A térgörbe érintővektora tetszőleges t paraméterű pontban

$$\dot{\underline{r}}(t) = 3t^2\underline{i} + 2\,t\underline{j} + \underline{k}.$$

Azon pontban lesz párhuzamos az érintőegyenes a síkkal, ahol

$$\underline{n}\,\dot{\underline{r}}(t) = (3t^2, 2t, 1)(\underline{i} - \underline{k} = 0,$$

$$t_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A megoldásból egyszerűen kiolvasható, hogy az egyik pont a $(-1, 1, 1)$ és a $(0, 0, 0)$ között, a másik pedig a $(0, 0, 0)$ és az $(1, 1, 1)$ pont között van. Tetszőleges differenciálható $\underline{r}=\underline{r}(t)$ térgörbe esetén (tehát ezen esetben is) igaz, hogy ha $t_1 < t_2 < t_3$, akkor a (t_1, t_2) és a (t_2, t_3) számközben is van olyan τ_1, ill. τ_2 pont, ahol az érintővektor párhuzamos az $\underline{r}(t_1)$, $\underline{r}(t_2)$, $\underline{r}(t_3)$ pontok által meghatározott síkkal.

Ugyanis, ha a ξ, η, ζ koordinátarendszerre térünk át, s ezt oly módon vesszük fel, hogy ξ és η benne legyen a síkban, akkor a $\zeta = \zeta(\tau)$ függvény (differenciálható) értéke az $\underline{r}(t_1)$, $\underline{r}(t_2)$, $\underline{r}(t_3)$ pontban nulla. Ekkor pedig a Rolle-tétel értelmében létezik legalább egy olyan τ_1 és τ_2, amelyre $\dot{\zeta}(\tau) = 0$, azaz

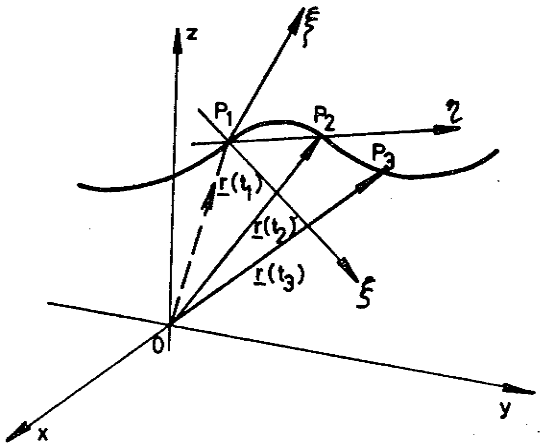
$\dot{\underline{r}}(\tau_1) \,||\, (\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1) \times (\underline{r}(t_3) - \underline{r}(t_1)),$

$$t_1 < \tau_1 < t_2,$$

$\dot{\underline{r}}(\ _2) \,||\, (\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)) \times (\underline{r}(t_3) - \underline{r}(t_1),$

$$t_2 < \tau_2 < t_3.$$

Az előzőkben mondottakat az alábbi 20. ábra szemlélteti.



20. ábra

Az előzőkből következik, hogy az $r(t_1)$, $\underline{r}(t_2)$, $\underline{r}(t_3)$ pontokra illeszkedő sík $t_2 \to t_1$, $t_3 \to t_1$, $\tau_1 \to t_1$, $\tau_2 \to t_1$ határhelyzetének (határsíknak) normál vektora.

$$\underline{n} = \lim_{\substack{\tau_1 \to t_1 \\ \tau_2 \to t_1}} \dot{\underline{r}}(\ _1) \times \dot{\underline{r}}(\ _2) \,||\, \lim_{\substack{\tau_1 \to t_1 \\ \tau_2 \to t_2}} \dot{\underline{r}}(\ _1) \times \frac{\dot{\underline{r}}(\ _2) - \dot{\underline{r}}(\ _1)}{\tau_2 - \tau_1} =$$

$$= \dot{\underline{r}}(t_1) \times \ddot{\underline{r}}(t_1).$$

1.33. Az $[y, z]$ sík normálvektora $\underline{i}$, az érintővektor tetszőleges pontban

$$\dot{\underline{r}}(t) = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\underline{i} + (\cos t + \cos t - t\sin t)\underline{j} + 2t\underline{k}.$$

A két vektor skaláris szorzata $t\cos t$, s ez akkor nulla, ha

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

1.34. A sík normálvektora $(1, 4, 5)$, az $\dot{\underline{r}}(t) = 6t^2\underline{i} + 6t\underline{j} - 6\underline{k}$. Azon pontokban lesz párhuzamos, ahol

$$(1, 4, 5)(6t^2, 6t, -6) = 0, \quad 6t^2 + 24t - 30 = 0,$$
$$t^2 + 4t - 5 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm\sqrt{16 + 20}}{2}, \qquad t_1 = 1, \quad t_2 = -5.$$

$$\dot{\underline{r}}(1) = (6, 6, -6) \parallel (1, 1, -1), \quad \dot{\underline{r}}(-5) = (150, 30, -6),$$

$$\underline{r}(1) = (2, 3, -6), \qquad \underline{r}(-5) = (250, 75, -30)$$

Az egyenesek egyenletrendszer

$$x = 2 + \tau, \quad y = 3 + \tau, \quad z = -6 - \tau \quad -\infty < \tau < +\infty.$$
$$x = 250 + 150\tau, \quad y = 75 + 30\tau, \quad z = -30 - 6\tau,$$
$$-\infty < \tau < +\infty.$$

1.35. Az egyenes pontja $\underline{r}(2) = (2, 4, 8)$, érintővektora $\dot{\underline{r}}(2) = (1, 4, 12)$, ily módon az egyenlete:

$$x = 2 + \tau, \quad y = 4 + 4\tau, \quad z = 8 + 12\tau, \quad (-\infty < \tau < +\infty).$$

Pl. az $[y, z]$ síkot ott döfi ahol $x = 0$, vagyis a $\tau = -2$ pontban s.i.t.

2. Térgörbe ívhossza

2.01. Ezen térgörbe $[0, 2\pi]$ szakaszának ívhossza az 1.01 példához tartozó ábrán látható derékszögű háromszög átfogójának a hossza, vagyis

$$s = \int_0^{2\pi} |\dot{\underline{r}}(t)|dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\ \sin t)^2 + (a\ \cos t)^2 + b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

2.02. Ez a görbe (0, b, 0) centrumú, az [x, z] síkban lévő a sugarú kör, tehát az ívhosszra vonatkozó

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt$$

formula alkalmazásával a t_o-t kell, hogy kapjuk.

$$s = \int_0^{t_o} \sqrt{(-a\ \sin t)^2 + 0^2 + (a\ \sin t)^2}dt = a\int_0^{t_o} dt - a[t]_0^{t_o} =$$

$$= at_o.$$

Megjegyzendő, hogy a formula ismerete hiányában kénytelenek lennénk az ívhossz definíciója alapján az

$$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \overline{P_{i-1}P_i} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(a\ \cos i\frac{to}{n} - a\ \cos(i-1)\frac{to}{n})^2 + (a\ \sin i\frac{to}{n} - a\ \sin(i-1)\frac{to}{n})^2}$$

végtelen számsorozat határértékét meghatározni, ill. minden esetben ezen sorozathoz hasonló sorozat határértéket számolni.
Ezen sorozat n-edik eleme a

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

azonosságok felhasználásával a következő alakban is írható:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2a \sqrt{\sin^2\left(i\frac{t_o}{n} - \frac{t_o}{2n}\right) \sin^2 \frac{t_o}{2n} + \cos^2\left(i\frac{t_o}{n} - \frac{t_o}{2n}\right) \sin^2 \frac{t_o}{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a \sum_{i=1}^{n} 2\sin \frac{t_o}{2n} = \lim_{n\to\infty} a\, 2n \sin \frac{t_o}{2n} =$$

$$= a\, t_o \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{t_o} \sin \frac{t_o}{2n} = a\, t_o$$

2.03. $S = a + 3b.$

2.04. $S = 18.$

2.05. $S = 2.$

2.06. Ezen esetben $(a>o)$

$$\dot{x}(t) = a\, e^{at}\cos t - e^{at}\sin t = e^{at}(a\cos t - \sin t),$$
$$\dot{y}(t) = ae^{at}\sin t + e^{at}\cos t = e^{at}(a\sin t + \cos t),$$
$$\dot{z}(t) = a\, be^{at}.$$
$$\dot{x}^2(t) = e^{2at}(a^2\cos^2 t - 2a \cos t \sin t + \sin^2 t),$$
$$\dot{y}^2(t) = e^{2at}(a^2\sin^2 + 2a \cos t \sin t + \cos^2 t),$$
$$\dot{z}^2(t) = a^2b^2e^{2at},$$
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = e^{2at}(a^2 + 1) + e^{2at}a^2b^2 =$$
$$= e^{2at}(1 + a^2 + a^2b^2).$$

Tehát az ívhossz

$$S = \int_{-\infty}^{t_o} \sqrt{1 + a^2(1 + b^2)}e^{at}dt = \lim_{\omega\to\infty} \int_{-\omega}^{t_o} \sqrt{1 + a^2(1 + b^2)}\, e^{at}dt$$

$$S = \sqrt{1 + a^2(1 + b^2)}\ \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{-\omega}^{t_o} = \sqrt{1 + a^2(1 + b^2)}\ \frac{e^{at_o}}{a}.$$

2.07. $\dot{x} = 6t, \qquad \dot{x}^2 = 36t^2,$

$\dot{y} = \sqrt{2}, \qquad \dot{y}^2 = 2,$

$\dot{z} = 6t, \qquad \dot{z}^2 = 36t^2.$

$$S = \int_0^1 \sqrt{36t^2 + 2 + 36t^2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1 + (6t)^2}\,dt$$

$$6t = \operatorname{sh}\tau, \qquad dt = \frac{1}{6}\operatorname{ch}\tau\,d\tau, \qquad \tau = \operatorname{arsh} 6t$$

$$S = \sqrt{2}\int_0^{\tau_1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\tau}\cdot\frac{1}{6}\operatorname{ch}\tau\,d\tau = \frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^{\tau_1}\operatorname{ch}^2\tau\,d\tau,$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^{\tau_1}\frac{\operatorname{ch}2\tau + 1}{2}\,d\tau = \frac{\sqrt{2}}{12}\left[\tau + \operatorname{sh}\tau\operatorname{ch}\tau\right]_0^{\tau_1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\left[\operatorname{arsh} 6t + 6t\sqrt{1 + (6t)^2}\right]_0^{1} = \frac{\sqrt{2}}{12}\left[\operatorname{arsh}6 + 6\sqrt{37}\right]$$

2.08. $\dot{x} = \cos t - t\sin t, \qquad \dot{x}^2 = \cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t,$

$\dot{y} = \sin t + t\cos t, \qquad \dot{y}^2 = \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t,$

$\dot{z} = 1, \qquad \dot{z}^2 = 1$

$$S = \int_0^9 \sqrt{2 + 2t^2} = \sqrt{2}\int_0^9 \sqrt{1 + t^2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\tau}\,\operatorname{ch}\tau\,d\tau,$$

$$S = \sqrt{2}\int_0^{\tau_1}\operatorname{ch}^2\tau\,d\tau = \sqrt{2}\,\frac{1}{2}(\tau_1 + \operatorname{sh}2\tau_1).$$

2.09. $S = \int_0^{e^{\pi/3}} \sqrt{14}\, dt = \sqrt{14}\, e^{\pi/3}.$

2.10. $S = 10.$

2.11. Ez a görbe a $(0,\ 0,\ c)$ centrumu, a $z = c$ síkban ellipszis.

$$\dot{x} = -a\sin t, \qquad \dot{x}^2 = a^2\sin^2 t,$$
$$\dot{y} = b\cos t, \qquad \dot{y}^2 = b^2\cos^2 t,$$
$$\dot{z} = 0 \qquad \dot{z}^2 = 0.$$

$$S = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}\, dt, \quad a > b$$

$$S = 4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2 t}\, dt$$

Ez egy elliptikus integrál, adott a, b esetén az értékét táblázatból vagy közelítő módszerrel határozhatjuk meg.

2.12.
$$\dot{x} = -a\sin t, \qquad \dot{x}^2 = a^2\sin^2 t$$
$$\dot{y} = a\cos t, \qquad \dot{y}^2 = a^2\cos^2 t,$$
$$\dot{z} = a^2\cos 2t, \qquad \dot{z}^2 = a^4\cos^2 2t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^4\cos^2 2t =$$
$$= a^2(1 + a^2\cos^2 2t),$$

$$S = 2\int_0^{\pi/4} a\sqrt{1 + a^2\cos^2 2t}\, dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} a\sqrt{1 + a^2\cos^2 2t}\, dt.$$

Ez szintén elliptikus integrál.
Megjegyzendő, hogy a görbe az $x^2 + y^2 = a^2$ hengerfelület és a $z = xy$ felület metszésvonala.

2.13. $\dot{x} = a\sin 2$, $\dot{x}^2 = a^2\sin^2$,

$\dot{y} = a\cos 2$, $\dot{y}^2 = a^2\cos^2$,

$\dot{z} = a\cos$, $\dot{z}^2 = a^2\cos^2$,

$$S = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Ezen határozott integrál értékét meghatározhatjuk (közelíthetjük) téglalap-, trapéz-, Simpson-szabálylyal és felhasználhatjuk, hogy $u > 0$ esetén

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{\frac{1}{2}}{k}u^k < (1+u)^{\frac{1}{2}} < \sum_{k=0}^{5}\binom{\frac{1}{2}}{k}u^k,$$

s u helyébe $\cos^2 x$-et írva

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{\frac{1}{2}}{k}\cos^{2k}x < (1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} < \sum_{k=0}^{5}\binom{\frac{1}{2}}{k}\cos^{2k}x.$$

Ily módon

$$\int_0^{\pi/2}\sum_{k=0}^{4}\binom{\frac{1}{2}}{k}\cos^{2k}x\,dx < \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx <$$

$$< \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{k=1}^{5}\binom{\frac{1}{2}}{k}\cos^{2k}x\right)dx.$$

2.14. A görbe $0 \le \tau < t$ szakaszának ívhossza

$$S(t) = \int_0^t |\dot{\underline{r}}(\tau)|d\tau = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)}\,d\tau,$$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{(-\sin\tau)^2 + (\cos\tau)^2 + 1}\,d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\,d\tau = \sqrt{2}t$$

$$S(t) = \sqrt{2}\,t, \quad s = \sqrt{2}\,t, \qquad t = \frac{S}{\sqrt{2}}.$$

Ezt helyettesítve a térgörbe egyenletébe az

$$\underline{r}(S) = \cos\frac{S}{\sqrt{2}}\,\underline{i} + \sin\frac{S}{\sqrt{2}}\,\underline{j} + \frac{S}{\sqrt{2}}\,\underline{k}$$

függvényt kapjuk.

2.15. $S(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\,t, \quad S = \sqrt{a^2 + b^2}\,t, \quad t = \dfrac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\underline{r}(S) = a\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\underline{i} + a\sin\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\underline{j} + b\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\underline{k}.$$

2.16. $\dot{x} = \cos t - t\sin t, \quad \dot{x}^2 = \cos^2 t - 2\cos t\sin t + t^2\sin^2 t,$

$\dot{y} = \sin t + t\cos t, \quad \dot{y}^2 = \sin^2 t + 2\cos t\sin t + t^2\cos^2 t,$

$\dot{z} = \sqrt{2}\sqrt{t}, \quad \dot{z}^2 = 2t.$

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,d\tau = \int_0^t \sqrt{\tau^2 + 2\tau + 1}\,d\tau = \int_0^t (\tau + 1)d\tau$$

$$S = \left[\frac{\tau^2}{2} + \tau\right]_0^t = \frac{t^2}{2} + t = \frac{t}{2}(t^2 + 2t + 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t+1)^2 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}(t+1)^2 = S + \frac{1}{2}, \quad (t+1)^2 = 2s + 1, \quad t = \sqrt{2s+1} - 1.$$

$$\underline{r}(t) = (\sqrt{2s+1} - 1)\cos(\sqrt{2s-1} + 1)\underline{i} +$$
$$+ (\sqrt{2s+1} - 1)\cos(\sqrt{2s+1} - 1)\underline{k}\ \frac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2s+1} - 1)^{3/2}\underline{k}$$

2.17. $$\dot{x} = -1, \qquad \dot{x}^2 = 1$$
$$\dot{y} = -2, \qquad \dot{y}^2 = 4$$
$$\dot{z} = 2, \qquad \dot{z}^2 = 4$$
$$S = \int_0^t \sqrt{9}\,d\tau = 3t, \qquad t = \frac{S}{3}.$$
$$\underline{r}(S) = (1 - \frac{S}{3})\underline{i} + (3 - \frac{2}{3}S)\underline{j} + (5 + \frac{2}{3}S)\underline{k},\ \text{(egyenes)}.$$

2.18. $$S = \int_0^t \sqrt{sh^2\tau + ch^2 t + 1}\,d\tau = \int_0^t \sqrt{sh^2\tau + ch^2\tau - sh^2\tau}\,d\tau,$$
$$\underline{r}(S) = \sqrt{1 + \frac{S^2}{2}}\,\underline{i} + \frac{S}{\sqrt{2}}\underline{j} + \operatorname{arsh}\frac{S}{\sqrt{2}}\underline{k}.$$

3. Simulósík, kiserő háromél (trieder)

3.01. A kisérő trieder elvektorai az érintővektor
$$\underline{t} \parallel \dot{r}(t),$$
a főnormális vektor
$$\underline{f} \parallel [\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)] \times \dot{\underline{r}}(t) \parallel \underline{b} \times t,$$
a binormális vektor
$$\underline{b} \parallel \dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t),$$
tehát az első és a második deriváltat kell meghatározni az adott pontban

$\underline{\dot{r}}(t) = (6t - 2)\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k}, \qquad \underline{\dot{r}}(2) = 10\underline{i} + 6\underline{j} - \underline{k},$

$\underline{\ddot{r}}(t) = 6\,\underline{i} + 6t\underline{j}, \qquad \underline{\ddot{r}}(2) = 6\,\underline{i} + 12\,\underline{j}.$

$t \parallel 10\,\underline{i} + 6\,\underline{j} - \underline{k}.$

$$\underline{f} \parallel \underline{b} \times \underline{\dot{r}} \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 14 \\ 10 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -83\,\underline{i} - 142\,\underline{j} + 22\,\underline{k}.$$

$$\underline{b} \parallel \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 6 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,\underline{i} - \underline{j} + 14\,\underline{k}.$$

Az érintőegyenes vektor-egyenlete:

$$\underline{R} - \underline{r}(t_o) = \tau\,\underline{\dot{r}}(t_o), \qquad -\infty < \tau < +\infty,$$

ahol

$$\underline{r}(t_o) = 8\,\underline{i} + 8\,\underline{j} - \underline{k},$$

Paraméteres egyenletrendszere pedig.

$$\begin{aligned} x &= x(t_o) + \tau\,\dot{x}(t_o) = 8 + 10\tau, \\ y &= y(t_o) + \tau\,\dot{y}(t_o) = 8 + 6\tau, \qquad -\infty < \tau < +\infty \\ z &= z(t_o) + \tau\,\dot{z}(t_o) = -1 - \tau. \end{aligned}$$

A főnormális egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 8 - 83\tau, \\ y &= 8 - 142\tau, \qquad -\infty < \tau < +\infty \\ z &= -1 + 22\tau. \end{aligned}$$

A binormális egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 8 - 2\tau, \\ y &= 8 - \tau, \qquad -\infty < \tau < +\infty, \\ z &= -1 + 14\tau. \end{aligned}$$

A normálsík (a két normálist tartalmazó sík) egyenlete

$$10(x - 8) + 6(y - 8) - (z - 1) = 0.$$

A rektifikáló sík egyenlete

$$-83(x - 8) - 142(y - 8) + 22(z - 1) = 0.$$

A simuló sík egyenlete

$$2(x - 8) - (y - 8) + 14(z - 1) = 0.$$

3.02.

$$\dot{\underline{r}}(t) = 6\ t\ \underline{i} + 2\ \underline{j} + 6\ t\ \underline{k},$$
$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\ \underline{i} + 6\ \underline{k},$$
$$\underline{r}(-1) = 3\ \underline{i} + \underline{j} + 3\ \underline{k},$$
$$\dot{\underline{r}}(-1) = -6\ \underline{i} + 2\ \underline{j} - 6\ \underline{k},$$
$$\ddot{\underline{r}}(-1) = 6\ \underline{i} + 6\ \underline{k},$$

$$\underline{t} \parallel 3\ \underline{i} + \underline{j} + 3\ \underline{k},$$

$$\underline{f} \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\underline{i} + 6\ \underline{j} + \underline{k},$$

$$\underline{b} \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & 2 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i} - \underline{k}.$$

Az egyenesek egyenletrendszere

$$x = 3 - 6\tau, \quad x = 3 - \tau, \quad x = 3 + \tau,$$
$$y = 1 + 2\tau, \quad y = 1 + 6\tau, \quad x = 1 \qquad -\infty < \tau < +\infty,$$
$$z = 3 - 6\tau, \quad z = 3 + \underline{k}, \quad z = 3 - \tau,$$

A síkok egyenlete

$$-6(x - 3) + 2(y - 1) - 6(z - 3) = 0,$$
$$-(x - 3) + 6(y - 1) + (z - 3) = 0,$$
$$(x - 3) - (z - 3) = 0.$$

3.03. $\underline{r}(1) = 4\,\underline{i} + \frac{1}{3}\underline{j} - 4\,\underline{k}$,

$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} + t^2\underline{j} + 2t\underline{k}$, $\quad \dot{\underline{r}}(1) = \underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$,

$\ddot{\underline{r}}(t) = 2t\underline{j} + 2\underline{k}$, $\quad \ddot{\underline{r}}(1) = 2\underline{j} + 2\underline{k}$.

Az egyenesek egyenlete

$$x = 4 + \tau, \quad x = 4 - \tau, \quad x = 4 - \tau,$$
$$y = \frac{1}{3} + \tau, \quad y = \frac{1}{3} - \tau, \quad y = \frac{1}{3} - \tau, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$
$$z = -4 + 2\tau, \quad z = 4, \quad z = -4 + \tau,$$

A síkok egyenlete

$$(x - 4) + (y - \frac{1}{3}) + 2(z + 4) = 0,$$
$$-(x - 4) - (y - \frac{1}{3}) = 0,$$
$$-(x - 4) - (y - \frac{1}{3}) + (z + 4) = 0.$$

3.04. Érintő: $x = -1 + 3\tau$, $y = 2 + \tau$, $z = \frac{1}{3}\tau$, $-\infty < \tau < +\infty$,

binormális: $x = -1 + \tau$, $y = 2$, $z = -\frac{1}{3} + 3\tau$, -

főnormális: $x = 1 + 3\tau$, $y = 2 - 10\tau$, $z = \frac{1}{3} + \tau$ $-\infty < \tau < +\infty$,

simulósík: $x - 3z + 2 = 0$,

normálsík: $3x + y + z + \frac{2}{3} = 0$,

rektifikálósík: $3x - 10y + z + \frac{68}{3} = 0$.

3.05. Érintő: $x = 2 - 2\sqrt{3}\tau$, $y = -2\sqrt{3} + 2\tau$,

$z = \frac{\pi}{3} + \tau$, $\quad -\infty < \tau < +\infty$,

binormális: $x = 2 + \sqrt{3}\tau$, $y = 2\sqrt{3} - \tau$,

$z = \frac{\pi}{3} + 8\tau$, $\quad -\infty < \tau < +\infty$,

főnormális: $x = 2 + \tau$, $y = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\tau$, $z = \frac{\pi}{3}$.

simulósík: $\sqrt{3}x - y + 8z = \frac{8\pi}{3}$,

normálsík: $2\sqrt{3}x - 2y - z = \frac{\pi}{3}$,

rektifikálósík: $x + \sqrt{3}y = 8$.

3.06. Érintő: $x = \frac{1}{2} + \tau$, $y = -2\tau$, $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\tau$,

$-\infty < \tau < +\infty$,

binormális: $x = \frac{1}{2} - 2\tau$, $y = \tau$, $z = -\sqrt{2}$,

$-\infty < \tau < +\infty$,

főnormális: $x = \tau$, $y = -\tau$, $z = 1$, $-\infty < \tau < +\infty$,

simulósík: $x + y - 2z + 2 = 0$,

normálsík: $x + y + z = 1$,

rektifikálósík: $x - y = 0$.

3.07. Érintő: $x = \frac{1}{2} + \tau$, $y = -2\tau$, $z = \sqrt{2}\tau$, $-\infty < \tau < +\infty$,

binormális: $x = \frac{1}{2} - 2\tau$, $y = \tau$, $z = -\sqrt{2}$, $-\infty < \tau < +\infty$,

főnormális: $x = \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}\tau$, $y = \sqrt{2}\tau$, $z = -\sqrt{2} - \sqrt{5}\tau$,

$-\infty < \tau < +\infty$,

simulósík: $2x + y = 1$,

normálsík: $x - 2y + \sqrt{2}z + \frac{3}{2} = 0$,

rektifikálósík: $2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 5z + 4\sqrt{2} = 0$.

3.08. Érintő: $x = 1$, $y = \tau$, $z = \tau$, $-\infty < \tau < +\infty$,

binormális: $x = 1$, $y = \tau$, $z = -\tau$, $-\infty < \tau < +\infty$,

főnormális: $x = \tau$, $y = 0$, $z = 0$, $-\infty < \tau < +\infty$,

simulósík: $y - z = 0$,

normálsík: $y + z = 0$,

rektifitkálósík: $x = 1$.

3.09. $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$,

$\dot{x}(t) = e^t$, $\dot{y}(t) = 2e^{2t}$, $\dot{z} = e^t$,

$\ddot{x}(t) = e^t$, $\ddot{y}(t) = 4e^{2t}$, $\ddot{z}(t) = e^t$,

$\dot{x}(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$, $\dot{z}(0) = 1$,

$\ddot{x}(0) = 1$, $\ddot{y}(0) = 4$, $\ddot{z}(0) = 1$.

$$\dot{\underline{r}}(0) \times \ddot{\underline{r}}(0) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2\underline{i} + 2\underline{k} \parallel \underline{i} - \underline{k}$$

Például a simulósík egyenlete:

$$1\ (x - 19 - 1(2 - 0) = 0,$$

A normálsík egyenlete:

$$1\ (x - 1) + 2(y - 1) + 1\ (z - 0) = 0.$$

3.10. Számítjuk az $(x(1),\ y(1),\ z(1),)\ \dot{x}(1),\ \dot{y}(1),\ \dot{z}(1)),$ $\ddot{x}(1),\ \ddot{y}(1),\ \ddot{z}(1))$ vektorokat

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4, \quad y(t) = \frac{1}{3}t^3, \quad z(t) = \frac{1}{2}t^2,$$
$$\dot{x}(t) = t^3, \quad \dot{y}(t) = t^2, \quad \dot{z}(t) = 1,$$
$$\ddot{x}(t) = 3t^2, \quad \ddot{y}(t) = 2t, \quad \ddot{z}(t) = 1,$$
$$x(1) = \frac{1}{4}, \quad y(1) = \frac{1}{3}, \quad z(1) = \frac{1}{4},$$
$$\dot{x}(1) = 1, \quad \dot{y}(1) = 1, \quad \dot{z}(1) = 1,$$
$$\ddot{x}(1) = 3, \quad \ddot{y}(1) = 2, \quad \ddot{z}(1) = 1.$$

A simulósík normálvektora:

$$\underline{b} \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dot{x}(1) & \dot{y}(1) & \dot{z}(1) \\ \ddot{x}(1) & \ddot{y}(1) & \ddot{z}(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}.$$

A főnormális egyenes irányvektora:

$$\underline{\underline{f}} = \underline{b} \times \underline{t} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i}\,3 - \underline{k}\,3.$$

Ezekután egyszerűen felírhatjuk a kisérő háromél bármely "elemének" az egyenletét.

4. Térgörbe görbülete

4.01. A térgörbe görbületét (görbültségének mérőszámát) tetszőleges t_o paraméterű pontban a

$$\frac{1}{R(t_o)} = G(t_o) = \left\{ \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3} \right\}_{t=t_o} = \frac{|\dot{\underline{r}}(t_o) \times \ddot{\underline{r}}(t_o)|}{|\dot{\underline{r}}(t_o)|^3}$$

formula alapján számítjuk. Tehát az $\dot{r}(2)$, $\ddot{\underline{r}}(2)$ vektorokat kell meghatározni.

$$\dot{\underline{r}}(t) = (6t - 2)\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\,\underline{i} + 6t\,\underline{j}$$

$$\dot{\underline{r}}(2) = 10\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - \underline{k}, \quad \ddot{\underline{r}}(2) = 6\,\underline{i} + 12\,\underline{j},$$

$$\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 12\,\underline{i} - 6\,\underline{j} + 48\,\underline{k},$$

A görbület képletében szereplő vektorok abszolút értéke:

$$|\dot{\underline{r}}(2)| = \sqrt{10^2 + 12^2 + (-1)^2} = \sqrt{245}$$

$$|\dot{r}(2) \times \ddot{r}(2)| = \sqrt{12^2 + (-6)^2 + 48^2} = 6\sqrt{4 + 1 + 64} = 6\sqrt{69}$$

Ezek felhasználásával a görbület a $t = 2$ paraméterű pontban

$$G(2) = \frac{6\sqrt{69}}{\sqrt{245}}\,.$$

4.02. Meghatározzuk az $\dot{\underline{r}}(t_o)$, $\ddot{\underline{r}}(t_o)$ vektorokat

$$\underline{r}(t) = 3t^2\,\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^2\,\underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = 6t\,\underline{i} + 2\,\underline{j} + 6t\,\underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\,\underline{i} + 6\,\underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(-1) = -6\,\underline{i} + 2\,\underline{j} - 6\,\underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(-1) = 6\,\underline{i} + 6\,\underline{k}.$$

a $\dot{\underline{r}}(-1)$ és $\dot{\underline{r}}(-1) \times \ddot{\underline{r}}(-1)$ vektorok abszolút értékének számítása:

$$|\dot{\underline{r}}(-1)| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{76},$$

$$\dot{\underline{r}}(-1) \times \ddot{\underline{r}}(-1) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & 2 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12\,\underline{i} - 12\,\underline{k}$$

$$|\dot{\underline{r}}(-1) \times \ddot{\underline{r}}(-1)| = \sqrt{12^2 + (-12)^2} = 12\sqrt{2},$$

így a görbület

$$G(-1) = \left(\frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3}\right)_{t=-1} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{76}} .$$

4.03. A deriváltak:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} + t^2\underline{j} + 2t\,\underline{k}, \quad \dot{\underline{r}}(1) = \underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 2t\,\underline{j} + 2\,\underline{k}, \quad \ddot{\underline{r}}(1) = 2\,\underline{j} + 2\,\underline{k}.$$

$$\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\,\underline{i} - \underline{j}2 + \underline{k}\,2.$$

$$|\dot{\underline{r}}(1) \times \underline{r}(1)| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$|\dot{\underline{r}}(1) = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

$$G(1) = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{6})^3} .$$

4.04. $\dot{\underline{r}}(1) = \sqrt{11}$, $|\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1) = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$,

$$G(1) = \frac{\sqrt{22}}{(\sqrt{11})^3} .$$

4.05. $\dot{\underline{r}}(\frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{3}\ \underline{i} + 2\ \underline{j} + \underline{k}$, $\ddot{\underline{r}}(\frac{\pi}{3}) = -2\ \underline{i} - 2\sqrt{3}\ \underline{j}$

$$|\dot{\underline{r}}(\tfrac{\pi}{3})| = \sqrt{12 + 4 + 1} = \sqrt{17},$$

$$|\dot{\underline{r}}(\tfrac{\pi}{3})) \times \ddot{\underline{r}}(\tfrac{\pi}{3})| = \sqrt{12 + 14 + 256}$$

$$G(\tfrac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{282}}{\sqrt{17}}.$$

4.06.

$$\underline{r}(t) = t\ln t\ \underline{i} + t\ln t\ \underline{j} + t\ \underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = (\ln t + 1)\underline{i} + (\ln t + 1)\underline{j} + \underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \frac{1}{t}\ \underline{i} + \frac{1}{t}\ \underline{j},$$

$$\dot{\underline{r}}(1) = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}, \quad \ddot{\underline{r}}(1) = \underline{i} + \underline{j},$$

$$|\dot{\underline{r}}(1)| = \sqrt{3}, \quad |\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1)| = \sqrt{2},$$

$$G(1) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

4.07. $\dot{\underline{r}}(\frac{\pi}{4}) = \underline{i} - 2\ \underline{j}$, $\ddot{\underline{r}}(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}k$,

$|\dot{\underline{r}}(\frac{\pi}{4})| = \sqrt{5}$, $|\dot{\underline{r}}(\frac{\pi}{4}) \times \ddot{\underline{r}}(\frac{\pi}{4})| = \sqrt{10}$,

$$G(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{5})^3}.$$

4.08. $x(t) = \text{ch}t$, $y(t) = \text{sh}t$, $z(t) = t$,

$\dot{x}(t) = \text{sh}t$, $\dot{y}(t) = \text{ch}t$, $\dot{z}(t) = 1$,

$\ddot{x}(t) = \text{ch}t$, $\ddot{y}(t) = \text{sh}t$ $\ddot{z}(t) = 0$.

$\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$, $\dot{z}(0) = 1$,

$\ddot{x}(0) = 1$, $\ddot{y}(0) = 0$, $\ddot{z}(0) = 0$,

$$|\dot{\underline{r}}(0)| = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 + \dot{z}(0)^2} = \sqrt{2},$$

$$\dot{\underline{r}}(0) \times \ddot{\underline{r}}(0) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dot{x}(0) & \dot{y}(0) & \dot{z}(0) \\ \ddot{x}(0) & \ddot{y}(0) & \ddot{z}(0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{j} - \underline{k}$$

$$|\dot{\underline{r}}(0) \times \ddot{\underline{r}}(0)| = \sqrt{2}$$

$$G(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

4.09. $|\dot{\underline{r}}(0)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$, $\quad |\dot{\underline{r}}(0) \times \ddot{\underline{r}}(0)| = 2$

$$G(0) = \frac{5}{\sqrt{5}}.$$

4.10. $|\dot{\underline{r}}(1) = \sqrt{3}$, $\quad |\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1)| = \sqrt{6}$,

$$G(1) = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^3} \quad \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

4.11. Ezen esetben igen nehézkes lenne az adott két felület metszésvonala egyenletének felírása. Azonban erre nincs is szükség, mert az $\dot{\underline{r}}(t)$, $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektorok P(1, 1, 1) ponthoz tartozó koordinátáit egyszerűen deriválással is meghatározhatjuk. Ugyanis, ha paraméternek az x változót vezetjük be, az y és a z változókat x függvényének tekintjük, akkor a két egyenlet (a térgörbét meghatározó egyenletrendszer) a következő alakban írható:

$$x^2 - y^2(x) + z^2(x) = 1,$$

$$y^2(x) - 2x + 2(x) = 0.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát x szerint deriválva következő adódik:

$$2x - 2y(x)\,\dot{y}(x) + 2\,z(x)\,\dot{z}(x) = 0,$$
$$2y(x)\,\dot{y}(x) - 2 + \dot{z}(x) = 0.$$

Felhasználva, hogy az $x = t = 1$ paraméterű pontban ($P(1, 1, 1)$ pont) $y(1) = 1$, $z(1) = 1$, kapjuk a

$$2 - 2\dot{y}(1) + 2\,\dot{z}(1) = 0, \qquad \dot{y}(1) + \dot{z}(1) = 1,$$
$$2\dot{y}(1) - 2 + \dot{z}(1) = 0, \qquad z\dot{y}(1) + \dot{z}(1) = 2$$

egyenletrendszert, amelyből $\dot{y}(1)$, $\dot{z}(1)$ egyértelműen meghatározható (van egyértelmű megoldás, mert az együtthatókból alkotott determináns nem nulla), az $x(x) = x$ egyenlőségből pedig az $\dot{x}(1) = 1$ érték adódik. Az egyenletrendszer megoldása:

$$\dot{y}(1) = 1 \quad \dot{z}(1) = 0, \quad \text{tehát}$$
$$\dot{\underline{r}}(1) = \underline{i} + \underline{j}.$$

Ha most a

$$2x - 2y(x)\,\dot{y}(x) + 2z(x)\,\dot{z}(x) = 0,$$
$$2y(x)\,\dot{y}(x) - 2 + \dot{z}(x) = 0$$

egyenletrendszert mégegyszer deriváljuk x-szerint, akkor a:

$$2 - 2(\dot{y}(x))^2 - 2y(x)\,\ddot{y}(x) + 2(\dot{z}(x))^2 + 2z(x)\,\ddot{z}(x) = 0,$$
$$2(\dot{y}(x))^2 + 2y(x)\,\ddot{y}(x) + \ddot{z}(x) = 0$$

egyenletrendszert kapjuk. Most ezen utóbbi rendszerben x helyébe 1-et írva és felhasználva, hogy

$x(1) = 1$, $y(1) = 1$, $z(1) = 1$;
$\dot{x} = 1$, $\dot{y}(1) = 1$, $\dot{z}(1) = 0$,

akkor az $\ddot{y}(1)$, $\ddot{z}(1)$ ismeretlenekre a

$$-2\,\ddot{y}(1) + 2\,\ddot{z}(1) = 0,$$
$$2\,\ddot{y}(1) + \ddot{z}(1) = -2,$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer adódik, s innen

$$\ddot{\underline{r}}(1) = -2\underline{j} + 2\underline{k}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $x = t$, $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$.
Eredményeinket felhasználva a kisérő triedért alkotó geometriai alakzatok egyenlete a következő:.

Érintő egyenes:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1, \quad -\infty < t < +\infty .$$

Binormális egyenes:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 - t, \quad -\infty < t < +\infty .$$

Főnormális egyenes:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 - 2t, \quad -\infty < t < +\infty .$$

Simulósík:

$$x - y + z = 1.$$

Normálsík:

$$x + y = 2.$$

Rektifikáló sík:

$$x - y - 2z + 2 = 0.$$

$$G(1) = \frac{1}{\sqrt{6}} .$$

4.12. Érintő egyenes:

$$x = 6 + 5t, \quad y = 4 - 11t, \quad z = 2 + 4t, -\infty < t < +\infty .$$

Binormális egyenes:

$$x = 6 + t, \quad y = 4 + 3t, \quad z = 2 + 7t, \quad -\infty < t < +\infty .$$

Főnormális egyenes:

$$x = 6 + 5t, \quad y = 4 + 3t, \quad z = 2 - 2t, \quad -\infty < t < +\infty .$$

Simulósík:

$$x + 3y + 4z = 26.$$

Normálsík:

$$5x - 11y + 7z = 0.$$

Rektifikáló sík:

$$5x + y - 2z = 30.$$

$$G(6) = \frac{1}{\sqrt{30}} .$$

4.13. Érintő egyenes:

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \qquad -\infty < t < +\infty .$$

Binormális egyenes:

$$x = 0, \quad y = 4t, \quad z = -3t, \qquad -\infty < t < +\infty .$$

Főnormális egyenes:

$$x = 0, \quad y = 3t, \quad z = 4t, \qquad -\infty < t < +\infty .$$

Simulósík:

$$3x + 4y = 0.$$

Normálsík:

$$x = 0.$$

Rektifikáló sík:

$$4y - 3z = 0.$$

$$G = \frac{5}{3} .$$

4.14. Érintő egyenes:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 1, \quad -\infty < t < +\infty .$$

Binormális egyenes:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 + t, \qquad -\infty < t < +\infty .$$

Főnormális egyenes:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 - 2t, \qquad -\infty < t < +\infty .$$

Simulósík:

$$x + y + z = 3.$$

Normálsík:

$$x - y = 0.$$

Rektifikáló sík:

$$x - y - 2z = 0.$$

$$G = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

4.15. Érintő egyenes:

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Binormális egyenes:

$$x = 0, \quad y = t, \quad z = 0, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Főnormális egyenes:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = t, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Simulósík:

$$z = 0.$$

Normálsík:

$$x = 0.$$

Rektifikáló sík:

$$y = 0.$$

$$G = \frac{1}{2}.$$

4.16. Érintő egyenes:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 1, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Binormális egyenes:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1 + t, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Főnormális egyenes:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Simulósík:

$$z = 1.$$

Normálsík:

$$x - y = 0.$$

Rektifikálósík:

$$x + y = 2.$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4.17. Meghatározzuk az $\dot{\underline{r}}(\varphi)$ és $\underline{r}(\varphi)$ vektorokat.

$$\dot{\underline{r}}(\varphi) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi\right)\underline{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi\right)\underline{j} -$$

$$- 2\cos\varphi\underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(\varphi) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi\right)\underline{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi\right)\underline{j} +$$

$$+ 2\sin\varphi\underline{k}.$$

$$|\dot{\underline{r}}(\varphi)|^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi\right)^2 +$$

$$+ 4\cos^2\varphi = \sin^2\varphi + \frac{1}{3}\cos^2\varphi + 4\cos^2\varphi =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\cos^2\varphi + 3\cos^2\varphi = 1 + \frac{10}{3}\cos^2\varphi.$$

$$\dot{\underline{r}}(\varphi) \times \ddot{\underline{r}}(\varphi) =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi & -2\cos\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi & 2\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\sqrt{2} + \underline{j}\sqrt{2} + \underline{k}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$G(\varphi) = \frac{\sqrt{4 + 4 + \frac{1}{3}}}{\sqrt{1 + \frac{10}{3}\cos^2\varphi}} .$$

4.18. Az egyik felület origó centrumú, 5 egység sugarú gömb. A másik felület pedig origó csúcspontú kúp, melynek $z = c$ "szintvonalai" a $z = c$ síkban lévő C sugarú körök. Tehát, ha a gömb egyenletébe z^2 helyett $(x^2 + y^2)$-et írunk, adódik a metszésvonal

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad z = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}$$

egyenlet, amely kör sugarának reciproka a görbület tetszőleges pontban, s így

$$G = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

4.19. $\dot{x}(t) = -5 \sin t, \quad \dot{y}(t) = 5 \cos t, \quad \dot{z}(t) = 4,$

$\ddot{x}(t) = -5 \cos t, \quad \ddot{y}(t) = -5 \sin t, \quad \ddot{z}(t) = 0.$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{25 \sin^2 t + 25 \cos^2 t + 16} = \sqrt{31}.$$

$$\dot{\underline{r}}(\varphi) \times \ddot{\underline{r}}(\varphi) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -5 \sin\varphi & 5 \cos\varphi & 4 \\ -5 \cos\varphi & -5\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= + 20 \sin\varphi\,\underline{i} - 20 \cos\varphi\,\underline{j} + 25\,\underline{k}$$

$$|\dot{\underline{r}}(\varphi) \times \ddot{\underline{r}}(\varphi)| = \sqrt{400 + 625}$$

$$G = \frac{\sqrt{1025}}{(\sqrt{31})^3} .$$

4.20. $\dot{x}(t) = \cos t - t\sin t, \quad \dot{y}(t) = \sin t + t\cos t, \quad \dot{z}(t) = 1,$

$\ddot{x}(t) = -2 \sin t - t\cos t, \quad \ddot{y}(t) = 2 \cos t - t\sin t, \quad \ddot{z}(t) = 0.$

$$|\dot{\underline{r}}(t)|^2 = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1} =$$
$$= \sqrt{2 + t^2}.$$

$$\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos t - t\sin t & \sin t + t\cos t & 1 \\ -2\sin t - t\cos t & 2\cos t - t\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(t\sin t - 2\cos t) - \underline{j}(t\cos t + 2\sin t) + \underline{k}\,(2 + t^2).$$

$$|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{t^2 + 4 + 4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{t^4 + 5t^2 + 8}$$

$$G = \frac{\sqrt{t^4 + 5t^2 + 8}}{(\sqrt{2 + t^2})^3}.$$

4.21. A $z = x$ sík az $x^2 + y^2 = 25$ hengert egy $a = 5\cdot\sqrt{2}$ nagy, s $b = 5$ kis tengelyű ellipszisben metszi, tehát az

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1$$

görbületét kell számolni az $x = 0$ és az $x=5\sqrt{2}$ pontban a síkgörbék görbületére vonatkozó

$$G = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

képlet alapján.

4.22. Meghatározzuk a

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

felület és a

$$(\cos\varphi)x - (\sin\varphi)y = 0, \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

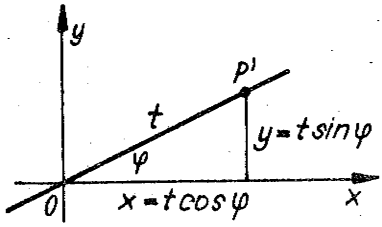
sík metszésvonalának a görbületét rögzített φ esetén a $(0, 0, 0)$ pontban.
A metszésvonal tetszőleges rögzített φ esetén az

$$x = t(\cos\varphi), \quad y = t(\sin\varphi), \quad z = \left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right)t^2,$$

$$-\infty < t < +\infty$$

egyenletrendszerű, t paraméterű síkgörbe, ahol a t

paraméter a metszésvonal tetszőleges pontja x, y síkon lévő vetületének az origótól való "távolsága" (21. ábra).



21. ábra

Ily módon a rögzített φ értékhez tartozó síkmetszet vektor-egyenlete:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\ t \cos\varphi + \underline{j}\ t \sin\varphi + \underline{k}\ t^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right),$$

$$(-\infty < t < +\infty).$$

Számítjuk a deriváltakat és azoknak a $t = 0$ ponthoz tartozó értékeit.

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} \cos\varphi + \underline{j} \sin\varphi + \underline{k}\ 2t\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right),$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{k}\ 2\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right),$$

$$\dot{\underline{r}}(0) = \underline{i} \cos\varphi + \underline{j} \sin\varphi,$$

$$\ddot{\underline{r}}(0) = k\ 2\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} \quad \frac{\sin^2\varphi}{9}\right).$$

Ezek felhasználásával a görbület a

$$G(0) = \frac{|\dot{\underline{r}}(0) \times \ddot{\underline{r}}(0)|}{|\dot{\underline{r}}(0)|^3}$$

képlet alapján számítható.

$$|\dot{\underline{r}}(0)| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1.$$

$$\dot{\underline{r}}(0) \times \ddot{\underline{r}}(0) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right), \end{vmatrix} =$$

$$= 2(\sin\varphi)\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right)\underline{i} - 2(\cos\varphi)\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} \quad \frac{\sin^2\varphi}{9}\right)\underline{j},$$

$$\dot{\underline{r}}\ (0) \times \ddot{\underline{r}}\ (0) =$$

$$= \sqrt{4(\sin^2\varphi)\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right)^2 + (4-\cos\varphi)\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right)} =$$

$$= \sqrt{4\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right)^2} = 2\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right).$$

Ezeket felhasználva a rögzített $\varphi\ (0 \leq \varphi \leq \pi)$ értékhez tartozó síkmetszet görbülete a $t = 0$ paraméterű pontban

$$G(0,\varphi) = \frac{1}{R(0,\varphi)} = 2\left(\frac{\cos^2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{9}\right).$$

Kérdés, hogy ezen $G(0,\varphi)$ függvénynek a φ mely értékénél lehet exrtrémuma (vagyis melyik síkmetszet görbületének lehet szélsőértéke), s biztos-e, hogy van szélsőértéke?
A kérdés második részére a Weierstrass-tétel alapján egyszerűen igennel válaszolhatunk.
Deriváljuk most a $G(0,\varphi)$ függvényt.

$$\frac{d\,G(0,\varphi)}{d\,\varphi} = 2\left(-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{4} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{9}\right),$$

$$\frac{d\,G(0,\varphi)}{d\,\varphi} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\right)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Ezen derivált a $\varphi = 0$, és a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ helyeken nulla, tehát ezen két $(\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2})$ síkmetszet göbülete extremális.
Számítjuk a $G(0,\varphi)$ függvény második deriváltját.

$$\frac{d^2G(0,\varphi)}{d\varphi^2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\right) 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$\left[\frac{d^2\, G(0,\varphi)}{d\varphi^2}\right]_{\varphi=0} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\right) 2 = -\frac{5}{9} < 0,$$

$$\left[\frac{d^2\, G(0,\varphi)}{d\varphi^2}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\right)(-2) = \frac{5}{9} > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\varphi = 0$ síkmetszet görbülete a legnagyobb, s a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ síkmetszet ((0, 0, 0) pontbeli) görbülete a legkisebb. E görbületek a következők:

$$G(0,\ 0) = \frac{1}{R_1(0,\ 0)} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{2},$$

$$G\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{R_2\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{R_2} = \frac{2}{9},$$

s ezek segítségével bármelyik síkmetszet (tetszőleges φ-hez tartozó) görbülete az alábbi alakban írható:

$$G(0,\varphi) = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\cos^2\varphi + \frac{2}{9}\sin^2\varphi.$$

Ereményeinket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy

$$z = \frac{x^2}{4} \quad \frac{y^2}{9}$$

felület (0, 0, 0) pontjához tartozó érintősíkjára merőleges, s a z tengelyt tartalmazó síkmetszetek között van legnagyobb és legkisebb görbületű, s ezen extremális göbületű síkmetszetek egymásra merőlegesek. Megjegyzendő, hogy ezen megállapitások nemcsak az itt tárgyalt felület (0, 0, 0) pontjában, hanem bármely felület bármely pontjában érvényesek. Ezt majd az elméleti részben igazoljuk.

5. Sebesség és gyorsulás

5.01. A pont mozgását az

$$\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}\,t^3\underline{k}$$

függvény írja le. Ennek deriváltja az

$$\dot{\underline{r}}(t) = 3t^2\,\underline{i} + \underline{j}\;t^2\underline{k},$$

s ez a mozgás sebessége (sebesség vektora), a második derivált pedig a gyorsulás vektor:

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6t\;\underline{i} + 2t\;\underline{k}.$$

Az $\dot{\underline{r}}(t)$, $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektorok a $t = 1$ pontban a következők:

$$\dot{\underline{r}}(1) = 3\;\underline{i} + 2\;\underline{j} + \frac{1}{3}\;\underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(1) = 6\;\underline{i} + 2\;\underline{k}.$$

Az $\ddot{\underline{r}}(1)$ vektort kell az $\dot{\underline{r}}(1)$-gyel párhuzamos és erre merőleges összetevőkre bontani.
A párhuzamos összetevő:

$$\ddot{\underline{r}}(1)_p = \left(\frac{\dot{\underline{r}}(1)}{|\dot{\underline{r}}(1)|}\cdot\ddot{\underline{r}}(1)\right)\frac{\dot{\underline{r}}(1)}{|\dot{\underline{r}}(1)|},$$

$$\ddot{\underline{r}}(1)_p = \frac{1}{|\dot{\underline{r}}(1)|^2}(\dot{\underline{r}}(1)\cdot\ddot{\underline{r}}(1))\cdot\dot{\underline{r}}(1),$$

$$\ddot{\underline{r}}(1)_p = \frac{1}{(\sqrt{9 + 4 + \frac{1}{9}})^2}\;(3\cdot 6 + \frac{2}{3})\cdot(3\;\underline{i} + 2\;\underline{j} + \frac{1}{3}\;\underline{k}).$$

Az $\dot{\underline{r}}(1)$-re merőleges összetevőt pedig az

$$\ddot{\underline{r}}(1)_m = \ddot{\underline{r}}(1) - \underline{r}_p(1)$$

egyenlőségből határozhatjuk meg.
Az elméleti részben vizsgáltuk, s deriváltuk az

$$\underline{r} = \underline{r}(s(t))$$

függvényt (itt s az ívhossz), azt kaptuk, hogy

$$\frac{d\,\underline{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds}\,\frac{ds(t)}{dt} = \underline{t}\cdot v(t).$$

Itt $\underline{t}$ az ún. tangenciális egységvektor (ívhossz szerinti derivált), $\frac{ds(t)}{dt} = v(t)$ pedig a pályamenti sebesség.
Ezt felhasználva a pályamenti sebesség a $t = 1$ pontban az

$$\dot{\underline{r}} = \underline{t}\,v(t)$$

összefüggésből határozható meg.

$$3\,\underline{i} + 2\,\underline{j} + \frac{1}{3}\,\underline{k} = \frac{1}{\sqrt{9 + 4 + \frac{1}{9}}}$$

$$(\,\underline{i} + 2\,\underline{j} + \frac{1}{3}\,\underline{k})\sqrt{9 + 4 + \frac{1}{9}},$$

$$v(1) = \sqrt{9 + 4 + \frac{1}{9}}\,.$$

Ha az $\underline{r} = \underline{r}(s(t))$ függvény második deriváltját számítjuk, a következő adódik:

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}\,\frac{ds(t)}{dt}\,\frac{ds(t)}{dt} + \frac{d\underline{r}}{ds}\,\frac{d^2s(t)}{dt^2}\,,$$

$$\ddot{\underline{r}} = \underline{r}''\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 + \frac{d\underline{r}}{ds}\,\frac{d^2s(t)}{dt^2}\,,$$

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{1}{R}\,\underline{f}(v(t))^2 + \underline{t}\,a(t).$$

Ezen egyenlőségben (mint az ismeretes), $\frac{1}{R}$ a görbület, $\underline{f}$ a főnormális egységvektor, $\underline{t}$ az érintő irányú egységvektor $v(t)$ a pályamenti sebesség, $a(t)$ pedig a pályamenti gyorsulás. Ezen előbbi összefüggésből is számítható az $a(t)$ és a

$$\frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$$

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{(\dot{x}(t)^2 + (\dot{y}(t)^2 + (\dot{z}(t)^2}\right.$$

egyenlőség alapján is.

$$\frac{d\,s(t)}{dt} = \sqrt{9t^4 + 1 + t^4} = \sqrt{10t^4 + 1}$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \frac{40t^3}{2\sqrt{10t^4 + 1}}$$

$$\left[\frac{d^2 s(t)}{dt^2}\right]_{t=1} = \frac{20}{\sqrt{11}}\ .$$

5.02. $\underline{r}(t) = \underline{i}\ 5\cos t + \underline{j}\ 5\sin t + \underline{k}\ t.$

$\dot{\underline{r}}(t) = -\underline{i}\ 5\sin t + \underline{j}\ 5\cos t + \underline{k}$

$\ddot{\underline{r}}(t) = -\underline{i}\ 5\cos t - \underline{j}\ 5\sin t$

$$\frac{d\,s(t)}{dt} = \sqrt{(5\cos t)^2 + (5\sin t)^2 + 1} = \sqrt{26}.$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 0.$$

Azt kaptuk, hogy $a(t)$ 0. Ez az

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{1}{R}\ \underline{f}\ (v(t))^2 + \underline{t}\ a(t)$$

egyenlőség alapján azt jelenti, hogy az $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektor érintő irányú komponense nulla, azaz $\ddot{\underline{r}}(t)$ párhuzamos minden pontban a főnormális irányú $\underline{f}$ vektorral. Számítjuk az $\ddot{\underline{r}}(t)$, $\dot{\underline{r}}(t)$-vel párhuzamos összefüggőjét, ill. az $\dot{\underline{r}}(t) \cdot \ddot{\underline{r}}(t)$ skalár szorzatot:

$$\dot{\underline{r}}(t)\ \ddot{\underline{r}}(t) = (-\underline{i}\ 5\cos t + \underline{j}\ 5\sin t + \underline{k})$$
$$(-\underline{i}\ 5\sin t + \underline{j}\ 5\cos t) = 0.$$

Tehát az $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektor valóban párhuzamos a $\underline{f}$-fel minden pontban. Ezt felhasználva az $\underline{f}$ az

$$\underline{f} = \frac{R}{(v(t))^2}\ \ddot{\underline{r}}(t)$$

összefüggés alapján is számítható ezen esetben. Megjegyzendő, hogy egyébként az $\underline{f}$ vektort az

$$\underline{f} \;||\; (\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)) \times \dot{\underline{r}}(t)$$

felhasználásával számolnánk.

5.03.

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\ \mathrm{ch}t + \underline{j}\ \mathrm{sh}t + t\ \underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}\ \mathrm{sh}t + \underline{j}\ \mathrm{ch}t + \underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}\ \mathrm{ch}t + \underline{j}\ \mathrm{sh}t,$$

$$\frac{d\ s(t)}{dt} = \sqrt{\mathrm{sh}^2 t + \mathrm{ch}^2 t + 1} = 2\ \mathrm{ch}t,$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \sqrt{2}\ \mathrm{sh}t.$$

Az $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektor $\dot{\underline{r}}(t)$ irányú komponense tehát $\sqrt{2}$ s4 t tetszőleges pontban.

6. Torzió, Fernet-képletek

6.01. Az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ alakban adott görbe torzióját a

$$T(t) = \frac{\dot{\underline{r}}(t)\ \ddot{\underline{r}}(t)\ \dddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|^2}$$

képlettel számítjuk. Esetünkben

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = (6t - 2)\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\ \underline{i} + 6t\ \underline{j},$$

$$\dddot{\underline{r}}(t) = 6\ \underline{j}.$$

$$\dot{\underline{r}}(2) = 10\ \underline{i} + 12\ \underline{j} - \underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(2) = 6\ \underline{i} + 12\ \underline{j},$$

$$\dddot{\underline{r}}(2) = 6\ \underline{j}.$$

$$\dot{\underline{r}}(2)\ \ddot{\underline{r}}(2)\dddot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -36.$$

$$\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -12\underline{i} + \underline{j}6 + 48\ \underline{k}$$

$$T(2) = \frac{-36}{6\sqrt{4+1+64}} = -\frac{6}{\sqrt{69}}.$$

A görbe ezen pontban bal csavarodású.

6.02. $\underline{r}(t) = 3t^2\ \underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^2\ \underline{k}.$

$\dot{\underline{r}}(t) = 6t\ \underline{i} + 2\ \underline{j} + 6t\ \underline{k},$

$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\ \underline{i} + 6\ \underline{k},$

$\dddot{\underline{r}}(t) = \underline{0},$

tehát a toziója nulla minden pontban, s a görbe síkgörbe.

6.03. $\underline{r}(t) = (t+3)\underline{i} + \frac{1}{3}t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$

$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} + t^2\underline{j} + 2\ t\ \underline{k},$

$\ddot{\underline{r}}(t) = 2\ t\underline{j} + 2\ \underline{k},$

$\dddot{\underline{r}}(t) = 2\ \underline{j},$

$\dot{\underline{r}}(1) = \underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k},\quad \ddot{\underline{r}}(1) = 2\underline{j} + 2\underline{k},\quad \dddot{\underline{r}}(1) = 2\underline{j}.$

$$\dot{\underline{r}}(1)\ \ddot{\underline{r}}(1)\ \dddot{\underline{r}}(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\underline{i} - \underline{j}2 + 2\underline{k}.$$

$$T(1) = \frac{-4}{\sqrt{4+4+4}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

6.04. $T(1) = \frac{1}{17}$.

6.05. $T(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{17}$.

6.06. $T(1) = \frac{1}{6}$.

6.07. $T(\frac{\pi}{4}) = -\frac{12}{7}$.

6.08. $T(0) = \frac{1}{2}$.

6.09. $T(0) = 0$.

6.10. $T(1) = \frac{1}{3}$.

6.11. $T(1) = 1$.

6.12. $T = 0$.

6.13. $T = -\frac{39}{50}$.

6.14. $T = 0$.

6.15. $T = 0$.

6.16. Az

$$\underline{r}(t) = \cos t\, \underline{i} + \sin t\, \underline{j} + t\, \underline{k}$$

görbe az $0 \leq \tau \leq t$ szakaszának ívhossza

$$S(t) = \int_0^t |\dot{\underline{r}}(\tau)|\,d\tau = \int_0^t \sqrt{(-\sin\tau)^2 + (\cos\tau)^2 + 1}\;d\tau,$$

$$S(t) = \sqrt{2}\int_0^t d\tau = \sqrt{2}\,\Big[\tau\Big]_0^t = \sqrt{2}\,t,$$

s innen a görbe paraméteres egyenletrendszere s-re való (ívhosszra) áttérés után:

$$\underline{r}(s) = \underline{i}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}s + \underline{j}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}s + \underline{k}\frac{1}{\sqrt{2}}s.$$

számítjuk a $\underline{r}'$, $\underline{r}''$ deriváltakat.

$$\underline{r}'(s) = \underline{i}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}s + \underline{j}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}s + \underline{k}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\underline{r}''(s) = -\underline{i}\,\frac{1}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}s - \underline{j}\,\frac{1}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}s.$$

Felhasználva az $r'' = \underline{t}' = G\underline{f}$ (első Fernet-képlet) egyenlőséget az adódik, hogy

$$G(s) = |\underline{r}''(s)| = \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{\sqrt{2}}s} = \frac{1}{2}.$$

A második Fernet-képlet szerint

$$\underline{f}' = -G\,\underline{t} + T\,\underline{b}$$

ahol

$$\underline{t} = \underline{r}'(s),\quad \underline{b} = \frac{\underline{r}'(s) \times \underline{r}''(s)}{|\underline{r}'(s) \times \underline{r}''(s)|},\quad \underline{f} = \underline{b} \times \underline{t},$$

a G a görbület, T pedig a torzió. A harmadik szerint pedig:

$$\underline{b}' = -T\,\underline{f}.$$

A binormális egységvektor:

$$\underline{b}(s) \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s & \frac{1}{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s & 0 \end{vmatrix},$$

$$\underline{b}(s) \parallel \underline{i} \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s - \underline{j} \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s + \underline{k} \frac{1}{(\sqrt{2})^3},$$

$$\underline{b}(s) \parallel \frac{}{(\sqrt{2})^3} \left[(\underline{i} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s - \underline{j} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s + \underline{k} \right],$$

s innen következik, hogy

$$\underline{b}(s) = \underline{i} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s - \underline{j} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s + \underline{k} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ennek deriváltja:

$$\underline{b}'(s) = \underline{i} \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s + \underline{j} \frac{1}{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s = T \underline{f}.$$

Most pedig azt használjuk fel, hogy $\underline{f} = \frac{1}{G} \underline{r}''(s)$,
s $G(s) = \frac{1}{2}$, tehát

$$\underline{i} \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s + \underline{j} \frac{1}{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s =$$

$$= T \cdot 2(- \underline{i} \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s - \underline{j} \frac{1}{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s).$$

Innen adódik, hogy $T = - \frac{1}{2}$.

6.18. Hasonló módon járhatunk el és

$$G = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \qquad T = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

6.19. Itt is ugyanúgy járunk el, mint a 6.17. példában, csak az ívhossz paraméterre való áttérés más.

$$s = \int_0^t |\dot{\underline{r}}(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{(1 + \tau)^2}\, d\tau = \int_0^t (1 + \tau)\, d\tau =$$

$$= \left[\frac{(1 + \tau)^2}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}\left[(1 + t)^2 - 1\right].$$

Ugyanis

$$\dot{x}^2 = (\cos t - t\sin t)^2 = \cos^2 - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t,$$

$$\dot{y}^2 = (\sin t + t\cos t)^2 = \sin^2 + 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t,$$

$$x^2 + y^2 = 1 + t^2,$$

$$\dot{z}^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{3}{2}\,t^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2t,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1 + 2t + t^2.$$

Ezt felhasználva

$$(1 + t)^2 = 2s + 1, \qquad t = \sqrt{2s + 1} - 1,$$

s ezek után az előző feladatokban alkalmazott módszerekkel számolunk.

6.20. $$G = 0 \qquad T = 0.$$

6.21. $$G = \frac{a\sqrt{1 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad T = \frac{a}{1 + b^2}$$

7. Térgörbe menetének vizsgálata

7.01. Számítjuk az $\dot{\underline{r}}(t)$, $\ddot{\underline{r}}(t)$, $\dddot{\underline{r}}(t)$ értékeit a t_0 pontban, s ezek segítségével a G(2)-t és a T(2)-t.

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = (6t - 2)\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\,\underline{i} + 6t\,\underline{j},$$

$$\dddot{\underline{r}}(t) = 6\,\underline{j},$$

$$\dot{\underline{r}}(2) = 10\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - \underline{k}, \qquad |\dot{\underline{r}}(2)| = \sqrt{245},$$

$$\ddot{\underline{r}}(2) = 6\,\underline{i} + 12\,\underline{j},$$

$$\dddot{\underline{r}}(2) = 6\,\underline{j}.$$

$$\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(t) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -12\,\underline{i} + 6\,\underline{j} + 48\,\underline{k}$$

$$|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(t)| = 6\sqrt{4 + 1 + 64} = 6\sqrt{69}$$

$$\dot{\underline{r}}(2)\,\ddot{\underline{r}}(2)\,\dddot{\underline{r}}\,(2) = \begin{vmatrix} 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -36.$$

Eredményeinket felhasználva:

$$G = \frac{|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)|}{|\dot{\underline{r}}(2)|} = \frac{6\sqrt{69}}{(\sqrt{245})^3}$$

$$T = \frac{\dot{\underline{r}}(2)\,\ddot{\underline{r}}(2)\,\dddot{\underline{r}}(2)}{|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)|} = \frac{-36}{36 \cdot 69} = -\frac{1}{69}\,.$$

Ezek után pedig felhasználjuk, hogy a térgörbe $t_0 = 2$ paraméterű pontjához tartozó kisérő triederre vonatkozó (olyan koordináta rendszer, amelynek tengelyei rendre a $\underline{t}$, $\underline{f}$, $\underline{b}$ vektorokkal párhuzamosak) koordinátái az s ívhossz paraméterrel kifejezve kicsiny környezetben a következő

$$x = s - s_o, \quad y = \frac{1}{2} G_o (s - s_o)^2, \quad z = G_o \; T_o \; (s - s_o)^3$$

Innen pedig az adódik, hogy a koordináta rendszer síkjain (a triéder síkjain) lévő vetületek egyenlete:

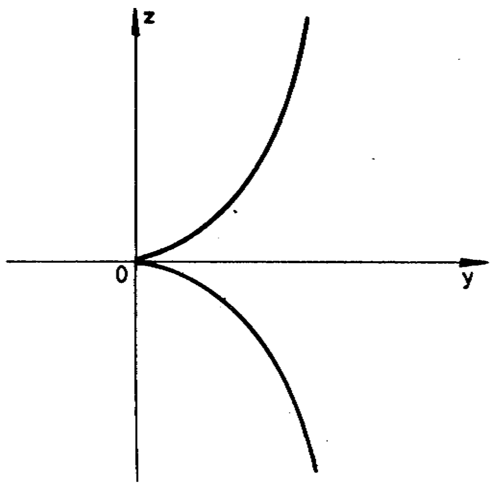
$$y = \frac{1}{2} \; G_o \; x^2, \qquad z = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{T_o}{\sqrt{G_o}} \, y^{3/2}, \qquad z = \frac{G_o \; T_o}{6} \, x^3 .$$

Itt G_o a $t_o = 2$ ponthoz tartozó görbület, T_o pedig a torzió. Tehát

$$y = \frac{1}{2} \; \frac{6\sqrt{69}}{(\sqrt{245})^2} x^2, \qquad z = \frac{\sqrt{2}}{3} \; \frac{-\frac{1}{69}}{\sqrt{\frac{6\sqrt{69}}{(\sqrt{245})^3}}} \; y^{3/2} ,$$

$$z = - \frac{6}{\sqrt{69} \; (\sqrt{245})^3} \, x^3 .$$

Az első parabola, a második az ún. szemikubikus parabola, a harmadik pedig a harmadfokú parabola. A második görbe grafikonja az alábbi 22. ábrán látható.



22. ábra.

7.02. Ezen esetben a görbület és a torzió a következő:

$$G = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{76}}, \qquad T = 0.$$

A vetületek pdig a következők:

$$y = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{76}} x^2, \qquad z = 0 \cdot y^{3/2}, \qquad z = 0 \quad y$$

8. Kinetikai alkalmazás

8.01. A pont mozgását leíró vektor-skalár függvény az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$$

függvény. Ennek deriváltja adja a sebességet irány és nagyság szerint:

$$\dot{\underline{r}}(t) = (6t - 2)\underline{i} + 3t^2\,\underline{j} - \underline{k}.$$

A második derivált pedig az ún. gyorsulás vektor

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\,\underline{i} + 6t\,\underline{j}.$$

A pályamenti sebesség:

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{(6t - 2)^2 + 9t^4 + 1} = v(t).$$

Ennek deriváltja a pályamenti gyorsulás:

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{(6t - 2)\,6 + 18t^3}{\sqrt{(6t - 2)^2 + 9t^4 + 1}} = a(t).$$

Ezek után meghatározzuk az $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektor $\underline{t}$-vel és $\underline{f}$-fel párhuzamos komponensét az

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \frac{1}{R(t)}\,\underline{f}\,(v(t))^2 + \underline{t}\,a(t)$$

egyenlőség alapján.

A $\underline{t}$-vel párhuzamos komponens:

$$\underline{t}\ a(t) = \underline{t}\ \frac{(6t - 2)6 + 18\ t^3}{\sqrt{(6t - 2)^2 + 9t^4 + 1}}.$$

A $\underline{f}$-fel páthuzamos komponens:

$$\frac{1}{R(t)}\ (v(t))^2 = \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3}\ |\dot{\underline{r}}(t)|^2 =$$

$$= \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|}$$

$$\frac{1}{R(t)}\ (v(t))^2 = \frac{6\sqrt{t^2 + 1 + (3 - 2)^2}}{\sqrt{(6t - 2)^2 + 9t^4 + 1}}.$$

8.02. $\underline{r}(t) = 3t^2\ \underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\ \underline{k}$

$\dot{\underline{r}}(t) = 6t\ \underline{i} + 2\ \underline{j} + 9t^2\ \underline{k}$

$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\ \underline{i} + 18\ t\ \underline{k}$

$\dot{\underline{r}}(-1) = -6\ \underline{i} + 2\ \underline{j} + 9\ \underline{k}$

$\ddot{\underline{r}}(-1) = 6\ \underline{i} - 18\ \underline{k}$

A $\underline{t}$-vel párhuzamos összetvő a

$$\frac{d}{dt}\ (\sqrt{36t^2 + 4 + 81t^4}) = \frac{36t^2 + 162t^3}{\sqrt{36t^2 + 4 + 81t^2}}$$

függvénynek a $t = -1$ pontban fekvett értéke:

$$\frac{36 - 162}{\sqrt{36 + 4 + 81}}.$$

Az $\underline{f}$-fel párhuzamos komponens:

$$\frac{1}{R}(v(t))^2 = \frac{|\dot{\underline{r}}(-1) \times \ddot{\underline{r}}(-1)|}{|\dot{\underline{r}}(-1)|}$$

$$\dot{\underline{r}}(-1) \times \ddot{\underline{r}}(-1) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & 2 & 9 \\ 6 & 0 & -18 \end{vmatrix} = \underline{i}(-36) - 54\,\underline{j} - 12\,\underline{k},$$

$$|\dot{\underline{r}}(-1) \times \ddot{\underline{r}}(-1)| = 6\sqrt{36 + 81 + 4} = 6 \cdot 11 = 66.$$

$$\frac{1}{R(-1)}\, v(-1))^2 = \frac{66}{\sqrt{121}} = 6.$$

9. A felület értelmezése, megadása, az r(u, v) függvény

9.01. Ezen esetben

$$\underline{r}(u,v) = (\underline{i} + \underline{j})u + 2\,\underline{k}\,v, \qquad (-\infty < u < +\infty,\ -\infty < v < +\infty)$$

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,u + \underline{j}\,u + k\,2v.$$

Az $u = 1$, $u = 2$, $v = \frac{1}{2}$, $v = 2$ paraméter vonalak az alábbi egyenesek:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2v \qquad -\infty < v < +\infty$$

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = 2v \qquad -\infty < v < +\infty$$

$$x = u, \quad y = u, \quad z = 1 \qquad -\infty < u < +\infty$$

$$x = u, \quad y = u, \quad z = 4. \qquad -\infty < u < +\infty$$

9.02. Ha a $z = xy$ egyenlőséghez még hozzávesszük az $x = x$, $y = y$ egyenlőségeket, akkor az

$$x = x, \quad y = y, \quad z = xy$$

rendszert kapjuk, amely az

$$\underline{r}(x,y) = x\underline{i} + y\underline{j} + xy\underline{k}$$

vektoregyenlőséggel foglalható össze. Másrészt geometriai szemléletünk alapján is világos, hogy az origóból az (x, y, xy) pontba mutató vektor az előbbi.

9.03. Az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ a \cos u \cos v + \underline{j}\ a \cos u \sin v + \underline{k}\ a \sin u$$

felület egyenletébe u helyett u_o-t írva az

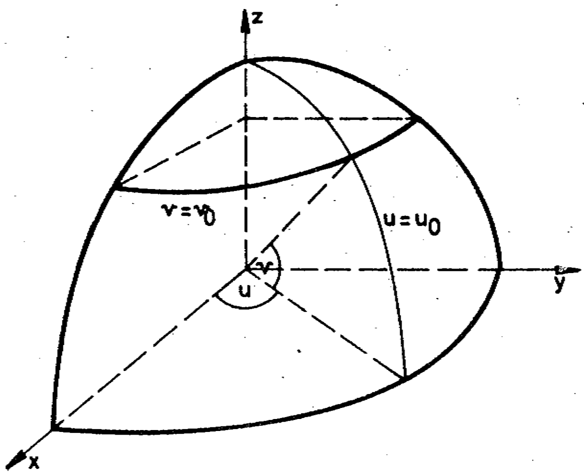
$$\underline{r}(u_o,v) = \underline{i}\ a \cos u_o \cos v + j\ a \cos u_o \sin v + \underline{k}\ a \sin u_o$$

egy skalár változótól függő vektorfüggvényt kapjuk. Ez a $z = a \sin u_o$ síkban lévő, a $\cos u_o$ sugarú, s $(0, 0, a \sin u_o)$ centrumu kör.

A $v = v_o$ vonal pedig az

$$\underline{r}(u,v_o) = \underline{i}\ a \cos u \cos v_o + \underline{j} \cos u \sin v_o + \underline{k} \sin u$$

görbe, amely a sugarú kör. Ezen u, v paramétervonalakat az alábbi 23. ábra szemlélteti.



23. ábra

9.04. Az $\underline{r}(u) = u\,\underline{i} + u^2\underline{k}$ vezérgörbéjű, s az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$-vel a párhuzamos alkotójú hengerfelületet oly módon kapjuk, hogy az x, z síkban lévő $x = z^2$ parabola minden pontjára az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$-vel párhuzamos egyenest illesztünk, s kapunk egy parabolikus hengert. Ezen felület vektor egyenlete:

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + \underline{a}\ v,$$
$$\underline{r}(u,v) = u\ \underline{i} + u^2\underline{k} + (i + \underline{j})\ v$$
$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(u + v) + \underline{j}\ v + \underline{k}\ u^2.$$

Paraméteres egyenletrendszere:

$$x = u + v, \quad y = v, \quad z = u^2.$$

Innen a következők adódnak:

$$x = u + y, \quad z = u^2, \quad u = x - y,$$
$$z = (x - y)^2.$$

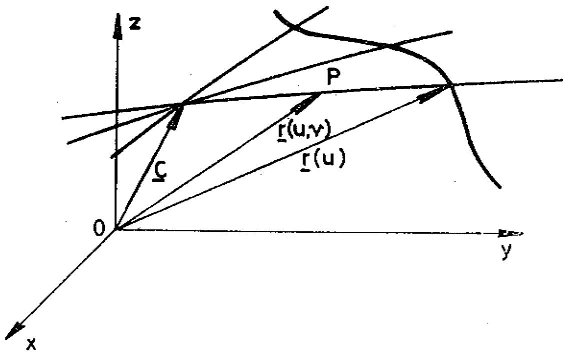
Megjegyzendő, hogy a felület $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ egyenletét az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + \underline{a}\ v$$

egyenlet alapján kaptuk.

9.05. Az $\underline{r} = \underline{r}(u)$ vezérgörbéjű, $c(c_x, c_y, c_z)$ csúcspontú kúp tetszőleges P pontjába mutató helyvektor (24. ábra).

$$\underline{r}(u),v) = \underline{c} + v(\underline{r}(u) - \underline{c}$$



24. ábra

Ezt felhasználva a felület egyenlete:

$$\underline{r}(\varphi,\psi) = (0,\ 0,\ 3) + (a + a\cos\varphi,\ b\sin\varphi\ ,\ -3)\psi,$$

s innen a paraméteres egyenletrendszer:

$$x = a(1 + \cos\varphi)\psi, \quad y = b\psi\sin\varphi, \quad z = 3(1 - \psi).$$

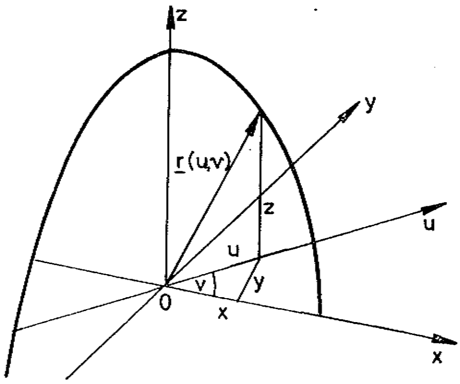
A ψ-t a z-vel kifejezve:

$$x = (1 - \frac{z}{3})a\cos\varphi, \quad y = b(1 - \frac{z}{3})b\sin\varphi,$$

$$\frac{\bar{x}}{a^2(1 - \frac{z}{3})} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{b(1 - \frac{z}{3})} = \sin\varphi$$

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \frac{z}{3})^2} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{z}{3})^2} = 1.$$

9.06. Tekintsük az alábbi ábrát, amelyen az u, z rendszerben megrajzoltuk a $z = 4 - u^2$ parabolát



25. ábra

Az ábrából egyszerűeny kiolvasható, hogy a felület egyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ u\cos v + \underline{j}\ u\sin v + \underline{k}(4 - u^2).$$

Explicit egyenlete pedig:

$$z = 4 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2.$$

Általánosságban, a $z = f(\sqrt{x^2 y^2})$ egyenletű felület a $z = f(u)$ görbe z tengely körüli forgatásával keletkező forgás felület. Hasonlóan kapjuk az

$$x = f(\sqrt{y^2 + z^2}), \quad y = f(\sqrt{x^2 + z^2})$$

felületeket is.

9.07. Legyen az $y = b$ síkban lévő parabola egyenlete:

$$x = x, \quad y = b, \quad z = \frac{a^2}{4} - x^2.$$

Ekkor a felület egyenlete:

$$z = \frac{1}{b}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)y.$$

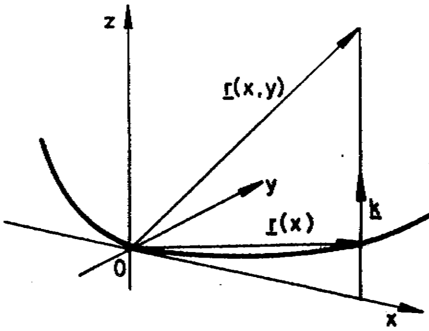
9.08. Az $y = \frac{1}{2}x^2$ olyan hengerfelület, amelyet az adott parabolán mozgó, a z tengellyel párhuzamos egyenes ír le. A

$$\underline{r}(x) = x\,\underline{i} + \frac{1}{2}x^2 + 0\,\underline{k}$$

görbe felület vezérgörbéje, alkotóinak irányvektora pedig a $\underline{k}$ vektor, s így a felület tetszőleges pontjába mutató helyvektor

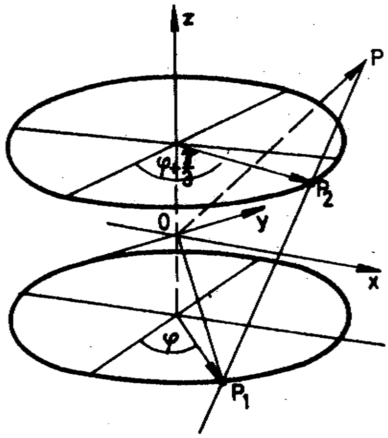
$$\underline{r}(x,v) = \underline{r}(x) + v\,k = x\,\underline{i} + \frac{1}{3}x^2\,\underline{j} + vk$$

$$\underline{r}(x,v) = x\,\underline{i} + \frac{1}{2}x^2\,\underline{j} + vk$$



26. ábra

9.09. A feladat megoldásához tekintsük az alábbi 27 ábrát:



27. ábra

A felület a $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$ pontokra illeszkedő egyenesek össszessége alkotja $(0 \leq \varphi < 2\pi)$. A felület tetszőleges pontjába mutató helyvektor:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}\, v, \qquad -\infty < v < +\infty .$$

Esetünkben

$$\overrightarrow{OP_1} = \underline{i}\ a \cos\varphi + \underline{j}\ a \sin\varphi - \underline{k},$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \underline{i}\ a \cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) + \underline{j}\ a \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) + \underline{k}.$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \underline{i}\ a(\cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) - \cos\varphi) +$$
$$+ \underline{j}\ a(\sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) - \sin\varphi) + 2\underline{k},$$

ezeket felhasználva a felület vektoregyenlete:

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ a \cos\varphi + \underline{j}\ a \sin\varphi - \underline{k} +$$
$$+ (\underline{i}\ a(\cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) - \cos\varphi) + \underline{j}\ a(\sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) -$$
$$- \sin\varphi) + 2\underline{k})v,$$

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ a(v \cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) + (1 - v) \cos\varphi) +$$
$$+ \underline{j}\ a(v \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) + (1 - v) \sin\varphi) + \underline{k}\ (2v - 1),$$

A felület kétparaméteres egyenletrendszere pedig a következő:

$$x = a(v \cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) + (1 - v) \cos\varphi),$$

$$y = a(v \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) + (1 - v) \sin\varphi,$$

$$z = 2v - 1.$$

Az első két egyenletből a következők adódnak:

$$\frac{x^2}{a^2} = v^2 \cos^2(\varphi + \frac{\pi}{3}) + 2v(1 - v)\cos(\varphi + \frac{\pi}{3})\cos\varphi +$$
$$+ (1 - v)^2 \cos^2\varphi,$$

$$\frac{x^2}{a^2} = v^2 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{3}) + 2v(1 - v) \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) \sin\varphi +$$
$$+ (1 - v)^2 \sin^2\varphi,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = v^2 + (1 - v)^2 + 2v(1 - v)\cos(\varphi + \frac{\pi}{3} - \varphi)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = v^2 + (1 - v)^2 + v(1 - v)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = v^2 - v + 1.$$

Ezen egyenletben v helyébe $\frac{z+1}{2}$ írva, kapjuk a felület implicit egyenletét:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 - \frac{z+1}{2} + 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{(z+1)^2 - 2(z+1) + 1 + 3}{4},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2+3}{4},$$

Ez egy köpenyű hiperboloid.
Megjegyzendő, hogy egy köpenyű hiperboloidot kapunk akkor is, ha az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\ a \cos u + \underline{j}\ a \sin u + 0\ \underline{k} \qquad 0 \le u \le 2\pi$$

görbe minden pontjára

$$\underline{v} = \underline{i}(-a)\sin u + \underline{j}\ a \cos u + b\ \underline{k}$$

irányvektorú egyenest illesztünk. Ezen felület vektoregyenlete:

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ a \cos u + \underline{j}\ a \sin u +$$
$$+ \left[\underline{i}(-a) \sin u + \underline{j}\ a \cos u + b\ \underline{k}\right]v,$$

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ a(\cos u - v \sin u) +$$
$$+ \underline{j}\ a(\sin u + v \cos u) + bv\ \underline{k}.$$

Paraméteres egyenletrendszere pedig:

$$x = a(\cos u - v \sin u), \qquad 0 \le u < 2\pi,$$

$$y = a(\sin u + v \cos u), \qquad -\infty < v < +\infty.$$

$$z = bv.$$

9.10. a) $\underline{r}(x,y) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}\,k.$

b) $\underline{r}(x,y) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + (\ln xy)\,\underline{k}.$

c) $\underline{r}(x,y) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + \sin\sqrt{x^2 + y^2}\,\underline{k}.$

9.11. a) A felület paraméteres egyenletrendszere

$$\frac{x}{a} = \text{ch}u \cos v, \quad \frac{y}{b} = \text{ch}u \sin v, \quad \frac{z}{c} = \text{sh}u,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{ch}^2u, \quad \frac{z^2}{c^2} = \text{sh}^2u,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

b) A felület paraméteres egyenletrendszere

$$x = 5\cos^3u \cos v, \quad y = 5\cos^3u \sin v, \quad z = 5\sin^2u,$$

$$x^2 + y^2 = 25(\cos u)^6, \quad z^2 = 25\ 5(\sin u)^6,$$

$$x^2 + y^2 = 25(1 - \sin^2u)^3 \quad \sin^2u = \sqrt[3]{\frac{z^2}{25}}$$

$$x^2 + y^2 = 25\left(1 - \sqrt[3]{\frac{z^2}{25}}\right).$$

Igazoljuk, hogy ez forgásfelület.

c) A felület paraméteres egyenletrendszere

$$\frac{x}{a} = \text{ch}^4u\ \text{ch}^4v, \quad \frac{y}{a} = \text{ch}^4u\ \text{sh}^4v, \quad \frac{z}{b} = \text{sh}^4u,$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{a}} = \text{ch}^2u(\text{ch}^2v - \text{sh}^2v), \quad \sqrt{\frac{z}{b}} = \text{sh}^2u,$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{a}} - \sqrt{\frac{z}{b}} = 1.$$

d) A felület paraméteres egyenletrendszere

$$x = 3\ u \cos v, \quad y = 3\ u \sin v, \quad z = 3\ u^2,$$

$$x^2 = 9\ u^2 \cos^2 v, \quad y^2 = 9u^2 \sin^2 v, \; z = 3u^2,$$

$$x^2 + y^2 = 9\ u^2, \quad z^2 = 3\ u^2,$$

$$x^2 + y^2 = 3\ z^2.$$

e) A felület paraméteres egyenletrendszere:

$$x = \sqrt{4 + u^2} \cos v, \quad y = \sqrt{4 + u^2} \sin v, \quad z = 2 \operatorname{arsh} \frac{u}{2},$$

$$x^2 + y^2 = 4 + u^2, \quad u = 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{z}{2},$$

$$x^2 + y^2 = 4 + 4\operatorname{sh}^2 \frac{z}{2} = 4(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}) = 4 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{2}$$

$$z = 2 \operatorname{arch} \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{(forgás felület).}$$

10. A felületi normális és az érintősík, E, F, G.

10.01. Az $\underline{r}_1$ helyvektor által meghatározott P_1 pontra illeszkedő, s az $\underline{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $b = \overrightarrow{P_1P_3}$ vektorokat tartalmazó sík tetszőleges P pontjába mutató helyvektor (28.ábra)

$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{a}\ u + \underline{b}v \qquad (-\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty).$$

Ily módon megkaptuk a felület vektorgyenletét, amelyből a koordináták egyenlősége alapján adódik a paraméteres egyenletrendszer.

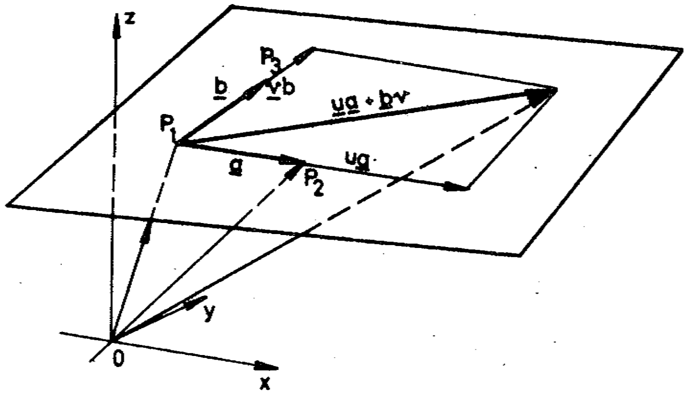
Esetünkben (a vektorok koordinátás alakban írva)

$$(x,y,z) = (2,\ 3,\ 0) + (0,\ 2,\ 5)u + (-2,\ 1,\ 0)v.$$

s innen a paraméteres egyenletrendszer:

$$x = 2 - 2v, \quad y = 3 + 2u + v, \quad z = 5u.$$

A $v = 0$, ill. u paraméter-vonal (egyenes) egyenletrendszere



28. ábra

$$x = 2, \quad y = 3 + 2u, \quad z = 5u.$$

Az $u = 0$, ill v paraméter-vonal egyenletrendszere

$$x = 2 - 2v, \quad y = 3 + v, \quad z = 0.$$

Az egyenesek $\underline{v}_1 = (0, 2, 5)$, $v_2 = (-2, 1, 0)$ irányvektorainak vektorális szorzata

$$\underline{v}_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5\,\underline{i} - 10\,\underline{j} + 4\,\underline{k}$$

a felület (sík) normálvektora.

10.02. A felület u paraméter-vonalának vektoregyenlete, azaz a $v = v_o$ = állandó vonal egyenlete:

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\,u + \underline{j}\,v_o + \underline{k}(u^2 + v_o^2).$$

A felület v paraméter-vonalának ($u = u_o$ vonalnak) a vektor egyenlete

$$\underline{r}(v) = \underline{i}\,v_o + \underline{j}\,v + \underline{k}(u_o^2 + v^2).$$

Ezen paraméter-vonalakat az u_o ill. v_o pontban érintő egyenesek irányvektorai:

$$\left[\underline{r}_u(u,v_o)\right]_{u=u_o} = \left[\underline{i} + \underline{k}\ 2u\right]_{u=u_o} = \underline{i} + \underline{k}\ 2u_o,$$

$$\left[\underline{r}_v(u_o,v)\right]_{v=v_o} = \left[\underline{j} + \underline{k}\ 2v)\right]_{v=v_o} = \underline{j} + \underline{k}\ 2v_o.$$

A felület u_o, v_o paraméterű pontjához tartozó felületi normális az $\underline{r}_u(u_o,v_o)$, $\underline{r}_v(u_o,v_o)$ vektorok vektorális szorzata. Ugyanis a felületi normális a két paraméter-vonalat a közös pontban érintő egyenes által meghatározott sík normálvektora.

$$\underline{r}_u(u_o,v_o) \times \underline{r}_v(u_o,v_o) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 2u_o \\ 0 & 1 & 2v_o \end{vmatrix} =$$

$$= -2u_o\underline{i} - 2v_o\ \underline{j} + \underline{k}.$$

Ennek abszolút értéke esetünkben

$$|\underline{r}_u(u_o,v_o) \times \underline{r}_v(u_o,v_o)| = 4\sqrt{4\ u_o^2 + 4\ v_o^2 + 1.}$$

Az $\underline{r}_u(u,v)$, $\underline{r}_v(u,v)$ parciális deriváltak segítségével a felület minden pontjához hozzárendeljük az

$$E = \underline{r}_u\underline{r}_u, \quad F = \underline{r}_u\underline{r}_v, \quad G = \underline{r}_v\underline{r}_v$$

ún. elsőrendű Gauss-féle főmennyiségeket. Ezek értéke esetünben a következő:

$$E = \underline{r}_u(u_o,v_o)\ \underline{r}_u(u_o,v_o) = (1,\ 0,\ 2)(1,\ 0,\ 2u_o) =$$
$$= 1 + 4\ u_o^2.$$

$$F = \underline{r}_u(u_o,v_o)\ \underline{r}_v(u_o,v_o) = (1,\ 0,\ 2u_o)(0,\ 1,\ 2v_o) =$$
$$= 4\ u_o v_o$$

$$G = \underline{r}_v(u_o,v_o)\ \underline{r}_v(u_o,v_o) = (0,\ 1,\ 2v_o)(0,\ 1,\ 2v_o) =$$
$$= 1 + 4\ v_o^2.$$

Ezen E, F, G mennyiségekkel a felületi normális abszolút értéke kifejezhető:

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = |\underline{r}_u|\,|\underline{r}_v| \sin(\underline{r}_u,\underline{r}_v) =$$

$$= \sqrt{|\underline{r}_u|^2 |\underline{r}_v|^2 (1 - \cos^2(\underline{r}_u \underline{r}_v))}$$

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = \sqrt{\underline{r}_u^2 r_v^2 - (\underline{r}_u \underline{r}_v)^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Számítsuk most az $(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)$ értéket ezen formula alapján

$$|\underline{r}(u_o,v_o) \times \underline{r}_v(u_o,v_o)| =$$

$$= \sqrt{(1 + 4\,u_o^2)(1 + 4\,v_o^2) - 16\,u_o^2 v_o^2},$$

$$|r_u(u_o,v_o) \times r_v(u_o,v_o)| = \sqrt{1 + 4\,u_o^2 + 4\,v_o^2}.$$

10.03. A felület vektoregyenlete (x, y paraméterekkel)

$$\underline{r}(x,y) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + (\ln x\,y)\underline{k}.$$

A paraméter-vonalak érintő egyenesének irányvektora

$$\underline{r}_x = \underline{i} + \frac{1}{x}\,\underline{k}, \quad \underline{r}_y = \underline{j} + \frac{1}{y}\,\underline{k},$$

$$\underline{r}_x(1,e) = \underline{i} + \frac{1}{1}\,\underline{k}, \quad \underline{r}_y(1,\,e) = \underline{j} + \frac{1}{e}\,\underline{k}.$$

A felület ezen pontjához tartozó felületi normális (érintősík normál-vektora):

$$\underline{r} \;||\; \underline{r}_x(1,e) \times \underline{r}_y(1,e) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{e} \end{vmatrix} = -\underline{i} - \frac{1}{e}\,\underline{j} + \underline{k}$$

Az érintősík egyenlete:

$$(-1)(x - 1) - \frac{1}{e}\,(y - 1) + (2 - 1) = 0,$$

$$x + \frac{1}{e}\,y - z = \frac{1}{e}.$$

Az elsőrendű alapmennyiségek

$$E = (\underline{i} + \underline{k})^2 = 2, \quad F = (\underline{i} + \underline{k})(\underline{j} + \frac{1}{e}\underline{k}) = \frac{1}{e},$$

$$G = (\underline{j} + \frac{1}{e}\ \underline{k})^2 = 1 + \frac{1}{e^2}.$$

$$|\underline{r}_x(1,e) \times \underline{r}_y(1,e)| = \sqrt{EC - F^2} =$$

$$= \sqrt{2 + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2}} = \sqrt{2 + \frac{1}{e^2}}.$$

10.04. **A felület vektoregyenlete:**

$$\underline{r}(x,y) = \underline{i}\ x + \underline{j}\ y + \underline{k}\ 2\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

A $x = x_o$ vonal az ún. y paraméter-vonal. Ennek irányvektora az

$$\underline{r}(x_o,y) = \underline{i}\ x_o + \underline{j}\ y + \underline{k}\ 2\sqrt{x_o^2 + y^2 - 1}$$

deriváltjának az $y = y_o$ helyen vett értéke.

$$\underline{r}_y(x_o,y) = \underline{j} + \underline{k}\ 2\frac{2y}{2\sqrt{x_o^2 + y^2 - 1}},$$

$$\underline{r}_y(x_o,y_o) = \underline{j} + \underline{k}\ \frac{2y_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - 1}}.$$

Ezek után az érintőegyenes egyenletrendszere

$$x = x_o, \quad y = y_o + t,$$

$$z = 2\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - 1} + \frac{2y_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - 1}}t,$$

$$-\infty < t < +\infty .$$

Az érintősík egyenlete:

$$p(x - x_o) + q(y - y_o) - (z - 2\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - 1}) = 0,$$

ahol

$$p = \frac{2x_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - 1}}, \quad q = \frac{2y_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - 1}}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy az

$$\underline{r}(x,y) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + f(x,y)\,\underline{k}$$

esetben a $p = f_x(x_o,y_o)$, $q = f_y(x_o,y_o)$ jelölésekkel

$$E = 1 + p^2, \quad F = p\,q, \quad G = 1 + q^2$$

$$\underline{r}_x(x_o,y_o) \times \underline{r}_y(x_o,y_o) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = -p\underline{i} - q\underline{j} + \underline{k}.$$

10.05. Ezen kérdésre a normálvektor alapján válaszolhatunk. Számítjuk tehát a normálvektort.

$$\underline{r}_u = \underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v + \underline{k},$$

$$\underline{r}_v = -\underline{i}\,u\sin v + \underline{j}\,u\cos v.$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\,u\cos v - \underline{j}\,u\sin v + \underline{k}\,u.$$

Az $u = o$ ponthoz nem kaptunk nullvektortól különböző határozott vektort, tehát ezen pontban nincs érintősík.

11. Felületi görbék

11.01. Az adott ellipszis vetülete az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\,a\cos u + \underline{j}\,b\sin u + \underline{k}\,a\,b\cos u\sin u$$

egyenletü felületi görbének. Arról, hogy ez a térgörbe valóban az

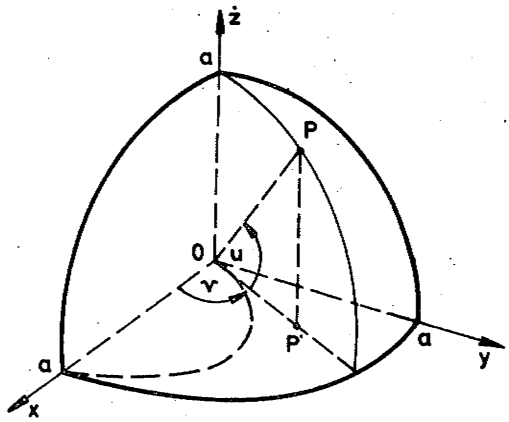
$$\underline{r}(x,y) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + \underline{k}\,xy$$

felület felülketi görbéje, helyettesítéssel győződhetünk meg. Az $x = x_o$, $y = y_o$ vonalak egyenletei pedig a következők:

$$\underline{r}(y) = x_o\,\underline{i} + y\,\underline{j} + \underline{k}\,x_o y, \quad \text{(egyenes)}$$

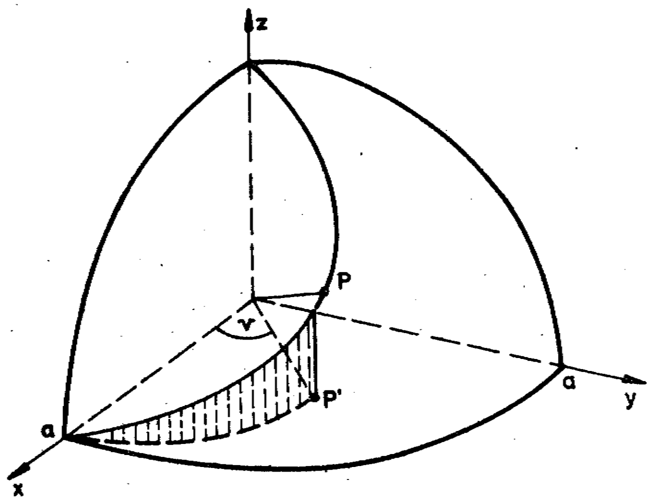
$$\underline{r}(x) = x\,\underline{i} + y_o\underline{j} + \underline{k}\,xy_o.$$

11.02. Ezen példában adott felület origó centrumú, a sugarú gömbfelület (29. ábra).



29. ábra

Az ábrán megrajzoltuk a hengerfelület és a $z = 0$ sík metszésvonalának a felét is. A következő 30. ábra pedig a gömb és a henger metszésvonalának a negyedét szemlélteti.



30. ábra

Ezen ábrából kiolvasható, hogy a metszésvonal vektoregyenlete:

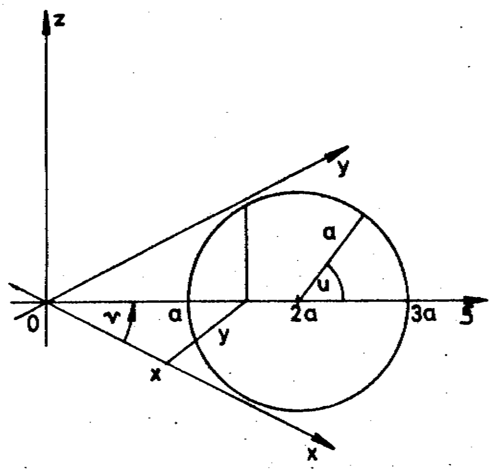
$$\underline{r}(v) = \underline{i}\ a \cos^2 v + \underline{j}\ a \cos v \sin v +$$

$$+ \underline{k}\sqrt{a^2 - a^2(\cos^4 v - \cos^2 v \sin^2 v)}.$$

Egyszerűen belátható az is, hogy a metszésvonal egyenlete:

$$\underline{r}(x) = \underline{i}\ x + \underline{j}\sqrt{ax - x^2} + \underline{k}\sqrt{a^2 - x^2 - (ax - x^2)}.$$

1.03. Tekintsük a következő ábrát.



31. ábra

Ezen ábrából kiolvasható, hogy a felület egy enlete:

$$z = \sqrt{a^2 - (\varrho - 2a)^2} = \sqrt{a^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2a)^2}$$

Ennek a $z = z_o$ síkkal való metszésvonala a

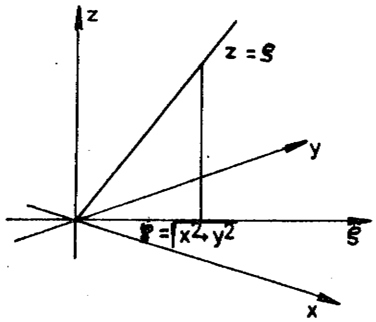
$$z_o^2 = a^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2a)^2, \qquad z = z_o$$

görbe. A $y = mx$ síkkal való metszésvonala pedig az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}(2a + a\cos u)\cos v + \underline{j}(2a + a\sin u)\sin v + \underline{k}\, a\sin u$$

görbe, ahol $\operatorname{tg} v = m$.

11.04. A $z^2 = z^2 + y^2$ felület az a felület, amelyet a $z = s$ egyenes z tengely körüli forgatásával kapunk (32. ábra).



32. ábra

Az origó csúcspontú kúpot a $z = 25 - x$ sík olyan görbében metszi, amelynek az x, y síkon lévő vetülete a

$$(25 - x)^2 = x^2 + y^2, \qquad 625 - 50x = y^2$$

görbe. A metszésvonal vektor egyenlete:

$$\underline{r}(y) = \underline{i}\,\frac{625 - y^2}{50} + \underline{j}\,y + \underline{k}\,\left(25 - \frac{625 - y^2}{50}\right).$$

11.05. Felírjuk a térgörbe paraméteres egyenletrendszerét:

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t.$$

Most pedig helyettesítünk a felület $z^2 = x^2 + y^2$ egyenletébe

$$t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t = t^2,$$

tehát a görbe minden pontja rajta van a felületen.

11.06. $$\underline{r}(u) = \underline{i}\,u + \underline{j}\,u^2 + k\,u^3.$$

11.07. A felületek és a hengerfelület metszésvonalainak vektoregyenlete:

$$\underline{r}(x) = \underline{i}\,x + \underline{j}(1 - ax^2) + \underline{k}\,x\,(1 - ax^2).$$

Az érintővektora:

$$\dot{\underline{r}} = \underline{i} + \underline{j}\,(-2\,ax) + \underline{k}\,(1 - 3\,ax^2).$$

A felületek normálvektora:

$$\underline{n}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -\underline{i}\, y - \underline{j}\, x + \underline{k} =$$

$$= - \underline{i}\,(1 - ax^2) - \underline{j}\, x + \underline{k}.$$

Az $\dot{\underline{r}}$ és az $\underline{n}_1$ skaláris szorzata nulla.

Az $y = 1 - ax^2$ hengerfelület normálvektora az

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + \underline{j}\,(1 - ax^2) + 0\,\underline{k}.$$

görbe

$$\dot{\underline{r}} = \underline{i} - \underline{j}\, 2ax$$

vektorára merőleges vektor

$$\underline{n}_2 = \underline{i}\, 2ax + \underline{j}$$

Képezzük most az $\dot{\underline{r}}$ és $\underline{n}_2$ skaláris szorzatát:

$$\underline{n}_2\, \dot{\underline{r}} = 1 \cdot 2ax + 1 \cdot (-2ax) = 0.$$

12. Felületi görbék ívhossza

12.01. Az

$$\underline{r} = \underline{r}(u(t),\ v(t)) = \underline{i}\ x(u(t)v(t) + \underline{j}\ y(u(t),v(t)) +$$

$$+ \underline{k}\ z(u(t),\ v(t))$$

görbe az $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ felületi görbéje. Ezen felületi görbét leíró függvény deriválva

$$\dot{\underline{r}}\ (t) = \underline{r}_u((t),v(t))\dot{u}(t) + \underline{r}_v(u(t),\ v(t))\ \dot{v}(t),$$

ill.

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(x_u\, \dot{u} + x_v \dot{v}) + \underline{j}\ (y_u \dot{u} + y_v \dot{v}) + \underline{k}\ (z_u \dot{u} + z_v \dot{v})$$

a kétváltozós közvetett függvény deriválási szabálya szerint.
Ezeket figyelembe véve

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{\dot{\underline{r}}(t)^2} = \sqrt{(\underline{r}_u \dot{u} + v_v \dot{v})^2},$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{\underline{r}_u \underline{r}_u \dot{u}^2 + 2\underline{r}_u \underline{r}_v \dot{u}\dot{v} + \underline{r}_v \underline{r}_v \dot{v}^2},$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{E \dot{u}^2 + 2 F \dot{u}\dot{v} + G \dot{v}^2},$$

s minthogy az ívhossz

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)| dt,$$

azért

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2 F \dot{u}\dot{v} + G \dot{v}^2}\, dt.$$

Esetünkben a kúpfelület egyenlete:

$$\underline{r}(u,v) = v (\underline{i}\ 2 + \underline{j}\ 2 \cos u + 2 \cos u),$$

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ 2 v + \underline{j}\ 2 \cos u + \underline{k}\ 2 v \sin u,$$

praméteres egyenletrendszere pedig

$$x = 2 v, \quad y = 2 v \cos u, \quad z = 2 v \sin u$$

$$x^2 = 4 v^2, \quad y^2 + z^2 = 4v^2 (\cos^2 u + \sin^2 u)$$

Tehát a felület implicit egyenlete

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

s innen

$$x^2 = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t), \qquad x = e^t,$$

tehát a $t_1 = 0$, és a $t_2 = \ln 3$ határok között kell integrálni az

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}\ e^t + \underline{j}\ (e^t \cos t - e^t \sin t) + \underline{k}(e^t \sin t + e^t \cos t)$$

vektor abszolút értékét.

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{3e^{2t}} = \sqrt{3}\, e^t.$$

Ennek határozott integrálját már számítottuk. Megjegyzendő, hogy ha nem írjuk fel a felületi görbe egyenletét, s az E, F, G mennyiségekkel fejezzük ki $|\dot{\underline{r}}(t)|$-t, ugyanezen eredményhez jutunk.

12.02. A felületi görbe vektoregyenlete:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\; t\cos t + \underline{j}\; t\sin t + \underline{k}\; t,$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(\cos t - t\sin t) + \underline{j}\,(\sin t + t\cos t) + \underline{k},$$

$$\dot{x}^2 = \cos^2 t - 2\,t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t,$$

$$\dot{y}^2 = \sin^2 t + 2\,t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t,$$

$$z^2 = 1.$$

$$\dot{x}^2 = \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2 + t^2$$

Ezt felhasználva az ívhossz

$$s = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\dot{\underline{r}}(t)|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2 + t^2}\,dt$$

$$s = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt.$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}} = \operatorname{sh}\tau, \qquad dt = \sqrt{2}\,\operatorname{ch}\tau\, d\tau$$

$$s = \sqrt{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\tau}\,\sqrt{2}\,\operatorname{ch}\tau\, dt = 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \operatorname{ch}^2\tau\, dt\tau =$$

$$= 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1 + ch2\tau}{2}\, d\tau = \left[\tau + \frac{sh2\tau}{2}\right]_{\tau_1}^{\tau_2} =$$

$$= \left[\tau + sh\tau ch\tau\right]_{\tau_1}^{\tau_2} = \left[arsh \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{t^2}{2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= arsh \frac{\pi}{\sqrt{2}} - arsh \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{8}}.$$

13. Szögmérés

13.01. A felületek vektor egyenlete:

$$\underline{r}(x,y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\, xy.$$

Ezen felület az $x + y = 10$ sík az

$$\underline{r}_1(x) = \underline{i}\, x + \underline{j}\,(10 - x) + \underline{k}\, x(10 - x)$$

az $x - y = 10$ sík pedig az

$$\underline{r}_2(x) = \underline{i}\, x + \underline{j}\,(x - 10) + \underline{k}\, x(x - 10)$$

görbében metszi.

Az $\underline{r}_1(x)$, $\underline{r}_2(x)$ görbék az $x = 10$ pontban metszik egymást, tehát a két görbe olyan szög alatt metszi egymást, amelyre

$$\cos\varphi = \frac{\dot{\underline{r}}_1(10) \cdot \dot{\underline{r}}_2(10)}{|\dot{\underline{r}}_1(10)||\dot{\underline{r}}_2(10)|}.$$

Ennek megfelelően számítjuk a deriváltakat, ezek skaláris szorzatát és abszolút értékét.

$$\dot{\underline{r}}_1 = \underline{i} - \underline{j} + \underline{k}\,(10 - 2x),$$

$$\dot{\underline{r}}_2 = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}\,(2x - 10),$$

$$\dot{\underline{r}}_1(10) = \underline{i} - \underline{j} - \underline{k}\ 10, \qquad |\dot{\underline{r}}_1(10)| = \sqrt{102},$$

$$\dot{\underline{r}}_2(10) = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}\ 10, \qquad |\dot{\underline{r}}_2(10)| = \sqrt{102},$$

$$\cos\varphi = \frac{-100}{(\sqrt{102})^2} = \frac{-100}{102}.$$

13.02. A felület vektoregyenlete

$$\underline{r}(x,y) = \underline{i}\ x + \underline{j}\ y + \underline{k}\sqrt{1 - \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16}},$$

az $x = 4$ vonal egyenlete

$$\underline{r}(4,y) = \underline{i}\ 4 + \underline{j}\ y + \underline{k}\sqrt{1 - \frac{16}{25} - \frac{y^2}{16}},$$

az $y = 3$ vonal egyenlete

$$\underline{r}(x,3) = \underline{i}\ x + \underline{j}\ 3 + \underline{k}\sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{9}{16}}.$$

Ezen görbék érintővektorai

$$\underline{r}_y = \underline{i} - \underline{k}\frac{\frac{2y}{16}}{2\sqrt{1 - \frac{16}{25} - \frac{y^2}{16}}}, \qquad \underline{r}_y(4,3) = \underline{j} - \underline{k}\frac{3}{16\sqrt{1-\frac{16}{25}\frac{9}{16}}},$$

$$\underline{r}_x = \underline{i} - \underline{k}\frac{\frac{2x}{25}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{25} - \frac{9}{16}}}, \qquad \underline{r}_x(4,3) = \underline{i}-\underline{k}\frac{4}{25\cdot\sqrt{1-\frac{16}{25}-\frac{9}{16}}}.$$

$$|\underline{r}_y| = 1 + \frac{9}{16^2(1 - \frac{16}{25} + \frac{9}{16})},$$

$$|\underline{r}_x| = 1 + \frac{16}{25(1 - \frac{16}{25} - \frac{9}{16})},$$

$$\underline{r}_x \cdot \underline{r}_y = \frac{12}{16 \cdot 25\ (1 - \frac{16}{25} - \frac{9}{16}}$$

Ezek felhasználásával a két vektor hajlásszögének koszinusza számítható.

14. Első- és másodrendű alapmennyiségek

14.01. Ha az $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ felületen egy felületi görbét az $u = u(s)$, $v = v(s)$ összefüggéssel adunk meg (s a görbe ívhosszát jelenti), akkor az

$$\underline{r}^*(s) = \underline{r}(u(s)\ v(s))$$

térgörbét kapjuk. Ezen $\underline{r}^*(s)$ függvény s-szerinti másodrendű deriváltja

$$\underline{r}^{*''} = (\underline{r}_{uu}u' + \underline{r}_{uv}v')u' + (\underline{r}_{vu}u' + \underline{r}_{vv}v')\ v' + $$
$$+ \underline{r}_u u'' + \underline{r}_v v''$$

a kétváltozós közvetett függvény deriválási szabálya szerint. E utóbbi egyenlőség mindkét oldalát szorozva a felület normális irányába mutató $\dfrac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|r_u \times \underline{r}_v|} = \underline{n}^o$

egységvektorral, s felhasználva a $t' = r'' = \frac{1}{R}\underline{f}$ egyenlőséget, adódik az

$$\frac{\underline{f}\ \underline{r}}{R} = \underline{r}^o\underline{r}_{uu}u'^2 + 2\ \underline{r}^o\underline{r}_{uv}u'v' + \underline{r}^o r_{vv}v'^2$$

egyenlőség, amely egyenlőség a Gauss által bevezetett

$$L = \underline{n}^o \cdot \underline{r}_{uu},\quad M = \underline{n}^o\ \underline{r}_{uv},\quad N = \underline{n}^o\ \underline{r}_{vv}$$

jelölésekkel az

$$\frac{\underline{f}\ \underline{n}}{R} = L\ u'^2 + 2\ Mu'v' + Nv'^2$$

alakban írható. Az L, M, N mennyiségek az ún. másodrendű alapmennyiségek (főmennyiségeknek is nevezik). Ha most felhasználjuk, hogy

$$\dot{u} = u(s(t)) = u'\ \frac{d\ s(t)}{dt} = u'|\dot{\underline{r}}(t)| =$$
$$= u'\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2},$$

$$\dot{v} = v(s(t)) = v'\ \frac{d\ s(t)}{dt} = v'|\dot{r}(t))| =$$
$$= v'\sqrt{Eu' + 2\ Fu'v' + Gv'^2},$$

adódik az

$$\frac{\underline{f} \cdot \underline{r}}{R} = \frac{\cos 2}{R} = \frac{L\,\dot{u}^2 + 2\,M\,\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\,\dot{u}^2 + 2\,F\,\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

alapforma. Ebből látható, hogy az E, F, G (már ismert elsőrendű Gauss-féle főmennyiségek) és az L, M, N (másodrendű Gauss-féle főmennyiségek) felhasználásával felületi görbe görbülete meghatározható, ha $\dot{u}$ és $\dot{v}$ ill. $\frac{\dot{v}}{\dot{u}}$ ismert,

Esetünkben a felület egyenlete:

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ (u + 2\ v) - \underline{j}\ v + \underline{k}\ (u^2 + 3\ v^2).$$

$$\underline{r}_u(u,v) = \underline{i} + \underline{k}\ 2\ u, \quad \underline{r}_u(2,4) = \underline{i} + 4\underline{k},$$

$$\underline{r}_v(u,v) = \underline{i}\ 2 - \underline{j} + \underline{k}\ 6v, \quad \underline{r}_v(2,4) = \underline{i}\ 2 - \underline{j} + \underline{k}\ 24,$$

$$\underline{r}_{uu}(u,v) = 2\ \underline{k} \quad \underline{r}_{uu}(2,4) = 2\ \underline{k}$$

$$\underline{r}_{uv}(u,v) = \underline{0}, \quad \underline{r}_{uv}(2,4) = \underline{0}$$

$$r_{vv}(u,v) = 6\ \underline{k}, \quad \underline{r}_{vv}(2,4) = 6\ \underline{k}$$

Ezek után az alapmennyiségek

$$E = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_u = (\underline{i} + 4\underline{k})(\underline{i} + 4\underline{k}) = 17.$$

$$F = \underline{r}_u\underline{r}_v = (\underline{i} + \underline{k}4)(\underline{i}\ 2 - \underline{j} + k\ 24) = 96,$$

$$G = \underline{r}_v\underline{r}_v = (\underline{i}\ 2 - \underline{j} + \underline{k}\ 24)\ (\underline{i}\ 2 - \underline{j} + \underline{k}\ 24) =$$

$$= 4 + 1 + 24^2 = 581.$$

A másodrendű alapmennyiségek számításánál felhasználjuk, hogy

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{17 \cdot 581 - 96^2} = 25{,}71.$$

$$L = \underline{r}^o\underline{r}_{uu} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|}\,\underline{r}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\,\underline{r}_u\underline{r}_v\underline{r}_{uu},$$

$$L = \frac{1}{25,71} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \frac{2}{25,71} .$$

$$M = \underline{r}^{o}\underline{r}_{uv} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} \underline{r}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \underline{r}_u\underline{r}_v \underline{r}_{uv},$$

$$M = \frac{1}{25,71} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$N = \underline{r}^{o}\underline{r}_{vv} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} \underline{r}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \underline{r}_u\underline{r}_v\underline{r}_{vv}$$

$$N = \frac{1}{25,71} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = - \frac{6}{25,71} .$$

Ezen E, F, G; L, M, N mennyiségekkel bármely, az $u_o = 2$, $v_o = 4$ paraméterű ponton átmenő, s

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{r}_u\dot{u} + \underline{r}_v\dot{v} \parallel \underline{r}_u + \underline{r}_v \frac{\dot{v}}{\dot{u}} =$$

$$= (\underline{i} + 2\,\underline{k}) + (\underline{i}\,2 - \underline{j} + \underline{k}\,2) \frac{\dot{v}}{\dot{u}}$$

érintő irányú felületi görbe görbülete:

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \frac{1}{25,71} \frac{(-2) + 2 \cdot 0 \cdot \frac{\dot{v}}{\dot{u}} + (-6)(\frac{\dot{v}}{\dot{u}})^2}{17 + 2 \cdot 96 \frac{\dot{v}}{\dot{u}} + 581 \cdot (\frac{\dot{v}}{\dot{u}})^2}$$

14.02. Ha a felület $z = f(x,y)$ alakban van adva, akkor a vektor egyenlete

$$\underline{r}(x,y) = \underline{i}\,x + \underline{j}\,y + \underline{k}\,f(x,y).$$

Határozzuk meg a felület $(x_o, y_o, f(x_o,y_o))$ pontjában az első- és másodrendű főmennyiségeket az

$$f_x(x_o,y_o) = p, \quad f_y(x_o,y_o) = q,$$

$$f_{xx}(x_o,y_o) = r, \quad f_{xy}(x_o,y_o) = s, \quad f_{yy} =(x_o,y_o) = t$$

jelölések felhasználásával.

$$\underline{r}_x(x,y) = \underline{i} + \underline{k}\, f_x(x,y), \quad \underline{r}_x(x_o,y_o) = \underline{i} + \underline{k}\, p,$$

$$\underline{r}_y(x,y) = \underline{j} + \underline{k}\, f_y(x,y), \quad \underline{r}_y(x_o,y_o) = \underline{j} + \underline{k}\, q,$$

$$\underline{r}_{xx}(x,y) = \underline{k}\, f_{xx}(x,y), \quad \underline{r}_{xx}(x_o,y_o) = \underline{k}\, r,$$

$$\underline{r}_{xy}(x,y) = \underline{k}\, f_{xy}(x,y), \quad \underline{r}_{xy}(x_o,y_o) = \underline{k}\, s,$$

$$\underline{r}_{yy}(x,y) = \underline{k}\, f_{yy}(x,y), \quad \underline{r}_{yy}(x_o,y_o) = \underline{k}\, t$$

$$E = \underline{r}_x\underline{r}_x = 1 + p^2, \quad F = \underline{r}_x\underline{r}_y = pq, \quad G = 1 + q^2,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(1 + p^2)(1 + q^2) - (pq)^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q_2}}$$

Esetünkben a felület egyenlete

$$\underline{r}(x,y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\, \frac{12 - y^3}{x^2},$$

$$\underline{r}_x(x,y) = \underline{i} + \underline{k}\ (-2)\ \frac{12 - y^3}{x^3}\ ,$$

$$\underline{r}_x(2,2) = \underline{i} + \underline{k}\ p = \underline{i} + \underline{k}\ (-1),$$

$$\underline{r}_y(x,y) = \underline{j} + \underline{k}\ \frac{-3y^2}{x^2}\ ,$$

$$\underline{r}_y(2,2) = \underline{j} + \underline{k}\ q = \underline{j} + \underline{k}\ (-3),$$

$$E = 2,\quad F = 3,\quad G = 10.$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2 \cdot 10 - 3^2} = \sqrt{11}.$$

$$\underline{r}_{xx}(x,y) = k\ 6\ \frac{12 - y^3}{x^4}\ ,\qquad f_{xx}(2,2) = R = \frac{3}{2}\ ,$$

$$\underline{r}_{xy}(x,y) = \underline{k}\ 6\ \frac{y^2}{x^3}\ ,\qquad f_{xy}(2,2) = S = 3,$$

$$\underline{r}_{yy}(x,y) = \underline{k}\ (-6)\ \frac{y}{x^2},\qquad f_{yy}(2,2) = t = -3.$$

15. Meusnier tétele

15.01. A felületi görbe egyenlete

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\ (u + 2u^2) - \underline{j}\ u^2 + \underline{k}\ (u^2 + u^4),$$

$$\dot{\underline{r}}(u) = \underline{i}\ (1 + 4u) - \underline{j}\ 2u + \underline{k}\ (2u + 4u^3),$$

$$\ddot{\underline{r}}(u) = \underline{i}\ 4 - \underline{j}\ 2 + \underline{k}\ (2 + 12u^2),$$

$$\dot{\underline{r}}(1) = \underline{i}\ 5 - \underline{j}\ 2 + \underline{k}\ 6$$

$$\ddot{\underline{r}}(1) = \underline{i}\ 4 - \underline{j}\ 2 + \underline{k}\ 14.$$

$$\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 14 \end{vmatrix} = -\ \underline{i}\ 16 - \underline{j}\ 46 + \underline{k}\ 2.$$

$$|\dot{\underline{r}}(1)| = \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65} \approx 8{,}06.$$

$$|\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1)| = \sqrt{16^2 + 46^2 + 4} =$$

$$= \sqrt{256 + 2116 + 4} \approx 48{,}74.$$

$$G = \frac{1}{R} \quad \frac{48{,}74}{8{,}06^3} .$$

Ezek után meghatározzuk a simulósík és felület metszésvonalának görbületét az alapforma felhasználásával. A

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \frac{L\dot{u}^2 + 2\,M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2\,F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}} \qquad \frac{L + 2\,M\,\frac{\dot{u}}{\dot{v}} + N\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2}{E + 2\,F\,\frac{\dot{u}}{\dot{v}} + G\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2}$$

alapforma szerint kiszámítjuk tetszőleges felületi görbe görbületét. Ezen egyenlőségben szereplő E, F, G és L, M, N értéke a felület és a felület pontja által egyértelműen meghatározott érték. Értéke akkor is ugyanaz, amikor síkmetszet (simulósík és felület) görbületét számoljuk. Másrészt a síkmetszet és a felületi görbe érintője a szóbanforgó pontban, tehát az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}}$ is megegyezik. Az pedig nyilvánvaló, hogy a $\cos\vartheta$ érték mindkét esetben ugyanaz. Ugyanis a felületi görbe és a síkmetszet-görbe főnormálisai párhuzamosak. Ezek alapján írhatjuk, hogy a simulósík és a felület metszésvonalának görbülete is

$$G = \frac{1}{R} \quad \frac{48{,}74}{8{,}06^3} .$$

A normálmetszetgörbületet pedig ezen ferde metszet görbületének felhasználásával a két metszet görbülete között a Meusnier-tétel szerint fennálló

$$R_\vartheta = R_o \cos\vartheta$$

összefüggés alapján határozzuk meg. Itt R_ϑ a ferdemetszet, R_o a normálmetszet görbületi sugara ϑ pedig a $\underline{f}$ és $\underline{n}$ vektorok által bezárt szög. Ezen tétel alapján a normálmetszet görbületi sugara

$$R_o = \frac{1}{\cos\vartheta} \frac{48,74}{8,06^3} .$$

A $\cos\vartheta$ értékét pedig az $\underline{n}^o\underline{f}$ szorzat adja.
A felületi normális az $r_u \times \underline{r}_v$-vel, a főnormális pedig az $(\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1)) \times \dot{r}(1)$ vektorral párhuzamos.

$$\underline{r}_u = \underline{i} + 2\,\underline{k}\,u, \qquad \underline{r}_u(1,1) = \underline{i} + \underline{k}\,2$$

$$\underline{r}_v = \underline{i}\,2\,v - \underline{j} + \underline{k}\,6v, \qquad \underline{r}_v(1,1) = \underline{i}\,2 - \underline{j} + \underline{k}\,6$$

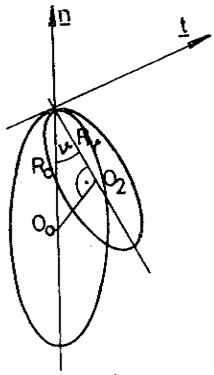
$$\underline{n} \,||\, \underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \underline{i}\,2 - \underline{j}\,2 - \underline{k} \,||\, \underline{n}$$

$$\underline{f} \,||\, \left[\dot{\underline{r}}(1) \times \ddot{\underline{r}}(1)\right] \times \dot{\underline{r}}(1) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -8 & -23 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -\,136\underline{i} + \underline{j}\,69 + \underline{k}\,131$$

$$\cos\vartheta = n^o\underline{f} = \frac{-272 - 69 - 131}{\sqrt{4 + 4 + 1}\,\sqrt{136^2 + 69^2 + 131^2}}$$

A Meusnier-tételt szemlélteti az alábbi 33. ábra.



33. ábra

Ezen ábrán a normálmetszet és a ferdemetszet ezen ponthoz tartozó simuló, ill. görbületi körét rajzoltuk meg Megjegyzendő, hogy a főnormális mindig a görbületi kör centruma felé mutat.

15.02. A felületi görbe u paraméterű pontjába mutató vektor harmadik koordinátája:

$$z^2 = 4^2 - x^2 - y^2,$$

$$z^2 = 4 - 4 \cos^2 u \cos^2 u - 4 \cos^2 u \sin^2 u,$$

$$z^2 = 4 \left[1 - (\cos^2 u)(\cos^2 u + \sin^2 u)\right],$$

$$z^2 = 4 \left[1 - \cos^2 u\right],$$

$$z = 2 \sin u,$$

s ily módon a felületi görbe vektor egyenlete:

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\, 2 \cos^2 u + \underline{j}\, 2 \cos u \sin u + \underline{k}\, 2 \sin u$$

$$\dot{\underline{r}}(u) = \underline{i}\,(-2) \sin 2u + \underline{j}\, 2 \cos 2u + \underline{k}\, 2 \cos u$$

$$\ddot{\underline{r}}(u) = \underline{i}\,(-4) \cos 2u + \underline{j}\,(-4) \sin 2u - \underline{k}\, 2 \sin u$$

$$\dot{\underline{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{i}\,(-2) + \underline{k}\,\sqrt{2},$$

$$\ddot{\underline{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{j}\,(-4) + \underline{k}\,\sqrt{2}.$$

$$\dot{\underline{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \ddot{\underline{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \underline{i}\, 4\sqrt{2} + \underline{j}\, 2\sqrt{2} + \underline{k}\, 8.$$

$$\left|\dot{\underline{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}, \qquad \left|\dot{\underline{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \ddot{\underline{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{32 + 8 + 64} = \sqrt{104}$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{\sqrt{104}}{(\sqrt{6})^3}$$

Mint azt az előző példában láttuk, a felület és a simulósík metszésvonalának görbülete ezen pontban ugyanakkora.

A normálmetszet (érintőre illeszkedő) görbülete pedig az

$$R_\vartheta = R_o \cos\vartheta$$

összefüggés alapján számítható.
Esetünkben

$$\underline{n} \parallel \underline{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{i}\ 2\cos^2\frac{\pi}{4} + \underline{j}\ \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} + \underline{k}\ 2\sin\frac{\pi}{4}$$

vektorral, az $\underline{f}$ pedig a következő

$$\underline{f} \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 8 \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \underline{i}\ 4 - \underline{j}\ 24 + \underline{k}\ 4\sqrt{2}.$$

$\underline{f}$ és $\underline{n}$ ismeretében cos számítható.

15.03. Ezen esetben a normálmetszet 5 egység sugaru kör, tehát $R_o = 5$, a görbülete pedig ennek reciproka.

Az $y = 3$ síkmetszet pedig 4 egység sugaru kör (ferde metszet). A Meusnier-tétel felhasználásával számíthatjuk a két metszet szögét.

$$R_\vartheta = R_o\cos\vartheta, \quad 4 = 5\cos\vartheta.$$

16. Főnormálgörbületek, a Gauss-féle és az összeg-görbület

16.01. Számítjuk az első- és másodrendű alapmennyiségek értékét az $u = -1$, $v = -1$ pontban.

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ (u^2 + v^2) + \underline{j}\ 2uv + \underline{k}(u - v),$$

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\ 2u + \underline{j}\ 2v + \underline{k}, \quad \underline{r}_u(-1,-1) = -\underline{i}\ 2 - \underline{j}\ 2 + \underline{k}$$

$$\underline{r}_v(u,v) = \underline{i}\ 2v + \underline{j}\ 2u - \underline{k} \quad \underline{r}_v(-1,1) = -\underline{i}\ 2 - \underline{j}\ 2 - \underline{k}$$

$$E(-1,-1) = \underline{r}_u(-1,-1)\underline{r}_u(-1,-1) = 2^2 + 2^2 + 1 = 9,$$

$$F(-1,-1) = \underline{r}_u(-1,1)\ \underline{r}_v(-1,1) = 2\cdot 2 + 2\cdot 2 - 1 = 7,$$

$$G(-1,-1) = \underline{r}_v(-1,-1)\underline{r}_v(-1,-1) = 9.$$

A másodrendű főmennyiségek számítása:

$$\underline{r}_{uu}(u,v) = \underline{i}\ 2 \qquad \underline{r}_{uu}(-1,1) = \underline{i}\ 2$$

$$\underline{r}_{uv}(u,v) = 2\underline{j}, \qquad \underline{r}_{uv}(-1,-1) = 2\underline{j},$$

$$\underline{r}_{vv}(u,v) = 2\underline{i}, \qquad \underline{r}_{vv}(-1,-1) = 2\underline{i}.$$

A felületi normális abszolút értéke:

$$|\underline{r}_u(-1,-1)\ \underline{r}_v(-1,-1)| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{81 - 49} = 4\sqrt{2}.$$

$$L = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\, 8 = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$M = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-8) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$N = \frac{1}{4\ 2} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\, 8 = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

A főirányokat az

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\dot u}{\dot v} & \left(\frac{\dot u}{\dot v}\right)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\dot u}{\dot v} & \left(\frac{\dot u}{\dot v}\right)^2 \\ 9 & 7 & 9 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0$$

egyenletből határozhatjuk meg. Ily módon kapjuk az

$$128 - 128\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2 = 0$$

egyenletet, amelynek megoldásai

$$\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)_1 = 1, \qquad \left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)_v = -1.$$

Ezek segítségével a főirányok:

$$\underline{t}_1 \parallel \underline{r}_u + \underline{r}_v \cdot 1 = (-2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}) + $$
$$+ (-2\underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k}) \parallel \underline{i} + \underline{k}$$

$$\underline{t}_2 \parallel \underline{r}_u + \underline{r}_v(-1) = (-2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}) + $$
$$+ (-2\underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k})(-1) \parallel \underline{k}.$$

Ezen főirányok segítségével meghatározhatjuk a főmetszetek síkjainak egyenletét.
Ezen síkok illeszkednek a (2, 2, 0) pontra, s tartalmazzák a felületi normálist, tehát a síkok normálvektorai.

$$\underline{n}_1 \parallel \underline{t}_1 \times (\underline{r}_u(-1,-1) \times \underline{r}_v(-1,-1)),$$

$$\underline{n}_2 \parallel \underline{t}_2 \times (\underline{r}_u(-1,-10 \times \underline{r}_v(-1,-1)),$$

$$\underline{r}_u(-1,-1) \times \underline{r}_v(-1,-1) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\underline{i} - 4\underline{j},$$

$$\underline{n}_1 \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\underline{k},$$

$$\underline{n}_2 \parallel \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i} - \underline{j}.$$

A két sík egyenlete

$$x + y - 4 = 0, \quad z = 0.$$

Számítsuk ki a felület és ezen síkok metszésvonalának a görbületét a szóbanforgó pontban és hasonlítsuk össze a kapott értéket az $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ ismeretlenekre vonatkozó

$$\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_r} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}$$

egyenletrendszer megoldásával.

16.02. Kiszámítjuk a deriváltakat, s ezek segítségével az alapmennyiségeket.

$$\underline{r}_u(u,v) = \underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v,$$

$$\underline{r}_v(u,v) = -\underline{i}\,u\sin v + \underline{j}\,u\cos v + \underline{k}2,$$

$$\underline{r}_{uu}(u,v) = 0, \quad \underline{r}(u,v) = -\underline{i}, \sin v + \underline{j}\cos v,$$

$$\underline{r}_{vv}(u,v) = -\underline{i}\,u\cos v - \underline{j}\,u\sin v.$$

Az első- és másodrendű Gauss-féle főmennyiségek

$$E = \underline{r}_u^2 = 1, \quad F = \underline{r}_u\underline{r}_v = 0, \quad G = \underline{r}_v^2 = u^2 + 4.$$

$$L = 0, \quad M = \frac{-2}{\sqrt{u^2 + 1}}, \quad N = 0.$$

Például az M számítása:

$$M = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|}\underline{r}_{uv} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 2 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

Ezek után a főgörbületek szorzata:

$$\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} = \frac{L\,N - m^2}{EG - F^2} = \frac{-(-2)^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{-4}{(u^2 + 4)^2},$$

A főgörbületek összege pedig

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{1\cdot 0+(u^2+4)\cdot 0-2\cdot 0(-2)}{(EG - F^2)^{3/2}} = 0.$$

Ha az összeg-görbületet H-val, a szorzat-görbületet K-val jelöljük, akkor a főgörbületet az

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 - H\left(\frac{1}{R}\right) + K = 0$$

másodfokú egyenletből határozhatjuk meg. Esetünkben ez az egyenlet a következő:

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 - \frac{4}{(u^2 + 4)^2} = 0.$$

Ebből a főgöbületek:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{u^2 + 4}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{2}{u^2 + 4}.$$

A főirányokat pedig a tetszőleges u, v paraméterű pontban a

$$\underline{t} \,||\, \underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v} \,||\, \underline{r}_u \frac{\dot{u}}{\dot{v}} + \underline{r}_v \qquad (v \neq 0)$$

vektor határozza meg, ahol $\frac{\dot{u}}{\dot{v}}$ az

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\dot{u}}{\dot{v}} & \left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

másodfokú egyenlet megoldása. Ez mindig olyan másodfokú egyenlet, amelynek két valós megoldása van és az ily módon adódó

$$\underline{r}_u\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)_1 + \underline{r}_v, \quad \underline{r}_v\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)_2 + \underline{r}_v.$$

vektorok mindig egymásra merőlegesek. Esetünkben a másodfokú egyenlet a következő:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\dot{u}}{\dot{v}} & \left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2 \\ 1 & 0 & u^2+4 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\left[u^2 + 4 - \left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2\right] = 0,$$

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \sqrt{u^2+4}, \quad \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = -\sqrt{u^2+4}.$$

Ezek felhasználásával a főirányok

$$\underline{t}_1 \parallel (\underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v)\sqrt{u^2+4} +$$
$$+ (-\underline{i}\, u \sin v + \underline{j}\, u\cos v + \underline{k}\, 2)$$
$$\underline{t}_2 \parallel (\underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v)(-\sqrt{u^2+4}) +$$
$$+ (-\underline{i}\, u \sin v + \underline{j}\, u\cos v + \underline{k}\, 2)$$

Ezen két vektor skaláris szorzata nulla, azaz a két vektor egymásra merőleges.
Megjegyzendő még, hogy az előbbi determinánsba nem az M, hanem az M' értéket helyettesítettük, ahol

$M' = \sqrt{EG - F^2}\, M$, s általában

$$L' = \underline{r}_u \times \underline{r}_v \underline{R}_{uu}, \quad M' = \underline{r}_u \times \underline{r}_v \underline{r}_{uv}, \quad N' = \underline{r}_u \times \underline{r}_v \underline{r}_{vv}.$$

Ha ezen értékkel számolunk, akkor az összeg és a szorzat görbület az

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN' + GL' - 2FM'}{(Eg - F^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} = \frac{L'N' - M'^2}{(EG - F^2)^2}$$

képlettel számítható.

16.03. Meghatározzuk a deriváltak értékét az $u = 0,\ v = -1$ pontban

$$\begin{array}{ll}
\underline{r}_u(u,v) = \underline{i}\ 2u + \underline{j} + \underline{k}\ 2u\ v^2, & \underline{r}_u(0,-1) = \underline{j}, \\
\underline{r}_v(u,v) = \underline{i}(-2v) + \underline{j} + \underline{k}\ 2u^2 v, & \underline{r}_v(0,-1) = \underline{i}\ 2 + \underline{j}, \\
\underline{r}_{uu}(u,v) = \underline{i}\ 2 + \underline{k}\ 2\ v^2, & \underline{r}_{uu}(0,-1) = \underline{i}\ 2 + \underline{k} 2, \\
\underline{r}_{uv}(u,v) = \underline{k}\ 4\ u\ v, & \underline{r}_{uv}(0,-1) = \underline{0}, \\
\underline{r}_{vv}(u,v) = \underline{i}(-2) + \underline{k}\ 2u^2, & \underline{r}_{vv}(0,-1) = \underline{i}\ (-2).
\end{array}$$

A főmennyiségek számítása

$$E = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_u = 1, \quad F = \underline{r}_u \underline{r}_v = 1, \quad G = \underline{r}_v \underline{r}_v = 5.$$

$$L' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad M' = 0, \quad N' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Számítjuk az összeg és szorzat görbületet.

$$H = \frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{R_2} \quad \frac{EN' + GL' - 2FM'}{(EG - F^2)^{3/2}}$$

$$H = \frac{1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) - 2 \cdot 1 \cdot 0}{(1 \cdot 5 - 1^2)^{3/2}} = \frac{-20}{8} = -\frac{5}{2}$$

$$K = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} = \frac{L'N' - (M')^2}{(EG - F^2)^2} = 0.$$

Ezek után a főgörbületeket az

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 - H \frac{1}{R} + K = 0, \quad \left(\frac{1}{R}\right)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right) \frac{1}{R} = 0$$

egyenletből kapjuk

$$\frac{1}{R_1} = 0, \qquad \frac{1}{R_2} = -6.$$

A főirányok meghatározása bevezetve az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = h$ jelölést

$$\begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ E & F & G \\ L' & M' & N' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4 \begin{vmatrix} -h & h^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4(-5h - h^2) = 0$$

$$h_1 = 0, \qquad h_2 = -5.$$

$$\underline{t}_1 \parallel \underline{r}_u h_1 + \underline{r}_v = \underline{j}\, 0 + 2\, \underline{i} + \underline{j}, \quad \underline{t}_1 \parallel 2\, \underline{i} + \underline{j},$$

$$\underline{t}_2 \parallel \underline{r}_u h_2 + \underline{r}_v = \underline{j}(-5) + 2\, \underline{i} + \underline{j},$$

$$\underline{t}_2 \parallel 2\, \underline{i} - 4\, \underline{j},$$

$$\underline{t}_1 \underline{t}_2 = (2\, \underline{i} + \underline{j})(2\, \underline{i} - 4\, \underline{j}) = 0 \qquad \underline{t}_1 \quad \underline{t}_2$$

16.04. A $4x^2 + 4y^2 + z^2 - 9 = 0$ felület helyett a

$$z = \sqrt{9 - 4x^2 - 4y^2}$$

felületet vizsgáljuk az $x = 1$, $y = -1$ pontban. Emlékeztetünk arra, hogy ha a felület $z = f(x,y)$ alakban van adva, akkor

$$\underline{r}(x,y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\, f(x,y)$$

$$\underline{r}_x(x,y) = \underline{i} + \underline{k} f_x(x,y),$$

$$\underline{r}_x(x_o,y_o) = \underline{i} + \underline{k} f_x(x_o,y_o) = \underline{i} + \underline{k} p,$$

$$\underline{r}_y(x,y) = \underline{j} + \underline{k} f_y(x,_y),$$

$$\underline{r}_y(x_o,y_o) = \underline{j} + k f_y(x_o,y_o) = \underline{j} + \underline{k}\, q,$$

$$\underline{r}_{xx}(x,y) = \underline{k}\, f_{xx}(x,y),$$

$$\underline{r}_{xx}(x_o,y_o) = \underline{k}\, f_{xx}(x_o,y_o) = \underline{k}\, r,$$

$$\underline{r}_{xy}(x,y) = \underline{k}\, f_{xy}(x,y),$$

$$\underline{r}_{xy}(x_o,y_o) = \underline{k}\, f_{xy}(x_o,y_o) = \underline{k}\, s,$$

$$\underline{r}_{yy}(x,y) = \underline{k}\, f_{yy}(x,y);$$

$$\underline{r}_{yy}(x_o,y_o) = \underline{k}\, f_{yy}(x_o,y_o) = \underline{k}\, t.$$

A főmennyiségek ezen jelölésekkel a következők:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$

$$L' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = r, \quad M' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s,$$

$$N' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t,$$

$$H = \frac{EN' + GL' - 2FM'}{(EG - F^2)^{3/2}} = \frac{(1 + p^2)\, t + (1 + q^2)\, r - 2\, pqs}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}},$$

$$K = \frac{L'N' - M'^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

A főirányokat pedig az

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\dot{x}}{\dot{y}} & \left(\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)^2 \\ 1 + p^2 & pq & 1 + q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

egyenletből határozzuk meg.
Esetünkben

$$\underline{r}_x(x,y) = \underline{i} + \underline{k}\,\frac{-4x}{\sqrt{9-4x^2-4y^2}}, \quad \underline{r}_x(1,-1) = \underline{i} + \underline{k}\,(-4)$$

$$\underline{r}_y(x,y) = \underline{j} + \underline{k}\,\frac{-4y}{\sqrt{9-4x^2-y^2}}, \quad \underline{r}_y(1,-1) = \underline{j} + \underline{k}\,4$$

tehát $p = -4$, $q = 4$, s így

$$E = 17, \quad F = -16, \quad G = 17.$$

Az r, s, t értékek számítása

$$f_{xx}(x,y) = \frac{-4\sqrt{9-4x^2-4y^2} + 4x\dfrac{4x}{\sqrt{9-4x^2-4y^2}}}{9-4x^2-4y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{16x^2 - 4(9-4x^2-4y^2)}{(9-4x^2-4y^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{32x^2 + 16y^2 - 36}{(9-4x^2-4y^2)^{3/2}}$$

$$f_{xx}(1,-1) = r = 12, \qquad f_{yy}(1,-1) = t = 12$$

$$f_{xy}(x,y) = -4x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(9-4x^2-4y^2)^{-3/2} \cdot 8y$$

$$f_{xy}(1,-1) = s = 16.$$

Számítjuk az összeg- és a szorzat- görbületet.

$$H = \frac{(1+p^2)\,t + (1+q^2)\,r - 2\,pq\,s}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{17 \cdot 12 + 17 \cdot 12 - 2 \cdot (-4)\,4 \cdot 16}{(1+16+16)^{3/2}}$$

$$H = \frac{1020}{33 \cdot \sqrt{33}} . \qquad K = \frac{-112}{33^2}$$

Az $\left(\frac{1}{R}\right)^2 - 4\,\frac{1}{R} + K = 0$ egyenlet megoldásai a főgöbü-
letek.
A főirányok pedig az

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\dot{x}}{\dot{y}} & \left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)^2 \\ 17 & -16 & 17 \\ 12 & 16 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet alapján határozzuk meg.

16.05. Számítjuk a p, q, r, s, t értékeket tetszőleges pontban

$$z_x(x,y) = x, \qquad z_y = -\frac{y}{3},$$

$$z_{xx}(x,y) = 1, \quad z_{xy}(x,y) = 0, \quad z_{yy}(x,y) = -\frac{1}{3}$$

A szorzat görbület

$$K = \frac{1}{R_1R_2} = \frac{1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - 0^2}{\sqrt{1 + x^2 + \frac{y^2}{9}}^{\,2}} = \frac{-1}{\sqrt{9 + 9x^2 + y^2}^{\,2}} < 0$$

Ez minden pontban negatív.

$$H = \frac{(1 + x^2)\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{y^2}{9}\right)1 - 2\cdot x\left(-\frac{y}{3}\right)0}{\sqrt{1 + x^2 + \frac{y^2}{9}}^{\,2}}$$

Ez azon pontokban nulla, amelyekre

$$1 + x^2 = 3 + \frac{y^2}{3}, \quad x^2 - \frac{y^2}{3} = 2$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1.$$

16.06. Számítjuk a p, q, r, s, t értékeket az $x = 1$, $y = 3$ pontban.

$z_x = 8x - 2y + 1, \qquad z_x(1,3) = 3$

$z_y = -2x - 6y + 2, \qquad z_y(1,3) = -18,$

$z_{xx} = 8, \qquad z_{xy} = -2, \qquad z_{yy} = -6,$

$E = 1 + 3^2 = 10, \qquad F = -54, \qquad G = 1 + (-18)^2 = 325,$

$L' = 8, \qquad m' = -2, \qquad N' = -6.$

Az összeg-görbület

$$H = \frac{-60 + 2600 - 108}{(\sqrt{3250 - (-54)^2})^3} = \frac{2432}{(\sqrt{2916})^3} .$$

A szorzat-görbület

$$K = \frac{-48 - 4}{(\sqrt{2916})^3} .$$

Az $(\frac{1}{R})^2 - H \frac{1}{R} + K = 0$ egyenlet megoldásai adják a fő-

görbületek értékét.
A főirányokat pedig az

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 & -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} & 1 \\ E & F & G \\ L' & M' & N' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 & -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} & 1 \\ 10 & -54 & 325 \\ 8 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásainak felhasználásával határozhatjuk meg:

$$\underline{t}_1 \parallel + \underline{r}_x + \underline{r}_y \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)_1 .$$

16.07. A p, q, r, s, t mennyiségek tetszőleges pontban felvett értékének számítása.

$$z_x(x,y) = y, \qquad z_y(x,y) = x,$$

$$z_{xx}(x,y) = 0, \; z_{xy}(x,y) = 1, \; z_{yy}(x,y) = 0.$$

Az első és másodrendű főmennyiségek:

$$E = 1 + y^2, \qquad F = xy, \qquad G = 1 + x^2,$$

$$L' = 0, \qquad M' = 1, \qquad N' = 0.$$

Az összeg-görbület és a szorzat-görbület

$$H = \frac{-2\,xy}{(\sqrt{1 + x^2 + y^2})^{3/2}}, \qquad K = \frac{-1}{(1 + x^2 + y^2)^2} .$$

Főgörbületi vonalnak nevezzük a felület azon felületi görbéit, amelyeknek bármely pontjához tartozó érintővektora (az $\dot{\underline{r}}(x)$ vektor) párhuzamos az ugyanezen ponthoz tartozó egyik főirányt meghatározó $\underline{t}$ vektorral.
Tegyük fel, hogy az ily módon értelmezett felületi görbe x, y síkon lévő vetületének egyenlete $y=y(x)$, a felületi görbe egyenlete pedig

$$\underline{r}(x) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y(x) + \underline{k}\, x\, y(x).$$

A felületi görbe x paraméterű pontjában a főmennyiségek a következők:

$$E = 1 + y(x)^2, \quad F = x\,y(x), \quad G = 1 + x^2,$$

$$L' = 0, \quad M' = 1, \quad N' = 0.$$

A főirányokat pedig az

$$\begin{vmatrix} (y'(x))^2 & -y'(x) & 1 \\ 1 + y(x)^2 & xy(x) & 1 + x^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai adják, amelyek egyben az ún. főgörbületi vonalak differenciálegyenletei. Ezek esetünkben a következők:

$$(y'(x))^2(1 + x^2) = 1 + y(x)^2,$$

$$y' = \frac{\sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad y' = -\frac{\sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

A főgörbületi vonalak meghatározása céljából meg kell oldani az előbbi differenciálegyenleteket.

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + C_1, \quad \int\frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = -\int\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + C_1$$

$$\text{arsh}\,y = \text{arsh}\,x + C_1, \quad \text{arsh}\,y = -\text{arsh}\,x + C_1$$

Ezen megoldások a következő alakban írhatók:

$$y = \text{sh}(\text{arsh}\,x + C_1), \quad y = \text{sh}(C_1 - \text{arsh}\,x).$$

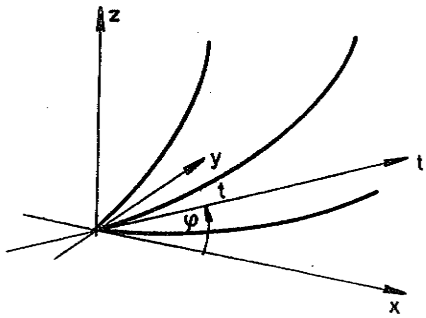
Tehát a $z = xy$ felület főgörbületi vonalainak az x,y síkon lévő vetülete az előbbi két görbe, s a főgörbületi vonalak vektoregyenlete:

$\underline{r}_1(x) = x\,\underline{i} + \underline{j}\ \mathrm{sh}(\mathrm{arsh}x + c_1) + \underline{k}\ x\ \mathrm{sh}(\mathrm{arsh}x + C_1),$

$\underline{r}_2(x) = x\,\underline{i} + \underline{j}\ \mathrm{sh}(C_1 - \mathrm{arsh}x) + \underline{k}\ x\ \mathrm{sh}(C_1 - \mathrm{arsh}x),$

Például a (O, O, O) ponton átmenő főgörbületi vonalak vetületei az $y = x$, $y = -x$ egyenesek..

16.08. Tekintsük az alábbi ábrát



34. ábra

Ezen 34. ábrán a $z = f(x,y)$ felület $x = O$, $y = O$, metszésvonalainak, valamint a felület és az x, z síkkal φ szöget bezáró t, z sík metszetének egy darabját rajzoltuk meg. Ha a t távolságot vezetjük be paraméternek, akkor a $z = f(x,y)$ felület és a t, z sík metszésvonalának vektoregyenlete

$\underline{r}(t) = \underline{i}\ t\cos\varphi + \underline{j}\ t\sin\varphi + \underline{k}\ f(t\cos\varphi,\ t\sin\varphi).$

Ezen felületi görbe görbületét az alapforma sgítségével

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\ \frac{L'\dot{u}^2 + 2M'\dot{u}\dot{v} + n'\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

($\cos\vartheta = 1$ mert normálmetszetről van szó) határozhatjuk meg. Ezen esetben az E, F, G, L', M', N' mennyiségek a következők:

$E = 1,\qquad F = O,\qquad G = 1$

$L' = f_{xx}(O,O),\qquad M' = f_{xy}(O,y),\qquad n' = f_{yy}(O,O)$

Ezeket felhasználva

$$\frac{1}{R_\varphi} = f_{xx}(0,0)\cos^2\varphi + 2 f_{xy}(0,0)\cos\varphi\sin\varphi +$$
$$+ f_{yy}(0,0)\sin^2\varphi.$$

Kérdés, hogy ezen (csak φ -től függő) függvénynek van-e szélsőértéke, s ha igen, akkor azt a φ mely értékeinél veszi fel?
A kérdés első részére Weierstrass-tétele alapján válaszolhatunk (zárt számközben folytonos függvény az intervallumon felveszi a maximumát), mert a függvény a $[0,\pi]$ -ben folytonos. Ha már tudjuk, hogy van szélsőérték, akkor azt mondhatjuk, hogy legyen az a $\varphi = 0$ értéknél (egyszerűen arról van szó, hogy a koordinátarendszert ennek megfelelően vettük fel). Ekkor viszont $\frac{1}{R_\varphi}$ deriváltja a $\varphi = 0$ pontban nulla kell hogy legyen.

$$\frac{1}{R_\varphi} = f_{xx}(0,0)\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2} + f_{xy}(0,0)\sin 2\varphi +$$
$$+ f_{yy}(0,0)\,\frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_\varphi}\right) = f_{xx}(0,0)\sin 2\varphi + 2f_{xy}(0,0)\cos 2\varphi +$$
$$+ f_{yy}(0,0)\sin 2\varphi = 0$$

Ez viszont a $\varphi = 0$ pontban csak akkor lehet nulla, ha $f_{xy}(0,0) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a φ jelű normálmetszet $\frac{1}{R_\varphi}$ görbülete

$$\frac{1}{R_\varphi} = f_{xx}(0,0)\cos^2\varphi + f_{yy}(0,0)\sin^2\varphi,$$

s ennek egyik szélső értéke $\varphi = 0$, a másik pedig $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pontban van és a főgörbület értéke

$$\frac{1}{R_1} = f_{xx}(0,0), \quad \frac{1}{R_2} = f_{yy}(0,0)$$

Ezeket az előbbi képletbe helyettesítve kapjuk az Euler-tételt.

17. Euler-tétele

17.01. Azon esetekben, amikor adva van egy felület egyenlete és feladatunk egy adott felületi ponton átmenő felületi térgörbe görbületének kiszámítása, oly módon járhatunk el, hogy először meghatározzuk a két főgörbületet, majd ezeket felhasználva kiszámítjuk a térgörbe érintője és a felületi normális által meghatározott síkkal kimetszett felületi normálmetszet görbületét az Euler-tétellel, végül a Mausnier-tétel alapján kiszámítjuk annak a ferdemetszetnek a görbületét. amelyet a felületből az adott felületi görbe simulósíkja kimetsz. Ugyanis ezen síkmetszetnek az adott ponthoz tartozó görbülete egyenlő a felületi görbe ugyanazon ponthoz tartozó görbületével. Ennek megfelelően először a főgörbületeket határozzuk meg.

$$\underline{r}_u(u,v) = \underline{i}\ 3\ \text{shu}\ \text{cosv} + \underline{j}\ 3\ \text{chu}\ \text{sinv} + \underline{k}\ \frac{v}{\text{ch}^2 uv}\ ,$$

$$\underline{r}_v(u,v) = \underline{i}\ (-3)\text{chu}\ \text{sinv} + \underline{j}\ 3\ \text{shu}\ \text{cosv} + \underline{k}\ \frac{u}{\text{ch}^2 uv}\ ,$$

$$\underline{r}_{uv}\ (u,v) = \underline{i}\ 3\ \text{chu}\ \text{cosv} + \underline{j}\ 3\ \text{shu}\ \text{sinv} - \underline{k}\ \frac{v^2 \text{shuv}}{\text{ch}^3 uv}\ ,$$

$$\underline{r}_{uv}(u,v) = \underline{i}\ (-3)\ \text{shu}\ \text{sinv} + \underline{j}\ 3\ \text{chu}\ \text{cosv} +$$

$$+ \underline{k}\ \frac{\text{ch}^2 uv - uv2(\text{chuv})(\text{shuv})}{\text{ch}^4 uv}\ ,$$

$$\underline{r}_{vv}(u,v) = \underline{i}\ (-3)\ \text{chu}\ \text{cosv} + \underline{j}\ (-3)\ \text{shu}\ \text{sinv} +$$

$$+ \underline{k}\ (-u^2)\ \frac{2\ \text{shuv}}{\text{ch}^3 uv}\ ,$$

$$\underline{r}_u(0,\tfrac{\pi}{2}) = \underline{i}\;0 + \underline{j}\;3 + \underline{k}\;\frac{\pi}{2},$$

$$\underline{r}_v(0,\tfrac{\pi}{2}) = -\,3\;\underline{i},$$

$$\underline{r}_{uu}(0,\tfrac{\pi}{2}) = \underline{0}, \quad \underline{r}_{uv}(0,\tfrac{\pi}{2}) = \underline{k}, \quad \underline{r}_{vv}(0,\tfrac{\pi}{2}) = \underline{0}.$$

Ezek segítségével számítjuk a főmennyiségeket

$$E = \underline{r}_u^{\,2} = 9 + \frac{\pi^2}{4}, \quad F = \underline{r}_u\underline{r}_v = 0, \quad G = \underline{r}_v^{\,2} = 9.$$

$$L' = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \frac{\pi}{2} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M' = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \frac{\pi}{2} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$N' = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \frac{\pi}{2} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$H = \frac{EN' + GL' - 2FM'}{(EG - F^2)^{3/2}} = 0,$$

$$K = \frac{L'N' - M'^2}{(EG - F^2)^2} \quad \frac{-81}{(81 + \frac{9}{4}\pi^2)^2}$$

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 - H\,\frac{1}{R} + K = 0,$$

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 = \frac{81}{(81 + \frac{9}{4}\pi^2)^2}$$

$$\frac{1}{R_1} = -\,\frac{9}{81 + \frac{9}{4}\pi^2}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{9}{81 + \frac{9}{4}\pi^2}$$

$L' = r = 2, \quad M' = s = 0, \quad N' = t = 2.$

Az összeg-görbület

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN' + GL' - 2FM'}{(EG - F^2)^{3/2}} = \frac{74 + 130 - 2 \cdot 48 \cdot 0}{(37 \cdot 65 - 48^2)^{3/2}}$$

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{204}{(101^{3/2}} \approx 0,2,$$

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R2} = \frac{4}{101^2} \approx 0,0004.$$

$$(\frac{1}{R})^2 - 0,2 \cdot \frac{1}{R} + 0,0004 = 0$$

$$\frac{1}{R_1} \approx 0,2, \qquad \frac{1}{R_2} \approx 0$$

$$\frac{1}{R}_{\Phi=45^\circ} = 0,2 \cdot \cos 45^\circ + 0 \cdot \sin 45^\circ.$$

18. Felületdarab felszine

18.01. Az $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ alakban adott felületdarab felszínét az

$$F = \iint_{(T)} |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| du dV = \iint_{(T)} \sqrt{EG-F^2} du dv$$

formula alapján számíthatjuk ki. Számítjuk tehát a parciális deriváltakat, s ezek segítségével az elsőrendű főmennyiségeket.

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,(\cos u - v \sin u) +$$
$$+ \underline{j}(\sin u + v \cos u) + \underline{k}\,(u + v),$$

$$\underline{r}_u(u,v) = \underline{i}\,(-\sin u - v \cos u) + \underline{j}\,(\cos u - v \sin u) + \underline{k},$$

A kisebbik görbületű főmetszettel $\Phi = 30^o$-os, ill. -30^o-os szöget bezáró normálmetszetek görbületei az Euler-tétellel számíthatók ki. Mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk.

$$\cos^2(-30^o) = \cos^2 30^o = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2(-30^o) = \sin^2 30^o = \frac{1}{4},$$

tehát

$$\frac{1}{R_\Phi} = -\frac{1}{9+\frac{\pi^2}{4}}\cos^2\Phi + \frac{1}{9+\frac{\pi^2}{4}}\sin^2\Phi$$

$$\frac{1}{R_\Phi} = -\frac{1}{9+\frac{\pi^2}{4}}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{9+\frac{\pi^2}{4}}\frac{1}{4} \quad \frac{-2}{36+\pi^2}.$$

Mindkét érintőhöz két-két olyan sík tartozik, amelyik az érintőkön áthaladó normálmetszet síkjával $\vartheta = 60^o$ szöget zár be. Ez azt jelenti, hogy négy olyan simulósík van, amelyekhez tartozó térgörbék görbülete megegyezik, és eleget tesz a feladat feltételeinek. A görbület értékét a normálmetszet görbületéből Meusnier-tétellel határozzuk meg.

$$\left(\frac{1}{R}\right)_{\substack{\Phi=30^o\\ \vartheta=60}} = \left(\frac{1}{R}\right)_{\Phi=30^o}\cos\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{-2}{36+\pi}.$$

17.02. Számítjuk a p, q, r, s, t értékeket

$$z_x(x,y) = 2x, \qquad z_x(3,4) = 6 = p,$$

$$z_y(x,y) = 2y, \qquad z_y(3,4) = 8 = q,$$

$$z_{xx}(x,y) = 2, \qquad z_{xx}(3,4) = 2 = r,$$

$$z_{xy}(x,y) = 0, \qquad z_{xy}(3,4) = 0 = 9$$

$$z_{yy}(x,y) = 2, \qquad z_{yy}(3,4) = 2 = t.$$

$$E = 1 + p^2 = 1 + 36 = 37, \qquad F = pq = 48,$$

$$G = 1 + q^2 = 1 + 8^2 = 65.$$

$$\underline{r}_v(u,v) = \underline{i}\ (-\sin u) + \underline{j}\ \cos u + \underline{k},$$

$$E = \underline{r}_u^2 = (-\sin u - v\cos u)^2 + (\cos u - v \sin u)^2 + $$
$$+ 1^2 = v^2 + 2,$$

$$F = \underline{r}_u \underline{r}_v = (\sin u - v\cos u)(-\sin u) +$$
$$+ (\cos u - v\sin u)\cos u + 1 = 2,$$

$$G = \underline{r}_v^2 = (-\sin u)^2 + (\cos zu)^2 + 1 = 2,$$

$$EG - F^2 = (v^2 + 2)\ 2 - 2^2 = 2v^2.$$

A kiszámítandó felszin:

$$F = \iint\limits_{(T)} \sqrt{EG - F^2} duv = \int\limits_{v_1=0}^{v_2=1} \left\{ \int\limits_{u_1=0}^{u_2=\pi} \sqrt{2v^2}\, du \right\} dv,$$

$$F = \int\limits_0^1 \sqrt{2}v \left\{ [u]_0^{\pi} \right\} dv = \int\limits_0^1 \sqrt{2}\ v\ [\pi - 0]\ dv,$$

$$F = \sqrt{2}\pi \int\limits_0^1 v\ d\ v = \sqrt{2}\pi \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 \sqrt{2}\pi \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

18.02. Ha a felület $z = f(x,y)$ alakban van adva, akkor a felületdarab felszinét a

$$F = \iint\limits_{(T)} |\underline{r}_x \times \underline{r}_y| dxdy = \iint\limits_{(T)} \sqrt{1+(f_x(x,y)^2+(f_y(x,y)^2}dxdy$$

képlet alapján kell meghatározni. Ennek megfelelően először a parciális deriváltakat számítjuk.

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{y},\quad f_x(x,y) = \frac{x}{y},\quad F_y(x,y) = -\frac{x^2}{2y^2},$$

ezek segítségével

$$\sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2} \quad \frac{x^4}{4y^4}} =$$

$$= \sqrt{(1 + \frac{x^2}{2y^2})^2},$$

s most ezt helyettesítjük a képletbe

$$F = \iint\limits_{(T)} (1 + \frac{x^2}{2y^2})\, dxdy = \int\limits_{x_1=0}^{x_2=1} \left\{ \int\limits_{y_1=1}^{y_2=2} (1 + \frac{x^2}{2y^2}) dy \right\} dx,$$

$$F = \int_0^1 \left\{ \left[y - \frac{x^2}{2y} \right]_1^2 \right\} dx = \int_0^1 \left[(2 - \frac{x^2}{4}) - (1 - \frac{x^2}{2}) \right] dx,$$

$$F = \int_0^1 (1 + \frac{x^2}{4})\, dx = \left[x + \frac{x^3}{12} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12} .$$

A kettős integrál kiszámítását az alábbi módon is végrehajthatjuk.

$$F = \int\limits_{y_1=1}^{y_2=2} \left\{ \int\limits_{x_1=0}^{x_2=1} (1 + \frac{x^2}{2y^2})\, dx \right\} dy = \int_1^2 \left\{ \left[x + \frac{x^3}{6y^2} \right]_0^1 \right\} dy,$$

$$F = \int_1^2 (1 + \frac{1}{6y^2}) dy = \left[y - \frac{1}{6} \frac{1}{y} \right]_1^2 = (2 - \frac{1}{12}) - (1 - \frac{1}{6})$$

$$F = 1 - \frac{1}{12} = \frac{13}{12} .$$

18.03. Elegendő nyolcadgömb felszinét számolni, s az elsőrendű főmennyiségek a következők:

$\underline{r}_u(u,v) = -\underline{i}\, R \sin u \cos v - \underline{j}\, R \sin u \sin v + \underline{k}\, R \cos u,$

$\underline{r}_v(u,v) = -\underline{i}\, R \cos u \sin v + \underline{j}\, R \cos u \cos v.$

$E = \underline{r}_u^2 = R^2 \sin^2 u \cos^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \cos^2 u = R^2$

$F = \underline{r}_u \underline{r}_v = R^2(\sin u \cos u \cos v \sin v - \sin u \sin v \cos u \cos v) =$

$= 0,$

$G = \underline{r}_v^2 = R^2 (\cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \cos^2 v) = R^2 \cos^2 u,$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{R^4 \cos^2 u} = R^2 \cos u.$$

A felszin

$$F = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos u\, du \right) dv = 8 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \Big[\sin u \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} dv,$$

$$F = 8 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 0) dv = 8 R^2 \Big[v \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8 R^2 \frac{\pi}{2} = 4R^2\pi.$$

18.04. A felület vektoregyenlete

$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,(a + b \cos u) \cos v + j(a + b \cos u)\sin v +$

$+ \underline{k}\, b \sin u,$

$\underline{r}_u(u,v) = -\underline{i} b \sin u \cos v - \underline{j}\, b \sin u \sin v + \underline{k}\, b \cos u$

$\underline{r}_v(u,v) = -\underline{i}(a + b \cos u)\sin v + \underline{j}\,(a + b \cos u) \cos v,$

$E = \underline{r}_u^2 = b^2(\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u) = b^2$

$F = \underline{r}_u \underline{r}_v = b \sin u \cos v(a + b \cos v) \sin v -$

$- b \sin u \sin v (a + b \cos u) \cos v = 0,$

$G = \underline{r}_v^2 = (a + b \cos u)^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = (a + b \cos u)^2,$

$EG - F^2 = b^2(a + b \cos u)^2$

Mindkét változó 0-tól 2π-ig változik.

$$F = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} b(a + b\cos u)du\right)dv = \int_0^{2\pi}\left\{\left[abu + b^2\sin u\right]_0^{2\pi}\right\}dv,$$

$$F = \int_0^{2\pi} 2\,ab\pi\,dv = 4\,ab\,\pi^2.$$

18.05. Esetünkben

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,u\cos v + \underline{j}\,u\sin v + \underline{k}\,cu$$

$$\underline{r}_u(u,v) = \underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v + k\,c$$

$$\underline{r}_v(u,v) = -\underline{i}\,u\sin v + \underline{j}\,u\cos v,$$

$$E = \underline{r}_u^2 = u^2 + C^2,\quad F = \underline{r}_u\underline{r}_v = 0,\quad G = \underline{r}_v^2 = u^2$$

$$\sqrt{EG + F^2} = \sqrt{(u^2 + c^2)u^2} = u\sqrt{u^2 + c^2}.$$

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^1 \sqrt{u^2 + c^2}\,2u\,du\right\}dv = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\frac{(u^2 + c^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1\right\}dv,$$

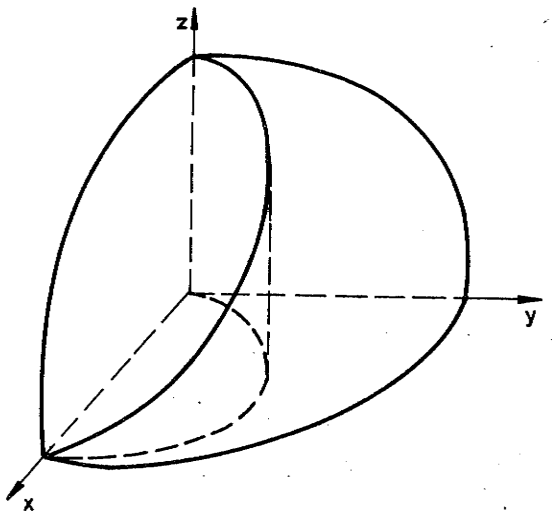
$$F = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((\sqrt{1 + c^2})^3 - c^3\right)dv = \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{1 + c^2}\right)^3 - c^3\right]\frac{\pi}{2}\,.$$

18.06. A felület az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

egyenletű gömbfelület. A felület és hengerfelület egy darabját az alábbi 35. ábra szemlélteti.

Ezen ábrából kiolvasható, hogy elegendő a kérdéses felületdarab negyed részének a felszínét meghatározni.



35. ábra

A felület egyenletét ezen esetben így irhatjuk:

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

A parciális deriváltak pedig a következők lesznek

$$z_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad z_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

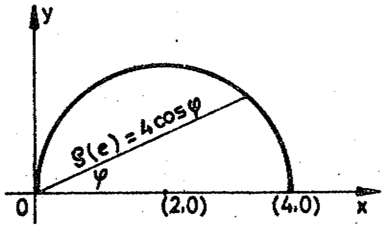
Ezeket helyettesítve a felszin képletébe

$$F = 4 \iint_{(T)} \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}}\, dxdy,$$

$$F = 4 \iint_{(T)} \sqrt{\frac{16 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{16 - x^2 - y^2}}\, dxdy =$$

$$= 4 \iint_{(T)} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

Minthogy az integrálandó függvény az $(x^2 + y^2)$-nek függvénye és az integrációs tartomány a 34. ábrán látható félkör, azért polárkoordinátás helyettesítést alkalmazunk.



36. ábra

Ezek után

$$F = 4 \iint\limits_{(T)} \frac{4}{\sqrt{4^2 - \varrho^2}} \varrho \, d\varrho \, d\varphi,$$

$$F = -8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{\varrho_1 = 0}^{\varrho_2 = 4\cos\varphi} \frac{1}{\sqrt{4^2 - \varrho^2}} (-2\varrho) \, d\varrho \right\} d\varphi,$$

$$F = -8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\sqrt{4^2 - \varrho^2} \right]_0^{4\cos\varphi} \right\} d\varphi$$

$$F = -16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{4^2 - 4^2\cos^2\varphi} - 4 \right] d\varphi = -64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi - 1) \, d\varphi$$

$$F = 64 \left[\varphi + \cos\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 64 \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right].$$

19. Felületi pontok osztályozása

19.01. A felület vektoregyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(a + b\cos u)\cos v + \underline{j}(a + b\cos u)\sin v +$$
$$+ \underline{k}\, b\sin u, \qquad a > b.$$

A parciális deriváltak

$$\underline{r}_u(u,v) = -\underline{i}\, b\sin u\cos v - \underline{j}\, b\sin u\sin v + \underline{k}\, b\cos u,$$
$$\underline{r}_v(u,v) = -\underline{i}(a + b\cos u)\sin v + \underline{j}\,(a + b\cos u)\cos v,$$
$$\underline{r}_{uu}(u,v) = -\underline{i}\, b\cos u\cos v - \underline{j}\, b\cos u\sin v - \underline{k}\, b\sin u,$$
$$\underline{r}_{uv}(u,v) = -\underline{i}\, b\sin u\sin v - \underline{j}\, b\sin u\cos v,$$
$$\underline{r}_{vv}(u,v) = -\underline{i}(a + b\cos u)\cos v - \underline{j}\,(a + b\cos u)\sin v.$$

A másodrendű főmennyiségek számítása

$$L' = \begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -b\sin u\sin v & b\sin u \\ -(a + b\cos u)\cos v & (a + b\cos u)\sin u & 0 \\ -b\cos u\cos v & -b\cos u\sin v & -b\sin u \end{vmatrix} =$$

$$= b\cos u(ab\cos u + b^2\cos^2 u) - b\sin u(-ab\sin u -$$
$$- b^2\sin u\cos u) =$$
$$= ab^2 + b^3\cos u = b^2(a + b\cos u).$$

$$M' = \begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -b\sin u\sin v & b\cos u \\ -(a + b\cos u)\sin v & (a + b\cos u)\cos v & 0 \\ -b\sin u\sin v & -b\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$N' = \begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -b\sin u\sin v & b\cos u \\ -(a + b\cos u)\sin v & (a + b\cos u)\cos v & 0 \\ -(a + b\cos u)\cos v & -(a+b\cos u)\sin v & 0 \end{vmatrix}$$

$N' = b\ \cos u(a + b\cos u)^2.$

$$L'N' - (M')^2 = b^3 \cos u(a + b\cos u)^3.$$

Először a parbolikus pontokat határozzuk meg, úgyis ezek választják el az elliptikus pontokat a hiperbolikus pontoktól. A parabolikus pontok azok, amelyekre

$$L'N' - (N')^2 = b\cos u\ (a + b\cos u)^3 = 0.$$

Minthogy az $a > b$ feltétel miatt $(a + b\cos u)^3 > 0$, azért csak akkor állhat fenn, ha $\cos u = 0$ azaz $u = \pm \frac{\pi}{2}$. Tehát a parabolikus pontok az $u = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ vonalak. Az előbbiek alapján ($a > b$ feltétel miatt) az $L'N' - (M')^2$ előjele megegyezik $\cos u$ előjelével. Ez azt jelenti, hogy ha $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ akkor a pont elliptikus, ha $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$, akkor pedig hiperbolikus.

19.02. Esetünkben a felület egyenlete:

$$3z + 3xz - yz + x + y = 0.$$

Számítjuk a parciális deriváltakat

$$3z_x + 3z + 3xz_x - yz_x + 1 = 0,$$

$$3z_y + 3xz_y - z - yz_y + 1 = 0,$$

$$z_x = \frac{1 + 3z}{3 + 3x - y}, \qquad z_x(0,0) = -\frac{1}{3} = p,$$

$$z_y = \frac{z - 1}{3 + 3x - y}, \qquad z_y(0,0) = -\frac{1}{3} = q,$$

$$z_{xx} = -\frac{3z'_x\ (3 + 3x - y) - (1 + 3z)\ 3}{(3 + 3x - y)^2},$$

$$z_{xx}(0,0) = \frac{2}{3} = r,$$

$$z_{xy} = -\frac{3z_y\ (3 + 3x - y) - (1 + 3z)(-1)}{(3 + 3x - y)^2},$$

$$z_{xy}(0,0) = \frac{2}{9} = 3,$$

$$z_{yy} = \frac{3z_y\ (3 + 3x - y) - (z - 1)(-1)}{(3 + 3x - y)^2},$$

$$z_{yy}(0,0) = -\frac{2}{9} = t.$$

$$rt - s^2 = -\frac{4}{27} - \frac{4}{81} < 0,$$

tehát a pont hiperbolikus.

19.03. Számítjuk a $z = x^2 - y^2$ függvény deriváltjait

$$z_x(x,y) = 2x, \quad z_y(x,y) = -2y$$

$$z_{xx}(x,y) = 2, \qquad z_{xy}(x,y) = 0, \qquad z_{yy}(x,y) = -2,$$

$$r(x,y)\ t(x,y) - (s(x,y))^2 = 2 \cdot (-2) - (0)^2 = -4 < 0$$

minden pontban, tehát a felület minden pontja hiperbolikus pont. Emlékeztetünk arra, hogy a tetszőleges felületet leíró $f(x,y)$ függvényre fennáll, hogy $f_{xy}(0,0) = 0$, ha a koordináta rendszer origója pontja a felületnek, az x,y sík az ezen ponthoz tartozó érintősík, az x tengely az egyik, az y tengely a másik főmetszet síkjában van. Az is nyilvánvaló, hogy ilyen koordinátarendszer esetén még az $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$ egyenlőségek is fennállnak.

Mindezeket figyelembe véve az origó (érintési pont) kicsiny környezetében a felület egyenlete:

$$z = f(x,y) \approx f_{xx}(0,0)x^2 + f_{yy}(0,0)y^2.$$

Ezen közelítés az $f(x,y)$ másodfokú Taylor-polinomja. Ez a közelítés azt jelenti, hogy tetszőleges felület tetszőleges pontjának kicsiny környezetében elliptikus ill. hiperbolikus paraboloiddal közelíthető attól függően, hogy $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ pozitív, ill. negatív, az $f_{xx}(0,0)\ f_{yy}(0,0) = 0$ esetben parabolikus hengerrel. Íly módon a felületi pontok osztályozásának (a

Dupin indikatrix mellett) egy másik értelmezéséhez jutottunk. Az is nyilvánvaló, hogy a közelítő felület $z = z_o$ metszésvonalai ellipszisek, hiperbolák, ill. egyenesek.

VEKTORANALÍZIS

1. Skalár-vektorfüggvények (skalármező)

1.01. Ismeretes, hogy az $u = u(\underline{r}) = u(x,y,z)$ skalár-vektorfüggvény szintfelületeit azon pontok összessége alkotja, amelyekhez az $u = u(x,y,z)$ skalár-vektorfüggvény ill. skalármező ugyanazon értékeket rendeli, tehát az

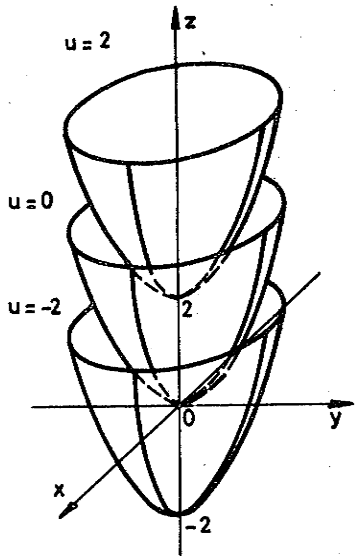
$$u = z - x^2 - y^2$$

skalármező szintfelületeinek egyenlete:

$$u_o = z - x^2 - y^2,$$

$$z = x^2 + y^2 + u_o.$$

Ezen felületek a z tengellyel párhuzamosan eltolt forgás paraboloidok (forgástengely a z tengely). Az alábbi ábrán az $u_o = -2$, $u_o = 2$ szintfelületek láthatók.



37. ábra

1.02. Az $u = y^2 - y - z$ skalármező $u = -2$ szintfelületének egyenlete:

$$z = x^2 - y + 2.$$

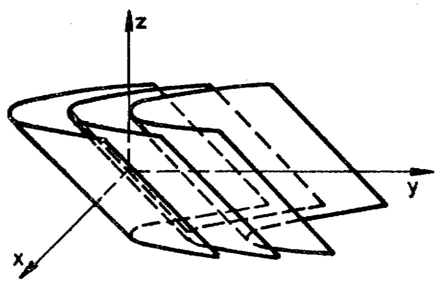
Az $u = x^2 - y - z$ skalármező $u = 0$ szintfelületének egyenlete:

$$z = x^2 - y.$$

Az $u = x^2 - y - z$ skalármező $u = 2$ szintfelületének egyenlete:

$$z = x^2 - y - 2.$$

Ezen felületeket az alábbi ábra szemlélteti:



38. ábra

1.03. Az $u = u(r) = r^2 = (\underline{i}\ x + \underline{j}\ y + \underline{k}\ z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ skalármező szintfelületei az

$$u_o = \underline{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (u_o > 0)$$

origó centrumu $\sqrt{u_o}$ sugaru gömbfelületek.

1.04. A szintfelületek egyenlete:

$$xyz = C^2.$$

1.05. A szintfelületek egyenlete:

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = C.$$

2. Gradiens, iránymenti derivált

2.01. A jegyzet elméleti részében szerepel, hogy az

$$u = u(\underline{r}) = u(x,y,z)$$

skalármező gradiensét (ez vektor) a

$$\operatorname{grad} u(\underline{r}) = \operatorname{grad} u(x,y,z) = \underline{i}\,\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + \underline{j}\,\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \underline{k}\,\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}$$

formula alapján határozhatjuk meg tetszőleges pontban. Megjegyzendő, hogy ez nem más, mint a

$$\underline{\nabla} = \underline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

utasításvektornak az u(x,y,z) skalárral való szorzata

$$\operatorname{grad} u(x,y,z) = \underline{\nabla}\, u(x,y,z).$$

Az elmondottaknak megfelelőn

$$\operatorname{grad} \underline{r}^2 = \operatorname{grad} (x^2 + y^2 + z^2) = \underline{\nabla}\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\operatorname{grad} \underline{r}^2 = \underline{i}\,2x + \underline{j}\,2y + \underline{k}\,2z = 2\underline{r}.$$

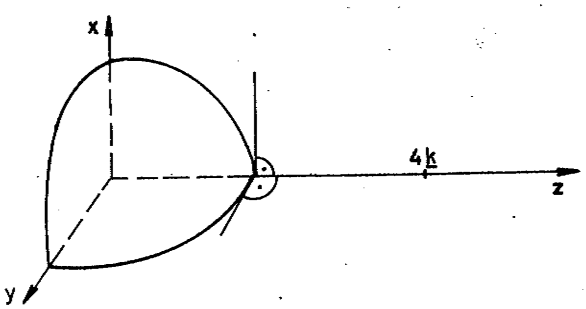
Ez a vektor minden pontban merőleges a szintfelületre (esetünkben a szintfelületek origó középpontú körök), abszolút értéke $2|\underline{r}|$, értelme pedig olyan, hogy a nagyobb skalárértékű pontok felé mutat. A

$$\operatorname{grad} \underline{r}^2 = \operatorname{grad} (x^2 + y^2 + z^2) = 2\,\underline{r}$$

vektornak a P(0, 0, 2) ponthoz tartozó értéke

$$(\operatorname{grad} \underline{r})_{P_0} = (2\,\underline{r})_{P_0} = 4\,\underline{k}.$$

Ezen gradiens-vektor és a szintfelület kapcsolatát az alábbi ábra szemlélteti (39. ábra).



39. ábra

2.02. Mint ismeretes, a szintfelület adott pontban érintő sík normálvektora az érintési ponthoz tartozó gradiensvektor, tehát

$$u(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{2(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{2z}{2(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2},$$

s így a sík normálvektora tetszőleges pontban

$$\underline{n} = \text{grad } u = \underline{i} \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} + \underline{j} \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} +$$

$$+ \underline{k} \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Ennek a $P_0(0, 1, 3)$ ponthoz tartozó értéke

$$\underline{n} = \underline{j} \frac{1}{\sqrt{10}} + \underline{k} \frac{3}{\sqrt{10}} \quad || \quad \underline{j} + \underline{k} \, 3.$$

Az érintősík egyenlete

$$y - 1 + 3(z - 3) = 0.$$

2.03. Az $y = y(x(t))$ függvény derivált függvénye a $\frac{dy}{dx} \frac{dx(t)}{dt}$, s hasonlóan az

$$u = u(x(t), y(t), z(t))$$

függvény derivált függvénye a

$$\frac{du}{dt} = u_x \cdot \dot{x} + u_y \dot{y} + u_z \cdot \dot{z} = (\text{gradu}) \cdot \dot{\underline{r}} ,$$

azaz a gradu vektornak és a $\dot{\underline{r}} = \underline{i} \, \dot{x}(t) + \underline{j} \, \dot{y}(t) + \underline{k} \, \dot{z}(t)$ vektornak a skaláris szorzata. Ebből az

$$x(t) = x + (\cos\alpha)t, \qquad y(t) = y + (\cos\beta)t,$$
$$z(t) = z + (\cos\gamma)t$$

speciális esetben kapjuk a

$$\underline{a}^o = \underline{i}\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma$$
$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$$

iránymenti deriváltat. Tehát az $\underline{a}^o$ vektor által meghatározott iránymenti derivált:

$$(\text{grad}u)\cdot(\underline{i}\cos\alpha + \underline{j}\cos\beta + k\cos\gamma) = (\text{grad}u)\frac{a}{|\underline{a}|}.$$

Esetünkben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 - 2e^x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3xy^2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \cos z.$$

Ezen deriváltak értékei az $\underline{r}_o = 2\underline{j} + \underline{k}\pi$ pontban

$$\frac{\partial u(\underline{r}_o)}{\partial x} = 8 - 2 = 6, \quad \frac{\partial u(\underline{r}_o)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u(\underline{r}_o)}{\partial z} = -1.$$

A $\underline{a}$ vektor abszolút értéke:

$$|\underline{a}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$$

Tehát $\underline{a}$ irányban vett derivált a következő:

$$\frac{a}{|\underline{a}|}(\text{grad } u) = \left(\frac{3}{13}\underline{i} + \frac{4}{13}\underline{j} + \frac{12}{13}\underline{k}\right)(6\,\underline{i} - \underline{k}) = \frac{6}{13}.$$

Az iránymenti derivált

$$\frac{a}{|\underline{a}|}\,\text{grad}u$$

képletéből kiolvasható, hogy egy pontban ez akkor lesz maximális, ha $\underline{a} \,||\, \text{grad}u$.

2.04. $\text{grad}u = 3x^2y^2z\,\underline{i} + 2x^3yz\,\underline{j} + x^3y^2k.$

2.05. $$\operatorname{grad}u = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}.$$

2.06. $$\operatorname{grad}u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}\,\underline{i} + \sqrt{\frac{xz}{y}}\,\underline{j} + \sqrt{\frac{xy}{z}}\,\underline{k}\right).$$

2.07. $$\operatorname{grad}u = e^x(y + e^4)\underline{i} + e^x\underline{j} + 3z^2\underline{k}.$$

2.08. $$\operatorname{grad}u = 2xz\underline{i} - 2yz\underline{j} + (x^2 - y^2 + 2z)\underline{k}.$$

2.09. $$\operatorname{grad}u = (2xyz - z^2)\underline{i} + x^2z\underline{j} + (x^2y - 2xz)\underline{k}.$$

2.10. A gradiens vektor tetszőleges pontban

$$\operatorname{grad}u = \underline{i}\,2x + \underline{j}\,\frac{y}{2} + \underline{k}\,\frac{2}{9}\,z.$$

Ennek az $\underline{r}_o = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$ ponthoz tartozó értéke

$$\operatorname{grad}u(\underline{r}_o) = 2\,\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}\,\frac{2}{3}.$$

2.11. $$\operatorname{grad}u(\underline{r}_o) = \frac{1}{\sqrt{26}}\,(3\,\underline{i} - 4\,\underline{j} + \underline{k}).$$

2.12. $$\operatorname{grad}u(\underline{r}_o) = -\,2\underline{i} + 4\underline{j} - k.$$

2.13. $$\operatorname{grad}u(\underline{r}_o) = 3{,}07\,\underline{i} + 1{,}38\,\underline{j} + 1{,}77\,\underline{k}.$$

2.14. Az $u = \sin^2 x - y^2 - z$ skalár-vektorfüggvény gradiense tetszőleges pontban

$$\operatorname{grad}u = \underline{i}\,2\sin x\cos x - 2y\,\underline{j} - \underline{k}$$

Az $u = 0$ felület $x = \frac{3\pi}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ pontjához tartozó z érték:

$$\sin^2\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} - z = 0, \quad z = \frac{1}{4},$$

s így az érintési pont $P_o\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

A normálvektor ezen pontban

$$\operatorname{grad}u\,(\underline{r}_o) = -\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}.$$

Végül a sík egyenlete:

$$\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) + z - \frac{1}{4} = 0.$$

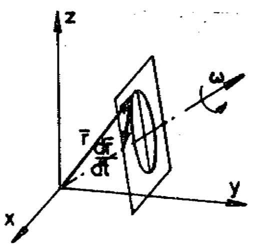
2.15. A normálvektor: $\underline{n} = 2\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{k}$

2.16. $$\sqrt{\frac{7}{5}}\,.$$

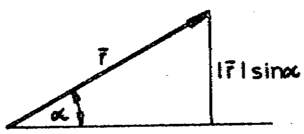
2.17. $$-\frac{108}{\sqrt{38}}\,.$$

3. Vektor-vektorfüggvények (vektormezők)

3.01. A koordinátarendszert oly módon vegyük fel, hogy az origó legyen rajta a forgástengelyen.
A szögsebességeket egy olyan $\underline{\omega}$ vektorral jellemezhetjük, amelynek iránya megegyezik a forgástengely irányával, nagysága egyenlő a szögsebesség abszolútértékével, értelme pedig olyan, hogy a forgásiránnyal jobbcsavarmenetet alkot (40. ábra).



40. ábra



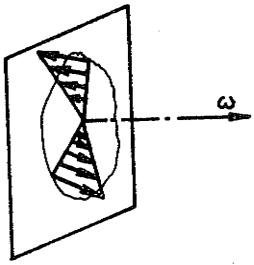
41. ábra

A forgó merevtest valamely P pontjának helyvektora $\underline{r}$. A P pont körpályán mozog, a mozgás sebessége $\frac{d\underline{r}}{dt}$, a körpálya érintővektora. A sebességvektorról a következőket állapíthatjuk meg:
a) abszolútértékét megkapjuk, ha a P pontnak a forgástengelytől mért merőleges távolságát megszorozzuk a szögsebesség abszolútértékével.

$$\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right| = |\underline{\omega}|\,|\underline{r}|\,\sin\alpha\,,$$

b) iránya merőleges a forgástengelyre (tehát $\underline{\omega}$ -ra is), valamint az $\underline{r}$ vektorra,

c) értelme olyan hogy a forgásirány $\underline{\omega}$-val jobbcsavart alkosson (42. ábra)



42. ábra

Ezen három kritérium alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

Ha az $\underline{\omega}$ vektornak a felvett rendszerre vonatkozó koordinátái ω_x, ω_y, ω_z, akkor

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Az $\underline{r}$-re kapott képletből kiolvasható, hogy a sebesség vektor abszolút értéke a forgó pontnak a forgástengelytől mért távolságával lineárisan nő.

3.02. A $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektor-vektorfüggvény a tér minden pontjához a helyvektorát rendeli.

3.03. A $\underline{v} = \underline{a} \times \underline{r}$ függvény a tér tetszőleges $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + \underline{k}z$ pontjához a

$$\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-2z - 5y)\underline{i} + (-3z + 5x)\underline{j} + + \underline{k}(3y + 2x)$$

vektort, a $\underline{v} = \underline{r} \times \underline{a}$ pedig ennek ellentettjét rendeli hozzá.

3.04. A $\underline{v} = (\underline{r} + \underline{a}) \times \underline{r}$ vektor-vektorfüggvény a tér tetszőleges pontjához a

$$\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x + 1 & y + 1 & z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

vektort rendeli hozzá.

3.05. Kiszámítjuk az $\underline{r} \times \underline{a}$ vektorális szorzatot

$$\underline{r} \times \underline{a} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y\,\underline{i} + (z - x)\underline{j} - y\,\underline{k}.$$

Ennek segítségével pedig számíthatjuk a tetszőleges $\underline{r}$ helyvektoru ponthoz tartozó $\underline{v}$ vektort.

$$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ y & z - x & -y \\ x & y & z \end{vmatrix} = \underline{i}(z - x)z - \underline{j}(yz - xy) + + \underline{k}(x^2 + y^2 - xz).$$

4. Vektormező görbementi és felületi integrálja

4.01. Mint ismeretes a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező adott $\underline{r} = \underline{r}(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ görbeszakaszra vonatkozó ún. görbe menti integrálját az

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{v}\,(\underline{r}(t))\,\dot{\underline{r}}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} [X\,(x(t),\ y(t),\ z(t))\underline{i}\ +$$

$$+\ Y(x(t),\ y(t),\ z(t))\underline{j}\ +\ Z(x(t),\ y(t),\ z(t))\ \underline{k}]$$

$$(\dot{x}(t)\underline{i}\ +\ \dot{y}(t)\underline{j}\ +\ \dot{z}(t)\ \underline{k})\ dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [X\,.\,\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}]dt$$

határozott integrállal számítjuk ki.

Ennek megfelelően esetünkben a végzett munka

$$L = \int_{(9)} \underline{v}\ d\underline{r} = \int_{t_1=0}^{t_2=4} \underline{v}(\underline{r}(t)\ \dot{\underline{r}}(t)\ dt$$

$$L = \int_{t_1=0}^{t_2=4} [\underline{i}\ \frac{x(t)}{(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{3/2}} +$$

$$+\ \underline{j}\ \frac{y(t)}{(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{3/2}} +$$

$$+\ \underline{k}\ \frac{z(t)}{(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{3/2}}]\ (\underline{i}\dot{x}(t)\ +\ \underline{j}\ \dot{y}(t)\ +$$

$$+\ \underline{k}\ \dot{z}(t))\ dt = \int_{t_1=0}^{t_2=4} \frac{1}{(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{3/2}}(x(t)\dot{x}(t)\ +$$

$$+\ y(t)\dot{y}(t)\ +\ z(t)\ \dot{z}(t))\ dt.$$

Mivel az $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$ görbe mentén

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2,$$

$$x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{z}(t) + z(t)\dot{z}(t) = -\cos t \sin t +$$

$$+ \sin t \cos t + t = t,$$

azért

$$L = -C\int_0^4 \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}\,dt = -C\int_0^4 (1+t^2)^{3/2} t\,dt =$$

$$= -C\left[\frac{(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right]_0^4 = C\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - 1\right).$$

Ez az erőtér által végzett munka. Az erőtér ellenében végzett munka ennek (-1)-szerese.

4.02. Az erőtér által végzett munka

$$L = \int_{(g)} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^3 \Big\{2(3t^2 + 6t) + 6t^2 - 3t +$$

$$+ 3(2t^2 + 3t - 2)\Big\}\,dt =$$

$$= \int_0^3 (6t^2 + 12\,t + 6t^2 - 3t + 6t^2 + 9t - 6)dt =$$

$$= \int_0^3 (18t^2 + 18t - 6)\,dt =$$

$$= \Big[6\,t^3 + 9t^2 - 6t\Big]_0^3 = 162 + 81 - 18 = 225.$$

Ennek (-1)-szerese a keresett munka

4.03. A keresett munka

$$L = \int_{(g_1)} \underline{v}\, d\underline{r} + \int_{(g_2)} \underline{v}\, d\underline{r} + \int_{(g_3)} \underline{v}\, d\underline{r}$$

A g_1 görbe mentén válasszuk paraméternek az x-et (y és z ugyanis állandók).
A g_1 görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x, \quad y = 2, \quad z = 0,$$

A határok: $-1 \leqq x \leqq 5$.

$$\frac{dx(t)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0.$$

Ezek után

$$\int_{(g_1)} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{-1}^{5} y\, z\, d\, x = 0, \quad \text{mert} \quad z = 0.$$

A g_2 görbe paraméteres egyenletrendszere

$$x = 5, \quad y = y, \quad z = 0.$$

A határok: $2 \leqq y \leqq 5$.

$$\frac{dx}{dy} = 0, \quad \frac{dy}{dy} = 1, \quad \frac{dz}{dy} = 0.$$

Ezek segítségével a g_2 görbére vonatkozó integrál:

$$\int_{(g_2)} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{2}^{5} x\, z\, d\, y = 0.$$

Végül a g_3 görbe paraméteres egyenletrendszere (itt z a paraméter):

$$x = 5, \quad y = 5, \quad z = z$$

A határok: $0 \leqq z \leqq 9$.

$$\frac{dx}{dz} = 0, \quad \frac{dy}{dz} = 0, \quad \frac{dz}{dz} = 1$$

$$\int_{(g_3)} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_0^9 x\, y\, d\, z = \int_0^9 25\, dz = 25 \Big[z \Big]_0^9 = 225.$$

A két eredmény azonos, azaz a két pont között végzett munka független az úttól, csak a végpontoktól függ.

4.04. A kör paraméteres egyenletrendszere

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0.$$

A határok: $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

A deriváltak:

$$\dot{x}(t) = -\sin t, \quad \dot{y}(t) = \cos t, \quad \dot{z}(t) = 0.$$

A keresett integrál:

$$\int_{(9)} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[(\underline{i}\,(-y(t)) + \underline{j}\, x(t) + 0\, \underline{k} \Big] \Big[\underline{i}\, x(t) + $$

$$+ \underline{j}\dot{y}(t) + \underline{k}\dot{z}(t) \Big] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t \Big] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Az egyenes egyenlete:

$$x + y = 1.$$

Ha az y-t választjuk paraméternek, akkor

$$x = 1 - t, \qquad y = t.$$

A határok megválasztásához megnézzük, hogy milyen értéket vesz fel y az A és a B pontban. Mivel A-nál y = 0 és B-nél y = 1, azért $0 \leq t \leq 1$.
A deriváltak:

$$\dot{x}(t) = -1, \qquad \dot{y}(t) = 1.$$

Tehát a síkbeli vonalintegrál:

$$\int_{(g)} \underline{v}(r)\, d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} (X \cdot \dot{x} + Y\dot{y})\, dt = \int_0^1 \Big\{ (-t)(-1) +$$

$$+ (1-t)(1) \Big\} dt = \int_0^1 dt = 1.$$

4.05. $L = -\frac{71}{6}$.

4.06. $L = 861{,}3$.

4.07. $L_1 = \frac{64\pi^3}{3}$, $L_2 = 8\pi + \frac{64\pi^3}{3}$.

4.08. $L = \frac{1}{8}$.

4.09. $L = \frac{75}{8}$.

4.10. Mint ismeretes, a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r}(u,v)) = X(u,v)\,\underline{i} + Y(u,v)\,\underline{j} + Z(u,v)\,\underline{k}$$

vektormezőnek az F felületdarabra vonatkozó felületi integrálját az alábbi egyenlőség alapján vezethetjük vissza egyszerű kettős integrálra:

$$\iint_{(F)} \underline{v}\, d\underline{F} = \iint_{(F)} \underline{v}(\underline{r}(u,v))\; r_u(u,v) \times r_v(u,v)\, du\, dv =$$

$$= \int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} \left[\underline{i}X(u,v) + \underline{j}Y(u,v) + \underline{k}\,Z(u,v)\right] \cdot$$

$$\cdot\ \underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v)\,du\,dv.$$

Ugyanis a vektormezőnek csak azon értékei jönnek számításba, amelyeket a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ függvény a felületi pontokhoz rendel, vagyis a $\underline{v}(\underline{r}(u,v))$ értékek. A feladatot megoldhatjuk oly módon, hogy az integráljel mögötti vegyes szorzatot számítjuk, s az így kapott kétváltozós függvényt integráljuk, és oly módon is, hogy először az $\underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v)$ vektoriális szorzatot határozzuk meg és azután végezzük el a skaláris szorzást.
A feladat megoldásához kiszámítjuk az $\underline{r}_u(u,v), \underline{r}_v(u,v)$ vektorok komponenseit, ill. koordinátáit.
A felület vektoregyenlete:

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(3 + \cos u)\cos v + \underline{j}(3 + \cos u)\sin v + \underline{k}\,\sin u.$$

A deriváltak:

$$\underline{r}_u(u,v) = -\underline{i}\,\sin u\,\cos v - \underline{j}\,\sin u\,\sin v + \underline{k}\,\cos u,$$

$$\underline{r}_v(u,v) = -\underline{i}(3 + \cos u)\sin v + \underline{j}(3 + \cos u)\cos v.$$

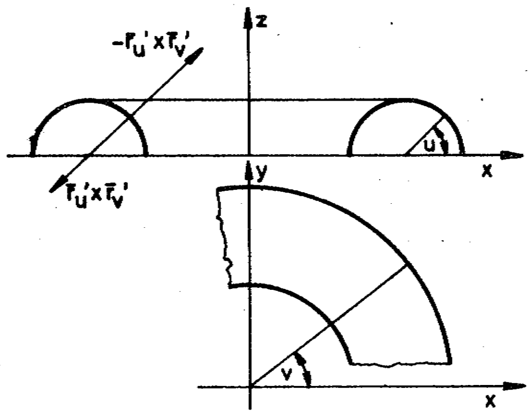
Ezek segítségével számítható a felületi normális a tetszőleges u, v paraméterű pontban.

$$\underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin u\cos v & -\sin u\sin v & \cos u \\ -(3+\cos u)\sin v & (3+\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\underline{i}(3 + \cos u)\cos u\,\cos v - \underline{j}\,(3 + \cos u)\cos u\,\sin v -$$

$$- \underline{k}\,(3 + \cos u)\,\sin u.$$

Mivel k együtthatója negatív, a felfelé mutató feleti normális a $-(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)$ lesz (43. ábra).



43. ábra

Az xy sík feletti felületdarabnál ezen ábrából láthatóan a paraméterek a következő határok között változnak:

$$0 \leq u \leq \pi, \qquad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Mivel

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r}(u,v) = \underline{i}(3 + \cos u)\cos v +$$

$$+ \underline{j}(3 + \cos u)\sin v + \underline{k}\sin u,$$

azért a felületi integrál a következő:

$$\iint_{(F)} \underline{v}\, d\,\underline{F} = \int_{v=0}^{2\pi} \left\{ \int_{u=0}^{\pi} \left[(3 + \cos u)^2 \cos u \cos^2 v + \right.\right.$$

$$+ (3 + \cos u)^2 \cos u \sin^2 v +$$

$$\left.\left. + (3 + \cos u)\sin u \right] du \right\} dv =$$

$$= \int_{v=0}^{2\pi} \left\{ \int_{u=0}^{\pi} (3 + 10\cos u + 3\cos^2 u)\, du \right\} dv =$$

$$= \int_{v=0}^{2\pi} \left\{ \int_{u=0}^{\pi} (\frac{9}{2} + 10 \cos u + \frac{3}{2} \cos 2u)\, du \right\} dv =$$

$$= \int_{v=0}^{2\pi} \left\{ \left[\frac{9}{2} u + 10 \sin u + \frac{3}{4} \sin 2u \right]_0^{\pi} \right\} dv =$$

$$= \int_{v=0}^{2\pi} \frac{9}{2} \pi \, dv = \frac{9}{2} \pi \left[v \right]_0^{2\pi} = 9\pi.$$

4.11. Amint azt az elméleti részben láttuk, a $z = f(x,y)$ alakban adott felület $(x,y, f(x,y))$ pontjához tartozó felületi normális:

$$\underline{n} = - p\underline{i} - q\underline{j} + \underline{k} = - f_x(x,y)\, \underline{i} - f_y(x,y)\, \underline{j} + \underline{k}.$$

Esetünkben a felület egyenlete $z = x^2 - y^2$, a parciális deriváltak pedig az alábbiak:

$$f_x(x,y) = 2x, \qquad f_y(x,y) = - 2y,$$

tehát a felületi normális

$$\underline{r}_x(x,y) \times \underline{r}_y(x,y) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & fx \\ 0 & 1 & fy \end{vmatrix} = -2x\, \underline{i} + 2y\, \underline{j} + \underline{k}.$$

A vektormező által a tetszőleges felületi ponthoz rendelt vektor pedig a következő:

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r}(x,y)) = X(x,y)\underline{i} + Y(x,y)\underline{j} + Z(x,y)\underline{k} =$$

$$= - xy\underline{i} + xy\underline{j} + (x^2 - y^2)\underline{k}.$$

A felületi integrál tehát a következő:

$$\iint_{(F)} \underline{v}(\underline{r})d\underline{F} = \int_{y=-3}^{3} \left\{ \int_{x=-2}^{2} \left[- \underline{i}\, xy + \underline{j}\, xy + \underline{k}(x^2 - y^2) \right] \right.$$

$$\left. (-\underline{i}\, 2x + \underline{j}\, 2y + \underline{k})dx \right\} dy =$$

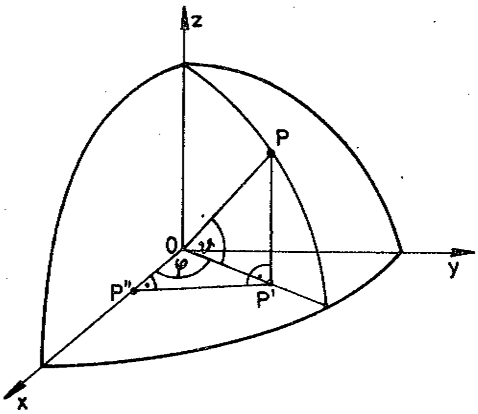
$$= \int_{y=-3}^{3} \left\{ \int_{x=-2}^{2} (2x^2y + 2xy^2 + x^2 - y^2)\, dx \right\} dy =$$

$$= \int_{y=-3}^{3} \left\{ \left[\frac{2}{3} x^3y + x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 - xy^2 \right]_{-2}^{2} \right\} dy =$$

$$= \int_{y=-3}^{3} \left(\frac{16}{3} + \frac{32}{3} y - 4 y^2 \right) dy =$$

$$= \left[\frac{16}{3} y + \frac{16}{3} y^2 - \frac{4}{3}y^3 \right]_{-3}^{3} = -40.$$

4.12. A gömbfelület paraméteres egyenletrendszere (44. ábra).



44. ábra

$$x = \cos\vartheta \cos\varphi, \qquad y = \cos\vartheta \sin\varphi, \qquad z = \sin\vartheta.$$

Ugyanis az ábrából látható, hogy

$$\overline{pp'} = \sin\vartheta, \qquad \overline{op'} = \cos\vartheta,$$

$$x = \overline{OP''} = \overline{OP'} \cos\varphi = \cos\vartheta \cos\varphi,$$

$$y = \overline{P'P''} = \overline{OP'} \sin\varphi = \cos\vartheta \sin\varphi,$$

s így

$\underline{r}(\vartheta,\varphi) = \underline{i}\cos\vartheta\cos\varphi + \underline{j}\cos\vartheta\sin\varphi + \underline{k}\sin\vartheta.$

Ennek parciális deriváltjai (most ϑ és φ a paraméter):

$$\underline{r}_\vartheta(\vartheta,\varphi) = -\underline{i}\sin\vartheta\cos\varphi - \underline{j}\sin\vartheta\sin\varphi + \underline{k}\cos\vartheta,$$

$$\underline{r}_\varphi(\vartheta,\varphi) = -i\cos\vartheta\sin\varphi + \underline{j}\cos\vartheta\cos\varphi.$$

Ezek segítségével számíthatjuk a felületi normálist

$$\underline{r}_\vartheta(\vartheta,\varphi) \times \underline{r}_\varphi(\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ -\cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\underline{i}\cos^2\vartheta\cos\varphi - \underline{j}\cos^2\vartheta\sin\varphi - \underline{k}\sin\vartheta\cos\varphi.$$

A felső félgömbön $0 \lneqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$, tehát $\sin\vartheta\cos\varphi \geqq 0$,

$\underline{r}_\vartheta \times \underline{r}_\varphi$ vektornak a $\underline{k}$ irányú komponense mindig negatív. Mivel a feltétel szerint a $\underline{k}$ irányú komponens előjelének pozitívnak kell lennie, a kiszámított felületi normális előjelét meg kell változtatni:

$$\underline{n} = \underline{i}\cos^2\vartheta\cos\varphi + \underline{j}\cos^2\vartheta\sin\varphi + \underline{k}\sin\vartheta\cos\varphi.$$

Ezek után a felületi integrál

$$\iint_{(F)} \underline{v}\, d\,\underline{F} = \iint_{(F)} \Big[\underline{i}\cos\vartheta\sin\varphi + \underline{j}\sin\vartheta +$$

$$+ \underline{k}\cos\vartheta\cos\varphi\Big]\underline{r}_\vartheta \times \underline{r}_\varphi\, d\vartheta d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi}\left\{\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi +\right.$$

$$\left. + \cos^2\vartheta\sin\varphi\sin\varphi)\, d\vartheta\right\} d\varphi.$$

Mivel

$$\int \cos^3\vartheta\, d\vartheta = \int (1 - \sin^2\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta = \sin\vartheta - \frac{\sin^3\vartheta}{3}$$

és

$$\int \cos^2\vartheta\, \sin\vartheta\, d\vartheta = -\frac{\cos^3\vartheta}{3},$$

azért

$$\iint_{(F)} \underline{v}\, d\underline{F} = \int_{\varphi=0}^{\pi} \left\{ \left[(\sin\vartheta - \frac{\sin^3\vartheta}{3})\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\cos^3\vartheta}{3}\sin\varphi - \frac{\cos^3\vartheta}{3}\cos\varphi \right]_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \right\} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left\{ (1 - \frac{1}{3})\cos\varphi\, \sin\varphi + \frac{1}{3}(\sin\varphi + \cos\varphi) \right\} d\varphi$$

$$= \left[(1 - \frac{1}{3})\frac{1}{2}\sin^2\varphi + \frac{1}{3}(-\cos\varphi + \sin\varphi) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}.$$

4.13. S körlap (felület) vektoregyenlete:

$$\underline{r}(\rho,\varphi) = \underline{i}\,\rho\cos\varphi + \underline{k}\,\rho\sin\varphi,$$

paraméteres egyenletrendszere pedig

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = 0, \qquad z = \rho\sin\varphi.$$

A paraméterek a $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ határok között változnak.
A parciális deriváltak:

$$\underline{r}_\rho(\rho,\varphi) = \underline{i}\cos\varphi + \underline{k}\sin\varphi,$$

$$\underline{r}_\varphi(\rho,\varphi) = -\underline{i}\,\rho\sin\varphi + \underline{k}\,\rho\cos\varphi.$$

$$\underline{r}_\varrho \times \underline{r}_\varphi = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi & 0 & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = -\underline{j}\varrho \,.$$

A felületi integrál tehát a következő:

$$\iint\limits_{(F)} \underline{v}\, d\underline{F} = \iint\limits_{(F)} \underline{v}\, \underline{r}_\varrho \times \underline{r}_\varphi \, d\varrho d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left\{ \int\limits_{\varrho=0}^{1} (-\varrho^2 \sin\varphi)\, \varrho \right\} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left\{ \left[-\frac{\varrho^3}{3} \sin\varphi \right]_0^1 \right\} d\varphi = -\frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2}{3} \,.$$

Ezek után számítjuk a másik körlapra vonatkozó felületi integrált. Ezen esetben a felületi normális a megadott értelmezés szerint $-\underline{k}$, a körlap vektoregyenlete pedig

$$\underline{r}(\varrho,\varphi) = \underline{i}\varrho\cos\varphi + \underline{j}\varrho\sin\varphi.$$

Ennek deriváltjai:

$$\underline{r}_\varrho(\varrho,\varphi) = \underline{i}\cos\varphi + \underline{j}\sin\varphi,$$

$$\underline{r}_\varphi(\varrho,\varphi) = -\underline{i}\varrho\sin\varphi + \underline{j}\varrho\cos\varphi.$$

Ezek segítségével a felületi normális:

$$\underline{r}_\varrho \times \underline{r}_\varphi = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \varrho\, \underline{k}.$$

A felületi integrál tehát a következő:

$$\iint\limits_{(F)} \underline{v}\, d\underline{F} = \iint\limits_{(F)} \underline{v}\, \underline{r}_\varrho \times \underline{r}_\varphi \, d\varrho d\varphi = \iint\limits_{(F)} \underline{v}\, \underline{k}\varrho \, d\varrho d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varrho=0}^{1} \left(\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} (-\varrho^2 \cos\varphi)\, d\varphi \right) d\varrho = 0.$$

Ugyanis
$$\int_0^{\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0.$$

4.14. $= 6\pi \ln 2.$

4.15. $= 64 \left(\frac{\pi}{3} \quad \frac{7}{9}\right).$

4.16. $= -24\pi.$

5. Vektormező divergenciája

5.01. A $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ vektortér- ill. mező divergenciája a nabla utasításvektornak és vektormezőnek a skaláris szorzata (skalár érték), azaz

$$\operatorname{div} \underline{v}(x,y,z) = \left(\underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(X(x,y,z)\underline{i} +$$
$$+ Y(x,y,z)\underline{j} + Z(x,y,z)\underline{k}) =$$
$$= \frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z}.$$

Esetünkben
$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v}(\underline{r}) = \left(\underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\underline{i}(y^3 + x^2) +$$
$$+ \underline{j}(12xy^2 - 3x) + \underline{k}\,xyz^2) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(y^3 + x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(12xy^2 - 3x) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2) =$$
$$= 2x + 24xy + 2xyz.$$

5.02. A $\underline{v} = \underline{i}(y^2 + z^2) + \underline{j}(z^2 + x^2) + \underline{k}(x^2 + y^2)$ vektormező divergenciája:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \left(\underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\underline{i}(y^2 + z^2) + \underline{j}(z^2 + x^2) +$$
$$+ \underline{k}(x^2 + y^2)) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2 + x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) = 0.$$

6. Vektormező rotációja

6.01. A vektormező a következő alakban is írható:

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(\omega_y z - \omega_z y) - \underline{j}(\omega_x z - \omega_z x) + \underline{k}\,(\omega_x y - \omega_y x)$$

Itt ω_x, ω_y, ω_z a szögsebesség vektor koordinátái. Ezen vektor-vektorfüggvény rotációja a

$$\underline{\nabla} = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

szimbolikus vektor segítségével a következő módon számítható ki:

$$\underline{\nabla} \times \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega y_x \end{vmatrix} =$$

$$= (\underline{i}\omega_x + \underline{j}\,\omega_y + \underline{k}\,\omega_z)2 = \text{rot}\underline{v}(\underline{r})$$

6.02. A $\underline{v}(\underline{r}) = (\underline{a} + \underline{r}) \times \underline{r}$ vekrormező az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$ esetben a következő:

$$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 + x & 1 + y & z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}\left[(1 + y)z - yz\right] - \underline{j}\left[(1 + x)z - zx\right] +$$
$$+ \underline{k}\left[(1 + x)y - (1 + y)\,x\right],$$

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}\,z - \underline{j}z + \underline{k}(y - x).$$

A vektormező tehát a tér tetszőleges pontjához a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}\ z - \underline{j}\ z + \underline{k}\ (y - x)$$

vektort rendeli hozzá.
Most pedig számítsuk ki ezen vektormezőnek a rotációját tetszőleges pontban.

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -z & y-x \end{vmatrix},$$

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(1 + 1) - \underline{j}(-1 - 1) + \underline{k}\ (0 - 0) = 2\underline{i} + 2\underline{j}.$$

6.03. Esetünkben

$$\underline{v}(\underline{r}) = x^2yz\underline{i} + xy^2z\underline{j} + \underline{k}\ xyz^2k.$$

Ennek rotációja:

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix},$$

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(xz^2 - xy^2) - \underline{j}(yz^2 - x^2y) + \underline{k}(y^2z - x^2z)$$

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}\ x(z^2 - y^2) + \underline{j}\ y(x^2 - z^2) + \underline{k}\ z(y^2 - x^2).$$

$$\text{div } \underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} x^2yz + \frac{\partial}{\partial y} xy^2z + \frac{\partial}{\partial z} xyz^2 = 6xyz.$$

6.04. Esetünkben

$$\underline{v}(\underline{r}) = 3x\ \underline{i} + xy\ \underline{j} + z\ \underline{k}.$$

Ennek divergenciája:

$$\text{div } \underline{v}(\underline{r}) = = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}(\underline{r}) = (\underline{i} \frac{\partial}{\partial x} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{k} + \frac{\partial}{\partial z}) \cdot$$

$$\cdot\ (\underline{i}\ 3x + \underline{j}\ xy + \underline{k}\ z),$$

$$\text{div } \underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3 + x + 1 =$$

$$= 4 + x.$$

Számítjuk a rotációját.

$$\mathrm{rot}\ \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & xy & z \end{vmatrix} = \underline{i}\ 0 - \underline{j}\ 0 + \underline{k}\ y = \underline{k}\ y.$$

$$[\mathrm{rot}\ \underline{v}]_{P_0} = \underline{k}.$$

6.05. Jelen esetben

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(x^2 - y^2) + \underline{j}(y^2 - z^2) + \underline{k}\,(z^2 - x^2).$$

Ennek divergenciája

$$\mathrm{div}\ \underline{v}(r) = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}(\underline{r}) =$$

$$= (\underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z})(\underline{i}(x^2 - y^2) +$$

$$+ \underline{j}(y^2 - z^2) + \underline{k}(z^2 - x^2) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - x^2),$$

$$\mathrm{div}\ \underline{v}(\underline{r}) = 2(x + y + z).$$

Számítjuk a rotációját

$$\mathrm{rot}\ \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & y^2 - z^2 & z^2 - x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\ 2z + \underline{j}\ 2x + \underline{k}\ 2y.$$

6.06. $\mathrm{div}\ \underline{v}(\underline{r}) = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\mathrm{rot}\ \underline{v}(\underline{r}) = 0.$

6.07. $\mathrm{div}\ \underline{v}(\underline{r}) = 2$, $\mathrm{rot}\ \underline{v}(\underline{r}) = \underline{j} + \underline{k}.$

6.08. $\mathrm{div}\ \underline{v}(\underline{r}) = \frac{11}{6}$, $\mathrm{rot}\underline{v}(\underline{r}) = \frac{2}{9}\underline{i} - 3\underline{j} + \frac{1}{4}\underline{k}$

6.09. $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = 6|\underline{r}|^3, \quad \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = 0.$

6.10.
$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = a \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = a \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \underline{k}.$$

6.11. $\operatorname{div} (\underline{v}(\underline{r}) = 3, \quad \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = -2(y + z)\underline{i} - 2x\underline{j} - \underline{k}.$

6.12. $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = ye^{xy} + ze^{xy} + xe^{xy}$

$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = -(ye^{yz}\underline{i} + ze^{zx}\underline{j} + xe^{xy}\underline{k}.$

6.13. $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = 2xyz(\cos x^2yz + \cos xy^2z + \cos xyz^2).$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = {} & (xz^2 \cos xyz^2 - xy \cos xy^2z)\underline{i} + \\ & + (x^2y \cos x^2yz - yz^2 \cos xyz^2)\underline{j} + \\ & + (y^2z \cos xy^2z - x^2z\cos x^2yz)\, \underline{k}.\end{aligned}$$

6.14. $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$

$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = -\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\underline{i} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)\underline{j} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \underline{k}.$$

6.15. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \underline{\nabla}\ \underline{\nabla} u = \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \underline{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \underline{k} \frac{\partial u}{\partial z}\right) =$

$$= \left(\underline{i} \frac{\partial}{\partial x} + \underline{j} \frac{\partial}{\partial y} + \underline{k} \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\underline{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \underline{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \underline{k} \frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u(\underline{r}) = \Delta u(x,y,z).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^x + e^z, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ye^x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x + z^3, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xe^z + 3yz^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = xe^z + 6yz.$$

Ezeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$\Delta u = \text{div grad } u = ye^x + xe^z + 6yz.$$

$$\Delta u_o = \text{div grad } u_o = 2 - 12 = -10.$$

6.16. $\text{div } \underline{v}(\underline{r}) = \underline{\nabla v}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2yx^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 - z^3) + $

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - xyz) =$$

$$= 3x^2 + 2xy + 2z - xy = 3x^2 + xy + 2z.$$

$$\text{grad div } \underline{v}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\,(\underline{\nabla}\,\underline{v}(\underline{r})) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + xy + 2z)\, i +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy + 2z)\underline{j} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 + xy + 2z)\underline{k}$$

$$\text{grad div } \underline{v}(\underline{r}) = (6x + y)\underline{i} + x\underline{j} + 2\,\underline{k}.$$

6.17. $\text{rot}(\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}(\underline{r}).$

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & e^{zx} & e^{xy} \end{vmatrix},$$

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}x\,(e^{xy} - e^{zx}) + \underline{j}y\,(e^{yz} - e^{xy}) +$$

$$+ \underline{k}z\,(e^{zx} - e^{yz}),$$

$$\underline{\nabla}\text{xrot}\underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(e^{xy}-e^{zx}) & y(e^{yz}-e^{xy}) & z(e^{zx}-e^{yz}) \end{vmatrix},$$

$$\underline{\nabla}\text{xrot}\underline{v}(\underline{r}) = -\underline{i}(z^2 + y^2)e^{yz} - \underline{j}(x^2 + z^2)e^{zx} -$$

$$- \underline{k}(y^2 + x^2)e^{xy}.$$

6.18. grad $\underline{r}^2$ = grad$(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\,\underline{i} + 2y\,\underline{j} + 2z\,\underline{k}$.

div grad $\underline{r}^2 = \underline{\nabla}\, 2\underline{r} = 2 + 2 + 2 = 6$.

6.19. 0.

6.20. $\frac{2}{|\underline{r}|}$

6.21. 0.

6.22. 0.

6.23. $\frac{2}{|\underline{r}|^3}$.

6.24. $\frac{2}{|\underline{r}|^4}$.

6.25. $\frac{1}{|\underline{r}|^2}$.

6.26. $\frac{e^{|\underline{r}|}}{|\underline{r}|}(2 + x + y + z)$.

6.27. $10\,\underline{r}$

6.28. 0

6.29. $(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2)e^{xyz}$.

6.30. $(2 - x^2y^2 - x^2y^2) \sin yz$.

7. Görbementi és felületi integrálok átalakítása

7.01. Az

$$I = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)dV$$

hármas inegrált alkalmasan megválasztott $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektorfüggvény segítségével felületi integrálra redukálhatjuk.
Tekintsük ugyanis a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}^2\ \underline{r} = \underbrace{x\underline{r}^2}_{X}\ i + \underbrace{y\underline{r}^2}_{Y}\ \underline{j} + \underbrace{z\underline{r}^2}_{Z}\ k$$

vektor-vektorfüggvényt, ahol

$$\underline{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Számítsuk ki a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\underline{r}^2 x) = \frac{\partial \underline{r}^2}{\partial x} x + \underline{r}^2 \frac{dx}{dx} = 2x^2 + \underline{r}^2,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(r^2 y) = \frac{\partial \underline{r}^2}{\partial y} y + \underline{r}^2 \frac{dy}{dy} = 2y^2 + \underline{r}^2,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(r^2 z) = \frac{\partial \underline{r}^2}{\partial z} z + r^2 \frac{dz}{dz} = 2z^2\ \underline{r}^2.$$

Ezek felhasználásával

$$\operatorname{div}\ (\underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3\ \underline{r}^2,$$

$$\operatorname{div}\ (\underline{v}(\underline{r}) = 5\ \underline{r}^2,$$

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\ (\underline{v}(r))\ dV = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(|\underline{r}^2|\underline{r})\ dV = 5 \iiint\limits_{(V)} \underline{r}^2\ dV =$$

$$= 5 \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\ dV.$$

Ez a gömb poláris nyomatékának az 5-szöröse. A Gauss-Osztrogradszkij tétel értelmében.

$$5\,I = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(|\underline{r}^2|\underline{r})\,dV = \oiint\limits_{(F)} |\underline{r}|^2\underline{r}\; d\,\underline{F}.$$

A $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ vektormező a tér minden pontjához a helyvektor irányával egyező irányú vektort rendel. Ezen vektor abszolút értéke a helyvektor abszolút értékének köbével egyenlő. Az origó centrumu R sugaru gömb kifelé mutató felületi normálisa minden pontban párhuzamos a helyvektor egységvektorával, tehát az $\underline{r}^2\underline{r}$ vektormezővel azonos irányú. A $\underline{v} = \underline{r}^2\underline{r}$ vektormező és az $\dfrac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$ felületi normális skaláris szorzatát képezve, a keresett felületi integrál:

$$5\,I = \oiint\limits_{(F)} \underline{r}^2\underline{r}\,\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\,dF = \oiint\limits_{(F)} |\underline{r}|^3\; d\,\underline{F}.$$

Az integrálást a R sugaru gömbfelületre képezzük. A helyvektor abszolut értéke a gömb felületén R, tehát $|\underline{r}| = R = \text{const.}$, s így

$$5\,I = \oiint\limits_{(F)} R^3\,dF = R^3 \oiint\limits_{(F)} dF.$$

Ezen egyenlőség jobb oldalán álló felületi integrál nem más, mint az R, sugaru gömb felszíne, tehát

$$5\,I = R^3 \cdot 4\,R^2\pi, \qquad I = \frac{4}{5}R^5\pi.$$

Ugyanezt kapjuk akkor is, ha egyszerűen (a képlet alapján) számítjuk a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}(\vartheta, \varphi))$ vektormezőnek a gömbfelületre vonatkozó felületi integrálját, vagyis kiszámítjuk a

$$\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta_1=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underline{v}(\underline{r}(\vartheta, \varphi))\underline{r}_{\vartheta}(\vartheta,\varphi)\; \underline{r}_{\varphi}(\vartheta,\varphi)\; d\vartheta d\varphi$$

kettős integrált.

7.02. Számítjuk a vektor divergenciáját

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\left[(-x^2 + y + z)\underline{i} + (x - y^2 + z)\underline{j} + (x + y - z^2)\underline{k}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 + y + z) + \frac{\partial}{\partial y}(x - y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + y - z^2),$$

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = -2x - 2y - 2z.$$

Ezek után számítjuk az

$$\iiint\limits_{(F)} \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r})\, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \underline{v}\, d\underline{F}$$

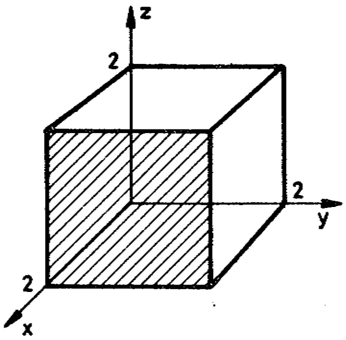
egyenlőség bal oldalán lévő hármas integrált.

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 (-2x - 2y - 2z)dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^2\left\{\left[-x^2 - zxy - 2xz\right]_0^2\right\}dydz = \int_0^2\int_0^2 (-4 - 4y - 4z)dydz =$$

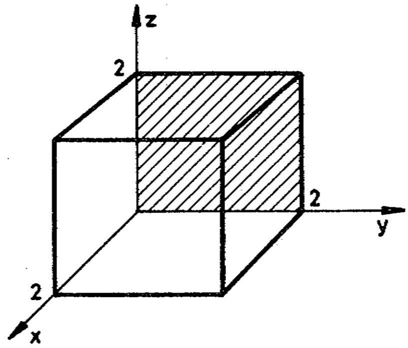
$$= \int_0^2 \left\{\left[-4y - 2y^2 - 4yz\right]_0^2\right\} dz =$$

$$= \int_0^2 (-16 - 8z)dz = \left[-16z - 4z^2\right]_0^2 = -48.$$

Az egyenlőség másik oldalán lévő felületi integrál meghatározásához ki kell számítani a felületi integrált mind a hat lapra. Számítjuk először az alábbi ábrákon látható két lapra vonatkozó felületi integrált.



45. ábra



46. ábra

Az első ábrán bevonalkázott lapra:

$$x = 2, \quad 0 \leqq y \leqq 2, \quad 0 \leqq z \leqq 2, \quad d\underline{F} = \underline{i}\, dydz,$$

mert a lap kifelé mutató felületi normálisának egységvektora $\underline{i}$.
Az első lapra a felületi integrál

$$\iint_{(F)} \underline{v}\,\underline{i}\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^2 (-4 + y + z)\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^2 \left\{ \left[-4y + \frac{y^2}{2} + zy \right]_0^2 \right\} dz = \int (-8 + 2 + 2z)\, dz =$$

$$= \left[-6z + z^2 \right]_0^2 = -12 + 4 = -8.$$

Az ezen lappal párhuzamos másik lapra vonatkozó felületi integrál számítása.

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2, \quad d\underline{F} = -\underline{i}.$$

$$\iint_{(F)} \underline{v}(-\underline{i})dF = \int_0^2\int_0^2 (-y - z)dydz = \int_0^2 \left\{\left[-\frac{y^2}{2} - zy\right]_0^2\right\} dz =$$

$$= \int_0^2 (-2 - 2z)dz = -8.$$

A másik két lapra is -16, -16 adódik, tehát az egyenlőség jobb oldalán lévő felületi integrál értéke szintén -48.

7.03. A Stokes-tétel szerint

$$\iint_{(F)} \text{rot } \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} = \int_{(g)} \underline{v}(r)d\underline{r}$$

Itt g a felületdarabot határoló vonal, azaz esetünkben a háromszög három oldala, az F pedig a háromszög lap.
A vektormező

$$\underline{v}(\underline{r}) = (-x^2 + y + z)\underline{i} + (x - y^2 + z)\underline{j} + (x + y - z^2)\underline{k}.$$

Ennek rotációja

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -x^2+y+z & x-y^2+z & x+y-z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\ (1 - 1) - \underline{j}\ (1 - 1) + \underline{k}\ (1 - 1) = \underline{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy az egyenlőség bal oldalán álló felületi integrál értéke 0, mert az integrálandó függvény azonosan nulla.

Az egyenlőség jobb oldalán álló görbementi integrál három részből tevődik össze.

Számítjuk először a $(0,0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszra vonatkozó görbementi integrál értékét. Ezen egyenes szakasz paraméteres egyenletrendszere:

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = -t + 2, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Innen adódik, hogy $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} - \underline{k}$, tehát a vonalintegrál

$$\int_0^2 \Big[(-t^2 - t + 2)\underline{i} + (t - t + 2)\underline{j} +$$

$$+ (t -(-t + z)^2)\underline{k}\Big] (\underline{i} - \underline{k})\, dt =$$

$$= \int_0^2 \Big[-t^2 - t + 2 - t +(-t + z)^2\Big] dt = \int_0^2 (-6t + 6)dt =$$

$$= \Big[-3t^2 + 6t\Big]_0^2 = -12 + 12 = 0.$$

Ugyanígy adódik, hogy a másik két egyenesre vonatkozó vonalintegrál értéke is nulla. Tehát az egyenlőség jobb oldalán álló vonalintegrál értéke szintén nulla.

7.04. A gömbfelület vektoregyenlete

$$\underline{r}(\vartheta,\varphi) = \underline{i}\ 2\cos\vartheta\cos\varphi + \underline{j}\ 2\cos\vartheta\sin\varphi + \underline{k}\ 2\sin\vartheta$$

A kiszámítandó integrál:

$$\iint_{(F)} \underline{v}(\underline{r})\, dF = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underline{v}(\underline{r})(\vartheta,\varphi)\underline{r}_{\vartheta}(\vartheta,\varphi)\underline{r}_{\varphi}(\vartheta,\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi.$$

A felületi normális

$\underline{r}_\vartheta(\vartheta,\varphi) \times \underline{r}_\varphi(\vartheta,\varphi) =$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 \sin\vartheta \cos\varphi & -2 \sin\vartheta \sin\varphi & 2 \cos\vartheta \\ -2 \cos\vartheta \sin\varphi & 2 \cos\vartheta \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \underline{i}\ 4 \cos^2\vartheta \cos\varphi - \underline{j}\ 4 \cos^2\vartheta \sin\varphi - \underline{k}\ 4 \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Erről látható, hogy ez a normális befelé mutat, mert ϑ, és φ helyébe tetszőleges értéket helyettesítve a (ϑ,φ) paraméterű pontból kiinduló $\underline{r}_\vartheta \times \underline{r}_\varphi$ vektor az origó felé mutat. A $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(x,y,z)$ függvénybe az x, y, z helyébe a gömb egyenletrendszeréből vett értékeket helyettesítve kapjuk:

$$\underline{v}(\underline{r}(\vartheta,\varphi)\ \underline{r}_\vartheta(\vartheta,\varphi)\ r_\varphi(\vartheta,\varphi) = (2 \cos\vartheta \cos\varphi - 4 \sin\vartheta)$$
$$(- 4 \cos^2\vartheta \cos\varphi) + (4 \cos\vartheta \cos\varphi + 2 \cos\vartheta \sin\varphi)$$
$$(-4 \cos^2\vartheta \sin\varphi) + (2 \cos\vartheta \cos\varphi -$$
$$- 2 \cos\vartheta \sin\varphi + 2 \sin\vartheta)(-4 \sin\vartheta \cos\vartheta).$$

Ezt a kifejezést rendezve és beírva az integrál képletébe a következő adódik:

$$\oiint_{(F)} \underline{v}\, d\underline{F} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-8 \cos^3\vartheta - 8 \sin^3\vartheta \cos\vartheta -$$

$$- 8 \sin\vartheta \cos^2\vartheta \cos\varphi - 16 \cos^3\vartheta \cos\varphi \sin\varphi +$$

$$+ 8 \sin\vartheta \cos^2\vartheta \sin\varphi)\, d\vartheta)\, d\varphi.$$

Az utolsó három tag integrálja zérus. Ugyanis, ha először φ szerint integrálunk

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0.$$

Ezet felhasználva a felületi integrál az alábbi módon egyszerüsödik.

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} \underline{v}(\underline{r})d\underline{F} = -2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8\cos^2\vartheta + 8\sin^2\vartheta\cos\vartheta)d\vartheta =$$

$$= -16\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, d\vartheta = -32\pi .$$

Oldjuk meg a feladatot a Gauss-tétel segítségével

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2z) + \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(x - y + z) = 3.$$

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) \, dV = \iiint_{(V)} 3 \, dV = 32\pi .$$

Mivel a Gauss-tétel kifelé mutató felületi normális mellett számítja a felületi integrált, azért - hogy eredményünk befelé mutató felületi noemális esetén adja a keresett integrált -, az eredményt (-1)-gyel szorozni kell. Így a kétféleképen számított eredmény egymással egyező.

7.05. Felírjuk a metszésvonal paraméteres egyenletrendszerét. Legyen a t paraméter a görbe valamely P pontja x,y síkon lévő Q vetületéhez tartozó polárszög. Az $x^2 + y^2 = 4$ kör paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\sin t.$$

Ehhez hozzávesszük még a

$$z = xy = 4\cos t\sin t$$

egyenletet, s kapjuk a térgörbe egyenletrendszerét. Vektoregyenlete pedig a következő

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, 2\cos t + \underline{j}\, 2\sin t + \underline{k}\, 4\sin t\cos t.$$

Ezek után a kérdéses vonalintegrál:

$$\oint_{(g)} \underline{v}\, d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{v}(\underline{r}(t))\, \dot{\underline{r}}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \Big[(2\cos t - 2\sin t)(-2\sin t) +$$

$$+ (2\cos t + 2\sin t)\, 2\cos t + 4\cos t\sin t\,(4\cos^2 t - 4\sin^2 t)\Big]\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t\cos t + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t +$$

$$+ 4\sin t\cos t - 16\cos^3 t\sin t -$$

$$- 16\sin^3 t\cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (4 + 16\cos^3 t\sin t - 16\sin^3 \cos t)\, dt =$$

$$= \left[4t - 16\frac{\cos^4 t}{4} - 16\frac{\sin^4 t}{4}\right]_0^{2\pi} = 8\pi.$$

A feladat megoldása Stokes-tétellel.

$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - y & x + y & xy \end{vmatrix} = x\,\underline{i} - y\,\underline{j} + 2\underline{k}.$$

A felület paraméteres egyenletrendszere, ha x-et és y-t választjuk paraméternek

$$x = x, \quad y = y, \quad z = xy.$$

Az integrálási tartomány a kör belseje. Mivel a felületi normális $\underline{n} = -p\underline{i} - q\underline{j} + \underline{k}$, jelen esetben pedig $\underline{n} = -y\underline{i} - x\underline{j} + \underline{k}$. Az integrandus pedig

$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) \cdot \underline{r} = -xy + xy + 2 = 2.$$

A kérdéses integrál tehát a következő

$$\iint_F \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r})d\underline{F} = \iint_{(F)} 2\,dxdy = 2 \cdot 4\pi = 8\pi.$$

mert a kör területén integrálva a $z = 1$ függvényt, eredményül a kör területét kapjuk.

7.06. $\frac{12}{5} a^5\pi$.

7.07. $\frac{3\pi}{2}$.

7.08. 24π.

7.09. Felfelé mutató felületi normális esetén -4π.

7.10. 20π.

7.11. 0.

7.12. 4π.

8. Néhány következmény

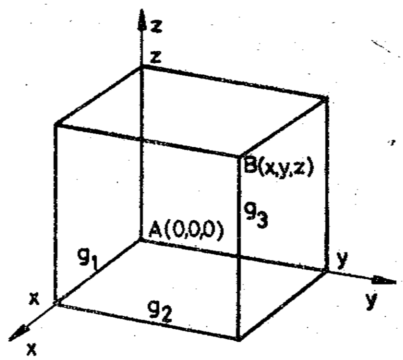
8.01. Mivel konzervatív erőtér bármely zártgörbére vonatkozó integrálja nulla, és a Stokes-tétel értelmében a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ vektormező (esetünkben erőtér) tetszőleges zártgörbére vonatkozó vonalintegrálja nulla, ha a vektormező rotációja nulla, azért azt, hogy a vektormező potenciálos-e, a rot $\underline{v}(\underline{r}) = 0$ egyenlőség teljesülés dönti el.
Esetünkben

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy-z^2-yz & x^2+z^2-xz & 2yz-2xz-xy \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\left[(2z - x) - (2z - x)\right] - \underline{j}\left[(-2z - y) - (-2z - y)\right] +$$

$$+ \underline{k}\left[(2x - z) - (2x - z)\right] \equiv \underline{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy a vektormező potenciálos. Határozzuk meg a vektormező potenciálját vonalintegrállal. A rögzített A pont legyen az origó, s a 47. ábrán látható törtvonalra integráljunk.



47. ábra

$$\int_A^B \left[(2xy - z - yz)\underline{i} + (x^2 + z^2 - xz)\underline{j} + \right.$$

$$\left. + (2yz - 2xz - xy)\,\underline{k}\right] \dot{\underline{r}}\, dt.$$

A g_1 görbe mentén . válasszuk paraméternek az x-et, Ekkor g_1 egyenletrendszere

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \dot{\underline{r}} = i.$$

A határok: $0 \leqq t \leqq x$.

A vonalintegrál

$$\int_0^x 0\, dt = 0.$$

A g_2 görbe mentén választjuk pataméternek a y-t. Ekkor g_2 egyenletrendszere:

$$x = x, \quad y = t, \quad z = 0, \quad \dot{\underline{r}} = \underline{j}.$$

A határok: $0 \leqq t \leqq y$.

A vonalintegrál

$$\int_0^y x^2\, dt = \left[x^2 t\right]_0^y = x^2 y.$$

A g_3 görbe mentén legyen z a paraméter. Ekkor a g_3 egyenletrendszere:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = t, \quad \dot{\underline{r}} = \underline{k}.$$

A határok: $0 \leqq t \leqq z$.

A vonalintegrál:

$$\int_0^z (2yt - 2xt - xy)dt = \left[(2y - 2x)\frac{t^2}{2} - xyt\right]_0^2 =$$

$$= yz^2 - xz^2 - xyz.$$

A potenciálfüggvény:

$$u(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = x^2y + yz^2 - xz^2 - xyz.$$

Határozzuk most meg az $u = u(x,y,z)$ potenciálfüggvényt teljes differenciál integrálásával is.
Mivel tudjuk, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - z - yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 - xz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2yz - 2xz - xy,$$

ezért

$$u(x,y,z) = \int \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} dx + C(x,y) = \int (2xy - z^2 - yz)dx +$$

$$+ C(y,z) =$$

$$= x^2y - xz^2 - xyz + C(y,z).$$

Ha az ilymódon kapott függvényt x szerint deriváljuk, akkor látható, hogy valóban $\frac{\partial x}{\partial x}$ -et kapunk. Az "állandó" itt y-tól és z-től is függhet, hiszen x-et nem tartalmazó tagok x szerinti deriváltja zérus.
Deriváljuk az ily módon kapott függvényt y szerint.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - xz + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y}$$

Ennek a $\frac{\partial u}{\partial y}$ ismert értékével kell egyenlőnek lenni, vagyis

$$x^2 - xz + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = x^2 + z^2 - xz,$$

ahonnan

$$\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = z^2.$$

Másrészt

$$C(y,z) = \int \frac{\partial c}{\partial y}\, dy + K(z) = \int z^2\, dy + K(z).$$

Visszahelyettesítve $C(y,z)$-t az $u(x,y,z)$ képletébe

$$u(x,y,z) = x^2y - xz^2 + yz^2 - xyz + K(z)$$

Deriváljuk mindkét oldalt z szerint

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} = -2xz + 2xz - xy + \frac{dK(z)}{dz}.$$

Ennek $\frac{\partial u}{\partial z}$ megadott értékével kell egyenlőnek lennie

$$-2xz + 2yz - xy + \frac{dK}{dz} = 2\,yz - 2\,xz - xy,$$

azaz

$$\frac{dK(z)}{dz} = 0, \quad K(z) = C_1,$$

tehát

$$u(x,y,z) = x^2y - xz^2 + yz^2 - xyz + C_1.$$

Ez az eredmény megegyezik az első módszerrel kapott eredménnyel.

8.02. $u(x,y,z) = e^{xyz}$

8.03. $u(x,y,z) = \dfrac{x^2y}{4 - z^2}.$

8.04. $u(x,y,z) = \arccos \dfrac{z}{xy}.$

TARTALOMJEGYZÉK

Feladatok

Térgörbék, felületek

Vektoranalízis

Megoldások

Vektoranalízis