



Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Parciális differenciálegyenletek megoldása hálónélküli módszerekkel. Az alapmegoldások módszere

Gáspár Csaba

Széchenyi István Egyetem, ELTE

BME, 2017.02.23



Néhány numerikus módszercsalád

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Elliptikus parciális differenciálegyenletek néhány numerikus megoldási technikája

- Véges differencia módszerek
- Véges elem, véges térfogat módszerek
- Perem-integrálegyenlet módszer
- Hálónélküli (rácsnélküli) módszerek



Véges differencia módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

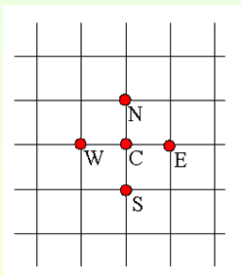
Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$



$$(\Delta u)_C \approx \frac{u_N + u_W + u_S + u_E - 4u_C}{h^2} = f_C$$



Véges differencia módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

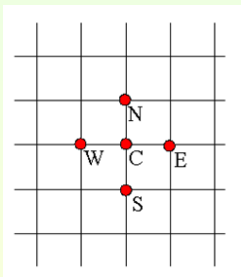
Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$



$$(\Delta u)_C \approx \frac{u_N + u_W + u_S + u_E - 4u_C}{h^2} = f_C$$



Véges differencia módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

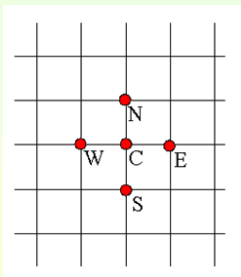
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$



$$(\Delta u)_C \approx \frac{u_N + u_W + u_S + u_E - 4u_C}{h^2} = f_C$$



Véges differencia módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Numerikus jellemzők:

- Egyszerűség
- A tartomány pereméhez nem jól illeszkedik a rács
- Sok ismeretlen
- Nagyméretű, ritka mátrix



Véges elem módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$

Gyenge alak:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, d\Omega = - \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$$
$$= \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Véges elem módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$
Gyenge alak:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, d\Omega = - \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$$
$$= \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$



Véges elem módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$
Gyenge alak:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, d\Omega = - \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$$
$$= \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$



Véges elem módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$
Gyenge alak:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\Delta u) v \, d\Omega &= - \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega\end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Véges elem módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kiteiktés

The End

Példa: $\Delta u = f$
Gyenge alak:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\Delta u) v \, d\Omega &= - \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega\end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$



Véges elem módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

Numerikus jellemzők:

- Nem kell másodrendű deriváltakat közelíteni
- A tartomány pereméhez nagyon jól illeszkedik az elemrendszer
- Sok ismeretlen
- Nagyméretű, ritka mátrix
- **A jó hálógenerálás NAGYON NAGY PROBLÉMA!**



Véges elem módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

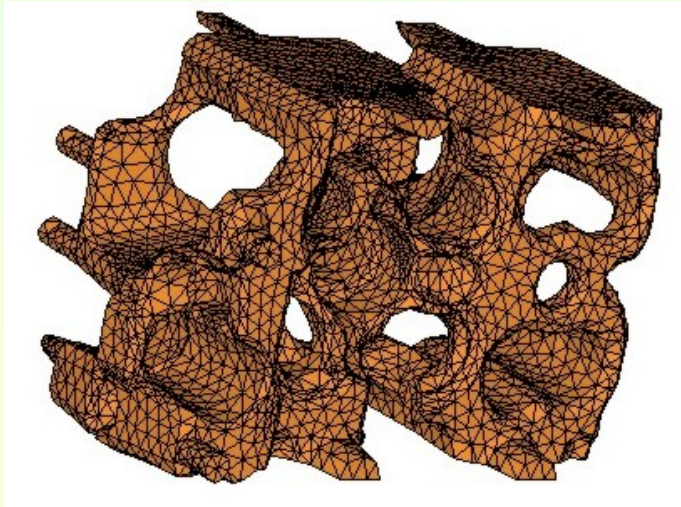
MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End





Véges elem módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

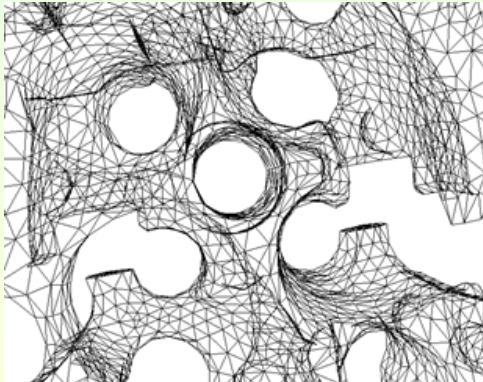
MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End





Perem-integrálegyenlet módszer

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$

A 3. Green-formula szerint minden *belső* $z \in \Omega$ pontban:

$$u(z) = - \oint_{\Gamma} K(z, y) u(y) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} \Phi(z - y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\Gamma_y + \\ + \int_{\Omega} \Phi(z - y) f(y) d\Omega_y$$

ahol $K(z, y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(z-y) \cdot n_y}{\|z-y\|^2}$, $\Phi(z) := \frac{1}{2\pi} \cdot \log \|z\|$.

A perem-integrálegyenlet módszer alapötlete

Legyen x egy *perempont*; $z \rightarrow x$ mellett kiszámítjuk mindkét oldal limeszét, így egy integrálegyenletet kapunk, melyben az ismeretlen függvények csak a peremen értelmezettek.



Perem-integrálegyenlet módszer

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$

A 3. Green-formula szerint minden *belső* $z \in \Omega$ pontban:

$$u(z) = - \oint_{\Gamma} K(z, y) u(y) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} \Phi(z - y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\Gamma_y + \\ + \int_{\Omega} \Phi(z - y) f(y) d\Omega_y$$

ahol $K(z, y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(z-y) \cdot n_y}{||z-y||^2}$, $\Phi(z) := \frac{1}{2\pi} \cdot \log ||z||$.

A perem-intergrálegyenlet módszer alapötlete

Legyen x egy *perempont*; $z \rightarrow x$ mellett kiszámítjuk mindkét oldal limeszét, így egy integrálegyenletet kapunk, melyben az ismeretlen függvények csak a peremen értelmezettek.

Perem-integrálegyenlet módszer

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Példa: $\Delta u = f$

A 3. Green-formula szerint minden *belső* $z \in \Omega$ pontban:

$$u(z) = - \oint_{\Gamma} K(z, y) u(y) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} \Phi(z - y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\Gamma_y + \\ + \int_{\Omega} \Phi(z - y) f(y) d\Omega_y$$

ahol $K(z, y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(z-y) \cdot n_y}{\|z-y\|^2}$, $\Phi(z) := \frac{1}{2\pi} \cdot \log \|z\|$.

A perem-intergrálegyenlet módszer alapötlete

Legyen x egy *perempont*; $z \rightarrow x$ mellett kiszámítjuk mindkét oldal limeszét, így egy integrálegyenletet kapunk, melyben az ismeretlen függvények csak a peremen értelmezettek.

Perem-integrálegyenlet módszer

Példa: $\Delta u = f$

A 3. Green-formula szerint minden *belső* $z \in \Omega$ pontban:

$$u(z) = - \oint_{\Gamma} K(z, y) u(y) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} \Phi(z - y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\Gamma_y + \\ + \int_{\Omega} \Phi(z - y) f(y) d\Omega_y$$

ahol $K(z, y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(z-y) \cdot n_y}{\|z-y\|^2}$, $\Phi(z) := \frac{1}{2\pi} \cdot \log \|z\|$.

A perem-intergrálegyenlet módszer alapötlete

Legyen x egy *perempont*; $z \rightarrow x$ mellett kiszámítjuk mindkét oldal limeszét, így egy integrálegyenletet kapunk, melyben az ismeretlen függvények csak a peremen értelmezettek.



Perem-integrálegyenlet módszer

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Numerikus jellemzők:

- **Csak a peremet kell diszkretizálni, a tartományt nem**
- A tartomány pereméhez ideálisan illeszkedik a diszkretizáció
- Kevésszámú ismeretlen
- Nemszimmetrikus, teljesen kitöltött, rosszul kondicionált mátrix
- Mérsékelt műveletigény



Rácsnélküli (hálónélküli) módszerek

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

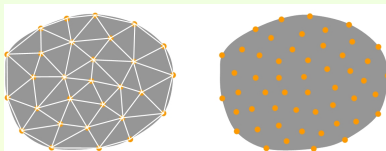
Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

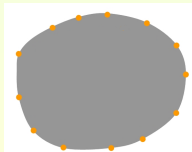
The End

Cél: Elkerülni az elemstruktúra (rácsstruktúra) használatát mind a tartományban, mind a peremen.

Háló-alapú vs. hálónélküli módszerek:



Perem típusú módszerek



Az alapelemek módszere hálónélküli ÉS perem-típusú.



Rácsnélküli (hálónélküli) módszerek

Cél: Elkerülni az elemstruktúra (rácsstruktúra) használatát mind a tartományban, mind a peremen.

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

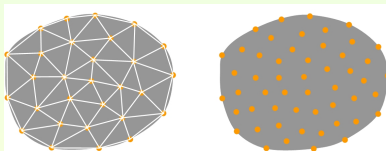
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

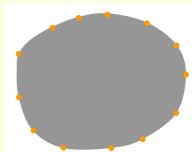
Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Háló-alapú vs. hálónélküli módszerek:



Perem típusú módszerek



Az alapmegoldások módszere hálónélküli ÉS perem-típusú.

Az alapmegoldások módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

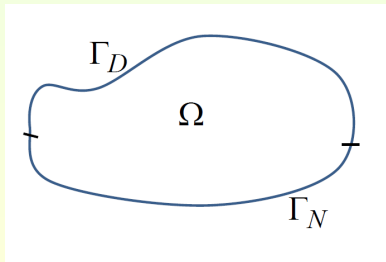
Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \quad u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - \tilde{x}_j),$$



Kevert peremfeltételek



Az alapmegoldások módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

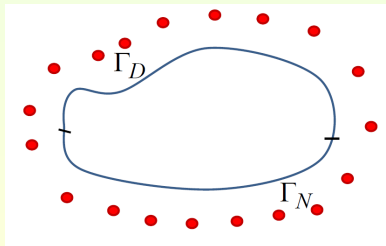
Kitekintés

The End

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \quad u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - \tilde{x}_j),$$

$$\Phi(x) = \log ||x||$$



Külső forrásponatok



Az alapmegoldások módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

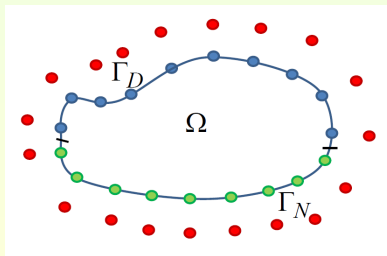
Kitekintés

The End

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \quad u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - \tilde{x}_j),$$

$$\Phi(x) = \log ||x||$$



perem-kollokációs pontok: Dirichlet, Neumann



Az alapmegoldások módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \quad u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - \tilde{x}_j),$$

$$\Phi(x) = \log ||x||$$

A peremfeltételek kikényszerítése:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - \tilde{x}_j) = u_0(x_k) \quad (x_k \in \Gamma_D)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n_k}(x_k - \tilde{x}_j) = v_0(x_k) \quad (x_k \in \Gamma_N)$$

Az alapmegoldások módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Numerikus jellemzők:

- valódi hálónélküli módszer
- egyszerű, könnyen programozható
- kiváló pontosság
- a forráspontok helyzeteinek meghatározása nehezen automatizálható
- nemszimmetrikus és teljesen kitöltött mátrix
- **rendkívül rosszul kondicionált rendszer** (ha a forráspontok túl messze vannak a peremtől)
- **numerikus szingularitások megjelenése** (ha a forráspontok túl közel vannak a peremhez)
- az alapmegoldást explicite ismerni kell



Az alapmegoldások módszere

Numerikus jellemzők:

- valódi hálónélküli módszer
- egyszerű, könnyen programozható
- kiváló pontosság
- a forráspontok helyzeteinek meghatározása nehezen automatizálható
- nemszimmetrikus és teljesen kitöltött mátrix
- **rendkívül rosszul kondicionált rendszer** (ha a forráspontok túl messze vannak a peremtől)
- **numerikus szingularitások megjelenése** (ha a forráspontok túl közel vannak a peremhez)
- az alapmegoldást explicite ismerni kell



Az alapmegoldások módszere

Numerikus jellemzők:

- valódi hálónélküli módszer
- egyszerű, könnyen programozható
- kiváló pontosság
- a forráspontok helyzeteinek meghatározása nehezen automatizálható
- nemszimmetrikus és teljesen kitöltött mátrix
- **rendkívül rosszul kondicionált rendszer** (ha a forráspontok túl messze vannak a peremtől)
- **numerikus szingularitások megjelenése** (ha a forráspontok túl közel vannak a peremhez)
- **az alapmegoldást explicite ismerni kell**

Az alapmegoldások módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása
Kitekintés

The End

Numerikus jellemzők:

- valódi hálónélküli módszer
- egyszerű, könnyen programozható
- kiváló pontosság
- a forráspontok helyzeteinek meghatározása nehezen automatizálható
- nemszimmetrikus és teljesen kitöltött mátrix
- **rendkívül rosszul kondicionált rendszer** (ha a forráspontok túl messze vannak a peremtől)
- **numerikus szingularitások megjelenése** (ha a forráspontok túl közel vannak a peremhez)
- az alapmegoldást explicite ismerni kell

Az alapmegoldások módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása
Kitekintés

The End

Numerikus jellemzők:

- valódi hálónélküli módszer
- egyszerű, könnyen programozható
- kiváló pontosság
- a forráspontok helyzeteinek meghatározása nehezen automatizálható
- nemszimmetrikus és teljesen kitöltött mátrix
- **rendkívül rosszul kondicionált rendszer** (ha a forráspontok túl messze vannak a peremtől)
- **numerikus szingularitások megjelenése** (ha a forráspontok túl közel vannak a peremhez)
- **az alapmegoldást explicite ismerni kell**

MFS, példa: pontosság

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

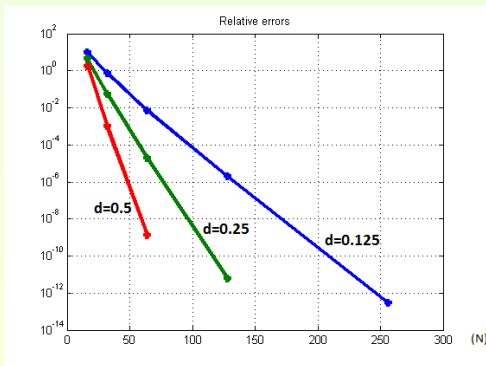
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Tesztmegoldás: $u(x, y) = \cos \pi x \cdot \sinh \pi y$ az egységkörben
Relatív L_2 -hibák (tiszta Dirichlet-peremfeltétel mellett)
N: a perem-kollokációs pontok száma
d: a peremtől mért távolság



MFS, példa: kondícionáltság

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

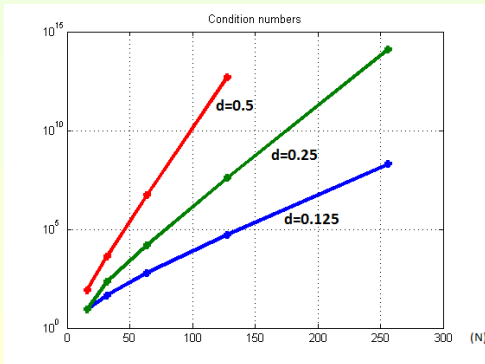
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Tesztmegoldás: $u(x, y) = \cos \pi x \cdot \sinh \pi y$ az egységkörben
Kondíciós számok (tisztá Dirichlet-peremfeltétel mellett)
N: a perem-kollokációs pontok száma
d: a peremtől mért távolság



MFS, példa: numerikus szingularitások

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

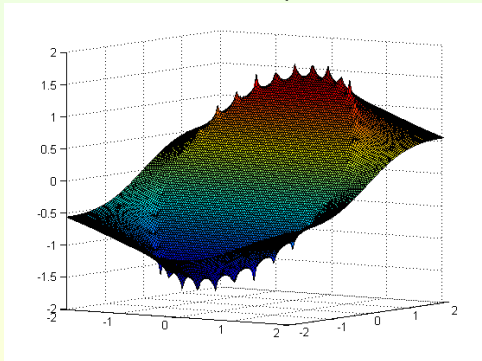
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Tesztmegoldás: $u(x, y) = y$ az egységgörben
A forráspontok túl közel vannak a peremhez





Regularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM
Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

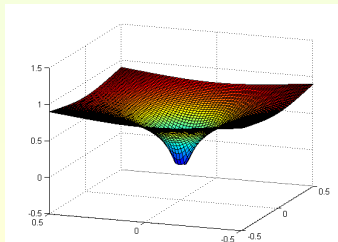
The End

Tegyük fel, hogy a forrás- és a perem-kollokációs pontok egybeesnek. (Ez szingularitásokat eredményez.)

Cél: az alapmegoldás okozta szingularitás elkerülése

Regularizálás csonkítással ($c > 0$ adott skálázó faktor):

$$\Phi(r) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log(cr) & \text{ha } cr > 1 \\ 0 & \text{ha } cr \leq 1 \end{cases}$$





Regularizálás, példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM
Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

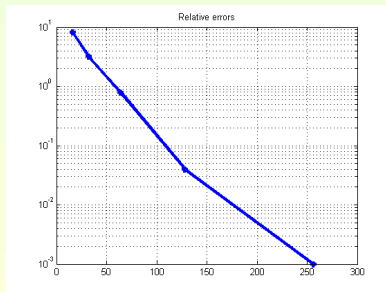
Kitekintés

The End

Tesztmegoldás: $u(x, y) = \cos \pi x \cdot \sinh \pi y$ az egységkörben

Relatív L_2 -hibák

(csonkítás, optimális skálázó faktor, tiszta
Dirichlet-peremfeltétel)





Regularizálás, példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM
Összefoglalás

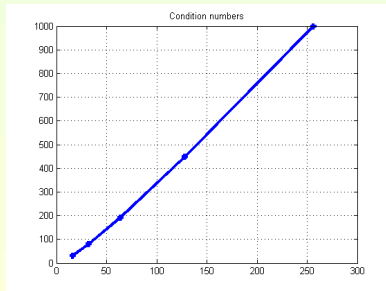
A partikuláris
megoldások
módszere

Szört alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása
Kitekintés

The End

Tesztmegoldás: $u(x, y) = \cos \pi x \cdot \sinh \pi y$ az egységkörben
Kondíciószámok
(csonkítás, optimális skálázó faktor, tiszta
Dirichlet-peremfeltétel)

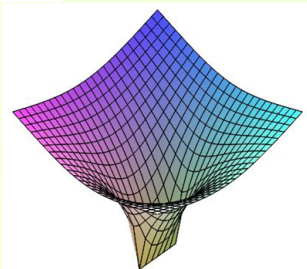
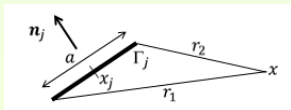


Regularizálás, további lehetőségek

Cél: az alapmegoldás okozta szingularitás elkerülése

Egyenesszakaszokra koncentrált alapmegoldások használata:

$$\Phi_j(x) := \log \frac{r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - a^2}}{a},$$





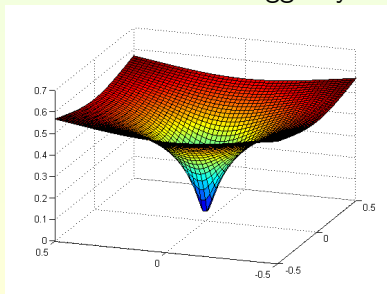
Regularizálás, további lehetőségek

Cél: az alapmegoldás okozta szingularitás elkerülése

Negyedrendű parciális differenciáloperátor használata:
 $\Delta(I - \frac{1}{c^2}\Delta)$:

$$\Phi(r) := \frac{1}{2\pi}(K_0(cr) + \log(cr))$$

K_0 : harmadfajú módosított Bessel-függvény



Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szört alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End



Regularizálás, 3D problémák

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

$$\text{Alapmegoldás: } \Phi(x) = \frac{1}{4\pi \cdot c \cdot \|x\|}$$

Csonkított alapmegoldás:

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi \cdot c \cdot \|x\|}, & \text{ha } c \cdot \|x\| \geq 1 \\ \frac{1}{4\pi}, & \text{ha } c \cdot \|x\| < 1 \end{cases}$$

Negyedrendű differenciáloperátor alapmegoldása $\Delta(I - \frac{1}{c^2}\Delta)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(-\frac{e^{-c\|x\|}}{\|x\|} + \frac{1}{\|x\|} \right)$$



Regularizálás, 3D problémák

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Alapmegoldás: $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi \cdot c \cdot \|x\|}$

Csonkított alapmegoldás:

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi \cdot c \cdot \|x\|}, & \text{ha } c \cdot \|x\| \geq 1 \\ \frac{1}{4\pi}, & \text{ha } c \cdot \|x\| < 1 \end{cases}$$

Negyedrendű differenciáloperátor alapmegoldása $\Delta(I - \frac{1}{c^2}\Delta)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(-\frac{e^{-c\|x\|}}{\|x\|} + \frac{1}{\|x\|} \right)$$



Regularizálás, 3D problémák

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

Alapmegoldás: $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi \cdot c \cdot \|x\|}$

Csonkított alapmegoldás:

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi \cdot c \cdot \|x\|}, & \text{ha } c \cdot \|x\| \geq 1 \\ \frac{1}{4\pi}, & \text{ha } c \cdot \|x\| < 1 \end{cases}$$

Negyedrendű differenciáloperátor alapmegoldása $\Delta(I - \frac{1}{c^2}\Delta)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(-\frac{e^{-c\|x\|}}{\|x\|} + \frac{1}{\|x\|} \right)$$

Regularizálás, 3D problémák

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kiteiktés

The End

Körlemezre koncentrált alapmegoldás:

$$\Phi(x, y, z) := \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{\sqrt{z^2 + \left(r - \frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{z^2 + \left(r + \frac{a}{2}\right)^2}}$$

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Φ azonosan 1 az xy -síkon levő

$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}, z = 0 \right\}$ körlemezen, kívül pedig harmonikus.



Deszingularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

A regularizálás jól működik tiszta Dirichlet-problémáknál...

... de nem működik Neumann- és kevert peremfeltétel
esetében. (Ekkor erősebb szingularitás lép fel.)

Deszingularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A regularizálás jól működik tiszta Dirichlet-problémáknál...

**... de nem működik Neumann- és kevert peremfeltétel
esetében. (Ekkor erősebb szingularitás lép fel.)**



Deszingularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kiteiktés

The End

Hogyan lehet elkerülni az alapmegoldás normális irányú deriváltja okozta szingularitásokat?

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x - x_j)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j A_{kj} = u_0(x_k),$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j B_{kj} = v_0(x_k)$$

$$A_{kj} := \Phi(x_k - x_j),$$

$$B_{kj} := \frac{\partial \Phi}{\partial n_k}(x_k - x_j)$$



Deszingularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

Hogyan lehet elkerülni az alapmegoldás normális irányú deriváltja okozta szingularitásokat?

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x - x_j)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j A_{kj} = u_0(x_k),$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j B_{kj} = v_0(x_k)$$

$$A_{kj} := \Phi(x_k - x_j),$$

$$B_{kj} := \frac{\partial \Phi}{\partial n_k}(x_k - x_j)$$



Deszingularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A B mátrixnak csak a **diagonálelemeit** kell megfelelően meghatározni.

Segéd-probléma ismert megoldással (tisztá Dirichlet-peremfeltétellel):

$$\Delta w = 0, \quad w|_{\Gamma} = w_0$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi(x - x_j)$$

$$B_{kk} = \frac{1}{\beta_k} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial n_k}(x_k) - \sum_{j \neq k} \beta_j B_{kj} \right)$$



Deszingularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A B mátrixnak csak a **diagonálelemeit** kell megfelelően meghatározni.

Segéd-probléma ismert megoldással (tisztá Dirichlet-peremfeltétellel):

$$\Delta w = 0, \quad w|_{\Gamma} = w_0$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi(x - x_j)$$

$$B_{kk} = \frac{1}{\beta_k} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial n_k}(x_k) - \sum_{j \neq k} \beta_j B_{kj} \right)$$



Deszingularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A B mátrixnak csak a **diagonálelemeit** kell megfelelően meghatározni.

Segéd-probléma ismert megoldással (tisztá Dirichlet-peremfeltétellel):

$$\Delta w = 0, \quad w|_{\Gamma} = w_0$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi(x - x_j)$$

$$B_{kk} = \frac{1}{\beta_k} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial n_k}(x_k) - \sum_{j \neq k} \beta_j B_{kj} \right)$$



Deszingularizálás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A B mátrixnak csak a **diagonálelemeit** kell megfelelően meghatározni.

Segéd-probléma ismert megoldással (tisztá Dirichlet-peremfeltétellel):

$$\Delta w = 0, \quad w|_{\Gamma} = w_0$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi(x - x_j)$$

$$B_{kk} = \frac{1}{\beta_k} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial n_k}(x_k) - \sum_{j \neq k} \beta_j B_{kj} \right)$$



Deszingularizálás, egy 2D példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Tesztmegoldás: $u(x, y) = \cos \pi x \cdot \sinh \pi y$ az egységkörben
Kevrt peremfeltételek

$c \setminus N$	16	32	64	128	256
8	17.09	19.94	32.00	17.55	17.42
16	3.230	9.406	9.632	10.05	8.892
32	22.23	0.330	4.805	4.832	4.599
64	41.76	9.973	0.040	2.415	2.418
128	61.28	19.67	4.873	0.005	1.209
256	80.79	29.37	9.726	2.425	6.2E-4

MFS csonkítással, relatív L_2 -hibák (%)



Desingularizálás, egy 3D példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

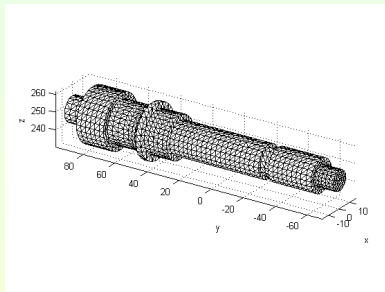
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása

Kitekintés

The End



Laplace-egyenlet kevert peremfeltételekkel

Tesztmegoldás: $u(x, y, z) := x^2 + z^2 - 2y^2$

3318 nem egybevágó háromszög; súlypontok:
perem-kollokációs pontok

$$c_j := k \cdot \frac{1}{\rho_j}$$



Desingularizálás, egy 3D példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

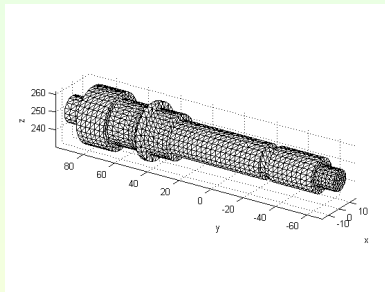
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása

Kitekintés

The End



Laplace-egyenlet kevert peremfeltételekkel

Tesztmegoldás: $u(x, y, z) := x^2 + z^2 - 2y^2$

3318 nem egybevágó háromszög; súlypontok:
perem-kollokációs pontok

$$c_j := k \cdot \frac{1}{\rho_j}$$



Desingularizálás, egy 3D példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

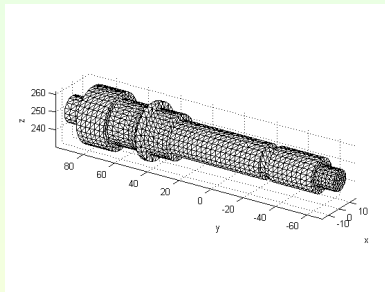
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása

Kitekintés

The End



Laplace-egyenlet kevert peremfeltételekkel

Tesztmegoldás: $u(x, y, z) := x^2 + z^2 - 2y^2$

3318 nem egybevágó háromszög; súlypontok:
perem-kollokációs pontok

$$c_j := k \cdot \frac{1}{\rho_j}$$



Desingularizálás, egy 3D példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

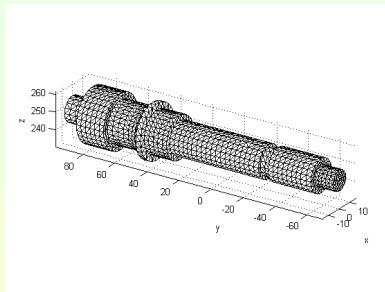
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása

Kitekintés

The End



Laplace-egyenlet kevert peremfeltételekkel

Tesztmegoldás: $u(x, y, z) := x^2 + z^2 - 2y^2$

3318 nem egybevágó háromszög; súlypontok:
perem-kollokációs pontok

$$c_j := k \cdot \frac{1}{\rho_j}$$



Desingularizálás, egy 3D példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

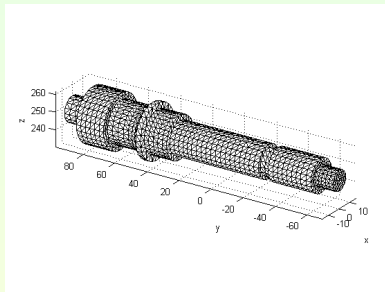
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End



Laplace-egyenlet kevert peremfeltételekkel

Tesztmegoldás: $u(x, y, z) := x^2 + z^2 - 2y^2$

3318 nem egybevágó háromszög; súlypontok:
perem-kollokációs pontok

$$c_j := k \cdot \frac{1}{\rho_j}$$



Desingularizálás, egy 3D példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

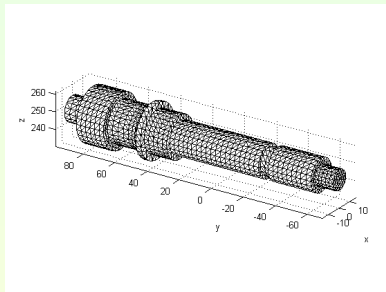
MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End



Relatív L_2 -hibák (%) a peremen és a kondíciószámok

k	1.25	1.50	1.75	2.00
Relatív L_2 -hibák (%)	0.3559	0.2460	0.2284	0.4846
Kondíciószámok	5.8E+5	289.8	363.7	722.0



MFS dipólusokkal

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Monopólusok helyett dipólusokat használva:

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n_j}(x - x_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial n_j}(x - x_j)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j C_{kj} = u_0(x_k),$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j Q_{kj} = v_0(x_k)$$

$$C_{kj} := \frac{\partial \Phi}{\partial n_j}(x_k - x_j),$$

$$Q_{kj} := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n_k \partial n_j}(x_k - x_j)$$



MFS dipólusokkal

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Monopólusok helyett dipólusokat használva:

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n_j}(x - x_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial n_j}(x - x_j)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j C_{kj} = u_0(x_k),$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j Q_{kj} = v_0(x_k)$$

$$C_{kj} := \frac{\partial \Phi}{\partial n_j}(x_k - x_j),$$

$$Q_{kj} := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n_k \partial n_j}(x_k - x_j)$$



MFS dipólusokkal

Monopólusok helyett dipólusokat használva:

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n_j}(x - x_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial n_j}(x - x_j)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j C_{kj} = u_0(x_k),$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j Q_{kj} = v_0(x_k)$$

$$C_{kj} := \frac{\partial \Phi}{\partial n_j}(x_k - x_j),$$

$$Q_{kj} := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n_k \partial n_j}(x_k - x_j)$$



MFS dipólusokkal

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szört alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A diagonálemeket meghatározva:

$$C_{kk} := B_{kk}$$

Q -ra egy hasonló desingularizációt alkalmazunk, mint B -re.

Numerikus jellemzők:

- jól vagy mérsékelten rosszul kondicionált egyenletrendszerek
- elfogadható pontosság
- monopólusok használata: különösen Neumann-problémák esetén előnyös
- dipólusok használata: különösen Dirichlet-problémák esetén előnyös



MFS dipólusokkal

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szört alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A diagonálemeket meghatározva:

$$C_{kk} := B_{kk}$$

Q -ra egy hasonló desingularizációt alkalmazunk, mint B -re.

Numerikus jellemzők:

- jól vagy mérsékelten rosszul kondicionált egyenletrendszer
- elfogadható pontosság
- monopólusok használata: különösen Neumann-problémák esetén előnyös
- dipólusok használata: különösen Dirichlet-problémák esetén előnyös



Desingularizálás egyszerűbben

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

Cél: az MFS kombinálása klasszikus véges differenciás sémákkal.

Neumann-peremfeltétel diszkretizálása

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

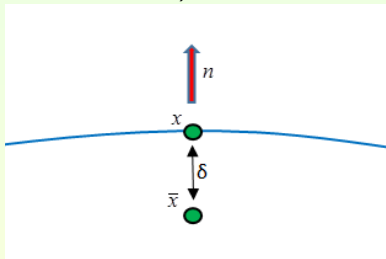
Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

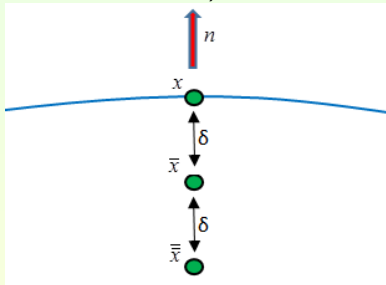
1. séma (egyrétegű, elsőrendű):



$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{u(x) - u(\bar{x})}{\delta} + \mathcal{O}(\delta)$$

Neumann-peremfeltétel diszkretizálása

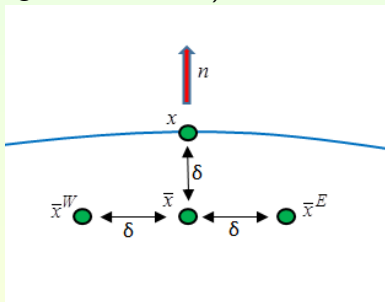
2. séma (kétrétegű, másodrendű):



$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{3u(x) - 4u(\bar{x}) + u(\bar{\bar{x}})}{2\delta} + \mathcal{O}(\delta^2)$$

Neumann-peremfeltétel diszkretizálása

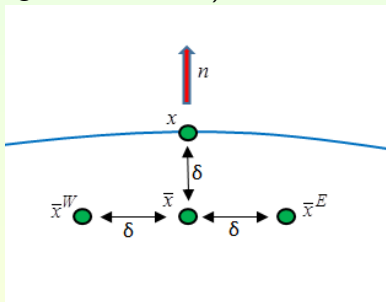
3. séma (egyrétegű, másodrendű):



$$u(\bar{x}) = u(x) - \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(x) \cdot \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3)$$

Neumann-peremfeltétel diszkretizálása

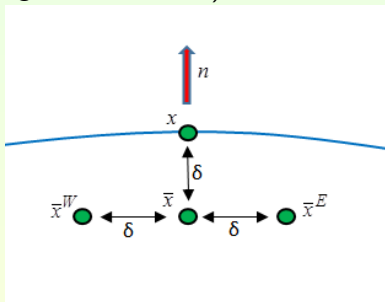
3. séma (egyrétegű, másodrendű):



$$u(\bar{x}) = u(x) - \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot \delta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial e^2}(x) \cdot \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3)$$

Neumann-peremfeltétel diszkretizálása

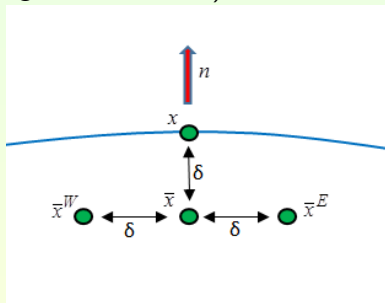
3. séma (egyrétegű, másodrendű):



$$u(\bar{x}) = u(x) - \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot \delta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial e^2}(\bar{x}) \cdot \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3)$$

Neumann-peremfeltétel diszkretizálása

3. séma (egyrétegű, másodrendű):



$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{2u(x) - u(\bar{x}^W) - u(\bar{x}^E)}{2\delta} + \mathcal{O}(\delta^2)$$

FDM-MFS sémák Neumann-peremnél

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

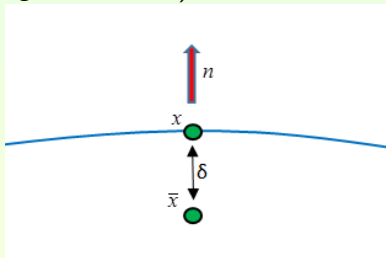
Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

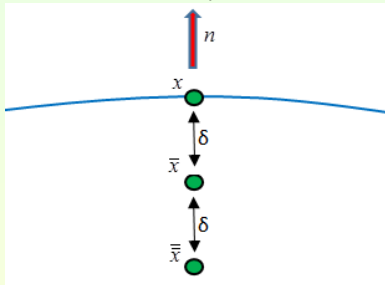
1. séma (egyrétegű, elsőrendű):



$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\Phi(x_k - x_j) - \Phi(\bar{x}_k - x_j)}{\delta} = v_0(x_k)$$

FDM-MFS sémák Neumann-peremnél

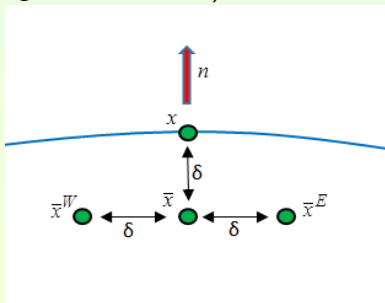
2. séma (kétrétegű, másodrendű):



$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{3\Phi(x_k - x_j) - 4\Phi(\bar{x}_k - x_j) + \Phi(\bar{\bar{x}}_k - x_j)}{2\delta} = v_0(x_k)$$

FDM-MFS sémák Neumann-peremnél

3. séma (egyrétegű, másodrendű):



$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{2\Phi(x_k - x_j) - \Phi(\bar{x}_k^W - x_j) - \Phi(\bar{x}_k^E - x_j)}{2\delta} = v_0(x_k)$$



Egy numerikus példa

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás

előállítás

Kitekintés

The End

Tesztmegoldás: $u(x, y) = \cos \pi x \cdot \sinh \pi y$ az egységkörben
(Neumann-peremfeltétel mellett).

N	16	32	64	128	256
1. séma:					
Relatív L_2 -hiba	62.84	26.16	12.09	5.839	2.889
Kondíciós szám	27.44	68.05	162.6	378.4	863.0
2. séma:					
Relatív L_2 -hiba	22.36	5.603	1.528	0.4537	0.1860
Kondíciós szám	19.51	48.71	116.7	271.9	620.5
3. séma:					
Relatív L_2 -hiba	33.54	6.676	1.659	0.4481	0.1465
Kondíciós szám	23.68	57.67	137.2	318.8	726.7

Relatív L_2 -hibák (%) és a megfelelő kondíciós számok az 1., 2., 3. séma esetében.



Összefoglalás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása
Kitekintés

The End

- Az MFS eredeti formája súlyosan rosszul kondicionált egyenletrendszerre vezet
- Regularizált alapmegoldás használata
- A regularizálás nem működik Neumann-peremfeltételre
- Megoldás: desingularizálás, vagy...
- ...az MFS kombinálása klasszikus FDM-sémákkal
- **Elfogadható pontosság**
- **Mérsékelten rosszul kondicionált egyenletrendszerek**



Összefoglalás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása
Kitekintés

The End

- Az MFS eredeti formája súlyosan rosszul kondicionált egyenletrendszerre vezet
- Regularizált alapmegoldás használata
- A regularizálás nem működik Neumann-peremfeltételre
- Megoldás: desingularizálás, vagy...
- ...az MFS kombinálása klasszikus FDM-sémákkal
- Elfogadható pontosság
- Mérsékelten rosszul kondicionált egyenletrendszerek



Összefoglalás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása
Kitekintés

The End

- Az MFS eredeti formája súlyosan rosszul kondicionált egyenletrendszerre vezet
- Regularizált alapmegoldás használata
- A regularizálás nem működik Neumann-peremfeltételre
- Megoldás: desingularizálás, vagy...
- ...az MFS kombinálása klasszikus FDM-sémákkal
- **Elfogadható pontosság**
- **Mérsékelten rosszul kondicionált egyenletrendszerek**



A módszer kiterjesztése inhomogén problémákra

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szört alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

A megoldandó probléma most legyen egy Poisson-egyenlet

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}, \quad u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

Keressük a megoldást $u = u_P + u_H$ alakban, ahol $\Delta u_P = f$ Ω -ban (partikuláris megoldás; nincs peremfeltétel előírva)

Akkor a homogén megoldás egy $\Delta u_H = 0$ Laplace-egyenletet kell, hogy kielégítsen, módosított peremfeltételekkel:

$$u_H|_{\Gamma_D} = u_0 - u_P|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0 - \frac{\partial u_P}{\partial n}|_{\Gamma_N}$$



A módszer kiterjesztése inhomogén problémákra

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

A megoldandó probléma most legyen egy Poisson-egyenlet

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}, \quad u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

Keressük a megoldást $u = u_P + u_H$ alakban, ahol $\Delta u_P = f$ Ω -ban (partikuláris megoldás; nincs peremfeltétel előírva)

Akkor a homogén megoldás egy $\Delta u_H = 0$ Laplace-egyenletet kell, hogy kielégítsen, módosított peremfeltételekkel:

$$u_H|_{\Gamma_D} = u_0 - u_P|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0 - \frac{\partial u_P}{\partial n}|_{\Gamma_N}$$



A módszer kiterjesztése inhomogén problémákra

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szóró alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

A megoldandó probléma most legyen egy Poisson-egyenlet

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}, \quad u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

Keressük a megoldást $u = u_P + u_H$ alakban, ahol $\Delta u_P = f$ Ω -ban (partikuláris megoldás; nincs peremfeltétel előírva)

Akkor a homogén megoldás egy $\Delta u_H = 0$ Laplace-egyenletet kell, hogy kielégítsen, módosított peremfeltételekkel:

$$u_H|_{\Gamma_D} = u_0 - u_P|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0 - \frac{\partial u_P}{\partial n}|_{\Gamma_N}$$



A módszer kiterjesztése inhomogén problémákra

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

A homogén megoldásban az alapmegoldások módszere
használható....

... de hogyan konstruáljunk hálómentesen partikuláris
megoldást?



A módszer kiterjesztése inhomogén problémákra

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal

MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A homogén megoldásban az alapmegoldások módszere
használható....

**... de hogyan konstruáljunk hálómentesen partikuláris
megoldást?**

Szórt alappontú interpoláció

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kiteiktés

The End

Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbf{R}^2$ adott pontok, $f_1, f_2, \dots, f_N \in \mathbf{R}$ adott számok. Keressünk olyan (minél simább) függvényt, melyre $f(x_k) = f_k$ teljesül minden $k = 1, 2, \dots, N$ -re.

Shepard módszere

$$f(x) := \frac{\sum_{j=1}^N f_j \cdot w_j(x)}{\sum_{j=1}^N w_j(x)}, \quad \text{ahol } w_j(x) := \frac{1}{\|x - x_j\|^2}$$



Szórt alappontú interpoláció

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbf{R}^2$ adott pontok, $f_1, f_2, \dots, f_N \in \mathbf{R}$ adott számok. Keressünk olyan (minél simább) függvényt, melyre $f(x_k) = f_k$ teljesül minden $k = 1, 2, \dots, N$ -re.

Shepard módszere

$$f(x) := \frac{\sum_{j=1}^N f_j \cdot w_j(x)}{\sum_{j=1}^N w_j(x)}, \quad \text{ahol } w_j(x) := \frac{1}{\|x - x_j\|^2}$$



Shepard módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

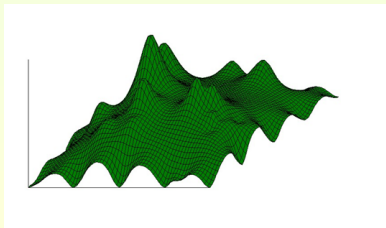
Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

Numerikus jellemzők:

- egyszerű; numerikusan stabil, mérsékelt műveletigényű
- vízszintes érintősíkok az alappontokban
- mérsékelt pontosság

Példa: $N := 100$, x_j -k véletlenszerűen elszórva az egységnégyzetben. Rekonstruálandó az f függvény az alapponti értékeiből, ahol $f(x^{(1)}, x^{(2)}) := \sin \pi x^{(1)} \cdot \sin \pi x^{(2)}$.



A radiális bázisfüggvények módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A radiális bázisfüggvények módszere

Legyen Φ adott radiális (gömbszimmetrikus) függvény, és

$$f(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j)$$

ahol az a priori ismeretlen α_j együtthatók az *interpolációs egyenletrendszer* megoldásából határozhatók meg:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - x_j) = f_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

A radiális bázisfüggvények módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kitekintés

The End

A radiális bázisfüggvények módszere

Legyen Φ adott radiális (gömbszimmetrikus) függvény, és

$$f(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j)$$

ahol az a priori ismeretlen α_j együtthatók az *interpolációs egyenletrendszer* megoldásából határozhatók meg:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - x_j) = f_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$



A radiális bázisfüggvények módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kiteiktés

The End

Φ szokásos megválasztásai:

MQ, Method of Multiquadrics: $\Phi(x) := \sqrt{c^2 + \|x\|^2}$

Egy régebbi, egyszerűbb RBF: $\Phi(x) := 1 + \|x\|$

TPS, Thin Plate Splines: $\Phi(x) := \|x\|^2 \cdot \log \|x\|$

Gauss-függvények: $\Phi(x) := e^{-c^2 \|x\|^2}$

Véges tartójú RBF-ek: (Wendland-függvények...)



A radiális bázisfüggvények módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kiteiktés

The End

Φ szokásos megválasztásai:

MQ, Method of Multiquadrics: $\Phi(x) := \sqrt{c^2 + \|x\|^2}$

Egy régebbi, egyszerűbb RBF: $\Phi(x) := 1 + \|x\|$

TPS, Thin Plate Splines: $\Phi(x) := \|x\|^2 \cdot \log \|x\|$

Gauss-függvények: $\Phi(x) := e^{-c^2 \|x\|^2}$

Véges tartójú RBF-ek: (Wendland-függvények...)



A radiális bázisfüggvények módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kiteiktetés

The End

Φ szokásos megválasztásai:

MQ, Method of Multiquadrics: $\Phi(x) := \sqrt{c^2 + \|x\|^2}$

Egy régebbi, egyszerűbb RBF: $\Phi(x) := 1 + \|x\|$

TPS, Thin Plate Splines: $\Phi(x) := \|x\|^2 \cdot \log \|x\|$

Gauss-függvények: $\Phi(x) := e^{-c^2 \|x\|^2}$

Véges tartójú RBF-ek: (Wendland-függvények...)



A radiális bázisfüggvények módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás
Kiteiktés

The End

Φ szokásos megválasztásai:

MQ, Method of Multiquadrics: $\Phi(x) := \sqrt{c^2 + ||x||^2}$

Egy régebbi, egyszerűbb RBF: $\Phi(x) := 1 + ||x||$

TPS, Thin Plate Splines: $\Phi(x) := ||x||^2 \cdot \log ||x||$

Gauss-függvények: $\Phi(x) := e^{-c^2 ||x||^2}$

Véges tartójú RBF-ek: (Wendland-függvények...)



A radiális bázisfüggvények módszere

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM
Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása
Kitekintés

The End

Φ szokásos megválasztásai:

MQ, Method of Multiquadrics: $\Phi(x) := \sqrt{c^2 + ||x||^2}$

Egy régebbi, egyszerűbb RBF: $\Phi(x) := 1 + ||x||$

TPS, Thin Plate Splines: $\Phi(x) := ||x||^2 \cdot \log ||x||$

Gauss-függvények: $\Phi(x) := e^{-c^2 ||x||^2}$

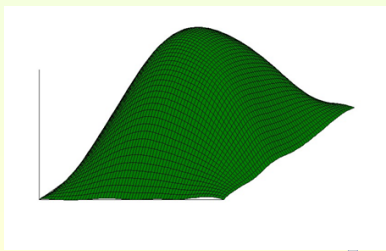
Véges tartójú RBF-ek: (Wendland-függvények...)

A radiális bázisfüggvények módszere

Numerikus jellemzők:

- egyenletmegoldást igényel
- teljesen kitöltött, rosszul kondicionált mátrix
- nagyon jó pontosság

Példa: $N := 100$, x_j -k véletlenszerűen elszórva az egységnégyzetben. MQ-rekonstrukció az f függvény az alapponti értékeiből, ahol $f(x^{(1)}, x^{(2)}) := \sin \pi x^{(1)} \cdot \sin \pi x^{(2)}$.





Partikuláris megoldás előállítása

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása

Kitekintés

The End

A $\Delta u = f$ Poisson-egyenlet jobb oldali f függvényére alkalmazzunk egy RBF-interpolációt (ehhez (szórt) $x_1, \dots, x_N$ alappontok kellenek az Ω tartományban):

$$f(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j)$$

Képezzük ugyanezekkel az α_j együtthatókkal az

$$U(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi(x - x_j)$$

függvényt, ahol Ψ olyan RBF, melyre $\Delta \Psi = \Phi$. Az így nyert U függvény egy (közelítő) partikuláris megoldás.



Partikuláris megoldás előállítása

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM
Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása
Kitekintés

The End

A $\Delta u = f$ Poisson-egyenlet jobb oldali f függvényére alkalmazzunk egy RBF-interpolációt (ehhez (szórt) $x_1, \dots, x_N$ alappontok kellene az Ω tartományban):

$$f(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j)$$

Képezzük ugyanezekkel az α_j együtthatókkal az

$$U(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi(x - x_j)$$

függvényt, ahol Ψ olyan RBF, melyre $\Delta \Psi = \Phi$. Az így nyert U függvény egy (közelítő) partikuláris megoldás.



Partikuláris megoldás előállítása

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

**Partikuláris
megoldás
előállítása**

Kitekintés

The End

Példák:

Ha $\Phi(x) = 1 + ||x||$, akkor

$$\Psi(x) = \frac{1}{9}||x||^3 + \frac{1}{4}||x||^2.$$

Ha $\Phi(x) = ||x||^2 \log ||x||$, akkor

$$\Psi(x) = \frac{1}{16}||x||^4 \log ||x|| - \frac{1}{32}||x||^4.$$



Partikuláris megoldás előállítása

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítása

Kitekintés

The End

Példák:

Ha $\Phi(x) = 1 + \|x\|$, akkor

$$\Psi(x) = \frac{1}{9}\|x\|^3 + \frac{1}{4}\|x\|^2.$$

Ha $\Phi(x) = \|x\|^2 \log \|x\|$, akkor

$$\Psi(x) = \frac{1}{16}\|x\|^4 \log \|x\| - \frac{1}{32}\|x\|^4.$$



Partikuláris megoldás előállítás

Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Deszingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás

A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

**Partikuláris
megoldás
előállítás**

Kitekintés

The End

Példák:

Ha $\Phi(x) = \sqrt{1 + \|x\|}$, akkor

$$\Psi(x) = \frac{4}{25}(1 + \|x\|)^{5/2} - \frac{8}{45}(1 + \|x\|)^{3/2} - \frac{8}{15}(1 + \|x\|)^{1/2} + \frac{8}{15} \log(1 + \sqrt{1 + \|x\|})$$



Változtatások nélkül ill. kis változtatásokkal a módszer alkalmazható:

- interface feladatokra
 - (módosított) Helmholtz-egyenletre
 - konvekciós-diffúziós feladatokra
 - nemlineáris feladatokra
 - időfüggő feladatokra (időlépésenként alkalmazva)
 - ...



Változtatások nélkül ill. kis változtatásokkal a módszer alkalmazható:

- interface feladatokra
- (módosított) Helmholtz-egyenletre
- konvekciós-diffúziós feladatokra
- nemlineáris feladatokra
- időfüggő feladatokra (időlépésenként alkalmazva)
- ...



Változtatások nélkül ill. kis változtatásokkal a módszer alkalmazható:

- interface feladatokra
- (módosított) Helmholtz-egyenletre
- konvekciós-diffúziós feladatokra
- nemlineáris feladatokra
- időfüggő feladatokra (időlépésenként alkalmazva)
- ...



Változtatások nélkül ill. kis változtatásokkal a módszer alkalmazható:

- interface feladatokra
- (módosított) Helmholtz-egyenletre
- konvekciós-diffúziós feladatokra
- nemlineáris feladatokra
- időfüggő feladatokra (időlépésenként alkalmazva)
- ...



Változtatások nélkül ill. kis változtatásokkal a módszer alkalmazható:

- interface feladatokra
- (módosított) Helmholtz-egyenletre
- konvekciós-diffúziós feladatokra
- nemlineáris feladatokra
- időfüggő feladatokra (időlépésenként alkalmazva)
- ...



Hálónélküli
módszerek,
MFS

Gáspár Csaba

Motiváció

Az alap-
megoldások
módszere

Regularizálás
Desingularizálás

MFS
dipólusokkal
MFS-FDM

Összefoglalás
A partikuláris
megoldások
módszere

Szórt alappontú
interpoláció

Partikuláris
megoldás
előállítás

Kitekintés

The End

Vége

Köszönöm a figyelmet!