

**BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM  
ÉPÍTŐMÉRNÖKI KAR**

**Dr. Sebestyén Lukács**

**MATEMATIKAI  
FELADATGYŰJTEMÉNY  
ÉS PÉLDATÁR II/1.**

**Műegyetemi Kiadó, 1993.**

**Jegyzet azonosító: 91281**

**A J9 - 1281 számú KÉZIRAT tartalmi változatlan utánnomása.**

**A Budapesti Műszaki Egyetem Építőmérnöki Kar megrendelése alapján  
kiadja a Műegyetemi Kiadó.**

**Felelős vezető: Veress János**

**Terjedelem: 17,5 A/5 ív**

**Készült az Új Élet Mg. Tsz. Magyaralmás**

**Nyomdaipari Önelszámoló részlegében**

**Felelős vezető: Frigy Ottóné**

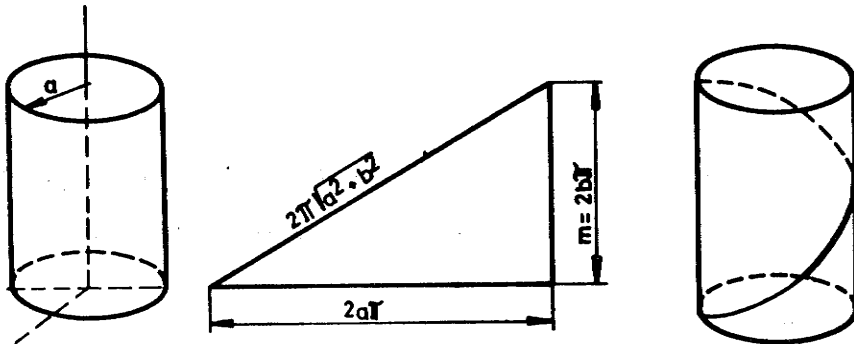
**Munkaszám: 93/264**

## FELADATOK

### TÉRGÖRBÉK, FELÜLETEK

#### 1. Térgörbe előállítás, az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény és határértéke, az érintővektor

- 1.01. Tekintsük az a sugarú, s m magasságú körhengert és az 1. ábrán látható derékszögű háromszöget. A háromszöget a hengerre tekerjük. Ily módon a háromszög átfogója egy térgörbét ír le. Írjuk fel ezen térgörbe egyenletét.



1. ábra

- 1.02. Írjuk fel az  $x^2 + y^2 = a^2$  hengerfelület és az  $x + y + z = a$  sík metszészóvonalának egyenletét.
- 1.03. Írjuk fel az  $x^2 + y^2 = a^2$  hengerfelület és a  $z = x y$  felület metszészóvonalának egyenletét.

- 1.04. Ábrázoljuk az

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = t \cos t \underline{i} + t \sin t \underline{j} + t \underline{k}, \quad \frac{\sqrt{11}}{2} \leq t \leq \frac{3\sqrt{11}}{2}$$

vektor-skalár függvényel adott görbeszakaszt.

Határozzuk meg a következó vektor-skalár függvények határértékét a megadott pontban.

$$1.05. \underline{r}(t) = \frac{\sin 5t}{t} \underline{i} + \frac{\operatorname{tg} t - \sin t}{\sin^3 t} \underline{j} + \frac{\operatorname{tg} t}{t} \underline{k}; t = 0.$$

$$1.06. \underline{r}(t) = \frac{\operatorname{cht} - \operatorname{cost}}{t^2} \underline{i} + \frac{\operatorname{tgt} - t}{t - \sin t} \underline{j} + \frac{t \operatorname{ctgt} - 1}{t^2} \underline{k}; t = 0.$$

$$1.07. \underline{r}(t) = \frac{\sqrt[3]{t^2} - 2}{(t-1)^2} \sqrt[3]{t+1} \underline{i} + \frac{\sqrt{t} - 1}{t-1} \underline{j} + \frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt[4]{t-1}} \underline{k};$$

$t = 1.$

$$1.08. \underline{r}(t) = \frac{\operatorname{tgt} - \operatorname{tga}}{t-a} \underline{i} + \frac{a^t - t^a}{t-a} \underline{j} + \frac{\operatorname{cht} - \operatorname{cha}}{t-a} \underline{k}; t = a,$$

$$a > 0.$$

1.09. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t), u(t) = r_1(t)r_2(t), \underline{r}(t) = r_1(t) \times \underline{r}_2(t)$$

függvények megadott pontbeli határértékét, ha

$$\underline{r}_1(t) = \frac{\sin t}{t} \underline{i} + \frac{\operatorname{tgt} - \sin t}{\sin^3 t} \underline{j} + \frac{\operatorname{tgt}}{t} \underline{k}, t = 0,$$

$$\underline{r}_2(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} \underline{i} + (2t+1) \underline{j} + (t^2+3) \underline{k}, t = 0.$$

A feladatot oldjuk meg oly módon, hogy előbb végezzük el a kijelölt műveletet és azután képezzük a határértéket, s az alábbi tételek alkalmazásával is.

Tétel. Ha  $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}_1(t) = \underline{r}_1$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}_2(t) = \underline{r}_2$ , akkor

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t)] = \underline{r}_1 \pm \underline{r}_2,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}_1(t) \underline{r}_2(t) = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)) = \underline{r}_1 \times \underline{r}_2.$$

Csak az utóbbi állítás igazolására emlékeztetünk (az első és a második hasonló módon igazolható), ehhez pedig elegendő azt belátni, hogy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2] = \underline{0}.$$

Alkalmazzuk a következő átalakítást:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} [\underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2] = \\ = \lim_{t \rightarrow t_0} [(\underline{r}_1(t) - \underline{r}_1) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1 \times (\underline{r}_2(t) - \underline{r}_2)]. \end{aligned}$$

Az  $\underline{r}_1(t) \rightarrow \underline{r}_1$  feltevés miatt  $(\underline{r}_1(t) - \underline{r}_1) \rightarrow \underline{0}$ ; az  $\underline{r}_2(t)$ -nek a  $t_0$  pontban van véges határértéke, tehát  $\underline{r}_2(t)$  a  $t_0$  környezetében korlátos, s így módon

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\underline{r}_1(t) - \underline{r}_1) \times \underline{r}_2(t) = \underline{0}.$$

Hasonló módon látható be az is, hogy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}_1 \times (\underline{r}_2(t) - \underline{r}_2) = \underline{0}.$$

Folytonosak-e a következő vektor-skalár függvények a megadott pontban, s ha ott nem folytonosak, van-e határértékük?

1.10.  $\underline{r}(t) = t^2 \underline{i} + (2-t) \underline{j} + t \sin t \underline{k}$ ;  $t = 0$ .

1.11.  $\underline{r}(t) = t^2 \underline{i} + (2-t) \underline{j} + \frac{\sin t}{t} \underline{k}$ ;  $t = 0$ .

1.12.  $\underline{r}(t) = 3t \underline{i} + e^{\frac{1}{t-2}} \underline{j} + (2-t^2) \underline{k}$ ;  $t = 2$ .

1.13.  $\underline{r}(t) = \frac{t - \sqrt{t}}{\sqrt{t} - 1} \underline{i} + 3t \underline{j} + t^3 \underline{k}$ ,  $t = 1$ .

1.14.  $\underline{r}(t) = \frac{1}{t} \underline{i} + \frac{t^2 - 9}{t + 3} \underline{j} + t \underline{k}$ ,  $t = 3$ ,  $t = -3$ .

Mely számokban folytonosak a következő vektor-skalár függvények?

$$1.15. \underline{r}(t) = \frac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}} \underline{i} + \frac{\sin 3t}{t} \underline{j} + t^2 \underline{k}.$$

$$1.16. \underline{r}(t) = \frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1} \underline{i} + t^2 \underline{j} + \frac{2^t - t^2}{t - 2} \underline{k}.$$

1.17. Tekintsük az  $\underline{r}(\varphi) = a \cos \varphi \underline{i} + a \sin \varphi \underline{j} + ka(1 - \cos \varphi - \sin \varphi)$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) görbét. Ábrázoljuk a görbét. Határozzuk meg és ábrázoljuk az

$$\frac{\underline{r}(\varphi_0 + \Delta\varphi) - \underline{r}(\varphi_0)}{\Delta\varphi}, \underline{r}(\varphi_0).$$

vektorokat, ahol  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varphi_0 + \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$ .

Határozzuk meg a következő vektor-skalár függvények derivált vektor-skalár függvényét!

$$1.18. \underline{r}(t) = \frac{1}{2} \cos t \underline{i} - \frac{t}{1 - t^2} \underline{j} + \ln(1 + t) \underline{k}, \quad -1 < t < 1, \quad 1 \leq t < +\infty$$

$$1.19. \underline{r}(t) = \ln t^2 \underline{i} + \ln t \underline{j} + \sqrt{t^2 - 1} \underline{k}, \quad 1 < t < +\infty.$$

1.20. Számítsuk ki az

$$(\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t)), \quad (\underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t)), \quad (\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t))$$

deriváltakat tetszőleges olyan pontban, ahol  $\underline{r}_1(t)$  és  $\underline{r}_2(t)$  is deriválható, ha

$$\underline{r}_1(t) = t^2 \underline{i} + 3 t \underline{j} + 5 \underline{k}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$\underline{r}_2(t) = e^{2t} \underline{i} + 3 \cos t \underline{k}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Itt alkalmazhatjuk következő deriválási szabályokat:

$$\begin{aligned} (\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t))' &= \dot{\underline{r}}_1(t) \pm \dot{\underline{r}}_2(t), \quad (\underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t))' = \\ &= \dot{\underline{r}}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \cdot \dot{\underline{r}}_2(t), \end{aligned}$$

$$(\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t))' = \dot{\underline{r}}_1(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \dot{\underline{r}}_2(t).$$

Írjuk fel a következő térgörbék adott pontjához tartozó érintőegyenes egyenletét!

$$1.21. \underline{r}(t) = (t - 3)\underline{i} + (t^2 + 1)\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t_0 = 2.$$

$$1.22. \underline{r}(t) = \sin t \underline{i} + \cos t \underline{j} + \frac{1}{\cos t} \underline{k}, \quad t_0 = 0.$$

$$1.23. \underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t_0 = 2.$$

$$1.24. \underline{r}(t) = \frac{t}{1+t} \underline{i} + \frac{1+t}{t} \underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t_0 = 1.$$

$$1.25. \underline{r}(t) = \cos^2 t \underline{i} + \sin^2 t \underline{j} + t^2 \underline{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$1.26. \underline{r}(t) = \sqrt{t^2 + 1} \underline{i} + \ln 3^t \underline{j} + 3^t \underline{k}, \quad t_0 = 1.$$

$$1.27. \underline{r}(t) = \cosh t \underline{i} + \sinh t \underline{j} + \underline{k}, \quad t_0 = 0.$$

$$1.28. \underline{r}(t) = -t^3 \underline{i} + 2t^2 \underline{j} + 3t \underline{k}, \quad t_0 = -1.$$

1.29. Van-e olyan pontja az

$$\underline{r}(t) = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j} + b t \underline{k} \quad (a > 0, b > 0 \text{ áll.})$$

görbének a  $0 \leq t \leq 2\pi$  szakaszon, amihez tartozó érintő-  
egyenes párhuzamos az  $\underline{r}(0)$ ,  $\underline{r}(2\pi)$  pontokat összekötő  
egyenessel?

1.30. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j} + b t \underline{k} \quad (a > 0, b > 0 \text{ áll.})$$

görbe azon pontját, amelyhez tartozó érintőegyenes pár-  
huzamos az  $\underline{r}(0)$  ponthoz tartozó egyenesre és az

$\underline{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$  pontra illeszkedő síkkal! Másrészt bizonyítsuk be,

hogy az  $\dot{\underline{r}}(t)$  és a  $\underline{k}$  vektor által meghatározott szög ál-  
landó!

1.31. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{4} t^4 \underline{i} + \frac{1}{3} t^3 \underline{j} + \frac{1}{2} t^2 \underline{k}$$

térgörbe azon pontjait, ahol az érintőegyenes párhuz-  
mos az  $x + 3y + 2z = 0$  síkkal!

1.32. Határozzunk meg az

$$\underline{r}(t) = t^3 \underline{i} + t^2 \underline{j} + t \underline{k}$$

térgörbe -  $1 < t < 0$  és  $0 < t < 1$  szakaszán olyan pontot, amelyhez tartozó érintőegyenes párhuzamos az  $\underline{r}(-1)$ ,  $\underline{r}(-0)$ ,  $\underline{r}(1)$  pontokra illeszkedő síkkal! Igazoljuk, hogy ilyen pont biztosan van!

1.33. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (\cos t + t \sin t) \underline{i} + (\sin t + t \cos t) \underline{j} + (t^2 + 1) \underline{k}$$

térgörbe azon pontjait, ahol az érintő párhuzamos az  $(y, z)$  síkkal!

1.34. Felírandó az

$$\underline{r}(t) = 2t^3 \underline{i} + 3t^2 \underline{j} - 6t \underline{k}$$

térgörbe  $x + 4y + 5z - 10 = 0$  síkkal párhuzamos érintőegyeneseinek egyenlete!

1.35. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + t^2 \underline{j} + t^3 \underline{k}$$

térgörbét  $t_0 = 2$  paraméterű pontjában érintőegyenesnek a koordináta síkokkal való metszéspontját.

## 2. Térgörbe ívhossza

2.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j} + b t \underline{k}$$

görbe (hengerre írt csavarvonal)  $0 \leq t \leq t_0$  szakaszának ívhosszát egyszerűen a Pythagoras tétellel. Számítsuk ki a következő térgörbék megadott szakaszának ívhosszát.

2.02.  $\underline{r}(t) = a \cos t \underline{i} + b \underline{j} + a \sin t \underline{k}$ ,  $(a > 0, b > 0, \text{ áll.})$   
 $0 \leq t \leq t_0$ .



$$2.03. \underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab} t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}, \quad (a > 0, b > 0, \text{ \u00e1ll.}) \\ 0 \leq t \leq 1.$$

$$2.04. \underline{r}(t) = t^4\underline{i} + \frac{4}{3} t^3\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad -1 \leq t \leq 2.$$

$$2.05. \underline{r}(t) = (t + 1)\underline{i} + \frac{1}{2} t^2\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{t^3} \underline{k}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

$$2.06. \underline{r}(t) = e^{at}(\cos t\underline{i} + \sin t\underline{j} + b\underline{k}), \quad (a > 0, b > 0, \text{ \u00e1ll.}) \\ -\infty < t \leq t_0.$$

$$2.07. \underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (\sqrt{2} t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$2.08. \underline{r}(t) = t \cos t\underline{i} + t \sin t\underline{j} + t\underline{k}, \quad 0 \leq t \leq 9.$$

$$2.09. \underline{r}(t) = t \cos(3 \ln t)\underline{i} + t \sin(3 \ln t)\underline{j} + 2t\underline{k}, \quad 0 \leq t \leq e^{\pi/3}.$$

$$2.10. \underline{r}(t) = \frac{\cos t}{\cosh t} \underline{i} + \frac{\sin t}{\cosh t} \underline{j} + (t - t \tanh t)\underline{k}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

$$2.11. \underline{r}(t) = a \cos t\underline{i} + b \sin t\underline{j} + c\underline{k}, \quad (a > 0, b > 0, c > 0, \text{ \u00e1ll.}) \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$2.12. \underline{r}(t) = a \cos t\underline{i} + a \sin t\underline{j} + k a^2 \sin t \cos t, \quad (a > 0, \text{ \u00e1ll.}) \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$2.13. \underline{r}(t) = a \cos \varphi \cos \varphi \underline{i} + a \cos \varphi \sin \varphi \underline{j} + a \sin \varphi \underline{k} \\ (a > 0, \text{ \u00e1ll.}) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Írjuk fel a k\u00f6vetkez\u0151 t\u00e9rg\u00f6rb\u00e9k egyenlet\u00e9t \u00edvhossz pa-  
ram\u00e9terrel.

$$2.14. \underline{r}(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j} + t\underline{k}.$$

$$2.15. \underline{r}(t) = a \cos t\underline{i} + a \sin t\underline{j} + b t \underline{k}, \quad a > 0, b > 0,$$

$$2.16. \underline{r}(t) = t \cos t\underline{i} + t \sin t\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \underline{k}.$$

$$2.17. \underline{r}(t) = (1 - t)\underline{i} + (3 - 2t)\underline{j} + (5 + 2t) \underline{k}.$$

$$2.18. \underline{r}(t) = \cosh t\underline{i} + \sinh t\underline{j} + t\underline{k}.$$

### 3. Simulósík, kísérő háromél (trieder)

Határozzuk meg a következő térgörbék kísérő triederét. Írjuk fel a kísérő trieder egyeneseinek és síkjainak egyenletét a megadott pontban.

- 3.01.  $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$ ,  $t_0 = 2$ .
- 3.02.  $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}$ ,  $t_0 = -1$ .
- 3.03.  $\underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3}t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$ ,  $t_0 = 1$ .
- 3.04.  $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\underline{k}$ ,  $t_0 = 1$ .
- 3.05.  $\underline{r}(t) = 4 \cos t\underline{i} + 4 \sin t\underline{j} + t\underline{k}$ ,  $t_0 = \frac{\pi}{3}$ .
- 3.06.  $\underline{r}(t) = t \ln t\underline{i} + t \ln t\underline{j} + t\underline{k}$ ,  $t_0 = 1$ .
- 3.07.  $\underline{r}(t) = \sin^2 t\underline{i} + \cos 2t\underline{j} - \frac{1}{\sin t} \underline{k}$ ,  $t_0 = \frac{\pi}{4}$ .
- 3.08.  $x = \operatorname{cht}, y = \operatorname{sht}, z = t$ ,  $t_0 = 0$ .
- 3.09.  $x = e^t, y = e^{2t}, z = e^t - 1$ ,  $t_0 = 0$ .
- 3.10.  $x = \frac{1}{4}t^4, y = \frac{1}{3}t^3, z = \frac{1}{2}t^2$ ,  $t_0 = 1$ .

### 4. Térgörbe görbülete

Számítsuk ki a következő térgörbék görbületét a megadott pontban.

- 4.01.  $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$ ,  $t_0 = 2$ .
- 4.02.  $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}$ ,  $t_0 = -1$ .
- 4.03.  $\underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3}t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$ ,  $t_0 = 1$ .
- 4.04.  $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\underline{k}$ ,  $t_0 = 1$ .
- 4.05.  $\underline{r}(t) = 4 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} + t\underline{k}$ ,  $t_0 = \frac{\pi}{3}$ .

$$4.06. \quad \underline{r}(t) = t \ln t \underline{i} + t \ln t \underline{j} + t \underline{k}, \quad t_0 = 1.$$

$$4.07. \quad \underline{r}(t) = 5 \ln^2 t \underline{i} + \cos 2t \underline{j} - \frac{1}{\sin t} \underline{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$4.08. \quad x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t, \quad z = t, \quad t_0 = 0.$$

$$4.09. \quad x = e^t, \quad y = e^{2t}, \quad z = e^t - 1, \quad t_0 = 0.$$

$$4.10. \quad x = \frac{1}{4} t^4, \quad y = \frac{1}{3} t^3, \quad z = \frac{1}{2} t^2, \quad t_0 = 1.$$

Határozzuk meg a következő felületek metszészvonalaival adott  $P$  pontjához tartozó kíséző triéder egyenesének és síkjainak egyenletét, valamint a görbületét.

$$4.11. \quad x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad y^2 - 2x + z = 0, \quad P_0(1, 1, 1).$$

$$4.12. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 56, \quad x + 3y + 4z = 26, \quad P_0(6, 4, 2).$$

$$4.13. \quad 4x^2 - 3xy + 6y = 0, \quad 3x^2 + xy - 6z = 0, \quad P_0(0, 0, 0).$$

$$4.14. \quad xy - z^2 = 0, \quad x + y + z - 3 = 0, \quad P_0(1, 1, 1).$$

$$4.15. \quad 2x^2 + 3yz - 6y = 0, \quad 3y^2 - xz - 3z = 0, \quad P_0(0, 0, 0).$$

$$4.16. \quad x^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + y^2 - 2z = 0, \quad P_0(1, 1, 1).$$

Számítsuk ki a következő görbék tetszőleges  $P$  pontjához tartozó görbületét.

$$4.17. \quad \underline{r}(t) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \varphi\right) \underline{i} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \varphi\right) \underline{j} + (1 - 2 \sin \varphi) \underline{k}.$$

$$4.18. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

$$4.19. \quad x = 5 \operatorname{cost}, \quad y = 5 \operatorname{sint}, \quad z = 4t$$

$$4.20. \quad x = t \operatorname{cost}, \quad y = t \operatorname{sint}, \quad z = t.$$

4.21. Határozzuk meg az

$$x^2 + y^2 = 25, \quad z = x$$

görbe görbületének a szélsőértékeit.

4.22. Határozzuk meg a

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

felület és a

$$\cos \varphi \cdot x - \sin \varphi \cdot y = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

síkok metszésvonalainak görbületét a  $(0, 0, 0)$  pontban, s válasszuk ki ezen görbék (síkmetszetek) közül az extrémális görbületűeket.

### 5. Sebesség és gyorsulás

A következő vektor-skalár függvények egy pont mozgását írják le (a  $t$  paraméter az idő). Határozzuk meg a pont sebesség- és gyorsulás-vektorát. A gyorsulás-vektort bontsuk fel érintőirányú (a sebesség-vektorral párhuzamos) és erre merőleges összetevőkre. Végül határozzuk meg a pályamenti sebességet és gyorsulást adott  $t_0$  időpontban.

$$5.01. \quad \underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\underline{k}, \quad t_0 = 1.$$

$$5.02. \quad \underline{r}(t) = 5 \cos t \underline{i} + 5 \sin t \underline{j} + t\underline{k} \quad (t \text{ tetszőleges}).$$

$$5.03. \quad \underline{r}(t) = \cosh t \underline{i} + \sinh t \underline{j} + t\underline{k} \quad (t \text{ tetszőleges}).$$

### 6. Torzió, Frenet-képletek

Számítsuk ki a következő térgörbék adott pontjához tartozó torzióját.

$$6.01. \quad \underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}, \quad t_0 = 2.$$

$$6.02. \quad \underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}, \quad t_0 = -1.$$

$$6.03. \quad \underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3}t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}, \quad t_0 = 1.$$

$$6.04. \quad \underline{r}(t) = (t^3 - 3)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\underline{k}, \quad t_0 = 1.$$

- 4 6.05.  $\underline{r}(t) = 4 \cos t \underline{i} + 4 \sin t \underline{j} + t\underline{k}$ ,  $t_0 = \frac{\pi}{3}$ .
- 6.06.  $\underline{r}(t) = t \ln t \underline{i} + t \ln t \underline{j} + t\underline{k}$ ,  $t_0 = 1$ .
- 6.07.  $\underline{r}(t) = \sin^2 t \underline{i} + \cos 2t \underline{j} - \frac{1}{\sin t} \underline{k}$ ,  $t_0 = \frac{\pi}{4}$ .
- 6.08.  $x = \cosh t, y = \sinh t, z = t$ ,  $t_0 = 0$ .
- 6.09.  $x = e^t, y = e^{2t}, z = e^t - 1$ ,  $t_0 = 0$ .
- 6.10.  $x = \frac{1}{3} t^4, y = \frac{1}{3} t^3, z = \frac{1}{2} t^2$ ,  $t_0 = 1$ .
- 6.11.  $x^2 - y^2 + z^2 = 1, y^2 - 2x + z = 0$ ,  $P_0(1, 1, 1)$ .
- 6.12.  $x^2 + y^2 + z^2 = 56, x + 3y + 4z = 26$ ,  $P_0(6, 4, 2)$ .
- 6.13.  $4x^2 - 3xy + 6y = 0, 3x^2 + xy - 6z = 0$ ,  $P_0(0, 0, 0)$ .
- 6.14.  $xy - z^2 = 0, x + y + z - 3 = 0$ ,  $P_0(1, 1, 1)$ .
- 6.15.  $2x^2 + 3yx - 6y = 0, 3y^2 - xz - 3z = 0$ ,  $P_0(0, 0, 0)$ .
- 6.16.  $x^2 + y^2 = 2, x^2 + y^2 - 2z = 0$ ,  $P_0(1, 1, 1)$ .

Számítsuk ki a következő térgörbék tetszőleges pontjában a görbületet és a torziót a Frenet-képletek alkalmazásával

- 6.17.  $\underline{r}(t) = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} + t\underline{k}$ ,
- 6.18.  $\underline{r}(t) = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j} + b t \underline{k}$ ,  $a > 0, b > 0$ ,
- 6.19.  $\underline{r}(t) = t \cos t \underline{i} + t \sin t \underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \underline{k}$ .
- 6.20.  $\underline{r}(t) = (1 - t) \underline{i} + (3 - 2t) \underline{j} + (5 + 2t) \underline{k}$ ,  $t = 1$ .
- 6.21.  $\underline{r}(t) = \cosh t \underline{i} + \sinh t \underline{j} + t \underline{k}$ ,  $t = 0$ .

## 7. Térgörbe menetének vizsgálata

7.1. Vizsgáljuk az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k}$$

térgörbét a  $t_0 = 2$  paraméterű pontjának környezetében (azaz határozzuk meg a ponthoz tartozó kisérő triedert, s írjuk fel a görbe ezen rendszerre vonatkozó egyenletét).

7.2. Vizsgáljuk az

$$\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

térgörbét a  $t_0 = -1$  paraméterű pontjának környezetében.

## 8. Kinetikai alkalmazás

8.1. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k}$$

függvény szerint mozgó pont sebesség- és gyorsulásvektorát a  $t_0 = 2$  pontban. Bontsuk fel az  $\underline{\ddot{r}}(t)$  vektort  $\underline{t}$  és  $\underline{f}$  irányú összetevőkre. Határozzuk  $\underline{v}(t)$ -t, és  $\underline{a}(t)$ -t!

8.2. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

mozgás  $t = -1$  időponthoz tartozó sebesség- és gyorsulásvektorát, a pályamenti sebességet és a gyorsulást.

9. A felület értelmezése, megadása, az  $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$  függvény

9.1. Tekintsük a tér

$$\underline{r}(u, v) = \underline{a}u + \underline{b}v \quad (-\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty)$$

vektorai által meghatározott pontjainak összességét, ahol

$$\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}, \quad \underline{b} = 2 \underline{k}.$$

Ábrázoljuk az  $u = 1, u = 2, v = \frac{1}{2}, v = 2$  vonalakat.

9.2. A  $z = f(x, y)$  típusú függvények tanulmányozása során vizsgáljuk a  $z = xy$  felületet. Írjuk fel az origóból a felület általános pontjába mutató  $\underline{r} = \underline{r}(x, y)$  vektort, azaz adjuk meg a felület egyenletét  $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$  alakban ( $u = x, v = y$ ).

9.3. Milyen görbék lesznek az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} \cos u \cos v + \underline{j} \cos u \sin v + \underline{k} \sin u$$
$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi\right)$$

felület  $u = u_0, v = v_0$  vonalai?

9.4. Felírandó azon hengerfelület egyenlete, amelynek vezérgörbéje az

$$\underline{r}(u) = u\underline{i} + \frac{u}{2}\underline{k} \quad (-\infty < u < +\infty)$$

alkotóinak irányvektora pedig az  $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$  vektor!

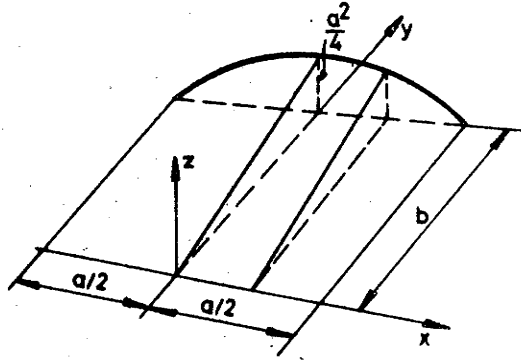
9.5. Felírandó annak a kúpfelületnek a vektor-egyenlete, amelynek vezérgörbéje a

$$\underline{r}(\psi) = \underline{i}(a + a \cos \psi) + \underline{j}b \sin \psi \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

csúcspontjának koordinátái:  $(0, 0, 3)$ .

9.6. Forgassuk meg a  $z = 4 - x^2$  parabolát a  $z$  tengely körül, s írjuk fel az így módon adódó felület egyenletét  $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$  és  $z = f(x, y)$  alakban.

- 9.7. Egy téglalap alapterületű csarnokot úgy módon fednek be, hogy az egyik falra egy parabola ívet illesztnek, s ennek minden pontját összekötik egyenessel a szemközti fal tetejének egy pontjával az ábrán látható módon. Írjuk fel az így adódó ú.n. konoid felület egyenletét!



2. ábra

- 9.8. Írjuk fel az  $y = \frac{1}{2}x^2$  "hengerfelület" vektoregyenletét!

- 9.9. Írjuk fel annak a felületnek a vektoregyenletét, amelyet a  $z = 1$  síkban lévő  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$  kör  $\varphi$  paraméterű és a  $z = 1$  síkban lévő  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$  kör  $\varphi + \frac{\pi}{3}$  paraméterű ( $0 < \varphi < 2\pi$ ) pontján illeszkedő egyenesek összessége alkot. Írjuk fel a felület implicit egyenletét is!

- 9.10. Írjuk fel az alábbi felületek vektoregyenletét.

a)  $z = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$ , b)  $z = \ln xy$ , c)  $z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- 9.11. Írjuk fel az alábbi felületek explicit, ill. implicit egyenletét.

a)  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} a \cosh u \cos v + \underline{j} b \cosh u \sin v + \underline{k} c \sinh u$ .

b)  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} 5 \cos^3 u \cos v + \underline{j} 5 \cos^3 u \sin v + \underline{k} 5 \sin^3 u$ .

c)  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} a \cosh^4 u \cosh^4 v + \underline{j} a \cosh u \sinh v + \underline{k} b \sinh^4 u$ .

d)  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} 3u \cos v + \underline{j} 3u \sin v + \underline{k} 3u^2$ .

e)  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} \sqrt{4 + u^2} \cos v + \underline{j} \sqrt{4 + u^2} \sin v + \underline{k} 2 \operatorname{arsh} \frac{u}{2}$ .



10. A felületi normális és az érintősík, E, F, G

10.01. Írjuk fel a  $P_1(2, 3, 0)$ ,  $P_2(2, 5, 5)$ ,  $P_3(0, 4, 0)$  pontokra illeszkedő sík vektoregyenletét, számítsuk a paraméter vonalak (egyenesek) irányvonalának vektoriális szorzatát.

10.02. Tekintsük az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}u + \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + v^2)$$

felületet. Írjuk fel adott  $u_0, v_0$  pontban az  $u = u_0$ ,  $v = v_0$  vonalakat ( $v$  ill.  $u$  paraméter-vonal) érintő egyenesek egyenletét, ezen egyenesek által meghatározott sík (érintősík) egyenletét, s számítsuk ki az

$$\left( \frac{\underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v)}{|\underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v)|} \right)_{\substack{u = u_0 \\ v = v_0}}$$

vektor abszolút értékét!

10.03. Írjuk fel az  $x^2 + y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 1$  felület vektoregyenletét, az  $x = x_0$ , vonal  $(x_0, y_0, 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 1})$  pontjához tartozó érintőegyenes egyenletét, s az ezen ponthoz tartozó érintősík egyenletét.

10.04. Írjuk fel a  $z = \ln xy$  felület vektoregyenletét, a felület  $(1, \frac{1}{e}, -1)$  pontjához tartozó érintősíkjának egyenletét és számítsuk ki ezen felület ezen pontjához tartozó felületi normálisának abszolút értékét.

10.05. Mely pontban nincs érintősíkja az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} u$$

felületnek?

## 11. Felületi görbék

11.01. Tekintsük az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i} x + \underline{j} y + \underline{k} xy$$

felületet (egyenesekkel lefedhető hiperbolikus paraboloid), s határozzuk meg azon felületi görbéjének vektoregyenletét, amelynek az  $x, y$  síkon lévő vetülete az

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad z = 0 \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

paraméteres egyenletrendszerű ellipszis, valamint az  $x = x_0, y = y_0$  vonalak vektoregyenletét!

11.02. Írjuk fel annak a térgörbének a vektoregyenletét, amely az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} a \cos u \cos v + \underline{j} a \cos u \sin v + \underline{k} a \sin u$$

felület és az  $x^2 - ax + y^2 = 0$  hengerfelület metszészonalaként adódik. Ezen metszészonal mindkét felületnek felületi görbéje.

11.03. Írjuk fel az

$$x = 2a + a \cos \psi, \quad y = 0, \quad z = a \sin \psi, \quad (a > 0, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi)$$

paraméteres egyenletrendszerű görbe  $z$  tengely körüli forgatásával keletkező felület azon felületi görbéinek egyenletét, amelyek a  $z = z_0$  sík ( $-a < z_0 < a$ ), másrészt az  $y = mx$  sík metszészonalaként adódnak.

11.04. Írjuk fel a  $z^2 = x^2 + y^2$  felület és a  $z + x = 25$  sík metszészonalának vektoregyenletét, s a metszészonal valamely pontjához tartozó érintőegyenesének egyenletét.

11.05. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} t \cos t + \underline{j} t \sin t + \underline{k} t \quad -\infty < t < +\infty$$

görbe a  $z^2 = x^2 + y^2$  felület felületi görbéje (minden pontja illeszkedik a felületre).

11.06. Írjuk fel az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}u + \underline{j}v + \underline{k}uv$$

felület azon felületi görbéjének egyenletét, amely az  $u$  és  $v$  közötti  $v = u^2$  összefüggés alapján adódik.

11.07. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}xy$$

felület és az  $y = 1 - ax^2$  hengerfelület metszészvonalának érintővektora bármely pontban párhuzamos mindkét felület érintősíkjával.

## 12. Felületi görbék ívhossza

12.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}2 + \underline{j}2 \cos u + \underline{k}2 \sin u, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

vezérgörbéjű  $(0, 0, 0)$  csúcspontú kúpfelület

$$y(t) = e^t \cos t, \quad z(t) = e^t \sin t$$

felület görbéje  $z = 1, z = 3$  síkok közötti szakaszának ívhosszát.

12.02. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}\sqrt{x^2 + y^2}$$

felület

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t$$

felületi görbéje  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$  szakaszának ívhosszát.

### 13. Szögmérés

- 13.01. Számítsuk ki, hogy a  $z = xy$  felület,  $x + y = 10$ ,  $x - y = 10$  metszéspontok mekkora szögben metszik egymást.
- 13.02. Határozzuk meg a  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16}}$  felület  $x = 4$ ,  $y = 3$  metszéspontjai által bezárt szöget.

### 14. Első- és másodrendű főmennyiségek

- 14.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u + 2v) - \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + 3v^2)$$

felület adott  $u_0 = 2$ ,  $v_0 = 4$  pontjában az E, F, G elsőrendű és az L, M, N másodrendű fő, ill. alaplmenyiségek értékét.

- 14.02. Számítsuk ki a  $zx^2 + y^3 = 12$  felület  $P_0(2, 1, 1)$  pontjában az első és másodrendű alaplmenyiségek értékét.

### 15. Meusnier-tétele

- 15.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u + 2v) - \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + 3v^2)$$

felület  $v = u^2$  felületi görbéjének a görbületét, a felület és a felületi görbe  $u_0 = 1$  paraméterű pontjához tartozó simulósík metszéspontjának a görbületét (ugyanezen pontban). Mérésük fel a felületet a felületi görbe  $u_0 = 2$  pontjához tartozó érintőegyenest illeszkedő, s a felület  $(3, -1, 4)$  pontjához tartozó érintősíkra merőleges síkkal, s ennek a síkmetszettel is számítsuk ki a görbületét a képlettel és a Meusnier tétellel is. Ezekon kívül számítható a görbület az alapforma alapján is.

15.02. Számítsuk ki az  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  gömbfelület és az

$$\underline{r}(u) = \underline{i} 2 \cos u \cos u + \underline{j} 2 \cos u \sin u + \underline{0k}$$

vezérgörbékéjű,  $\underline{k}$ -val párhuzamos alkotójú hengerfelület

metszésvonalának görbületét az  $u = \frac{\pi}{4}$  pontban, valamint az ezen ponthoz tartozó érintőegyenesre illeszkedő normálmetszet görbületét is ugyanezen pontban.

15.03. Számítsuk ki az  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  felület  $(0, 3, 4)$  pontjában a normálmetszet és az  $y = 3$  síkmetszet görbületének felhasználásával a két síkmetszet szögét. Megjegyzendő, hogy a  $(0, 3, 4)$  pontra illeszkedő, s az  $y = 3$  görbe  $(0, 3, 4)$  pontjához tartozó érintőre illeszkedő normálsík metszetéről van szó.

### 16. Főnormálgörbületek, Gauss-féle szorzatgörbület és az összeg görbület

16.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u^2 + v^2) + \underline{j} 2 uv + \underline{k}(u - v)$$

felület főirányait az  $u = 1, v = -1$  paraméterű pontban.

16.02. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} 2v$$

felület főirányait és a főgörbületeit tetszőleges  $u, v$  paraméterű pontban.

16.03. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u^2 + v^2) + \underline{j}(u + v) + \underline{k}u^2v^2$$

főgörbületeit és főirányait az  $u = 0, v = -1$  pontban.

16.04. Határozzuk meg a  $4x^2 + 4y^2 + z^2 - 9 = 0$  felület főirányait és főgörbületeit az  $x = 1, y = -1$  pontban.

16.05. Mely pontokban lesz a

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}$$

felület összeg, ill. szorzat görbülete zérus?

16.06. Határozzuk meg a

$$z = 4x^2 - 2xy - 3y^2 + x + 2y + 5$$

felület főgörbületeit és főirányait az  $x = 1, y = 3$  pontban.

16.07. Határozzuk meg a  $z = xy$  felület tetszőleges pontjában a főirányokat, s írjuk fel az ú.n. főgörbületi vonalak egyenletét.

16.08. A  $z = f(x, y)$  felület a  $(0, 0, 0)$  pontban érinti az  $x, y$  síkot. Számítsuk ki a felület ezen pontjához tartozó főmetszetek görbületeit, ill. igazoljuk, hogy ezek léteznek és a főnormálmetszetek síkjai egymásra merőlegesek.

### 17. Euler-tétele

17.01. Határozzuk meg azon felületi görbék görbületét az

$$\underline{r}(u, v) = i \ 3\text{chu} \cos v + j \ 3\text{shu} \sin v + k \ \text{thuv}$$

felület  $u = 0, v = \frac{\pi}{2}$  pontjában, amelyek közös érintője a kisebbik főgörbület metszetének érintőjével  $30^\circ$ -os szöget zár be és közös simulósíkjuk az érintőn áthaladó normálmetszet síkjával  $60^\circ$ -os szöget zár be.

17.02. Határozzuk meg a

$$z = x^2 + y^2$$

felület  $(3, 4, 25)$  pontjában a főnormálmetszetek síkjával  $45^\circ$ -os szöget bezáró normálmetszet görbületét ugyanezen pontban.

## 18. Felületdarab felszíne

18.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(\cos u - v \sin u) + \underline{j}(\sin u + v \cos u) + \underline{k}(u+v)$$

felület  $0 \leq u \leq \pi$ ,  $0 \leq v \leq 1$  darabjának a felszínét.

18.02. Kiszámítandó a

$$z = \frac{1}{2} \frac{x^2}{y}$$

felület azon darabjának a felszíne, amelynek az  $x, y$  síkon lévő vetülete a  $0 \leq x \leq 1$ ,  $1 \leq y \leq 2$  négyzet.

18.03. Számítsuk ki a

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} R \cos u \cos v + \underline{j} R \cos u \sin v + \underline{k} R \sin u$$

gömbfelület felszínét.

18.04. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k} b \sin u$$

egyenlettel adott gyűrűfelület (torus) felszínét.

18.05. Határozzuk meg

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} cu$$

felület  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  darabjának felszínét.

18.06. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} 4 \cos u \cos v + \underline{j} 4 \cos u \sin v + \underline{k} 4 \sin u$$

gömbfelület azon darabjának a felszínét, amely az

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

henger belsejében van.

## 19. Felületi pontok osztályozása

19.01. Határozzuk meg a

$$\underline{r}(u, v) = i(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k} b \sin u \quad (a > b)$$

felület elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait.

19.02. Határozzuk meg a

$$3z + 3xz - yz + x + y = 0$$

felület  $(0, 0, 0)$  pontjának a jellegét.

19.03. Határozzuk meg a

$$z = x^2 - y^2$$

felület felületi pontjainak a jellegét.



# VEKTORANALÍZIS

## 1. Skalár-vektorfüggvény (skalármező)

- 1.01. Ábrázoljuk az  $u = u(\underline{r}) = z - x^2 - y^2$  skalár-vektorfüggvény (skalármező)  $u = -2, u = 0, u = 4$  szintfelületeit.
- 1.02. Ábrázoljuk az  $u = u(\underline{r}) = x^2 - y - z$  skalár-vektorfüggvény  $u_0 = -2, u_0 = 0, u = 2$  szintfelületeit.
- 1.03. Milyen felületek az  $u = u(\underline{r}) = r^2$  ( $\underline{r} = ix + jy + kz$ ) skalár-vektorfüggvény szintfelületei. Igazoljuk, hogy ez a függvény a tér minden pontjában folytonos.

Határozzuk meg a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények szintfelületeit.

1.04.  $u = u(\underline{r}) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$

1.05.  $u = u(\underline{r}) = \sqrt{xyz}$

## 2. Gradiens, iránymenti derivált

- 2.01. Határozzuk meg az  $u = u(\underline{r}) = r^2$  skalár-vektorfüggvény gradiensét a  $P_0(0, 0, 0)$  pontban. Vizsgáljuk meg a gradiens (vektor) nagyságát, irányát és értelmét.
- 2.02. Határozzuk meg az  $u = u(\underline{r}) = \ln|\underline{r}|$  skalár-vektorfüggvény  $P_0(0, 1, 3)$  pontján áthaladó szintfelületének ezen  $P_0$  pontjához tartozó érintősíkját.
- 2.03. Határozzuk meg az  $u = u(\underline{r}) = xy^3 - 2e^x + 3\sin z$  skalár-vektorfüggvény értelmezési tartományának  $\underline{r}_0 = 2\underline{j} + \underline{k}$  helyvektorú pontjában az  $\underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j} + 12\underline{k}$  vektor által meghatározott iránymenti deriváltját.

Számítsuk ki a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények gradiensét tetszőleges pontban.

2.04.  $u = u(\underline{r}) = x^3y^2z.$

- 2.05.  $u = u(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|}$ .
- 2.06.  $u = u(\underline{r}) = \sqrt{xyz}$ .
- 2.07.  $u = u(\underline{r}) = e^x(y + e^4) + z^3$
- 2.08.  $u = u(\underline{r}) = x^2z - y^2z + z^2$
- 2.09.  $u = u(\underline{r}) = x^2yz - xz^2$
- 2.10. Adva van az  $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$  ellipszoidikus nyomáseloszlás (az izobár felületek ellipszoidok). Meghatározandó az  $\underline{r}_0 = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$  helyvektorú ponthoz tartozó gradiens vektor.  
Határozzuk meg a következő példákban adott skalármezők gradiensét a megadott pontban.
- 2.11.  $u = u(\underline{r}) = |\underline{r}|$ ,  $P_0(3, -4, 1)$ .
- 2.12.  $u = u(\underline{r}) = xy + yz + xz$ ,  $P_0(2, -3, 1)$ .
- 2.13.  $u = u(\underline{r}) = xy \ln z + x^2ly + e^xy$ ,  $P_0(1, 2, -1)$ .
- 2.14. Határozzuk meg a  $\sin^2x - y^2 - z = 0$  felület normálvektorát (érintősíkjának normálvektorát) az  $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $y_0 = \frac{1}{2}$  pontban. (A felületet tekintsük az  $u = \sin^2x - y^2 - z$  skalár-vektorfüggvény  $u_0 = 0$  szintfelületének.)
- 2.15. Határozzuk meg a  $2x - y^2 - z = 0$  felület normálvektorát az  $\underline{r}_0 = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$  helyvektorú pontban.  
Határozzuk meg a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények adott irányú deriváltját az adott pontban.
- 2.16.  $u = 2x^2y - xyz$ ;  $\underline{a} = \underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k}$ ;  $P_0(1, 1, 2)$ .
- 2.17.  $u = x^3y^2z$ ;  $\underline{a} = -2\underline{i} + 5\underline{j} - 3\underline{k}$ ;  $P_0(1, 2, -3)$ .

### 3. Vektor-vektorfüggvények (vektormezők)

3.01. Meghatározandó a fix tengely körül forgó merevtest pontjai sebességi vektormezője, vagyis olyan vektor-vektorfüggvény, amely tetszőleges ponthoz a merevtestnek a szóbanforgó ponton áthaladó sebességvektorát rendeli hozzá.

3.02. Milyen vektormezőt ír le a  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$  függvény?

3.03. Milyen vektormezőt ír le a  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{a} \times \underline{r}$  és a  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{r} \times \underline{a}$  függvény? Itt  $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + 5\underline{k}$ ,  $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ .

Milyen vektormezőt írnak le a következő példákban adott vektor-vektorfüggvények?

3.04.  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = (\underline{r} + \underline{a}) \times \underline{r}$ ;  $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$ ;  $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ .

3.05.  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = (\underline{r} \times \underline{a}) \times \underline{r}$ ;  $\underline{a} = \underline{i} + \underline{k}$ ;  $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ .

### 4. Vektormező görbementi és felületi integrálja

4.01. A koordináta rendszer kezdőpontjában elhelyezett M tömeg az  $(x, y, z)$  pontban lévő tömegegységre olyan erővel hat, amelynek abszolút értéke

$$|\underline{P}| = f \cdot M \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2},$$

iránya az  $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$  irányvonalával megegyezik, de vele ellentétes értelmű. Az erőteret tehát a

$$\underline{P} = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2} \left(-\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right) = -C \frac{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

vektor-vektorfüggvény írja le.

Számítsuk ki az erőteret (a vektormező most erőteret jelent) ellenében végzett munkát, miközben a tömegegység az

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

csavarvonal mentén a  $t = 0$  paraméterű pontból a  $t = 4$  paraméterű pontba megy át.

4.02. Számítsuk ki azt a munkát, amelyet a

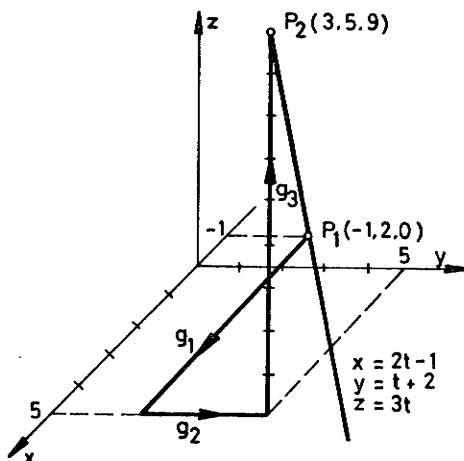
$$\underline{P} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

erőtérben a tömegegységet az

$$x = 2t - 1, \quad y = t + 2, \quad z = 3t$$

egyenes mentén a  $t = 0$  ponttól a  $t = 3$  pontig mozgatva végzünk.

4.03. Számítsuk ki az előző példában adott erőterben a 3. ábrán látható  $g_1, g_2, g_3$  egyenes szakaszokon mozgó tömegegység mozgatásához szükséges munkát.



3. ábra

4.04. Kiszámítandó a  $\underline{v}(r) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  vektormezőnek az

$A(1, 0)$  és a  $B(0, 1)$  pontok közötti  $x^2 + y^2 = 1$  kör és  $x + y = 1$  egyenes szakaszra vonatkozó vonalintegrálja.

4.05. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(r) = (x + yz)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek a  $P_1(1, 1, 1)$  és  $P_2(0, 3, 5)$  pontokat összekötő egyenes mentén vett vonalintegrálját.

4.06. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = (x^2 - y + z)\underline{i} + (x + y^2 + z)\underline{j} + (x + y + z^2)\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \operatorname{cht} + \underline{j} \operatorname{sht} + \underline{k} 2t$$

görbementi integrálját a  $0 \leq t \leq 3$  határok között.

4.07. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(\underline{r}) = (x^2 + y + z)\underline{i} + (x + y^2 + z)\underline{j} + (x + y + z^2)\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \operatorname{cost} + \underline{j} \operatorname{sint} + \underline{k} 2t$$

csavarvonal mentén vett vonalintegrálját (görbementi integrál).

4.08. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos^2 t + \underline{j} \operatorname{cost} \operatorname{sint} + \underline{k} \operatorname{sint}$$

görbe (Viviani-féle görbe) mentén vett vonalintegrálját a  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$  határok között.

4.09. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

erőtér által végzett munkát, ha az elmozdulás az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} t^2 + \underline{j} + \underline{k} \frac{1}{t}$$

görbe mentén történik a  $t_1 = 1$  és  $t_2 = 2$  pontok között.

4.10. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}z$$

vektor-vektorfüggvény felületi integrálját az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(3 + \cos u)\cos v + \underline{j}(3 + \cos u)\sin v + \underline{k} \sin u$$

gyűrűfelület  $x, y$  sík felületi darabjára vonatkozó fel-felé mutató felületi normális mellett.

4.11. Határozzuk meg a

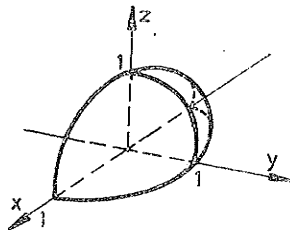
$$\underline{v}(\underline{r}) = -xy\underline{i} + xy\underline{j} + z\underline{k}$$

vektormezőnek a  $z = x^2 - y^2$  felület azon darabjára vonatkozó felületi integrálját, amelynek vetülete az  $x, y$  síkon a  $-2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3$  derékszögű négyszög, fel-felé mutató felületi normális mellett.

4.12. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$$

vektormezőnek a 4. ábrán látható egységsugarú negyedgömb felületére vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató felületi normális mellett.

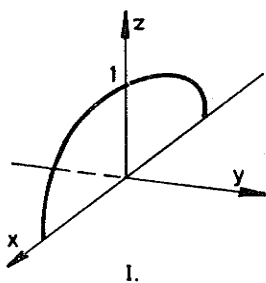


4. ábra

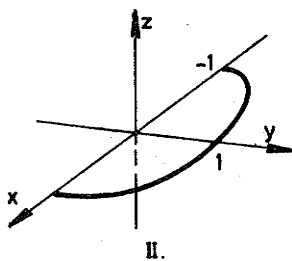
4.13. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(\underline{r}) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$$

vektormezőnek az következő ábrákon látható két félkör-lapra vonatkozó felületi integrálját:



5. ábra



6. ábra

A felületi normális értelmét oly módon válasszuk meg, hogy a két körlap és az előző példában szereplő negyedgömb felület alkotta zárt felületnél a felületi normális mindig kifelé mutató legyen.

4.14. Számítsuk ki a

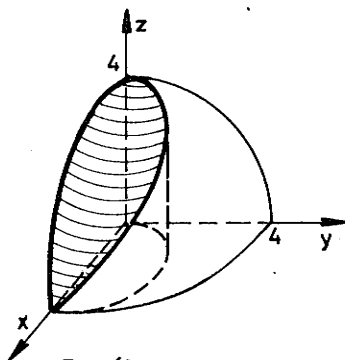
$$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{1}{xz} \underline{i} + \frac{1}{yz} \underline{k}$$

vektormezőnek az

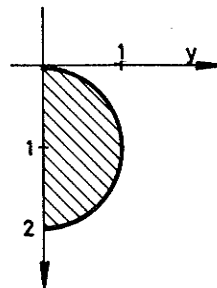
$$x = 5 \cos^3 u \cos v, \quad y = 5 \cos^3 u \sin v, \quad z = 5 \sin^3 u$$

forgási asztroid felület  $\frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$  darabjára vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató normális mellett.

4.15. Határozzuk meg a  $\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j}$  vektormezőnek a 4 egység sugarú gömb felületére írt Viviani-görbe által határolt felületdarabnak a 7. ábrán látható részére vonatkozó felületi integrálját, felfelé mutató felületi normális mellett.

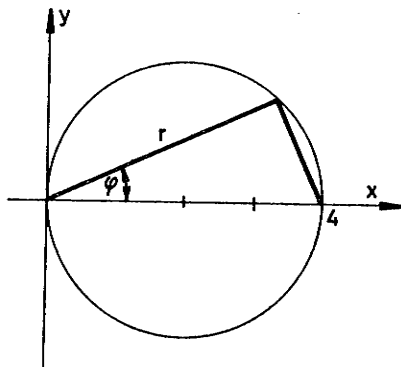


7. ábra



8. ábra

- 4.16. Határozzuk meg a  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$  vektormezőnek a  $z = x^2 + y^2$  felület  $x^2 + y^2 + 4x = 0$  henger belsejében lévő darabjára vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató felületi normális mellett, A kettős integrál kiszámításához vezessünk be polár koordinátákat. Az integrálási tartomány a 9. ábrán látható.



9. ábra

## 5. Vektormező divergenciája

- 5.01. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(y^3 + x^2) + \underline{j}(12xy^2 - 3x) + \underline{k}xyz^2$$

vektormező divergenciáját tetszőleges pontban és a rögzített  $P_Q(1, -1, 2)$  pontban.

- 5.02. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(y^2 + z^2) + \underline{j}(z^2 + x^2) + \underline{k}(x^2 + y^2)$$

vektormező divergenciáját.



## 6. Vektormező rotációja

- 6.01. Képezzük a  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{r}$  vektormező rotációját. Ez a fix forgástengely körül állandó  $\underline{\omega}$  szögsebességgel forgó merevtest sebességének a vektormezője.
- 6.02. Számítsuk ki a  $\underline{v} = (\underline{a} + \underline{r}) \times \underline{r}$  vektormező rotációját tetszőleges pontban ( $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$ ).
- Számítsuk ki a következő példákban adott vektormezők divergenciáját és rotációját.
- 6.03.  $\underline{v} = x^2 y z \underline{i} + x y^2 z \underline{j} + x y z^2 \underline{k}$
- 6.04.  $\underline{v} = 3x \underline{i} + xy \underline{j} + z \underline{k}$ ,  $P_0(2, 1, 0)$ .
- 6.05.  $\underline{v} = (x^2 - y^2) \underline{i} + (y^2 - z^2) \underline{j} + (z^2 - x^2) \underline{k}$ .
- 6.06.  $\underline{v} = \frac{1}{|\underline{r}|} \underline{r}$ ;  $P_0(0, 2, 3)$ .
- 6.07.  $\underline{v} = \underline{i} 3x + \underline{j}(x - 2y) + (z - x) \underline{k}$ .
- 6.08.  $\underline{v} = \underline{i} \frac{x}{y} + \underline{j} \frac{y}{z} + \underline{k} x z$ ,  $P_0(1, 2, 3)$ .
- 6.09.  $\underline{v} = |\underline{r}|^3 \underline{r}$ .
- 6.10.  $\underline{v} = - \frac{ax}{x^2 + y^2} \underline{i} + \frac{ax}{x^2 + y^2} \underline{j} + a \underline{k}$ .
- 6.11.  $\underline{v} = (3x + 2y) \underline{i} - (5x + z^2) \underline{j} + (x^2 - y^2) \underline{k}$ .
- 6.12.  $\underline{v} = e^{xy} \underline{i} + e^{yz} \underline{j} + e^z \underline{k}$ .
- 6.13.  $\underline{v} = \underline{i} \sin x^2 y z + \underline{j} \sin x y^2 z + \underline{k} \sin x y z^2$
- 6.14.  $\underline{v} = \underline{i} \ln \frac{xy}{z} + \underline{j} \ln \frac{yz}{x} + \underline{k} \ln \frac{zx}{y}$ .

Bármelyik vektormezőre kimutatható, hogy divergenciája és rotációja a koordinátarendszer felvételével szemben invariáns.

A következő példákban a vektor analízis ezen ún. invariáns operációinak (divergencia, rotáció) ismételt alkalmazásával foglalkozunk.

6.15. Kiszámítandó  $\text{div}/\text{gradu}(\underline{r})/$  értéke az  $\underline{r}_0 = 2\underline{j} - \underline{k}$  pontban, ha  $u(\underline{r}) = ye^x + xe^x + yz^3$ .

6.16. Meghatározandó  $\text{grad}/\text{div}\underline{v}(\underline{r})/$ , ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(x^3 - 2yz^2) + \underline{j}(xy^2 - z^3) + \underline{k}(z^2 - xyz).$$

6.17. Meghatározandó  $\text{rot}/\text{rot}\underline{v}(\underline{r})/$ , ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = e^{yz}\underline{i} + e^{zx}\underline{j} + e^{xy}\underline{k}.$$

6.18.  $\text{div grad } \underline{r}^2 = ?$

6.19.  $\text{rot grad } \underline{r}^2 = ?$

6.20.  $\text{div grad } |\underline{r}| = ?$

6.21.  $\text{rot grad } |\underline{r}| = ?$

6.22.  $\text{div grad } \frac{1}{|\underline{r}|} = ?$

6.23.  $\text{grad div } \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = ?$

6.24.  $\text{div grad } \frac{1}{|\underline{r}|^2} = ?$

6.25.  $\text{div grad}(\ln|\underline{r}|) = ?$

6.26.  $\text{div grad}(e^{|\underline{r}|}) = ?$

6.27.  $\text{grad } / \text{div}(|\underline{r}|^2 \underline{r}) = ?$

6.28.  $\text{div grad } xyz = ?$

6.29.  $\text{div grad } e^{xyz} = ?$

6.30.  $\text{div grad}/x^2 \sin yz)/ = ?$

## 7. Görbementi és felületi integrálok átalakítása

- 7.01. Számítsuk ki a homogén  $R$  sugarú gömb középpontjára vonatkozó inerciáját. Megjegyezzük, hogy az  $R$  sugarú homogén gömb középpontjára vonatkozó inerciáját az

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

képlet alapján számítjuk ki. Itt a  $V$  integrációs tartomány az  $R$  sugarú gömbfelület által határolt része a térnek.

- 7.02. Legyen adott a  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$  kocka alakú tartomány és a

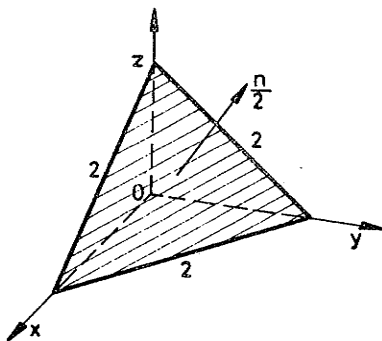
$$\underline{v}(\underline{r}) = (-x^2 + y + z)\underline{i} + (x - y^2 + z)\underline{j} + (x + y - z^2)\underline{k}$$

vektormező. Igazoljuk, ill. verifikáljuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt oly módon, hogy az

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{v} dV = \oiint_F \underline{v} d\underline{F}$$

egyenlőség bal- és jobboldalát kiszámítjuk.

- 7.03. Tekintsük az alábbi ábrán látható térbeli háromszöget. Irányítsuk a háromszög felületet és ennek megfelelően a háromszög oldalait. Legyen  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$  az előbbi példában megadott függvény. Írjuk fel ezen  $\underline{v}(\underline{r})$  függvényre és a 10. ábrán látható háromszögre Stokes-tételt.



10. ábra.

7.04. Kiszámítandó a

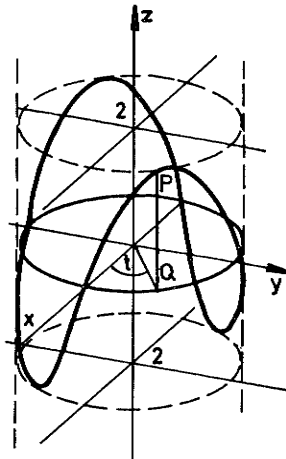
$$\underline{v}(\underline{r}) = (x - 2z)\underline{i} + (2x + y)\underline{j} + (x - y + z)\underline{k}$$

vektormezőnek a kezdőpont körüli 2 egység sugaru gömbre vonatkozó felületi integrálja befelé mutató felületi normális mellett felületi integrállal és Gauss-Osztrogradszkij tétellel.

7.05. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = (x - y)\underline{i} + (x + y)\underline{j} + xy\underline{k}$$

vektormezőnek a  $z = xy$  hiperbolikus paraboloid és az  $x^2 + y^2 = 4$  henger metszészvonala mentén vett vonalintegrálját vonalintegrállal és Stokes-tétellel (11. ábra).



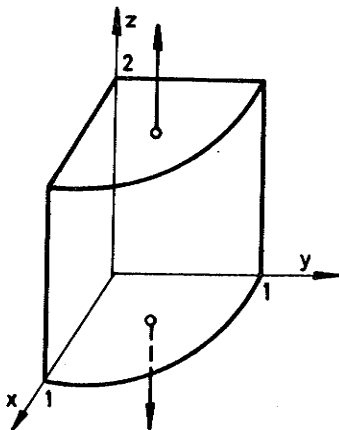
11. ábra

7.06. Határozzuk meg a

$$\underline{v} = x^3\underline{i} + y^3\underline{j} + z^3\underline{k}$$

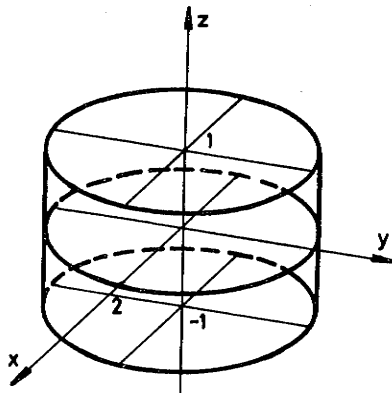
vektormező felületi integrálját az origó centrumú a sugaru gömbfelületre vonatkozóan.

- 7.07. Meghatározandó a  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$  vektormező felületi integráljának értéke az alábbi 12. ábrán látható zárt felületre vonatkozóan



12. ábra

- 7.08. Határozzuk meg a  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$  vektormező felületi integrálját a 13. ábrán látható hengerpalást és a két körlap alkotta zárt felületre vonatkozóan.

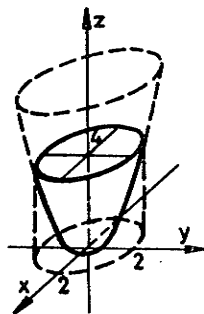


13. ábra

- 7.09. Legyen

$$\underline{v}(\underline{r}) = (x + y + z)\underline{i} + xyz\underline{j} + x^2\underline{k}.$$

Határozzuk meg a  $\text{rot}\underline{v}(\underline{r})$  vektormezőnek a  $z = x^2 + y^2$  felület azon darabjára vonatkozó felületi integrálját, amely az  $x^2 + y^2 = 4$  henger belsejébe esik (14. ábra).



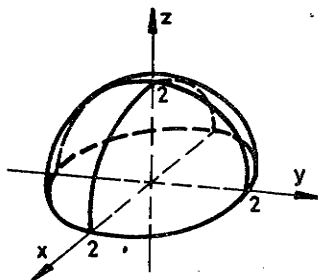
14. ábra

7.10. Határozzuk meg a  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$  vektormező felületi integrálját az  $x^2 + y^2 = 4$  alapkörű ( $z = 0$ ) és  $(0,0,5)$  csúcspontu (5 magasságú) kőrkúp teljes felületére.

7.11. Adott a

$$\underline{v}(\underline{r}) = z^2 \underline{i} + x^2 \underline{j} + y^2 \underline{k}$$

vektormező. Igazolandó Stokes tétele az  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$  felső gömbfelületre (15. ábra).

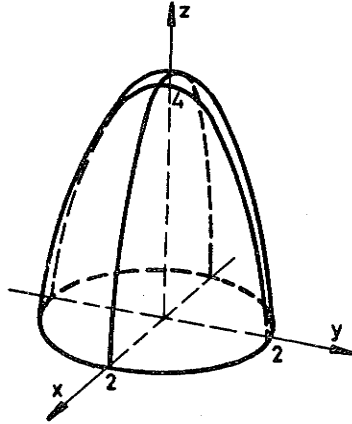


15. ábra

7.12. Adott a

$$\underline{v}(\underline{r}) = xz^2 \underline{i} + zy^2 \underline{j} + x^2 y \underline{k}$$

vektormező. Igazolandó Stokes tétele, ha a  $F$  felület a  $z = 4 - x^2 - y^2$  forgásparaboloig  $z \geq 0$  része (16. ábra).



16. ábra

### 8. Néhány következmény

8.01. Konzervatív, ill. potenciálos-e a.

$$\underline{v}(\underline{r}) = (2xy - z^2 - yz)\underline{i} + (x^2 + z^2 - xz)\underline{j} + (2yz - 2xz - xy)\underline{k}$$

vektormezővel jellemzhető erőter, s igen határozzuk meg az erőterhez tartozó potenciálfüggvényt. Megjegyzendő, hogy az időben állandó erőteret konzervatív erőternek nevezzük, ha van olyan  $u=u(\underline{r})=U(x,y,z)$  skalár-vektorfüggvény-potenciál, ill. potenciális energia-, amelynek negatív gradiense az erőter, vagyis ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = -\text{gradu}(\underline{r}).$$

Ismeretes, hogy ilyen erőterben bármely zárt görbe mentén végzett munka zérus. Határozzuk meg a következő példákban adott vektormezők (erőterek) potenciáljait.

8.02.  $\underline{v}(\underline{r}) = yze^{xyz}\underline{i} + xze^{xyz}\underline{j} + xye^{xy}\underline{k}.$

8.03.  $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{2xy}{4-z^2}\underline{i} + \frac{x^2}{4-z^2}\underline{j} + \frac{2x^2yz}{(4-z^2)^2}\underline{k}.$

$$8.04. \quad \underline{v}(\underline{r}) = \frac{z}{x\sqrt{x^2y^2 - z^2}} \underline{i} + \frac{z}{y\sqrt{x^2y^2 - z^2}} \underline{j} + \frac{-1}{\sqrt{x^2y^2 - z^2}} \underline{k}.$$

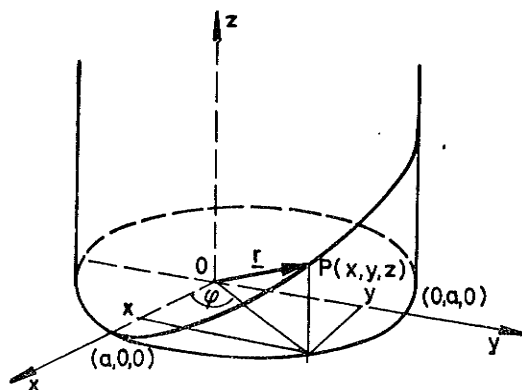


## MEGOLDÁSOK

### 1. Térgörbe előállítás, az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ függvény és határértéke, az érintővektor

1.01. Ha a koordináta-rendszert a 17. ábrán látható módon vesszük fel, akkor

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = b\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



17. ábra

1.02. Minthogy egy geometriai alakzat valamely rendszerre vonatkozó egyenlete olyan egyenlet, amelyet az alakzat tetszőleges  $P$  pontjának (ezen rendszerre vonatkozó) koordinátái kielégítenek, s az alakzatra nem illeszkedő pont koordinátái pedig nem elégítenek ki, azért az  $x^2 + y^2 = a^2$  a térben olyan hengerfelület egyenlete, amelynek tengelye a  $z$  tengely, s sugara  $a$ . Ugyanis helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az  $x^2 + y^2 = a^2$  egyenletet ezen hengerfelület bármely pontjának koordinátái kielégítik, más  $(x, y)$  pedig nem. A hengerfelület és a sík metszészvonala egy görbe. Ezen görbe egyenletének felírása céljából vezessük be az  $x = t$  paramétert. Ekkor

$$x = t, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - t^2}, \quad z = a - t \pm\sqrt{a^2 - t^2}, \quad -a \leq t \leq a.$$

1.03. Ismét az  $x = t$  jelölést használva az adódik, hogy

$$x = t, \quad y = \pm \sqrt{a^2 - t^2}, \quad z = \pm t \sqrt{a^2 - t^2}, \quad -a \leq t \leq a,$$

illetve

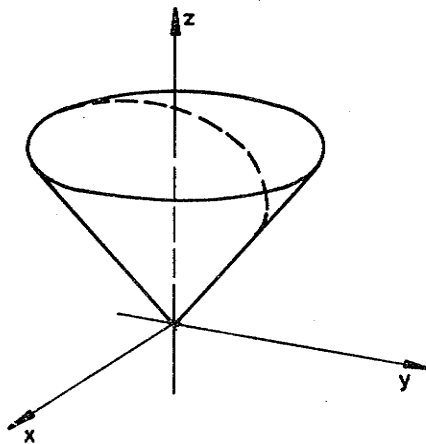
$$\underline{r}(t) = t \underline{i} \pm \sqrt{a^2 - t^2} \underline{j} \pm t \sqrt{a^2 - t^2} \underline{k}, \quad -a \leq t \leq a.$$

1.04. A térgörbe tetszőleges  $t$  paraméterű pontjának koordinátái kielégítik a  $z^2 = x^2 + y^2$  egyenletet, azaz a térgörbe bármely pontja illeszkedik azon kúpfelületre, amely az

$$x = \tau, \quad y = 0, \quad z = \tau, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

egyenes  $z$  tengely körüli forgatásával keletkezik.

Ugyanis a  $z^2 = x^2 + y^2$  ezen origó csúcspontú kúpfelület egyenlete. Ezért ezt a görbét kúpos-csavarvonalnak is nevezik. Ezt a görbét a 18. ábrán vázoltuk (szaggattott vonal).



18. ábra

1.05. Az  $\underline{r} = \underline{r}(t)$  vektor-skalár függvénynek a  $t_0$  pontban van határértéke, ha a függvény

$$\underline{r}(t) = x(t) \underline{i} + y(t) \underline{j} + z(t) \underline{k}$$

alakú megadásban szereplő  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  függvényeknek van határértéke a  $t_0$  pontban és

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) \underline{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) \underline{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \underline{k}.$$

Ezen tételt felhasználva

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 5t}{t} \underline{i} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{sint}}{\sin^3 t} \underline{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} \underline{k} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 5 \frac{\operatorname{sint} 5t}{5t} \underline{i} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sint} \left( \frac{1}{\operatorname{cost}} - 1 \right)}{\sin^3 t} \underline{j} + \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{cost}} \frac{\operatorname{sint}}{t} \underline{k} = \lim_{t \rightarrow 0} 5 \frac{\sin 5t}{5t} \underline{i} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{cost}}{\operatorname{cost} \sin^2 t} \underline{j} + \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{cost}} \frac{\operatorname{sint}}{t} \underline{k} = \lim_{t \rightarrow 0} 5 \frac{\sin 5t}{5t} \underline{i} + \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{cost} 4 \sin^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} \underline{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{cost}} \frac{\operatorname{sint}}{t} \underline{k} = \\ &= 5 \underline{i} + \frac{1}{2} \underline{j} + \underline{k}. \end{aligned}$$

Megjegyzendő még, hogy a  $t_0 = 0$  pont az  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  függvényhez tartozó értelmezési tartományok mind-egyikének torlódási pontja.

1.06. Az előbbi példában mondottaknak megfelelően az

$$x(t) = \frac{\operatorname{cht} \operatorname{sint}}{t^2}, \quad y(t) = \frac{\operatorname{tg} t - t}{t - \operatorname{sint}}, \quad z(t) = \frac{t \operatorname{ctg} t - 1}{t^2}$$

függvényeket kell vizsgálni a  $t = 0$  pont környezetében. A függvények a  $t = 0$  pont kivételével e pont bármely környezetének minden pontjában értelmezve vannak és

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{cht} - \text{sint}}{t^2} = +\infty, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{tgt} - t}{t - \text{sint}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}{1 - \text{cost}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 t} \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \text{cost}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + \text{cost})(1 - \text{cost})}{\cos^2 t (1 - \text{cost})} = 2.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t \text{ctgt} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\text{ctgt} - t} \frac{1}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \sin^2 t}{\text{sint} \text{cost} - t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 t + 4t \text{sint} \text{cost}}{\cos^2 t - \sin^2 t - 1} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t + 2t \text{sint} \text{cost}}{-2 \sin^2 t} =$$

$$= -1 \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + 2 \frac{t}{\text{sint}} \text{cost}\right) = -3, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \text{ctgt} - 1}{t^2} = -\frac{1}{3}.$$

Ezeket felhasználva

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}(t) = \left(+\infty, 2, -\frac{1}{3}\right),$$

vagyis a függvénynek a  $t = 0$  pontban nincs véges határértéke.

Megjegyzendő (előző tanulmányaink alapján ismeretes),

hogy a  $\lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}(t) = \left(+\infty, 2, -\frac{1}{3}\right)$  eredményünk szerint, tetszőlegesen kicsiny pozitív  $\varepsilon$ -hoz és tetszőlegesen nagy  $\omega$ -hoz található olyan kicsiny pozitív  $\delta$ , amelyre fennáll, hogy  $\underline{r}(t)$ -nek végpontjai benne vannak az

$$\omega < x < +\infty, \quad 2 - \varepsilon < y < 2 + \varepsilon,$$

$$-\frac{1}{3} - \varepsilon < z < -\frac{1}{3} + \varepsilon$$

tartományban, ha  $|t| < \delta$ .

$$1.07. \lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}(t) = \frac{1}{9} \underline{i} + \frac{1}{2} \underline{j} + \frac{4}{3} \underline{k}.$$

$$1.08. \lim_{t \rightarrow a} \underline{r}(t) = \frac{1}{\cos^2 a} \underline{i} + a^a (\ln a - \frac{1}{a}) \underline{j} + s4a \underline{k}.$$

$$1.09. \lim_{t \rightarrow 0} (\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{\sin 5t}{t} \underline{i} + \frac{\text{tgt} - \text{sint}}{\sin^3 t} \underline{j} + \frac{\text{tgt}}{t} \underline{k} \right] \pm \left[ \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} \underline{i} + (2t+1) \underline{j} + (t^2+3) \underline{k} \right] \right\} = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}) \pm (\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}).$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 5t}{t} \underline{i} + \frac{\text{tgt} - \text{sint}}{\sin^3 t} \underline{j} + \frac{\text{tgt}}{t} \underline{k} \right] \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} \underline{i} + (2t+1) \underline{j} + (t^2+3) \underline{k} \right] = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}) (\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}) = 10.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}_1(t) \underline{r}_2(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 5t}{t} \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} + \frac{\text{tgt} - \text{sint}}{\sin^3 t} (2t+1) + \frac{\text{tgt}}{t} (t^2+3) \right\} = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 10.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t) = \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5t}{t} \underline{i} + \frac{\text{tgt} - \text{sint}}{\sin^3 t} \underline{j} + \frac{\text{tgt}}{t} \underline{k} \right) \right] \times \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} \underline{i} + (2t+1) \underline{j} + (t^2+3) \underline{k} \right) \right] = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}) \times (\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\underline{i} - 14\underline{j} + 3\underline{k}.$$

1.10. Az  $\underline{r} = \underline{r}(t)$  vektor-skalár függvényről azt mondjuk, hogy a  $t_0$  pontban folytonos, ha

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}(t_0),$$

azaz, ha a  $t_0$  pontban van véges határértéke, van helyettesítési értéke és a kettő megegyezik. Az  $\underline{r} = \underline{r}(t)$  függvény valamely számközben folytonos, ha számköz minden pontjában folytonos. Az előbbieket szerint tehát meg kell határozni az  $\underline{r} = \underline{r}(t)$  függvény határértékét és helyettesítési értékét a  $t_0$  pontban.

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 \underline{i} + (2 - t) \underline{j} + t \sin t \underline{k}) = 2 \underline{j},$$

$$\left[ \begin{matrix} t^2 \underline{i} + 2 - t) \underline{j} + t \sin t \underline{k} \\ t=0 \end{matrix} \right] = 2 \underline{j},$$

tehát a határérték és a helyettesítési érték is létezik, s e két érték megegyezik, ezért a függvény a  $t_0$  pontban folytonos. Megjegyzendő, hogy ez a függvény a  $-\infty < t < +\infty$  számközben mindenütt folytonos.

1.11. Ez a függvény a  $t = 0$  pontban nincs értelmezve, mert a  $z(t) = \frac{\sin t}{t}$  függvény itt nincs értelmezve, tehát az az  $\underline{r}(t)$  függvény a  $t = 0$  pontban nem lehet folytonos.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 \underline{i} + (2 - t) \underline{j} + \frac{\sin t}{t} \underline{k}) = 2 \underline{j} + \underline{k},$$

tehát az  $\underline{r}(t)$  függvénynek a  $t = 0$  pontban van véges értéke.

Megjegyzendő, hogy az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} t^2 \underline{i} + (2 - t) \underline{j} + \frac{\sin t}{t} \underline{k} & (-\infty < t < 0, 0 < t < +\infty), \\ 2 \underline{j} + \underline{k}, & t = 0 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos.

- 1.12. Ez a vektor-skalár függvény a  $t = 2$  pontban nincs értelmezve, mert a  $t = 2$  pont nincs benne az  $y(t) = e^{\frac{1}{t-2}}$  függvény értelmezési tartományában, tehát  $\underline{r}(t)$ -nek nincs helyettesítési értéke, s így módon nem lehet folytonos.  
Mint ahogy

$$\lim_{t \rightarrow 2-0} e^{\frac{1}{t-2}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 2+0} e^{\frac{1}{t-2}} = +\infty,$$

azaz a bal oldali határérték nulla, a jobb oldali pedig  $+\infty$ , azért ezen  $\underline{r}(t)$  függvénynek a  $t = 2$  pontban nincs határértéke.

- 1.13. Ez a vektor-skalár függvény a  $(0, 1), (1, +\infty)$  számközökben van értelmezve. Ugyanis az  $\underline{r}(t)$  függvény értelmezési tartománya az  $x(t), y(t), z(t)$  függvények értelmezési tartományának közös része, azaz  $\underline{r}(t)$  azokban és csak azokban a pontokban van értelmezve, amelyekben az  $x(t), y(t), z(t)$  függvények mindegyike értelmezve van.  
Mint ahogy az  $x(t)$  függvény a  $t = 1$  pontban nincs értelmezve, azért  $\underline{r}(1)$  nem létezik, tehát  $\underline{r}(t)$  a  $t = 1$  pontban nem lehet folytonos.  
Számítsuk most a határértékét a  $t = 1$  pontban!

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 1} t \frac{\sqrt{t} - 1}{1 - \sqrt{t}} = -1, \quad \lim_{t \rightarrow 1} 3t = 3,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} t^3 = 1.$$

Tehát az  $\underline{r}(t)$  függvénynek a  $t = 1$  pontban van határértéke és

$$\lim_{t \rightarrow 1} \underline{r}(t) = -1\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}.$$

Ha ezen  $\underline{r}(t)$  függvényt a  $t = 1$  helyen a határértékével értelmezzük, azaz azt mondjuk, hogy  $\underline{r}(1) = -\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}$  legyen, akkor az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} \frac{t - \sqrt{t}}{1 - t} \underline{i} + 3t \underline{j} + t^3 \underline{k}, & \text{ha } 0 \leq t < 1, \quad 1 < t < +\infty, \\ -\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}, & \text{ha } t = 1 \end{cases}$$

függvényhez jutunk, s ezen utóbbi függvény az értelmezési tartományban mindenütt folytonos. A  $t = 0$  pontban természetesen csak jobb oldali folytonosságról lehet szó.

- 1.14. A függvény a  $t = 3$  helyen folytonos, a  $t = -3$  pontban nincs értelmezve, de

$$\lim_{t \rightarrow 3} \underline{r}(t) = -\frac{1}{3} \underline{i} - 6 \underline{j} + 3 \underline{k}.$$

- 1.15. Ez a függvény a  $0 < t < 1$ ,  $1 < t < +\infty$ , számközök minden pontjában értelmezve van és ezen két intervallum minden pontjában folytonos. Másrészt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underline{r}(t) = 3 \underline{j}, \quad \lim_{t \rightarrow 1} \underline{r}(t) = -\underline{i} + \sin 3 \cdot \underline{j} + \underline{k},$$

tehát az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} 3 \underline{j} & \text{ha } t = 0, \\ \frac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}} \underline{i} + \frac{\sin 3t}{t} \underline{j} + t^2 \underline{k}, & \text{ha } 0 < t < 1, \\ & 1 < t < +\infty, \\ -\underline{i} + \sin 3 \underline{j} + \underline{k} & \text{ha } t = 1 \end{cases}$$

függvény az értelmezési tartományban mindenütt folytonos.

- 1.16. Ezen függvény értelmezési tartománya mindazon  $t$  pontok összessége, amelyekre  $0 \leq t < 1$ ,  $1 < t < 2$ ,  $2 < t < +\infty$ . A függvény e pontokban folytonos is. A  $t = 1$ ,  $t = 2$  pontokban a függvény nincs értelmezve, tehát ezekben a pontokban a függvény nem lehet folytonos.

Kérdés, hogy a  $t = 1$ ,  $t = 2$  pontokban van-e határértéke?

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1} \underline{i} + t^2 \underline{j} + \frac{2^t - t^2}{t - 2} \underline{k} \right) = \frac{2}{3} + \underline{j} - \underline{k}.$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1} \underline{i} + t^2 \underline{j} + \frac{2^t - t^2}{t - 2} \underline{k} \right) = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \underline{i} + 4 \underline{j} + 4(|n2 - 1) \underline{k}.$$

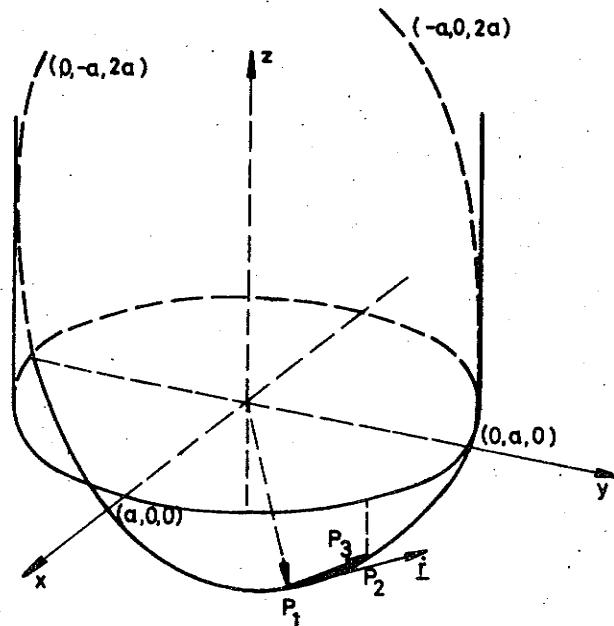


1.17. Egyszerűen helyettesítéssel igazolhatjuk, hogy ezen

$$\underline{r}(\psi) = a \cos\psi \underline{i} + a \sin\psi \underline{j} + a(1 - \cos\psi - \sin\psi) \underline{k}$$

$$0 \leq \psi \leq 2\pi$$

görbe minden pontja illeszkedik az  $x^2 + y^2$  hengerre és az  $x + y + z = a$  síkra is, tehát a görbe ezen két geometriai alakzat metszésvonala, azaz egy ellipszis (19. ábra). Ily módon a görbét egyszerűen szemléltethetjük.



19. ábra

Az ellipszis illeszkedik az  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, a, 0)$ ,  $(-a, 0, 2a)$ ,  $(0, -a, 2a)$  és a

$$P_1 \left( a \frac{\sqrt{2}}{2}, a \frac{\sqrt{1}}{2}, a(1 - \sqrt{2}) \right),$$

$$P_2 \left( a \frac{1}{2}, a \frac{\sqrt{3}}{2}, a \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

pontokra. Az  $\underline{r}(\psi_0 + \Delta\psi) - \underline{r}(\psi_0)$  különbség-vektor a  $P_1$ -ből a  $P_2$ -be mutató vektor. A  $P_1$ -ből a  $P_3$ -ba mutató vektor pedig az

$$\frac{\underline{r}(\varphi_0 + \Delta\varphi) - \underline{r}(\varphi_0)}{\Delta\varphi},$$

s végül az  $\dot{\underline{r}}$  a  $\varphi_0$  pontbeli deriváltat ábrázolja, amellyel a  $\varphi_0$  ponthoz tartozó érintővektort értelmezzük.

$$1.18. \quad \underline{\dot{r}}(t) = -\frac{1}{2} \sin t \underline{i} - \frac{t^2 + 1}{(1 - t^2)^2} \underline{j} + \frac{1}{1 + t} \underline{k},$$

$$-1 < t < 1, \quad 1 < t < +\infty.$$

$$1.19. \quad \underline{\dot{r}}(t) = \frac{2}{t} \underline{i} + \frac{1}{t} \underline{j} + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \underline{k}, \quad 1 < t < +\infty.$$

$$1.20. \quad (\underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t))' = [(t^2 \underline{i} + 3t \underline{j} + 5 \underline{k})(e^{2t} \underline{i} + 3 \cos t \underline{k})]' =$$

$$= (t^2 e^{2t} + 15 \cos t)'$$

Másik megoldás:

$$\underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t)' = \dot{\underline{r}}_1(t) \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \dot{\underline{r}}_2(t) =$$

$$= (2t \underline{i} + 3 \underline{j})(e^{2t} \underline{i} + 3 \cos t \underline{k}) + (t^2 \underline{i} + 3t \underline{j} +$$

$$+ 5 \underline{k})(2e^{2t} \underline{i} - 3 \sin t \underline{k}) =$$

$$= 2te^{2t} + 2t^2 e^{2t} - 15 \sin t.$$

$$[\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)]' = \dot{\underline{r}}_1(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \dot{\underline{r}}_2(t) =$$

$$= (2t \underline{i} + 3 \underline{j}) \times (e^{2t} \underline{i} + \cos t \underline{k}) +$$

$$+ (t^2 \underline{i} + 3t \underline{j} + 5 \underline{k}) \times (2e^{2t} \underline{i} -$$

$$- 3 \sin t \underline{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t & 3 & 0 \\ e^{2t} & 0 & 3 \cos t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ t^2 & 3t & 5 \\ 2e^{2t} & 0 & -3 \sin t \end{vmatrix} =$$