

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
VEGYÉSZMÉRNÖKI KAR

Dr. Králik Dezső
tanszékvezető egy. tanár

Geberta Gyuláné
adjunktus

MATEMATIKA II.

felsőbb éves vegyészmérnök hallgatóknak

Valószínűségszámítás

Első rész

KÉZIRAT

8. változatlan kiadás

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1992

I. KOMBINATORIKA

Adva van véges sok elem (tárgyak), bizonyos sorrendbe kell őket elhelyezni, vagy adott elemekből adott számot kell kiválasztani és bizonyos sorrendbe rakni ezeket.

I.1 Ismétlés nélküli permutációk

Adva van n számú egymástól különböző elem. Kérdés, hányféle különböző sorrendbe lehet őket egymás mellé elrendezni. Egy meghatározott sorrendet az n elem egy permutációjának nevezzük. Ha egyetlen elemet elmozdítunk az előző helyéről, akkor új permutációt kapunk.

Pl.	1, 2, 3, 4, n	egy sorrend
	2, 1, 3, 4, n	egy másik sorrend,
	.	egy másik permutáció.
	.	
	5, 1, 2, 3, 4, ... n	
	.	
	.	

Látható, ha 1 db elemünk van, a sorrendek száma 1.
ha 2 db elemünk van, akkor 2 db elrendezés
lehetőség: 1 2 és
2 1.

Jelöljük n elemre az összes permutációk számát P_n -nel. $P_n = ?$
kérdésre kell választ adni.

Látni fogjuk, hogy P_n visszavezethető P_{n-1} -re. Így pl. a P_3 -at
 P_2 -re vezetjük vissza.

Általában az eljárás az lesz, hogy rögzítünk egy elemet az első helyre és a mögötte levő elemeket helyezzük el az összes lehetséges sorrendbe, de ezek számát tudjuk, mert már előbb kiszámítottuk. Nézzük P_3 meghatározást.

1-es rögzítjük,
és

$\begin{matrix} 2,3 \\ 3,2 \end{matrix} \} P_2$ sorrendet képezünk

2-es rögzítjük,
és

$\begin{matrix} 1,3 \\ 3,1 \end{matrix} \} P_2$ sorrendet képezünk

3-as rögzítjük,
és

$\begin{matrix} 1,2 \\ 2,1 \end{matrix} \} P_2$ sorrendet képezünk

Mivel 3 elemet rögzíthettünk és mindegyikhez $P_2 = 2$ db elrendezés tartozott, összesen

$$P_3 = 3 \cdot P_2 \text{ sorrendet képeztünk.}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$P_4 = 4 \cdot P_3$$

Általában, n elem esetén

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

permutációt képezhetünk. Ugyanis (a rögzített elemet aláhuzzuk)

$\frac{1}{\quad}$

P_{n-1} sorrendet
készíthetünk

az 1-es rögzített elem után az
összes lehetséges sorrendjét
képezni kell $(n-1)$ db elemnek,
ezek száma P_{n-1} db.

A 2-es elem rögzítése is P_{n-1} sorrendet ad.

A 3-as elem rögzítése hasonló eredményhez vezet.

Az n -ik elem rögzítése esetén P_{n-1} különböző permutációt írhatunk fel. Ez összesen " n " blokk lévén,

$n \cdot P_{n-1}$ sorrendet jelent.

Igy a

$$P_n = n \cdot P_{n-1} \text{ rekurziós formulához jutunk.}$$

Ez a formula minden n -re igaz; ennek alapján:

$$P_{n-1} = (n-1) P_{n-2},$$

tehát

$$P_n = n(n-1) \cdot P_{n-2}.$$

Lévéen

$$P_{n-2} = (n-2) \cdot P_{n-3},$$

ezért

$$P_n = n(n-1)(n-2) P_{n-3},$$

és így tovább.

Végül is

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot P_1.$$

és

$$P_1 = 1$$

miatt

$$P_n = n!$$

Feladatok:

1. Hányféleképpen tud 10 tanuló egy padban elhelyezkedni. (A padban 10 ülés van.)
M: 10 !
2. Hányféle elhelyezkedés lehetséges egy kerek asztal körül, ha új elhelyezkedést az jelent, hogy valaki nem a régi szomszédai között ül?
M: Mivel az asztal kerek, az egy hellyel való tovább ülés nem ad új ülésrendet, ez minden elhelyezkedésnél 10 elhelyezkedés helyett csak 1 ülésrendet ad. Így 10 ! ülésrend helyett

$$\frac{10!}{10} = 9!$$

lehetséges eset van.

Az ilyen permutációkat ciklikus permutációknak nevezik.

n elem ciklikus permutációinak a száma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

3. Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben minden jegy csak egyszer fordul elő (az első számjegy 0 nem lehet).

Megoldás: Ahányszor a 0 az első helyen áll, az összesen 9! esetet jelent, ezekben az esetekben 9 jegyű számot kapunk, ezek feltételünknek nem felelnek meg. Az összes esetek számát, azaz az összes permutációt számítsuk ki és a 9 jegyű számokat vonjuk le belőle.

$$10! - 9! = 9! (10 - 1) = 9 \cdot 9!$$

I.2 Stirling-formula

A formula $n!$ értékének közelítésére szolgál. Nagy n -ek esetében a kiszámítást meggyorsítja. Mérnöki gyakorlatban is használják.

Megértése az első évfolyam anyagát képező, a végtelen sorokkal kapcsolatos tételek ismeretét tételezi föl csak. A formula a következő:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\gamma_n},$$

ahol

$$\frac{1}{12n+1} < \gamma_n < \frac{1}{12n}.$$

Ebből látható, hogy $e^{\gamma_n} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$, továbbá az is látható, hogy a közelítés igen éles, azaz aránylag kis n -ek esetére is jól közelít. A bizonyítás több lépésben történik.

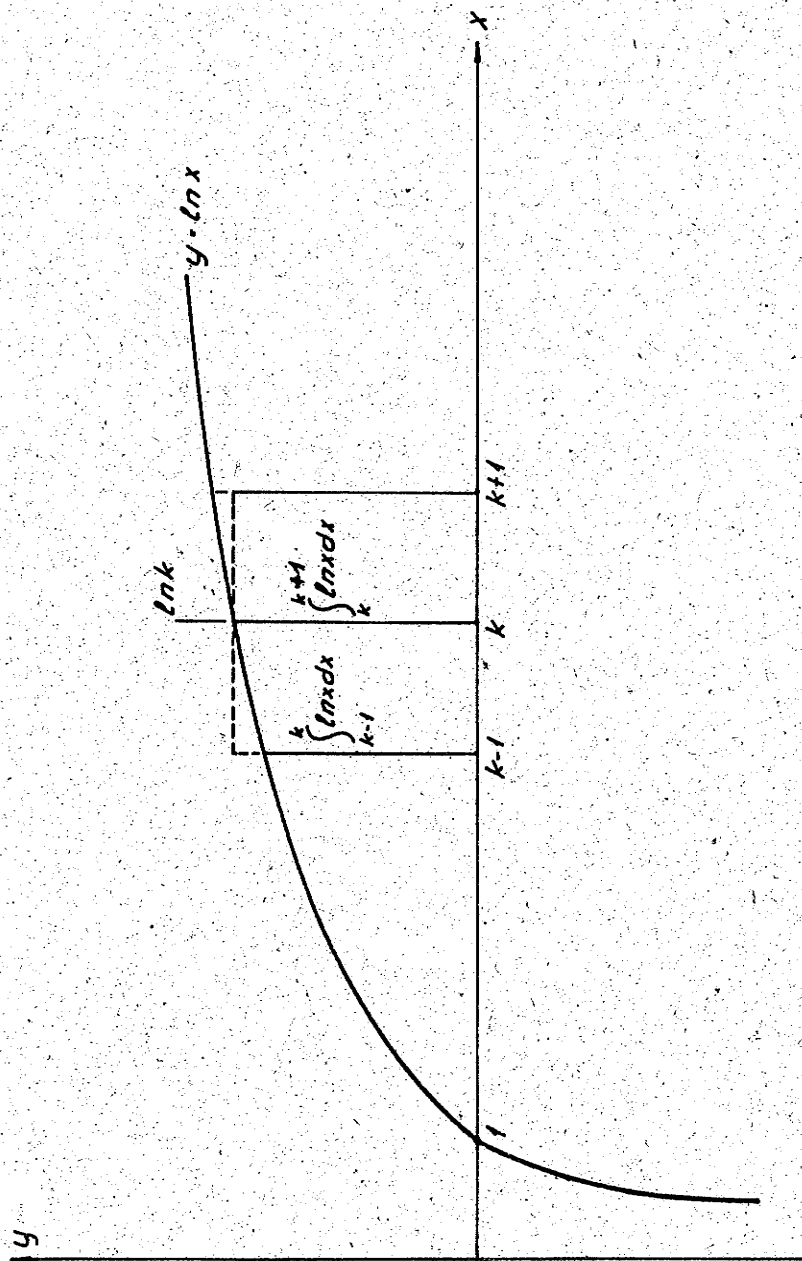
a) Mivel az $y = \ln x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért igaz az

$$\int_{k-1}^k \ln x \, dx < \ln k < \int_k^{k+1} \ln x \, dx$$

egyenlőtlenség $k > 1$ -re, ami például geometriailag a mellékelt rajzból is leolvasható (1. ábra).

Nézzük még meg a $(0, 1)$ és $(1, 2)$ intervallumokra az egyenlőtlenséget, parciális integrálás elvégzésével. Az első integrál improprius integrál, ezért emlékeztetünk a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ határértékre.

$$x \rightarrow 0$$



1. ábra

Az

$$\int_0^1 \ln x \, dx < \ln 1 < \int_1^2 \ln x \, dx$$

egyenlőtlenséget kell igazolni.

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_0^1$$

azaz

$$\left[x \ln x - x \right]_0^1 < \ln 1 < \left[x \ln x - x \right]_1^2$$

$$-1 < \ln 1 < 2 \ln 2 - 2 + 1,$$

ami a

$$-1 < \ln 1 < \ln \frac{4}{e}$$

alakban is írható.

Nézzük a következő, összegekre felírt egyenlőtlenséget:

$$\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \ln x \, dx < \ln n! < \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln x \, dx$$

amely minden $k \geq 1$ egész számra fennáll.

(Szabad az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összegezni a reláció iránya nem változik meg.)

A határozott integrálnak a határookra vonatkozó additivitása miatt az egyenlőtlenséget így írhatjuk

$$\int_0^n \ln x \, dx < \ln n! < \int_1^{n+1} \ln x \, dx.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\left[x \ln x - x \right]_0^n < \ln n! < \left[x \ln x - x \right]_1^{n+1}$$

$$n \ln n - n < \ln n! < (n+1) \ln (n+1) - n.$$

Az is igaz, hogy $n < n + \frac{1}{2} < n + 1$, ennek alapján tehát

$$n \ln n - n < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n < (n+1) \ln (n+1) - n$$

egyenlőtlenség is fennáll.

b) Tekintsük a

$$d_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n \quad (1)$$

sorozatot. Szeretnénk erről a sorozatról jellemzést adni, és konvergens vagy divergens voltát megállapítani. Azt az ismert tételt fogjuk alkalmazni, hogy monoton korlátos sorozat konvergens.

$$d_n - d_{n+1} = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n - \ln (n+1)! - \ln (n+1) + \left(n+1 + \frac{1}{2}\right) \ln (n+1) - (n+1)$$

Összevonás után:

$$d_n - d_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} - 1$$

adódik.

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{2n+2}{2n+1} - 1,$$

illetve

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1} - 1,$$

a tört egyszerűsítése után:

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} - 1.$$

Emlékeztetünk az $y = \ln(1+x)$ és az $y = \ln(1-x)$ függvények nulla körüli Taylor-soraira. Azokból összegezéssel kapjuk a következő formulát:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

... a sor $|x| < 1$ -re konvergens.

Ezt alkalmazva kapjuk, hogy

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots \right\} - 1.$$

Elvégezve a beszorzást:

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{(2n+1)^6} + \dots$$

Látható, hogy $d_n - d_{n+1} > 0$, amiből $d_n > d_{n+1}$ következik. A d_n sorozat monoton csökkenő és mivel $d_1 = 1$, ez a sorozat maximális értéke. Nézzük az alulról való korlátosság megvan-e? Ha igen, akkor a $\{d_n\}$ sorozat konvergens.

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^6} + \dots \right]$$

a geometriai sorral való majorálás alapján, azaz

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

illetve

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Tehát:

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

vagy átrendezve:

$$d_n - \frac{1}{12n} < d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}$$

Az

$$u_n = d_n - \frac{1}{12n}$$

sorozat tehát monoton növekvő.

$$u_1 = d_1 - \frac{1}{12} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12},$$

tehát

$$\frac{11}{12} < d_n - \frac{1}{12n} < d_n,$$

ezáltal d_n -re adtunk egy alsó becslést, és pedig $d_n > \frac{11}{12}$.

Emellett a $\frac{11}{12} < d_n \leq 1$ egyenlőtlenség is minden n -re fennáll, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$$

létezik.

Szeretnénk "d" értékére becslést adni. Nézzük meg a $d_n - d_{n+1} > 0$ különbségeket.

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} - \frac{1}{7(2n+1)^6} + \dots$$

ebből

$$d_n - d_{n+1} > \frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Az első tag kisebb, mint az összeg, hiszen pozitív minden összeadandó. Fennáll még az

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} > \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}$$

egyenlőtlenség is. Ennek igazolása algebrai úton történik. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd a nevezők pozitív volta miatt szorozzunk be a közös nevezővel:

$$\frac{1}{3(4n^2 + 4n + 1)} > \frac{12n + 12 + 1 - 12n - 1}{(12n+1)(12(n+1)+1)}$$

$$\frac{1}{3(4n^2 + 4n + 1)} = \frac{1}{12n^2 + 12n + 3} > \frac{12}{12n \cdot 12(n+1) + 12(n+1) + 12n+1},$$

azaz

$$\frac{1}{12n^2 + 12n + 3} > \frac{12}{144n^2 + 144n + 24n + 13}$$

Ebből

$$144n^2 + 168n + 13 > 144n^2 + 144n + 36,$$

illetve

$$24n > 23$$

következik. Így tehát:

$$d_n - d_{n+1} > \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}$$

$$d_n - \frac{1}{12n+1} > d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}$$

A

$$b_n = d_n - \frac{1}{12n+1}$$

jelölést bevezetve kapjuk, hogy $b_n > b_{n+1}$, tehát a $\{b_n\}$ sorozat monoton csökkenő. Láttuk, hogy az $\{u_n = d_n - \frac{1}{12n}\}$ sorozat monoton növekvő, továbbá fennáll az

$$u_n < b_n \text{ egyenlőtlenség.}$$

Igy

$$d_n - \frac{1}{12n} < d < d_n - \frac{1}{12n+1}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - u_n) = 0.$$

Az alábbi ábra szemlélteti az elmondottakat:

$d_n - \frac{1}{12n}$	d	$d_n - \frac{1}{12n+1}$
pozitív, mon. növekvő feülről korl. sorozat $d_n \leq 1$	$ $	mon. csökkenő poz. tagu sorozat alulról korlátos, $d_n > \frac{11}{12}$

A fentiek alapján

$$\frac{11}{12} < d < 1.$$

Nézzük meg a $d - d_n$ eltérést:

$$d_n - \frac{1}{12n} < d < d_n - \frac{1}{12n+1},$$

azaz

$$-\frac{1}{12n} < d - d_n < -\frac{1}{12n+1},$$

a

$$d_n - d = \delta_n \text{ jelölést bevezetve:}$$

$$\frac{1}{12n+1} < \vartheta_n < \frac{1}{12n} \quad (2)$$

A $\vartheta_n + d = d_n$ kifejezést fogjuk használni. Az (1) összefüggésbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{d_n}{e^n} = \frac{\ln n! - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n}{e^n},$$

azaz

$$\frac{d_n}{e^n} = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot e^n \quad (3)$$

Innen

$$n! = e^{\frac{d_n}{e^n}} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n} e^{-n},$$

vagy mivel $d_n = d + \vartheta_n$,

$$n! = e^d e^{\vartheta_n} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n} e^{-n}.$$

Az e^d értéket akarjuk meghatározni. Tudjuk, hogy $e^{\vartheta_n} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$.

Az e^d értéket a Wallis-formula segítségével kapjuk.

c) A Wallis-formula

Tekintsük az

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \text{integrált.}$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx = \left[-\sin^{n-1} x \cdot \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx,$$

azaz

$$I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx,$$

vagyis az

$$I_n = (n-1) I_{(n-2)} - (n-1) I_n$$

rekurziós formulához jutunk, amelyből

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{(n-2)}$$

minden indexre fennáll. Két esetet különböztetünk meg: n páros és n páratlan. Akkor

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{(2n-2)}$$

ugyanígy $2n-2$ -re alkalmazva:

$$I_{(2n-2)} = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{(2n-4)}$$

Helyettesítsük ezt I_{2n} -be:

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4}$$

Végül is az

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

formulához jutunk. Lévé

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

keresett integrálunk értéke:

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Számítsuk ki hasonlóan $I_{(2n+1)}$ értékét.

$$I_{(2n+1)} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{1} I_1.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

énnélfogva

$$I_{(2n+1)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} \cdot 1.$$

Lássuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

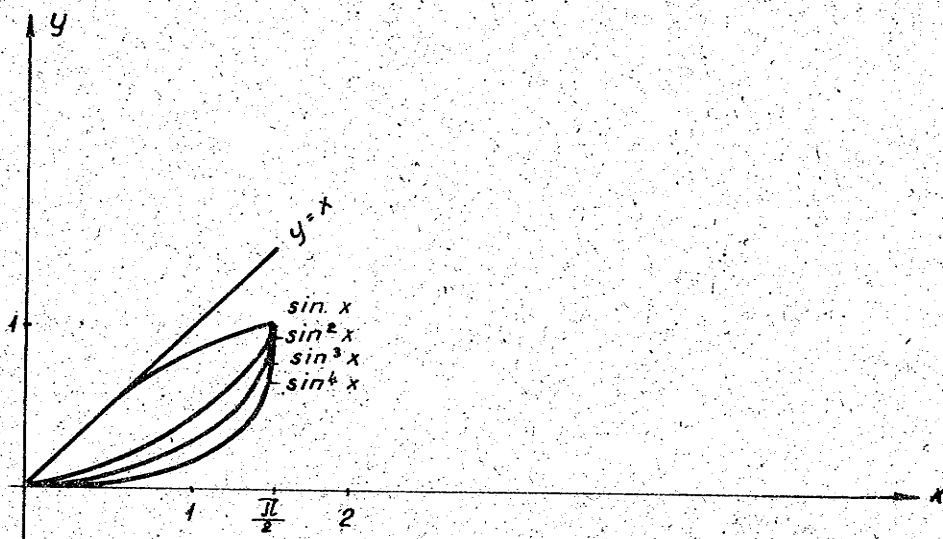
$$\frac{I_{2n}}{I_{(2n+2)}} > \frac{I_{2n}}{I_{(2n+1)}} > 1.$$

Először is:

$$I_{2n} > I_{(2n+1)} > I_{(2n+2)},$$

amint a következő függvényábrázolás szemléletesen mutatja (2. ábra).

(Ui. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ -re $0 < \sin^{k+1} x < \sin^k x < 1$, minden természetes k számra.)



2. ábra

Továbbá

$$\frac{I_{2n}}{I_{(2n+2)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) (2n+1)} =$$

$$= \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{n+1}{n + \frac{1}{2}} \rightarrow 1 \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{(2n+2)}} = 1$$

és emiatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{(2n+1)}} = 1 \text{ szintén,}$$

vagy másképpen

$$\frac{I_{(2n+1)}}{I_{2n}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) (2n+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \frac{\pi}{2}} \rightarrow 1.$$

Átalakításokat végezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n]^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

A törtet bővítve

$[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n]^2$ -nel azt kapjuk, hogy

$$\frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n]^4}{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-1) 2n]^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{[(2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3)(2 \cdot 4) \dots (2 \cdot n)]^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

vagyis

$$\frac{2^{4n} \cdot (n!)^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)} \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Négyzetgyököt vonva adódik, hogy

$$\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2} \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}} \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} = 1$. Így tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}. \quad (4)$$

Most a (3) kifejezéshez térjünk vissza és vezessük be az

$$a_n = e^{dn}$$

jelölést. Tudjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d \text{ létezik, így}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = e^d \text{ is létezik.}$$

$$a_n = e^{d_n} = n! n^{-n - \frac{1}{2}} \cdot e^n,$$

ebből

$$n! = e^{d_n} \cdot n^n \cdot \sqrt{n} e^{-n},$$

vagyis

$$n! = a_n n^n \cdot \sqrt{n} e^{-n}.$$

$n!$ -t behelyettesítjük (4)-be, így kapjuk, hogy

$$\frac{2^{2n} a_n^2 n^2 \cdot n^{2n} e^{-2n}}{a_{2n} \sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{\pi}$$

amelyből egyszerűsítések után adódik, hogy

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} \rightarrow \sqrt{2\pi}, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ ezért } a_n \rightarrow a, a_{2n} \rightarrow a, \text{ és}$$

így

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty \text{ esetén!}$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2\pi}.$$

Ezzel meghatároztuk a konvergens $\left\{ e^{d_n} \right\}$ sorozat határértékét is.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{d_n} = \sqrt{2\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{d_n} = e^d = \sqrt{2\pi},$$

amelyből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \ln \sqrt{2\pi}.$$

Mindezek alapján

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} e^{\vartheta_n},$$

amit igazolni akartunk.

Fenti egyenlőségünk logaritmikus alakja:

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \vartheta_n,$$

ahol

$$\frac{1}{12n+1} < \vartheta_n < \frac{1}{12n}$$

I.3 Ismétléses permutációk

Adva van n számú elem, ezek között k_1 elem azonos egymással, további k_2 számú szintén azonos egymás között, további k_3 számú azonos egymással stb. és végül k_m azonos egymás között:

$$\underbrace{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k_1}_{a, a, a \ \dots \ a}, \underbrace{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k_2}_{b, b, b, \ \dots \ b}, \underbrace{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k_3}_{c, c, c, \ \dots \ c} \ \dots \ \underbrace{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k_m}_{v, v, v, \ \dots \ v},$$

Az elemek száma $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = n$. Kérdés, hányféle sorrendben lehet egymás mellé elhelyezni őket. Nyilvánvalóan nem kapunk annyi sorrendet, mintha mind az n elem különböző volna. U. is ha akármelyik felírt sorban csak az egyforma "a" elemeket cseréltem fel egymás között, ez ugyanazt a felírást adja, ugyanígy a "b" elemek egymás között való felcserélése új sorrendet nem ad. Ugyanígy van a többi azonos elemeknél is. Új sorrendet csak akkor kapunk, ha különböző elemeket cserélünk fel egymással. Az ismétléses permutációk számának meghatározását visszavezetjük az ismétlés nélküliekre. Jelöljük ezt a keresett számot

$$P_n^{(ism; k_1, k_2, \dots, k_m)}$$

nel.

Az ismétléses permutációk számát nem tudjuk, de gondolatban írjuk fel az összes ilyen. (Egyszerűség kedvéért jelöljük az elrendezendő elemeket ismét természetes számokkal.)

Pl.

1	1	1	2	2	2	2	3	3		5	.
1	2	1	1	2	2	2	3	3		5	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.
2	2	2	1	1	1	2	3	3		5	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.

Tekintsünk egyetlen felírást és az egyenlő 1-eseket különböztessük meg és permutáljuk őket egymás között, a többi elem közben legyen rögzített; így azonban egy tényleges elrendezésből annak $k_1!$ szorosát kapjuk. Ez minden különböző ismétléses permutáció esetére igaz. Így az "1"-esek megkülönböztetésével a keresett permutációk $k_1!$ -szorosát kaptuk:

$$P_n^{(ism; k_1, k_2, \dots, k_m)} \cdot k_1! - t.$$

Most az így kapott új permutációkban a "2"-es elemeket jelöljük meg megkülönböztetésül, és az előbb nyert minden egyes sorból készítsük el az összes különböző sorrendeket az előbbi módon. Mivel k_2 számú "2"-es elemünk volt, minden előző felírás $k_2!$ -szorosát kapjuk,

összesen: $\left[\begin{matrix} (ism; k_1, k_2, \dots, k_m) \\ P_n \end{matrix} \right] k_1! k_2!$
számu permutációt.

Most járjunk el az előző módon a "3"-as jelzésű elemekkel is; akkor már összesen

$$P_n (ism; k_1, k_2, \dots, k_m) k_1! k_2! k_3!$$

különböző permutációs sorrendet kapunk.

Eljárásunk végén a

$$k_m! \dots \left\{ k_3! \left[k_2! \left(k_1! P_n (ism; k_1, k_2, \dots, k_m) \right) \right] \right\} = n!$$

formulához jutunk.

Ebből;

$$P_n (ism; k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_m!}$$

Egy példa:

Boltzmann szerint n db megszámozott (tehát egymás közt különböző) golyót m számu cellában helyezünk úgy, hogy az 1-es cellába n_1 számu, a 2-es cellába n_2 számu, ..., az m -es cellába n_m számu golyót teszünk. Az $n_1, n_2, \dots, n_m$ számokat betöltési számoknak hívjuk.

Az m db cellában $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m = n$ számu golyó van.

$$\frac{1\text{-es cella}}{n_1 \text{ golyó}} \quad \frac{2\text{-es cella}}{n_2 \text{ golyó}} \quad \frac{3\text{-as cella}}{n_3 \text{ golyó}} \quad \dots \quad \frac{m\text{-es cella}}{n_m \text{ golyó}}$$

Fogjuk fel úgy a dolgot, mint egy részecskékre vonatkozó elrendezési feladatot. Ha a golyók egy cellában helyet cserélnék, az nem új állapot. Ha azonban a golyók átmennék másik cellába, az már új állapotot jelent. Kérdés, hányféle állapot elrendezés lehetséges. A felírt modell mutatja, hogy ismétléses permutációról van szó; az összes elemek száma n , n_1 db egyező, n_2 db más, de egymásközt megegyező elem van. s.i.t.

Ezt így írhatnánk le számokkal:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{4} & \dots & \underbrace{n_1} & \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \dots & \underbrace{n_2} & \dots & \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \dots & \underbrace{n_m} \\ g_1 & g_1 & g_1 & g_1 & \dots & g_1 & g_2 & g_2 & g_2 & \dots & g_2 & \dots & g_m & g_m & g_m & \dots & g_m \end{array}$$

ami pedig éppen kiinduló feladatunk volt az ismétléses permutációk kiszámításánál: Tehát:

$$P_n^{(ism; k_1, k_2, \dots, k_m)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

I.4 Kombinációk

n számú különböző elemből kiválasztunk minden lehető módon k számú elemet ($0 < k \leq n$), úgy, hogy a kiválasztott " k " elem sorrendjére nem vagyunk tekintettel. Azt mondjuk, n elem k -ad osztályu kombinációit képezzük.

Pl.: Hány különböző sakkparti játszható 10 részvevő esetében? Itt 10 elem másodosztályu kombinációit kell meghatározni. Általánosan jelöljük a meghatározandó kombinációk számát C_n^k -val:

$$C_n^k = \text{kombinációk száma.}$$

Legyenek a különböző elemek $1, 2, 3, \dots, n$, k adott szám, írjunk a kiválasztott k db elem fölé "+" jelet, a ki nem választottak fölé pedig (ezek $(n-k)$ -an vannak), "-" jelet.

Pl. így

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & + & - & & - & + \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots & (n-1), & n, \end{array}$$

itt most kiválasztottuk az $1, 3, 4, \dots, n$ elemeket. Ha ezeknek egymás közötti sorrendjét változtatjuk, azaz a + jeleket egymás között permutáljuk, új kombinációt nem kapunk. Ezen elgondolás alapján újabb k elemet úgy választunk ki az előzőhöz képest, ha legalább egy "+" jelet egy "-" jelzéssel cserélünk fel, pl.

$$\begin{array}{ccccccc} - & + & + & + & - & & - & + \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots & (n-1), & n, \end{array}$$

Az első + jelet felcseréltük a 2-es fölött álló "-" jellel. Ez azt jelenti, hogy az "1"-es elemet nem választjuk ki, de az előbb nem szerepelt "2"-es elemét igen. A definíció értelmében új kombinációt kaptunk. Tegyük meg az összes lehetséges kiválasztásokat. Ez a k számú "+" jel és $(n-k)$ számú "-" jel összes ismétléses permutációinak számát adja. Tudjuk már, hogy

$$P_n(\text{ism}; k, n-k) = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Ismert formulák alapján:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!};$$

igazoljuk, hogy $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k) (n-k+1) \dots (n-1) n}{k! (n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n (n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

De

$$C_n^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1) \dots (n-1) n}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-n+k+1)}{(n-k)!}$$

így tehát

$$C_n^k = \binom{n}{n-k}.$$

Az

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

egyenlőség kombinatorikailag azt jelenti, hogy n elemből k számot annyi-féleképpen lehet kiválasztani, mint n elemből $(n-k)$ számú elemet. Ez ért-

hető is, ui. minden különböző k számú elem kiválasztásához tartozik $(n-k)$ elem ki nem választása. Így k számú elem kiválasztásának száma egyenlő az $(n-k)$ számú elem összes ki nem választásának számával.

Példák:

1. Lottoszervények különböző kitöltéseit számoljuk ki, $n = 90$, $k = 5$. Ahány módon 90 elemből 5 elemet ki tudunk venni, annyi különböző lottoszervény van. Az elemek mind különbözők.

$$C_{90}^5 = \frac{90!}{5! 85!} \approx 43949268 \approx 44 \cdot 10^6$$

2. Tudjuk, hogy egy db 5 találatos szervény van. Kérdés, hány darab 4 találatos szervény lehetséges (itt a különböző kitöltéseket számítjuk ki, ne tévesszük össze azzal, hogy hány 4 találatos szervény van hetenként, ezek között ugyanis lehetnek azonos kitöltésűek is, ami azt jelenti, hogy több olyan szervény van, amelyeken ugyanazok az eltalált számok).

A 4 találatosokon 4 szám a kihuzott 5 szám közül van, és a fennmaradó 1 szám pedig a ki nem huzott 85 közül való. 5 elemből 4-et $\binom{5}{4}$ féle módon, 85 elemből 1-et $\binom{85}{1} = 85$ módon lehet kihuzni. Így a 4 találatosok száma $= \binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} = 5 \cdot 85 = 425$.

3. Ugyanezen megfontolással a 3 találatosok száma $= \binom{5}{3} \binom{85}{2}$.

4. Egy társaságban 10 férfi és 8 nő van. Hány különböző 5 férfiből és 4 nóből álló társaságot állithatunk össze.

M: A 10 férfiből $\binom{10}{5}$ módon választhatunk ki 5 férfit, a 8 nóből $\binom{8}{4}$ képpen 4 nőt. De mivel a férfiaknak minden egyes kiválasztásához az összes lehetséges női csoport más és más 9 tagú társaságot jelent, így a $\binom{10}{5}$ férfi kiválasztáshoz $\binom{10}{5} \binom{8}{4}$ kiválasztás adja az összes lehetséges 9 tagú társaság számát.

I.5 Ismétléses kombinációk

Megjegyezzük előljáróban, hogy mivel kombinációról van szó egy kiválasztásban, ha az elemeket más sorrendben írjuk, ugyanazt a kombinációt kapjuk.

Pl.: 1 1 2 2 és 1 2 1 2 ugyanaz a kombináció. Így, ha számokkal jelöljük az elemeket, a természetes sorrendet, azaz a monoton növekvő sorrendet fogjuk használni. Ezek után megadjuk az ismétlések kombináció fogalmát.

Adott n különböző elemből kiválasztunk k számú elemet, de az elemek között az ismétlést is megengedjük. (Itt is k -ad osztályról van szó.)

Pl.: Legyenek a különböző elemek az 1, 2, 3, 4, 5 számok.

Válasszunk ki 3 elemet, az ismétlések megengedettek: ilyen kiválasztások lehetségesek pl. a következőképpen:

1 1 1	ha pl.	1 1 2 kiválasztást tekintjük
1 1 2	az	1 2 1 és a
1 2 3		2 1 1 ugyancsak kettő 1-est
...		és egy db 2-est tartalmaznak,
...	de	ezek nem adnak újabb ismétléses
2 2 2		kombinációt.
...		
3 3 4		
...		
4 5 5		
5 5 5		

Az ismétléses kombinációk számát n különböző elem esetén, ha az osztályszám k , jelöljük $C_n^{(k \text{ ism.})}$ -sel.

$$C_n^{(k \text{ ism.})} = ?$$

A mi példánk esetében

$$C_5^{(3 \text{ ism.})} = ?$$

Képzeljük el az összes ismétléses kombinációt egymás alá írva bal oldalon, számukat nem ismerjük. A monoton növekedést a felírt szakoknál

természetesen tartjuk. Rendeljük hozzá minden egyes ismétléses kombinációhoz egy ismétlés nélkülit a következő módon:

Adjuk a bal oldalon minden elemhez sorban a 0, 1, 2 értékeket. (Felül jelezzük.)

	0 1 2		
1 1 1	1 1 1	→	1 2 3
	0 1 2		
1 1 2	1 1 2	→	1 2 4
1 1 3	. . .		. . .
1 1 4	. . .		. . .
1 1 5	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
	0 1 2		
2 2 2	2 2 2	→	2 3 4
2 3 4	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
3 3 3	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
	0 1 2		
3 4 4	3 4 4	→	3 5 6
. . .	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
4 4 5	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
. . .	. . .		. . .
	0 1 2		
5 5 5	5 5 5	→	5 6 7

Mivel a bal oldalon felírt ismétléses kombinációkat jelképező számok monoton növekvők és az első helyen állóhoz mindig 0-t, a második helyen állóhoz mindig 1-et, a harmadik helyen állóhoz mindig 2-öt adunk, ha eredetileg egyenlő számok állnak egymás mellett, a leképezés után egymás után következő számokat kapunk szigorúan monoton növekvő sorrendben. Ha pedig a bal oldalon különböző elemek állnak egymás mellett, akkor a leképezésnél nem egymás utáni számokat kapunk, de a szigorúan monoton növekvés szintén bekövetkezik. Pl.

0 1 2 1 2 3

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Journal of Management Studies, 19(1), 67-80.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & & \\ & & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

• • • • •

0 1 2
5 5 5

5 6 7

Igy a bal oldalon álló ismétléses kombinációk száma:

$$C_5^{(3 \text{ ism.})} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3}$$

Még felmerül az a kérdés, hogy a jobb oldalon kimerítettük-e. C_7^3

Képezzük az n elemből alkotható k -ad osztályu ismétléses kombinációkat. (Elemek $1, 2, 3, \dots, n$)

A definíció tartalma az, hogy az n különböző elemből az összes lehetséges módon képezzük a monoton növekvő sorozatokat, amelyek k -ad osztályuak.

Legyenek az elemek:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ mind különbözőek, és ezen jelölés helyett használjuk az $1, 2, 3, 4, \dots, n$ jelölést, az elemeket ez a jelölés úgy megkülönbözteti, mint bármely más megkülönböztető jel.

Képezzük az összes lehetséges ismétlések kombinációkat, vagyis az elemek és osztály szám adta összes monoton növekvő kombinációs sorrendet. Ezek számát fogjuk meghatározni kölcsönösen egyértelmű leképezéssel. A leképezési utasításunk az, hogy adjunk rendre minden elemhez a következő módon nem-negatív egész számokat: az első elemhez 0 -át, a második elemhez 1 -et, a harmadikhoz 2 -t, és így tovább a k -adik helyen állóhoz pedig $(k-1)$ -et.

Pl.

0 1 2 3 4 5 . . . k-2, k-1	
1, 1, 2, 2, 2, 3 4, 5	$\rightarrow 1, 2, 4, 5, 6, 8, \dots, 4+k-2, 5+k-1$
.	a felül irt számok mutatják a hozzá-
.	adandó értékeket.

Itt állnak az ismétléses kombinációk valamennyien

Itt jobb oldalon állnak a transzformáltak.

0 1 2 3 4 5 . . . k-2, k-1	
2, 2, 2, 3, 3, 4 4, 5	$\rightarrow 2, 3, 4, 6, 7, 9, \dots, 5+k-2, 5+k-1$

A transzformáltak mind különböző elemekből álló k -ad osztályu kombinációk. Mind különböző elemből áll, mert ha két azonos nagyságú elem állt is az eredetiben egymás mellett, az egy hellyel jobbra állóhoz egy egységgel többet adtunk. Különböző két ismétléses kombinációhoz különböző két ismétlés nélkülöt kapunk. Ugyanis ezeknek legalább egy elem értékében el kell térniök és akkor a leképezésnél is meg van az ugyanannyival való eltérés.

Fordítva, két különböző transzformált sorból visszatranszformálásnál két különböző eredeti ismétléses kombinációhoz jutunk. Tehát egy-egy értelmű a leképezés. Nézzük meg a keletkezett ismétlés nélküli k -ad osztályu kombinációkat, hány elemből képeztük őket. Az első elemtől az utolsóig mind megtalálható itt is, hiszen az első helyen álló elemekhez mindig 0 -át adtunk (az első helyen pedig minden elem fellép az ismétléses kombinációknál, $1, 2, \dots, n$ is. A legnagyobb értékű pedig $n+k-1$ értékű,

mert az utolsó helyen fellépő elemhez $k-1$ adódik hozzá, ami maximális $n+k-1$ értéket jelent. Tehát a jobb oldalon $n+k-1$ elemből képzett ismétlés nélküli kombinációk vannak.

Kérdés mind itt van-e?

$$C_n^{(k \text{ ism.})} = \binom{n+k-1}{k} \quad \text{Igaz-e ezen egyenlőség?}$$

Erre igennel kell válaszolnunk. Ugyanis minden ismétlés nélküli kombináció szigorúan monoton növekvő sorozat, visszatranszformálása után a visszatranszformálás szabálya szerint monoton növekvő sorozatot kapunk, ez pedig az ismétléses kombináció definíciója szerint egy sorrendet jelent. Tehát

$$C_n^{(k \text{ ism.})} = \binom{n+k-1}{k}$$

Világos, hogy az ismétléses kombinációk esetében k lehet n -nél nagyobb is.

Feladatok:

1. 6 munkás évente 4 ízben kap jutalmat. Hányféleképpen lehetséges ez, ha egy személy akár négyszer is kaphat.

M: Kombinációs kérdés, mert csak a személy érdekel bennünket, (akiket számokkal fogunk megkülönböztetni) a sorrend nem számít. Ismétléses pedig azért, mert egy személy többször is kaphat jutalmat. Tehát

$$C_6^{(4 \text{ ism.})} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4}$$

2. Hány lapocskából áll a nyolcas dominó?

M: Tudnunk kell, hogy a lapocskák két számot kapnak és ezek egyenlők is lehetnek, és azt, hogy "0" jegy is szerepel mint szám. Így:

Mivel minden dominóra két szám kerül másodosztályú a képzés, 9 db elemből.

Még arra kell válaszolnunk, miért kombináció? Azért, mert a dominon a számok sorrendje nem számít.

A $[0; 1]$ -es dominó egyben az $[1; 0]$ -ás is. A végek nincsenek megkülönböztetve, így csak 1 db van ebből.

Tehát

$$C_9^{(2 \text{ ism.})} = \binom{9+2-1}{2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

A nyolcas dominó 45 lapocskából áll.

3. Három teherautónk van, és 100 db zsák burgonyánk. Egy kocsira akárhányat tehetünk. Hányféle különböző megterheléssel lehet a szállítást elvégezni?

M: Jelöljük meg a kocsikat 1, 2 és 3 jellel, egy megterhelés sablonja legyen az, hogy amelyik kocsiban van a zsák azt a számot kapja. Pl. ha, mind az első kocsiban van, csupa 1-es a sorrend.

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & & & & \underbrace{99} & \underbrace{100} \\ 1, 1, 1 & \dots & 1, 1, 1, & \dots & & & 1, & 1 \end{array}$$

Ha pl. az első kocsiban 30 a másodikban 25, a harmadikban természetesen a többi, ekkor a jelölés a következő:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & & \underbrace{30} & \underbrace{31} & & \underbrace{55} & \underbrace{56} & & \underbrace{100} \\ 1, 1, 1, & \dots & 1, 2, 2, 2, & \dots & 2, & 3, 3, 3, & \dots & 3 \end{array}$$

Ha egy terhelés mellett a kocsik sorrendjét felcseréljük, de a zsákok maradnak, nem kapunk újabb terhelést.

Látható, hogy minden lehetséges terhelést leír ez a modell, akkor pedig 3 különböző elem 100-ad osztályú ismétléses kombinációjáról van szó. Tehát

$$C_3^{(100 \text{ ism.})} = \binom{3+100-1}{100} = \binom{102}{100} = \binom{102}{2} = \frac{102 \cdot 101}{1 \cdot 2}$$

4. Bose-Einstein probléma. (Hasonló az előzőhöz.)
Legyen k db cellánk és helyezzünk el bennük minden lehetséges módon molekulákat. A molekulák egymás közt teljesen egyformák, ezért csak az a lényeges, hogy egy cellában hány molekula helyezkedik el, de az nem, hogy mely molekulák ezek.

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{c_1} & \boxed{c_2} & \boxed{c_3} & \dots & \dots & \dots & \boxed{c_k} & \text{(molekulák száma } n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & k \end{array}$$

Minden elhelyezkedés lehetséges oly módon, hogy akár egy cellában lehet minden molekula. Két állapot akkor különböző, ha valamelyik cella betöltési száma megváltozik.

M: Itt is azt mondhatnánk, hogyha valamely molekula valamelyik cellába bekerül, a cella számát veszi fel. Így ha a cellák egy előző állapothoz képest más molekulákkal vannak ugyan töltve, de a számuk sehol sem változott meg, ugyanazt az állapotot jelentik. Tehát az előző feladat terhelési problémájáról van szó. A cellák legyenek megszámozva: $c_1, c_2, \dots, c_k$ és a molekula azt az index számot veszi fel, amelyikbe belekerül. Így k elem n -ed osztályu ismétléses kombinációjáról van szó:

$$C_k^{(n \text{ ism.})} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Pl. $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ cellák
 $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$ molekulák

5. Legyen $r \geq n$, és legyen n db golyó, helyezzük el az r cellába úgy, hogy egy cellába legfeljebb 1 golyó kerülhet. Hányféle elhelyezkedés lehetséges?

M: Mivel minden golyót el kell helyezni, az osztályszám n és mivel r cella közül kell ezt az n db cellát kiválasztani, így $\binom{r}{n}$ számú elhelyezkedés van (Fermi-Dirac-féle elhelyezkedés).

I.6 Ismétlés nélküli variációk

n különböző elemből kiválasztunk k számú különbözőt és ezeket minden lehetséges sorrendbe írjuk. (Egy kiválasztott elem csak egyszer szerepelhet.)

Mivel n különböző elemből k számú elemet $\binom{n}{k}$ -féleképpen lehet kiválasztani, ezen felírásokból kell képezni az összes lehetséges sorrendet. Így minden kombinációs sorból $k!$ sort képezünk, az $\binom{n}{k}$ sorból $\binom{n}{k}$ számú sort.

Tehát:

$$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$$

Példák:

1. 20 tanulóból hányféleképpen lehet osztálytitkárt, pénztárost, és tanulmányi felelőst kiválasztani?

M: Mivel a három tisztség különbözik, így hármas kiválasztás esetén még figyelembe kell azt is venni, hogy a háromféle tisztség a három tanuló között még 3! különböző módon osztható el. Más eset az, ha A személy aki egy kiválasztásnál szerepel, a titkár, a pénztáros, vagy a tanulmányi felelős tisztét látja el. Mivel $\binom{20}{3}$ -féleképpen választhatunk ki 20 tanulóból hármas csoportokat és minden kiválasztás még 3! variációt jelent, így az összes esetek számát a

$$V_{20}^3 = \binom{20}{3} 3! \text{ szám adja.}$$

Megjegyezzük, hogy ahol a példa természete szerint a más-más sorrend más-más esetet jelent, az mind variációs feladat.

2. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jegyekből hány db négyjegyű számot lehet felírni, ha egy számban minden jegy különböző.

M: Látható, hogy 10 elemből képzett negyedosztályu variációk száma az összes szám négyeseket megadja. Azonban ezek között vannak a négy jegyből álló, de 0-val kezdő száz-as nagyságrendű számok is. Ezeket le kell vonni. A 0-szám az első helyen annyi esetben állhat, ahányszor a fennmaradó kilenc elem három elemű variációit képezni tudjuk, ez pedig $\binom{9}{3} 3!$ számú eset. Ezt le kell vonni az összes esetből. Tehát a szóban forgó négy számjegyű számok száma

$$V_{10}^4 - V_9^3 = \binom{10}{4} 4! - \binom{9}{3} 3!.$$

I.7 Ismétléses variációk

n különböző elem közül k számú elemet választunk ki, ügyelve a sorrendre és megengedünk ismétlődéseket.

A lehetséges kiválasztások számát jelöljük

$$V_n^{(k \text{ ism.})} \text{ -mel. A } V_n^{(k \text{ ism.})} \text{ szám}$$

meghatározása teljes indukcióval történik.

Legyen először $k = 1$. Ekkor n elemből egy elemet választunk ki.
A lehetséges variációk:

1, 2, 3, n

$$V_n^{(1 \text{ ism.})} = n$$

Legyen $k = 2$.

A lehetséges variációk:

11	12	13	...	1n
21	22	23	...	2n
31	32	33	...	3n
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
n1	n2	n3	...	nn

Vagyis:

$$V_n^{(2 \text{ ism.})} = n^2$$

A

$$V_n^{(3 \text{ ism.})}$$

száma úgy határozható meg, hogy minden előzőből n db újat képeztünk oly módon, hogy az n elem mindegyikét leírjuk utolsó elemként az előbbi elempárok mindegyike mögé. Így megint az előzőek számának n -szeresét kapjuk.

$$V_n^{(3 \text{ ism.})} = n^3$$

Menjünk a k -adik osztályról a $(k+1)$ -ik osztályra. Feltételezzük, hogy

$$V_n^{(k \text{ ism.})} = n^k$$

már igazolt.

A $V_n^{k \text{ ism.}}$ számu sorrendet felírjuk most is gondolatban és a $k+1$ -ik helyre minden eddigi n^k számu variációhoz hozzáírjuk az 1, 2, 3, ..., n elemeket. Így minden egyes k -ad osztályu ismétléses variációból n számu $(k+1)$ -ed osztályu variációt kapunk. Tehát

$$V_n^{(k+1 \text{ ism.})} = n^k \cdot n = n^{k+1}.$$

Pl.	a régi	uj
	$\underbrace{1} \underbrace{2} \underbrace{3} \underbrace{4} \dots \underbrace{k}$	$\rightarrow \underbrace{k+1}$
	1 2 2 3 5	$\rightarrow 1$
	1 2 2 3 5	$\rightarrow 2$
	1 2 2 3 5	$\rightarrow 3$
		$\rightarrow \cdot$
		$\rightarrow \cdot$
		$\rightarrow \cdot$
	1 2 2 4 5	$\rightarrow n$

Példa:

Hány 6 jegyű szám van?

M: A feladat ismétléses elrendezés, mert a számokban egy-egy számjegy több ízben is felléphet pl. 2 2 4 4 1 3 is ilyen. Az is látható, hogy különböző sorrendbe írva a számjegyeket, más és más számokat kapunk. Tehát 10 elem 6-od osztályu ismétléses variációjáról van szó. Látható, hogy ezekben az egy, vagy több "0"-val kezdődő számok is benne vannak, ezek azonban nem 6 jegyű számok; pl. a 0 0 0 0 14 szám. Ezek számát azaz a

$$V_{10}^{(5 \text{ ism.})} = 10^5$$

számot le kell vonni.

Az összes hétjegyű számok száma tehát

$$V_{10}^{(6 \text{ ism.})} - V_{10}^{(5 \text{ ism.})} = 10^6 - 10^5 = 10^5 (10-1) = 9 \cdot 10^5.$$

1.8 Példák a kombinatorikához

1. Tombolán 50 jegyet adtak el. A sorsoláson először 3 egyforma kisebb nyereményt sorsolnak, majd a megmaradt számok között két egyforma nagyobb nyereményt, végül és ezután megmaradt számok között a főnyereményt. A nyerő tombolajegyek hányféle változata lehetséges?

Megoldás:

$$\binom{50}{3} \binom{47}{2} \binom{45}{1} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3!} \cdot \frac{47 \cdot 46}{2!} \cdot 45 = 953442 \text{ 000.}$$

2. Négy egyforma kockát feldobunk. Hányféle dobás lehetséges?

I. eset

A kockákat megkülönböztetjük.

5 2 2 6

1. 2. 3. 4.

6 számból kell négyet kiválasztani, ismétléssel, sorrendre ügyelve!

$$6^4 = 36 \cdot 36 = 1296$$

II. eset

A kockákat nem különböztetjük meg egymástól. (Itt a dobott számok sorrendje nem számít.)

6 számból négyet választunk ki ismétléssel, de a sorrend lényegtelen.

$$\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= 9 \cdot 2 \cdot 7 = 63 \cdot 2 = 126$$

3. Hányféle színű golyót kell egy dobozba tennünk, hogy két, egymás utáni húzásnál 28-féle különböző lehetőségünk legyen, ha az elsőként kihuzott golyót visszatesszük a dobozba és a golyók sorrendjét a kihuzott pároknál figyelmen kívül hagyjuk?

Megoldás:

n-féle színt: 1, 2, 3, ..., n a színek.

$$\binom{n+2-1}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = 28$$

$$n^2 + n - 56 = 0, \quad n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2} = \begin{matrix} 7 \\ -8 \end{matrix}, \quad \text{tehát 7 féle szintű.}$$

4. 9 ember akar felszállni egy három kocsiból álló villamosszerelvényre. Hányféleképp lehetséges ez egyáltalán, továbbá hány olyan felszállás van, amelynél mindegyik kocsira 3-3 ember jut?

A kocsik legyenek A, B, C jelűek.

A B A A B C C A C

Személyek: 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Az A, B, C jeleket kell 9 helyre felírni ismétléssel, a sorrend is lényeges. A lehetséges felszállások száma:

$$3^9$$

Amikor mindegyik kocsira 3-3 ember jut, ezt úgy szimbolizáljuk, hogy három A, három B és három C betűt írunk a 9 személy fölé: A B A A B C B C C

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\text{A lehetséges szám: } \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{9!}{(3!)^3}$$

I.9 Bolyongások a számegyenesen

19.1 Bevezetés

A számegyenesen való bolyongást síkbeli (2 dimenziós) ábrával szemléltetjük. A bolyongás színhelyét szolgáló x-tengelyen felvevesszük rá mérőlegesen a "t" időtengelyt. A pontnak minden egyes lépése egy időegység alatt menjen végbe, és így minden egyes lépésnek megfelel egy lépés jobbra az idő tengely mentén, továbbá egy lépés felfelé, ha a számegyenesen jobbra mozdult el a pont és egy lépés lefelé, ha az x-tengelyen balra mozdult el a pont.

Az egyes elmozdulásokat tehát egy két komponensű vektorral ábrázoljuk, amelynek az első komponense mindig 1. A második komponense +1, ha a számegyenesen jobbra mozdult el a pont, -1, ha balra mozdult el a pont.

Induljunk ki mindig a (t, x) rendszer origójából úgy, hogy az egyes elmozdulásokat jelképező $\bar{\epsilon}_i = [1, \epsilon_i]$ vektorokat egymás után felrajzoljuk. $\epsilon_i = +1$ ha jobbra mozdult el a pont, és $\epsilon_i = -1$, ha balra mozdult el a pont. Így az n lépésből álló bolyongást egy tört vonallal, vagy más néven uttal szemléltethetjük, amely az origóból kiinduló egymás után következő n számú $\bar{\epsilon}_i$ vektorból áll. n lépés után a mozgó pont helyét a (t, x) koordináta-rendszerben megadja az (n, x) koordinátákkal bíró pont, ahol n a lépések száma és

$$x = S_n = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n$$

(3. ábra).

n lépésből álló bolyongást az ábra szerint szemléltettünk egy tört-vonallal (uttal).

Ha a mozgó pont p lépést tesz jobbra, és q lépést tesz balra, azaz $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ között p számú $+1$ és q számú -1 van, akkor

$$p + q = n$$

$$p - q = x.$$

n és x megadásával p és q adottak és viszont.

$$p = \frac{n+x}{2}, \quad q = \frac{n-x}{2},$$

tehát n és x paritása megegyezik.

Hány különböző, n lépésből álló ut létezik egyáltalán?

Válasz: ahányféleképp a $+$ és $-$ jelek az n szám fölé felírhatók minden lehetséges (ismétléses) sorrendben, tehát összesen

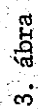
$$\underline{2^n}.$$

A lehetséges, n -lépéses utak száma tehát 2^n .

$$\begin{array}{cccccccc} + & - & - & + & + & & - & + & - \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots & (n-2), & (n-1), & n \end{array}$$

Hány különböző ut vezet az (n, x) pontba? Ezek számát jelöljük

$$N_{n,x} \text{ -szel.}$$



Ekkor p számú $+1$ és q számú -1 irandó az $1, 2, \dots, n$ számok fölé minden lehetséges sorrendben, tehát

$$N_{n,x} = \frac{n!}{p! q!} = \frac{n!}{p! (n-p)!} = \binom{n}{p} = \binom{n}{q} = \binom{\frac{n+x}{2}}{\frac{n-x}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n+x}{2}\right)! \left(\frac{n-x}{2}\right)!}$$

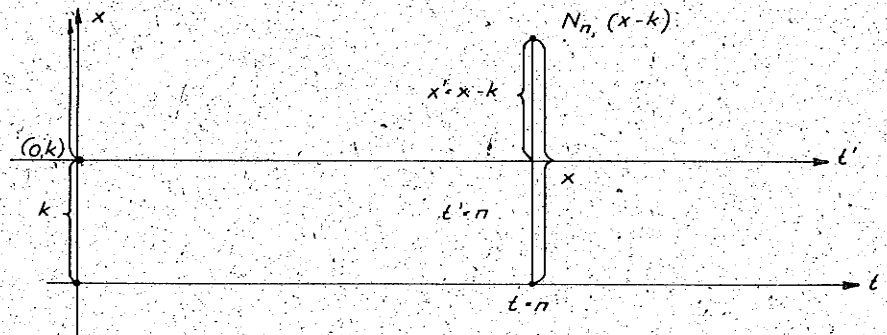
Előjáróban megjegyezzük, hogy ezzel egyuttal válaszoltunk arra a kérdésre is, hogy mekkora valószínűséggel jut el egy, a fenti módon bolyongó pont az origóból n lépés után a számegegyes x pontjába:

$$\binom{\frac{n+x}{2}}{\frac{n-x}{2}} \cdot \frac{1}{2^n} \text{ valószínűséggel.}$$

Könnyen belátható a következő: ha nem az origóból, hanem a k egész-értékű pontból indul a bolyongó pont és n lépést tesz meg, a fenti ábrázolás szerint ez annyit jelent, hogy a kiinduló mozgó pont a $(0, k)$ pontból startol és az ábrán látható új (t', x') koordináta-rendszerben, amelyben a $(0, k)$ pont az origó, az $(n, x-k)$ pontra jut, tehát a lehetséges utak száma:

$$N_{n, (x-k)},$$

(4. ábra).



4. ábra

$$p + q = n$$

$$2p = n + (x - k)$$

$$p - q = x - k,$$

$$2q = n - (x - k)$$

tehát n és $(x-k)$ paritása egyenlő.

Ismét megjegyezzük, hogy annak a valószínűsége, hogy n lépés után a mozgó pont visszatér a kiinduló pontba, az előbbi esethez hasonlóan

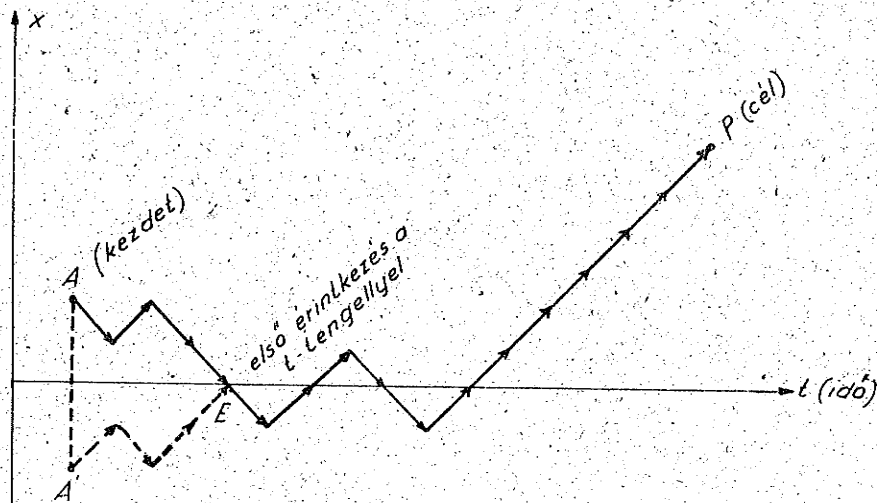
$$\frac{1}{2^n} \cdot N_{n,0}$$

Ekkor persze n és 0 egyenlő paritású, tehát n páros szám:
 $n = 2m,$

$$N_{2m,0} = \binom{2m}{m}$$

$$\text{A valószínűség} = \frac{1}{2^{2m}} \cdot \binom{2m}{m}.$$

19.2. A tükrözési elv

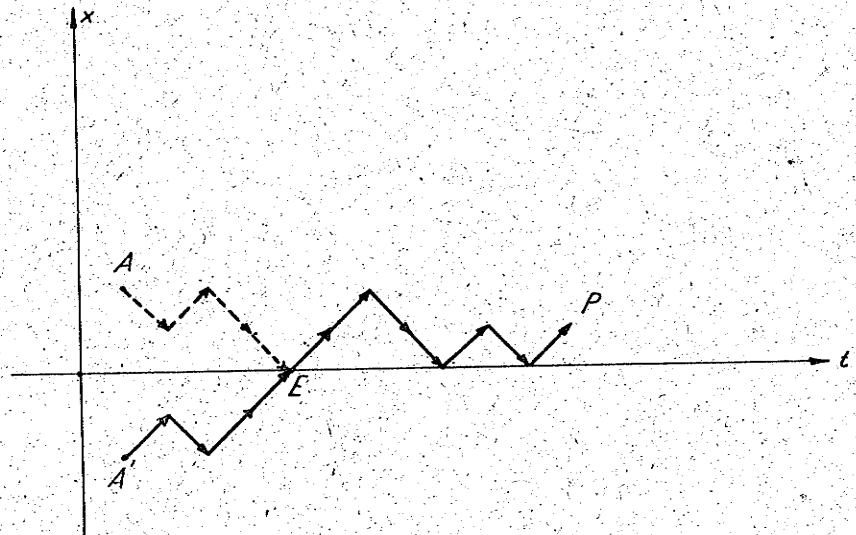


5. ábra

A t-tengely feletti A pontból ugyancsak a t-tengely feletti P cél-pontba a t-tengelyt érintő, vagy metsző ut pontosan annyit vezet, mint amennyi ut egyáltalán elvezet az A pont t-tengelyen vett A' tükörképéből a P célba (lásd az ábrát!)

Ugyanis az A-ból kiinduló ut a t-tengelyt első ízben az E pontban metszi vagy érinti; rajzoljuk meg a (teljesen a t-tengely felett vonuló) AE törtvonalnak (teljesen a t-tengely alatt vonuló) A'E tükörképét és A'E-hez csatlakoztassuk az A-ból kiinduló, P-felé tartó ut maradék EP részét.

Igy nyerünk egy, A'-ból P-be vezető utat. Világos, hogy különböző AP utaknak különböző A'P utak felelnek meg és fordítva, minden A'P utnak megfelel egy AP ut, amely metszi, vagy érinti a t-tengelyt. (A tükrözést kell csak alkalmazni.)

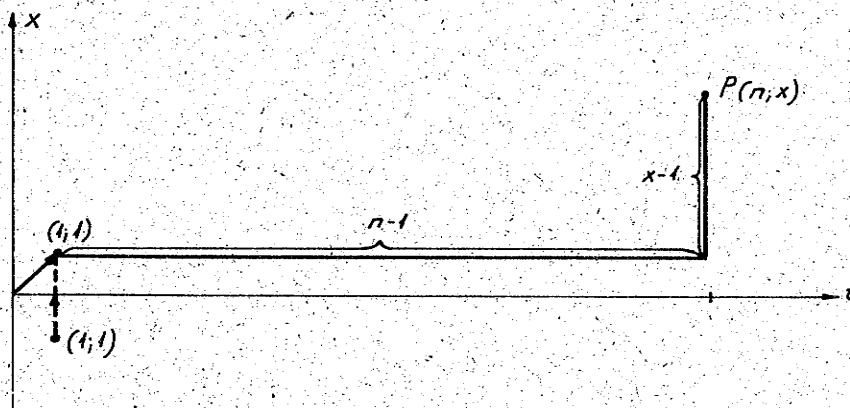


6. ábra

A tükrözési elv segítségével kiszámítjuk, hány olyan ut vezet az origóból n lépéssel az adott $P(n, x)$ $x > 0$ pontba, amely nem érinti vagy metszi a t-tengelyt, vagyis amely állandóan a t-tengely felett marad:

$$s_1 > 0, s_2 > 0, \dots, s_{n-1} > 0, s_n > 0.$$

Nyilván az első lépés az $(1; 1)$ pontba vezet, sőt a második is jobbra felmegy; azt kell csak kiszámítani, hány olyan ut vezet az $(1; 1)$ pontból



7. ábra

P-be, amely nem érinti és nem metszi a t-tengelyt. A tükrözési elv szerint ilyen ut $N_{n-1, x-1} - N_{n-1, x+1}$ számu van. Számítsuk ezt ki!

Az $N_{n, x}$ szimbolum értelme alapján az egyenlő az alábbi kifejezéssel:

$$\begin{aligned} \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{\frac{n+x}{2}-1}{} } - \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{\frac{n+x}{2}}{} } &= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{\frac{n+x}{2}-1}{2}\right)! \left(\frac{\frac{n-x}{2}}{2}\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{\frac{n+x}{2}}{2}\right)! \left(\frac{\frac{n-x}{2}-1}{2}\right)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{\frac{n+x}{2}-1}{2}\right)! \left(\frac{\frac{n-x}{2}-1}{2}\right)!} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{\frac{\frac{n-x}{2}}{2}} - \frac{1}{\frac{\frac{n+x}{2}}{2}} \right]}_{\frac{\frac{n+x}{2} - \frac{n-x}{2}}{\frac{n-x}{2} \cdot \frac{n+x}{2}}} = \\ &= \frac{\frac{n+x}{2} - \frac{n-x}{2}}{\frac{n-x}{2} \cdot \frac{n+x}{2}} = \frac{x}{\frac{n-x}{2} \cdot \frac{n+x}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{x(n-1)!}{\left(\frac{n+x}{2}\right)! \left(\frac{n-x}{2}\right)!} \cdot \frac{n}{n} =$$

$$= \frac{x}{n} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{n+x}{2}\right)! \left(\frac{n-x}{2}\right)!} = \frac{x}{n} \cdot N_{n,x}$$

19.3 További bolyongási feladatok

A következő 1. feladatban az origóból kiinduló pont $2n$ lépést tesz. Kérdés, hány olyan ut létezik, amelyek mind a t -tengely felett haladnak, tehát azt nem is érintik, azaz amelyekre

$$S_1 > 0, S_2 > 0, S_3 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} > 0?$$

Itt a végcél nincs megadva, az lehet minden olyan $(2n; x)$ pont, amelyre $x > 0$ és a fenti feltételek teljesülnek rá. Lévéen $2n$ és x paritása egyenlő, x páros szám lehetséges értéke.

$$x = 2, 4, 6, \dots, 2n \quad (x = 2r, \quad r = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Ha r egy konkrét, fix érték, akkor előbbi megfontolásaink szerint az origóból $(2n, 2r)$ -be a t -tengely fölött

$$N_{2n-1, 2r-1} - N_{2n-1, 2r+1}$$

számu ut vezet. Összesen van tehát

$$\sum_{r=1}^n (N_{2n-1, 2r-1} - N_{2n-1, 2r+1})$$

számu ut. Az utóbbi összeg részletesen kiírva:

$$N_{2n-1, 1} - N_{2n-1, 3} + N_{2n-1, 3} - N_{2n-1, 5} +$$

$$+ N_{2n-1, 5} - N_{2n-1, 7} + \dots + N_{2n-1, 2n-3} - N_{2n-1, 2n-1} + N_{2n-1, 2n-1}$$

mert

$$N_{2n-1, 2n+1} = 0.$$

Ennélfogva:

$$\binom{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)(2n-2)\dots 2\cdot 1\cdot 0}{(2n)!} = 0.$$

Tehát a keresett utak száma:

$$\begin{aligned} N_{2n-1, 1} &= \binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n-1)! 2n}{2(n!)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{2} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{1}{2} \cdot N_{2n, 0} \end{aligned}$$

Tehát: az origóból kiinduló, $2n$ lépéses, teljesen a t -tengely felett haladó ut (amely nem érintkezik a t -tengellyel) fele olyan sok van, mint amennyi $2n$ lépéses olyan ut, amelynek végpontja a $(2n, 0)$ pont.

Ha ezeket az utakat a t -tengelyen tükrözzük, megkapjuk mindazon, az origóból kiinduló $2n$ lépéses utakat, amelyek teljesen a t -tengely alatt vonulnak

(ezekre tehát $S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2n-1} < 0, S_{2n} < 0$),

azaz melyek a t -tengely alatt haladnak és nem érintkeznek a t -tengellyel.

Mint következményt említjük: az origóból kiinduló olyan $2n$ lépéses utak száma, amelyek nem érintkeznek a t -tengellyel, azaz amelyekre

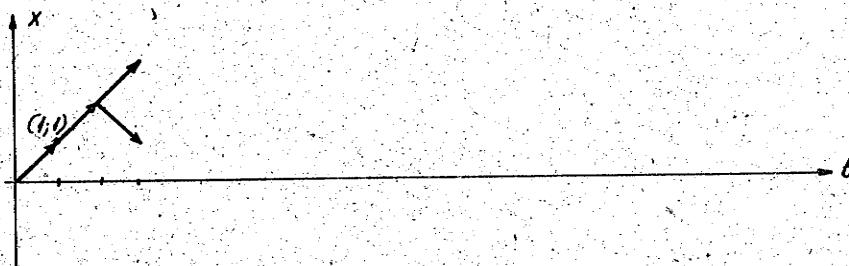
$$S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_3 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0,$$

összesen $\binom{2n}{n} = N_{2n, 0}$ -al egyenlő.

2. feladat: Hány olyan $2n$ lépéses, az origóból kiinduló ut van, amelyekre:

$$S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, S_3 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} \geq 0.$$

Itt is nyilván $S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0$. Ezek az utak tehát érintkezhetnek a t -tengellyel, de nem mennek a tengely alá, mind fölötte maradnak.



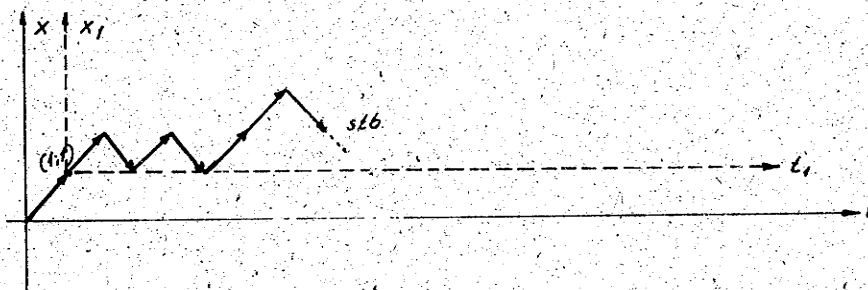
8. ábra

Tekintsük most az összes olyan, $2n-1$ lépésből álló utat, amelyek az $(1,1)$ pontból indulnak ki és amelyek nem érintik és nem metszik a t -tengelyt, azaz melyekre (az eredeti lépésszám szerint):

$$S_1 = 1, \quad S_2 > 0, \quad S_3 > 0, \quad \dots, \quad S_{2n-1} > 0, \quad S_{2n} > 0;$$

ezek száma az előbbiek szerint

$$\frac{1}{2} \cdot N_{2n,0}$$



9. ábra

Ha most az (x_1, t_1) koordináta-rendszert az utakkal együtt a tengelyekkel párhuzamosan eltoljuk, az eredeti (x, t) koordináta-rendszerbe vissza, megkapjuk az összes olyan, az origóból kiinduló utat, amelyeknél a lépések száma $2n-1$ és a lehetséges végpontok a

$$(2n-1; 2r-1) \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

pontok, továbbá amelyeknél

$$S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, S_3 \geq 0, \dots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} \geq 0.$$

Hiszen tudjuk, hogy az origóból kiindulva, páratlan számú lépés után a végpont ordinátája is páratlan szám, azaz az origóból kiinduló $S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} \geq 0$ utnál mindig

$$S_1 > 0, S_2 \geq 0, S_3 < 0, \dots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} > 0,$$

Ezek száma tehát

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n}.$$

Miután a $(2n - 1)$ lépéssel elért végpontok mindegyikéből kettő lehetséges $\vec{e}_{2n}$ vektor huzható a tényleges végpontokba, a lehetséges (az origóból kiinduló) $S_1 > 0, S_2 \geq 0, S_3 > 0, S_4 \geq 0, \dots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} > 0, S_{2n} \geq 0$ típusú utak száma kétszerese folyamatosan:

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n} \text{-nek, azaz egyenlő } \binom{2n}{n} = N_{2n,0} \text{-val.}$$

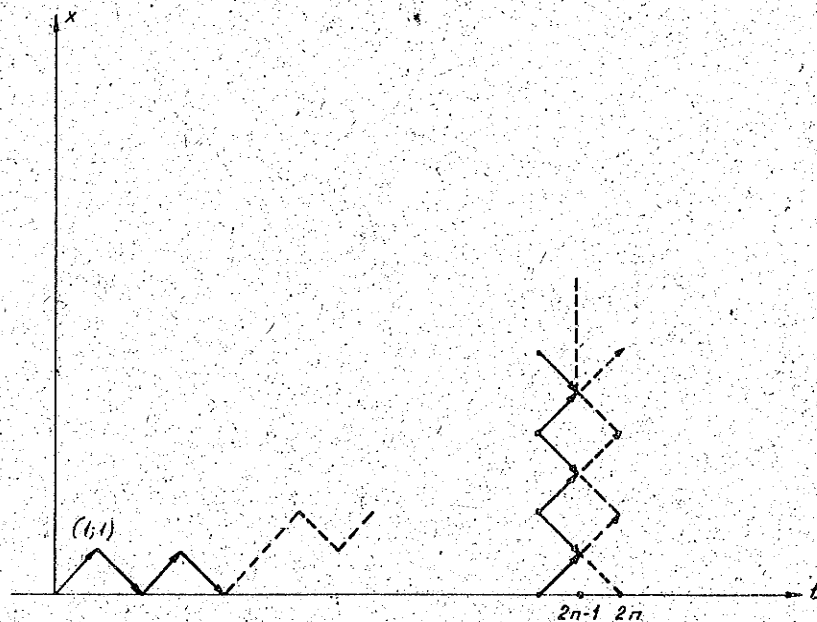
3. feladat: Hány olyan $2n$ -lépéses, az origóból kiinduló ut van, amelynél $S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_3 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n-1} \neq 0$, de $S_{2n} = 0$. Vagyis olyan bolyongások számát keressük, amelyeknél az origóból kiinduló pont első ízben a $2n$ -ik lépésre tér vissza az origóba.

Megoldás: Az olyan (az origóból kiinduló) utak száma, amelyeknél $S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_3 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0$, előbbi számolásaink szerint

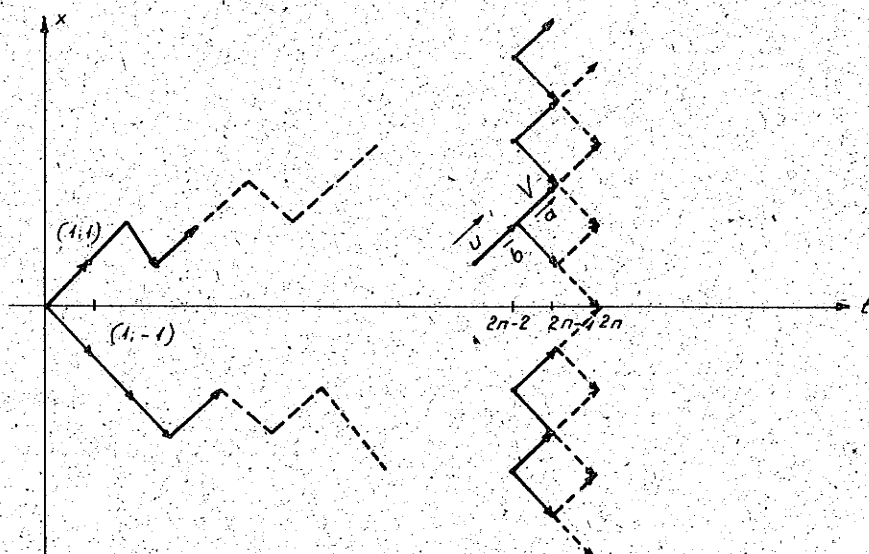
$$\binom{2n-2}{n-1} \text{-gyel egyenlő.}$$

Mindezeknél az utaknál természetesen $S_{2n-1} \neq 0$, hiszen az origóból kiinduló pontnál az $(n; x)$ végpont n és x koordinátái egyenlő paritásuak, így $(2n - 1)$ lépésnél x is páratlan szám. Ezeknél az utaknál a $(2n-2)$ -ik lépésre az x ordináták lehetséges értékei:

$$x = -(2n - 2), \dots, -2, 2, 4, \dots, (2n - 2)$$



10. ábra



11. ábra

Vegyünk szemügyre egy konkrét, $(2n - 2)$ lépésből álló, $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0$ típusú utat, amely mondjuk a V pontba torkollik és melynek utolsó lépése az $\vec{u}$ vektor. A V pontból két lehetséges, $(2n - 1)$ -ik lépés van, az $\vec{a}$, ill. $\vec{b}$ vektor által jelzett lépések. Az $\vec{a}$ vektor végpontjából további két lehetséges $2n$ -ik lépés létezik (szaggatott nyíllal jelöltük őket), hasonlóan a $\vec{b}$ vektor végpontjából is, vagyis minden egyes $(2n - 2)$ -lépéses utból összesen 4 db $2n$ -lépéses ut lehetséges, tehát mindazon $2n$ -lépéses (az origóból induló) utak száma, melyeknél

$$S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_3 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0 \text{ (és így persze)}$$

$$S_{2n-1} \neq 0,$$

$$4 \binom{2n-2}{n-1}$$

Mindezen utaknál S_{2n} lehet nullától különböző és nulla is.

Ha meg akarjuk kapni mindazoknak az utaknak a számát, amelyeknél

$$S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_3 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0,$$

akkor a fenti számból ki kell venni azon utak számát, melyeknél

$$S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_3 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0,$$

azaz a keresett utak száma

$$4 \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n}{n}$$

Ez egyenlő:

$$\begin{aligned} & 4 \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} - \frac{(2n-2)! (2n-1) 2n}{[(n-1)!]^2 n^2} = \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \left[4 - \frac{2(2n-1)}{n} \right] = \\ & = \frac{2}{n} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} = \frac{(2n-2)! (2n-1) 2n}{(2n-1) n^2 [(n-1)!]^2} = \frac{(2n)!}{(2n-1) (n!)^2} = \\ & = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

Kiegészítés. Az előzőek alapján könnyen belátható, hogy azon utak száma, amelyeknél $(0 < k < n)$:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_{2k-1} \text{ tetszőlegesen, } S_{2k} = 0, \text{ és}$$

$$S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0,$$

egyenlő

$$\binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \text{ -val.}$$

A bolyongásoknak ez a tárgyalása W. Feller amerikai matematikustól származik.

II. HALMAZOK

II.1 Bevezetés

A halmaz fogalma a matematikában definiálatlan alapfogalom.

A halmazon jól meghatározott dolgok egybefoglalását, összességét értjük. Pl. beszélhetünk a természetes számok halmazáról, a valós számok halmazáról, a síkidomok halmazáról, vagy pl. a budapesti lakosok halmazáról stb. Tulajdonképpen azáltal tudunk egy H halmazt megadni, akkor tekintjük a H halmazt létezőnek, ha bármely dologról eleve bizonyos, hogy eleme-e a H halmaznak, vagy sem.

A halmazelmélet kialakulásának kezdeti stádiumában azt gondolták, hogy minden olyan összesség, amelyről valamilyen módon meg lehet mondani, hogy mik az elemei, halmaz és hogy a halmazelmélet szokásos tételei minden olyan sokaságra alkalmazhatók. Ebből azonban ellentmondások jöttek létre, ilyen volt pl. a minden dolgok halmaza, illetve az összes halmazok halmaza. Az ellentmondásokat ki kellett küszöbölni, ezt az axiomatikus halmazelmélet megalapításával sikerült elérni. Az ellentmondások ebben az axiomarendszerben nem lépnek fel, viszont a halmazelméletben már jól ismert matematikai tételek bizonyíthatók vele. Az ellentmondások mindenesetre azt mutatják, hogy a véges halmazok köréből vett tapasztalatok nem általánosíthatók minden esetben a végtelen halmazokra.

Általában a halmazokat nyomtatott nagy betűkkel jelöljük:

$A, B, C, D, \dots H \dots$ stb. Az elemeket kis betűkkel jelöljük:

$a, b, c, d, \dots$ stb.

$a \in A$ azt jelenti; " a " eleme az A halmaznak; az áthuzással tagadjuk azt, hogy $a \in A$, jelölése: $a \notin A$, a nem eleme A halmaznak. Vannak halmazok, amelyeknek egyetlen a eleme van. Jelölése: $\{a\} = A$.

Az üres halmaz olyan halmaz, amelynek nincs eleme. Az üres halmaz jelölése $\emptyset$. Van olyan halmaz, amely elemeinek száma véges, és olyanok is, amelyek végtelen sok elemet tartalmaznak.

A halmazokkal műveleteket fogunk végezni. Beszélni fogunk halmazok egyesítéséről, közös-rész-képzésről (metszetről), különbségről.

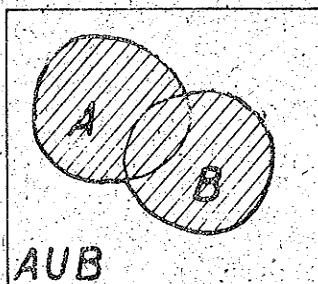
A műveletekre vonatkozó definíciók érthetőbbé válnak, ha szemléltetjük a műveletet, ez az ún. Venn-diagrammal történik.

II.2 Műveletek halmazokkal

Egyesítés

Két vagy több halmazból újabbat képezünk az egyesítés művelete által és azon elemeket értjük rajta, amelyek valamelyik halmaznak elemei. Jelölése két halmaz esetén:

$$A \cup B \quad \text{vagy} \quad A + B.$$



Azaz: $a \in A \cup B$ ($a \in A + B$), ha $a \in A$, vagy $a \in B$.

Legyenek adva a $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

halmazok. Egyesítsük őket. Az egyesített halmaz:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

$$(\text{vagy } A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

12. ábra

mindazon a elemekből áll: $a \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$, amelyekre $a \in A_i$ valamelyik i -re (az a elem egyszerre több A_i halmaz eleme is lehet).

Metszet

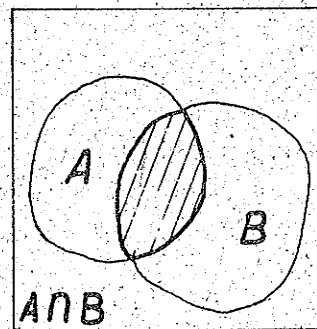
Azokat az elemeket, amelyek a A és a B halmazba egyszerre bele tartoznak, a A és B halmazok metszetének nevezzük. Szokásos az A és B halmazok közös részének is nevezni.

Jelölése: $A \cap B$, régebbi jelölése AB .

Tehát: $a \in A \cap B$, ha $a \in A$ és $a \in B$ egyszerre, és csak ekkor. Ha A -nak és B -nek nincs közös eleme, akkor $A \cap B = \emptyset$, vagy $AB = \emptyset$.

Ebben az esetben az A és B halmazokat díszjunkt (közös elem nélküli) halmazok-nak nevezzük.

Több halmaz közös elemeiről is beszélhetünk. Az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ halmazok



13. ábra

zok metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ és $a \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$ akkor és csak akkor, ha $a \in A_i$ minden i indexre. Vagyis akkor eleme a metszetnek egy "a" elem, ha minden halmaznak eleme egyben.
 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$ azt jelenti, hogy nincs olyan "a" elem, amely minden halmaznak eleme volna.

A metszet, azaz közös rész definíciójából adódik:

$$A \cap B = B \cap A, \text{ vagy a régi jelöléssel: } AB = BA$$

$A \cap A = A$, az A halmaznak önmagával képzett metszetét jelenti.

$A \cap A \cap A \cap \dots \cap A = A$ akárhányszor.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, az asszociatív törvény érvényes.
 Ez könnyen belátható, hiszen akárhogyan zárójelleztünk, $a \in A \cap B \cap C$ pontosan akkor, ha $a \in A$ és $a \in B$ és $a \in C$ egyszerre.

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

A metszet és egyesítés definíciója nincs véges sok A halmaz esetére korlátozva.

Az egyesítés definíciójából következik:

$$A \cup B = B \cup A,$$

Az A részhalmaza B-nek, ha A minden eleme egyúttal eleme B-nek is. Jelölése:

$$A \subset B, \text{ vagy írható így is: } B \supset A.$$

Pl. a valós számok halmazának részhalmaza a racionális számok halmaza.

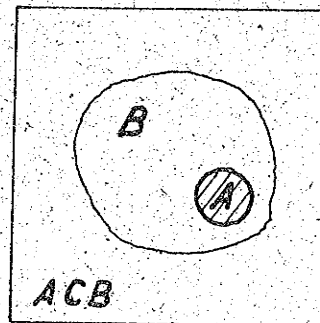
$A \subset B$; ha $a \in A$, akkor mindig $a \in B$ is, de fordítva általában nem.

Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$.

Ezt sokszor fel fogjuk használni bizonyításnál.

Az értelmezésből következik, hogy bármely A és B halmazra: $A \subset A + B$ és $B \subset A + B$.

Igazoljuk a disztributív törvényt, azaz



14. ábra

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

vagy régi jelöléssel:

$$(A + B) C = A C + B C .$$

Igazolás.

Ha $a \in (A + B) C$, akkor

$$\left. \begin{array}{l} a \in C \text{ és} \\ a \in A + B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \swarrow a \in A \longrightarrow a \in A \cdot C \\ \text{vagy pedig} \\ \searrow a \in B \longrightarrow a \in B \cdot C \end{array} \longrightarrow a \in AC + BC .$$

($A \longrightarrow$ jelölés rövidítése a "következik, hogy" -nak.)

Mivel ez minden elemre igaz, így $(A+B) C \subset AC + BC$. Fordítva tegyük fel, hogy

$$a \in AC + BC \longrightarrow \begin{array}{l} \swarrow a \in AC \longrightarrow a \in (A + B) C \\ \text{vagy pedig} \\ \searrow a \in B C \longrightarrow a \in (A + B) C , \end{array}$$

minthogy

$$A \subset A + B \text{ és } B \subset A + B ,$$

tehát

$$A C + B C \subset (A + B) C ;$$

a fentiekből adódik, hogy

$$(A + B) C = A C + B C .$$

Ismételten alkalmazva eredményünket, a disztributív törvény általánosabb alakját nyerjük.

$$(A \cup B) C = (A C) \cup (B C) ,$$

vagy más jelöléssel

$$(A + B + C) (D + E) = [(A+B) + C] (D + E) .$$

$(A + B)$ -t és $(D + E)$ -t egyetlen halmaznak tekintve, kapjuk, hogy

$$[(A+B) + C] (D+E) = (A+B) (D+E) + C (D+E) = (A+B) D + (A+B) E + C (D+E) =$$

$$= AD + BD + AE + BE + CD + CE .$$

A definícióból következik, hogy $A + A = A$, továbbá

$$A + A + A + \dots + A = A .$$

A valós számok algebrájától való eltérés szembeötlő.

Halmazok különbsége

$A - B$ halmaz jelenti mindazon elemeket, amelyek csak A -hoz tartoznak, B -hez nem. Ugy is mondhatjuk, hogy

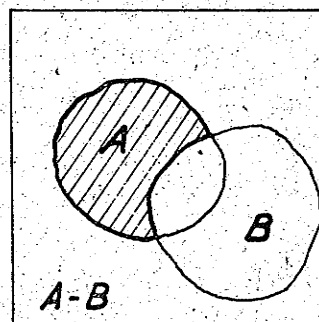
$$a \in A - B \quad \text{ha} \quad a \in A, \quad \text{de} \quad a \notin B .$$

Hasonlóan értelmezhetjük a $B - A$ halmazkülönbséget is.

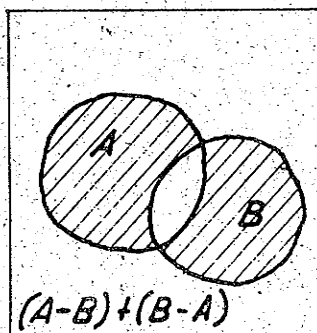
$$a \in B - A, \quad \text{ha} \quad a \in B, \quad \text{de} \quad a \notin A .$$

Az $(A - B) + (B - A)$ halmaz általában nem az üres halmaz.

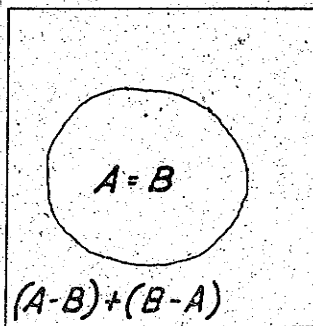
$(A - B)$ azon része A -nak, amely B -be nem nyúlik át, $(B - A)$ pedig azon része B -nek, amely A -ba nem nyúlik át, és ezeket egyesítjük.



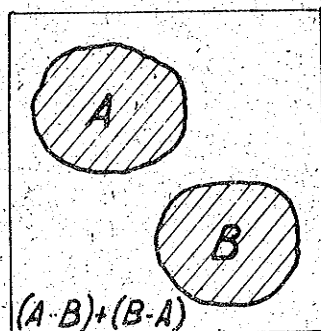
15. ábra



16/a ábra



16/b ábra



16/c ábra

a) $(A - B) + (B - A) = A + B - AB$,

b) $(A - B) + (B - A) = \emptyset$,

c) $(A - B) + (B - A) = A + B$.

Olvassuk le a 16/a ábrából a következő egyenlőséget:

$$(A + B) - [(A - B) + (B - A)] = AB.$$

Látjuk, hogy két halmaz metszése az egyesítés és különbségképzés műveletéből levezethető.

Há $A \subset B$, akkor $A + B = B$, vagy másképp $A \cup B = B$.

Há B elemeihez A elemeit hozzáadjuk, újabb elemeket nem adunk B elemeihez, mert az elemek, amelyeket B elemeihez hozzáadtunk, elemei B -nek az A halmazzal való egyesítés nélkül is.

Igazoljuk az alábbi összefüggést:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C),$$

vagy régi jelöléssel:

$$(A + B)(A + C) = A + BC.$$

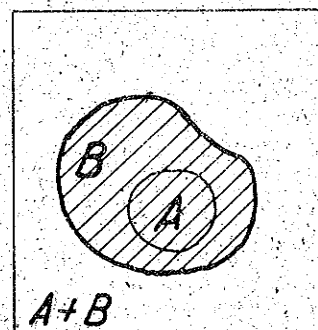
A disztributív szabály, valamint az utolsó összefüggésből a bal oldal:

$$A + A + B + A + A + C + B + C = A + A + (B + C) + BC,$$

vagyis azt kell igazolni, hogy

$$A + A + (B + C) + BC = A + BC.$$

Mivel $A + (B + C) \subset A$, tehát $A + A + (B + C) = A$, így a bal oldal $A + BC$, ami egyenlő a jobb oldalon álló $A + BC$ -vel.



17. ábra

II.3 Végese halmazok

Végese halmazok végese sok elemet tartalmaznak. Az A halmaz elemeinek számát jelöljük $S(A)$ -val. Üres halmaz esetén $S(\emptyset) = 0$.

$S(A)$ nem negatív egész szám (ez már nem halmaz).

Igen fontos összefüggés:

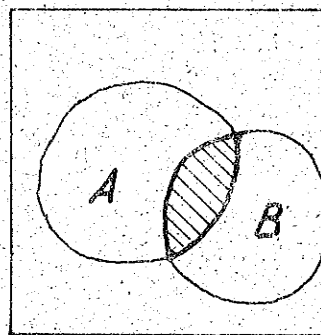
$$S(A+B) = S(A) + S(B) - S(AB).$$

Az $S(A) + S(B)$ összege ugyanis a A és a B közös elemeit két ízben számoltuk össze.

Ezek az elemek $S(A)$ -nál is szerepeltek, és $S(B)$ -ben is benne van a számuk.

Legyenek A_1 , A_2 és A_3 végese halmazok.

Számítsuk ki $S(A_1 + A_2 + A_3)$ -at, vagyis az egyesített $A_1 + A_2 + A_3$ halmaz elemeinek számát. Visszavezetjük az előző esetre.



18. ábra

$$S(A_1 + A_2 + A_3) = S[(A_1 + A_2) + A_3] = S(A_1 + A_2) + S(A_3) - S[(A_1 + A_2) A_3] =$$

$$= S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 A_2) + S(A_3) - S[(A_1 + A_2) A_3] =$$

$$= S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) - S(A_1 A_2) - S[(A_1 A_3) + (A_2 A_3)] =$$

$$= S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) - S(A_1 A_2) - \{S(A_1 A_2 A_3) + S(A_2 A_3) - S(A_1 A_2 A_3)\} =$$

$$= S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) - S(A_1 A_2) - S(A_1 A_3) - S(A_2 A_3) + S(A_1 A_2 A_3).$$

Teljes indukcióval igazolható akármilyen végese, n pozitív egész értékre az alábbi egyenlőség:

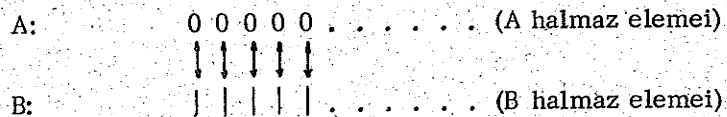
$$S(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n S(A_i) - \sum_{i \neq j} S(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} S(A_i A_j A_k) -$$

$$+ S(A_i A_j A_k A_l) + \dots + (-1)^n S(A_1 A_2 \dots A_n).$$

II.4 A számosság fogalma

Azoknál a halmazoknál, amelyek végtelen sok elemet tartalmaznak, nem tudjuk megmondani, mennyi az elemek száma. Ezeknél a halmazoknál a számosság fogalmával lehet kifejezni az elemek mennyiségét. (Akkor mondjuk, hogy egy halmaz végtelen sok elemből áll, ha bármely nagy pozitív egész számot adunk is meg, ennél több eleme van a halmaznak.)

Definíció: A és B halmazokról azt mondjuk, hogy egyenlő sok elemet tartalmaznak (egyenlő a számosságuk), ha létezik az A és B halmazok elemei között egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (leképezés).



Ezt szokás még így is jelölni: $A \sim B$ és így olvassuk: A ekvivalens B-vel. Itt, amint a rajz is mutatja, elempárokat képeztünk, azaz létesítettünk egy kölcsönösen egyértelmű leképezést, amellyel sikerül a két halmaz elemeit egymással kimeríteni. Ez nem minden két különböző A és B halmaz esetén létesíthető, és ekkor ezeknek természetesen nem egyezik meg a számosságuk.

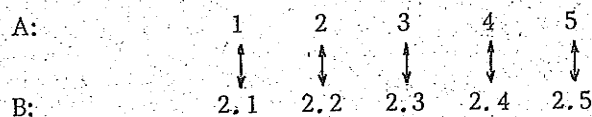
Megjegyezzük: A matematikában a létezés és konkrét megadhatóság (konstruálhatóság) különböző dolog; a létezés enyhébb követelmény.

A végtelen sorok elméleténél már találkoztunk ilyen problémával.

Akkor mondjuk, hogy a A halmaz nagyobb számosságú, mint a B, ha létezik A-nak olyan valódi részhalmaza A', hogy A' és B elemei között van kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, de A és B elemei között ilyen nincs.

Példák:

1. A természetes számok halmazának számossága egyenlő a páros számok halmazának számosságával.



Oda-vissza kölcsönösen egyértelmű a leképezés. Különböző természetes számokhoz különböző páros számok tartoznak, és különböző

páros számokhoz különböző természetes számok, és a párosítás minden elemet kimerített a A és a B halmazból.

2. Egy szállodában végtelen sok, csupa egyágyas szoba van, minden szobájában van egy vendég. Jön végtelen sok új vendég; el kell helyezni őket, de úgy, hogy minden szobában továbbra is csak egyetlen vendég legyen.

Kérdés, hogyan lehetséges ez?

M: Képezzünk egy megfeleltetést úgy, hogy minden régi vendéget tegyük szobája számának kétszeresébe.

Régi vendégek: $1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots, 2n, (2n+1) \dots$

Régi vendégek } $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, 2(n+1), \dots, 4n, 4n+2 \dots$
 új szobaszámok: }

így a páratlan számozású szobák felszabadulnak. Helyezzük el az n -ik új vendéget a $(2n-1)$ -es számú szobába ($n=1, 2, 3, \dots$).

Igy a vendégek elhelyezését megoldottuk.

3. Legyen: $A: 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ és

$B: 10, 10, 10, 10, \dots, 10, \dots$

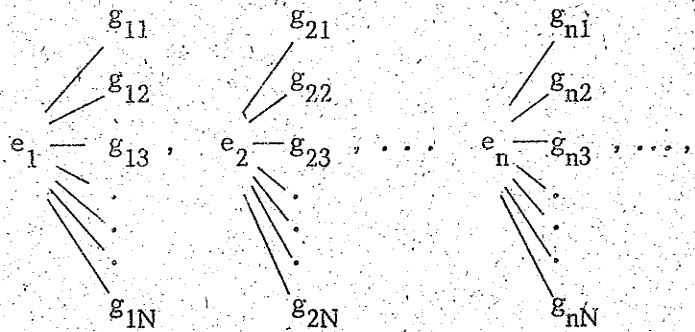
Könnyen látható, hogy egyenlő számosságúak, ezt úgy mondjuk, hogy ugyanannyi természetes szám van, mint ahányan a tíz pozitív egész kitevős hatványai vannak.

Definíció: Ha egy A végtelen sok elemet tartalmazó halmaz a pozitív egész számok (a természetes számok) halmazával egyenlő számosságú (ekvivalens), akkor a A halmazt megszámlálhatónak nevezzük.

Ez pontosan annyit jelent, hogy A elemei egy végtelen sorozatba rendezhetők.

Megjegyzés: Szokás a véges sok elemet tartalmazó halmazt is megszámlálhatónak nevezni.

Ha $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ elemek mindegyikéhez hozzátartozik N különböző elem:



akkor a g_{ij} elemek halmaza is megszámlálható. A g_{ij} elemek sorozatba rendezése egyszerű ($i = 1, 2, \dots; 1 \leq j \leq N$):

$$g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1N}, g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2N}, \dots, g_{n1}, g_{n2}, \dots, g_{nN}, \dots$$

A g_{ij} elem például a sorban az $(i - 1)N + j$ -edik elem.

2. Előbbi tételből következik, hogy ha N száma: $A_1, A_2, \dots, A_N$ halmaz mindegyike megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaz, akkor az $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N$ egyesített halmaz is megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaz. Ugyanis:

$$\begin{array}{lcl} & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ A_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\ A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ A_N: & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{Nn} & \dots \end{array}$$

Az $1, 2, \dots, n, \dots$ természetes számok mindegyikéhez hozzárendeltük az

$$\underbrace{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{N1}}; \quad \underbrace{a_{12}, a_{22}, \dots, a_{N2}}; \quad \dots; \quad \underbrace{a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{Nn}, \dots}_{\text{elemeket.}}$$

Alkalmazás: A pozitív és a negatív egész számok egyesített halmaza megszámlálható. Legyen ugyanis A_1 a pozitív, A_2 a negatív egész számok halmaza, mindkét halmaz megszámlálható, tehát tételünket az $N = 2$ esetre alkalmazva állításunk nyilvánvaló.

3. Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ megszámlálhatóan végtelen sok halmaz mindegyike megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaz akkor az egyesített

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

halmaz elemei is megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. Irjuk fel ui. a $A_1, A_2, \dots$ halmaz elemeit az alábbi elrendezésben:

A_1 elemei: $a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n} \quad \dots$

A_2 elemei: $a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n} \quad \dots$

$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$

A_n elemei: $a_{n1} \quad a_{n2} \quad \dots \quad a_{nn} \quad \dots$

$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$

Az így kapott végtelen négyzetes mátrixban levő a_{pq} elemeket egyetlen sorozatba írhatjuk például a következő módon: először felírjuk mindazon elemeket, amelyeknél a két index összege 2 (ilyen elem csak az a_{11}), ezek után írjuk azokat az a_{ij} elemeket, melyeknél az indexek összege 3 (ezek az a_{12}, a_{21} elemek), ezek után írjuk mindazokat, ahol az indexek összege 4 (a_{13}, a_{22}, a_{31}), majd felírjuk azokat, ahol az indexek összege 5 ($a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}$) és így tovább. Így kapjuk a következő sorozatot:

$$\underbrace{a_{11}}_{\text{összege 2}}, \underbrace{a_{12}, a_{21}}_{\text{összege 3}}, \underbrace{a_{13}, a_{22}, a_{31}}_{\text{összege 4}}, \underbrace{a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}}_{\text{összege 5}}, \dots$$

Minden $\dots \dots \dots$ blokkban 1-gyel több elem van, mint a megelőző blokkban és látható, hogy pl. az a_{1q} elemmel kezdődő blokk

$(a_{1q}, a_{2(q-1)}, a_{3(q-2)}, \dots, a_{q1})$ összesen q elemet tartalmaz. Bármely

lyik a_{ij} elem előfordul a sorozatban. Számítsuk ki, hogy a sorozatban a_{ij} hányadik helyen szerepel?

Az indexek összege $i + j$, tehát a blokk, amelyben a_{ij} szerepel, az $a_{1(i+j-1)}$ elemmel kezdődik. Ebben a blokkban a_{ij} az i -edik elem. $a_{1(i+j-1)}$ előtt a sorozatban összesen

$$1 + 2 + 3 + \dots + (i + j - 2)$$

elem áll, azaz összesen

$$\frac{(1 + i + j - 2)(i + j - 2)}{2} = \frac{(i + j - 2)(i + j - 1)}{2}$$

elem, így az a_{ij} elem sorozatunkban az

$$\frac{(i + j - 2)(i + j - 1)}{2} + i\text{-edik.}$$

Igy előző végtelen mátrixunk elemeit egyetlen végtelen sorozatba tudjuk rendezni, vagyis a természetes számokhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelni.

E tételnek sok érdekes alkalmazása közül néhányat bemutatunk.

a) A természetes számokból képezhető (a_1, a_2) számpárok halmaza (ahol tehát a_1 és a_2 természetes számok) megszámlálható. Ha felírjuk az összes ilyen számpárokat pl. egy

$$\begin{array}{llll} (1, 1) & (1, 2), & \dots, & (1, n), \dots \\ (2, 1) & (2, 2), & \dots, & (2, n), \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n, 1) & (n, 2), & \dots, & (n, n), \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

végtelen mátrixba, akkor éppen az előbb tárgyalt tételt látjuk viszont. Az elmondottakból következik, hogy a racionális számok halmaza megszámlálható. A pozitív racionális számokat felírhatjuk egy végtelen négyzetes sémában (sőt előfordul, hogy egy ugyanazon racionális szám több ízben is szerepel a sémában):

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{n}, \dots$$

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \dots, \frac{3}{n}, \dots$$

.....

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \dots, \frac{n}{n}, \dots$$

.....

Minden pozitív racionális szám szerepel ebben a sémában, pl. az $\frac{r}{s}$ szám az r -ik sor s -ik eleme.

Igy ez a séma egyetlen sorozatba rendezhető, amelyben tehát minden pozitív racionális szám szerepel, mégpedig többszörösen. A többszörös előfordulásokat törölve, látjuk, hogy a pozitív racionális számok halmaza megszámlálható. Minthogy ugyancsak megszámlálható a negatív racionális számok halmaza is, ezek egyesített halmaza is megszámlálható.

b) Jelöljük mármost a természetes számpárokat egyetlen betűvel és írjuk őket egyetlen sorozatba: $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$

Képezzük most az összes, természetes számpárokból álló számhármásokat: (a_1, a_2, a_3) , ahol a_1, a_2, a_3 természetes számok.

Az (a_1, a_2) számpárt egyetlen S elemnek tekintve, minden (a_1, a_2, a_3) számhármás egy S számpár és egy a_3 természetes szám párja, tehát a természetes számokból alkotott összes (a_1, a_2, a_3) számhármást megkapjuk, ha az (S_i, a_j) párokat képezzük. Az előbb elmondottak szerint az (S_i, a_j) párokat képezzük. Az előbb elmondottak szerint az (S_i, a_j) párok halmaza megszámlálható, vagyis a természetes számokból álló számhármások halmaza megszámlálható.

c) Tételezzük fel immár, hogy valamilyen n -re már igazoltuk, hogy a természetes számokból álló összes $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ szám n -esek hal-

maza megszámlálható, és jelöljük ezeket az egyetlen sorozatba írható természetes szám n -eseket egyetlen betűvel: $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$

Minden, természetes számokból képezhető $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ szám $(n+1)$ -es egy természetes, t_k szám n -es és egy a_{n+1} természetes számból képezett pár: (t_k, a_{n+1}) ,

ahol az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ szám n -est t_k -val jelöltük. Ennélfogva a (t_k, a_{n+1}) párok halmaza is megszámlálható, azaz az összes $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ természetes szám $(n+1)$ -esek halmaza megszámlálható.

$n = 1, 2, 3$ -ra igazoltuk tételünket, így tehát bebizonyítottuk, hogy bármilyen természetes n esetén a természetes számokból képezhető összes $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ szám n -esek halmaza megszámlálható.

Legyen A_1 a természetes számok halmaza, A_2 a természetes szám-párok halmaza, A_3 a természetes számokból álló számhármak halmaza, $\dots$, A_n a természetes számokból képezhető szám n -esek halmaza, $\dots$, akkor az előzőek alapján az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ egyesített halmaz is megszámlálható.

d) Láttuk már, hogy a racionális számok halmaza megszámlálható. Most egy sokkal bővebb számhalmazról fogjuk ugyanezt igazolni.

Egy valós x számot algebrai számnak hívunk, ha x gyöke olyan

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(n tehát lehet bármely pozitív egész szám) egyenletnek, amelynek $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ együtthatói egész számok.

Tudjuk, hogy egy n -edfoku egyenletnek legfeljebb n számú különböző valós gyöke lehet (pontosan n komplex gyöke van, ha a gyököket többszörösségükben számítjuk és a valós számokat is speciális komplex számoknak tekintjük). Minthogy az n -edfoku egyenletnek $n+1$ koefficiense van, az egész számokból képezhető szám $(n+1)$ -esek, az $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ komplexusok halmaza megszámlálható és minden egyes ilyen egyenletnek legfeljebb n különböző gyöke lehet, így mindazon x számok halmaza, amelyek gyökei valamelyik egész együtthatós n -edfoku egyenletnek, megszámlálható. Ha A_n -nel jelöljük ezeknek az x gyököknek a halmazát, akkor tehát A_n megszámlálható halmaz. Ha n végigfut az

$1, 2, 3, \dots, n, \dots$ pozitív egész számokon, akkor tehát az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ halmazok mindegyike megszámlálható, ennél fogva $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ egyesítésük is megszámlálható, vagyis az algebrai számok halmaza is megszámlálható.

Az algebrai számok magukban foglalják a racionális számokat és minden pozitív racionális szám (tehát speciál minden pozitív egész szám) n -edik gyökét, bármely $n=2, 3, 4, \dots$ esetre.

Ha ugyanis $x = \sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ tetszőleges racionális szám (p és q egészek), akkor x gyöke a $q x^n - p = 0$ egész együtthatós algebrai egyenletnek. Ha pedig n, p és q tetszőleges pozitív egész számok és

$$x = \sqrt[n]{\frac{p}{q}},$$

akkor

$$x^n = \frac{p}{q}, \quad \text{így } x \text{ gyöke a}$$

$$q x^n - p = 0$$

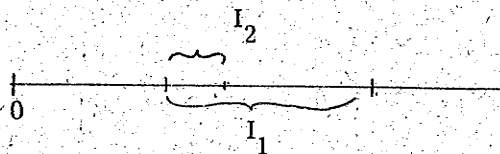
egész együtthatós egyenletnek.

Az algebrai számok között tehát igen sok irracionális szám is van.

Felvetődik a kérdés, van-e olyan végtelen halmaz, amely nem megszámlálható? Mit jelent egyáltalán az, hogy egy végtelen H halmaz nem megszámlálható? Ez pontosan azt jelenti, hogy akárhogyan is képezzünk a H halmaz elemeiből egy végtelen sorozatot, mindig lesz H -nak olyan eleme, amely ebben a sorozatban nem fordul elő.

A H halmaz elemei tehát nem rendelhetők kölcsönösen egyértelműen a természetes számokhoz, a természetes számok halmazával a H -halmazt nem tudjuk "kimeríteni".

Megmutatjuk, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható. Pontosabban annyit fogunk megmutatni, hogy a $[0, 1]$ zárt intervallum pontjainak a halmaza nem megszámlálható; ezzel igazoljuk, hogy a $0 \leq x \leq 1$ valós számok halmaza nem megszámlálható, tehát a valós számok teljes halmaza sem megszámlálható.



Legyen adva a $[0, 1]$ intervallum pontjainak egy végtelen $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ pontokból álló sorozata.

Meg fogjuk mutatni olyan, az intervallumhoz tartozó pont létezését, amely a sorozat egyetlen pontjával sem azonos.

Ebből a célból osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot három egyenlő részre. E zárt részintervallumok között biztosan van egy, amely a P_1 pontot nem tartalmazza (ha csak két egyenlő részre osztanók fel $[0, 1]$ -et, ezt nem állíthatnók biztosan, hiszen lehetséges, hogy P_1 éppen a két részintervallum közös pontja, azaz a $[0, 1]$ intervallum felezőpontja). A P_1 pont ugyanis valamelyik részintervallumhoz hozzátartozik, esetleg két szomszédos részintervallum közös határpontja, ekkor tehát a harmadik részintervallumhoz nem tartozik hozzá. Előfordulhat, hogy két részintervallum egyikéhez sem tartozik, mert a harmadik belsejében van. Mindenesetre létezik a három részintervallum közül egy olyan zárt I_1 , amelynek a P_1 pont nem pontja (sem nem belső -, sem nem határpontja). Az $\frac{1}{3}$ hosszúságú I_1 intervallumot ismét osszuk fel három egyenlő részre, e részek közül jelöljük I_2 -vel azt a zárt, $\frac{1}{3^2}$ hosszúságú részt, amely nem tartalmazza a P_2 pontot. Ezt a zárt I_2 intervallumot ismét osszuk fel három egyenlő részre, vegyük közülük azt a zárt, $\frac{1}{3^3}$ hosszúságú I_3 intervallumot, amely a P_3 pontot nem tartalmazza. Folytassuk ezt az eljárást tovább, megállás nélkül. A szerkesztésből látható, hogy az n -ik lépés után kapott zárt, $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú I_n zárt intervallum a $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ pontok egyikét sem tartalmazza (sem a belsejében, sem a határában). Az egyenes folytonossága miatt létezik egyetlen egy olyan P^* pont, amelyre az egymásba skatulyázott $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ intervallumsorozat "összehúzódik", azaz amely valamennyi $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ intervallumhoz hozzátartozik. (Az intervallumok hosszúsága zérus felé tart.) Ez a P^* pont nincs benne a $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ pontsorozatban. P^* nem lehet azonos egyetlen P_n -nel sem; ugyanis P_n nincs benne az I_n intervallumban és a határán sincs, viszont P^* az I_n intervallum pontja.

A valós számok halmazának van tehát a természetes számok halmazával egyenlő számosságú (ekvivalens) részhalmaza (például a természetes számok halmaza maga, vagy a racionális számok halmaza), de a valós számok teljes halmaza már nem ekvivalens a természetes számok halmaza-

zával. Azt mondjuk, hogy a valós számok halmaza nagyobb számosságú, mint a természetes számoké.

Általában, ha valamely A halmaz ekvivalens egy B halmaz valamely valódi részével, de B és A nem ekvivalensek, akkor azt mondjuk, hogy B nagyobb számosságú A -nál. A valós számok halmaza tehát nagyobb számosságú, mint az egész számok halmaza.

A halmazok számosságára vonatkozólag megemlítjük még a következőket:

a) Minden végtelen A halmaznak létezik olyan valódi A' részhalmaza, amely magával A -val egyenlő számosságú (ekvivalens) $A \sim A'$. Ilyen jelenség a véges halmazoknál nem fordul elő, ez tehát jellemző a végtelen halmazokra.

b) Ha A és B két végtelen halmaz, és létezik A -nak valódi, B -vel ekvivalens A' részhalmaza ($A' \sim B$), továbbá létezik B -nek valódi, A -val ekvivalens B' részhalmaza, akkor A és B egymással ekvivalensek ($A \sim B$) (F. Bernstein-tétele).

c) Ha A és B két tetszőleges halmaz, akkor mindig igaz az alábbi három állítás közül pontosan az egyik:

- I. A és B ekvivalensek;
- II. A nagyobb számosságú, mint B ;
- III. B nagyobb számosságú, mint A .

Véges halmazokra ezek nyilvánvalóak, végtelen halmazok esetére azonban külön bizonyítást igényelnek, amely nem is egyszerű és mélyenfekvő megfontolásokon nyugszik.

II.5 Eseményalgebra és halmazalgebra

A gyakorlatban előforduló kísérleteknek, vagy méréseknek általában több különböző, lehetséges eredménye, kimenetele van. Nézzünk néhány példát.

1. Ha feldobunk egy pénzdarabot, két eredmény lehetséges: fej, vagy írás.
2. Kockadobásnál a lehetséges kimenetek (eredmények) az 1, 2, 3, 4, 5, 6-os számok.

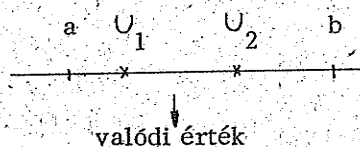
Mindegyik kimenetel, eredmény, a kísérlet során fellépő egy-egy esemény. A pénzérménél úgy látszik két esemény léphet fel, a kockánál

hat. Valójában mindkét kísérlettel kapcsolatban több eseményről is beszélhetünk. A kockadobásnál az 1, 3, 5 kimenetek páratlanok, beszélhetünk tehát arról, hogy egy dobás alkalmával páratlan szám adódott, a dobás eredménye, mint esemény egy páratlan szám volt. Hasonlóan beszélhetünk a páros szám bekövetkezéséről, mint eseményről. Az utóbbi két esetben bekövetkező események összetettebbek, mint az egyes konkrét 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 kimenetek. A páratlan számú dobás, mint esemény mindannyiszor bekövetkezik, midőn 1, 3, vagy 5-ös dobás adódik, a páros dobás eseménye a 2, 4, vagy 6 dobásokkal valósulhat meg, realizálódhat. Az az esemény például, hogy 5-nél kisebb számot dobunk, az 1, 2, 3, 4 kimenetekkel realizálódhat. De beszélhetünk pl. a következő eseményről is: vagy páros szám adódik valamely dobásnál, vagy pedig 4-nél nagyobb szám. Ez az esemény a következő kimenetekkel (eredményekkel) valósulhat meg (realizálódhat): 2, 4, 6 vagy pedig 5, 6. Összesen négy kimenetel által következhet be a jelzett esemény, melyek közül a 6-os kimenetel kétszer is szerepel, egyszer mint páros szám, egyszer pedig mint 4-nél nagyobb szám.

A következő események: vagy páros, vagy páratlan számot dobunk, illetve vagy 4-nél nagyobb, vagy 4-nél nem nagyobb számot dobunk, minden kimenetelnél megvalósul, ez tehát biztos esemény.

A pénzérménél kevesebb eseményt tudunk első pillantásra elképzelni, pl. mindössze a következőket: fej, irás, fej vagy irás. Mind a pénzérménél, mind a kockánál bonyolultabb, összetettebb események is fellépnek, ha a kísérleteket folytatjuk, pl. n izben dobjuk fel őket, vagy pedig a dobások számát nem is korlátozzuk. Ezekről majd később lesz szó. De többféle esemény léphet fel akkor is, ha egy helyett két, vagy több pénzérmével, vagy kockával kísérletezünk. Mindezekről a későbbiek során beszélünk.

3. Ha valamilyen fizikai mennyiség értékét megmérjük, tudjuk, hogy még a legpontosabb mérési eljárások mellett is az egyes mérések-nél kapott értékek különbözőek lesznek. Minden mérésfolyamatot ugyanis igen sok kis, részleteiben áttekinthetetlen zavaró körülmény befolyásol, amelyek hatására az egyes mérési eredmények, kimenetek a valódi értéktől általában különbözőek lesznek. Elvileg a mérés eredménye bármely (szóba jövő) valós szám lehet, de persze a valóságban a tényleges értéktől túl nagy eltérések nem fordulnak elő, hanem az egyes mérési eredmények a valódi érték körüli, általában szűk, intervallumba esnek.



Itt végtelen sok esemény következhet be mérési eredményként; olyan eseményről is beszélhetünk persze, hogy a mért érték egy adott (U_1, U_2) intervallumba esik. Ez esetben eseményünket az (U_1, U_2) intervallum minden számértéke, mint mérési eredmény realizálja. Az egyes mérési "eseményeket" a mérési eredményeket tartalmazó (a, b) intervallum pontjai, intervallumai, sőt pontthalmazai ábrázolják. Az események szemléletes ábrázolására 4. példaként egy igen hasznos, elterjedt eljárást mutatunk be, amelyet céltábla-diagramnak nevezhetnénk, általában Venn-diagram a neve.

4. Egy négyzet alakú céltáblára adjunk le lövéseket és tegyük fel, hogy minden lövés a táblába csapódik. A becsapódás helyét egyszerűség kedvéért a céltábla egy pontjának tekintjük. A céltábla pontjai tehát a "lövési" kísérlet egy-egy kimenetelét (eredményét) ábrázolják. De eseményeket ábrázolnak a következő ábrák, Venn-diagramok is.

Az A esemény: a lövés a bevonalkázott A jelzésű tartományba esik. Az A eseményt az A tartomány minden pontja realizálja.

Hasonlókat mondhatunk a B esemény-

ről is. Tehát: a A esemény pontosan akkor következik be, ha egy lövés a

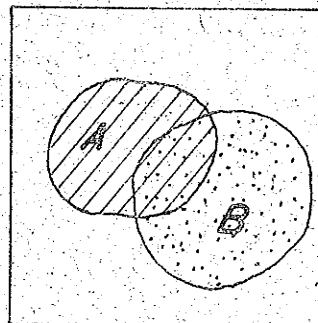
A tartományba csapódik. (Hasonló igaz a B eseményre is.) De események a következők is:

egy lövés vagy az A, vagy a B tartományba csapódik, mely eseményt realizálják mindazok a pontok, melyek vagy az A, vagy a B tartományba esnek (esetleg mindkettőbe);

egy lövés az A és a B tartományba esik egyidejűleg, ez az esemény megvalósul, bekövetkezik akkor, ha a lövés az A és a B tartományok közös részébe csapódik;

egy lövés az A tartományba csapódik, de nem csapódik a B-be.

Az ábrából világos, hogy ezt az eseményt A mindazon pontjai realizálják, melyek nem tartoznak a B tartományba.



19. ábra

Az eddig elmondott példákban látható, hogy az események és a halmazok között igen nagy hasonlóság van. Ez a hasonlóság vezet el minket az események közötti összefüggések és a velük végezhető műveletek és műveleti szabályok felismeréséhez. Így jutunk el az eseményalgebrához, amely a valószínűségszámítás kiépítéséhez megadja a nélkülözhetetlen alapot.

Az eseményalgebra az események közötti kapcsolatokkal és műveletekkel foglalkozik.

A következőkben bevezetjük az események közötti kapcsolatokat (relációkat), műveleteket és az ezekkel való műveleti szabályokat. Az eseményeket, miként a halmazokat is, nyomtatott nagy betűkkel jelöljük: beszélünk A , B , C stb. eseményekről. Ha eseményekről beszélünk, mindig gondoljunk valamilyen kísérletre, amelynek kimenetelei, eredményei gyanánt következhetnek be, valósulhatnak meg a szóban forgó események.

Az A és a B eseményeket egyenlőknek mondjuk: $A = B$, ha ugyanazok a kísérleti kimenetek, eredmények realizálják őket; tehát vagy mind A , mind B ugyanazzal a kimenettel azonos, vagy pedig ugyanazon kimenetek halmazából állanak.

A következőkben az egyszerűbb szóhasználat végett nevezzük a kísérletek egyes konkrét kimeneteleit elemi eseményeknek. Minden kísérlet konkrét végrehajtása során valamelyik elemi esemény következik be.

A szóban forgó kísérlettel kapcsolatban (és minden kísérlettel kapcsolatban) tehát létezik az elemi eseményeknek egy halmaza. Ezt a halmazt a következőkben $\mathcal{A}$ -val jelöljük. Mindezen kimenetekből, elemi eseményekből áll, amelyek a szóban forgó kísérlettel kapcsolatban egyáltalában bekövetkezhetnek.

A kísérlet során bekövetkező események, vagy ahogyan a valószínűségszámításban nevezzük őket, véletlen események, az elemi eseményekből, mint elemekből álló halmazok.

Az A és B események ezek szerint pontosan akkor egyenlők egymással, ha ugyanazokból az elemi eseményekből állanak. Minthogy az események nem egyebek, mint kísérletek kimeneteleinek halmazai, beleértve magukat az egyes kimeneteket is, mint egy elemből álló halmazokat, az eseményekre ugyanazok a relációk és műveletek, (a műveleti szabályokkal együtt) értelmezhetők, mint amelyeket már a halmazoknál megismertünk. A teljesség kedvéért mégis összeállítjuk az eseményalgebra fogalmait és műveleteit, annál is inkább, mert ennek során újat is fogunk tanulni.

Mindig, ha eseményekről, vagy majd a valószínűségszámításban, véletlen eseményekről beszélünk, konkrét kísérletre gondoljunk, amelynek több lehetséges kimenetele, eredménye van.

Az összes lehetséges kimenetek halmazát $\mathcal{A}$ -val jelöljük és biztos eseménynek nevezzük; $\mathcal{A}$ ugyanis minden kimenetel által realizálódik, megvalósul, tehát biztosan bekövetkezik. Az $\mathcal{A}$ halmazt szokás eseménytérnek is nevezni; a következőkben ezt az elnevezést fogjuk használni. Az $\mathcal{A}$ részhalmazait jelöljük nyomtatott nagy betűkkel és eseményeknek nevezzük őket.

Mégjegyzés. A pontosság kedvéért meg kell mondanunk, hogy végtelen sok elemi eseményből álló $\mathcal{A}$ eseménytérnél általában nem minden részhalmazt tekintünk véletlen eseménynek. E..-k mélyebb megindokolá-

sát a mértékelmélet adja meg, amelynek ismertetése még nagy vonalakban is messze túllépné a jegyzet kereteit, és az itt következő tárgyalás lényegét nem érinti. Mindemellett azért megjegyezzük, hogy ha az eseménytér megszámlálhatóan végtelen sok elemi eseményt tartalmaz (vagyis az elemi eseménytér bármely részhalmaza véletlen eseménynek számít, amelynek van valószínűségi mértéke. Ha azonban az elemi események halmaza nem megszámlálhatóan végtelen, akkor nem tekinthetünk az elemi eseményekből alkotható bármely végtelen részhalmazt véletlen eseménynek.

Két esemény egyenlőségét már értelmeztük. Azt mondjuk, az A esemény maga után vonja a B eseményt, ha B mindig bekövetkezik, valahányszor A bekövetkezik; ezt így jelöljük:

$$A \subset B.$$

Ez a jelölés és fogalom megfelel a részhalmaz fogalmának. Az esemény értelmezése alapján ez érthető is. Az A esemény bekövetkezik, ha az őt realizáló elemi események (kimenetek) valamelyike bekövetkezik. A B esemény bekövetkezése hasonlóan lett értelmezve. Ennélfogva az

$$A \subset B$$

reláció pontosan azt jelenti, hogy az A eseményt realizáló valamennyi elemi esemény együtt B-t is realizálja, vagyis az A eseményt alkotó, képező elemi események együtt a B-t realizáló elemi események is, az A eseményt képező elemi események halmaza részhalmazát képezi a B-t képező, realizáló elemi események halmazának.

Az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ események összegén, vagy egyesítésén unióján, jelben:

$$\text{az} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots,$$

vagy másként írva az

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

eseményen azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha valamelyik A_i esemény bekövetkezik az $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, indexű események közül. Ezen események unióját mindazok az elemi események realizálják, amelyek valamelyik A_i eseményt realizálják

($i = 1, 2, \dots, n, \dots$), azaz az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ eseményeket alkotó elemi események halmazainak egyesített halmaza az

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

esemény.

Az A és B események metszetén: $A \cap B$ -n, vagy AB eseményen azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha A és B események egyszerre bekövetkeznek, tehát ha A is és B is bekövetkezik. A B-t mindazon elemi események realizálják, amelyek egyidejűleg A-t is és B-t is realizálják.

Hasonlóan értelmezzük kettőnél több $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ esemény

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots,$$

vagy másképp

$$A_1 A_2 \dots A_n \dots$$

metszetét is.

Bevezetjük a lehetetlen esemény, vagy más elnevezéssel üres esemény, vagy null-esemény fogalmát, amelyet a $\emptyset$ jellel jelölünk. A $\emptyset$ eseményt semmiféle elemi esemény, kimenetel nem valósítja meg.

Ez megfelel az üres halmaz fogalmának. A $\emptyset$ esemény tehát soha sem következik be. Ha

$$A B = \emptyset \quad (A \cap B = \emptyset),$$

akkor A és B események egymást kölcsönösen kizárják, egyszerre nem következhetnek be mindketten, ha az egyik bekövetkezik, akkor a másik nem következik be. Hasonlóan, ha

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \emptyset,$$

akkor egyszerre mindegyik az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ események közül nem következik be, azaz legalább az egyik nem következik be, ha a többi be is következik.

Az egyesítés és metszés műveletének, valamint a $\emptyset$ eseménynek segítségével az elemi esemény és összetett esemény fogalmát tisztán eseményalgebrailag is tudjuk értelmezni. Valamely E eseményt összetett eseménynek nevezünk, ha létezik két esemény, amelyekre

$$A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad AB = \emptyset \quad (A \cap B = \emptyset)$$

és

$$E = A \cup B \quad (E = A + B),$$

Az E esemény elemi esemény, ha ilyen előállítása E-nek nem lehetséges.

Megállapodunk még abban, hogy formálisan minden A eseményre:

$$\emptyset \subset A$$

legyen.

Mint a halmazalgebránál, úgy itt is érvényesek a következő műveleti szabályok:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C),$$

$$A + A = A,$$

$$A + \emptyset = A,$$

$$AB = BA, \quad (AB)C = A(BC),$$

$$A A = A, \quad A \emptyset = \emptyset,$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

ha

$$A \subset B,$$

akkor

$$A + B = B \quad \text{és} \quad AB = A.$$

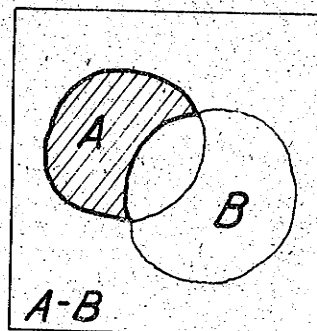
(Mindezeket az összefüggéseket felírhatjuk a $\cup$, illetve $\cap$ jelekkel is.)

Mindezek a műveleti szabályok az események fent elmondott halmazfelfogásából közvetlenül adódnak.

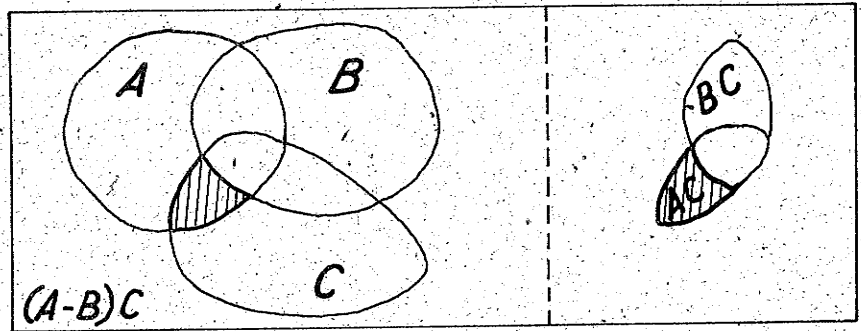
Két halmaz különbségéhez hasonlóan beszélünk két esemény különbségéről: az A és a B esemény különbségén: az $A - B$ eseményen értjük azt az eseményt, amely pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem következik be.

$(A - B)$ -t realizálják mindazon elemi események, amelyek A-t realizálják, de B-t nem realizálják. Ennek Venn-diagramja: (20/a ábra)

Nyilván: $(A - B)C = AC - BC$ minden C eseményre (20/b ábra, lásd köv. old.).



20/a ábra



20/b ábra

Mit jelent az $A - A$ esemény? Ezt egyetlen egy esemény sem valószínűsít meg, mert ezen eseménynek egyszerre kellene A -hoz tartozni, és ugyanakkor nem A -hoz is.

$$A - A = \emptyset$$

$$\bar{A} - \bar{A} = \emptyset$$

A különbség képzésből egy új fogalomhoz jutunk.

Definíció: Valamely A esemény komplementer (kiegészítő) eseményén, azaz $\bar{A}$ eseményen az $\bar{A} - A$ eseményt értjük. Az $\bar{A} - A$ esemény pontosan akkor realizálódik, amikor az A esemény nem következik be.

$A \cap \bar{A} = \emptyset$. Ez a definícióból következik.

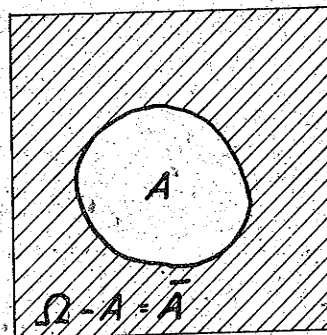
Megjegyezzük, hogy nemcsak a komplementer halmazokra állhat fenn a diszjunktság, azonban minden A és komplementerére $\bar{A}$ -ra igaz, hogy $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Mivel

$$\bar{A} - \bar{A} = \emptyset$$

így

$$\bar{\bar{A}} - \bar{\bar{A}} = \emptyset,$$



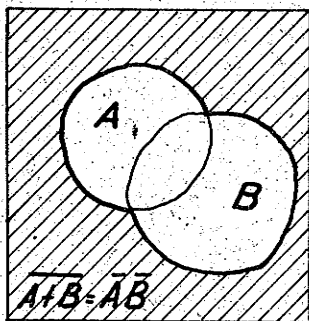
21. ábra

az eseménytér komplementer halmaza az üres halmaz. A biztos esemény komplementer eseménye a lehetetlen esemény.

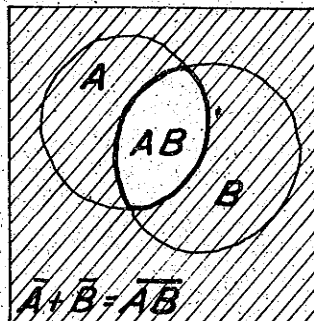
A DE-MORGAN-FORMULÁK

A halmazalgebrában szereplő összefüggések ezek. Mivel a halmazalgebrában előforduló tételek itt is kimondhatók, megfogalmazzuk a de Morgan formulákat eseményalgebrai nyelven.

1. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ v. a másik jelölésmóddal: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Az azonosság fennáll, mert $A + B$ olyan eseményt jelent, amely azáltal következik be, hogy $A + B$ nem következik be, azaz $\overline{A}$ és $\overline{B}$ események közül egyik sem, vagyis ha nem $\overline{A}$ ($\overline{A}$) és nem $\overline{B}$ ($\overline{B}$) egyszerre következik be.



22. ábra



23. ábra

2. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$. Igaz az azonosság, mert $\overline{AB}$ azon eseményt jelenti, amely nem AB , azaz akkor következik be, ha vagy $\overline{A}$ nem következik be, vagy $\overline{B}$ nem következik be. Ezt az eseményt az $\overline{A} + \overline{B}$ esemény realizálja.

III. ESEMÉNYEK RELATÍV GYAKORISÁGA

III.1 Definíciók és fogalmak

A klasszikus valószínűségszámítás azon elve, hogy minden véletlen tömegjelenség valószínűségét a kedvező esetek és az összes lehetséges esetek hányadosa adja, a modern valószínűségszámítás kiépítéséhez nem volt elegendő.

Ez a definíció hallgatólagosan feltételezi, hogy az esetek egyenlően valószínűek, ami csak speciális esetekben (pl. a szerencsejátékokban) teljesül. Ezért ma nem is tekintik definíciónak, hanem csak a valószínűség kiszámítására szolgáló szabálynak, amely alkalmazható volt azokban a speciális problémákban, amelyekkel a klasszikus valószínűségszámítás foglalkozott. A fejlődés új problémákat vetett fel (hajózás, csillagászat, meteorológia, hibaszámítás, biztosítás, fizikai rendszerek viselkedése stb., stb.), amelyeknél a régi szabály alkalmazhatatlannak bizonyult.

Egy esemény valószínűségének közvetlen meghatározása nem a valószínűségszámítás feladata. Ha valamely véletlen tömegjelenség bekövetkezésének van valamilyen valószínűsége, akkor ez a szám éppen olyan objektív adat, mint bármely más fizikai mennyiség (tömeg, hőmérséklet stb.).

Pl. egy gyermek megszületése előtt felvetődik a kérdés, mi a valószínűsége annak, hogy az fiu lesz? Nem adhatunk így választ, hogy két lehetséges esemény közül egyik következik be, így tehát $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fiugyermek születik. Ésszerű számunkra, hogy a kérdésre akkor tudnánk a legmegbízhatóbb választ adni, ha ismernénk az összes születések számát, ezen belül a fiuszületések számát, és azt mondanánk:

$$\text{a fiuszületés valószínűsége} = \frac{\text{összes fiuszületés száma}}{\text{az összes születések száma}}$$

Ennek a definíciónak a létjogosultságát a tapasztalat igazolja. Ez az elgondolás vezet a megoldás felé. A fiu születések számának igen összetett természeti törvényekben rejlő oka van. Nem ezt az okot vizsgáljuk, hanem azt, hogy ez a számunkra ismeretlen és lényegtelen ok milyen törvényszerű, stabilis állapotot hozott létre a születések vonalán.

Ugyanígy lehetne vizsgálni más területre tartozó jelenségek várható bekövetkezését. (Szélviharok, halálozás, mikroállapot-változás stb. stb.).

Visszatérve a születések problémájára, az összes születések számát, és ezekből a fiuszületések számát nem ismerjük, de rendelkezésünkre áll hosszú évek statisztikája, ennek ismeretében vezessük be a fiuszületések relatív gyakoriságának fogalmát:

$$\text{fiuszületések relatív gyakorisága} = \frac{\text{az általunk ismert fiuszületek száma}}{\text{az általunk vizsgált összes születések száma}}$$

Általánosan: nevezünk egy esemény relatív gyakoriságának azt a hányadost, amelynek nevezőjében a megfigyelt esetek száma van, a számlálójában pedig az a szám, ahányszor a vizsgált esemény bekövetkezett. Jelölése:

$$r_A = \frac{k_A}{n},$$

ahol n a megfigyelt esetek száma, (A kísérletek száma), k_A az a szám, ahányszor az A esemény bekövetkezett az n eset közül.

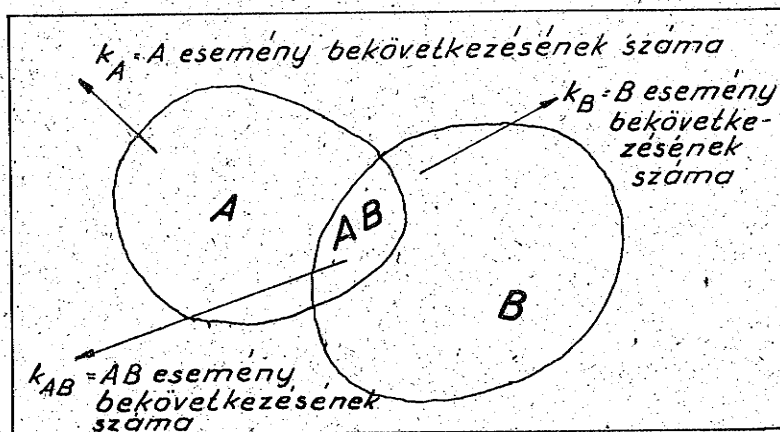
Érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy a fiuszületések relatív gyakorisága 0,516 értékre stabilnak mutatkozik a tapasztalatok alapján, és nem 0,5-re.

A relatív gyakoriság bevezetése az események bekövetkezésének valószínűségét az igen nagy számú vizsgált esetben mutatott tapasztalatra építi. A relatív gyakoriság fogalma R. Mises német matematikus nevéhez fűződik. A valószínűség fogalmának matematikailag szabatos definiálására irányuló kutatásai hozzájárultak a kérdés tisztázásához, de elmélete ma már túlhaladott.

Azoknál a jelenségeknél, amelyeknek bekövetkezése egyenlően valószínű minden elemi eseményre vonatkozólag, a relatív gyakoriság értéke nagyon nagy számú kísérlet esetén a kombinatorikailag kiszámított kedvező eset per összes eset hányadosához igen közel van, gyakorlatilag egyenlő vele.

III.2 A relatív gyakoriságra vonatkozó néhány összefüggés

1. Keresünk az A esemény és a B esemény egyesítésére (uniójára) vonatkozó relatív gyakoriságot: r_{A+B} -t.



24. ábra

$$r_{A \cup B} = r_{A+B} = \frac{k_{A+B}}{n} = \frac{k_A + k_B - k_{AB}}{n}$$

A közös eseményeket kétszer számoltuk, egyszer az A esemény bekövetkezésénél, egyszer a B esemény bekövetkezésénél.

$$r_{A+B} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n} - \frac{k_{AB}}{n} = r_A + r_B - r_{AB}$$

$$r_{A+B} = r_A + r_B - r_{AB}$$

Az összefüggés bármely konkrét "n" esetében fennáll, tehát abszolút érvényű összefüggés.

2. Tapasztalati tény az is, hogy:

$$0 \leq r \leq 1$$

és ez is abszolút érvényű.

3. Legyen valamely A esemény komplementere $\bar{A}$. Ha A bekövetkezésének száma a tapasztalat szerint k_A , $\bar{A}$ bekövetkezésének száma $n - k_A$, tehát

$$k_{\bar{A}} = n - k_A,$$

mindkét oldalt "n"-nel, a kísérletek számával elosztva, kapjuk, hogy

$$\frac{k_{\bar{A}}}{n} = \frac{n}{n} - \frac{k_A}{n},$$

azaz

$$r_{\bar{A}} = 1 - r_A$$

4. Biztos esemény relatív gyakorisága 1. Ugyanis a biztos esemény minden kísérletre bekövetkezik, tehát

$$r_{\Omega} = \frac{n}{n} = 1.$$

5. Lehetetlen esemény esetén

$$r_{\emptyset} = \frac{0}{n} = 0,$$

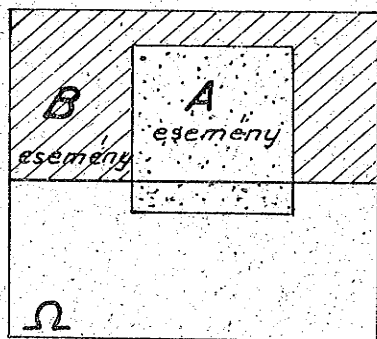
mert a lehetetlen esemény nem következhet be.
Ezt 3 alapján is igazolhatjuk:

$$r_{\emptyset} = 1 - r_{\Omega} = 0.$$

III.3 Feltételes relatív gyakoriság

Valamely esemény bekövetkezését vizsgálhatjuk valamely másik esemény bekövetkezéséhez kapcsolva. Pontosan így tesszük fel a kérdést. Mi a relatív gyakorisága az "A" esemény bekövetkezésének azon feltétel mellett, hogy már bekövetkezett a B esemény (25. ábra, lásd köv. old.).

A rajz alapján jól látható, hogy "A" esemény relatív gyakorisága "B" eseményre vonatkoztatva nagyobb, mint ha az egész eseménytérre, Ω -ra nézve vizsgáljuk az "A" esemény relatív gyakoriságát. Ezzel a



25. ábra

meggondolással egy új eseményfogalomhoz jutunk, amelyet így fejezünk ki: a "A" esemény, feltéve, hogy a "B" esemény bekövetkezése biztos.

Példa. Ha az elmúlt évek halálozási statisztikája alapján azt kérdezzük, mi a relatív gyakorisága annak, hogy egy fekete himlőben szenvedő ember meghal, akkor ez mást jelent, mintha azt kérdezzük, mi a relatív gyakorisága annak, hogy valaki meghal egyáltalán.

A gyakorlatban igen sokszor nem is lehet másképp vizsgálni a jelenségeket,

mint feltételekhez kötötten. Így pl. a biztosítási összeg is az életkorhoz, foglalkozáshoz stb.-hez kötött.

Visszatérve kiindulásunkhoz, az új eseményt így jelöljük: $A|B$ vagyis az A esemény bekövetkezése, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezése biztos. A relatív gyakoriság fogalmából következik, hogy

$$r_{A|B} = \frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{k_{AB}}{n} \cdot \frac{n}{k_B} = \frac{\frac{k_{AB}}{n}}{\frac{k_B}{n}}$$

Az "n"-nel való bővítése a törtnek azt eredményezte, hogy az egész Ω eseménytérre nézve egy hányadost kaptunk, amelynek számlálójában az "A" és "B" események együttes bekövetkezésének relatív gyakorisága áll, a nevezőben pedig a "B" esemény relatív gyakorisága:

$$r_{A|B} = \frac{r_{AB}}{r_B}$$

a $r_B \neq 0$ kikötés mellett.

A relatív gyakoriság fogalma felfogható úgyis, hogy minden "A" eseményhalmazhoz egy nem negatív és 1-nél nem nagyobb számot rendeltünk. Mondhatnánk úgy is, hogy az eseményeket reprezentáló halmazokat mérjük. Hasonló mérési problémával a geometriában találkoztunk először. Ma már a matematikának egyik lényeges, precízen megalapozott tudományága fejlődött ki ebből, a mértékelmélet.

A relatív gyakoriság fogalma, amely a tapasztalathoz kapcsolódik, továbbá a halmaz és mértékelmélet fejlődése lehetővé tette a valószínűség-számítás axiomatikus felépítését. Ez A. N. Kolmogorov szovjet matematikus nevéhez fűződik (1933).

IV. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS KOLMOGOROV-FÉLE FELEPÍTÉSE

IV.1 Események σ -algebrája és a valószínűségi mérték

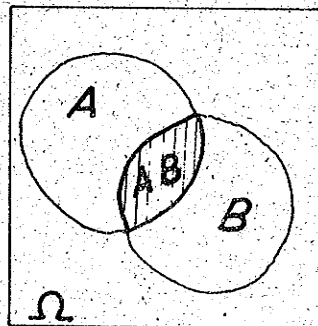
A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle elmélete abból indul ki, hogy a véletlen események reprezentálhatók az elemi események $\mathcal{L}$ halmazának (az eseménytérnek) bizonyos részhalmazzaival ($A, B, C, \dots$ -vel), amely részhalmazok azokból az elemi eseményekből állanak, amelyek bekövetkezése esetén a szóban forgó véletlen összetett esemény megvalósul. A biztos eseményt a teljes $\mathcal{L}$ eseménytér reprezentálja. Jelöljük a véletlen eseményeket reprezentáló halmazokat $A, B, C, \dots$ -vel, és $\mathcal{A}$ -val ezen halmazoknak a családját, vagyis ezen halmazok összességét. ($A, B, C, \dots$ részhalmazai $\mathcal{L}$ -nak.) Az $\mathcal{A}$ halmaz család, azaz az összes véletlen $A, B, C, \dots$ események összessége, halmaza az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\mathcal{L}$ beletartozik a $\mathcal{A}$ halmazcsaládba.
2. Ha A és B benne vannak $\mathcal{A}$ -ban, jelben $A \in \mathcal{A}$ $B \in \mathcal{A}$, akkor $A+B$, valamint $A-B$ és $B-A$ is benne vannak $\mathcal{A}$ -ban, jelben: $A+B \in \mathcal{A}$, $A-B \in \mathcal{A}$, $B-A \in \mathcal{A}$ szintén.
2.ből következik, hogy ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$, akkor $AB \in \mathcal{A}$.

Már igazoltuk, hogy $AB = A+B - [(A-B) + (B-A)]$, vagyis azt, hogy két halmaz metszete kivonásként értelmezhető olyan módon, hogy az A és B halmazok egyesítéséből az át nem nyuló részeket levonjuk.

Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\bar{A} \in \mathcal{A}$ szintén, ami 2-ből következik, mert $\bar{A} = \mathcal{L} - A$. Lévé. $\emptyset = \mathcal{L} - \mathcal{L}$, a lehetetlen esemény is benne van $\mathcal{A}$ -ban.

Megjegyzés: Ha egy halmazcsalád az 1. és 2. tulajdonságokkal rendelkezik, akkor a halmazcsalád neve: halmazalgebra. Jelen esetben eseményalgebrának is nevezzük. (Itt az "algebra" szó az $\mathcal{A}$ halmazcsalád neve.



26. ábra

Ha még az alábbi 3. tulajdonsága is megvan $\mathcal{A}$ -nak, akkor un. σ -algebrával van dolgunk.

3. Ha $A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A} \dots A_n \in \mathcal{A} \dots$, halmazok (véletlen események) egy végtelen sorozata, akkor $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{A}$ szintén.
(Ez az előző 1. és 2-ből nem következik.) Ez a követelmény azt jelenti, hogy véletlen eseménynek deklaráljuk véletlen események egy végtelen sorozatának összegét, egyesítését is.
Az 1, 2, 3-ből következik, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ véletlen események végtelen sorozatának metszete is véletlen esemény. Ugyanis (de Morgan formulája alapján):

$$A_1 A_2 \dots A_n \dots = \overline{(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n + \dots)}.$$

Lévé $A_i \in \mathcal{A}$ minden természetes i -re, ezért $\bar{A}_i \in \mathcal{A}$ szintén minden i -re.

Igy $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{A}$ szintén,
tehát

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} \in \mathcal{A}$$

Minden véletlen eseményhez hozzárendelünk egy számot a következő módon:

$$0 \leq P(A) \leq 1,$$

amelyet az A véletlen esemény valószínűségi mértékének vagy röviden valószínűségének nevezünk.

Az alábbi Kolmogorov-féle axiómák ezen hozzárendelésre vonatkozó követelményeket fejezik ki:

I. axióma: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
(addíciós tételnek is szokás nevezni).

II. axióma: $P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0.$

I. és II. következménye: ha $A \cdot B = \emptyset$, akkor

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

I-nak következménye:

$$\begin{aligned} P(A+B+C) &= P[(A+B) + C] = P(A+B) + P(C) - P[(A+B)C] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned}$$

Teljes indukcióval igazolható véges számú n -re, hogy

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \\ &- \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i A_j A_k A_l) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

Ha $A \subset B$, akkor $P(A) \leq P(B)$. Ez nem axióma, igazolható az előzőekből. U.i. legyen A valódi részhalmaza B -nek. Akkor $B = A + C$ alakban írható, és még $AC = \emptyset$.

$$P(B) = P(A+C) = P(A) + P(C) - P(AC) = P(A) + P(C),$$

ebből ($P(C) \geq 0$ miatt):

$$P(A) \leq P(B).$$

Igazolható továbbá, hogy

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

fennáll. Ugyanis

$$A + \bar{A} = \mathcal{U},$$

ezért

$$P(A + \bar{A}) = P(\mathcal{U}) = 1.$$

I. szerint

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) - P(A\bar{A}) \stackrel{I.}{=} P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

ebből pedig

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

III. axióma: A valószínűségi mérték teljes additivitása.

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ egymást páronként kizáró események végtelen sorozata, akkor

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Ez az addíciós tétel nem vezethető le az I. és II. axiómákból.

A valószínűségszámítás axiomatikus megalapozása a fejlődés útját jelentette, de természetesen a klasszikus valószínűségszámításban alkalmazott számítási szabályt is igazolta, amit a következőkben meg is mutatunk.

Legyen $\mathcal{A}$ olyan eseménytér, amely véges számú (n számú) elemi eseményt tartalmaz:

$$\mathcal{A} = E_1 + E_2 + \dots + E_n.$$

Bármely $i \neq k$ -ra: $E_i \cap E_k = \emptyset$, az elemi események értelmezése alapján. Legyenek az elemi események egyenlően valószínűek:

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \dots = P(E_n) = p.$$

Látható, hogy bármely k -ra $p = P(E_k) = \frac{1}{n}$, lévén

$$\sum_{i=1}^n P(E_i) = np = 1.$$

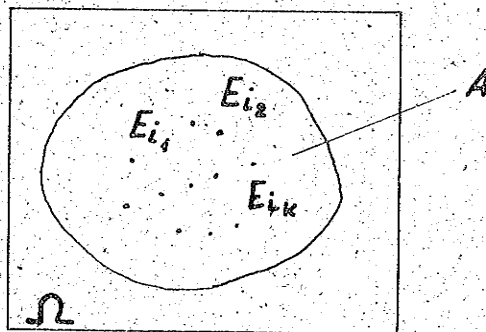
Láttunk példát ilyen eseménytérre pl. a kockadobásnál, vagy a pénzdobásnál stb.

Összetett eseményen most az elemi események tetszés szerinti unióját értjük. Legyen A összetett esemény, amelyre

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + E_{i_3} + \dots + E_{i_k}$$

áll fenn és $E_{i_l} \cap E_{i_m} = \emptyset$ ($i_l \neq i_m$). Az A véletlen eseményt realizáló, tehát A -ra kedvező elemi események száma k .

$$P(A) = P(E_{i_1} + E_{i_2} + \dots + E_{i_k}) = P(E_{i_1}) + P(E_{i_2} + \dots + E_{i_k}) = \frac{k}{n}.$$



27. ábra

Példák:

1. 9 ember 3 kocsiból álló villamos szerelvényre készül felszállni, hányféle módon valósítható meg a felszállás?
Erre azt válaszoljuk, hogy 3^9 módon. Ez az összes lehetséges elemi esemény száma: $E_1, E_2, \dots, E_{3^9}$.

Mi a valószínűsége annak, hogy minden kocsiba 3 - 3 ember száll föl. Felteesszük, hogy minden felszállás egyenlően valószínű.

A kedvező esetek száma: $\binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3}$.

Az A összetett esemény az, hogy minden kocsi-ban 3 ember van. Ennélfogva:

$$P(A) = \frac{\binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3}}{3^9} = \frac{\frac{9!}{(3!)^3}}{3^9} = \frac{9!}{3^9 (3!)^3}$$

2. a) Két kockával dobunk, a két kockát megkülönböztetjük egymástól. Mi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10?
Az eseményteret az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemeknek összes másod-
osztályú ismétléses variációja alkotja. Tehát az elemi események száma $n = 6^2$. A most szóban forgó A összetett esemény a követ-
kező elemi eseményekkel valósul meg:

$$(4, 6); (6, 4); (5, 5).$$

Az A esemény 3 elemi esemény uniója: $k = 3$.

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + E_{i_3},$$

$$P(A) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}.$$

2. b) Ha a kockákat nem különböztetjük meg, akkor az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek másodosztályu ismétléses kombinációi jelentik az elemi eseményeket. Számuk

$$\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21.$$

Kedvező esetek most a (4, 6) és az (5, 5) dobások.

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} \quad (k=2), \text{ így}$$

$$P(A) = \frac{2}{21}.$$

Látható, hogy az eseménytér különböző konstrukciója más-más eredményre vezetett. Melyik az igazi? Matematikailag mind a kettő kielégíti a Kolmogorov-axiómákat. Amelyiket a tapasztalat megerősíti, azzal az eseménytérrel dolgoznak. A kockadobásnál a tapasztalat a kockák megkülönböztetését igazolja.

IV.2 Geometriai valószínűség

A klasszikus valószínűségszámítás feladatai olyan eseményterekre vonatkoznak, amelyeket véges számú elemi esemény uniójaként kapunk; kikötjük továbbá, hogy ekkor az elemi események egyenlően valószínűek.

Ha az eseménytér elemeinek száma végtelen, a szabályt nem alkalmazhatjuk. Így pl. nem tudunk választ adni az ún. geometriai valószínűségek meghatározásának módjára, pl. arra, mi a valószínűsége annak, hogy az (a, b) intervallumon véletlenszerűen kiválasztva egy pontot, az éppen az intervallum első negyedébe esik; vagy pl. arra, mi a valószínűsége, hogy a céltáblára érkező valamely lövés a céltábla első negyedébe esik?

Feltételezzük, hogy valamely "A" tartományba való véletlenszerű becsapódás valószínűsége csak a tartomány területével arányos, a tartomány elhelyezkedésétől nem függ.

Az A tartomány területe legyen t_A , a tábla területe legyen T.

$$P(A) = \lambda \cdot t_A,$$

$$P(\mathcal{A}) = 1 = \lambda \cdot T,$$

$$\lambda = \frac{1}{T};$$

$$t_{\mathcal{A}} = T,$$

így

$$P(A) = \frac{1}{T} \cdot t_A.$$

Megjegyzés: Akár az intervallum esetére, akár a céltábla esetére gondolunk, az egyes pontok (mint elemi események) kiválasztásának a valószínűségével nem mennénk semmire.

Ui. Az egyes elemi események modellünk szerint egyenlően valószínűek; ha feltételeznénk, hogy az egyes elemi események valószínűsége valamely p pozitív szám lenne, akkor kiválasztva tetszés szerint egy $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ végtelen elemi eseménysorozatot, ezek uniója egyrészt még nem adná ki a teljes eseményteret, minthogy az eseménytér elemi eseményeinek (a pontoknak), a halmaza nem megszámlálható, másrészt

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum p = +\infty$$

eredményt kapnánk ($P(A_i) = p$ minden i indexre feltételünk szerint). Ez nyilvánvalóan abszurdum, hiszen $P(\mathcal{A}) = 1$ és

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \subset \mathcal{A}$$

Ilyen esetekben az egyes elemi események valószínűsége zérus; sőt, minden olyan véletlen esemény valószínűsége is nulla, amely megszámlálhatóan végtelen sok elemi esemény uniója.

Hasonló megfontolásokkal kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy az $(a; b)$ intervallumból véletlenszerűen kiválasztott pont a $(c; d)$ intervallumba esik,

$$P(A) = \frac{d - c}{b - a}$$

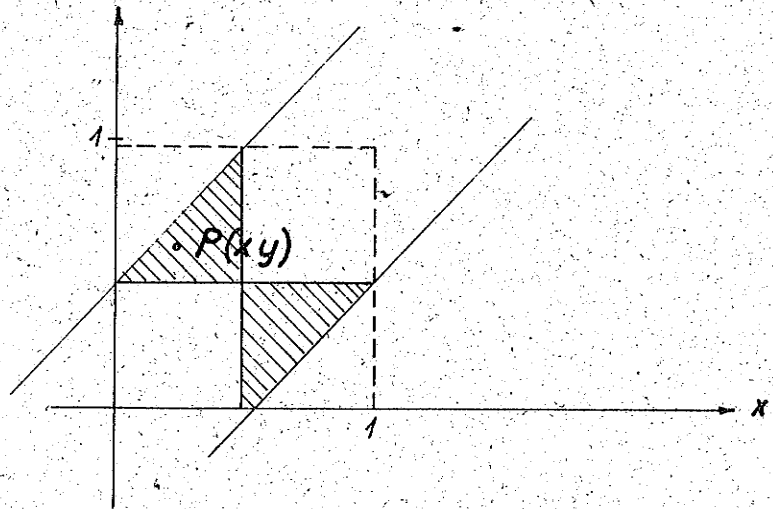
-val egyenlő. (Itt az A véletlen eseménynek a $(c; d)$ intervallum felel meg. Általánosan:

$$\text{Geometriaival valószínűség} = \frac{\text{"A" tartomány mértékszáma}}{\text{az egész tartomány mértékszáma}}$$

Térfogatok esetén ugyanígy számolunk.

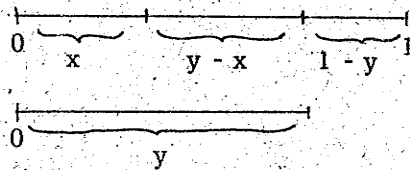
Feladat:

Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Így a szakaszt három részre bontottuk. Mi a valószínűsége annak, hogy ezek a szakaszok egy háromszög három oldalát alkotják? (Más fogalmazásban: Egységnyi hosszúságú pálcát két tetszőleges pontjában eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a keletkezett három darabból háromszöget tudunk összerakni?)



28. ábra

Jelöljük a vizsgált eseményt A -val, konstruáljuk meg az eseményteret. A választott pontoknak az egységnyi szakasz egyik végpontjától mért távolsága legyen x , ill. y .



Elemi események: az összes lehetséges (x, y) számpár. A két pont megjelölése az egyenesen ekvivalens az egységnégyzet $P(x, y)$ pontjának felvételével. Az egységnégyzet területe $T = 1$.

A három szakaszból akkor alkotható háromszög, ha közülük bármelyik kettő hosszának összege nagyobb a harmadik hosszánál. Két esetet különböztettünk meg.

a) Ha $x < y$, akkor a három szakasz: x , $y - x$, $1 - y$. Ezekre fenn kell állni a háromszög-egyenlőtlenségeknek:

$$1 - x > x, \quad \text{vagyis} \quad x < \frac{1}{2},$$

$$x + 1 - y > y - x, \quad \text{vagyis} \quad y < x + \frac{1}{2},$$

$$y > 1 - y, \quad \text{vagyis} \quad y > \frac{1}{2}.$$

b) Ha $y < x$, akkor x és y szerepet cserél, tehát a következő egyenlőtlenségeknek kell egyidejűleg teljesülniök:

$$y < \frac{1}{2}; \quad y > x - \frac{1}{2}, \quad x > \frac{1}{2}.$$

A két eset egyenlőtlenség-rendszereinek eleget tevő pontok a vonalkázott részbe esnek, amelynek területe $t = \frac{1}{4}$. Az "A" esemény valószínűsége tehát:

$$P(A) = \frac{t_A}{T} = \frac{1}{4}.$$

E feladat egy másik megfogalmazása pl. a következő. Eltörök egy pálcát véletlenszerűen, majd a hosszabbikat újra ketté töröm. Mi a valószínűsége annak, hogy az így keletkezett 3 db-ból háromszög alkotható? Ez más probléma, melyet később tárgyalunk. Eredményünket előlegezve ide írjuk:

$$P(A) = 2 \ln 2 - 1.$$

Ha nem kötöm ki, hogy a hosszabbikat töröm el, akkor is más a $P(A)$ valószínűség:

$$P(A) = \ln 2 - \frac{1}{2},$$

fele az előbb kapott értéknek, feltéve, hogy bármelyik részt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választom.

IV.3 Feltételes valószínűség

A feltételes relatív gyakoriság tapasztalat alapján megalkotott fogalmát Kolmogorov axióma rangjára emelte.

Tudjuk, hogy az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes relatív gyakorisága:

$$r(A|B) = \frac{r(A \cap B)}{r(B)}.$$

Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

feltéve, hogy

$$P(B) \neq 0.$$

(Ez definíció!)

Egyenlőségünk gyakran szerepel a következő alakban is:

$$P(A|B) P(B) = P(A \cap B).$$

Igazoltuk már, hogy ha $C \subset B$, akkor $P(C) \leq P(B)$.

Mivel $P(A \cap B) \leq P(B)$, lévén $A \cap B \subset B$, így

$$0 \leq P(A|B) \leq 1.$$

Ez definíció, igazolásra nem szorul, csupán megvilágítjuk plauzibilitássá tesszük az összefüggés értelmét. Itt a teljes eseménytér leszűkítéséről van szó. Itt a B esemény veszi át a szerepét a biztos eseménynek. Ebben az esetben akkor következik be egy esemény, ha a B -be esik, azaz az eseményeknek már eleve csak a B -be eső részét tekintjük.

$P(AB) :$	$P(A B)$	$=$	$P(B)$	$:$	1
AB-nek Ω -ra vonatkozó való- színűségi mértéke	AB-nek B-re vonatkozó új valószínűségi mértéke		B-nek Ω -ra vonatkozó valószínűségi mértéke		B-nek önmagára vonatkozó való- színűségi mér- téke

Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy a gondolatmenet semmiképpen sem levezetés jellegű, hanem csupán a feltételes valószínűség definícióját kívánja világossabbá tenni.

3 eseményre következik definíciónkból:

$$P(ABC) = P[(AB)C] = P(C|AB)P(AB) =$$

$$= P(C|AB)P(B|A)P(A),$$

vagy más sorrendben:

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

Teljes indukcióval nyérjük az alábbi formulát n eseményre:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

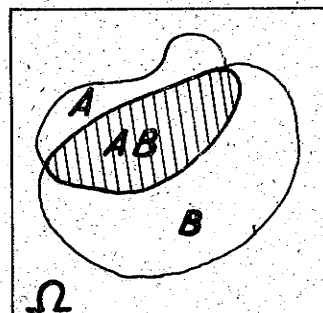
1. Példa:

a) Egy urnában négy darab számozott cédula van:

1, 2, 3, 4.

Mi a valószínűsége annak, hogy véletlenszerűen és visszatevés nélkül húzva ki egymás után a cédulákat, a természetes sorrendben húzzuk ki azokat.

Legyen A_i az az esemény, hogy az i -edik húzásra az " i " számú cédulát húzzuk. Az $A_1 A_2 A_3 A_4$ esemény jelenti a kérdezett esemény bekövetkezését. Előbbi tételt alkalmazva:



29. ábra

$$P(A_1, A_2, A_3, A_4) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1, A_2) P(A_4|A_1, A_2, A_3)$$

$$P(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4!}$$

Más módon:

$\mathcal{L} = 4!$ = a lehetséges esetek száma,

$K = 1$ = a kedvező esetek száma

$$p = \frac{1}{4!}$$

b) Ha minden húzás után a cédulát visszatesszük az urnába, akkor minden húzás előtt ugyanazon helyzet adódik. A_2 esemény nem függ A_1 -től, A_3 az A_1 és A_2 -től stb.

Tehát:

$$P(A_1, A_2, A_3, A_4) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1, A_2) P(A_4|A_1, A_2, A_3) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(A_2|A_1) = P(A_2) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_3|A_1, A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_4|A_1, A_2, A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}.$$

2. Példa:

Egy urnában van 5 piros és 10 fehér golyó. Háromszor húzunk egymás után visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a harmadik alkalommal piros golyót húzunk?

Megoldás:

Jelöljük a fehér golyó húzásának eseményét f -fel, a piros golyó húzásának eseményét p -vel. Keressük a

$$P(\cup \cup p)$$

valószínűséget, ahol az első két helyre bármilyen golyó kerülhet.

$A(\cup \cup p)$ véletlen esemény nyilván egyesítése az alábbi négy egymást páronként kizáró eseménynek:

$$(p p p), (f f p), (p f p), (f p p).$$

Ennélfogva:

$$P(\cup \cup p) = P(p p p) + P(f f p) + P(p f p) + P(f p p).$$

Alkalmazzuk mind a négy valószínűségre a

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2)$$

összefüggést. Egyenként kirészlétezve, kapjuk:

$$P(p p p) = P(p) P(p|p) P(p|p p) = (\text{annak a valószínűsége,}$$

hogy az első golyó piros) szorozva (annak valószínűsége, hogy a második piros, feltéve, hogy az első golyó piros) szorozva (annak a valószínűsége, hogy a harmadik piros, feltéve, hogy az első és a második golyó piros) =

$$= \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}.$$

Teljesen hasonlóan:

$$P(f f p) = P(f) P(f|f) P(p|f f) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13}$$

$$P(p f p) = P(p) P(f|p) P(p|p f) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13}$$

$$P(f p p) = P(f) P(p|f) P(p|f p) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13}.$$

Ennélfogva:

$$P(\cup) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 + 10 \cdot 9 \cdot 5 + 5 \cdot 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 \cdot 4}{15 \cdot 14 \cdot 13} =$$

$$= \frac{910}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{70}{15 \cdot 14} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

A keresett valószínűség tehát $\frac{1}{3}$.

1. Feladat véges halmazok uniója elemeinek a kiszámítására

Legyenek az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok végesek, az A_i halmaz elemeinek a számát jelöljük

$$S(A_i) \text{ -vel } (i = 1, 2, \dots, n),$$

hasonlóan az $A_i A_j, A_i A_j A_k$ stb. metszethalmazok elemeinek a számát az

$$S(A_i A_j), S(A_i A_j A_k) \text{ stb. jelölésekkel.}$$

Amint az

$$S(A_1 + A_2) = S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 A_2)$$

formulából teljes indukcióval következik, fennáll az alábbi egyenlőség:

$$(2) \quad S(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n S(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} S(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} S(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} S(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot S(A_1 A_2 \dots A_n).$$

Ezt az egyenlőséget felhasználjuk most a következő feladat megoldására:

Az $1, 2, 3, \dots, n$ számoknak hány olyan permutációja létezik, amelyeknél legalább egy szám a természetes helyén áll?

Legyen A_i mindazon permutációk halmaza, amelyeknél az i szám az i -ik helyen, vagyis a természetes helyén áll ($i = 1, 2, \dots, n$). Az A_i halmaz nyilván tartalmaz olyan permutációkat is, amelyeknél más elemek is a természetes helyükön állnak még az i számon kívül, de ez nem fontos, lényeges az, hogy mindazon permutációkból álljon az A_i halmaz, amelyeknél az i szám az i -edik helyen áll (oda van rögzítve).

Az i szám rögzített, a többi $1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n$ szám egymás közt minden lehető módon permutálható, így

$$S(A_i) = (n-1)! \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Hasonlóan:

$$S(A_i A_j) = (n-2)!$$

mert most az i és j számok a természetes helyükhöz vannak rögzítve, a többi $n-2$ darab számot pedig egymás között permutáljuk minden lehető módon.

Ugyanígy látható be: bármely $1 \leq i < j < k \leq n$ -re:

$$S(A_i A_j A_k) = (n-3)!, \dots$$

$$S(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = (n-k)! \dots$$

(bármely $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n$ -re).

(1) formulánkban az $A_i \cap A_j$ halmazmetszetek száma $i \neq j$

$\binom{n}{2}$, az $A_i \cap A_j \cap A_k$ halmazmetszetek száma $\binom{n}{3}$, ...

az $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}$ halmazmetszetek száma $\binom{n}{k}$, ...,

úgyhogy az (1) egyenlőségből a mi feladatunk esetében lesz:

$$\begin{aligned}
(2) \quad S(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \dots \\
&\dots + (-1)^{k-1} \binom{n}{k}(n-k)! + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n}(n-n)! = \\
&= n! - \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! + \dots + (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \dots \\
&\dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{n!0!}0! = n! \left\{ 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{k-1} + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right\}.
\end{aligned}$$

Ezzel feladatunkat meg is oldottuk, mert az

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

halmaz áll pontosan azokból a permutációkból, amelyeknél legalább egy szám a természetes helyén áll.

Ha ezt a kapott értéket kivonjuk $n!$ -ből, megkapjuk az összes olyan permutációk számát, amelyekkel egyetlen szám sem áll a természetes helyén.

Valószínűségeket is ki tudunk számítani előbbi eredményünk segítségével. Például: n személy beadja kabátját egy színházi ruhatárba; az előadás végén sietségükben nem találják a ruhatári számot és a ruhatáros véletlenszerűen adja ki a kabátokat. Mi a valószínűsége, hogy legalább egy személy a saját kabátját kapja a ruhatárostól?

A feleletet lényegében már előbb ki is számoltuk, csak az $S(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$ -re kapott értéket $n!$ -sal el kell osztani. Ugyanis gondoljuk az egyes személyeket is, kabátjukat is rendre az 1, 2, 3, ..., n számokkal megszámozva, s a személyeket természetes sorrendben:

1, 2, ..., n egymás mellé állítva. Ha az i -ik személy a saját kabátját kapja, az az n számú kabát egy olyan permutációját jelenti, amelynél az i számmal ellátott kabát az i -ik helyen áll. Így a keresett valószínűség értéke:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \pm \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Lévé

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} + \dots,$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} + \dots = 1 - e^{-1},$$

ha n elég nagy, a bal oldali végtelen sort az n -ik tagnál megszakítva, azt kapjuk, hogy a szóban forgó esemény valószínűsége közelítőleg

$$1 - e^{-1} \text{ - gyel}$$

egyenlő.

Visszatérve a permutációkra, elég nagy n esetén azoknak a permutációknak a halmaza, amelyeknél legalább egy szám a természetes helyén áll, közelítően

$$n! (1 - e^{-1}) \text{ - gyel}$$

egyenlő.

Azoknak a permutációknak a száma tehát, amelyeknél egyetlen szám sem áll a természetes helyén, közelítően

$$n! - n! (1 - e^{-1}) = \frac{n!}{e} \text{ - vel}$$

egyenlő.

Tehát (elég nagy n esetén) a permutációknak több, mint egyharmad része olyan, hogy egyetlen szám sem áll a maga természetes helyén.

Gnyegyenkö példája (e példához lásd a függetlenség későbbi fogalmát):

Kiszámítandó annak a valószínűsége, hogy egy gép, amely a t_0 időpillanatban működik, nem fog leállni a $t_0 + t$ időpontig, ha ismeretesek a következők:

(1) ez a valószínűség csak a $(t_0, t_0 + t)$ időintervallum t hosszától függ;

(2) annak a valószínűsége, hogy a gép egy Δt hosszúságú időtartam alatt megáll, egyenlő a $\lambda \Delta t + \mathcal{E}(\Delta t)$ kifejezéssel, ahol $\mathcal{E}(\Delta t)$ az $\mathcal{E}$ -nak Δt -tól való függését fejezi ki és $\mathcal{E}(\Delta t) \rightarrow 0$, ha $\Delta t \rightarrow 0$, továbbá $\lambda > 0$ állandó;

(3) a gép működésével kapcsolatos események, amelyek az időtengely egymásba át nem nyúló intervallumaiban következnek be, egymástól függetlenek.

A (2) feltétel azt jelenti, hogy a gép leállása annál valószínűbb, minél hosszabb idő óta működik és hogy ennek a leállásnak a valószínűsége kicsiny Δt időintervallum esetén közel arányos Δt -vel. A (3) feltétel azt jelenti, hogy egy t_1 időtartam folyamán történő működés, vagy leállás független egy t_2 időtartam alatt történő működéstől, vagy állástól, ha t_1 és t_2 egymásba át nem nyúló időintervallumok. Például annak a valószínűsége, hogy a gép t_1 időintervallum folyamán működik és t_2 időintervallum folyamán is működik, egyenlő a t_1 alatti működés és a t_2 alatti működés valószínűségeinek a szorzatával.

Nézzük most már a feladat megoldását. Jelöljük annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a gép egy t hosszúságú időintervallumban végig működik, $p(t)$ -vel. Akkor annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a gép a Δt időintervallum folyamán megáll, egyenlő $1 - p(\Delta t)$ -vel és ez utóbbi a (2) feltétel szerint:

$$1 - p(\Delta t) = \lambda \Delta t + \varepsilon(\Delta t) \cdot \Delta t.$$

A (3) feltétel szerint annak a valószínűsége, hogy a gép a $t + \Delta t$ időtartam folyamán működik:

$$p(t + \Delta t) = p(t) p(\Delta t) =$$

$$= p(t) [1 - \lambda \Delta t - \varepsilon(\Delta t) \cdot \Delta t],$$

ebből

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = -\lambda p(t) - p(t) \cdot \varepsilon(\Delta t);$$

átterve a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetre:

$$\frac{d p(t)}{dt} = -\lambda p(t).$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása:

$$p(t) = C e^{-\lambda t}.$$

t_0 az időszámítás kezdőpontja, vehetjük értékét nullának. Feladatunk kiinduló feltétele szerint a gép a kezdő időpillanatban működik, ezért ha $t \rightarrow 0$, $p(t)$ -nek 1 felé kell tartania, amit egyébként a gép megállására előbb felírt

$$1 - p(\Delta t) = \lambda \Delta t + \varepsilon(\Delta t), \quad \Delta t$$

valószínűségi egyenlethől is látnunk kell: ha az időszámítás kezdőpontjában működik a gép, akkor annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a gép megáll Δt időintervallum alatt, nulla felé tart, ha $\Delta t \rightarrow 0$. Tehát

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = 1, \quad \text{amiből a } \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\lambda t} = 1 \quad \text{miatt}$$

$C = 1$ következik.

Igy végeredményben:

$$p(t) = e^{-\lambda t}.$$

Megjegyezzük, hogy a kiszabott (1), (2) és (3) feltételek, főleg automatikus szövőgyári gépeknél szerzett tapasztalatok alapján, nagymértékben jogosultak.

A TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

Ha

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n, \quad A_i, A_j = \emptyset, \text{ ha } i \neq j,$$

akkor bármely B eseményre:

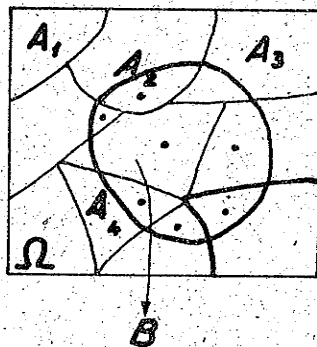
$$B = B(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = \bigcup_{i=1}^n (B A_i),$$

továbbá

$$(B A_i) \cap (B A_j) = \emptyset, \quad \text{minden } i \neq j\text{-re.}$$

Kolmogorov I. axiómája szerint:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3) + \dots + P(BA_n)$$



30. ábra

A feltételes valószínűség definíciója alapján:

$$P(BA_i) = P(A_i) P(B|A_i);$$

ezt írjuk be minden i -re, akkor kapjuk a

$$P(B) = P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + P(A_n) P(B|A_n)$$

összefüggést.

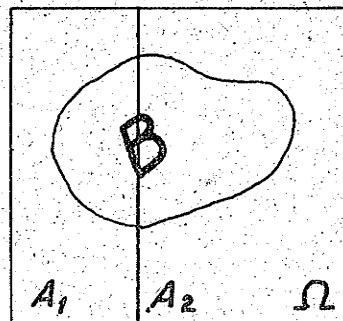
IV.4 A Bayes-tétel

E tétel alkalmazásával a gyakorlatban is igen sokszor alkalmazható problémára - az okozatból az okra való következtetésre adódik lehetőség. Legyen

$$A_1 + A_2 = \Omega, \quad A_1 A_2 = \emptyset.$$

Ismerjük $P(A_1)$ -et és $P(A_2)$ -t, továbbá $P(B|A_1)$ és $P(B|A_2)$ értékét.

Meg akarjuk határozni a $P(A_1|B)$ és $P(A_2|B)$ valószínűségeket. Felhasználjuk a teljes valószínűség tételét is.



31. ábra

$$B = B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$$

és mivel

$$BA_1 \cap BA_2 = \emptyset, \quad \text{így} \quad P(BA_1 A_2) = 0.$$

Kolmogorov I. axiómája szerint:

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) = P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2);$$

utolsó lépésben a teljes valószínűség tételét alkalmaztuk. Most már választ adhatunk a feltett kérdésre.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2)}.$$

A Bayes-tétel általánosabb megfogalmazása

Legyen

$$\mathcal{L} = A_1 + A_2 + \dots + A_n \text{ és } A_i A_j = \emptyset \text{ minden } i \neq j\text{-re.}$$

Ismerjük ezen A_i események valószínűségét, azaz

$$P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$$

ismert mennyiségek.

Legyen B tetszős szerinti esemény, amelyre $P(B) > 0$. Ismerjük továbbá minden i -re a $P(B|A_i)$ valószínűségeket is. Keressük a $P(A_i|B)$ valószínűségeket.

Tudjuk, hogy

$$B = B(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n,$$

és

$$BA_i \cap BA_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Kolmogorov I. axiómája szerint:

$$P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + \dots + P(A_n B).$$

A teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(B) = P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + P(A_n) P(B|A_n).$$

Mindezek alapján kapjuk, hogy

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)},$$

vagy rövidebben:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

A Bayes-tétel abban az esetben is alkalmazható, ha az eseménytér megszámlálhatóan végtelen sok egymást páronként kizáró események sorozatára bomlik szét, azaz

$$\Omega = A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots, \quad \text{ahol } A_i \cdot A_j = \emptyset$$

minden $i \neq j$ -re.

Akkor

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Feladatok:

1. Legyen 3 db urna: A_1 , A_2 , A_3 ;

az elsőben	2 fehér,	3 fekete,	4 piros golyó
a másodikban	3 fehér,	2 fekete,	2 piros golyó
a harmadikban	4 fehér,	1 fekete,	1 piros golyó van.

Véletlenszerűen választunk egy urnát és abból két golyót huzunk. Ha az egyik fehér, a másik piros, mi a valószínűsége, hogy az A_3 urnából huzzuk őket?

Megoldás:

A_i jelentse azt, hogy az i -ik urnából huzunk. $f p$ jelölje a fehér-piros pár húzásának eseményét. Akkor:

$$P(f p/A_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{2}{9}, \quad P(A_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(f p/A_2) = \frac{3 \cdot 2}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}, \quad P(A_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(f p/A_3) = \frac{4 \cdot 1}{\binom{6}{2}} = \frac{4}{15}, \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Keresendő $P(A_3/fp)$. Alkalmazzuk a Bayes-tételt.

$$\begin{aligned} P(A_3/fp) &= \frac{P(A_3 f p)}{P(f p)} = \frac{P(A_3) P(f p/A_3)}{P(f p A_1) + P(f p A_2) + P(f p A_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{15}}{P(A_1) P(fp/A_1) + P(A_2) P(fp/A_2) + P(A_3) P(fp/A_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{15}}{\frac{1}{3} \left[\frac{2}{9} + \frac{2}{7} + \frac{4}{15} \right]} = \frac{21}{61} \end{aligned}$$

2. Két cipőgyár, A_1 és A_2 cipőket gyárt; A_1 az eladásra kerülő cipők 40%-át, A_2 a 60%-át gyártja. Az A_1 gyár selejtszázaléka 1%, az A_2 gyáré 1,5%.

Veszünk egy pár cipőt és az selejtes. Mi a valószínűsége, hogy az A_1 gyár készítette?

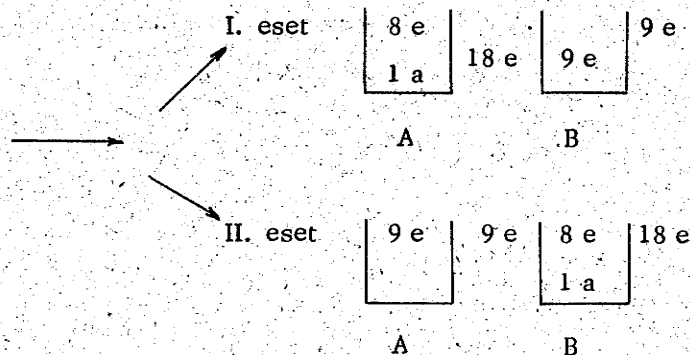
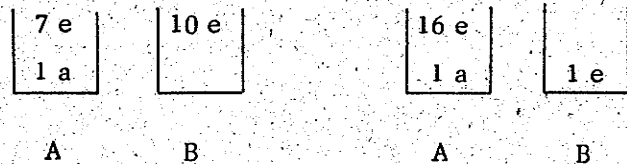
Megoldás:

Itt $P(A_1) = 0,4$, $P(A_2) = 0,6$, E az az esemény, hogy egy pár cipő selejtes. Így $P(B|A_1) = 0,01$; $P(B|A_2) = 0,015$.

Keresendő $P(A_1|B)$ valószínűség. Az ismertetett Bayes-tétel alapján:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)} =$$
$$= \frac{0,4 \cdot 0,01}{0,4 \cdot 0,01 + 0,6 \cdot 0,015} = \frac{4}{13} = 0,307.$$

3. Az A urna 7 ezüst (e) pénzérmét és 1 arany (a) pénzérmét tartalmaz, a B urna pedig 10 ezüst pénzérmét. Az ezüst pénzérmék egymásközt teljesen egyenlő értékűek, egy ezüst pénzérme értékét jelöljük 1 e-vel. Az arany pénzérme értéke 10 e; azaz az arany pénzérme 10 ezüst pénzérmével egyenértékű. A "B" urnából kivesszünk 9 pénzdarabot és áttesszük A-ba, majd az A-ban levő 17 pénzdarabból véletlenszerűen kiválasztunk nyolcat és visszatesszük a B urnába. Melyiket választanánk a két urna közül? A feladatot a mellékelt rajz szemlélteti.



1 ezüst 1 e értékű
1 arany 10 e értékű.

$$P(I) = \frac{\binom{16}{8}}{\binom{17}{8}}$$

$$\binom{16}{8} = \frac{16!}{(8!)^2};$$

$$(8!)^2 = (7!)^2 \cdot 8^2,$$

ebből pedig

$$(8!)^2 < 7!9! \quad \text{ezért} \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{(8!)^2} > \frac{1}{7!9!},$$

azaz $\binom{16}{8} > \binom{16}{7}$, vagyis $P(I) > P(II)$, így az A urnát választjuk.

4. Adott két urna A és B a következőképpen:

4 fehér
5 piros

A

5 fehér
6 piros

B

Az A esemény: az A urnát választjuk.

B esemény: a B urnát választjuk.

"f" a fehér, "p" a piros golyó kihuzásának eseményét jelenti.

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

Belenyulunk az A urnába és találomra kiveszünk belőle két golyót, ezeket áttesszük a B urnába. Majd ezután találomra benyulunk az egyik urnába és ebből kiveszünk egy golyót. Ha ez a golyó fehér, mi a valószínűsége annak, hogy a B urnából huzzuk? A keresett esemény B/f, valószínűsége: $P(B/f)$.

Megoldás:

I. esemény: egy fehér és egy piros golyót huzunk ki az A urnából és ezek kerülnek a B urnába. Tehát:

3 fehér 4 piros	... 1 fehér ... 1 piros	→	6 fehér 7 piros
A	I. Esemény		B

$$P(I) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{9}.$$

II. esemény: két fehér golyót huzunk ki az A urnából és ezek kerülnek a B urnába.

2 fehér 5 piros	... 2 fehér ... 0 piros	→	7 fehér 6 piros
A			B

$$P(II) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}.$$

III. esemény: két piros golyót huzunk ki az A urnából és ezeket a B urnába tesszük.

4 fehér 3 piros	... 0 fehér ... 2 piros	→	5 fehér 8 piros
A			B

$$P(III) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{18}.$$

Most eljutottunk ahhoz az eseményhez, hogy találomra belenyulunk az egyik urnába, abból kihuzunk egy golyót.
Keressük a $P(B/f)$ - értékét.

Nyilvánvaló, hogy $I \cap II = \emptyset$,

$$I \cap III = \emptyset,$$

$$II \cap III = \emptyset,$$

és $I \cup II \cup III = \Omega$.

Valóban, $\frac{5}{9} + \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = 1$.

A Bayes-tétel értelmében:

$$P(B/f) = \frac{P(Bf)}{P(f)} = \frac{P(BfI + BfII + BfIII)}{P(fI + fII + fIII)} =$$

$$= \frac{P(BfI) + P(BfII) + P(BfIII)}{P(fI) + P(fII) + P(fIII)}.$$

$$P(BfI) = \underbrace{P(Bf/I)}_{=} \cdot P(I) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{13} = \frac{5}{39}.$$

$$P(B_I f_I) = P(f_I/B_I) \cdot \underbrace{P(B_I)}_{=} = P(f_I/B_I) P(B),$$

$$= P(B/I) = P(B)$$

ahol rövidség kedvéért a Bf/I eseményt $B_I f_I$ -gyel jelöltük.

Az az esemény, hogy a B urnából huzunk, feltéve, hogy az I esemény bekövetkezett, egyenlő azzal az eseménnyel, hogy a B-ből huzunk. (A B urna választása nem függ attól, hogy az U urnából milyen golyókat tettünk át a B urnába. Ebben hallgatólagosan megállapodunk.)

Ugyanígyan megfontolást alkalmazunk a $P(BfII)$ és $P(BfIII)$ valószínűségek kiszámításánál. Így kapjuk:

$$P(Bf_{II}) = P(Bf_{II}/II) P(II) = P(B_{II}/f_{II}) P(II) = P(f_{II}/B_{II}) P(B) P(II) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{156}.$$

$$P(Bf_{III}) = P(Bf_{III}/III) P(III) = P(B_{III}/f_{III}) P(III) = P(f_{III}/B_{III}) P(B) P(III) = \\ = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{25}{468}.$$

Kiszámítjuk a nevező értékét.

$$P(f_I) = P(f_I/I) P(I) = \frac{5}{9} \cdot P(f_I/A + f_I/B) = \\ = \frac{5}{9} \left\{ P(A) P(f_I/A) + P(B) P(f_I/B) \right\} = \frac{5}{9} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{13} \right\} = \frac{45}{182},$$

ahol az f_I eseményt röviden f_I -gyel jelöltük.

$$P(f_{II}) = P(f_{II}/II) P(II) = \frac{1}{6} P(f_{II}) = \frac{1}{6} \left\{ P(f_{II}/A) + P(f_{II}/B) \right\} = \\ = \frac{1}{6} \left\{ P(A) P(f_{II}/A) + P(B) P(f_{II}/B) \right\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{7} + \frac{7}{13} \right\} = \frac{25}{364},$$

ahol az f_{II} eseményt röviden f_{II} -vel jelöltük.

$$P(f_{III}) = P(f_{III}/III) P(III) = \frac{5}{18} \left\{ P(f_{III}/A) + P(f_{III}/B) \right\} = \\ = \frac{5}{18} \left\{ P(A) P(f_{III}/A) + P(B) P(f_{III}/B) \right\} = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{7} + \frac{5}{13} \right\} = \\ = \frac{145}{1092}$$

ahol f_{III} az f_{III} eseményt jelöli.

Mindezek alapján:

$$P(B/f) = \frac{\frac{5}{39} + \frac{7}{156} + \frac{25}{468}}{\frac{45}{182} + \frac{25}{364} + \frac{145}{1092}} = \frac{53}{105} \approx 0,5047,$$

azaz

$$P(B/f) = \frac{53}{105} \approx 0,5047.$$

Az eseménytér megszerkesztése a feladathoz

Utmutatás a rajzhoz:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

Egy-egy golyó most az eseménytér egy-egy elemi eseményét ábrázolja.

A "B" mezőbe eső fehér golyók összes valószínűségi tömege:

$$6 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{5}{18} + 7 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{18} = \frac{53}{13 \cdot 18}$$

Az "A" mezőbe eső fehér golyók összes valószínűségi tömege:

$$3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{18} = \frac{2}{9}$$

A	B
$\frac{2}{9}$	$\frac{53}{13 \cdot 18}$

tömeg

tömeg

fehér golyók
halmaza.

$$P(B/f) = \frac{\frac{53}{13 \cdot 18}}{\frac{2}{9} + \frac{53}{13 \cdot 18}} = \frac{53}{105}.$$

Természetesen így is ugyanazt az értéket kapjuk a $P(B/f)$ -re.

Eseménytér

A

B

Az ide jutó valószínűségi tömeg összesen $\frac{5}{18}$. Egy elemi esemény valószínűségi tömege: $\frac{1}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$, mert $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(I) = \frac{5}{9}$, és mert az A urnában összesen az I. esemény bekövetkezése esetén 7 golyó van. 3 f ○ ○ ○ 4 p ● ● ● ●	Ide jut összesen $\frac{5}{18}$ valószínűségi tömeg. Egy elemi esemény valószínűségi tömege, mivel 13 golyó van az I-es esemény bekövetkezésével $\frac{5}{18} \cdot \frac{1}{13}$ 6 f ○ ○ ○ ○ ○ ○ 7 p ● ● ● ● ● ● ●
Ide jut összesen $\frac{1}{12}$ valószínűségi tömeg, és mivel a II esemény bekövetkezésével 7 golyó van összesen 2 f ○ ○ 5 p ● ● ● ● ● egy elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{7}$	Ide jut összesen $\frac{1}{12}$ valószínűségi tömeg. Mivel 13 golyó van, egy elemi esemény valószínűségi tömege $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12}$ 7 f ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 6 p ● ● ● ● ● ● ●
Ide jut összesen $\frac{5}{36}$ valószínűségi tömeg. Mivel a III-as esemény után 7 golyó van, egy elemi esemény valószínűsége: $\frac{1}{7} \cdot \frac{5}{36}$ 4 f ○ ○ ○ ○ 3 p ● ● ●	Ide jut összesen $\frac{5}{35}$ valószínűségi tömeg. Mivel a III-as esemény bekövetkezte után is 13 golyó van, egy elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{13} \cdot \frac{5}{36}$ 5 f ○ ○ ○ ○ ○ 8 p ● ● ● ● ● ● ● ●

Feladatok a feltételes valószínűségre

A következő példák Kemény - Snell - Thompson: A modern matematika alapjai c. könyvben találhatók (kidolgozás nélkül).

1. Egy börtönben három ember van: A, B és C. A következő napon egyiküket felakasztják. A börtönőr tudja, kit akasztanak fel, de nem szabad elárulnia. Az A fogoly a következőt kérdezi a börtönőrtől: "Áruld el a másik két fogoly közül egy olyannak a nevét, akit holnap nem akasztanak fel. Ha mindketten szabadok lesznek, akkor dönts el magadban, hogy kinek a nevét mondod. Ezzel nem árulsz el titkot, mert azt már tudom, hogy egyikük szabad lesz." A börtönőr némi gondolkodás után így válaszolt: Nem, ez nem volna emberséges veled szemben. Most úgy gondolsz, hogy $\frac{1}{3}$ valószínűséggel akasztanak fel. Ha elárulom a többiek közül egy olyannak nevét, akit nem akasztanak fel, akkor az esélyeid megnövekednek: úgy fogod gondolni, hogy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel akasztanak fel. Nem tudnál nyugodtan aludni. Helyesen érvelt-e a börtönőr? (Kemény-Snell-Thompson: A modern matematika alapjai. 179. old. 9. példa.)

Felelet nem. Ez egyszerűen belátható azzal, hogy A fogoly ugyanis tudja, hogy B és C közül az egyiket nem végzik ki. Ha a börtönőr megnevezné B és C közül az egyiket, ezzel A információját a saját sorsát illetően nem befolyásolná.

Ez kiderül a részletes eseményalgebrai számolással is. Jelentse rendre az A, ill. a B, ill. a C azon eseményeket, hogy másnap a A, ill. B, ill. C személyt kivégzik. (Igy $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ azt jelenti, hogy nem végzik ki őket.)

Fennállnak a következő relációk:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3},$$

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset$$

Kérdés, mekkora a

$$P(A | \bar{B} + \bar{C})$$

valószínűség értéke?

Ha ui. a börtönőr megnevez valakit B és C közül, az azt jelenti, hogy vagy B-t, vagy C-t nevezi meg, azaz, hogy a $\overline{B} + \overline{C}$ esemény bekövetkezik.

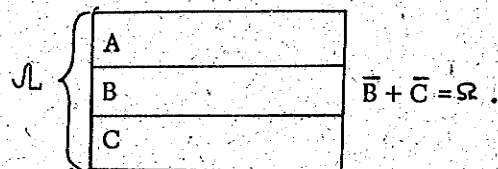
$$P(A | \overline{B} + \overline{C}) = \frac{P(A [\overline{B} + \overline{C}])}{P(\overline{B} + \overline{C})} = P(A) = \frac{1}{3}.$$

Tehát A esélye semmit sem változik. Ui.

$$P(\overline{B} + \overline{C}) = P(\overline{BC}) = 1 - P(BC) = 1, \quad \text{mert } B \cap C = B \cap C = \emptyset.$$

de Morgan

Ezt lehet látni a Venn-diagramon is:



2. Nyolcmillió pénzdarab közül az egyiken két fej van, a többi jó. Találomra kiválasztunk egyet a nyolcmillió pénzdarab közül. Tízszer dobunk vele. Az eredmény mindegyik esetben fej. Mi annak a valószínűsége, hogy a rossz pénzdarabbal dobtunk?

Megoldás:

Jelentse R a rossz pénz kiválasztását a nyolcmillió pénzdarab közül J egy jó pénzérme kiválasztását, F a "fej" -dobás eseményét.
Akkor:

$$P(R) = \frac{1}{8 \cdot 10^6}, \quad P(J) = 1 - \frac{1}{8 \cdot 10^6}$$

Akkor:

$$\begin{aligned} P(F) &= P[F | (J + R)] = P(F|J) + P(F|R) = \\ &= P(J) \underbrace{P(F|J)}_{= \frac{1}{2}} + P(R) \cdot \underbrace{P(F|R)}_{= 1} = \left(1 - \frac{1}{8 \cdot 10^6}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8 \cdot 10^6} \end{aligned}$$

Jelöljük F^{10} -zel azt az eseményt, hogy egy pénzdarabbal 10-szer egymás után "fej"-et dobunk. Akkor:

$$\begin{aligned} P(F^{10}) &= P[F^{10} (J + R)] = P(F^{10} | J) + P(F^{10} | R) = \\ &= P(J) \underbrace{P(F^{10} | J)}_{\frac{1}{2^{10}}} + P(R) \underbrace{P(F^{10} | R)}_{=1} = \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{8 \cdot 10^6}\right) \cdot \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{8 \cdot 10^6}$$

Mi a $P(R|F^{10})$ valószínűséget keressük.

$$\begin{aligned} P(R|F^{10}) &= \frac{P(R|F^{10})}{P(F^{10})} = \frac{P(F^{10}|R) P(R)}{\left(1 - \frac{1}{8 \cdot 10^6}\right) \cdot \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{8 \cdot 10^6}} = \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{8 \cdot 10^6}}{\left(1 - \frac{1}{8 \cdot 10^6}\right) \cdot \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{8 \cdot 10^6}} = \frac{1}{\left(8 \cdot 10^6 - 1\right) \cdot \frac{1}{2^{10}} + 1} \approx \frac{1}{\frac{8 \cdot 10^6}{2^{10}} + 1} = \\ &= \frac{1}{\frac{10^6}{2^7} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{10}{2}\right)^6 + 1} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 5^6 + 1} = \frac{1}{7813,5} \end{aligned}$$

3. Az előbbi feladatban a kiválasztott pénzdarabbal n -szer dobunk, az eredmény mindegyik alkalommal fej. Mekkora kell választani az

n számot, hogy a rossz pénz kiválasztásának a valószínűsége kb. $\frac{1}{2}$ legyen?

Megoldás:

Ugyanugy számolva, mint előbb kapjuk:

$$P(R|F^n) = \frac{1}{(8 \cdot 10^6 - 1) \frac{1}{2^n} + 1} = \frac{1}{2},$$

azaz

$$2 = (8 \cdot 10^6 - 1) \frac{1}{2^n} + 1,$$

$$1 = (8 \cdot 10^6 - 1) \frac{1}{2^n}, \quad 2^n = 8 \cdot 10^6 - 1, \quad 2^n \approx 8 \cdot 10^6,$$

$$2^{n-3} \approx 10^6, \quad (n-3) \lg 2 \approx 6$$

$$n - 3 \approx \frac{6000}{301} \approx \frac{6000}{300} = 20,$$

tehát

$$n \approx 23.$$

4. Egy patkány öt labirintus között választ találomra. Annak valószínűsége, hogy három perc alatt keresztül jut az egyes labirintusokon, rendre 0, 6; 0, 3; 0, 2; 0, 1 és 0, 1. Három perc elteltével azt látjuk, hogy a patkány elmenekült. Mi a valószínűsége annak, hogy

- az első labirintust,
- a második labirintust választotta?

Megoldás:

Jelöljük azokat az eseményeket, hogy a patkány rendre az 1., 2., 3., 4., 5. labirintust választja, rendre az

$$L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$$

betűkkel.

Jelöljük azt az eseményt, hogy három perc elteltével elmenekült (tehát hogy átjutott valamelyik labirintuson), E-vel.

Akkor a példa szerint:

$$P(L_i) = \frac{1}{5} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad \text{és nyilván} \quad L_i \cap L_j = \emptyset \quad i \neq j$$

$$P(E|L_1) = 0,6; \quad P(E|L_2) = 0,3; \quad P(E|L_3) = 0,2;$$

$$P(E|L_4) = 0,1; \quad P(E|L_5) = 0,1.$$

Keresendők: a) $P(L_1|E)$; b) $P(L_2|E)$.

$$\begin{aligned} P(E) &= P[E(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)] = \sum_{i=1}^5 P(E|L_i) = \\ &= \sum_{i=1}^5 P(E|L_i) P(L_i) = \frac{1}{5} [0,6 + 0,3 + 0,2 + 2 \cdot 0,1] = \\ &= \frac{1,3}{5} = 0,26. \end{aligned}$$

A Bayes-tétel szerint:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(L_1|E) &= \frac{P(L_1|E) P(E|L_1)}{P(E)} = \frac{P(E|L_1) P(L_1)}{0,26} = \\ &= \frac{0,6 \cdot \frac{1}{5}}{0,26} = \frac{0,6}{1,3} = \frac{6}{13}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(L_2|E) &= \frac{P(L_2 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|L_2) P(L_2)}{P(E)} = \\
 &= \frac{0,3 \cdot \frac{1}{5}}{0,26} = \frac{0,3}{1,3} = \frac{3}{13} .
 \end{aligned}$$

5. Egy üzemből kikerült áru 75% valószínűséggel I. osztályú. A kikerült termékeket megvizsgálják. Annak a valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy I. osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek: 0,02. Annak a valószínűsége, hogy egy nem első osztályú terméket I. osztályúnak minősítenek: 0,05. Mi a valószínűsége annak, hogy egy olyan termék, amelyik e vizsgálat során I. osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

Megoldás:

A_1 esemény: egy termék I. osztályú.

A_2 esemény: egy termék nem I. osztályú. Így

$$A_1 + A_2 = \Omega \text{ és } A_1 \cap A_2 = \emptyset .$$

U_1 esemény: egy termék I. osztályú minősítést kap.

U_2 esemény: egy termék nem első osztályú minősítést kap

$$P(A_1) = 0,75 , \quad P(A_2) = 0,25 ,$$

$$P(U_1|A_1) = 0,02 , \quad P(U_1|A_2) = 0,98 ,$$

$$P(U_2|A_1) = 0,05 , \quad P(U_2|A_2) = 0,95 .$$

Ezek a valószínűségek a feladatból ismertek.

A kérdés:

$$P(A_1|U_1) = ? !$$

A Bayes-tétel szerint:

$$\begin{aligned}
 P(A_1|U_1) &= \frac{P(A_1|U_1) P(A_1)}{P(U_1)} = \frac{P(U_1|A_1) P(A_1)}{P[U_1(A_1 + A_2)]} = \\
 &= \frac{P(U_1|A_1) P(A_1)}{P(U_1|A_1) P(A_1) + P(U_1|A_2) P(A_2)} = \\
 &= \frac{0,98 \cdot 0,75}{0,98 \cdot 0,75 + 0,05 \cdot 0,25} = 0,983 = 93,3\%.
 \end{aligned}$$

6. Két löveg tüzel egy célpontra. Tapasztalták, hogy amíg az I. löveg 9 lövést ad le, addig a II. löveg 10-et. Az I. löveg találati biztonsága: 10 lövésből 8 talál. A II. lövegnél 10 lövésből 7 talál. Egyszerre a két löveg nem tüzel. Tüzelés alatt a célpontot találat éri, mi a valószínűsége annak, hogy a II. löveg adta le a lövést?

Megoldás:

A_1 esemény: az I. löveg lő.

A_2 esemény: a II. löveg lő.

$A_1 + A_2 = \Omega$ és $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

$$\frac{P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{9}{10}, \quad \text{ebből} \quad P(A_1) = \frac{9 \cdot P(A_2)}{10} = 0,9 P(A_2).$$

$P(A_1)$ az I. löveg tüzelési gyakoriságát jelenti, ez a valószínűség a II. löveg tüzelési gyakoriságával van kifejezve.

B esemény: a célt találat éri.

$$P(B|A_1) = 0,8 \quad \text{és} \quad P(B|A_2) = 0,7.$$

Meghatározandó a $P(A_2|B)$ valószínűség! A Bayes-tétel szerint:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_2) P(A_2)}{P[B(A_1 + A_2)]} =$$

$$= \frac{P(B/A_2) P(A_2)}{P(BA_1) + P(BA_2)} = \frac{P(B/A_2) P(A_2)}{P(B/A_1) P(A_1) + P(B/A_2) P(A_2)} =$$

$$= \frac{0,7 P(A_2)}{0,8 \cdot 0,9 P(A_2) + 0,7 P(A_2)} = \frac{0,7}{0,8 \cdot 0,9 + 0,7} = 0,493.$$

7. Májusban az esős napok valószínűsége 0,2. Egy bizonyos futball-csapat 0,7 valószínűséggel nyeri meg a mérkőzéseket, ha nem esik az eső. Esős napokon a győzelem valószínűsége 0,4. Ha tudjuk, hogy egy májusi mérkőzésüket megnyerték, akkor mi a valószínűsége, hogy esett az eső a mérkőzés napján?

Megoldás:

Legyen a csapat győzelmének eseménye G , az esőzés eseménye E , a száraz idő eseménye így $\bar{E}$.

Akkor:

$$E \cap \bar{E} = \emptyset, \quad E + \bar{E} = \Omega,$$

továbbá

$$P(E) = 0,2, \quad P(\bar{E}) = 0,8,$$

továbbá

$$P(G/E) = 0,7, \quad P(G/\bar{E}) = 0,4.$$

Keresendő a $P(E/G)$ valószínűség!

$$P(E/G) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G/E) \cdot P(E)}{P(G/E) \cdot P(E) + P(G/\bar{E}) \cdot P(\bar{E})} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,4 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,8} = \frac{0,08}{0,4 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,8} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}.$$

8. Tüdőszűrésnél a betegek 90%-ánál a vizsgálat kimutatja a betegséget. Az egészséges emberekről készült vizsgálati anyag 1%-a hibás, tehát 100 egészséges ember közül 1-et betegnek mutat. A tuberkulózis 10 000 ember közül 5 esetben fordul elő. Találomra kiválasztunk valakit, elvégezzük a tüdőszűrést és betegnek találjuk. Mi a valószínűsége, hogy tényleg beteg?

Megoldás:

Legyen $\bar{B}$ az az esemény, hogy valaki tüdőbeteg,
 B az az esemény, hogy valaki nem tüdőbeteg,
 tehát egészséges.

Legyen $\bar{A}$ az az esemény, hogy a vizsgálat valakit betegnek talál,
 A az az esemény, hogy a vizsgálat valakit egészségesnek talál.

Akkor:

$$P(\bar{B}) = 1 - 5 \cdot 10^{-4},$$

$$P(B) = 5 \cdot 10^{-4};$$

$$P(A|B) = 0,9; \quad P(A|\bar{B}) = 0,01.$$

Keresendő a

$$P(B|A) = ?!$$

valószínűség.

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A|B) P(B) + P(A|\bar{B}) P(\bar{B})} = \\ &= \frac{0,9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{0,9 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 0,01 \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-4})} = \\ &= \frac{4,5}{4,5 + 0,01 (10^4 - 5)} = \frac{4,5}{4,5 + 99,95} = 0,043. \end{aligned}$$

9. Az A urnában 7 piros és 3 fekete, a B urnában 6 piros és 4 fekete golyó van. Találomra kiválasztunk egy urnát és kihuzunk belőle két golyót. Az egyik piros, a másik fekete. Mutassuk meg, hogy a B urnából huzzuk őket nagyobb valószínűséggel. (Mindkét urnát $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választjuk és minden golyó egymásközt egyenlő eséllyel húzható.)

Megoldás:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

Jelöljük pf-fel a piros és fekete golyó húzásának eseményét.

$$P(pf) = P(pf|A+B) = P(pf|A) P(A) + P(pf|B) P(B) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{10 \cdot 9}{2}} (21 + 24) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A|pf) = \frac{P(A \cap pf)}{P(pf)} = \frac{P(pf|A) P(A)}{P(pf)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{7 \cdot 3}{\binom{10}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{21}{\frac{10 \cdot 9}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

$$P(B|pf) = \frac{P(B \cap pf)}{P(pf)} = \frac{P(pf|B) P(B)}{P(pf)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{6 \cdot 4}{\binom{10}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15},$$

tehát

$$P(B|pf) = \frac{8}{15} > \frac{7}{15} = P(A|pf).$$

IV. 5. Események függetlensége

IV.5.1 Fogalmak és definíciók

Definíció: Az A esemény független a B eseménytől, ha

$$P(A|B) = P(A) .$$

Következmény: A feltételes valószínűség Kolmogorov-féle definíciója szerint:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) .$$

Az A eseménynek B -től való függetlensége miatt pedig

$$P(A|B) = P(A) ,$$

ennélfogva

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) .$$

Nézzük fordítva, ha tudjuk, hogy igaz a

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

egyenlőség, akkor a feltételes valószínűség értelmezése szerint kapjuk, hogy

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A) .$$

tehát az A a B eseménytől független.

Az A és a B jelek felcserélésével kapjuk, hogy ha az A esemény független a B -től, akkor a B esemény is független az A -tól.

Az előbbiekből alapján az A és a B események egymástól pontosan akkor függetlenek, ha igaz a

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

egyenlőség. (Szorzástétel.)

Tétel: Ha A és B függetlenek, akkor $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is függetlenek, azaz:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) P(\bar{B}) \text{ igaz, ha } P(A \cap B) = P(A) P(B) .$$

A de Morgan formulát fogjuk alkalmazni.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \bar{B}) &= P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) P(B) = P(\bar{A}) - P(B) [1 - P(A)] = \\ &= P(\bar{A}) - P(B) P(\bar{A}) = P(\bar{A}) [1 - P(B)] = P(\bar{A}) P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Három esemény függetlensége.

Definíció: A, B, C események egymástól (teljesen) függetlenek, ha A és B, A és C, B és C függetlenek, továbbá AB és C, AC és B, BC és A is függetlenek. (Megjegyezzük, hogy a páronkénti függetlenség mellett elegendő bármely két esemény metszetének a harmadiktól való függetlenségét kikötni.)

Bizonyítható, hogy ebből a definícióból következik, hogy

$$P(ABC) = P(A) P(B) P(C).$$

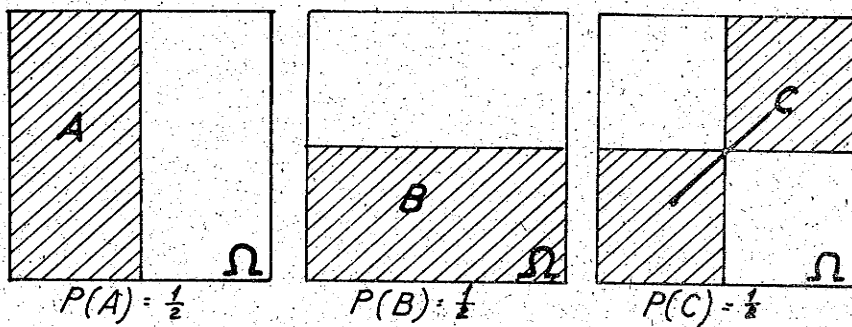
Megfordítva, ha feltételezem, hogy a három esemény páronként független és a szorzás tétel is igaz, akkor ebből következik AB és C, AC és B, valamint BC és A függetlensége is.

Definíció: Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események egymástól teljesen függetlenek, ha bármely k db eseményre ($2 \leq k \leq n$) fennáll a szorzás tétel, azaz:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) P(A_{i_3}) \dots P(A_{i_k}).$$

Ha végtelen sok eseményünk van: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ akkor ezeket függetleneknek nevezzük, ha közülük bármely n számú esemény ($2 \leq n < +\infty$) egymástól független. (Hasonlóan értelmezhető nem megszámlálhatóan végtelen sok esemény függetlensége is.)

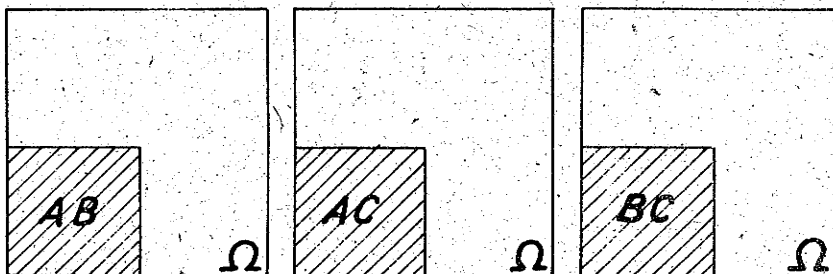
Nézzünk most példát arra, hogy A, B, C eseményekre fennáll a páronkénti függetlenség, de a három esemény már nem független egymástól!



32. ábra

$$P(AB) = P(A) P(B) = \frac{1}{4}, \quad P(AC) = P(A) P(C) = \frac{1}{4},$$

$$P(BC) = P(B) P(C) = \frac{1}{4}. \quad (33. \text{ ábráról leolvasható})$$



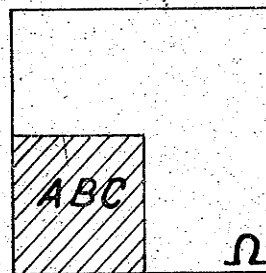
33. ábra

Ha a 3 esemény független lenne, akkor

$$P(A B C) = P(A) P(B) P(C) = \frac{1}{8}$$

lenne, de a rajz szerint látható, hogy

$$P(A B C) = \frac{1}{4}$$



34. ábra

áll fenn.

Tehát az A, B, C események nem függetlenek egymástól.

Ha

$$A \cap B = \emptyset,$$

azaz diszjunkt halmazok, és

$$P(A) > 0,$$

továbbá

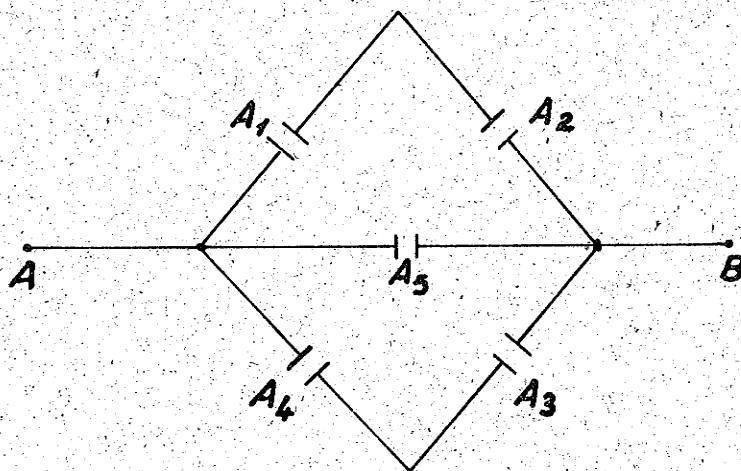
$$P(B) > 0$$

fennáll, akkor A és B események egymástól függenek. Mert hiszen

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) P(B).$$

IV.5.2 Feladatok

1. Az alábbi ábrán látható öt jelfogó mindegyike p valószínűséggel ($0 < p < 1$) van zárva; mi a valószínűsége, hogy A és B pontok között áram folyik, ha a jelfogók működése egymástól független események és áram folyik egy jelfogón keresztül, ha az zárva van.



35. ábra

A_i az i -edik jelfogó és A_i azt az eseményt is jelenti egyuttal, hogy az i -edik jelfogó átengedi az áramot (zár):

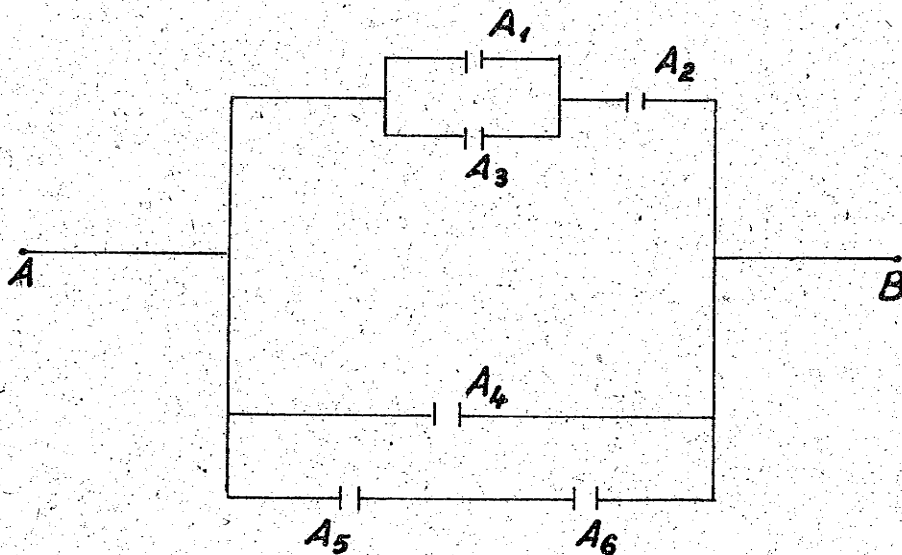
$$P(A_i) = p, \quad (0 < p < 1).$$

Áram folyik A és B között, ha vagy a felső vezetéken, vagy a középsőn, vagy az alsó vezetéken folyik áram, és csak ekkor.

Tehát: az $A_1 A_2 + A_5 + A_4 A_3$ esemény jelenti az áram folyását, keressük a $P(A_1 A_2 + A_5 + A_4 A_3)$ valószínűséget. Kolmogorov megfelelő axiómája szerint:

$$\begin{aligned}
 P(A_1 A_2 + A_5 + A_4 A_3) &= P(A_1 A_2) + P(A_5) + P(A_4 A_3) - P(A_1 A_2 A_5) - \\
 &- P(A_1 A_2 A_3 A_4) - P(A_5 A_3 A_4) + P(A_1 A_2 A_5 A_3 A_4) = \\
 &= p^2 + p + p^2 - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 = p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5 = \\
 &= p + 2p^2(1-p) - p^4(1-p) = p + (1-p)(2p^2 - p^4) = \\
 &= p + (1-p)p^2(2-p^2).
 \end{aligned}$$

2. Ugyanaz a probléma mint az előbbi, az alábbi ábrára vonatkoztatva:



36. ábra

A-ból B-be áram folyik, ha az

$$(A_1 + A_3) A_2 + A_4 + (A_5 A_6)$$

esemény bekövetkezik. Számítsuk ki a

$$P \{ (A_1 + A_3) A_2 + A_4 + (A_5 A_6) \}$$

valószínűséget. Az egyszerű mellékszámítást az olvasóra bizzuk.

3. Tekintsük az A és B játékosokat, akik közül A minden játéknál 1 Ft-ot nyer p valószínűséggel és 1 Ft-ot veszít q = 1 - p valószínűséggel (persze ugyanúgy B nyer q valószínűséggel és veszít p valószínűséggel). Legyen A kezdeti vagyona z forint, B-é a - z forint, az összvagyon tehát a Ft. A játék addig folytatódik, amíg az egyik játékos minden pénzét elveszíti (és persze a másiknál lesz az egész a Ft). Az egyes játékok kimenetelei egymástól független események. Legyen q_z annak a valószínűsége, hogy A elveszíti első ízben teljes z vagyonát, még mielőtt tehát B teljesen veszített volna, p_z legyen annak valószínűsége, hogy A megnyeri az egész a - z Ft összeget, még mielőtt B elnyerte volna tőle a teljes pénzét. Tehát:

p_z annak az eseménynek a valószínűsége, hogy A kiindulva z Ft-nyi kezdő vagyonból, elnyeri B minden pénzét, még mielőtt B elnyerte volna az ő pénzét, azaz még mielőtt A pénz nélkül maradt volna.

q_z a teljes vesztes valószínűsége ugyanilyen feltételek mellett.

Pontosan fogalmazva:

Ha a játszma folyamán A n-izben nyer és v-izben veszít, akkor a játszma befejezése előtt mindig:

$$z + n - v > 0$$

és ugyanígy,

$$a - z + v - n > 0.$$

Az első játszma után A vagyona vagy z - 1, vagy z + 1 Ft. Ennélfogva:

$$q_z = p q_{z+1} + q q_{z-1},$$

feltéve, hogy

$$1 < z < a - 1.$$

Ha $z = 1$, akkor $q_1 = p q_2 + q$.

Ha pedig $z = a - 1$, akkor $q_{a-1} = q q_{a-2}$; mert ha az első játszmát megnyeri, A győz és így $p q_{z+1} = 0 = p q_a$ és $q_a = 0$ értelemszerűen.

Ha tehát bevezetjük még a $q_0 = 1$ és $q_a = 0$ valószínűségeket, akkor

$$q_z = p q_{z+1} + q q_{z-1}$$

egyenlőség fennáll minden $z = 1, 2, \dots, a - 1$ értékre.

Feladatunk tehát az, hogy megoldjuk a

$$q_z = p q_{z+1} + q q_{z-1} \quad (e)$$

differencegyenletet a

$$q_0 = 1 \quad \text{és} \quad q_a = 0$$

peremfeltételek mellett.

Az un. partikuláris megoldások módszerével oldjuk meg differencegyenletünket. Először tegyük fel, hogy $p \neq q$.

Behelyettesítéssel látható, hogy a $q = 1$ és a $q_z = \left(\frac{q}{p}\right)^z$ kifejezések megoldások.

Tényleg, ha minden z -re $q_z = 1$; kapjuk, hogy

$$1 = p \cdot 1 + q \cdot 1 = p + q = 1.$$

Ha pedig minden z -re

$$q_z = \left(\frac{q}{p}\right)^z,$$

akkor

$$\left(\frac{q}{p}\right)^z = p \cdot \frac{q^{z+1}}{p^{z+1}} + q \cdot \frac{q^{z-1}}{p^{z-1}} = \left(\frac{q}{p}\right)^z q + \left(\frac{q}{p}\right)^z p = \left(\frac{q}{p}\right)^z \underbrace{q + p}_{=1}.$$

Azt is könnyen beláthatjuk, hogy előbbi két partikuláris megoldásunk lineáris kombinációja:

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^z = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^z$$

tetszőleges C_1 és C_2 számokkal szintén megoldás. Tényleg

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^z &= p \left[C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{z+1} \right] + q \left[C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{z-1} \right] = \\ &= C_1 \underbrace{(p+q)}_{=1} + C_2 \left[p \left(\frac{q}{p}\right)^{z+1} + q \left(\frac{q}{p}\right)^{z-1} \right]. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy az (e) egyenlet minden megoldása

$$C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^z$$

alakú.

Légyen tehát q_z tetszőleges megoldása az (e) differenciaegyenletnek; C_1 és C_2 konstansok értékét meghatározzuk úgy, hogy

$$q_0 = C_1 + C_2$$

és

$$q_1 = C_1 + C_2 \cdot \frac{q}{p}$$

legyen. Ez lehetséges, lévén az egyenletrendszer determinánsa $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{q}{p} \end{vmatrix} = \frac{q}{p} - 1 \neq 0.$$

Tehát ezekkel a C_1 és C_2 értékekkel a $C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^z$ $z = 0$ -ra és $z = 1$ -re megegyezik a szóban forgó q_z megoldással. (e)-ből szukcesszive nyerjük:

$$q_1 = p q_2 + q q_0,$$

ebből

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \frac{q_1 - q q_0}{p} = \frac{1}{p} \left(C_1 + C_2 \frac{q}{p} \right) - \frac{q}{p} (C_1 + C_2) = \\
 &= C_1 \frac{1-q}{p} + C_2 \left(\frac{q}{p^2} - \frac{q}{p} \right) = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p} \right) \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \\
 &= C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p} \right) \cdot \frac{1-p}{p} = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy az előbb konkrétan megválasztott C_1 és C_2 számokkal a szóban forgó q_z megoldás minden z -re

$$C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p} \right)^z$$

alakú.

Igy tehát

$$C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p} \right)^z$$

az (e) egyenlet általános megoldása. A mi problémánk partikuláris megoldását úgy kapjuk, hogy figyelembe vesszük a $q_0 = 1$ és $q_a = 0$ feltételeket:

$$1 = C_1 + C_2$$

$$0 = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p} \right)^a,$$

ezekből

$$C_1 = \frac{\left(\frac{q}{p} \right)^a}{\left(\frac{q}{p} \right)^a - 1}$$

és

$$C_2 = - \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1},$$

így feladatunk megoldása:

$$q_z = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}.$$

A és B szerepét teljesen felcserélve, tehát q és p szerepét felcserélve, továbbá z helyett $(a-z)$ -t írva, kapjuk, hogy

$$p_z = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^a - \left(\frac{p}{q}\right)^{a-z}}{\left(\frac{p}{q}\right)^a - 1}.$$

Érdekes, hogy

$$p_z + q_z = 1,$$

tehát (elég hosszú játszma után) 1 valószínűséggel valamelyik játékos ruinalódik (elveszti minden pénzét).

Ha $p = q = \frac{1}{2}$, akkor q_z -re L'Hospital szabályával kapjuk, hogy

$$q_z = 1 - \frac{z}{a} \quad \text{és} \quad p_z = \frac{z}{a}.$$

A feladatnak itt közölt tárgyalása W. Fellertől származik.

4. feladat:

Mutassuk meg, hogy ha A , B és C események egymástól páronként függetlenek és A független $B + C$ -től, akkor A , B , C teljesen függetlenek.

Ugyanis

$$\begin{aligned}
 P[A(B+C)] &= P(A)P(B+C) = \\
 &= P(A)[P(B) + P(C) - P(BC)] = P(A)P(B) + P(A)P(C) - \\
 &\quad - P(A)P(B)P(C),
 \end{aligned}$$

az események páronkénti függetlensége miatt.
Másképpen

$$\begin{aligned}
 P[A(B+C)] &= P[\overline{AB} + AC] = P(AB) + P(AC) - P(ABC) = \\
 &= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(ABC).
 \end{aligned}$$

E két eredményt összehasonlítva nyerjük:

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

s ezzel feladatunk állítását igazoltuk.

5. feladat:

Három pénzbedobós szerencsejáték-automata közül az egyikkel $\frac{1}{2}$ valószínűséggel, a másik kettővel egyenként $\frac{1}{3}$ valószínűséggel lehet nyerni.

- a) Találomra kiválasztunk egy automatát és kétszer játszunk vele. Mi a valószínűsége, hogy először veszünk, aztán nyerünk, ha mindhárom automatát egyenként $\frac{1}{3}$ valószínűséggel választhatjuk és akármelyik automatával játszunk is, az ezzel történő nyerések és veszteségek egymástól független események?
- b) Ha először veszünk és azután nyerünk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy a "jobbik" automatával játszottunk?
A játékok eredményei egymástól független események.

Megoldás:

a)

A

B

C automata

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

"A" nyerés eseménye N, a vesztesé V.

$$P(N/A) = \frac{1}{2}, \quad P(N/B) = P(N/C) = \frac{1}{3}$$

$$P(V/A) = \frac{1}{2}, \quad P(V/B) = P(V/C) = \frac{2}{3}$$

Keressük $P(VN)$ -t!

$$P(VN) = P[VN(A+B+C)] = P(VN/A)P(A) +$$

$$+ P(VN/B)P(B) + P(VN/C)P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 3} =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{4}{27} = \frac{9+16}{4 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{25}{108}$$

b)

$$P(A/VN) = \frac{P(A \cap VN)}{P(VN)} = \frac{P(VN/A)P(A)}{P(VN)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{25}{108}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{25}{108} = \frac{1}{12} \cdot \frac{108}{25} = \frac{9}{25}$$

Kiegészítés az automata-feladathoz

Három szerencsejáték-automata közül az egyikkel $\frac{1}{2}$ valószínűséggel, a másik kettővel $\frac{1}{3}$ valószínűséggel lehet nyerni. Az automatákon az egyes játékok eredményei független események, azaz, bármely automatát kiválasztva és ezzel játszva, a játékok eredményei egymástól függetlenek. Ha továbbá az egyes játékokat más és más automatával játszik le (azaz játék közben cseréljük az automatákat), az egyes játékok kimenetelei akkor is függetlenek. Vizsgáljuk meg a szóba jövő eseményeket, ha

- a) egyetlen játékot játszunk le taláломra valamelyik automatával;
- b) két játékot játszunk le egymás után taláломra valamelyik automatával, de mindkét játékot ugyanazzal az automatával;
- c) két játékot folytatunk le egymás után taláломra valamelyik automatával, de a két játékot nem szükségképpen ugyanazzal az automatával, hanem megengedjük, hogy az első játék után másik automatát válasszunk ki taláломra és ezzel a másik automatával folytassuk le a második játékot. Az egyes automatákat egyenlő valószínűséggel választjuk. Jelöljük az automatákat A, B, C-vel és jelöljük ugyanígy az egyes automaták kiválasztásának eseményét is, azaz:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}.$$

Jelöljük a nyeresé eseményét N-nel, a vesztesé eseményét V-vel. Akkor a feladat szerint:

$$P(N/A) = \frac{1}{2}, \quad P(N/B) = \frac{1}{3}, \quad P(N/C) = \frac{1}{3},$$

$$P(V/A) = \frac{1}{2}, \quad P(V/B) = \frac{2}{3}, \quad P(V/C) = \frac{2}{3}.$$

Jelöljük az egyes automatákkal való nyeresé, illetve vesztesé eseményét rendre az

$$N_A; V_A; N_B; V_B; N_C; V_C$$

szimbólumokkal. Most N_A az AN eseményt jelenti, azaz, hogy az A automatát választjuk és azzal nyerünk, hasonlóan $N_B = BN$, vagyis B automatával játszunk és veszünk stb.

Az egyes valószínűségek:

$$P(N_A) = P(NA) = P(N/A) P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$P(V_A) = P(VA) = P(V/A) P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$P(N_B) = P(NB) = P(N/B) P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9};$$

$$P(V_B) = P(VB) = P(V/B) P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9};$$

$$P(N_C) = P(NC) = P(N/C) P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9};$$

$$P(V_C) = P(VC) = P(V/C) P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

a) Az eseménytér szerkezete (elemi események: $N_A, V_A, N_B, V_B, N_C, V_C$). Az egyes elemi események alá írtuk a valószínűségeket.

A	N_A $\frac{1}{6}$	V_A $\frac{1}{6}$
B	N_B $\frac{1}{9}$	V_B $\frac{2}{9}$
C	N_C $\frac{1}{9}$	V_C $\frac{2}{9}$

Ω

A nyérés eseménye:

$$N = N_A + N_B + N_C; \quad P(N) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{18}.$$

A vesztés eseménye:

$$V = V_A + V_B + V_C; \quad P(V) = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{11}{18}.$$

És például:

$$P(B/N) = \frac{P(BN)}{P(N)} = \frac{P(N_B)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{18}} = \frac{2}{7}.$$

b) Most az elemi események az egymás után bekövetkező alábbi eseménypárok:

$$N_A N_A, \quad N_A V_A, \quad V_A N_A, \quad V_A V_A; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$N_B N_B, \quad N_B V_B, \quad V_B N_B, \quad V_B V_B; \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$N_C N_C, \quad N_C V_C, \quad V_C N_C, \quad V_C V_C; \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

Ezek valószínűségeit könnyen kiszámíthatjuk példánk feltételei alapján, pl.

$$P(N_B V_B) = P[(NV) B] = P[(N V) B] P(B) = P(N/B) P(V/B) P(B) = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}.$$

A $P(NV|B) = P(N|B) P(V|B)$ egyenlőség az egyes játékkimenetek függetlensége miatt van.

Az eseménytér szerkezete az előbbi elemi esemény-táblázattal meg is van adva, a hozzájuk tartozó valószínűségeket az előbbi példa nyomán könnyen meghatározhatjuk; ezeket a valószínűség-értékeket az egyes elemi események alá irtuk.

Nézzük most például a $P(VN)$ valószínűséget! VN most azt az eseményt jelenti, hogy kétszer egymás után ugyanazon az automatán játszva, először veszünk, azután nyerünk. Képezzük ehhez az összes VN -jellegű elemi események unióját, azaz:

$$P(VN) = P(V_A N_A + V_B N_B + V_C N_C) = \frac{1}{12} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{25}{108}.$$

Számítsuk ki a $P(A/VN)$ valószínűséget! Ennek jelentése: mi a valószínűsége annak, hogy az A automatával játszottunk, feltéve, hogy először veszítettünk, azután nyertünk?

Ehhez a $P[A(VN)] = P(V_A N_A)$ valószínűséget el kell osztanunk $P(VN)$ -nel, azaz

$$P(A/VN) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{25}{108}} = \frac{9}{25}.$$

Számítsuk ki annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az első játékot elveszítjük. Miután a második játék eredményére vonatkozóan semmit sem mondunk és mindig két játékot folytatunk le egymás után, ezért a kérdéses esemény mindazon elemi események halmaza, amely elemi események a V jellel kezdődnek. Jelöljük szóban forgó eseményünket a $(V\circ)$ szimbólummal (a második esemény helyére kis $\circ$ jelet írunk, kifejezve, hogy második esemény tetszőleges). Tehát:

$$(V\circ) = V_A V_A + V_A N_A + V_B V_B + V_B N_B + V_C V_C + V_C N_C,$$

és

$$P(V\circ) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{11}{18}.$$

Teljesen hasonlóan értelmezhetők a $(\circ V)$, $(N\circ)$, $(\circ N)$ események is. Például $(\circ V)$ jelenti azt az eseményt, hogy a második játékot elveszítjük. Az előbbihez teljesen hasonlóan kapjuk:

$$P(N\circ) = \frac{7}{18}, \quad P(\circ V) = \frac{11}{18}, \quad P(\circ N) = \frac{7}{18}.$$

Figyeljük meg, hogy $P(VN) \neq P(V \circ) P(\circ N)$; tényleg

$$\frac{25}{108} \neq \frac{11}{18} \cdot \frac{7}{18}.$$

c) Ebben az esetben az elemi események az egyes $N_A, V_A, N_B, V_B, N_C, V_C$ eseményekből alkotó $(N_A N_A), (N_A V_A), (N_A N_B), \dots, (V_C V_C)$ eseménypárok. Számuk $6^2 = 36$. Például $V_B N_C = (BV)(CN)$ jelenti a következő eseményt, először a B automatával játszunk és veszünk, majd a C automatával játszunk és nyerünk. Az egyes elemi események valószínűségeit a példa megfogalmazásában szereplő függetlenség alapján határozzuk meg.

Igy például

$$P(V_B N_C) = P[(BV)(CN)] = P(BV) P(CN) =$$

$$= P(V/B) P(B) P(N/C) P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{81}.$$

Az elemi események teljes rendszerét az alábbi táblázat tünteti fel:

$(N_A N_A) \quad (N_A N_B) \quad (N_A N_C) \quad (N_A V_A) \quad (N_A V_B) \quad (N_A V_C)$

$(N_B N_A) \quad (N_B N_B) \quad (N_B N_C) \quad (N_B V_A) \quad (N_B V_B) \quad (N_B V_C)$

$(N_C N_A) \quad (N_C N_B) \quad (N_C N_C) \quad (N_C V_A) \quad (N_C V_B) \quad (N_C V_C)$

$(V_A N_A) \quad (V_A N_B) \quad (V_A N_C) \quad (V_A V_A) \quad (V_A V_B) \quad (V_A V_C)$

$(V_B N_A) \quad (V_B N_B) \quad (V_B N_C) \quad (V_B V_A) \quad (V_B V_B) \quad (V_B V_C)$

$(V_C N_A) \quad (V_C N_B) \quad (V_C N_C) \quad (V_C V_A) \quad (V_C V_B) \quad (V_C V_C)$

Valószínűségi mértéküket az előbbi példa nyomán könnyen kiszámíthatjuk.

Számítsuk ki például a $P(VN)$ valószínűséget. VN jelenti azt az eseményt, hogy először nyerünk, azután veszünk; mindkét játékot találmra kiválasztott automatával (általában ugyanazzal) játszunk. A VN esemény az összes $(V_i N_j)$ jellegű elemi esemény halmaza, ahol az i és j indexek egymástól függetlenül rendre felveszik az A, B, C jeleket. Ezek az elemi események az előbbi táblázat 4., 5. és 6. sorának, valamint 1., 2. és 3. oszlopának az elemei. Tehát

$$\begin{aligned} P(VN) &= \sum_{\substack{i=A, B, C \\ j=A, B, C}} P(V_i N_j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} + \\ &+ \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} = \\ &= \frac{7}{18} \cdot \frac{11}{18} . \end{aligned}$$

Hasonlóan a b) esethez, most is kiszámíthatjuk a $P(V\circ)$ valószínűséget. A $(V\circ)$ esemény a V jellel kezdődő elemi események halmaza (az elemi esemény-táblázat 4., 5. és 6. sorában levő elemi események halmaza). Ezek szerint $P(V\circ) = \frac{11}{18}$.

Teljesen hasonlóan:

$$P(\circ N) = \frac{7}{18} .$$

Vegyük észre, hogy most

$$P(VN) = P(V\circ) \cdot P(\circ N) .$$

Nem nehéz kiszámítani pl. a $P(AB/VN)$ valószínűséget sem, vagyis annak az eseménynek a valószínűségét, hogy feltéve, hogy az első játék eredménye vesztes, a másodiké nyerés, először az A és másodszor a B automatával játszottunk.

$$P(AB/VN) = \frac{P[(AV)(BN)]}{P(VN)} = \frac{P(V_A N_B)}{P(VN)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18} \cdot \frac{11}{18}} = \frac{6}{77} .$$

TARTALOMJEGYZÉK

I. KOMBINATORIKA	
I. 1.	Ismétlés nélküli permutációk 3
I. 2.	A Stirling-formula 6
I. 3.	Ismétléses permutációk 20
I. 4.	Kombinációk 23
I. 5.	Ismétléses kombinációk 26
I. 6.	Ismétlés nélküli variációk 32
I. 7.	Ismétléses variációk 33
I. 8.	Példák a kombinatorikához 36
I. 9.	Bolyongások a számegyenesen 37
II. HALMAZOK	
II. 1.	Bevezetés 51
II. 2.	Műveletek halmazokkal 52
II. 3.	Véges halmazok 57
II. 4.	A számosság fogalma 58
II. 5.	Eseményalgebra és halmazalgebra 67
III. ESEMÉNYEK RELATIV GYAKORISÁGA	
III. 1.	Definíciók és fogalmak 76
III. 2.	A relatív gyakoriságra vonatkozó néhány összefüggés 78
III. 3.	Feltételes relatív gyakoriság 79
IV. A VALÓSZÍNÜSÉGSZÁMITÁS KOLMOGOROV-FÉLE FELÉPÍTÉSE	
IV. 1.	Események $\mathcal{G}$ -algebrája és a valószínűségi mérték 81
IV. 2.	Geometriai valószínűség 86
IV. 3.	Feltételes valószínűség 90
IV. 4.	A Bayes-tétel 100
IV. 5.	Események függetlensége 121

A kiadásért felelős:
a Budapesti Műszaki Egyetem Vegyészmérnöki Karának dékánja
Megjelent a Tankönyvkiadó Vállalat műszaki gondozásában
Felelős vezető: Héjjas Zoltán
Műszaki szerkesztő: Szabóné Szetey Ildikó
Megrendelve: 1992. november. Megjelent: 1992. november. Példányszám: 122
Készült: kisofszet eljárással, az MSZ 5601-59
és az MSZ 5602-55 szabvány szerint,
12,3 (A/5) ív terjedelemben, 39 ábrával
Készült a Dabas-Jegyzet Kft-ben
Felelős vezető: Marosi György ügyvezető igazgató
Munkaszám: 92-1132