Analízis alapjai

Andai Attila*

2015. május 14.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

1. Halmazelméleti alapok ... **1**
1.1. Logikai alapok ... 1
1.2. A halmazelmélet axiómái ... 2
1.3. Elemi halmazműveletek ... 4
1.4. Relációk ... 5
1.5. Függvények ... 6
1.6. Halmazrendszerek ... 8
1.7. Rendezések ... 9
1.8. Ekvivalenciarelációk ... 11
1.9. Természetes számok és rekurziók ... 11
1.10. Természetes számoktól a komplex számokig ... 15
1.11. Számosságok ... 22

2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai ... **29**
2.1. Algebrai tulajdonságok ... 29
2.2. Függvények összege, szorzata ... 33

3. Topológiai tulajdonságok ... **37**
3.1. Nyílt, zárt és korlátos halmazok ... 37
3.2. Kompakt halmazok ... 41

4. Sorozatok ... **43**
4.1. A határérték és tulajdonágai ... 43
4.2. Topologiai fogalmak jellemzése sorozatokkal ... 48
4.3. Limesz inferior és szuperior ... 49
4.4. Cauchy-sorozatok ... 50
4.5. Nevezetes határértékek ... 51

5. Sorok ... **59**
5.1. Sorok határértéke és tulajdonságai ... 59
5.2. Majoráns és minoráns kritérium ... 60
5.3. Abszolút konvergens sorok ... 61
5.4. Konvergenciakritériumok ... 62
5.5. Leibniz-sorok ... 66
5.6. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok ... 67
5.7. Sorok Cauchy-szorzata ... 70
5.8. Sorok pontonkénti szorzata ... 71
5.9. Elemi függvények ... 73
5.10. Az exponenciális függvény és a hatványozás ... 74

6. Valós függvények elemi vizsgálata ... **79**
6.1. Függvények tulajdonságai ... 79
6.2. Függvény határértéke ... 80
6.3. Féloldali határérték ... 85
6.4. Függvény folytonossága ... 86
6.5. Függvény folytonosságának elemi következményei ... 90
6.6. Függvény egyenletes folytonossága ... 92
6.7. Hatványsorok határértéke ... 93
6.8. Elemi függvények folytonossága ... 96
6.9. Trigonometrikus függvények tulajdonságai ... 98
6.10. Hiperbolikus függvények tulajdonságai ... 102

7. Differenciálszámítás egy dimenzióban ... **105**
7.1. Differenciálhatóság ... 105
7.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai ... 106

7.3. Hatványsorok deriválása ... 108
7.4. Középértéktételek ... 109
7.5. Függvény inverzének deriválása ... 110
7.6. Elemi függvények inverzének deriválása ... 112
7.7. L'Hospital szabály ... 114
7.8. Többszörös deriváltak ... 116
7.9. Taylor-sorfejtés ... 118
7.10. Lokális szélsőérték jellemzése ... 121
7.11. Binomiális sorfejtés ... 124

8. Határozatlan integrál ... 127
8.1. Primitív függvény és tulajdonságai ... 127
8.2. Integrálási módszerek ... 128
8.3. Parciális törtekre bontás ... 131

9. Határozott integrál ... 135
9.1. A *majdnem mindenütt* tulajdonság ... 135
9.2. A Riemann-integrál ... 138
9.3. A Riemann-integrálhatóság kritériumai ... 141
9.4. Riemann-integrálás alaptulajdonságai ... 142
9.5. Newton–Leibniz-tétel ... 146
9.6. Az integrálfüggvény ... 147
9.7. Lebesgue-tétel ... 148
9.8. A Riemann-integrál néhány alkalmazása ... 150
9.9. Improprius integrál ... 153

10. Véges dimenziós terek topológiája ... 155
10.1. Skaláris szorzás és norma ... 155
10.2. Topológiai alapfogalmak ... 157
10.3. Sorozatok ... 160
10.4. Cauchy-sorozatok ... 163
10.5. Kompakt halmazok ... 164
10.6. Heine–Borel-tétel ... 165
10.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal ... 166
10.8. Függvények határértéke ... 167
10.9. Függvények folytonossága ... 170
10.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények ... 173
10.11. Egyenletesen folytonos függvények ... 174
10.12. Normák ekvivalenciája ... 175
10.13. Normák ekvivalenciájának következményei ... 177
10.14. Sorok ... 180
10.15. Lineáris leképezések ... 181
10.16. Multilineáris leképezések ... 185
10.17. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel ... 189
10.18. Konvex halmazok szétválasztása ... 190
10.19. Az algebra alaptétele ... 193

11. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban ... 197
11.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia ... 197
11.2. A korlátos folytonos függvények tere ... 200
11.3. Függvénysorozat és függvénysor deriválása és integrálása ... 202
11.4. Hatványsorok ... 206
11.5. Abel-tétel ... 207
11.6. Approximáció polinomokkal ... 209

12. Differenciálszámítás véges dimenzióban ... 213
12.1. Differenciálhatóság ... 213

12.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai ... 216
12.3. Iránymenti derivált ... 218
12.4. Néhány speciális függvény deriváltja ... 219
12.5. Vektor-vektor függvény deriváltja ... 220
12.6. Gradiens, divergencia és rotáció ... 222
12.7. Folytonosan differenciálható függvények ... 224
12.8. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága ... 226
12.9. Inverzfüggvény tétel ... 229
12.10. Implicitfüggvény tétel ... 233
12.11. Többszörös deriváltak ... 234
12.12. Taylor-sorfejtés ... 237
12.13. Lokális szélsőérték jellemzése ... 240
12.14. Feltételes szélsőérték ... 242

13. Metrikus terek ... 245
13.1. Metrikus terek topológiája ... 245
13.2. Metrikus alterek ... 248
13.3. Ekvivalens metrikák ... 250
13.4. Sorozatok metrikus terekben ... 251
13.5. Cauchy-sorozatok ... 253
13.6. Kompakt halmazok metrikus terekben ... 254
13.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal ... 255
13.8. Szeparábilis metrikus terek ... 257
13.9. Teljesen korlátos halmazok ... 258
13.10. Függvények metrikus terek között ... 261
13.11. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények ... 266
13.12. Egyenletesen folytonos függvények ... 267
13.13. Kontrakciók és Lipschitz-folytonos függvények ... 270
13.14. Halmazok szétválasztása ... 271
13.15. Metrikus tér teljessé tétele ... 273
13.16. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok ... 275
13.17. Összefüggő és ívszerűen összefüggő metrikus alterek ... 277
13.18. Metrikus terek szorzata ... 278
13.19. Baire-féle kategóriatétel ... 280

14. Normált terek ... 283
14.1. Normált terek topológiája ... 283
14.2. Sorok és sorozatok normált terekben ... 284
14.3. Normák ekvivalenciája ... 286
14.4. Folytonos lineáris leképezések ... 287
14.5. Folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai ... 289
14.6. Véges dimenziós normált terek ... 293
14.7. Elpé terek ... 296
14.8. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok normált terekben ... 296
14.9. Normált terek szorzata ... 300
14.10. Normált terek teljes burka ... 300
14.11. Folytonos multilineáris leképezések ... 303
14.12. Konvex zárt elnyelő halmazok Banach-terekben ... 312
14.13. Hahn–Banach-tétel ... 313
14.14. Banach egyenletes korlátosság tétele ... 317
14.15. Banach–Steinhaus-tétel ... 319
14.16. Banach nyílt leképezések tétele és közvetlen következményei ... 319
14.17. Zárt gráf tétel ... 322

15. Hilbert-terek ... 325
15.1. Skaláris szorzással ellátott terek ... 325

15.2. Vektor ortogonális projekciója zárt altérre ... 328
15.3. Zárt altér ortogonális kiegészítő altere ... 330
15.4. Ortogonális projekciók ... 331
15.5. Riesz-féle reprezentációs tétel ... 331

16. Függvénysorozatok, függvénysorok ... 333
16.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia ... 333
16.2. Korlátos folytonos függvények tere ... 336
16.3. Hatványsorok ... 341
16.4. Abel-tétel ... 342
16.5. Lineáris leképezés függvénye ... 344
16.6. Approximáció Bernstein-polinommal ... 347
16.7. Stone-féle sűrűségi tétel ... 349
16.8. Stone–Weierstrass-féle sűrűségi tétel ... 350

17. Differenciálszámítás ... 355
17.1. Differenciálhatóság ... 355
17.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai ... 357
17.3. Iránymenti derivált ... 360
17.4. Néhány speciális függvény deriváltja ... 362
17.5. Vektor-vektor függvény deriváltja ... 365
17.6. Folytonosan differenciálható függvények ... 369
17.7. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága ... 373
17.8. Inverzfüggvény tétel ... 377
17.9. Implicitfüggvény tétel ... 380
17.10. Többszörös deriváltak ... 381
17.11. Taylor-sorfejtés ... 385
17.12. Lokális szélsőérték jellemzése ... 389
17.13. Konvexitás differenciális jellemzése ... 392

18. Fourier-sorok ... 395
18.1. Trigonometrikus polinomok ... 395
18.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer ... 397
18.3. Függvény Fourier-sora ... 400
18.4. Riemann–Lebesgue-lemma ... 402
18.5. Dirichlet-féle magfüggvény ... 403
18.6. Dirichlet-féle lokalizációs tétel ... 405
18.7. Fejér-féle magfüggvény ... 409
18.8. Fejér tétele a Fourier-sor konvergenciájáról ... 412

19. Komplex függvénytan ... 415
19.1. Komplex differenciálhatóság ... 415
19.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai ... 417
19.3. Hatványsor differenciálhatósága ... 417
19.4. Görbe menti integrál ... 417
19.5. A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma ... 420
19.6. Az indexfüggvény ... 421
19.7. Cauchy integráltételei ... 422
19.8. Cauchy transzformáció ... 423
19.9. Holomorf függvény analitikusságának elemi következményei ... 424
19.10. Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele ... 424
19.11. Holomorf függvények gyökei ... 424
19.12. Laurent-sorfejtés ... 425
19.13. Reziduum-tétel, argumentum-elv és Rouché tétele ... 426
19.14. Nyílt leképezés tétele, lokális maximum elve és a Schwarz-lemma ... 427
19.15. Casorati–Weierstrass-tétel és a Hurwitz-tétel ... 427
19.16. Pár valós integrál kiszámítása reziduum tétellel ... 428

19.17. A Cauchy-integrálformula és a reziduum-tétel néhány következménye 428

20. Függelék 429
20.1. Az elemi függvények grafikonjai 429
20.2. Tizedestörtek 431
20.3. Kategóriák 434
20.4. Vektorterek 435
20.5. Valós számok szögfüggvényei 439
20.6. Szummázások 443
20.7. Jensen-tétel következményei 446
20.8. Wallis- és Stirling-formula 448
20.9. A gamma függvény 452
20.10. Az analitikus számelmélet pár tétele 454

Tárgymutató 470

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért. Köszönöm *Joó Attilának*, hogy felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában. Továbbá köszönöm *Lovas Attilának* a függelék gondos átnézését.

Külön köszönettel tartozom *Szép Enikőnek* a jegyzet írása során nyújtott támogatásáért és bíztatásáért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\triangleq$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

Ez a dokumentum elektronikus és nyomtatott formában szabadon használható, de csak saját célokra, nem-kereskedelmi jellegű alkalmazásokhoz, tevékenységekhez. A dokumentum internetre való feltöltése és mások által elérhetővé tétele csak a szerző engedélyével lehetséges. Minden más terjesztési és felhasználási forma esetében is a szerző engedélyét kell kérni.
Copyright, 2023 ©Andai Attila

1. Halmazelméleti alapok

1.1. Logikai alapok

Magyarázat. A mai modern matematika nagy része, többek között az analízis is, felépíthető a halmazelméletből. Nem célunk a halmazelmélet axiómáiból teljesen részletesen felépíteni az analízist, de az axiómáktól a definíciókig, tételekig vezető utat szeretnénk világossá tenni.

Magyarázat. A halmazelméletet megelőző elméleteket, mint például a logikát vagy a formális nyelvek elméletét egyáltalán nem említjük, mindössze a jelölések egységesítése végett teszünk néhány megjegyzést velük kapcsolatban.

Jelölés. A halmazelméletben definiálatlan alapfogalomként szerepel a *halmaz* és a *halmaz elemének lenni* kifejezés. Tehát bármely A és B halmaz esetén értelmes az a kijelentés, hogy *A eleme a B halmaznak*. Az „A eleme a B halmaznak” kijelentést az $A \in B$ szimbólummal jelöljük.

Magyarázat. A halmazelmélet axiómáinak az áttekintéséhez szükséges az alapvető logikai jelek ismerete.

Jelölés. A változójelekre tetszőleges betűt, illetve jelet fogunk használni a továbbiakban. Adott p és q állítás esetén az alábbi alapvető logikai kapcsolókat értelmezzük:

$\neg p$: *p tagadása, negációja*;
$p \vee q$: *p vagy q*;
$\exists$: *létezik* szimbólum.

1.1. Definíció. A halmazelmélet keretein belül *formulának* nevezzük a karaktersorozatok azon legszűkebb $F_\in$ családjának elemeit, melyre teljesül, hogy

- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i \in x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i = x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden $p, q \in F_\in$ és x_i változójel esetén

$$\neg(p), (p) \vee (q), \exists x_i(p) \in F_\in$$

  teljesül.

1.2. Definíció. A logikai jelek felhasználásával a következő logikai műveleteket definiáljuk. Legyen p, q formula és x_i változójel.

- $(p) \wedge (q)$: *p és q*, ha $\neg((\neg(p)) \vee (\neg(q)))$;
- $(p) \to (q)$: *p-ből q következik*, ha $(\neg(p)) \vee (q)$;
- $(p) \leftrightarrow (q)$: *p és q ekvivalensek*, ha $((p) \to (q)) \wedge ((q) \to (p))$;
- $\forall x(p)$: *minden x esetén p* teljesül, ha $\neg(\exists x(\neg(p)))$.

Magyarázat. Minden $p, q \in$ formula és x_i változójel esetén

$$(p) \wedge (q), (p) \neq (q), (p) \to (q), (p) \leftrightarrow (q), \forall x_i(p)$$

is formula. Amennyiben a formulákon belül a zárójelezés az értelmezést nem befolyásoló módon elhagyható, akkor az áttekinthetőség kedvéért elhagyjuk.

Jelölés. A továbbiakban $x \notin y$ jelöli a $\neg(x \in y)$ formulát, valamint $x \neq y$ a $\neg(x = y)$ formulát.

1.3. Definíció. Egy adott formula lehet *igaz* (i), vagy *hamis* (h). Adott p és q formula igaz vagy hamis formula esetén az alábbi *igazságtáblázaban* foglaljuk össze $\neg p$ és $p \vee q$ igaz vagy hamis voltát.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$
i	i	h	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	h	i	h

Magyarázat. A halmazelmélet axiómái megmondják, hogy mely formulák biztosan igazak. Ezekből az alap formulákból (axiómákból) vezetünk le később további formulákat (tételeket).

Magyarázat. Ezek alapján levezethető a többi logikai művelet igazságtáblája.

1.4. Tétel. *Legyen p és q formula. Ekkor a bevezetett logikai műveletek igazságtáblája az alábbi.*

p	q	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

Bizonyítás. A definícióból elemi számolással adódik.

1.5. Definíció. A p és q formulákat *ekvivalensnek* nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos, azaz, ha $p \leftrightarrow q$ igaz, ennek jele $p \equiv q$.

1.6. Tétel. *A p, q és r formulára*

$$\begin{array}{lll}
\neg(\neg p) \equiv p & \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) & \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \\
p \wedge p \equiv p & p \wedge q \equiv q \wedge p & p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\
p \vee p \equiv p & p \vee q \equiv q \vee p & p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\
 & p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\
 & & p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)
\end{array}$$

teljesül.

Bizonyítás. A $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ azonosságot az alábbi igazságtábla bizonyítja.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$
i	i	i	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h	h
i	h	i	h	i	i	i
h	h	i	h	h	h	h
i	i	h	i	h	i	i
h	i	h	h	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h

A többi azonosság is hasonló módon származtatható igazságtáblázatokból.

1.2. A halmazelmélet axiómái

Magyarázat. Ezen bevezető után elkezdhetjük a halmazelmélet axiomatikus felépítését. Itt az általánosan elterjedt ZFC axiómarendszer egy variánsát mutatjuk be.

1. Axióma. (*Üreshalmaz axióma.*) $\exists x \forall u (u \notin x)$.

Magyarázat. Ennek intuitív jelentése az, hogy létezik olyan halmaz, melynek nincsen eleme.

2. Axióma. (*Meghatározottsági axióma.*) $\forall x \forall y (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y)$.

Magyarázat. Vagyis ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor a két halmaz megegyezik. Ezen axiómák alapján nyilvánvaló, hogy csak egy üres halmaz létezik, melyet a $\emptyset$ szimbólummal jelölünk.

3. Axióma. (*Páraxióma.*) $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$.

Magyarázat. Ezen axióma szerint minden x, y halmazhoz létezik olyan z halmaz, melynek csak x és y az eleme. A meghatározottsági axióma alapján ez a z halmaz egyértelmű.

1.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy A *részhalmaza* a B halmaznak, ha $\forall v(v \in A \to v \in B)$ teljesül, melynek jele $A \subseteq B$, vagy $B \supseteq A$.

4. Axióma. (*Hatványhalmaz axióma.*) $\forall x \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$.

Magyarázat. Minden x halmazhoz létezik olyan halmaz, melynek elemei éppen az x részhalmazai és a meghatározottsági axióma miatt ez a halmaz egyértelmű.

1.8. Definíció. Az x halmaz *hatványhalmazának* nevezzük és a $\mathcal{P}(x)$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, melynek elemei éppen x részhalmazai.

5. Axióma. (*Egyesítési axióma.*) $\forall x \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists v(u \in v \wedge v \in x))$.

Magyarázat. Ezen axióma szerint tetszőleges halmaz elemeinek az elemei is halmazt alkotnak.

Jelölés. Bevezetjük az { } jelölést halmazokra. Azt a halmazt, melynek elemei $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ezentúl a

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

szimbólum jelöli.

Magyarázat. Képezhetjük például az a, b, c elemekből álló halmazt: A páraxióma alapján létezik az $\{a, b\}$ és $\{b, c\}$ halmaz. Szintén a pár axióma miatt létezik az $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ halmaz, valamint az egyesítési axióma miatt tekinthetjük az $\{a, b, c\}$ halmazt.

1.9. Definíció. Adott X halmaz esetén $\cup X$ jelöli azt a halmazt, melynek elemei éppen az X halmazban lévő halmazok elemei, vagyis $\cup X$ az X elemeinek egyesítését jelöli.

1.10. Definíció. Legyen A és B halmaz. Ekkor a páraxióma szerint létezik az $\{A, B\}$ halmaz, továbbá az egyesítési axóma szerint létezik az $\cup\{A, B\}$ halmaz, melyet a továbbiakban $A \cup B$ formában írunk, és az A, B *halmaz egyesítésének* (vagy *–uniójának*) mondunk.

1.11. Definíció. Az A halmaz *rákövetkezőjének* (vagy *szukcesszorának*) nevezzük az

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

halmazt.

1.12. Definíció. Az A halmazt *induktív halmaznak* vagy *monoton halmaznak* nevezünk, ha $\emptyset \in A$ és $\forall x \in A$ esetén $x^+ \in A$.

6. Axióma. (*Végtelenségi axióma.*) $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y^+ \in x))$.

Magyarázat. Ez röviden azt mondja ki, hogy létezik induktív halmaz. Vagyis létezik olyan x halmaz, melynek elemei a $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, stb. halmazok is, és így „végtelen sok eleme” van az x halmaznak.

7. Axióma. (*Részhalmaz axiómaséma.*) Minden p formulához, melyben nem szerepel a y változó tartozik egy axióma: $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow ((z \in x) \wedge p))$.

1.13. Definíció. Legyen x halmaz és p formula. A részhalmaz axiómaséma alapján az x halmaz azon elemei, melyekre p teljesül halmazt alkotnak. Ezt a halmazt a $\{u \in x |\ p\}$ szimbólummal jelöljük.

1.14. Definíció. Adott X halmazrendszer *metszetén* az

$$\{x \in \cup X |\ \forall z \in X\ x \in z\}$$

halmazt értjük, melynek jele $\cap X$. Az A, B halmaz esetén $\cap\{A, B\}$ helyett a $A \cap B$ jelölést használjuk, melyet az A, B *halmaz metszetének* mondjuk.

8. Axióma. (*Regularitási axióma.*) $\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y \in x(y \cap x = \emptyset))$.

Magyarázat. Tehát minden nem üres x halmaznak van olyan z eleme, hogy x és z diszjunkt, vagyis például nem létezik olyan halmaz, melynek csak önmaga az eleme.

Jelölés. Ha p olyan formula, melyben előfordul az u és v változó, akkor ezt hangsúlyozandó a $p(u, v)$ jelölést használjuk. Ha a p formulában u és v minden előfordulásának helyére u' és v' változót írjuk, akkor ezt a $p(u/u', v/v')$ szimbólummal jelöljük.

9. Axióma. (*Helyettesítési axiómaséma.*) Minden $p(u, v)$ formulához, melyben nem szerepel az y változó tartozik egy axióma:

$$(\forall u \exists v(p(u, v)) \wedge \forall u \forall v_0 \forall v_1((p(u, v/v_0) \wedge p(u, v/v_1)) \to v_0 = v_1)) \to$$
$$\forall x \exists y \forall v(v \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x) \wedge p(u, v)).$$

Magyarázat. A helyettesí tési axiómaséma megértéséhez legyen $p(u, v)$ olyan formula, melyben nem szerepel az y változó, valamint egyértelmű a v változóban, azaz minden u halmazhoz pontosan egy olyan v halmaz tartozik, melyre $p(u, v)$ igaz. Jelöljük ezt az egyetlen v halmazt a $\tilde{p}(u)$ szimbólummal. Az axióma szerint minden x halmaz esetén létezik az $y = \{\tilde{p}(u) | u \in x\}$ halmaz.

Magyarázat. Az 1–9. axiómák összefoglaló jele ZF, Zermelo és Frankel neve után.

Magyarázat. A 8. és a 9. axióma az elemi analízisben nem játszik lényeges szerepet, ezeket pusztán a teljesség igénye végett említettük meg.

Megjegyzés. Az axiómák ezen rendszere redundáns, ugyanis az üres halmaz létezése éppen tétel is lehetne, hiszen a 7. axióma szerint létezik az

$$\{x \in y | \ x \neq x\}$$

halmaz, melynek nincs eleme.

$\Diamond$

1.3. Elemi halmazműveletek

1.15. Definíció. Adott A, B halmaz esetén az $\{x \in A | \ x \notin B\}$ halmazt *A és B különbségének* nevezzük, ennek jele $A \setminus B$.

1.16. Tétel. *Minden A, B, C halmazra az alábbiak teljesülnek.*

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap A = A \quad A \cap B = B \cap A \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup \emptyset = A \quad A \cup A = A \quad A \cup B = B \cup A \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Bizonyítás. A tételben szereplő állítások elemi számolással visszavezethetők az 1.6 tételben szereplő logikai összefüggésekre.

1.17. Tétel. *(Cantor-tétel.) Nem létezik olyan halmaz, mely minden halmazt tartalmaz.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen x az a halmaz, mely minden halmazt tartalmaz és legyen $y \triangleq \{z \in x | \ z \notin z\}$. Ekkor mind $y \in y$, mind $y \notin y$ ellentmondáshoz vezet.

1.4. Relációk

1.18. Definíció. Adott x, y halmazok esetén az

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

1.19. Tétel. *Minden x, y, a, b halmazra $(x, y) = (a, b) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $x = a$ és $y = b$, akkor nyilván $(x, y) = (a, b)$. Tegyük fel, hogy $(x, y) = (a, b)$, vagyis $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ teljesül. Ekkor $\{x\}, \{x, y\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a\}$, akkor $x = y = a$, valamint $a = b$, tehát ekkor $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a, b\}$, akkor $x = a$, valamint $\{a, y\} = \{a, b\}$ miatt $y = b$, vagy $y = a$, ami ugyancsak azt jelenti, hogy $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a, b\}$, akkor $x = a = b$ és $y = b$, tehát $x = a$ és $y = b$.

1.20. Tétel. *Adott A, B halmaz, valamint $a \in A$, $b \in B$ elemek esetén*

$$(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

teljesül, így létezik az

$$\{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) |\ a \in A,\ b \in B\}$$

halmaz.

Bizonyítás. A rendezett pár definíciójának következménye.

1.21. Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt.

1.22. Definíció. Adott X, Y halmazok esetén a Descartes-szorzatuk tetszőleges részhalmazát *relációnak* nevezzük, azaz R reláció, ha $R \subseteq X \times Y$. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

- *értelmezési tartománya*
$$\operatorname{Dom} R \triangleq \{x \in X |\ \exists y \in Y : (x, y) \in R\};$$
- *értékkészlete*
$$\operatorname{Ran} R \triangleq \{y \in Y |\ \exists x \in X : (x, y) \in R\};$$
- *inverze*
$$\overset{-1}{R} \triangleq \{(y, x) \in Y \times X |\ (x, y) \in R\};$$
- általi *képe a $H \subseteq X$ halmaznak*
$$R(H) \triangleq \{y \in Y |\ \exists x \in H : (x, y) \in R\};$$
- *megszorítása* vagy *leszűkítése* a $H \subseteq X$ halmazra
$$R|_H \triangleq R \cap (H \times Y).$$

Az $R_1 \subseteq X \times Y$ és $R_2 \subseteq Y \times Z$ reláció *kompozíciója*

$$R_2 \circ R_1 \triangleq \{(x, z) \in X \times Z |\ \exists y \in Y :\ (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

Magyarázat. Nyilván minden $R \subseteq X \times Y$ relációra minden $H \subseteq X$ esetén

$$R(H) = \operatorname{Ran} R|_H$$

teljesül.

1.23. Definíció. Tetszőleges X halmaz esetén

$$\mathrm{id}_X \triangleq \{(x, x) \in X \times X | x \in X\}$$

jelöli az *identitásrelációt.*

1.5. Függvények

1.24. Definíció. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció *függvény*, ha

$$\forall x \forall y \forall y' (((x,y) \in R \wedge (x,y') \in R) \to y = y')$$

teljesül.

Jelölés. Az $f \subseteq X \times Y$ függvényre a továbbiakban az $f : X \twoheadrightarrow Y$ jelölést használjuk. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény értelmezési tartománya $\operatorname{Dom} f \subseteq X$ és értékkészlete $\operatorname{Ran} f \subseteq Y$. Adott $x \in \operatorname{Dom} f \subseteq X$ esetén azt az egyértelműen meghatározott $y \in Y$ elemet, melyre $(x,y) \in f$ teljesül $f(x)$ jelöli. Az f függvényt, mint hozzárendelési szabályt gyakran az

$$f : X \twoheadrightarrow Y \quad x \mapsto f(x)$$

alakban írjuk fel. A $H \subseteq X$ esetén a függvény leszűkítése

$$f|_H : H \twoheadrightarrow Y \quad x \mapsto f(x).$$

Abban az esetben, amikor az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvényre $\operatorname{Dom} f = X$ teljesül az $f : X \to Y$ jelölést fogjuk használni. Tehát az $f : X \to Y$ jelentése az, hogy f függvény és $\operatorname{Dom} f = X$.

Jelölés. A függvények halmazára bevezetjük az

$$\mathcal{F}(X,Y) = \{f \subseteq X \times Y \mid f \text{ függvény}, \ \operatorname{Dom} f = X\}$$

jelölést, valamint megemlítjük, hogy szokásos még az X^Y jelölés is erre a függvényhalmazra, de egészen kivételes esetektől eltekintve ezt nem használjuk.

1.25. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
- *injektív*, ha $\forall x, x' \in X : \ (f(x) = f(x') \to x = x')$;
- *szürjektív*, ha $\operatorname{Ran} f = Y$;
- *bijektív*, ha $\operatorname{Dom} f = X$, injektív és szürjektív.

Az $f : X \to X$ bijekciót az X halmaz *permutációjának* is nevezzük.

1.26. Tétel. *Ha f függvény, akkor $\overset{-1}{f}$ pontosan akkor függvény, ha f injektív.*

Bizonyítás. Legyen $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény. Az f függvény injektivitása azt jelenti, hogy

$$\forall x, x' \in X \ \forall y \in Y : \ ((x,y) \in f \wedge (x',y) \in f) \to x = x'.$$

Az $\overset{-1}{f}$ reláció függvényszerűsége azt jelenti, hogy

$$\forall x, x' \in X \ \forall y \in Y : \ ((y,x) \in \overset{-1}{f} \wedge (y,x') \in \overset{-1}{f}) \to x = x'.$$

Vagyis a két kijelentés ekvivalens egymással.

1.27. Definíció. Ha f injektív függvény, akkor az $\overset{-1}{f}$ függvényt f^{-1} jelöli és ez az f *függvény inverze*. Amennyiben egy függvénynek létezik inverze, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *invertálható*.

1.28. Tétel. *Függvények kompozíciója függvény.*

Bizonyítás. Legyen $f : X \twoheadrightarrow Y$ és $g : Y \twoheadrightarrow Z$, valamint tegyük fel, hogy $(x,z_1),(x,z_2) \in (g \circ f)$. A relációk kompozíciójának az értelmezése alapján létezik olyan $y_1, y_2 \in Y$, melyre $(x,y_1) \in f$, $(x,y_2) \in f$, $(y_1,z_1) \in g$ és $(y_2,z_2) \in g$ teljesül. Mivel f függvény, így $y_1 = y_2$, tehát az $(y_1,z_1) \in g$ és a $(y_2,z_2) \in g$ relációkból g függvényszerűségének a felhasználásával $z_1 = z_2$ adódik, vagyis $g \circ f$ függvény.

Magyarázat. Tehát az $f : X \twoheadrightarrow Y$ és $g : Y \twoheadrightarrow Z$ függvény kompozícióját úgy értelmezzük, mint az f és g reláció kompozícióját. Ekkor $g \circ f$ értelmezési tartománya

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in X \mid x \in \mathrm{Dom}\, f,\ f(x) \in \mathrm{Dom}\, g\}\,.$$

A függvénykompozícót a

$$g \circ f : X \twoheadrightarrow Z \qquad x \mapsto g(f(x))$$

alakban is írhatjuk.

1.29. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
- *jobb inverze* az a $g : \mathrm{Ran}\, f \twoheadrightarrow \mathrm{Dom}\, f$ függvény, melyre $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{Ran}\, f}$;
- *bal inverze* az a $g : \mathrm{Ran}\, f \twoheadrightarrow \mathrm{Dom}\, f$ függvény, melyre $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}\, f}$.

1.30. Tétel. *Bármely $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, $g \in \mathcal{F}(Y, Z)$ és $h \in \mathcal{F}(Z, V)$ függvényre*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(x, v) \in h \circ (g \circ f)$. Ekkor létezik olyan $z \in Z$, hogy $(x, z) \in (g \circ f)$ és $(z, v) \in h$. Amiből következik, hogy létezik olyan $y \in Y$, hogy $(x, y) \in f$ és $(y, z) \in g$. Ekkor $(y, z) \in g$ és $(z, v) \in h$ miatt $(y, v) \in h \circ g$, valamint $(x, y) \in f$ miatt $(x, v) \in (h \circ g) \circ f$. Az indentitásfüggvényre vonatkozó azonosság nyilvánvalóan adódik az identitásfüggvény definíciójából.

Magyarázat. A megszokott matematikai műveletek is függvények, melyek főbb tulajdonságaikat az alábbiakban definiáljuk.

1.31. Definíció. Valamilyen X halmaz esetén az $X \times X \to X$ függvényeket gyakran *műveletnek* nevezzük és jelölésükre általában az infix módot használjuk. Vagyis például az $+ : X \times X \to X$ művelet és $x, y \in X$ esetén az $x + y \stackrel{\triangle}{=} +(x, y)$ jelöléssel élünk.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ művelet *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x + y = y + x$.
- A $+$ művelet *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A $+$ művelet *egységelemes*, ha $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = e + x = x$.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ egységelemes művelet *inverzelemes* ha

$$\forall x \in X : \exists x' \in X : x + x' = e \ \wedge\ x' + x = e,$$

  ahol e jelöli az egységelemet.
- A $\cdot : X \times X \to X$ művelet *disztributív a $+$ műveletre nézve*, ha $\forall x, y, z \in X$ elemre

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

Magyarázat. A matematikai struktúrák egy része egy halmazból és a halmazon értelmezett speciális tulajdonságú műveletekből áll.

1.32. Definíció. A $(G, \cdot)$ párt *félcsoportnak* nevezzük, ha $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív művelet. A $(G, \cdot)$ pár *kommutatív félcsoport*, ha $(G, \cdot)$ félcsoport és a $\cdot$ művelet kommutatív.

1.33. Definíció. A $(G, \cdot, e)$ hármast *csoportnak* nevezzük, ha $e \in G$, $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív, egységelemes és inverzelemes művelet. Az egységelemet általában e jelöli absztrakt csoport esetén és a $g \in G$ elem inverzét pedig g^{-1}. Így csoportok esetén létezik egy

$$^{-1} : G \to G \quad g \mapsto g^{-1}$$

inverzképzés. A $(G, \cdot, e)$ hármas *kommutatív csoport*, ha $(G, \cdot, e)$ csoport, és a $\cdot$ művelet kommutatív.

1.34. Tétel. *(Cantor-tétel.) Egyetlen A halmaz esetén sem létezik $f : A \to \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen $f : A \to \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény. Legyen $Y \stackrel{\triangle}{=} \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Ekkor létezik $x_0 \in A$, melyre $f(x_0) = Y$. Ekkor az $x_0 \in Y$ feltevés és az $x_0 \notin Y$ feltevés is ellentmondáshoz vezet.

1.6. Halmazrendszerek

1.35. Definíció. Legyen I és A nem üres halmaz. Az $f : I \to \mathcal{P}(A)$ függvényt *halmazrendszernek* nevezzük, minden $i \in I$ esetén az $A_i \triangleq f(i)$ jelölés használjuk a függvény értékére, valamint az I halmazt *indexhalmaznak* nevezzük. Az f függvényre pedig gyakran az $(A_i)_{i\in I}$ jelölést használjuk.

1.36. Definíció. Legyen $I, A \neq \emptyset$ és $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszer. Az $(A_i)_{i\in I}$ *halmazrendszer uniója*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \triangleq \{x \in A | \exists i \in I : \ x \in A_i\}$$

és *metszete*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \triangleq \{x \in A | \forall i \in I : \ x \in A_i\}.$$

1.37. Definíció. Az $(A_i)_{i\in I}$ *halmazrendszer Descartes-szorzatán* a

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I : \ f(i) \in A_i \right\}$$

halmazt értjük. Adott $f \in \prod_{i\in I} A_i$ és $k \in I$ esetén az $f_k \triangleq f(k)$ jelölést is fogjuk használni.

Jelölés. A Descartes-szorzat elemei tehát az indexhalmazon értelmezett speciális függvények. Abban az esetben, amikor az $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre minden $i, j \in I$ esetén $A_i = A_j$ teljesül, akkor az $A = A_i$ jelölést bevezetve a halmazrendszer Descartes-szorzatára

$$\prod_{i\in I} A = \{f : I \to A\} = \mathcal{F}(I, A)$$

adódik, amit gyakran az A^I szimbólummal fogunk jelölni.

1.38. Tétel. *Legyen A_x, A_y tetszőleges halmaz és $I = \{x, y\}$. Ekkor a*

$$\varphi : \prod_{i\in I} A_i \to A_x \times A_y \quad f \mapsto (f(x), f(y))$$

leképezés bijekció.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Ekkor $(\alpha(x), \alpha(y)) = (\beta(x), \beta(y))$, amiből $\alpha(x) = \beta(x)$ és $\alpha(y) = \beta(y)$ adódik, ami pedig azt jelenti, hogy $\alpha = \beta$. Vagyis a φ leképezés injektív. Ha $(c_x, c_y) \in A_x \times A_y$, akkor az $f = \{(x, c_x), (y, c_y)\} \in \prod_{i\in I} A_i$ függvényre $\varphi(f) = (c_x, c_y)$ teljesül, vagyis φ szürjektív.

Magyarázat. Ezen tétel értelmében a halmazrendszer szorzata tekinthető a korábban értelmezett Descartes-szorzat általánosításának, ez indokolja az elnevezést.

10. Axióma. (*Kiválasztási axióma.*)

$$\forall x \exists f((f : x \to \cup x) \wedge (\mathrm{Dom}\, f = x) \wedge (\forall u \in x(u \neq \emptyset \to f(u) \in u))).$$

Jelölés. A kiválasztási axióma jele AC, az angol *axiome of choice* kifejezés után. Az általunk használandó halmazelmélet axiómái a ZF axiómák és az AC axióma, melyet együttesen ZFC-nek rövidítünk.

Kiegészítés. Gödel és Cohen megmutatták, hogy ha a ZF axiómarendszer ellentmondásmentes, akkor a $\mathrm{ZF} \cup \{AC\}$ valamint a $\mathrm{ZF} \cup \{\neg AC\}$ axiómarendszerek is ellentmondásmentesek lesznek.

$\diamondsuit$

Magyarázat. A kiválasztási axiómát az analízisben főleg halmazrendszerekre fogjuk alkalmazni az alábbi formában.

1.39. Tétel. *Ha $(A_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall i \in I(A_i \neq \emptyset)$, akkor $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen I nem üres halmaz és legyen $f : I \to \mathcal{P}(A)$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f(i) \neq \emptyset$. A kiválasztási axiómát alkalmazva az $x = \operatorname{Ran} f$ halmazra azt kapjuk, hogy létezik olyan $\varphi : \operatorname{Ran} f \to A$ függvény, hogy minden $u \in \operatorname{Ran} f$ esetén $\varphi(u) \in u$. Mivel minden $i \in I$ esetén $f(i) \in \operatorname{Ran} f$, ezért $\varphi(f(i)) \in f(i)$. Tehát a $g = \varphi \circ f$ függvényre $g \in \prod_{i\in I} f_i$ teljesül. Vagyis nem üres halmazok Descartes-szorzata nem üres.

1.40. Definíció. Legyen $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszer.

– Adott $k \in I$ esetén a
$$\mathrm{pr}_k : \prod_{i\in I} A_i \to A_k \qquad x \mapsto x_k$$
függvényt *a k-adik projekció függvénynek* nevezzük.

– Adott $a \in \prod_{i\in I} A_i$ és $k \in I$ esetén a
$$\mathrm{in}_{a,k} = \left\{ (x,u) \in A_k \times \prod_{i\in I} A_i \;\middle|\; u_k = a,\ \forall i \in I \setminus \{k\} : u_i = a_i \right\}$$
függvényt *a k koordináta a ponthoz tartozó inklúzió függvénynek* nevezzük. Vagyis $a \in \prod_{i\in I} A_i$, $k, i \in I$ és $x \in A_k$ esetén
$$(\mathrm{in}_{a,k}(x))_i = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad i = k; \\ a_k, & \text{ha} \quad i \neq k. \end{cases}$$

1.7. Rendezések

1.41. Definíció. Az $R \subseteq X \times X$ reláció *homogén reláció az X halmaz fölött.* Néhány fontos lehetséges tulajdonsága:

– *reflexív*, ha $\forall x \in X((x,x) \in R)$;
– *tranzitív*, ha $\forall x, y, z \in X(((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \to (x,z) \in R)$;
– *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X((x,y) \in R \to (y,x) \in R)$;
– *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X(((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \to x = y)$.

1.42. Tétel. *Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció.*

1. *Az R pontosan akkor reflexív, ha $\mathrm{id}_X \subseteq R$.*
2. *Az R pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.*
3. *Az R pontosan akkor szimmetrikus, ha $\overset{-1}{R} = R$.*
4. *Az R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq \mathrm{id}_{\operatorname{Dom} R}$.*

Bizonyítás. A definíciók közvetlen következménye.

1.43. Definíció. A reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív relációkat a *rendezéseknek* nevezzük. Ha $\leq$ rendezés az A halmaz felett, akkor az $(A, \leq)$ pár neve: *rendezett halmaz.*

Jelölés. A rendezéseket általában a $\leq, \geq, \preceq, \succeq$ szimbólummal jelöljük. A továbbiakban $(x,y) \in \leq$ helyett az $x \leq y$ jelölést használjuk, és bevezetjük az $x < y$ rövidítést az $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$ formula helyett.

1.44. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz.

- Az $X \subseteq A$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $x \in A$ elemet, amelyre $\forall x' \in X\ x' \leq x\ (x \leq x')$ teljesül.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az X halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az $X \subseteq A$ halmaz *korlátos*, ha X felülről és alulról is korlátos.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük X minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az X halmaznak.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az X halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup X$, illetve $\inf X$.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *maximális* (illetve *minimális*) elemének nevezünk minden olyan $x \in X$ elemet, amelyre teljesül az, hogy X-nek nem létezik x-nél nagyobb (illetve kisebb) eleme.

Magyarázat. Rendezett halmaz egy részhalmazának legfeljebb egy legnagyobb (illetve legkisebb) eleme létezhet, de lehet több maximális (illetve minimális) eleme.

1.45. Definíció. Az $(A, \leq)$ pár *lineárisan rendezett halmaz*, ha olyan $(A, \leq)$ rendezett halmaz, hogy A bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, azaz $\forall x, y \in A : (x \leq y \vee y \leq x)$ teljesül.

1.46. Tétel. *Legyen $(A, \leq)$ lineárisan rendezett halmaz és $X \subseteq A$.*

1. *Az $y \in A$ elemre $\sup X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y felső korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A : \ (z < y \to (\exists x \in X : z < x))$ teljesül.*
2. *Az $y \in A$ elemre $\inf X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y alsó korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A : \ (z > y \to (\exists x \in X : z > x))$ teljesül.*

Bizonyítás. Az első állítást bizonyítjuk, a második hasonló gondolatmentettel igazolható.
$\Rightarrow$ Legyen $y = \sup X$. Ekkor y definíció szerint felső korlátja az X halmaznak. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists z \in A$, melyre $z < y$ és minden $x \in X$ esetén $x \leq z$. Ekkor z felső korlátja az X halmaznak és kisebb mint y, vagyis nem $y = \sup X$ az X halmaz legkisebb felső korlátja, ami ellentmondás.
$\Leftarrow$ Legyen y olyan felső korlátja az X halmaznak, melyre $\forall z \in A : \ (z < y \to (\exists x \in X : z < x))$ teljesül. Ekkor y a legkisebb felső korlát, vagyis $y = \sup X$.

1.47. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz. Az $(A, \leq)$ párt *jólrendezett halmaznak*, magát a $\leq$ relációt pedig jólrendezésnek nevezzük, ha A minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme.

Magyarázat. A jólrendezett halmaz definíciójából azonnal következik, hogy minden jólrendezett halmaz lineárisan rendezett és nem az üres halmaz.

Kiegészítés.

1.48. Tétel. *Minden A halmazhoz létezik olyan $\leq$ reláció, mellyel $(A, \leq)$ jólrendezett halmaz.*

A tételt nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy ekvivalens a kiválasztási axiómával.

$\Diamond$

1.49. Definíció. Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, y \in A$ esetén definiáljuk az alábbi halmazokat.

$$[x, y] = \{z \in A |\ x \leq z \leq y\}$$
$$[x, y[= \{z \in A |\ x \leq z < y\}$$
$$]x, y] = \{z \in A |\ x < z \leq y\}$$
$$]x, y[= \{z \in A |\ x < z < y\}$$

A fenti módon meghatározott halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

1.50. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A, \leq)$ rendezett halmaz *induktívan rendezett halmaz*, ha minden olyan részhalmaza felülről korlátos, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

1.51. Tétel. *(Kuratowski–Zorn-lemma.) Minden induktívan rendezett halmaznak létezik maximális eleme.*

Magyarázat. Az állítást nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy a Kuratowski–Zorn lemma ekvivalens a kiválasztási axiómával.

1.8. Ekvivalenciarelációk

1.52. Definíció. A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat *ekvivalenciarelációknak* nevezzük.

Jelölés. Az ekvivalenciarelációkat a $\approx, \sim$ szimbólummal jelöljük, továbbá $(x, y) \in \approx$ helyett az $x \approx y$ jelölést használjuk.

1.53. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz és legyen $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az $X \subseteq A$ halmazt *ekvivalenciaosztálynak* nevezzük, ha

- $X \neq \emptyset$;
- $\forall x, y \in X : x \approx y$;
- $\forall x \in X, \forall y \in A : (x \approx y \to y \in X)$.

1.54. Tétel. *Legyen A tetszőleges halmaz és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor minden $a \in A$ elemre az*

$$a/\approx \stackrel{\triangle}{=} \{x \in A|\ a \approx x\}$$

halmaz ekvivalenciaosztály és az ekvivalenciaosztályok halmazt alkotnak

$$A/\approx \stackrel{\triangle}{=} \{X \in \mathcal{P}(A)|\ \exists a \in A :\ X = a/\approx\}.$$

Továbbá az $A/\approx$ ekvivalenciaosztályok diszjunkt halmazrendszert alkotnak, azaz

$$\forall x, y \in A/\approx:\ x \neq y \to x \cap y = \emptyset, \quad \text{és} \quad \cup\{x|\ x \in A/\approx\} = A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges halmaz, $a \in A$ és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Mivel $a \approx a$, ezért $a \in a/\approx$, vagyis $a/\approx \neq \emptyset$. Ha $x, y \in a/\approx$, akkor $x \approx a$, $y \approx a$, amiből a $\approx$ reláció tranzitivitása miatt $x \approx y$ adódik. Ha $x \in a/\approx$ és $y \in A$ olyan elem, melyre $x \approx y$ teljesül, akkor $y \approx a$ a $\approx$ reláció tranzitivitása miatt, vagyis $y \in a/\approx$.
Legyen $x/\approx, y/\approx \in A/\approx$ olyan, hogy $x/\approx \neq y/\approx$. Tegyük fel, hogy $c \in (x/\approx) \cap (y/\approx)$. Ekkor $x \approx c$ és $y \approx c$, vagyis $x \approx y$, amiből a $\approx$ reláció tranzitivitásának felhasználásával az $x/\approx = y/\approx$ ellentmondás adódik. Tehát feltételezésünkkel ellentétben nem létezhet olyan c elem, melyet az $x/\approx$ és az $y/\approx$ halmaz is tartalmaz, így $(x/\approx) \cap (y/\approx) = \emptyset$.
Ha $x \in A/\approx$, akkor $x \subseteq A$, vagyis az A részhalmazainak az egyesítése nyilván részhalmaza az A halmaznak, ezért csak a $A \subseteq \cup\{x|\ x \in A/\approx\}$ tartalmazást kell igazolni. Ha $a \in A$, akkor nyilván $a \in a/\approx \in A/\approx$, vagyis $a \in \cup\{x|\ x \in A/\approx\}$.

1.9. Természetes számok és rekurziók

1.55. Tétel. *Létezik egyetlen monoton halmaz, melyet minden más monoton halmaz tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen M monoton halmaz és legyen $H \stackrel{\triangle}{=} \{N \subseteq M|\ N \text{ monoton}\}$, és $N \stackrel{\triangle}{=} \cap H$. Ekkor N monoton halmaz. Ha M' egy monoton halmaz, akkor $M \cap M'$ is monoton halmaz és $M \cap M' \in H$, ezért $N \subseteq M'$.

1.56. Definíció. Azt a jól meghatározott monoton halmazt, melyet minden más monoton halmaz tartalmaz, az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük és elemeit *természetes számoknak* hívjuk. Továbbá bevezetjük az $\mathbb{N}^+ \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$ jelölést.

Magyarázat. Ezek után azonosítjuk a megszokott természetes számokat $\mathbb{N}$ elemeivel.

1.57. Definíció.

$$0 \stackrel{\triangle}{=} \emptyset$$

$$1 \stackrel{\triangle}{=} 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$
\begin{aligned}
2 &\triangleq 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &\triangleq 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Magyarázat. Vagyis a fent bevezetett jelölés szerint $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N} \setminus 1$.

1.58. Tétel. *(A teljes indukció elve.) Ha az $A \subseteq \mathbb{N}$ halmazra $0 \in A$, valamint $\forall n \in A : n^+ \in A$ teljesül, akkor $A = \mathbb{N}$.*

Bizonyítás. A fenti tétel nyilvánvaló következménye.

Magyarázat. Az alábbi tétel konstruktív módon megad egy rendezést természetes számok halmazán, mellyel az jólrendezett halmaz lesz. A tétel meglehetősen sok, apró technikai részletet tartalmazó bizonyítását nem ismertetjük.

1.59. Tétel. *A*

$$\leq \triangleq \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ m \subseteq n\}$$

reláció jólrendezés az $\mathbb{N}$ halmazon. Az $(m, n) \in \leq$ teljesülését szokásosan az $m \leq n$ alakban írjuk.

Magyarázat. A természetes számok bevezetésének következménye, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ elemre

$$n^+ = \{0, 1, \ldots, n\}$$

teljesül. Vagyis minden természetes szám, mint halmaz, megegyezik a nála szigorúan kisebb természetes számok halmazával. Például $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Jelölés. Adott $n \in \mathbb{N}^+$ természetes szám esetén bevezetjük a

$$\{1, \ldots, n\} \triangleq n^+ \setminus \{0\}, \qquad \{0, \ldots, n\} \triangleq n^+$$

jelölést.

Magyarázat. A természetes számokat és rajtuk egy kitüntetett rendezést már definiáltunk, most a megszokott műveleteken a sor.

1.60. Tétel. *(Az egyszerű rekurzió tétele.) Legyen A halmaz, $a \in A$ tetszőleges elem és legyen $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \times A, A)$ tetszőleges függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan $f : \mathbb{N} \to A$ függvény melyre $f(0) = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n^+) = g(n, f(n))$ teljesül.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik egyetlen olyan $s^{(n)} : n^+ \to A$ függvény, melyre $s^{(n)}(0) = a$ és minden $k \in n$ esetén $s^{(n)}(k^+) = g(n, s^{(n)}(k))$ teljesül. Jelölje H azon természetes számok halmazát, melyekre igaz a fenti kijelentés. Ekkor nyilván $0 \in H$, hiszen az $s^{(0)} : \{0\} \to A$, $s^{(0)}(0) = a$ függvény rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Ha $n \in H$, akkor az

$$s^{(n^+)} : (n^+)^+ \to A \qquad k \mapsto \begin{cases} s^{(n)}(k) & \text{ha} \quad k < n^+ \\ g(n, s^{(n)}(n)) & \text{ha} \quad k = n^+ \end{cases}$$

függvény is rendelkezik a rekurzív tulajdonsággal, egyértelműsége pedig szintén a rekurzióból adódik; vagyis $n^+ \in H$.

Legyen $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s^{(n)}$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $s^{(n)} \subseteq \mathbb{N} \times A$ függvény és minden $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ elemre $n_1 \leq n_2$ esetén $s^{(n_1)} \subseteq s^{(n_2)}$, ezért $f : \mathbb{N} \to A$ függvény lesz. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra $f|_{n^+} = s^{(n)}$, ezért az f függvény rendelkezik a tételben leírt tulajdonságokkal, egyértelműsége pedig szintén az $s^{(n)}$ függvények egyértelműségéből fakad.

1.61. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = k$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto l^+.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = k$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l^+) = f_k(l)^+$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

összeadás műveletét.

Magyarázat. A összeadás műveletének főbb tulajdonságait az alábbi tétel foglalja össze, melynek hosszadalmas, elemi teljes indukción alapuló bizonyítását nem ismertetjük.

1.62. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $n + 0 = n$
2. $m + n = n + m$
3. $k + (m + n) = (k + m) + n$
4. $m \leq n \to m + k \leq n + k$

1.63. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = 0$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto l + k.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = 0$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l + 1) = f_k(l) + k$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

szorzás műveletét.

Magyarázat. A szorzás műveletének főbb tulajdonságait mondja ki a következő tétel, melynek a bizonyítását szintén kihagyjuk.

1.64. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $1n = n$
2. $mn = nm$
3. $k(mn) = (km)n$
4. $k(m + n) = km + kn$
5. $(m + n)k = mk + nk$
6. $m \leq n \to mk \leq nk$

1.65. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = 1$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto lk.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = 1$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l + 1) = f_k(l)k$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

hatványozás műveletét, melyre a $k^l \triangleq h(k, l)$ jelölést alkalmazzuk.

Magyarázat. Szintén bizonyítás nélkül közöljük a hatványozás alaptulajdonságait.

1.66. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $1^n = 1$
2. $k^{m+n} = k^m k^n$
3. $(k^m)^n = k^{mn}$

Magyarázat. Több tétel bizonyításánál lesz szükségünk a későbbiekben az alábbi egzisztencia állításra.

1.67. Tétel. *(A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele.) Legyen A halmaz és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq \mathcal{F}(n, A)$. Tegyük fel, hogy*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f \in F_n \exists f' \in F_{n+1}(f'|_n = f)$$

teljesül. Ekkor minden $N \in \mathbb{N}$ elemre és $a \in F_N$ függvényhez létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ sorozat, hogy $a'|_N = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n \geq N$ esetén $a'|_n \in F_n$.

Bizonyítás. Legyen A halmaz és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq \mathcal{F}(n, A)$ és

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f \in F_n \exists f' \in F_{n+1}(f'|_n = f)$$

teljesül. Legyen továbbá $N \in \mathbb{N}$ és $a \in F_N$ tetszőleges. Legyen $m \in \mathbb{N}$, $m \geq N$ és $b \in F_m$ tetszőleges. Ekkor az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre tett feltételezés alapján

$$\{b' \in F_{m+1} |\ b'|_m = b\} \neq \emptyset,$$

mivel ez minden $b \in F_m$ halmazra igaz, ezért az 1.39 tétel alapján

$$\prod_{b\in F_m} \{b' \in F_{m+1} |\ b'|_m = b\} \neq \emptyset,$$

amiből ugyancsak az 1.39 tétel alapján

$$\prod_{\{m\in\mathbb{N} |\ m\geq N\}} \prod_{b\in F_m} \{b' \in F_{m+1} |\ b'|_m = b\} \neq \emptyset$$

következik. Legyen α egy eleme a fenti halmaznak. Ekkor az $F = \bigcup_{n=N}^{\infty} F_n$ jelölés bevezetésével

$$\alpha : \{m \in \mathbb{N} |\ m \geq N\} \to \mathcal{F}(F, F)$$

olyan függvény, hogy minden $m \in \mathbb{N}$, $m \geq N$ esetén $\alpha(m) : F_m \to F_{m+1}$ és minden $b \in F_m$ elemre $(\alpha(m)(b))|_m = b$ teljesül. Definiáljuk a

$$g : \mathbb{N} \times F \to F \qquad (n, c) \mapsto \alpha(\operatorname{Dom} c)(c)$$

függvényt. Az egyszerű rekurzió tételét alkalmazva a g függvényre és a $a \in F_N \subseteq F$ elemre kapjuk, hogy létezik olyan $f : \mathbb{N} \to F$ függvény, hogy $f(0) = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n+1) = g(n, f(n))$. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) \in F_{n+N}$ teljesül. Az $n = 0$ esetben $f(0) = a \in F_N$ nyilván teljesül. Most tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $f(n) \in F_{n+N}$ teljesül. Ekkor

$$f(n+1) = g(n, f(n)) = \alpha(\operatorname{Dom} f(n))(f(n)) \in F_{n+1+N},$$

tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) \in F_{n+N}$ teljesül.
Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n+1)|_{n+N} = f(n)$ teljesül. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\operatorname{Dom} f(n) = n + N$, vagyis az α függvény $(\alpha(m)(b))|_m = b$ tulajdonsága miatt

$$f(n+1)|_{n+N} = \alpha(\operatorname{Dom} f(n))(f(n))|_{n+N} = \alpha(n+N)(f(n))|_{n+N} = f(n).$$

Ezt másképp úgy is kifejezhetjük, hogy $f(n) \subseteq f(n+1)$.
Legyen $a' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n)$. Megmutatjuk, hogy a' függvény. Legyen $(u, v_1), (u, v_2) \in a'$. Ekkor létezik olyan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $(u, v_1) \in f(n_1)$ és $(u, v_2) \in f(n_2)$, vagy másképp írva $f(n_1)(u) = v_1$ és $f(n_2)(u) = v_2$. Ha $n_1 = n_2$, akkor az $f(n_1)$ függvény, tehát $v_1 = v_2$. Tegyük fel, hogy $n_1 > n_2$. Ekkor $f(n_1)|_{n_2+m} = f(n_2)$ miatt $f(n_1)(u) = f(n_2)(u)$, vagyis ismét $v_1 = v_2$ adódik.
Az $a' : \mathbb{N} \to A$ olyan függvény, hogy $a'|_N = f(0) = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n \geq N$ esetén $a'|_n = f(n - N) \in F_n$ teljesül.

1.10. Természetes számoktól a komplex számokig

Magyarázat. Jelen alfejezet célja, hogy eljussunk az analízis alapját jelentő valós illetve komplex számok fogalmához. A matematikailag teljesen precíz ismertetése ennek a hosszú útnak, mely a természetes számoktól indul és a valós számtestnél végződik, meglehetősen hely és időigényes lenne, éppen ezért csak főbb mérföldköveit említjük meg.

1.68. Tétel. *(Egész számok.)*

1. *Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon az*

$$\approx \stackrel{\triangle}{=} \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) |\ m + n' = m' + n\}$$

reláció ekvivalencia-reláció.

2. *Tekintsük az alábbi műveleteket.*

$$\begin{aligned} +' &: (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (m+m', n+n') \\ \times' &: (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (mm'+nn', m'n+n'm) \end{aligned}$$

Ezeket a függvényeket infix jelölésmóddal írjuk. Ekkor minden

$$(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_1',n_1'),(m_2',n_2') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

elemre $(m_1,n_1) \approx (m_1',n_1')$, $(m_2,n_2) \approx (m_2',n_2')$ esetén

$$\begin{aligned} (m_1,n_1) +' (m_2,n_2) &\approx (m_1',n_1') +' (m_2',n_2') \\ (m_1,n_1) \times' (m_2,n_2) &\approx (m_1',n_1') \times' (m_2',n_2') \end{aligned}$$

teljesül.

3. *A $\mathbb{Z} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\approx$ halmazon jól értelmezett a*

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) +' (m_2,n_2))/\approx \\ \times &: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) \times' (m_2,n_2))/\approx \end{aligned}$$

művelet és $\mathbb{N}$ természetes módon beágyazható a $\mathbb{Z}$ halmazba.

$$j : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad n \mapsto (n,0)/\approx$$

4. *A $(\mathbb{Z},+)$ kommutatív csoport és minden $m,n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$j(m) + j(n) = j(m+n)$$

teljesül. Jelölje a $+$ művelet inverzét $-$.

5. *A $\times$ művelet asszociatív, kommutatív és egységelemes, disztributív a $+$ műveletre nézve és minden $m,n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$j(m) \times j(n) = j(mn)$$

teljesül.

6. *A $\mathbb{Z}$ halmazon a*

$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ \exists (m_a,n_a) \in a,\ \exists (m_b,n_b) \in b\ : m_a + n_b \leq m_b + n_a\}$$

reláció lineáris rendezés. Azt a tényt, hogy $(a,b) \in \leq$ röviden az $a \leq b$ alakban írjuk.

Jelölés. A továbbiakban a $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ beágyazást nem jelöljük, a $\times$ szorzást a $\cdot$ jellel jelöljük, vagy nem írjuk ki.

1.69. Definíció. A $\mathbb{Z}$ halmaz elemeit *egész számoknak* nevezzük.

1.70. Tétel. *(Racionális számok.) Legyen $\mathbb{Z}' \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

1. *Az $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$ halmazon az*

$$\approx \stackrel{\triangle}{=} \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') |\ mn' = m'n\}$$

reláció ekvivalencia-reláció.

2. *Tekintsük az alábbi műveleteket.*

$$\begin{aligned} +' : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (mn' + m'n, nn') \\ \times' : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (mm', nn') \end{aligned}$$

Ezeket a függvényeket infix jelölésmóddal írjuk. Ekkor minden

$$(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_1',n_1'),(m_2',n_2') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$$

elemre $(m_1,n_1) \approx (m_1',n_1')$, $(m_2,n_2) \approx (m_2',n_2')$ esetén

$$\begin{aligned} (m_1,n_1) +' (m_2,n_2) \approx (m_1',n_1') +' (m_2',n_2') \\ (m_1,n_1) \times' (m_2,n_2) \approx (m_1',n_1') \times' (m_2',n_2') \end{aligned}$$

teljesül.

3. *A $\mathbb{Q} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}')/\approx$ halmazon jól értelmezett a*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) +' (m_2,n_2))/\approx \\ \times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) \times' (m_2,n_2))/\approx \end{aligned}$$

művelet és $\mathbb{Z}$ természetes módon beágyazható a $\mathbb{Q}$ halmazba.

$$j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad n \mapsto (n,1)/\approx$$

4. *A $(\mathbb{Q},+)$ kommutatív csoport és minden $m,n \in \mathbb{Z}$ esetén*

$$j(m) + j(n) = j(m+n)$$

teljesül. Jelölje a $+$ művelet inverzét $-$.

5. *A $\times$ művelet asszociatív, kommutatív, egységelemes, disztributív a $+$ műveletre nézve és minden $m,n \in \mathbb{Q}$ esetén*

$$j(m) \times j(n) = j(mn)$$

teljesül.

6. *Minden $p \in \mathbb{Q}$ elemre $p \neq j(0)$ esetén létezik pontosan egy $p' \in \mathbb{Q}$ melyre $p \times p' = j(1)$ teljesül.*

7. *A $\mathbb{Q}$ halmazon a*

$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} |\ \exists (m_a,n_a) \in a,\ \exists (m_b,n_b) \in b :\ m_a \times n_b \leq m_b \times n_a\}$$

reláció lineáris rendezés, melyet $(a,b) \in \leq$ esetén az $a \leq b$ alakban írunk.

Jelölés. A továbbiakban a $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ beágyazást nem jelöljük, a $\times$ szorzást pedig $\cdot$ jelöli, vagy nem írjuk ki. Nullától különböző $p \in \mathbb{Q}$ elem inverzét a szorzásműveletre nézve $\frac{1}{p}$ jelöli. A fenti tételből következik, hogy minden $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén

$$m \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot m,$$

ezt a szorzatot a továbbiakban $\frac{m}{n}$ alakban írjuk. Minden $p \in \mathbb{Q}$ elem felírható $p = \frac{m}{n}$ alakban, ahol $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1.71. Definíció. A $\mathbb{Q}$ halmaz elemeit *racionális számoknak* nevezzük.

1.72. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ötös *test*, ha teljesíti az alábbiakat.

- $0, 1 \in K,\ 0 \neq 1$
- A $(K, +, 0)$ kommutatív csoport.
- A $\cdot$ művelet asszociatív, kommutatív, 1 az egységeleme és minden nem nulla elemnek létezik inverze.
- A $\cdot$ művelet disztributív a $+$ műveletre nézve.

1.73. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatost *rendezett testnek* mondjuk, ha az teljesíti az alábbiakat.

- A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ötös test.
- A $\leq$ reláció lineáris rendezés.
- $\forall k, m, n \in K : (m \leq n \to m + k \leq n + k)$
- $\forall k, m, n \in K : ((m \leq n \wedge 0 \leq k) \to mk \leq nk)$

1.74. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatos *teljesen rendezett test*, ha

- A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ rendezett test;
- minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának létezik szuprémuma.

1.75. Tétel. *A $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatos lineárisan rendezett test, de nem teljesen rendezett test.*

1.76. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{Q}$ halmazt *Dedekind-szeletnek* hívjuk, ha

- $X \neq \emptyset$;
- X felülről korlátos;
- az X halmaznak nincs legnagyobb eleme a $\mathbb{Q}$ halmazban;
- minden $x \in X$ esetén
$$\{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\} \subseteq X$$
teljesül.

1.77. Definíció. A Dedekind-szeleteket *valós számoknak* nevezzük, ezek halmazát $\mathbb{R}$ jelöli.

1.78. Tétel. *(Műveletek valós számokkal.)*

1. *Az $\mathbb{R}$ halmazon a*
$$\leq \triangleq \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x \subseteq y\}$$
reláció rendezés, melyet $(x, y) \in \leq$ esetén az $x \leq y$ alakban írunk fel.
2. *A*
$$j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} |\ q < x\}$$
beágyazás injektív.
3. *Adott $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*
$$x + y \triangleq \{q_x + q_y |\ q_x \in x,\ q_y \in y\}$$
halmazra $x + y \in \mathbb{R}$ teljesül. Így értelmezhető a
$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x + y$$
összeadás művelete, mely kommutatív, asszociatív és melynek $j(0)$ az egységeleme.
4. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen*
$$-x \triangleq \{q \in \mathbb{Q} |\ \forall r \in x :\ q < -r\}$$
Ekkor $-x \in \mathbb{R}$, így értelmezhető a
$$- : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -x$$
művelet, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + (-x) = j(0)$ teljesül.

5. *Legyen* $\mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} |\ j(0) < x\}$. *Adott* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *esetén*

$$x \times y \triangleq]-\infty, 0] \cup \left\{q_x \times q_y |\ q_x \in x \cap \mathbb{Q}^+,\ q_y \in y \cap \mathbb{Q}^+\right\}$$

halmazra $x \times y \in \mathbb{R}^+$ *teljesül. Így értelmezhető a*

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x \times y & ha \quad x > j(0),\ y > j(0) \\ -(x \times (-y)) & ha \quad x > j(0),\ y < j(0) \\ -((-x) \times y) & ha \quad x < j(0),\ y > j(0) \\ (-x) \times (-y) & ha \quad x < j(0),\ y < j(0) \\ j(0) & ha \quad x = j(0),\ vagy\ y = j(0). \end{cases}$$

szorzás művelete, mely kommutatív, asszociatív és melynek $j(1)$ *az egységeleme.*

6. *Az* $(\mathbb{R}, +, \times, j(0), j(1), \leq)$ *hatos teljesen rendezett test.*
7. *Minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *elemre*

$$j(x + y) = j(x) + j(y), \quad j(x \times y) = j(x)j(y), \quad j(-x) = -j(x)$$

teljesül.

Jelölés. A továbbiakban a $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ beágyazást nem jelöljük, a $\times$ szorzást pedig $\cdot$ jelöli, vagy nem írjuk ki. Bevezetjük az

$$\mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} |\ 0 < x\}$$
$$\mathbb{R}_0^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x\}$$

jelöléseket.

Magyarázat. A fenti tételt most kimondjuk abban a formában is, ahol a valós számok alaptulajdonságait, kivétel nélkül, részletesen kiírjuk. Az eddigiek alapján látható módon a tétel erejét a felsorolt tulajdonságoknak eleget tevő halmaz (valós számok halmaza) és a rajta értelmezett műveletek létezése jelenti.

1.79. Tétel. *Létezik olyan* $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *nyolcas, ahol*

1. $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$;
2. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ *függvény,* $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ *függvény a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a + 0 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} & a + (-a) = 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) + c = a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a + b = b + a \end{array}$$

tulajdonságokkal;

3. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ *függvény,* $^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^{-1}$ *függvény a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \cdot 1 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & a \cdot a^{-1} = 1 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \cdot b = b \cdot a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array}$$

tulajdonságokkal;

4. $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *részhalmaz, melyre minden* $(a, b) \in \leq$ *esetén az* $a \leq b$ *jelölést használjuk és mely rendelkezik a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \leq a \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & (a \leq b\ \wedge\ b \leq a)\ \to\ a = b \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b\ \wedge\ b \leq c)\ \to\ a \leq c \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \leq b\ \vee\ b \leq a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b)\ \to\ a + c \leq b + c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b\ \wedge\ 0 \leq c)\ \to\ a \cdot c \leq b \cdot c \end{array}$$

tulajdonságokkal;

5. továbbá

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} : \ ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : \ a \leq K)) \ \rightarrow$$
$$\rightarrow \ (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : \ a \leq s) \ \wedge \ (\forall s' \in \mathbb{R} : \ ((\forall a \in A : \ a \leq s') \ \rightarrow \ s \leq s')))))$$

teljesül.

Továbbá az 1.–4. tulajdonságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *struktúrákat nevezzük rendezett testeknek, valamint ha az 5. is teljesül egy rendezett testre, akkor azt teljesen rendezett testnek nevezzük.*

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló.

Jelölés. A szorzás $\cdot$ jelét általában nem írjuk ki, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ esetén ab jelöli az $a \cdot b$ elemet. Adott $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a - b$ jelöli az $a + (-b)$ elemet. Az $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén az ab^{-1} elemre gyakran az $a : b$ vagy az $\frac{a}{b}$ jelölést használjuk. Továbbá minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a < b$ vagy $b > a$ azt jelöli, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$.

Magyarázat. A rendezett testekben (így a valós számok körében is) érvényes számolási szabályokat foglalja össze a következő tétel.

1.80. Tétel. *Legyen* $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ *rendezett test. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in K : \quad 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x \in K : \quad (-1) \cdot x = -x$
3. $\nexists x \in K : \quad 0 \cdot x = 1$
4. $\forall x, y \in K : \quad x < y \ \rightarrow -y < -x$
5. $(-1)^2 = 1$
6. $\forall x, y, z \in K : \quad (x < y \ \wedge \ z < 0) \ \rightarrow \ yz < xz$
7. $\forall x \in K : \quad 0 \leq x^2$
8. $0 < 1$
9. $\forall x, y \in K : \quad 0 < x < y \ \rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bizonyítás.
1. Legyen $x \in K$ tetszőleges. Ekkor $0 + 0 = 0$ és a disztributivitás miatt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

amihez hozzáadva a $-(0 \cdot x)$ elemet $0 \cdot x = 0$ adódik.
2. Ha $x \in K$ akkor az 1. pont alapján $0 \cdot x = 0$, ezért

$$(-1) \cdot x = 0 + (-1) \cdot x = -x + x + (-1) \cdot x = -x + 1 \cdot x + (-1) \cdot x =$$
$$= -x + (1 + (-1))x = -x + 0 \cdot x = -x + 0 = -x.$$

3. Az 1. pont nyilvánvaló következménye.
4. Ha $x, y \in K$ és $x < y$, akkor az egyenlőtlenséghez hozzáadva a $-x - y$ számot $-y < -x$ adódik.
5. A

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = (1 + (-1) + (-1)) \cdot (-1) = -1 + (-1)^2 + (-1)^2$$

egyenlet elejéhez és végéhez hozzáadva a $-(-1)^2$ számot

$$0 = -1 + (-1)^2,$$

majd az 1 számot

$$1 = (-1)^2$$

adódik.
6. Legyen $x, y, z \in K$ olyan, melyre $x < y$ és $z < 0$ teljesül. A 4. pont alapján ekkor $0 < -z$, vagyis $-zx < -zy$, amiből megint a 4. pont alapján $zy < zx$ következik.

7. Legyen $x \in K$. Ha $0 \leq x \in K$, akkor az egyenlőtlenséget megszorozva az x pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik. Ha $x \leq 0$, akkor $0 \leq -x$, amit megszorozva a $-x$ pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik.
8. A 7. pont alapján nyilvánvaló.
9. Legyen $x \in K$ olyan, melyre $0 < x$ teljesül. Ha $\frac{1}{x} \leq 0$ teljesülne, akkor ezt megszorozva az x számmal $1 \leq 0$ ellentmondás adódna, tehát $0 < \frac{1}{x}$. Ha $x, y \in K$ olyan, melyre $0 < x < y$ teljesül, akkor az $x < y$ egyenlőtlenséget megszorozva az $\frac{1}{xy}$ számmal $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ adódik.

1.81. Tétel. *Rendezett testben minden elem négyzete pozitív.*

Bizonyítás. Az 1.80 tétel 7. pontja éppen ez volt.

1.82. Definíció. Jelöljön ∞ és $-\infty$ két olyan halmazt, melyre $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ teljesül. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt *bővített valós számoknak* nevezzük, a ∞ elemet *végtelennek*, a $-\infty$ elemet pedig *mínusz végtelennek* mondjuk. A valós számok halmazán értelmezett $\leq$ reláció bővítése

$$\overline{\leq} \triangleq \leq \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{-\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$

A $+$ és $\cdot$ művelet az alábbi módon bővítjük.

- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + \infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$, továbbá legyen $\infty + \infty \triangleq \infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + (-\infty) \triangleq (-\infty) + a \triangleq -\infty$, továbbá legyen $-\infty + (-\infty) \triangleq -\infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$a \cdot \infty \triangleq \infty \cdot a \triangleq \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad a > 0, \\ -\infty & \text{ha} \quad a < 0, \end{cases}$$

  továbbá legyen $\infty \cdot \infty \triangleq (-\infty) \cdot (-\infty) \triangleq \infty$ és $(-\infty) \cdot \infty \triangleq \infty \cdot (-\infty) \triangleq -\infty$.

1.83. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x \in \mathbb{R}$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$\begin{aligned} [x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} |\ x \leq z\} \\ ]x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} |\ x < z\} \\ ]-\infty, x] &= \{z \in \mathbb{R} |\ z \leq x\} \\ ]-\infty, x[&= \{z \in \mathbb{R} |\ z < x\} \end{aligned}$$

Továbbá bevezetjük még az

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

Jelölés. A továbbiakban, ha nem okoz félreértést a bővített $\overline{\leq}$ relációra továbbra is a $\leq$ jelet használjuk, valamint a bővített $+$ és $\cdot$ műveletre sem alkalmazunk új jelölést.

1.84. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ teljesen rendezett testről azt mondjuk, hogy *arkhimédészi módon rendezett*, ha $\forall x, y \in K$ elemhez $x > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $y < n \cdot x$ teljesül.

1.85. Tétel. *Minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen K nem arkhimédészi módon rendezett test és legyen $x, y \in K$ olyan, hogy $0 < x$ és egyetlen $n \in \mathbb{N}$ számra sem teljesül, hogy $y < n \cdot x$. Ekkor az $X \triangleq \{n \cdot x |\ n \in \mathbb{N}\}$ halmaz felső korlátja y, vagyis létezik $\sup X$. Ekkor $(\sup X) - x$ nem felső korlátja az X halmaznak, tehát létezik $n \cdot x \in X$, melyre $(\sup X) - x < n \cdot x$, vagyis $\sup X < (n+1) \cdot x$, ami ellentmondás.

1.86. Tétel. *A valós számtest arkhimédészi módon rendezett test.*

Bizonyítás. Az 1.79 tétel alapján $\mathbb{R}$ teljesen rendezett test, az előző 1.85 tétel alapján pedig minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett test.

1.87. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az

$$[x] \triangleq \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{Z} |\ x < n\} - 1, & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Z}; \\ x, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

számot az x *egész részének* a

$$\{x\} \triangleq x - [x]$$

számot pedig az x *tört részének* nevezzük.

Magyarázat. Eddig láttuk, hogy létezik teljesen rendezett test, a következő tétel a teljesen rendezett testek egyértelműségéről szól.

1.88. Tétel. *Bármely két teljesen rendezett test izomorf. Vagyis ha* $(\mathbf{K}, \oplus, \ominus, \times, {}^{\ominus 1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$ *teljesen rendezett test, akkor létezik olyan* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{K}$ *bijekció, melyre* $\varphi(0) = \mathbf{0}$, $\varphi(1) = \mathbf{1}$ *és minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *elem esetén*

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y) \\ \varphi(-x) &= \ominus\varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \\ x \neq 0 \ &\Rightarrow \ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \ \wedge \ \varphi\left(x^{-1}\right) = (\varphi(x))^{\ominus 1} \\ x \leq y \ &\Leftrightarrow \ \varphi(x) \preceq \varphi(y) \end{aligned}$$

teljesül.

Megjegyzés. Ezen tétel alapján akár kezdhetnénk úgy is a valós számok bevezetését, hogy legyen $\mathbb{R}$ egy teljesen rendezett test, ha tudnánk, hogy *létezik* teljesen rendezett test.

◊

1.89. Tétel. *A* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *halmazon értelmezzük az alábbi műveleteket.*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad & ((x,y),(x',y')) \mapsto (x+x', y+y') \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad & ((x,y),(x',y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + x'y) \end{aligned}$$

1. *Ekkor* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *test.*
2. *A*

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, 0)$$

olyan injekció, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén* $j(x) + j(y) = j(x+y)$ *és* $j(x) \cdot j(y) = j(x \cdot y)$ *teljesül.*

Bizonyítás. Elemi számolással adódik.

1.90. Definíció. A $\mathbb{C}$ halmazt a *komplex számok halmazának* nevezzük, elemeit pedig *komplex számoknak.* A $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ elemet az $a + b\,\mathrm{i}$ alakban írjuk, ahol $a = \operatorname{Re} z$ a komplex szám *valós része*, $b = \operatorname{Im} z$ pedig a *képzetes része*, vagyis

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \qquad & (a,b) \mapsto a \\ \operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \qquad & (a,b) \mapsto b. \end{aligned}$$

A z *konjugáltja* $\bar{z} = a - b\,\mathrm{i}$.

1.91. Tétel. *Nem létezik olyan rendezés a komplex számtest felett, mellyel a komplex számok halmaza rendezett test lenne.*

Bizonyítás. Legyen $\leq$ olyan rendezés a komplex számtesten, mellyel az rendezett test. Ekkor a korábbi 1.81 tétel miatt minden négyzetszám pozitív.
Felhasználva, hogy az 1 és a -1 négyzetszám a komplex számok halmazában, $0 \leq -1$ és $0 \leq 1$ adódik. Az előbbi egyenlőtlenséghez hozzáadva az 1 számot $1 \leq 0$ adódik, amiből a $\leq$ reláció antiszimmetrikussága miatt a $0 = 1$ ellentmondást kapjuk.

Kiegészítés. Az alábbi tétel arra a kérdésre ad választ, hogy egy test mikor tehető rendezett testté.

1.92. Tétel. *Egy K testen pontosan akkor adható meg olyan rendezés mellyel K rendezett test lesz, ha nem létezik véges sok $x_i \in K$ elem, melyre $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -1$ teljesül.*

A fenti tétel következménye, hogy véges testen nem létezik olyan rendezés, mellyel rendezett test lenne.

$\Diamond$

1.11. Számosságok

1.93. Definíció. Legyen A és B halmaz.
- Az A és B *ekvipotens*, ha létezik $f : A \to B$ bijekció. Ezt a tényt $|A| = |B|$ jelöli.
- Az A halmaz *kisebb-egyenlő számosságú* a B halmaznál, ha $\exists X \subseteq B : \ |A| = |X|$. Ebben az esetben az $|A| \leq |B|$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *kisebb számosságú* a B halmaznál, ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$. Ennek jele $|A| < |B|$.
- Az A és B halmaz *számosság tekintetében összehasonlítható*, ha $(|A| \leq |B|) \vee (|B| \leq |A|)$ teljesül.

Magyarázat. Fontos megjegyezni, hogy jelen pillanatban $|A|$ még csak pusztán szimbólum, melyet nem definiáltunk, csak az $|A| \leq |B|$, az $|A| < |B|$ és az $|A| = |B|$ típusú kifejezéseket értelmeztük eddig.

Magyarázat. Most a halmazok számosságának két alaptétele következik, melyek biztosítják, hogy bármely két halmaz összehasonlítható a számosság tekintetében, valamint, ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.

1.94. Tétel. *Bármely két halmaz számosság tekintetében összehasonlítható.*

Bizonyítás. Legyen A, B halmaz és

$$\mathcal{F} \triangleq \{f \subseteq A \times B |\ f \text{ injektív függvény}\},$$

melyen $\leq$ jelöli a tartalmazás relációt. Először megmutatjuk, hogy létezik maximális elem az $\mathcal{F}$ halmazban. Legyen $H \subseteq \mathcal{F}$ olyan halmaz, melynek bármely két eleme összehasonlítható és legyen $f \triangleq \bigcup_{h \in H} h$. Ekkor f injektív, tehát $f \in \mathcal{F}$ és f a H egy felső korlátja. Tehát $(\mathcal{F}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz. Ezért a Zorn-lemma miatt van maximális elem az $\mathcal{F}$ halmazban, jelölje ezt g. Ekkor a g függvényre $\operatorname{Dom} g = A$ vagy $\operatorname{Ran} g = B$ teljesül, ugyanis ha $\operatorname{Dom} g \neq A$ és $\operatorname{Ran} g \neq B$, akkor létezik $a_0 \in A \setminus \operatorname{Dom} g$ és $b_0 \in B \setminus \operatorname{Ran} g$ elem és a

$$\tilde{g} : \operatorname{Dom} g \cup \{a_0\} \to \operatorname{Ran} g \cup \{b_0\} \qquad x \mapsto \begin{cases} g(x), & \text{ha} \quad x \in \operatorname{Dom} g; \\ b_0, & \text{ha} \quad x = a_0 \end{cases}$$

függvényre $g < \tilde{g}$ teljesül, vagyis g nem maximális.
Ha $\operatorname{Dom} g = A$, akkor $|A| \leq |B|$ és ha $\operatorname{Ran} g = B$, akkor $|B| \leq |A|$.

1.95. Tétel. *(Schröder–Bernstein-tétel) Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ esetén $|A| = |B|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $i : A \to B$ és $j : B \to A$ injektív leképezés.
1. Ha $E \subseteq A$ olyan, hogy $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$ teljesül, akkor a

$$\rho : A \to B \quad x \mapsto \begin{cases} i(x) & \text{ha} \quad x \in E \\ j^{-1}(x) & \text{ha} \quad x \notin E \end{cases}$$

leképezésről könnyen ellenőrizhető, hogy bijekció.
2. Legyen $\mathcal{H} \triangleq \{H \subseteq A |\ j(B \setminus i(H)) \subseteq A \setminus H\}$ és $E \triangleq \cup\mathcal{H}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$ teljesül.
2./1. $j(B \setminus i(E)) \subseteq A \setminus E$:

$$i(E) = i\left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\right) = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} i(H)$$
$$B \setminus i(E) = B \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} i(H) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} B \setminus i(H)$$
$$j(B \setminus i(E)) = j\left(\bigcap_{H \in \mathcal{H}} B \setminus i(H)\right) \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{H}} A \setminus H = A \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H = A \setminus E$$

2./2. $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$: Legyen $F \triangleq A \setminus j(B \setminus i(E))$. A 2./1. miatt $E \subseteq F$.

$$E \subseteq F \implies j(B \setminus i(F)) \subseteq j(B \setminus i(E)) = A \setminus F \implies F \in \mathcal{H}$$

Mivel $E \subseteq F$, $F \in \mathcal{H}$ és $E = \cup\mathcal{H}$, ezért $E = F$, vagyis $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$.

Megjegyzés. Bármely A, B, C halmazra,
1. $|A| = |A|$;
2. ha $|A| = |B|$, akkor $|B| = |A|$;
3. ha $|A| = |B|$ és $|B| = |C|$, akkor $|A| = |C|$;

azonban $|\cdot|$ mégsem határoz meg ekvivalenciarelációt!

◊

1.96. Tétel. *Bármely A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ teljesül.*

Bizonyítás. Az 1.34 Cantor-tétel következménye.

1.97. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz.
- Az A halmaz *véges*, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, melyre $|A| = |n|$ teljesül, ekkor az mondjuk, hogy A *egy n elemű halmaz* és az $|A| = n$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *végtelen*, ha nem véges.
- Az A halmaz *megszámlálható*, ha véges vagy $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *kontinuum számosságú*, ha $|A| = |\mathbb{R}|$.

1.98. Tétel. *Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre $|A| = n$ és $|B| = m$ teljesül, ahol $n, m \in \mathbb{N}$.*
1. *Bármely $X \subseteq A$ halmazra $|X| \leq n$.*
2. $|A \times B| = mn$
3. *Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $|A \cup B| = n + m$.*
4. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$
5. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
6. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$

Bizonyítás. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és legyen A, B olyan véges halmaz, hogy létezzen $\alpha : A \to n$ és $\beta : B \to m$ bijekció.

1. Az $|A| = n$, $X \subseteq A$, $|A| > n$ feltételezés rögtön ellentmodásra vezet.
2. Egyszerűen igazolható, hogy a

$$\varphi : A \times B \to nm \qquad (a, b) \mapsto \alpha(a)m + \beta(b)$$

leképezés bijekció.
3. A

$$\varphi : A \cup B \to n + m \qquad x \mapsto \begin{cases} \alpha(x), & \text{ha} \quad x \in A; \\ n + \beta(x), & \text{ha} \quad x \in B \end{cases}$$

leképezésről igazolható, hogy bijekció.
4. Mivel $A \cap B \subseteq A$, ezért az első pont alapján $|A \cap B| = k \leq n$. Legyen $\gamma : A \cap B \to k$ bijekció. Mivel az $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazok diszjunktak ezért az előző pont alapján $|(A \cap B) \cup (A \setminus B)| = k + |A \setminus B| = n$, amiből $|A \setminus B| = n - k$ következik. Legyen $\delta : A \setminus B \to n - k$ bijekció. A

$$\varphi : A \cup B \to n + m - k \qquad x \mapsto \begin{cases} \beta(x), & \text{ha} \quad x \in B; \\ m + \delta(x), & \text{ha} \quad x \notin B \end{cases}$$

leképezésről rövid számolással igazolható, hogy bijekció.
5. Az $n = 0$ esetben az $A = \emptyset$ teljesül, vagyis $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} = 1 = 2^0$, tehát létezik egy természetes $\mathcal{P}(A) \to 2^0$ bijekció. Tegyük fel, hogy az $n \in \mathbb{N}$ természetes számra igaz az állítás. Legyen A' olyan halmaz, melyre létezik $\alpha' : A' \to n + 1$ bijekció. Ha bevezetjük az $A = \left\{(\alpha')^{-1}(k) | k \in n\right\}$ halmazt és az $\alpha = \alpha'|_A$ függvényt, akkor azt kapjuk, hogy $\alpha : A \to n$ bijekció. Ekkor létezik $\varphi : \mathcal{P}(A) \to 2^n$ bijekció. Megmutatjuk, hogy a $C = A' \setminus A$ halmaz egyetlen elemet tartalmaz. Ugyanis ha $a, b \in C$, akkor az $\alpha'(a) = n$ és $\alpha'(b) = n$ egyenletekből az α' injektivitása miatt $a = b$ adódik. Jelölje tehát u a C halmaz egyetlen elemét. Ekkor rövid számolással ellenőrizhető, hogy a

$$\varphi' : \mathcal{P}(A') \to 2^n \qquad X \mapsto \begin{cases} \varphi(X), & \text{ha} \quad u \notin X; \\ 2^{n+1} + \varphi(X \setminus \{u\}), & \text{ha} \quad u \in X \end{cases}$$

leképezés bijekció.
6. Az $n = 0$ esetben az $A = \emptyset$ teljesül, vagyis egyetlen $A \to B$ függvény létezik, nevezetesen az, amelyik az értelmezési tartománya az üres halmaz, ezért $\mathcal{F}(A, B) = \{\emptyset\} = 1 = m^0$, tehát létezik egy természetes $\mathcal{F}(A, B) \to m^0$ bijekció. Tegyük fel, hogy az $n \in \mathbb{N}$ természetes számra igaz az állítás. Legyen A' olyan halmaz, melyre létezik $\alpha' : A' \to n + 1$ bijekció. Ha bevezetjük az $A = \left\{(\alpha')^{-1}(k) | k \in n\right\}$ halmazt és az $\alpha = \alpha'|_A$ függvényt, akkor azt kapjuk, hogy $\alpha : A \to n$ bijekció. Ekkor létezik $\varphi : \mathcal{F}(A, B) \to m^n$ bijekció. Az előbbi pont bizonyítása alapján a $C = A' \setminus A$ halmaz egyetlen elemet tartalmaz. Jelölje tehát u a C halmaz egyetlen elemét. Ekkor rövid számolással ellenőrizhető, hogy a

$$\varphi' : \mathcal{F}(A', B) \to m^{n+1} \qquad f \mapsto \varphi(f|_A) \cdot m + f(u)$$

leképezés bijekció.

1.99. Tétel. *(Megszámlálhatóan végtelen halmazok.)*

1. *Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor végtelen, ha $|\mathbb{N}| \leq |A|$ teljesül.*
3. *Két megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata megszámlálhatóan végtelen.*
4. *Megszámlálható sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója megszámlálhatóan végtelen.*
5. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
6. *Ha A végtelen halmaz és B megszámlálhatóan végtelen, akkor $|A| = |A \cup B|$.*

Bizonyítás.

1. Legyen A végtelen halmaz. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének (1.67 állítás) segítségével konstruálhatunk olyan $a : \mathbb{N} \to A$ függvényt, mely injektív, és ekkor $\operatorname{Ran} a$ az A halmaz megszámlálható részhalmaza. Legyen ugyanis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén F_n az $n \to A$ injektív függvények halmaza. Erről az $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerről megmutatható, hogy teljesíti a

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f \in F_n \exists f' \in F_{n+1} (f'|_n = f)$$

feltételt, vagyis ha $x \in A$ tetszőleges elem, akkor a

$$a' : 1 \to A \qquad 0 \mapsto x$$

függvényre $a' \in F_1$ teljesül és létezik hozzá olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, hogy $a|_1 = a'$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a|_n \in F_n$. Ezen utóbbi tulajdonságból következik a injektivitása.

2. Ha az A halmaz végtelen, akkor az első pont alapján létezik megszámlálhatóan végtelen $E \subseteq A$ részhalmaza, vagyis $|\mathbb{N}| \leq |A|$.
   Ha az A halmazra $|\mathbb{N}| \leq |A|$ teljesül, akkor indirekt módon tegyük fel, hogy $|A| = |n|$ valamely $n \in \mathbb{N}$ természetes számra. Ebből az $|\mathbb{N}| \leq |n|$ ellentmondás adódik.
3. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$C_n \triangleq \left\{ k \in \mathbb{N}^+ \middle| \ \frac{n(n-1)}{2} < k \leq \frac{n(n+1)}{2} \right\}.$$

   Ekkor $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ páronként diszjunkt halmazrendszer és $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} C_n = \mathbb{N}^+$. Továbbá a

$$\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \quad k \mapsto \left(k - \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} - k + 1 \right), \quad \text{ahol } k \in C_n$$

   leképezés bijekció.
4. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén A_n megszámlálható és $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ injektív függvény. Mivel

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times A_n) \to \bigcup_{n \in N} A_n \quad (n, a) \mapsto a$$

   szürjekció, ezért $\left| \bigcup_{n \in N} A_n \right| \leq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times A_n) \right|$. Mivel

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times A_n) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad (n, a) \mapsto (n, f_n(a))$$

   injekció, ezért $\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times A_n) \right| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
5. Az előző pontok alapján nyilvánvaló.
6. Legyen C az A megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. Ekkor létezik $\varphi : C \cup B \to C$ bijekció, ezért a

$$A \cup B \to A \qquad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \in A \setminus C; \\ \varphi(x), & \text{ha} \quad x \in C \cup B \end{cases}$$

   függvény is bijekció.

1.100. Tétel. *Legyen A, B olyan halmaz, melyre $|A|, |B| \geq 2$ teljesül. Ekkor*

$$|A \cup B| \leq |A \times B|.$$

Bizonyítás. Legyen A, B olyan halmaz, melyre $|A|, |B| \geq 2$ teljesül. Tegyük fel, hogy A és B diszjunkt halmazok, valamint legyen $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ olyan elemek, melyekre $a_1 \neq a_2$ és $b_1 \neq b_2$ teljesül. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor a

$$\varphi : A \cup B \to A \times B \qquad \begin{cases} (x, b_1), & \text{ha} \quad x \in A; \\ (a_1, x), & \text{ha} \quad x \in B \ \wedge \ x \neq b_1; \\ (a_2, b_2), & \text{ha} \quad x \in B \ \wedge \ x = b_1 \end{cases}$$

leképezés injektív, vagyis $|A \cup B| \leq |A \times B|$.

1.101. Tétel. *(Számosságaritmetika alaptétele.) Minden végtelen A halmazra $|A| = |A \times A|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $D \subseteq A$ megszámlálható halmaz és legyen

$$H \triangleq \{f : A \twoheadrightarrow A \times A |\ D \subseteq \operatorname{Dom} f,\ \operatorname{Ran} f = \operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f,\ f \text{ bijekció}\}.$$

Jelölje $\leq$ a $\subseteq$ relációt a H halmazon. Ekkor $(H, \leq)$ nem üres rendezett halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy létezik maximális elem a H halmazban. Legyen $S \subseteq H$ olyan halmaz, melynek bármely két eleme összehasonlítható, és legyen $f \triangleq \bigcup_{h \in S} h$. Ekkor $D \subseteq \operatorname{Dom} f$ és f injektív.
1./1. $\operatorname{Ran} f \subseteq \operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f$:

$$\operatorname{Ran} f = \bigcup_{h \in S} \operatorname{Ran} h = \bigcup_{h \in S} (\operatorname{Dom} h \times \operatorname{Dom} h) \subseteq \left(\bigcup_{h \in S} \operatorname{Dom} h, \bigcup_{h \in S} \operatorname{Dom} h \right) = \operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f$$

1./2. $\operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f \subseteq \operatorname{Ran} f$: Legyen $(x, y) \in \operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f$, ekkor létezik $h_1, h_2 \in S$, hogy $x \in \operatorname{Dom} h_1$ és $y \in \operatorname{Dom} h_2$. Mivel $h_1 \leq h_2$ vagy $h_2 \leq h_1$, feltehetjük, hogy $h_1 \leq h_2$. Ezért $x, y \in \operatorname{Dom} h_2$, vagyis $(x, y) \in \operatorname{Dom} h_2 \times \operatorname{Dom} h_2 = \operatorname{Ran} h_2 \subseteq \operatorname{Ran} f$.
1./3. Ezért $f \in H$ és f felső korlátja az S halmaznak. Vagyis H induktívan rendezett halmaz így a Kuratowski–Zorn-lemma miatt létezik maximális eleme a H halmaznak.
2. Legyen g a H halmaz maximális eleme és legyen $E \triangleq \operatorname{Dom} g$. Ha $|E| = |A|$, akkor kész a bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $|E| < |A|$, akkor létezik olyan $E' \subseteq A \setminus E$ halmaz melyre $|E'| = |E|$ teljesül. Tegyük fel, hogy nem létezik ilyen E' halmaz. Ez csak úgy lehet, ha $|A \setminus E| < |E|$, ekkor viszont az

$$|A| = |(A \setminus E) \cup E| \leq |(A \setminus E) \times E| \leq |E \times E| = |E| < |A|$$

ellentmondás adódik, ahol felhasználtuk az előző 1.100 állítást.
Legyen $E' \subseteq A \setminus E$ olyan halmaz melyre $|E'| = |E|$ teljesül, valamint legyen $F = E \cup E'$. Ekkor $|E| = |(E \times E') \cup (E' \times E) \cup (E' \times E')|$, vagyis létezik olyan $\tilde{g} : F \times F \to F$ bijekció, mely valódi kiterjesztése az g függvénynek, vagyis g nem maximális elem, ami ellentmondás.

1.102. Tétel. *(Kontinuum számosság.)*
1. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor $|]a, b[| = |\mathbb{R}|$.*
2. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

Bizonyítás.
1. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor a

$$\varphi :]a, b[\to]-1, 1[\qquad x \mapsto 2\frac{x-a}{b-a} - 1$$

függvény bijekció, továbbá a

$$\psi :]-1, 1[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & \text{ha} \quad x > 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0; \\ \frac{1}{x} + 1, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

függvény is bijekció. Vagyis kompozíciójuk egy bijekciót ad meg a $]a, b[$ és a $\mathbb{R}$ halmazok között.
2. Mivel mint halmaz $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ezért a számosságaritmetika alaptétele miatt $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$.

11. Axióma. (*Kontinuum hipotézis.*) Nem létezik olyan $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz, melyre $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$ teljesül.

Jelölés. A kontinuum hipotézist CH-val jelöljük, az angol *continuum hypothesis* kifejezés után. Ez az axióma fontos szerepet játszik az analízisben, ezért elfogadjuk axiómaként.

Kiegészítés. Az kiválasztási axióma és a kontinuum hipotézis független az 1–8. axiómától. A kontinuum hipotézis analízisbeli fontos szerepének illusztrálására megemlítünk néhány tételt.

1.103. Tétel. *(Sierpiński tétele.) A ZFC axiómarendszerben a CH axiómából következik, hogy létezik olyan $S \subseteq \mathbb{R}$ kontinuum számosságú halmaz, hogy bármely $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ folytonos függvényre $f(S) \neq [0,1]$*

1.104. Tétel. *(Berarducci–Dikranjan tétele.) A ZFC axiómarendszerben a CH axiómából következik, hogy létezik olyan $M \subseteq \mathbb{R}$ (*mágikus*) halmaz, hogy bármely sehol sem konstans, folytonos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre*

$$f(M) \subseteq g(M) \;\Rightarrow\; f = g.$$

◊

12. Axióma. (*általánosított kontinuum hipotézis.*) Ha X végtelen halmaz, akkor nem létezik olyan A halmaz, melyre $|X| < |A| < |\mathcal{P}(X)|$.

Jelölés. Az általánosított kontinuum hipotézist általában a GCH szimbólummal jelölik, az angol *generalized continuum hypothesis* kifejezés után. Ez az axióma fontos szerepet játszik az analízisben, különösen a mértékelméletben, ezért elfogadjuk axiómaként.

Kiegészítés. Imert, hogy ha ZFC axiómarendszer ellentmondásmentes, akkor a $\mathrm{ZFC} \cup \{CH\}$ és a $\mathrm{ZFC} \cup \{GCH\}$, valamint a $\mathrm{ZFC} \cup \{\neg CH\}$ és a $\mathrm{ZFC} \cup \{\neg GCH\}$ axiómarendszerek is ellentmondásmentesek lesznek.

◊

Kiegészítés. A kiválasztási axióma elfogadását segíti az alábbi tétel.

1.105. Tétel. *A ZF keretei között az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Kiválasztási axióma.*
2. *Ha $(A_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall i \in I (A_i \neq \emptyset)$, akkor $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*
3. *Minden A halmazhoz létezik olyan $\leq$ reláció, mellyel $(A, \leq)$ jólrendezett halmaz.*
4. *Kuratowski–Zorn-lemma.*
5. *Tetszőleges A, B halmazokra $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$.*
6. *Minden végtelen A halmazra $|A| = |A \times A|$.*
7. *Minden függvénynek létezik jobbinverze.*
8. *Minden vektortérben van bázis.*

◊

Magyarázat. Végül összefoglaljuk az általunk használt ZFC-axiómákat.

Megjegyzés. *Az analízis alapaxiómáinak összefoglalása.*

$$\boxed{\begin{array}{rl}
\mathrm{ZF} & \left\{\begin{array}{c}
\exists x \forall u (u \notin x) \\
\forall x \forall y (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y) \\
\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)) \\
\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow u \subseteq x) \\
\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (u \in v \wedge v \in x)) \\
\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)) \\
\forall p \in F_{\in} \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow ((z \in x) \wedge p)) \\
\forall x \exists y ((y \in x) \to \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))
\end{array}\right. \\
\mathrm{AC} & \left\{\; \forall x \exists f ((f \text{ függvény}) \wedge (\mathrm{Dom}\, f = x) \wedge (\forall u \in x (u \neq \emptyset \to f(u) \in u))) \right. \\
\mathrm{GCH} & \left\{\; \forall x (|x| \geq |\mathbb{N}| \to \neg \exists y : (|x| < |y| < |\mathcal{P}(x)|)) \right.
\end{array}}$$

◊

2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Algebrai tulajdonságok

2.1. Tétel. *(Bernoulli-egyenlőtlenség.) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \dots x_n \in [-1, \infty[$ számra, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$ teljesül, akkor*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \leq x$ esetén

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás. Teljes indukciót használva tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, és legyen $x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, \infty[$ olyan, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$. Ekkor az indukciós feltételt kihasználva

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) = (1+x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq (1+x_{n+1})\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 1+\sum_{i=1}^{n+1} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1} \geq 1+\sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $n + 1$ esetén is igaz az állítás.

Kiegészítés. A Bernoulli-egyenlőtlenség speciális esetének egyfajta megfordítása is igaz.

2.2. Tétel. *Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} : \ 1 + nx \leq (1 + x)^n\right) \quad \leftrightarrow \quad -1 \leq x.$$

◊

2.3. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik egyetlen olyan $y \in \mathbb{R}_0^+$, melyre $y^n = x$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $H = \{z \in \mathbb{R}^+ | \ z^n < x\}$. Először megmutatjuk, hogy a H halmaz nem üres. Az $n = 1$ esetben nyilván $\frac{x}{2} \in H$, továbbá, ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén a H halmaz nem üres, vagyis létezik valamilyen $z \in H$ eleme, akkor a $v = \min\{z, 1\}$ számra az

$$v^{n+1} \leq v \cdot z^n < 1 \cdot x$$

egyenlőtlenségből $v \in H$ adódik.
Most igazoljuk, hogy a H halmaz felülről korlátos. Ha $z \in E$, akkor $z^n < x$ és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$z^n = (1 + (z - 1))^n \geq 1 + n(z - 1),$$

vagyis

$$1 + n(z - 1) < x \quad \Rightarrow \quad z < \frac{x - 1}{n} + 1.$$

Legyen $y = \sup H$, amire az eddigiek alapján $y \in \mathbb{R}^+$ teljesül. Oly módon mutatjuk meg, hogy $y^n \leq x$ teljesül, hogy igazoljuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra fennáll az $y^n - x < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ehhez legyen $\varepsilon_1 \in]0, y[$ tetszőleges szám. Ekkor $y' = y - \varepsilon_1$ kisebb mint a H halmaz szuprémuma, ezért létezik olyan $z \in H$, melyre $y' < z$ teljesül. A következő lépésben felhasználjuk a teljes indukcióval könnyen igazolható

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ : \ \alpha < \beta \ \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}^+ : \alpha^n < \beta^n$$

egyenlőtlenséget és a Bernoulli-egyenlőtlenséget.

$$x > z^n > (y')^n = (y - \varepsilon_1)^n = y^n\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{y}\right) \geq y^n\left(1 - n\frac{\varepsilon_1}{y}\right) = y^n - ny^{n-1}\varepsilon_1$$

Ebből az $x > y^n - ny^{n-1}\varepsilon_1$ egyenlőtlenséget tovább alakítva

$$y^n - x < ny^{n-1}\varepsilon_1$$

következik. Vagyis ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $0 < \varepsilon_1 < \min\left\{y, \dfrac{\varepsilon}{ny^{n-1}}\right\}$, akkor az előző egyenlőtlenségből

$$y^n - x < \varepsilon$$

következik.
Az előzőhöz hasonlóan úgy mutatjuk meg, hogy $x \leq y^n$ teljesül, hogy igazoljuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra fennáll az $x - y^n \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ehhez legyen $\varepsilon_1 \in \,]0, y[$ tetszőleges szám. Ekkor $y' = y + \varepsilon_1$ nagyobb mint a H halmaz szuprémuma, ezért minden $z \in H$ esetén $z < y'$ teljesül. A következő lépésben felhasználjuk a teljes indukcióval könnyen igazolható

$$\forall \alpha \in [0,1] : \forall n \in \mathbb{N}^+ : (1+\alpha)^n \leq 1 + (2^n - 1)\alpha$$

egyenlőtlenséget.

$$x \leq (y')^n = (y+\varepsilon_1)^n = y^n\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{y}\right) \leq y^n\left(1 + (2^n-1)\frac{\varepsilon_1}{y}\right) = y^n + (2^n-1)y^{n-1}\varepsilon_1$$

Ebből az $x \leq y^n + (2^n-1)y^{n-1}\varepsilon_1$ egyenlőtlenséget tovább alakítva

$$x - y^n < (2^n-1)y^{n-1}\varepsilon_1$$

következik. Vagyis ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $0 < \varepsilon_1 < \min\left\{y, \dfrac{\varepsilon}{(2^n-1)y^{n-1}}\right\}$, akkor az előző egyenlőtlenségből

$$x - y^n \leq \varepsilon$$

következik.
Végül az unicitást igazoljuk. Ha $0 < y_1 < y_2$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $y_1^n < y_2^n$, vagyis nem létezhet két különböző pozitív valós szám, melyek n-edik hatványa megegyezik.

2.4. Definíció. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén azt a jól meghatározott $y \in \mathbb{R}_0^+$ számot, melyre $y^n = x$ teljesül *x n-edik gyökének* nevezzük, ennek jele $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$.

2.5. Tétel. *Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

Bizonyítás. Az $\alpha = \sqrt[n]{x^m}$ és a $\beta = (\sqrt[n]{x})^m$ számokra $\alpha^n = x^m = \beta^n$ teljesül. Ezen számok n-edik gyöke létezik és egyértelmű, ezért $\alpha = \beta$.

2.6. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^+$ *számnak a $q \in \mathbb{Q}$ kitevőjő hatványát* az alábbi módon értelmezzük.

$$x^q \triangleq \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & \text{ha} \quad q > 0,\ q = \frac{m}{n}; \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ 1, & \text{ha} \quad q = 0; \\ \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^m}, & \text{ha} \quad q < 0,\ q = -\frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Továbbá $q > 0$ esetén legyen $0^q \triangleq 0$ és $0^0 \triangleq 1$.

2.7. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén.*

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{pq}, \quad \frac{1}{x^p} = x^{-p}.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságaiból egyszerűen adódik.

2.8. Definíció. Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa*

$$n! \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \prod_{i=1}^{n} i, & \text{ha} \quad n > 0. \end{cases}$$

Az $n, k \in \mathbb{N}$ számokra definiáljuk az n *alatt a* k számot a

$$\binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha} \quad k \leq n \\ 0 & \text{ha} \quad k > n \end{cases}$$

képlettel.

2.9. Tétel. *(Binomiális tétel.) Minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás. Az $n = 0$ esetben nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Ekkor

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}\end{aligned}$$

adódik a könnyen igazolható

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

formula segítségével.

2.10. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ test feletti *abszolút értéknek* nevezünk minden olyan

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto |x|$$

függvényt melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x \in K: \ (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0)$
- $\forall x, y \in K: \ |xy| = |x| \cdot |y|$
- $\forall x, y \in K: \ |x + y| \leq |x| + |y|$

Magyarázat. Az alábbi tétel mutatja, hogy minden test felett létezik egy kitüntetett abszolútérték függvény.

2.11. Tétel. *Legyen $(K, +, \cdot)$ test. Ekkor*

$$|\cdot|_\infty : K \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{ha} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textit{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

abszolút érték.

Bizonyítás. Az abszolútérték definíciója alapján nyilvánvaló.

2.12. Definíció. A fent definiált $|\cdot|_\infty$ függvényt *improprius abszolút értéknek* nevezzük a $(K, +, \cdot)$ test felett.

2.13. Tétel. *Az*

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \quad z \mapsto \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

függvény abszolút érték, melynek a megszorítása a valós illetve racionális számok halmazára szintén abszolút érték.

Bizonyítás. Ha $z = 0$, akkor nyilván $|z| = 0$, valamint ha $|z| = 0$, akkor $\mathrm{Re}\, z = 0$ és $\mathrm{Im}\, z = 0$, vagyis $z = 0$. Ha $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ és $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$, ahol $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, akkor

$$|z_1 z_2|^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2 ,$$

valamint

$$|z_1 + z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \le \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

teljesül, ahol a második résznél használtuk a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij egyenlőtlenséget a

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

lépésnél.

Jelölés. A továbbiakban minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $|z|$ a z szám fenti abszolút értékét fogja jelenteni.

Kiegészítés. Az alábbi állítás egyszerűen következik a természetes számok prímfelbontásának egyértelműségi tételéből.

2.14. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ szám egyértelműen felírható*

$$q = c \prod_{p \in P} p^{\nu_p(q)}$$

alakban, ahol $c \in \{-1, 1\}$, P a prímszámok halmaza, minden $p \in P$ esetén $\nu_p(q) \in \mathbb{Z}$, valamint a $\{p \in P \mid \nu_p(q) \neq 0\}$ halmaz véges. (Tehát valójában csak véges sok tag szorzatáról van szó.)

A racionális számtest feletti abszolútérték-függvényeket jellemzi az alábbi állítás.

2.15. Tétel. *(Osztrovszkij-tétel.) Legyen $\omega : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ az improprius abszolút értéktől különböző abszolút érték. Ekkor az alábbi két állítás közül valamelyik teljesül.*

- *Létezik olyan $\alpha \in]0, 1]$ szám, hogy minden $q \in \mathbb{Q}$ elemre $\omega(q) = |q|^\alpha$.*
- *Létezik olyan $p \in P$ és $\beta \in]0, 1[$ szám, hogy minden $q \in \mathbb{Q}$ elemre $\omega(q) = \beta^{\nu_p(q)}$.*

Valamint bármely $\alpha \in]0, 1]$, $\beta \in]0, 1[$ és $p \in P$ szám esetén

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \qquad q \mapsto |q|^\alpha$$
$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \qquad q \mapsto \beta^{\nu_p(q)}$$

abszolút érték, de nem improprius abszolútérték-függvények.

A valós és komplex számtest feletti abszolút értékekről szól a következő tétel.

2.16. Tétel. *(Osztrovszkij-tétel.) Legyen $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ (vagy $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$) nem improprius abszolútérték-függvény. Ekkor létezik olyan $\alpha \in]0, 1]$ szám, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ (vagy $z \in \mathbb{R}$) elemre $\omega(z) = |z|^\alpha$ teljesül. Valamint minden $\alpha \in]0, 1]$ esetén*

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \qquad z \mapsto |z|^\alpha$$

nem improprius abszolút érték függvény.

◊

2.17. Tétel. *(Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Bizonyítás. 1. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás.
2. Ha $n = 2$, akkor a bizonyítandó

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséggel. Azt pedig az 1.81 tétel alapján tudjuk, hogy rendezett testekben a négyzetszámok pozitív elemek.
3. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, akkor a $2n$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1, \dots, 2n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor felhasználva, hogy az n és a 2 számokra igaz az egyenlőtlenség

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} x_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{n+k}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}}\right) \geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}}} = \sqrt[2n]{\prod_{k=1}^{2n} x_k}$$

adódik.
4. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}^+$, $n > 2$ számra igaz az állítás, akkor az $n - 1$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1, \dots, n-1\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$ és legyen

$$x_n = \sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} x_k}.$$

Ekkor az $x_1, \dots, x_n$ számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség átrendezéséből adódik az állítás.

Jelölés. A továbbiakban $\mathbb{K}$ a valós, illetve a komplex számtestet jelöli, valamint bevezetjük még a

$$\mathbb{T} \triangleq \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$$

jelölést.

2.2. Függvények összege, szorzata

2.18. Definíció. Legyen A halmaz, $+ : A \times A \to A$ művelet, $a \in A$ és $U, V \subseteq A$. Ekkor definiáljuk az alábbi jelöléseket.

$$U + V := \{u + v \in A |\ u \in U,\ v \in V\}$$
$$a + V := \{a + v \in A |\ v \in V\}$$
$$U + a := \{u + a \in A |\ u \in U\}$$

Ennek a segítségével értelmezhetők az alábbi *komplexus műveletek.*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & (U, V) \mapsto U + V \\ \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & V \mapsto a + V \\ \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & U \mapsto U + a \end{array}$$

2.19. Definíció. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

– Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ és $c \in \mathbb{K}$, akkor definiáljuk a *függvények összegét*, *szozatát*, *számszorosát* és *abszolút értékét* az alábbi módon.

$$\begin{aligned} f+g &: A \to \mathbb{K} & a &\mapsto f(a)+g(a) \\ fg &: A \to \mathbb{K} & a &\mapsto f(a)g(a) \\ cf &: A \to \mathbb{K} & a &\mapsto cf(a) \\ |f| &: A \to \mathbb{K} & a &\mapsto |f(a)| \end{aligned}$$

– értelmezzük az összeadás, szorzás, számmal való szorzás és abszolútérték képzés műveletét a függvények terén az alábbi módon.

$$\begin{aligned} + &: \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \times \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f,g) &\mapsto f+g \\ \times &: \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \times \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f,g) &\mapsto fg \\ \cdot &: \mathbb{K} \times \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (c,f) &\mapsto cf \\ |\cdot| &: \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f) &\mapsto |f| \end{aligned}$$

Az így bevezetett függvényműveleteket nevezzük *pontonkénti függvényműveleteknek.*

– Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $f_i \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor az $(f_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ *függvényrendszer alsó*, illetve *felső burkolóját* az alábbi képlettel definiáljuk.

$$\begin{aligned} \sup(f_1,\dots,f_n) &: A \to \mathbb{R} & a &\mapsto \sup(f_1(a),\dots,f_n(a)) \\ \inf(f_1,\dots,f_n) &: A \to \mathbb{R} & a &\mapsto \inf(f_1(a),\dots,f_n(a)) \end{aligned}$$

– Az $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *függvény pozitív*, illetve *negatív részét* az alábbi képletek definiálják.

$$\begin{aligned} f_+ &: A \to \mathbb{R} & a &\mapsto \sup(f(a), 0) \\ f_- &: A \to \mathbb{R} & a &\mapsto -\inf(f(a), 0) \end{aligned}$$

2.20. Tétel. *Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.*

1. *Ha $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor*

$$f = f_+ - f_- \qquad |f| = f_+ + f_- \qquad f_+ f_- = 0 \tag{2.1}$$

teljesül.

2. *Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor*

$$\sup(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \qquad \inf(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.
1. Legyen $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és legyen $a \in A$ tetszőleges.
Ha $f(a) > 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = f(a)$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a (2.1) egyenletek.
Ha $f(a) = 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a (2.1) egyenletek.
Ha $f(a) < 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = -f(a)$, vagyis ebben az esetben is teljesülnek a (2.1) egyenletek.
2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az $a < b$, $a = b$ és $a > b$ eseteket külön megvizsgálva igazolható egyszerűen a

$$\sup(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \qquad \inf(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

azonosság. Legyen $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor elég minden $x \in A$ elemre az $a = f(x)$ és a $b = g(x)$ választással alkalmazni az előző azonosságot a tétel bizonyításához.

2.21. Tétel. *Ha A tetszőleges nem üres halmaz, akkor az $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ hármas vektortér $\mathbb{K}$ felett, valamint $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ algebra $\mathbb{K}$ felett.*

Bizonyítás. Elemi számolással egyszerűen ellenőrizhető.

2.22. Definíció. Adott $(a_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ esetén a

$$p : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

függvényt *polinomnak* nevezzük, az a_i paramétereket pedig a polinom *együtthatóinak*. Ha $a_n \neq 0$, akkor p *n-ed fokú polinom*, melynek *főegyütthatója* a_n. Az $x_0 \in \mathbb{K}$ számot a p *polinom gyökének* nevezzük, ha $p(x_0) = 0$ teljesül.

2.23. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú polinomok halmazát. Ekkor $\mathcal{P}_n$ vektortér a pontonkénti függvényműveletekkel. Továbbá a $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ polinomhalmaz algebra a pontonkénti függvényműveletekkel.*

Bizonyítás. Elemi számolással egyszerűen ellenőrizhető.

3. Topológiai tulajdonságok

3.1. Nyílt, zárt és korlátos halmazok

3.1. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{K}$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K} \mid |x-y| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

3.2. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz
- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $\mathbb{K} \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

3.3. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció közvetlen következménye. A második állításhoz vegyünk $A_1, \dots, A_n$ korlátos halmazokat, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1,\dots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \dots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén $R_i = r_i + |x_i - x_1|$. Ekkor minden i számra $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül az abszolútértékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \dots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

3.4. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{K}$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ számra $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R = r - |x-y|$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z \in B_R(y)$, akkor $|z-y| < R = r - |x-y|$, vagyis $|x-y| + |y-z| < r$, amiből pedig $|x-z| < r$ adódik, vagyis $z \in B_r(x)$.

3.5. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.)*
1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i = 1, \dots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min\{r_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

3.6. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.)*
1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén $\mathbb{K} \setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{K} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{K} \setminus Z_i)$$

azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.
3. Legyen $(Z_i)_{i\in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén $\mathbb{K} \setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{K} \setminus \bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{K} \setminus Z_i)$$

azonosság miatt $\bigcap_{i\in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i\in I} Z_i$ halmaz zárt.

3.7. Tétel. *Legyen $Z, U \subseteq \mathbb{K}$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz és $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (\mathbb{K} \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (\mathbb{K} \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

3.8. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge\ B_r(x) \cap (\mathbb{K} \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

3.9. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

3.10. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K} |\ \exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K} |\ \forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

3.11. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz esetén*
1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*

2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet* X *tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza* X*-et.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in \mathbb{K} \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq \mathbb{K} \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - |y - z| > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

3.12. Tétel. *Tetszőleges* $X \subseteq \mathbb{K}$ *halmaz esetén*
1. *az* X *halmaz pontosan akkor nyílt, ha* $X = \operatorname{Int} X$*;*
2. *az* X *halmaz pontosan akkor zárt, ha* $X = \overline{X}$*.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

3.13. Tétel. *Az* $X \subseteq \mathbb{K}$ *halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz és legyen $x \in \mathbb{K}$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

3.14. Tétel. *Legyen* $X \subseteq \mathbb{R}$ *korlátos halmaz.*
1. *Ha az* X *halmaz zárt, akkor* $\inf X, \sup X \in X$*.*
2. *Ha az* X *halmaz nyílt, akkor* $\inf X, \sup X \notin X$*.*

Bizonyítás. 1. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos zárt halmaz. Ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $\inf X + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x \in X$, melyre $x < \inf X + r$ teljesül, valamint $\sup X - r$ nem a legkisebb felső korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x' \in X$, melyre $\sup X - r < x'$ teljesül. Tehát minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(\inf X) \cap X \neq \emptyset$ és $B_r(\sup X) \cap X \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy $\inf X, \sup X \in \overline{X} = X$.
2. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos nyílt halmaz. Ha $\inf X \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(\inf X) \subseteq X$ teljesül, vagyis $\inf X$ nem alsó korlátja az X halmaznak. A $\sup X$ számra hasonló ellentmondást kapunk a $\sup X \in X$ feltételezésből.

3.15. Definíció. Adott $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ halmazok esetén azt mondjuk, hogy az X *halmaz sűrű az* Y *halmazban*, ha $\overline{X} = Y$ teljesül, valamint, hogy az X *halmaz sűrű*, ha X sűrű a $\mathbb{K}$ halmazban.

3.16. Tétel. *(A racionális és az irracionális számok sűrűn vannak.)*

1. *A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*
2. *Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*

Bizonyítás.
1. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ tartalmazáshoz azt kell megmutatni, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $q \in \mathbb{Q}$ szám melyre $q \in B_r(x)$ teljesül, vagyis $q \in]x-r, x+r[$. Ehhez vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az $\mathbb{R}$ arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < 2Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + N(x-r) < N(x+r)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq N(x-r) < n+1$ teljesül. Ekkor $n \leq N(x-r)$ miatt

$$n + 1 \leq N(x-r) + 1 < N(x-r) + 2Nr = N(x+r),$$

ezért

$$N(x-r) < n + 1 < N(x+r),$$

vagyis a $q_x = \dfrac{n+1}{N} \in \mathbb{Q}$ számra $q_x \in B_r(x)$ teljesül.
2. Ebben a részben használjuk az oszthatósági szabályok segítségével könnyen igazolható $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ formulát. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az $\mathbb{R}$ arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < \sqrt{2}Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + \frac{\sqrt{2}N}{2}(x-r) < \frac{\sqrt{2}N}{2}(x+r)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq \dfrac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} < n+1$ teljesül. Ekkor $n \leq \dfrac{\sqrt{2}N(x-r)}{2}$ miatt

$$n + 1 \leq \frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} + 1 < \frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} + \sqrt{2}Nr = \frac{\sqrt{2}N(x+r)}{2},$$

ezért

$$\frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} < n + 1 < \frac{\sqrt{2}N(x+r)}{2},$$

vagyis a $p_x = \dfrac{2(n+1)}{\sqrt{2}N} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{n+1}{N}$ számra $p_x \notin \mathbb{Q}$ és $p_x \in B_r(x)$ teljesül.

3.17. Tétel. *Legyen $S \subseteq \mathbb{R}$ sűrű részhalmaza a valós számok halmazának. Ekkor az $S + \mathrm{i}\, S$ halmaz sűrű a $\mathbb{C}$ halmazban.*

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $q_1, q_2 \in S$, melyre $|(\operatorname{Re} z) - q_1| < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ és $|(\operatorname{Im} z) - q_2| < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ teljesül. Ekkor a $q = q_1 + \mathrm{i}\, q_2 \in S + \mathrm{i}\, S$ számra

$$|z - q| = \sqrt{((\operatorname{Re} z) - q_1)^2 + ((\operatorname{Im} z) - q_2)^2} < \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = r$$

teljesül.

3.18. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Ha $i, j \in I$, akkor létezik olyan $k \in I$, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ teljesül, tehát

$$\inf(A_j) \leq \inf(A_k) \leq \sup(A_k) \leq \sup(A_i).$$

Ezek alapján a $\{\sup(A_i)|\ i \in I\}$ halmaz alulról korlátos, vagyis létezik a $x = \inf\{\sup(A_i)|\ i \in I\} \in \mathbb{R}$ elem. Megmutatjuk, hogy $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Ehhez elég azt igazolni, hogy minden $i \in I$ esetén $x \in \overline{A_i}$.

Legyen $i \in I$ és $r \in \mathbb{R}^+$, belátjuk, hogy $B_r(x) \cap A_i \neq \emptyset$. Mivel $x + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja a $\{\sup A_i|\ i \in I\}$ halmaznak, ezért létezik olyan $j \in I$, melyre $\sup A_j < x + r$. Legyen $k \in I$ olyan, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor nyilván $\sup A_k \leq \sup A_j < x+r$, továbbá $\sup A_k - r$ nem a legkisebb felső korlátja az A_k halmaznak, ezért létezik olyan $y \in A_k$, melyre $\sup A_k - r < y$. Az utolsó egyenlőtlenség miatt $x - r < y$, $\sup A_k \leq \sup A_j < x + r$ miatt $y < x + r$, valamint $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ miatt $y \in A_i$. Vagyis $y \in B_r(x) \cap A_i$.

Magyarázat. érdemes külön kiemelni a fenti állítás egy következményét.

3.19. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_{i+1} \subseteq A_i$. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az állítás az előzőek közvetlen következménye.

3.2. Kompakt halmazok

3.20. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *(be)fedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, melyre $\forall i \in I : A_i \subseteq \mathbb{K}$ és $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ teljesül. Az $(A_i)_{i\in I}$ befedés *részbefedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I'}$ rendszert, melyre $I' \subseteq I$ és $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül.

3.21. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i halmaz nyílt.

3.22. Tétel. *(Borel–Lebesgue-tétel valós számokra.) Az $\mathbb{R}$ halmaz valamely részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Megmutatjuk, hogy C korlátos. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_n(0)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $C \subseteq \bigcup_{n\in I} B_n(0)$. Ekkor az $r = \max_{n\in I}(n)$ számra $C \subseteq B_r(0)$ teljesül. Most igazoljuk, hogy C zárt. Tegyük fel, hogy C nem zárt, ami azt jelenti, hogy a C komplementere nem nyílt. Legyen $z \in \mathbb{R} \setminus C$ olyan pont, melyre minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(z) \nsubseteq \mathbb{R} \setminus C$, vagyis $B_r(z) \cap C \neq \emptyset$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra legyen $U_n = \mathbb{R} \setminus \overline{B_{\frac{1}{n}}(z)}$,

mely nyílt halmaz. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} \setminus \{z\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} U_n$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $C \subseteq \bigcup_{n \in I} U_n$. Ekkor az $m = \max_{n \in I}(n)$ számra $C \subseteq U_m$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\overline{B_{\frac{1}{m}}(z)} \cap C = \emptyset$, vagyis ha $0 < r < \frac{1}{m}$, akkor $B_r(z) \subseteq \overline{B_{\frac{1}{m}}(z)}$, tehát $B_r(z) \cap C = \emptyset$, ami pedig ellentmondás.
Most tegyük fel, hogy $C \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz, valamint az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer a C halmaz nyílt fedése, vagyis minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz és $C \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ teljesül. Jelölje J az I halmaz nem üres, véges részhalmazainak a halmazát, vagyis $J = \{j \subseteq I |\ j \neq \emptyset,\ j \text{ véges}\}$, valamint minden $j \in J$ esetén legyen $B_j = C \setminus \bigcup_{i \in j} A_i$. Ekkor minden $j \in J$ esetén B_j korlátos zárt halmaz, valamint minden $j_1, j_2 \in J$ elemhez létezik olyan $j' \in J$, melyre $B_{j'} \subseteq B_{j_1} \cap B_{j_2}$ teljesül. Ha egyik B_j halmaz sem lenne üres, akkor a Cantor-féle közösrész-tétel alapján

$$\emptyset \neq \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} \left(C \setminus \bigcup_{i \in j} A_i \right) = C \setminus \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in j} A_i = C \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$$

teljesülne, ami ellentmondana annak, hogy az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer a C halmaz fedése. Tehát létezik olyan $j \in J$, melyre $B_j = \emptyset$. Ez viszont azt jelenti, hogy $C \subseteq \bigcup_{i \in j} A_i$, vagyis a C halmaznak létezik véges fedése.

Megjegyzés. A Cantor-féle közösrész-tétel ezek után úgy is megfogalmazható, hogy $\mathbb{R}$ egymásba ágyazott, nem üres, kompakt részhalmazainak a metszete nem üres.

$\Diamond$

4. Sorozatok

4.1. A határérték és tulajdonágai

4.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak*, az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvényeket *komplex számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat értékeire az $a_n \triangleq a(n)$ jelölést használjuk.

4.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)

- Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{K}$ szám az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *határértéke*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to \varepsilon < a_n).$$
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to -\varepsilon > a_n).$$
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

4.3. Tétel. *Ha $x, y \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat határértéke, akkor $x = y$.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{K}$ és tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < \dfrac{|x-y|}{2}$ és $|a_n - y| < \dfrac{|x-y|}{2}$. Amiből az
$$|x - y| = |x - a_n + a_n - y| \leq |x - a_n| + |a_n - y| < |x - y|$$
ellentmondás adódik.
Ha $x \in \mathbb{K}$ és $y = \infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n > x + 1$, ami ellentmondás. Valamint hasonlóan, ha $x \in \mathbb{K}$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n < x - 1$, ami ellentmondás. Végül ha $x = \infty$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n < 0$ és $a_n > 0$, ami ellentmondás.

4.4. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

4.5. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha a $\operatorname{Re} \circ a$ és az $\operatorname{Im} \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens és ekkor*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(a_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(a_n).$$

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathbb{C}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ konvergens sorozat határértéke és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. A $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ és $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ egyenlőtelnségek miatt ez azt jelenti, hogy minden $n > N$ számra $|\operatorname{Re}(a_n) - \operatorname{Re} A| < \varepsilon$ és $|\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im} A| < \varepsilon$ teljesül.

Visszafele úgy bizonyítunk, hogy képezzük az $\alpha = \lim(\operatorname{Re} \circ a)$ és $\beta = \lim(\operatorname{Im} \circ a)$ határértékekből az $A = \alpha + \mathrm{i}\beta$ számot és megmutatjuk, hogy $\lim a = A$ teljesül. Bármely tetszőlegesen választott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N_1$ esetén $|\operatorname{Re} a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ és $n > N_2$ esetén $|\operatorname{Im} a_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Ekkor minden $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ természetes számra
$$|a_n - A| = \sqrt{|\operatorname{Re} a_n - \alpha|^2 + |\operatorname{Im} a_n - \beta|^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

4.6. Definíció.

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

4.7. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat és legyen $A = \lim a$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{N} \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

4.8. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n > N$ számra $\left|a_{\sigma(n)} - \lim a\right| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

4.9. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton növő korlátos sorozat és legyen $A = \sup \operatorname{Ran} a$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az $A - \varepsilon < A$ egyenlőtlenség miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $A - \varepsilon < a_N$. Mivel az a sorozat monoton növő, így minden $n > N$ természetes számra $A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A < A + \varepsilon$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, tehát $\lim a = \sup \operatorname{Ran} a$. Monoton csökkenő sorozatra teljesen hasonló a bizonyítás.

4.10. Tétel. *Zérussorozat és korlátos sorozat szorzata zérussorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos sorozat, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ zérussorozat és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Ekkor minden $n > N$ számra

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < K \cdot |b_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n = 0$.

4.11. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat és $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = \lambda(\lim a)$.*
3. *Az ab sorozat konvergens és $\lim ab = (\lim a)(\lim b)$.*
4. *Az $\overline{a}$ sorozat konvergens és $\lim \overline{a} = \overline{\lim a}$.*
5. *Az $|a|$ sorozat konvergens és $\lim |a| = |\lim a|$.*
6. *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \neq 0$ és $\lim a \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{a}$ sorozat konvergens és $\lim \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\lim a}$.*

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, az $A = \lim a$ és $B = \lim b$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.

1. A $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

és minden $n > N_b$ számra $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $\lambda = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ekkor $n > N_a$ számra

$$|\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda| \cdot |a_n - A| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

3. Mivel az a sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Ha $B = 0$, akkor az előző állítás szerint egy korlátos és egy zérussorozat szorzata zérussorozat. Tehát elég a $B \neq 0$ esetet vizsgálni. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$ és legyen $N_b \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_b$ esetén $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$\left|\overline{a_n} - \overline{A}\right| = \left|\overline{(a_n - A)}\right| = |a_n - A| < \varepsilon.$$

5. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon.$$

6. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ és legyen $\lim a = A \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ esetén $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$. Ekkor minden $n > N_1$ számra $|a_n| > \frac{|A|}{2}$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon |A|^2}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_1, N_a\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|a_n - A|}{|a_n| \cdot |A|} < \frac{|a_n - A|}{\frac{|A|}{2} \cdot |A|} < \frac{2}{|A|^2} \cdot \frac{\varepsilon |A|^2}{2} = \varepsilon.$$

4.12. Tétel. *A konvergens valós- illetve komplex számsorozatok algebrát alkotnak.*

Bizonyítás. A konvergens sorozatok halmaza zárt az összeadás, a szorzás és a számmal való szorzás műveletére az előző tétel alapján, valamint a sorozatok összeadása és szorzása teljesíti az algebránál megkövetelt tulajdonságokat.

4.13. Tétel. *Ha az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *sorozatra* $\lim |a| = 0$ *teljesül, akkor* $\lim a = 0$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor a $\lim |a| = 0$ tulajdonság miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$|a| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a $\lim a = 0$ tulajdonságot fejezi ki.

4.14. Tétel. *Ha az* $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *konvergens sorozatra minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \leq b_n$, *akkor* $\lim a \leq \lim b$.

Bizonyítás. Legyen $A = \lim a$, $B = \lim b$ és tegyük fel, hogy $B < A$. Az $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ és $|b_n - B| < \varepsilon$. Vagyis $n > N$ esetén az $A - \varepsilon < a_n$ egyenlőtlenség miatt $\dfrac{A+B}{2} < a_n$, és a $b_n < B + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $b_n < \dfrac{A+B}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $a_n \leq b_n$.

4.15. Tétel. *(Rendőr-elv.) Legyen $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim a = \lim c = x$ teljesül. Ekkor b konvergens és $\lim b = x$.*

Bizonyítás. Bevezetve az $\alpha = b - a$ és a $\beta = c - a$ sorozatok, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ teljesül. A $\lim \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $-\varepsilon < \beta_n < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha_n| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim \alpha = 0$. Ekkor a $b = \alpha + a$ sorozat is konvergens és $\lim b = \lim \alpha + \lim a = x$.

4.16. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az*

$$a^p : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto a_n^p$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^p = (\lim a)^p$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$.
Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 2\,|A|$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\begin{aligned}
|A^p - a_n^p| &= |A - a_n| \cdot \left| \sum_{k=0}^{p-1} A^k a_n^{p-1-k} \right| \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k \, |a_n|^{p-1-k} < \\
&< |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k \, (2\,|A|)^{p-1-k} \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^{p-1} \, 2^{p-1} \leq \\
&\leq |A - a_n| \cdot p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1}.
\end{aligned}$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1}}.$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$|A^p - a_n^p| < |A - a_n| \cdot p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1} < \frac{\varepsilon}{p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1}} \cdot p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim a^p = A^p$.
Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 1$ teljesül, valamint létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra $|a_n| < \varepsilon$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$|a_n|^p \leq |a_n| < \varepsilon,$$

vagyis $\lim a^p = 0$.

4.17. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az*

$$\sqrt[p]{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto \sqrt[p]{a_n}$$

sorozat konvergens és

$$\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim a}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$.
Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $a_n > \dfrac{A}{2}$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\left|\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n}\right| = \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} a_n^{\frac{p-1-k}{p}}} \leq \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{p-1-k}{p}}} <$$
$$< \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{p-1}{p}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} \cdot |A - a_n| .$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2}.$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left|\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n}\right| < |A - a_n| \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2} \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{A}$.
Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra $a_n < \varepsilon^p$ teljesül. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[p]{a_n} < \varepsilon,$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = 0$.

4.18. Tétel. *(Sorozatok racionális hatványa.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $q \in \mathbb{Q}$. Az*

$$a^q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto a_n^q$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^q = \begin{cases} (\lim a)^q, & \text{ha} \quad \lim a > 0 \ \vee \ q \geq 0; \\ \infty, & \text{ha} \quad \lim a = 0 \ \wedge \ q < 0 \end{cases}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat, $A = \lim a$ és $q \in \mathbb{Q}$. Ha $q = 0$, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás.
Ha $q > 0$, akkor létezik olyan $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, melyre $q = \dfrac{p_1}{p_2}$. Ekkor a 4.18 és a 4.17 tételből következik az állítás.
Ha $q < 0$, akkor a 4.11 tétel segítségével visszavezethető a $q > 0$ esetre az állítás.

Megjegyzés. A sorozatok hatványára vonatkozó 4.18 tétel tetszőleges $q \in \mathbb{R}$ kitevő esetén is igaz, ez viszont csak a folytonosságra vonatkozó 6.23 átviteli elvből, illetve a hatványfüggvény folytonosságából (6.42 tétel) fog következni.

◊

4.2. Topologiai fogalmak jellemzése sorozatokkal

4.19. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra $\lim a \in A$.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$.
1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Az 1.39 tétel alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset,$$

legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \to A\setminus\{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n - x| < \dfrac{1}{n+1}$.
Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - x| < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Mivel α eleme a nyílt $\mathbb{K} \setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha) \subseteq (\mathbb{K} \setminus A)$, amiből $B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a_n \in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1} \in B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárás definíciója alapján ekkor α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

4.20. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.) Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a 3.19 Cantor-tétel feltételei, ezért $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

– Legyen $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
– Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge \ a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x.

Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozat, akkor a $\mathrm{Re} \circ a$ valós sorozathoz létezik olyan σ_1 indexsorozat, hogy $\mathrm{Re} \circ a \circ \sigma_1$ konvergens; és az $\mathrm{Im} \circ a \circ \sigma_1$ valós sorozathoz létezik olyan σ_2 indexsorozat, hogy $\mathrm{Im} \circ a \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ konvergens. Ekkor a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ indexsorozatra az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens lesz.

4.21. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Az $A \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ korlátos és zárt halmaz, valamint legyen $a : \mathbb{N} \to A$ tetszőleges sorozat. Mivel az a sorozat korlátos, ezért létezik a' konvergens részsorozata. Ekkor $\lim a' \in \overline{A}$, vagyis az A

halmaz zártsága miatt $\lim a' \in A$.
Tegyük fel, hogy $A \subseteq \mathbb{K}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül. Megmutatjuk, hogy az A halmaz korlátos és zárt.
Ha az A halmaz nem korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \setminus B_{n+1}(0) \neq \emptyset$, ezért az 1.39 tétel miatt $\prod_{n\in\mathbb{N}} (A \setminus B_{n+1}(0)) \neq \emptyset$. Ha $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A \setminus B_{n+1}(0)$, akkor $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Ha a' ennek tetszőleges részsorozata, akkor $|a'_n| \geq n$, vagyis az a' sorozat nem korlátos, így konvergens sem lehet. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen konvergens részsorozata, tehát ellentmondásra jutottunk.
Ha az A halmaz nem zárt, akkor létezik $x \in \overline{A} \setminus A$ elem. A lezárt definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A \neq \emptyset$, ezért az 1.39 tétel miatt

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(A \cap B_{\frac{1}{n+1}}(x)\right) \neq \emptyset.$$

Ha $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A\right)$, akkor $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Legyen a' az a tetszőleges részsorozata. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a'_n \in B_{\frac{1}{n+1}}(x)$, ezért $\lim a' = x \notin A$ teljesül. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen olyan konvergens részsorozata melynek a határértéke az A halmazban lenne, tehát ellentmondásra jutottunk.

4.3. Limesz inferior és szuperior

4.22. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *limesz inferiorja*

$$\liminf a \triangleq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right)$$

és *limesz szuperiorja*

$$\limsup a \triangleq \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right).$$

4.23. Tétel. *Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\liminf a \leq \limsup a$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\limsup a < \liminf a$ és legyen $q \in \,]\limsup a, \liminf a[$. Ekkor a lim sup és a lim inf definíciója alapján léteznek olyan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ számok, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n_1} a_k < q < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n_2} a_k,$$

vagyis minden $n > \max\{n_1, n_2\}$ számra az

$$a_n < q < a_n$$

ellentmondást kapjuk.

4.24. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat.*

1. *Ha $\lim a \in \mathbb{R}$, akkor $\liminf a = \limsup a = \lim a$.*
2. *Ha $\liminf a, \limsup a \in \mathbb{R}$ és $\liminf a = \limsup a$, akkor az a sorozat konvergens és $\lim a = \liminf a$ teljesül.*

Bizonyítás. 1. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A \in \mathbb{R}$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

teljesül. Ezért

$$A - \varepsilon \leq \left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N+1} a_k \right) \leq \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N+1} a_k \right) \leq A + \varepsilon,$$

amiből pedig a 4.23 tétel felhasználásával

$$A - \varepsilon \leq \liminf a \leq \limsup a \leq A + \varepsilon$$

adódik. Ezek alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül a $\liminf a, \limsup a \in [A - \varepsilon, A + \varepsilon]$, tehát

$$\liminf a = \limsup a = A.$$

2. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\liminf a = \limsup a \in \mathbb{R}$. Legyen $A = \liminf a$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel feltételezésünk szerint

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right) = A = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right),$$

ezért

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad & A - \varepsilon < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N_1} a_k \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} : \quad & A + \varepsilon > \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N_2} a_k. \end{aligned}$$

Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra az

$$A - \varepsilon < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N_1} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N_2} a_k < A + \varepsilon$$

egyenlőtlenségek alapján $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ adódik.

4.4. Cauchy-sorozatok

4.25. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}((N < n \ \wedge \ N < m) \to |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

4.26. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N$ számra $|a_n - a_m| < 1$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a$ véges sok korlátos halmaz uniója, így korlátos.

4.27. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat határértéke A és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $n, m > N$ esetén

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.28. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N_1$ esetén $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_2$ esetén $\left|a_{\sigma(n)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $n > N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor

$$|a_n - A| = \left|(a_n - a_{\sigma(n)}) + (a_{\sigma(n)} - A)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

4.29. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat, akkor a 4.26 tétel alapján az a sorozat korlátos és a 4.21 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján van konvergens részsorozata, amiből a 4.28 előző állítás alapján a konvergenciája adódik.
Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, akkor a 4.27 tétel alapján Cauchy-sorozat.

Kiegészítés. A sorozatokhoz hasonlóan tárgyalható a kettős indexű sorozatok elmélete.

4.30. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ függvényeket *kettős indexű sorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat értékeire az $a_{nm} \triangleq a(n, m)$ jelölést használjuk.

4.31. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{K}$ szám az $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}((N < n \wedge N < m) \to a_{nm} \in B_\varepsilon(x)).$$

4.32. Tétel. *Ha $x, y \in \mathbb{K}$ az $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat határértéke, akkor $x = y$.*

4.33. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Az $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ kettős indexű sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}$ jelöli. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ kettős indexű sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke és *divergens*, ha nem létezik határértéke.

4.34. Tétel. *Ha az $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ kettős indexű sorozat konvergens és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$ határérték, akkor a*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K} \quad n \to \lim_{m\to\infty} a_{nm}$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{nm} = \lim_{n,m\to\infty} a_{nm}$$

teljesül.

◊

4.5. Nevezetes határértékek

4.35. Tétel. *Adott $\alpha \in \mathbb{Q}$ mellett*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad \alpha > 0, \\ 1 & \text{ha} \quad \alpha = 0, \\ 0 & \text{ha} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha > 0$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.86 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\alpha]{\varepsilon} < N \cdot 1.$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \leq n^\alpha,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \infty$.
Ha $\alpha = 0$, akkor nyilvánvalóan $\lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Ha $\alpha < 0$, akkor a $\beta = -\alpha$ számra $\beta > 0$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.86 miatt létezik olyan $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\beta]{\frac{1}{\varepsilon}} < N \cdot 1.$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\left|\frac{1}{n^\beta}\right| \leq \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\beta} = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0.$

4.36. Tétel. *Adott $q \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & ha \quad q > 1, \\ 1 & ha \quad q = 1, \\ 0 & ha \quad -1 < q < 1, \end{cases}$$

és $q \leq -1$ esetén a q^n sorozat divergens.

Bizonyítás. Legyen $q > 1$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = q - 1 > 0$ mennyiséget. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.86 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\frac{\varepsilon - 1}{a} < N \cdot 1.$$

Ebből és a 2.1 Bernoulli-egyenlőtlenségből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \leq 1 + na \leq (1 + a)^n = q^n,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.
A $q = 1$ és a $q = 0$ esetekben nyilvánvalóan teljesül az állítás.
Legyen $q \in \,]-1, 1[\, \setminus \{0\}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = \dfrac{1}{|q|} - 1 > 0$ mennyiséget. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|q^n| = \frac{1}{(1 + a)^n} \leq \frac{1}{1 + na} \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n},$$

amiből a 4.15 rendőr-elv és a 4.35 tétel alapján adódik a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ határérték.
Legyen $q \leq -1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left|q^n - q^{n+1}\right| \geq 1$, vagyis az $n \mapsto q^n$ sorozat nem Cauchy-sorozat, ezért nem is konvergens.

4.37. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|q| < 1$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.*
2. *Ha $q = 1$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.*
3. *Ha $|q| \geq 1$ és $q \neq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat divergens.*

Bizonyítás. Legyen $|q| < 1$. Ekkor az előző 4.37 állítás miatt $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
Legyen $|q| \geq 1$ és $q \neq 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left|q^n - q^{n+1}\right| \geq |1 - q|$, vagyis az $n \mapsto q^n$ sorozat nem Cauchy-sorozat, ezért nem is konvergens.

4.38. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{R}^+$ számra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.*

Bizonyítás. Ha $q = 1$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $q > 1$ és tekintsük az $a_n = \sqrt[n]{q} - 1$ sorozatot. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > 0$ és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$q = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

amiből

$$0 \leq a_n \leq \frac{q-1}{n}$$

adódik. Ebből a rendőr-elv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, és így $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ következik.

Ha $q < 1$, akkor tekintsük a $q' = \dfrac{1}{q}$ számot. Ekkor az előző eredmény alapján.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q'}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q'}} = 1$$

4.39. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot (1)^{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}.$$

Ebből a 4.15 rendőr-elv alapján adódik a bizonyítandó állítás.

4.40. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Definiáljuk az $N_1 = 2([\varepsilon] + 1)$ és az $\alpha = \dfrac{N_1!}{\varepsilon^{N_1}}$ számot. Ha $n > N_1$ természetes szám, akkor

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} = \alpha \cdot \prod_{k=1}^{n-N_1} \frac{k + N_1}{\varepsilon} > \alpha \cdot 2^{n-N_1} = \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n.$$

Mivel a 4.36 tétel miatt $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$2^n > \frac{2^{N_1}}{\alpha}$$

teljesül. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor minden $n > N$ természetes számra

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot \frac{2^{N_1}}{\alpha} = 1$$

teljesül, vagyis

$$\sqrt[n]{n!} > \varepsilon.$$

4.41. Tétel. *(Gyökkritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Bizonyítás. Legyen q olyan valós szám melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$. A sorozat határértékének a definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ teljesül (például a $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\left(q - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)$ választással). Ekkor $0 \leq |a_n| \leq q^n$, amiből a rendőr-elv alapján következik a $\lim a = 0$ határérték.

4.42. Tétel. *(Hányados-kritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Bizonyítás. Legyen q olyan valós szám melyre $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$. A sorozat határértékének a definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| < q \cdot |a_N| .$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$0 < |a_{N+k}| < q^k \cdot |a_N| .$$

Amiből a $k \to \infty$ határérték képzéssel a rendőr-elv alapján $\lim\limits_{k\to\infty} |a_{N+k}| = 0$ következik, ebből pedig $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = 0$ adódik.

4.43. Tétel. *Legyen $p \in \mathbb{Q}$ és $q \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|q| < 1$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$.*

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$ és tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $a_n = n^p q^n$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |q| \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = |q| < 1$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 4.18 tételt. A fenti egyenlőtlenségből pedig a sorozatokra vonatkozó 4.42 hányados-kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$ következik.

4.44. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{K}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$.*

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$ és tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|}{n+1} = 0 < 1$$

adódik, amiből a sorozatokra vonatkozó 4.42 hányados-kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ következik.

4.45. Tétel. *Minden $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$.*

Bizonyítás. Az $\alpha < 0$ esetben a 4.36 tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0$ és a minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra fennálló

$$0 \leq \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenségre alkalmazva a rendőr elvet $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$ adódik, tehát ezen két sorozat szorzatára szintén $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$ adódik.

Tehát elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = \dfrac{n^\alpha}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 0 \cdot 1 = 0 < 1$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 4.18 tételt. A sorozatokra vonatkozó 4.42 hányados-kritérium alapján ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$.

4.46. Tétel. *(Napier állandó.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az*

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

sorozat korlátos, monoton növő, tehát konvergens.

2. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén a*

$$b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

konvergens.

3. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. A $z_1 = \cdots = z_n = 1 + \frac{x}{n}$, $z_{n+1} = 1$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \le \frac{n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1} = \frac{n+1+x}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}$$

adódik, amiből hatványozással $a_n \le a_{n+1}$ következik.
Jelölje $[x]$ az x szám egészrészét, tehát azt a jól meghatározott egész számot melyre $[x] \le x$ és $[x] + 1 > x$. Az $z_1 = \cdots = z_n = 1 + \frac{x}{n}$, $z_{n+1} = \cdots = z_{n+[x]+1} = 1 - \frac{x}{[x]+1}$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\sqrt[n+[x]+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1}} \le \frac{n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + ([x]+1)\left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)}{n + [x] + 1} =$$
$$= \frac{n + x + [x] + 1 - x}{n + [x] + 1} = 1$$

adódik, amiből hatványozással

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \le 1$$

következik. Ennek átrendezése adja a sorozat korlátosságát bizonyító

$$a_n \le \left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)^{-[x]-1}$$

egyenlőtlenséget. Ezek alapján az a sorozat monoton növő és felülről korlátos, vagyis konvergens.
2. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. Mivel $[x] \le x < [x] + 1$, ezért $0 < [x] + 1 - x \le 1$, vagyis minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{x}{n+1} \le \frac{x}{n + [x] + 1 - x} < \frac{x}{n}.$$

Ebből

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{-1} \le \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

adódik, tehát a rendőr elv alapján a

$$\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^n$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^{-[x]-1}=1,$$

ezért a

$$c:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^{n+[x]+1}$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

A minden $n\in\mathbb{N}^+\setminus\{x\}$ számra érvényes

$$b_n=\left(\frac{n-x}{n}\right)^n=\left(\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n\right)^{-1}$$

átalakításból azt kapjuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}^+$ számra $b_{n+[x]+1}=c_n^{-1}$. Mivel a c sorozat konvergens és $\lim c\neq 0$ (hiszen minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén $c_1\le c_n$), ezért a b sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\left(\lim_{n\to\infty}c_n\right)^{-1}. \tag{4.1}$$

3. A (4.1) egyenlet jelenti a bizonyítandó egyenlőséget.

4.47. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

Bizonyítás. Tekintsük a $b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $b_n=\dfrac{n!}{n^n}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

A 4.46 tételben definiált $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>1$ teljesül, hiszen a sorozat monoton növő és $a_1=2>1$. Ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<1$$

adódik. A sorozatokra vonatkozó 4.42 hányados-kritérium alapján ezért $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

4.48. Tétel. *Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén $a_{m+n}\le a_ma_n$ teljesül. Ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{a_n}\ .$$

Bizonyítás. Minden $m,n\in\mathbb{N}$ számhoz létezik egyetlen olyan $p(m,n),q(m,n)\in\mathbb{N}$, melyre

$$m=p(m,n)n+q(m,n)$$

és $q(m,n)<n$. A sorozatra vonatkozó feltételezés alapján minden $m,n\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$a_m=a_{p(m,n)n+q(m,n)}\le a_{p(m,n)n}a_{q(m,n)}\le(a_n)^{p(m,n)}\,a_{q(m,n)}$$

teljesül, amiből

$$\sqrt[m]{a_m}\le(a_n)^{\frac{p(m,n)}{m}}\cdot\sqrt[m]{a_{q(m,n)}}=(a_n)^{\frac{1}{n}-\frac{q(m,n)}{mn}}\cdot\sqrt[m]{a_{q(m,n)}}=$$

$$= \sqrt[n]{a_n} \cdot \left(\frac{a_{q(m,n)}}{a_n^{\frac{q(m,n)}{n}}} \right)^{\frac{1}{m}} \leq \sqrt[n]{a_n} \cdot \left(\frac{\max\{a_i |\ i = 0, \dots, n-1\}}{\min\left\{a_n^{\frac{i}{n}} \mid i = 0, \dots, n-1\right\}} \right)^{\frac{1}{m}}$$

következik. Mivel minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\alpha} = 1 = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\alpha},$$

ezért

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$.

Megjegyzés. Az előbb bizonyított tételek egy része érvényes akkor is, amikor irracionális valós kitevőt választunk, azonban ezen a szinten még nem definiálható pozitív szám valós hatványa. Ezért csak megemlítjük a fenti tételek kicsit általánosabb alakját.

4.49. Tétel. *Adott $\alpha \in \mathbb{R}$ mellett*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \textit{ha} \quad \alpha > 0, \\ 1 & \textit{ha} \quad \alpha = 0, \\ 0 & \textit{ha} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

4.50. Tétel. *Legyen $p \in \mathbb{R}$ és $q \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|q| < 1$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$.*

4.51. Tétel. *Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$.*

◊

Kiegészítés.

4.52. Definíció. Legyen X tetszőleges halmaz és $\leq \subseteq X \times X$ reláció.
- Az $\leq$ relációt *előrendezésnek* nevezzük, ha tranzitív és reflexív.
- Az $(X, \leq)$ párt *előrendezett halmaznak* nevezzük, ha X halmaz és $\leq$ előrendezés az X halmazon.
- Legyen $(A, \leq)$ előrendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy a $\leq$ *rendezés felfelé irányított*, ha minden $x, y \in A$ esetén létezik $z \in A$ melyre $x \leq z$ és $y \leq z$ teljesül.

4.53. Definíció. Legyen $(I, \leq)$ előrendezett halmaz. Az $a : I \to \mathbb{K}$ függvényt *általánosított számsorozatnak* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a jelen fejezetben elmondottak általánosított számsorozatokra is igazak, nemcsak a részletesen tárgyalt $I = \mathbb{N}$ esetre.

◊

5. Sorok

5.1. Sorok határértéke és tulajdonságai

5.1. Definíció. (*Sorok.*)

- Adott $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Ha $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \pm\infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

5.2. Tétel. *Legyen $\sum a, \sum b$ konvergens sor és $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *A $\sum(a+b)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*
2. *A $\sum(\lambda a)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*
3. *A $\sum \overline{a}$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Mivel az α és a β sorozat konvergens, ezért összegük, számszorosuk és konjugáltjuk is konvergens lesz. Továbbá a

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \lim_{n\to\infty} \beta_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(c\alpha_n) = c \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{\alpha_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} \alpha_n}$$

egyenlőségek teljesülnek.

5.3. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor $\lim a = 0$.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és legyen $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Ekkor az $n \to \alpha_n$ és az $n \to \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek, és határértékük megegyezik. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

5.4. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat. A $\sum a$ sor pontosan akkor konvergens ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \to \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. A sorozatokra vonatkozó 4.28 Cauchy-kritérium alapján az $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, vagyis ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \to |\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon \right)$$

teljesül.

5.5. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left((N < n) \to \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, vagyis Cauchy-sorozat. Ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N + 1 < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$|\alpha_m - \alpha_{n-1}| < \varepsilon$$

teljesül, amiből az $m \to \infty$ határátmenettel

$$|\lim \alpha - \alpha_{n-1}| \leq \varepsilon$$

adódik, amiből a

$$\lim \alpha - \alpha_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

átalakítással adódik az állítás.

5.2. Majoráns és minoráns kritérium

5.6. Tétel. *(Majoráns és minoráns kritérium.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sort.*

1. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$ és a $\sum b$ sor konvergens, akkor a $\sum a$ sor is konvergens, továbbá $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*
2. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq b_n$ és a $\sum b$ sor divergens, akkor a $\sum a$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
1. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \leq \beta_n$. Mivel a β sorozat konvergens, ezért korlátos is. Az α sorozat korlátos az $\alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt, továbbá monoton növő az α sorozat a konstrukciója miatt. Ezek alapján az α sorozat konvergens.
2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \geq \beta_n$. Mivel a β sorozat divergens és monoton növő, ezért $\lim \beta = \infty$. Az $\alpha_n \geq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt $\lim \alpha = \infty$, vagyis az α sorozat divergens.

5.7. Tétel. *A $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor divergens, a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor konvergens.*

Bizonyítás. 1. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

teljesül. Ebből pedig következik a $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor divergenciája.

2. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

teljesül. Ezek alapján a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor felülről korlátos és monoton növő, tehát konvergens. Sőt még a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

becslés is adódik.

5.3. Abszolút konvergens sorok

5.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

5.9. Tétel. *Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is és*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| .$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ olyan sorozat, hogy a belőle képzett $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.

Megmutatjuk, hogy az $n \mapsto \alpha_n$ sorzat Cauchy-sorozat, így a 4.29 Cauchy-kritérium alapján konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és legyen $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| A - \sum_{k=0}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

Ezek alapján minden $n, m > N$ természetes számra

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \left| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} a_k \right| \leq \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat.

5.10. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{K}$. A $\sum_n q^n$ sor*

1. *divergens, ha $|q| \geq 1$;*
2. *abszolút konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathbb{K}$. Ha $|q| \geq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat nem tart a nullához, vagyis $\sum_n q^n$ sor az 5.3 konvergencia szükséges feltétele alapján a nem lehet konvergens.

Ha $|q| < 1$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

teljesül, valamint a 4.36 tétel alapján $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Ezekből az $n \to \infty$ határátmenet után

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

adódik.

5.4. Konvergenciakritériumok

5.11. Tétel. *(Kondenzációs kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat. Ekkor ha a $\sum_n a_n$ és a $\sum_n 2^n a_{2^n}$ sor közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. Az a sorozat monoton csökkenése miatt az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek.

$$\alpha(2^n - 1) = a_0 + \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \leq$$

$$\leq a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} = a_0 + \beta(n-1)$$

$$\alpha(2^n) = a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{2^n} a_k = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+j} \geq$$

$$\geq a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+2^k} = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^{k+1}} = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\beta(n)$$

Tekintsük az $n \mapsto \alpha(n)$ és $n \mapsto \beta(n)$ monoton növő sorozatokat. A fenti becslés azt mutatja, hogy ha az egyik nem korlátos, akkor a másik sem az. Vagyis ha az egyik sor divergens, akkor a másik is. Ebből pedig következik, hogy ha egyis sor konvergens, akkor a másik is.

Kiegészítés. A kondenzációs kritérium általánosabb formában is igaz.

5.12. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat és $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ekkor ha $\sum_n a_n$ $\sum_n p^n a_{p^n}$ sorok közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.*

$\Diamond$

5.13. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{Q}$. A $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $q > 1$.*

Bizonyítás. Az 5.11 kondenzáicós kritérium alapján a $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, amikor a $\sum_n \frac{2^n}{(2^n)^q}$ sor konvergens. Ezt a sort a $\sum_n \left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)^n$ alakban lehet felírni, ami a $\frac{1}{2^{q-1}}$ hányadosú geometriai sor összege. A geometriai sor konvergenciájára vonatkozó 5.10 tétel alapján, ez pontosan akkor konvergens, ha $\frac{1}{2^{q-1}} < 1$ teljesül, ez pedig a $q > 1$ feltétellel ekvivalens.

Kiegészítés. Mivel eddig csak racionális hatványkitevőt értelmeztünk ezért csak megemlítjük a tétel általánosabb formáját.

5.14. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{C}$. A $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha $\operatorname{Re} q > 1$.*

◊

Kiegészítés. A $\sum_n \frac{1}{n^q}$ $q \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} q > 1$ alakú sorok összegei, mint a q függvénye központi szerepet kap a modern számelmélet, analízis és geometria számos ágában.

5.15. Definíció. A

$$\{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Re} z > 1\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

függvényt ki lehet terjeszteni a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ halmazra analitikusan és ezt a kiterjesztett függvényt nevezzük *Riemann-féle zéta-függvénynek.*

5.16. Tétel. *A Riemann-féle zéta-függvényre*

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^z}{p_k^z - 1}, \quad \operatorname{Re} z > 1$$

teljesül, ahol p_k a k-adik prímszám.

5.17. Tétel. *A Riemann-féle zéta-függvény néhány speciális értéke*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Bizonyítás. Később egyszerűen származtatjuk majd a fenti értékeket.

Már Euler igazolta, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\zeta(2n)$ irracionális szám. Több mint kétszáz évig azonban megoldatlan probléma volt $\zeta(3)$ irracionalitása.

5.18. Tétel. *(Apery tétele (1978).) A $\zeta(3)$ szám irracionális.*

Régóta megoldatlan probléma, hogy a többi páratlan helyen ζ értéke vajon racionális-e, ezért is számít nagy előrelépésnek az alábbi tétel.

5.19. Tétel. *(Zudilin tétele.)*

1. *A $\{\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(19), \zeta(21)\}$ halmaz tartalmaz legalább egy irracionális számot.*
2. *A $\{\zeta(7), \zeta(9), \ldots, \zeta(35), \zeta(37)\}$ halmaz tartalmaz legalább egy irracionális számot.*
3. *A $\{\zeta(9), \zeta(11), \ldots, \zeta(51), \zeta(53)\}$ halmaz tartalmaz legalább egy irracionális számot.*
4. *Minden $n \geq 1$ páratlan egészre az $\{\zeta(n+2), \zeta(n+4), \ldots, \zeta(8n-3), \zeta(8n-1)\}$ halmaz tartalmaz legalább egy irracionális számot.*
5. *Léteznek olyan páratlan a és b egészek, amelyekre $a \leq 145$ és $b \leq 1971$, hogy az 1, $\zeta(3)$, $\zeta(a)$ és $\zeta(b)$ számok lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett (azaz nem léteznek olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ számok, hogy $\alpha + \beta\zeta(3) + \gamma\zeta(a) + \delta\zeta(b) = 0$ teljesül).*

A Riemann-féle zéta-függvény speciális értékein alapul a *Ramanujan-összegzés*, melyet a modern elméleti fizikai számítások során használnak számtalanszor. Itt bemutatunk néhány, első látásra meglepőnek tűnő, képletet a Ramanujan-összegzésből.

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{R} 1 = \zeta(0) = -\frac{1}{2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{R} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{R} n^2 = \zeta(-2) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{R} n^3 = \zeta(-3) = \frac{1}{120} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{R} n^4 = \zeta(-4) = 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{R} n^5 = \zeta(-5) = -\frac{1}{252}$$

$\Diamond$

5.20. Tétel. *(Cauchy-féle gyökkritérium.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;*
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *akkor a $\sum a$ sor divergens.*

Bizonyítás. 1. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$. Ekkor a lim sup definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N},\ k > N\right\} < q$, ezért minden $k > N$ számra $|a(k)| < q^k$. A $\sum\limits_k q^k$ geometriai sor konvergens, mert $q \in]0,1[$, ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért konvergens is.
2. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$. Ekkor a lim sup definíciója alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N},\ k > N\right\} > q$. Tehát minden $N \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén létezik olyan $k > N$, melyre $|a_k| > q^k$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

– Legyen $\sigma(0) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid |a_k| > q^0\right\}$.
– Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge\ |a_k| > q^{n+1}\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ nem korlátos részsorozata az a sorozatnak. Ezek alapján az a sorozat sem korlátos, ezért konvergens sem lehet, emiatt pedig a $\sum a$ sor sem lehet konvergens.

5.21. Tétel. *Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ sorozatra*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ tetszőleges sorozat.
1. Legyen $\alpha < \liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tetszőleges való szám. Ekkor a lim inf

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\inf\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \mid n \in \mathbb{N},\ n \ge N\right\}\right)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| > \alpha \cdot |a_N|.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| > \alpha^k \cdot |a_N|.$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}.$$

Amiből

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ge \liminf_{n\to\infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}\right) = \alpha$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha < \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \to \qquad \alpha \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

következtetés, ezért

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

2. A 4.23 tétel szerint minden $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}'$ sorozatra teljesül az

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

egyenlőtlenség.

3. Legyen $\alpha > \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tetszőleges valós szám. Ekkor a lim sup

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \inf_{N\in\mathbb{N}}\left(\sup\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \mid n\in\mathbb{N},\ n\ge N\right\}\right)$$

definíciója miatt létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n>N$ természetes számra $\alpha > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| < \alpha\cdot|a_N|.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k\in\mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| < \alpha^k\cdot|a_N|.$$

Vagyis minden $n>N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{\alpha^{n-N}}\cdot\sqrt[n]{|a_N|} = \alpha\cdot\sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}.$$

Amiből

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\left(\alpha\cdot\sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}\right) = \alpha$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha > \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad\to\qquad \alpha \ge \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

következtetés, ezért

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

5.22. Tétel. *Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}'$ olyan, melyre létezik a $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\in\mathbb{K}$ határérték. Ekkor létezik a $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ határérték és*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Bizonyítás. Az előző 5.21 állítás és a 4.24 tétel alapján nyilvánvaló.

5.23. Tétel. *(D'Alembert-féle hányadoskritérium.) Ha az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}'$ sorozat esetén*

1. $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;*
2. $\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *akkor a $\sum a$ sor divergens.*

Bizonyítás. Az 5.20 Cauchy-féle gyökkritérium és az 5.21 tétel alapján nyilvánvaló.

5.5. Leibniz-sorok

5.24. Definíció. Legyen $m \in \mathbb{N}$. A $\sum a$ sor *m-edik részletösszege*

$$S_m \triangleq \sum_{n=0}^{m} a_k.$$

A konvergens $\sum a$ sor *m-edik hibatagja*

$$H_m \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_n,$$

melyet gyakran a $H_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ alakban írunk.

5.25. Definíció. A $\sum_n (-1)^n a_n$ sor *Leibniz-típusú* vagy *Leibniz-sor*, ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat.

5.26. Tétel. *Ha $\sum_n (-1)^n a_n$ Leibniz-sor, akkor konvergens, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$|H_n| \leq a_{n+1}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\begin{aligned}
\alpha(2n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{2k} - a_{2k+1}) + a_{2n} \geq 0 \\
\alpha(2n+1) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (-a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2n+1} \leq a_0 \\
\alpha(2(n+1)) &= \alpha(2n) - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq \alpha(2n) \\
\alpha(2(n+1)+1) &= \alpha(2n+1) + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq \alpha(2n+1)
\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek alapján az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat alulról korlátos és monoton csökkenő, ezért konvergens, valamint az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat felülről korlátos és monoton növő, ezért szintén konvergens. A

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha(2n+1) - \alpha(2n)) = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = 0$$

határérték alapján $\lim_{n\to\infty} \alpha(2n+1) = \lim_{n\to\infty} \alpha(2n)$, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} \alpha(n)$ határérték. Legyen $A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$. Mivel az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat monoton csökkenő és az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat monoton növő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\alpha(2n+1) \leq A \leq \alpha(2n),$$

ezért

$$\begin{aligned}
0 \leq & A - \alpha(2n+1) \leq \alpha(2n+2) - \alpha(2n+1) = a_{2n+2} && \to \quad |A - \alpha(2n+1)| \leq a_{2n+2}, \\
0 \geq & A - \alpha(2n) \geq \alpha(2n+1) - \alpha(2n) = -a_{2n+1} && \to \quad |A - \alpha(2n)| \leq a_{2n+1},
\end{aligned}$$

ami bizonyítja a hibatagra vonatkozó $|H_n| \leq a_n$ becslést.

5.6. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok

5.27. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat.

- A $\sum a$ sor *átrendezésének* nevezzük a $\sum a \circ \sigma$ sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció. Tehát az átrendezett sor n-edik tagja $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltétlen konvergens*, ha minden átrendezése konvergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.28. Tétel. *Minden abszolút konvergens sor feltétlen konvergens, valamint az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges abszolút konvergens sorozat és $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Továbbá vezessük be az $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és a $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jelöléseket. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén legyen $n' = \max\{\sigma(k) |\ k \in \{0, \dots, n\}\}$, ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} |a \circ \sigma| = \sum_{k=0}^{n} \left|a_{\sigma(k)}\right| \le \sum_{l=0}^{n'} |a_l| \le B.$$

Ezért az $n \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \left|a_{\sigma(k)}\right|$ sorozat felülről korlátos és monoton növő, tehát konvergens. Vagyis a $\sum a \circ \sigma$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens.

Megmutatjuk, hogy $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért minden $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon_1.$$

Ekkor az $N_2 = \max\left\{\sigma^{-1}(k) |\ k \in \{0, \dots, N_1\}\right\}$ számra igaz, hogy minden $n > N_2$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) \le N_1}} a_{\sigma(k)} + \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{N_1+1} a_k + \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)},$$

vagyis

$$\left|A - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}\right| = \left|A - \sum_{k=0}^{N_1} a_k - \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)}\right| \le \left|\sum_{k=N_1+1}^{\infty} a_k\right| + \left|\sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} \left|a_{\sigma(k)}\right| \le \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon_1.$$

Tehát a ε paraméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex (például a $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ választáshoz kapott N_2 paraméter), hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left|A - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}\right| < \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = A$ egyenlőséget.

5.29. Tétel. *(Riemann-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy a $\sum a$ sor feltételesen konvergens. Ekkor minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ elemre $\alpha \leq \beta$ esetén létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, hogy*

$$\liminf \sum a \circ \sigma = \alpha \quad \text{és} \quad \limsup \sum a \circ \sigma = \beta$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum a$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens (vagyis feltételesen konvergens), továbbá legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ tetszőleges.
A bizonyítás főbb lépései a következők.
– Megmutatjuk, hogy a sorozat végtelen sokszor vesz fel pozitív, illetve negatív, értékeket.
– Igazoljuk, hogy a pozitív, illetve negatív, értékeiből képzett sor divergens.
– Ezek után készítünk az eredeti sorozatból egy részsorozatot úgy, hogy elkezdjük összeadni a sorozat pozitív elemekeit, egészen addig amíg a β számnál nagyobb nem lesz az összeg. Ezután ehhez elkezdjük hozzáadni a sorozat negatív elemeit, egészen addig amíg az α számnál kisebb nem lesz az összeg. Majd ezeket a lépéseket ismételjük.
– Megmutatjuk, hogy az így kapott σ részsorozatra $\liminf\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \alpha$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \beta$ teljesül.
– Végül figyelembe vesszük, hogy a sorozat értékei nullák is lehetnek.

1. Vezessük be az $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést és definiáljuk az alábbi halmazokat.

$$N_+ = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n > 0\}$$
$$N_- = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n < 0\}$$
$$N_0 = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n = 0\}$$

Az N_+, N_- és N_0 halmazok diszjunktak és uniójuk $\mathbb{N}$. Nyilván $m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{\substack{n\in N_+\\ n\leq m}} a_n - \sum_{\substack{n\in N_-\\ n\leq m}} (-a_n)$$
$$\sum_{n=0}^{m} |a_n| = \sum_{\substack{n\in N_+\\ n\leq m}} a_n + \sum_{\substack{n\in N_-\\ n\leq m}} (-a_n).$$

2. Megmutatjuk, hogy N_+ és N_- végtelen halmaz. Tegyük fel ugyanis, hogy az N_+ halmaz véges és legyen $A_+ = \sum_{n\in N_+} a_n$. Ekkor minden $m > \max N_+$ számra az

$$\sum_{n=0}^{m} |a_n| = A_+ + \left(A_+ - \sum_{n=0}^{m} a_n\right) = 2A_+ - \sum_{n=0}^{m} a_n$$

egyenlőségből és a $\sum a$ sor konvergenciájából a $\sum a$ sor abszolút konvergenciája adódik, ami ellentmondás. Vagyis az N_+ halmaz végtelen. Hasonló módon igazolható, hogy az N_- halmaz is végtelen. Megmutatjuk, hogy az $m \mapsto \sum\limits_{\substack{n\in N_+\\ n\leq m}} a_n$ és az $m \mapsto \sum\limits_{\substack{n\in N_-\\ n\leq m}} a_n$ sorozatok divergensek. Tegyük fel ugyanis, hogy az $m \mapsto \sum\limits_{\substack{n\in N_+\\ n\leq m}} a_n$ sorozat konvergens és legyen B_+ a határértéke, vagyis $B_+ = \sum\limits_{n\in N_+} a_n$. Ekkor a $\sum a$ sor konvergenciája miatt létezik a

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} a_n - \sum_{\substack{k\in N_+\\ k\leq m}} a_k \right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\substack{k\in N_-\\ k\leq m}} a_k$$

határérték, vagyis

$$\sum_{k\in N_-} a_k = A - B_+.$$

Ebből a $\sum a$ sor abszolút konvergenciája adódik ellentmondásként, ugyanis

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}|a_n| = B_+ - (A - B_+).$$

Tehát az $m \mapsto \sum_{\substack{n\in N_+\\ n\le m}} a_n$ sorozat divergens. Hasonló módon igazolható az $m \mapsto \sum_{\substack{n\in N_-\\ n\le m}} a_n$ sorozat divergenciája.

3. Legyen $\sigma_+ : \mathbb{N} \to N_+$ és $\sigma_- : \mathbb{N} \to N_-$ monoton növő bijekció és definiáljuk a

$$a^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto a_{\sigma_+(n)}$$
$$a^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto a_{\sigma_-(n)}$$

sorozatokat. Szemléletesen az a^+ sorozat az eredeti a sorozatnak olyan részsorozata, mely pontosan az a pozitív elemeit tartalmazza, valamint a^- sorozat az eredeti a sorozatnak olyan részsorozata, mely pontosan az a negatív elemeiből áll. Az eddigiek alapján a $\sum a^+$ és $\sum a^-$ sor divergens. Definiáljuk az alábbi iterációval a $\tau^+, \tau^- : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és az $u^+, u^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot.

– A sorozatok kezdőelemei legyenek az alábbiak.

$$\tau^+(0) = \min\left\{m \in \mathbb{N} \middle| \sum_{n=0}^{m} a_n^+ > \beta\right\} \qquad u^+(0) = \sum_{n=0}^{\tau^+(0)} a_n^+$$

$$\tau^-(0) = \min\left\{m \in \mathbb{N} \middle| u^+(0) + \sum_{n=0}^{m} a_n^- < \alpha\right\} \qquad u^-(0) = u^+(0) + \sum_{n=0}^{\tau^-(0)} a_n^-$$

– Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tau^+(n), \tau^-(n), u^+(n)$ és $u^-(n)$ definiált, akkor a sorozat következő elemeit az alábbiak szerint definiáljuk.

$$\tau^+(n+1) = \min\left\{m \in \mathbb{N} \middle| u^-(n) + \sum_{n=\tau^+(n)+1}^{m} a_n^+ > \beta\right\}$$

$$u^+(n+1) = u^-(n) + \sum_{n=\tau^+(n)+1}^{\tau^+(n+1)} a_n^+$$

$$\tau^-(n+1) = \min\left\{m \in \mathbb{N} \middle| u^+(n+1) + \sum_{n=\tau^-(n)+1}^{m} a_n^- < \alpha\right\}$$

$$u^-(n+1) = u^+(n+1) + \sum_{n=\tau^-(n)+1}^{\tau^-(n+1)} a_n^-$$

4. Ekkor a sorozatok definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra az alábbiak teljesülnek.

$$\beta < u^+(n) \qquad \alpha > u^-(n)$$
$$\beta \ge u^+(n) - a^+_{\tau^+(n)} \qquad \alpha \le u^-(n) - a^-_{\tau^-(n)}$$
$$u^+(n) = \sum_{n=0}^{\tau^+(n)} a_n^+ + \sum_{n=0}^{\tau^-(n-1)} a_n^- \qquad u^-(n) = \sum_{n=0}^{\tau^+(n)} a_n^+ + \sum_{n=0}^{\tau^-(n)} a_n^-$$

Mivel $a^\pm$ az a sorozat részsorozatai és $\lim a = 0$, ezért $\lim a^\pm = 0$ is teljesül. Figyelembe véve a $\tau^\pm$ sorozatok monoton növekedését és a minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra teljesülő

$$\left|\beta - u^+(n)\right| \le a^+_{\tau^+(n)} \qquad \left|\alpha - u^-(n)\right| \le \left|a^-_{\tau^-(n)}\right|$$

egyenlőtlenségeket $\lim u^+ = \beta$ és $\lim u^- = \alpha$ adódik. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ leképezést az alábbi módon.

- Minden $n \in \{0, \dots, \tau^+(0)\}$ számra legyen $\sigma(n) = \sigma_+(n)$.
- Minden $n \in \{\tau^+(0)+1, \dots, \tau^+(0)+\tau^-(0)+1\}$ számra legyen $\sigma(n) = \sigma_-(n-1)$.
- Minden $n > \tau^+(0)+\tau^-(0)+1$ számhoz létezik egyetlen olyan k természetes szám, melyre
$$n \in \left\{\tau^-(k)+\tau^+(k)+2, \dots, \tau^-(k+1)+\tau^+(k+1)+1\right\}.$$
Ha $n \in \{\tau^-(k)+\tau^+(k)+2, \dots, \tau^-(k)+\tau^+(k+1)+1\}$, akkor legyen
$$\sigma(n) = \sigma_+(n-\tau^-(k)-1).$$
Ha $n \in \{\tau^-(k)+\tau^+(k+1)+2, \dots, \tau^-(k+1)+\tau^+(k+1)+1\}$, akkor legyen
$$\sigma(n) = \sigma_-(n-\tau^+(k+1)-1).$$

A σ definíciójából következik, hogy σ injektív, $\operatorname{Dom}\sigma = \mathbb{N}$ és $\operatorname{Ran}\sigma = N_+ \cup N_-$.

Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\liminf\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \alpha$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \beta$ teljesül, ugyanis ennek az $u^\pm$ sorozatok részsorozatai, valamint az α számnál kisebb és a β számnál nagyobb értékhez nem torlódnak az $a \circ \sigma$ sorozat elemei.

5. Az N_0 halmaz számossága alapján három a következő három esettel kell számolni.
   - Az $N_0 = \emptyset$ esetben $\sigma' = \sigma$.
   - Ha $N_0 \neq \emptyset$ véges halmaz, akkor létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, melyhez létezik egy $\rho : N_0 \to \{0, \dots, m\}$ bijekció. Definiáljuk az alábbi függvényt.
$$\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} \rho^{-1}(n), & \text{ha} \quad n \le m \\ \sigma(n-m), & \text{ha} \quad n > m \end{cases}$$
   - Ha N_0 végtelen halmaz, akkor létezik $\rho : N_0 \to \mathbb{N}$ bijekció. Definiáljuk ekkor az alábbi függvényt.
$$\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} \rho^{-1}\left(\dfrac{n}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páros} \\ \sigma\left(\dfrac{n-1}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Ekkor $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan bijekció, melyre $\liminf\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma'(k)} = \alpha$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma'(k)} = \beta$ teljesül.

5.30. Tétel. *Egy sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha feltétlen konvergens.*

Bizonyítás. Az 5.29 Riemann-tétel és az 5.28 tétel alapján nyilvánvaló.

5.7. Sorok Cauchy-szorzata

5.31. Definíció. Az a és $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük az
$$a * b : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \quad n \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$
sorozatot.

5.32. Definíció. A $\sum a$ és $\sum b$ sor *Cauchy-szorzatának* nevezzük az $a*b$ sorozat által meghatározott $\sum a * b$ sort.

5.33. Tétel. *(Mertens tétele.) Ha a konvergens $\sum a$, $\sum b$ sorok közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ és $\sum b$ sorok Cauchy-szorzata konvergens és*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$
Továbbá, ha a $\sum a$ és $\sum b$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum(a*b)$ sor is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Legyen a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $A_a = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, valamint legyen C olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - B\right| < C$ teljesül. Ekkor teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} (a * b)(k) - AB = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j - A\right) B + \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right). \tag{5.1}$$

A jobb oldal első tagja nullához tart. Megmutatjuk, hogy a második tag is a nullához tart. Minden $\varepsilon' > 0$ számhoz létezik $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - B\right| < \varepsilon'$; valamint létezik $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon'$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n > 2N$ esetén

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{N} |a_j| \left|\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right| + \sum_{j=N+1}^{n} |a_j| \left|\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N} |a_j|\, \varepsilon' + \sum_{j=N+1}^{n} |a_j|\, C \leq \varepsilon' \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| + C \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \varepsilon' A_a + C\varepsilon' = (C + A_a)\varepsilon'.$$

Vagyis tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(C + A_a)}$ és az ehhez választott N_1 és N_2 paraméterekhez tartozó $N' = 2\max\{N_1, N_2\}$ küszöbindex olyan lesz, hogy minden $n > N'$ számra

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right)\right| < \varepsilon,$$

vagyis a (5.1) képlet jobb oldalán lévő második tag is a nullához tart.
Most tegyük fel, hogy $\sum a$ és $\sum b$ is abszolút konvergens és az eddigi jelöléseket egészítsük ki a $B_a = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ szimbólummal. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |a * b|\,(k) = \sum_{k=0}^{n} \left|\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} |a_l|\,|b_{k-l}| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{l=0}^{n-k} |b_l| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, B_a \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right) B_a = A_a B_a,$$

vagyis a $\sum (a * b)$ sor abszolút konvergens.

5.8. Sorok pontonkénti szorzata

5.34. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat

– *korlátos változású*, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$

teljesül;

– *korlátos részletösszegű*, ha a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \infty$$

teljesül.

5.35. Tétel. *(Abel-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos részletösszegű sorozat. Ekkor a $\sum_n a_n b_n$ sor konvergens és*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|\right) \cdot \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right|\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és

$$A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|\right),$$

valamint legyen $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos részletösszegű sorozat és

$$B = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right|.$$

A minden $n \in \mathbb{N}$ számra fennálló *Abel-átrendezés*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j\right) + a_n \sum_{j=0}^{n} b_j$$

igazolható n szerinti teljes indukcióval. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|(a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot \left|\sum_{j=0}^{k} b_j\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot B = AB,$$

ezért a $\sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j\right)$ sor abszolút konvergens, vagyis konvergens is és

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j\right)\right| \leq AB.$$

Az $n \mapsto a_n \sum_{j=0}^{n} b_j$ sorozat zérussorozat, mert az $n \mapsto \sum_{j=0}^{n} b_j$ sorozat korlátos és a zérussorozat. Ebből már adódik a bizonyítandó állítás.

5.36. Tétel. *(Dirichlet-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $q \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Ekkor a $\sum_n a_n q^n$ sor konvergens,*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n\right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|\right) \cdot \frac{2}{|1-q|}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $q \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Ekkor

$$B_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} q^k\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|q|^{n+1} + 1}{|1-q|} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+1}{|1-q|} = \frac{2}{|1-q|} < \infty.$$

Innen már az Abel-féle kritériumból következik az állítás.

5.9. Elemi függvények

5.37. Definíció. (*Elemi hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt a

$$\operatorname{Dom} P_a \triangleq \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \text{a } \sum_n a_n x^n \text{ sor konvergens} \right\}$$

halmazon, az alábbi módon.

$$P_a : \operatorname{Dom} P_a \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt az *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

5.38. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens, tehát $x \in \operatorname{Dom} P_a$.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens, tehát $x \notin \operatorname{Dom} P_a$.*

Bizonyítás. Az 5.20 Cauchy-féle gyökkritérium közvetlen következménye.

5.39. Tétel. *Az alábbi hatványsorok konvergenciasugara végtelen, vagyis minden $x \in \mathbb{C}$ esetén konvergensek a sorok.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Bizonyítás. 1. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n = \dfrac{1}{n!}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, vagyis az 5.22 tétel alapján $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, tehát a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ hatványsor konvergenciasugara végtelen.

2. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, vagyis az 5.22 tétel alapján $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, tehát az $x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\left(x^2\right)^n}{(2n+1)!}$ hatványsor konvergenciasugara végtelen.

A többi esetben is hasonlóan igazolható az állítás.

5.40. Definíció. (*Elemi függvények.*)

– Az *exponenciális függvény*

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

– A *szinusz függvény*

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz függvény*

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens függvény*

$$\operatorname{tg} : \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}.$$

– A *kotangens függvény*

$$\operatorname{ctg} : \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z \sin z \neq 0\ \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} z}.$$

– A *szinusz hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{th} : \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{ch} z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

– A *kotangens hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{cth} : \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z \neq 0\ \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{th} z}.$$

5.41. Tétel. *(Euler-tétel.) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\exp(\mathrm{i}\, z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\cos z + \mathrm{i} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} + \mathrm{i} \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} - \mathrm{i} \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\, z)^{4n}}{(4n)!} + \frac{(\mathrm{i}\, z)^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{(\mathrm{i}\, z)^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{(\mathrm{i}\, z)^{4n+3}}{(4n+3)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\, z)^n}{n!} = \exp(\mathrm{i}\, z).
\end{aligned}$$

5.10. Az exponenciális függvény és a hatványozás

5.42. Tétel. *(Az exponenciális függvény.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $\overline{\exp(x)} = \exp(\overline{x})$.*
2. *Minden $x, y \in \mathbb{C}$ számra $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.*
3. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.*

4. *Minden* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *számra* $x_1 < x_2$ *esetén* $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ *teljesül, vagyis az*

$$\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x)$$

függvény injektív.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{C}$ és $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Mivel az a sorozat konvergens, ezért

$$\overline{\exp(x)} = \overline{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\overline{x})^k}{k!} = \exp(\overline{x}).$$

2. Mivel a $\alpha_k = \frac{x^k}{k!}$ és $\beta_k = \frac{y^k}{k!}$ sorozatokból képzett sorok abszolút konvergensek, ezért Mertens-tétel alapján Cauchy-szorzatuk is konvergens lesz. Mivel

$$(\alpha * \beta)(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

ezért

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

3. Az előző pont alapján minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1.$$

4. Az exponenciális függvény definíciója alapján ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor $\exp(a) > 1$. Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$, akkor

$$\exp(x_2) = \exp(x_2 - x_1) \cdot \exp(x_1) > \exp(x_1).$$

5.43. Definíció. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük, jele log vagy ln. Tehát $\operatorname{Dom}\log = \operatorname{Ran}(\exp|_{\mathbb{R}})$ és minden $x \in \operatorname{Dom}\log$ számra $\exp(\log x) = x$.

Megjegyzés. Később igazoljuk, hogy $\operatorname{Dom}\log = \mathbb{R}^+$.

$\Diamond$

5.44. Definíció. Legyen $x \in \operatorname{Dom}\log$ és $z \in \mathbb{C}$. A

$$x^z \triangleq \exp(z \log(x))$$

számot *az* x *szám* z*-edik hatványának* nevezzük.

5.45. Definíció. Az $\exp(1)$ számot a *természetes alapú logaritmus alapszámának* nevezzük és az e betűvel jelöljük, vagyis $\mathrm{e} \triangleq \exp(1)$. (értéke megközelítőleg $\mathrm{e} \approx 2,71828182845904523536$.)

5.46. Tétel. *Minden* $z \in \mathbb{C}$ *számra* $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.

Bizonyítás. Az e szám és a hatványozás definíciója alapján nyilvánvaló.

5.47. Tétel. *Legyen* $x, y \in \operatorname{Dom}\log$ *olyan szám, melyre* $x^y \in \operatorname{Dom}\log$ *és legyen* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Ekkor*

$$x^0 = 1, \qquad x^{z_1} \cdot x^{z_2} = x^{z_1+z_2}, \qquad x^{-z_1} = \frac{1}{x^{z_1}}, \qquad (x^y)^{z_1} = x^{yz_1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az állítások a hatványozás definíciójának és az exponenciális függvény multiplikativitásának közvetlen következményei.

5.48. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sorozatok határértéke megegyezik.*

Bizonyítás. Adott $x \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sorozatokat.

1. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a 4.46 tétel alapján az $a(x)$ sorozat konvergens, valamint az 5.39 tétel alapján a $b(x)$ sorozat konvergens és definíció szerint $\lim b(x) = \exp x$. A binomiális kifejtés alapján

$$b(x)_n - a(x)_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\right) \cdot \frac{x^k}{k!}.$$

A teljes indukcióval könnyen bizonyítható $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ formula és a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \geq 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Ezek alapján

$$1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{k(k-1)}{2n},$$

vagyis

$$0 \leq b(x)_n - a(x)_n \leq \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{n} \cdot x^2 \exp x,$$

amiből a rendőrelv értelmében $\lim(b(x) - a(x)) = 0$ következik.

2. Ha $x < 0$, akkor a 4.46 tétel miatt $\lim a(x) = \frac{1}{\lim a(-x)}$, az 5.42 tétel miatt $\lim b(x) = \frac{1}{\lim b(-x)}$. Mivel ekkor $-x > 0$, ezért az 1. pont alapján

$$\lim a(-x) = \lim b(-x),$$

amiből $\lim a(x) = \lim b(x)$ következik.

5.49. Tétel. *(Elemi függvények alaptulajdonságai.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra az alábbiak teljesülnek.*

$$\sin x = \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i} \qquad \cos x = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

2. *Minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
\operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)\operatorname{ch}(x)\\
\operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).
\end{aligned}$$

3. *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\sin(i\,x) = i \operatorname{sh} x, \qquad \cos(i\,x) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh}(i\,x) = i \sin x, \qquad \operatorname{ch}(i\,x) = \cos x.$$

4. *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

5. *Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}| = 1$.*

Bizonyítás. Az 5.41 Euler-tétel alapján minden $x \in \mathbb{C}$ számra
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \quad \text{és} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x} = \cos x - \mathrm{i} \sin x,$$
ahol felhasználtuk, hogy $\cos(x) = \cos(-x)$ és $\sin(x) = -\sin(-x)$. Ebből adódik a sin és cos függvényre vonatkozó egyenlőség.
Az sh és a ch függvényekre vonatkozó egyenlőség a függvények sorfejtésének közvetlen következménye.
Az addíciós formulák, illetve a többi azonosság egyszerű számolással igazolható a sin, cos, sh és ch függvény exponenciális alakjából.

Megjegyzés. A sorokhoz teljesen hasonlóan tárgyalható az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatokhoz rendelt
$$\prod a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{K} \quad n \mapsto \prod_{k=0}^{n} a_k$$
szorzatok elmélete.

$\Diamond$

6. Valós függvények elemi vizsgálata

6.1. Függvények tulajdonságai

Magyarázat. A függvények főbb tulajdonságait definiáljuk először.

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény
- *páros*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(-x)$;
- *páratlan*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = -f(-x)$;
- *monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \leq f(y)$;
- *monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \geq f(y)$;
- *monoton*, ha monoton növő, vagy monoton fogyó;
- *szigorúan monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$;
- *szigorúan monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$;
- *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó;
- *konvex az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén

$$f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$$

  teljesül;
- *konkáv az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén

$$f(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$$

  teljesül;
- *periodikus*, ha f nem konstans függvény és ha létezik $p \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $x + p \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(x+p)$, amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú p szám nagyobb mint nulla, azt az *f függvény periódusának* nevezzük;
- *zérushelye* vagy *gyöke* $x \in \operatorname{Dom} f$, ha $f(x) = 0$.

6.2. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Elég a konvex esetre bizonyítani az állítást, hiszen az $f \mapsto -f$ transzformációval egymásba alakíthatók az állítások. Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1 \leq i \leq n} [0, 1]^n$ esetén, melyre $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ az

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor nyilván $n = 2$ is igaz a következtetés, ami éppen a konvexitás definícióját jelenti.

Tegyük fel, hogy az f függvény konvex és az A halmaz álljon azokból az n természetes számokból, melyre igaz, hogy minden $(x_i)_{1\le i\le n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1\le i\le n} \in [0,1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Nyilván $1 \in A$, az f függvény konvexitása miatt $2 \in A$ és célunk annak igazolása, hogy $A = \mathbb{N}^+$. Ezt úgy érjük el, hogy megmutatjuk ha $n \in A$, akkor $n+1 \in A$. Legyen $n \in A$, $(x_i)_{1\le i\le n+1} \in I^n$ és legyen $(a_i)_{1\le i\le n+1} \in [0,1]^n$ olyan, melyre $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$. Ha $a_{n+1} = 1$, akkor nyilván teljesül az

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

egyenlőtlenség, ezért feltehető, hogy $a_{n+1} \ne 1$. Ebben az esetben azonban a

$$\frac{a_1}{1-a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{1-a_{n+1}} \in [0,1]$$

számok összege 1, valamint

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i \in I.$$

Ezért felhasználva az f függvény konvexitását és az $n \in A$ feltételezést

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right) &= f\left((1-a_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i + a_{n+1}x_{n+1}\right) \le \\ &\le (1-a_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i\right) + a_{n+1} f(x_{n+1}) \le \\ &\le (1-a_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} f(x_i) + a_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f(x_i) \end{aligned}$$

adódik, vagyis $n+1 \in A$.

6.2. Függvény határértéke

6.3. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvény $\operatorname{Dom} f$ értelmezési tartományának a torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f *függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

Magyarázat. A fenti definíció szerint az $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvénynek a $\operatorname{Dom} f$ halmaz $a \in \mathbb{K}$ torlódási torlódási pontjában $A \in \mathbb{K}$ a határértéke pontosan akkor, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \ (0 < |x-a| < \delta \ \to \ |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül.

6.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.

– Azt mondjuk, hogy az f *függvény határértéke az a pontban végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

– Azt mondjuk, hogy az f *függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

6.5. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *végtelen torlódási pontja*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A \ (\varepsilon < x).$$

Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *mínusz végtelen torlódási pontja*, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

6.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az f *függvény határértéke a végtelenben*,

– $A \in \mathbb{R}$, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

– *végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

– *mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

6.7. Tétel. *(A határérték egyértelműsége.)*

1. *Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{K}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*
2. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja és $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ legyen az f függvény határértéke az a helyen. Ekkor $A = B$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{K}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$0 < |x - a| < \delta_A \ \to \ |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2}$$
$$0 < |x - a| < \delta_B \ \to \ |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a = \infty$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja és $A, B \in \mathbb{K}$ legyen az f függvény határértéke a végtelenben. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$\delta_A < x \ \to \ |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2}$$
$$\delta_B < x \ \to \ |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \max\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap]\delta, \infty[$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Ha $a = -\infty$, akkor a fentihez hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $A = B$.

A többi esetben is hasonló módon igazolható a határérték egyértelműsége.

6.8. Definíció. (A lim *művelet.*)

– Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ és legyen $a \in \mathbb{C}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.
– Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

6.9. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és legyen $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim\limits_{a} f = 0$, akkor $\lim\limits_{a} fg = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és legyen $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim\limits_{a} f = 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} g \cap (B_r(a) \setminus \{a\})$ esetén $|g(x)| < K$. Mivel $\lim\limits_{a} f = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f \cap (B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\})$ esetén $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Ha $\delta = \min\{r, \delta_1\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} f) \cap (B_r(a) \setminus \{a\})$ elemre

$$|f(x)g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

Vagyis $\lim\limits_{a}(fg) = 0$.

6.10. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ halmaznak. (A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben $a = \pm\infty$ is lehet.) Tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_{a} f$ és $\lim\limits_{a} g$, valamint $\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{a} g \notin \{\infty, -\infty\}$. Akkor az a pont*

1. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(f+g)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(f+g)$ létezik és*

$$\lim_{a}(f+g) = \lim_{a} f + \lim_{a} g;$$

2. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(fg)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(fg)$ létezik és*

$$\lim_{a}(fg) = \left(\lim_{a} f\right)\left(\lim_{a} g\right);$$

3. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(\lambda f)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(\lambda f)$ létezik, és*

$$\lim_{a}(\lambda f) = \lambda(\lim_{a} f);$$

4. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(|f|)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}|f|$ létezik és*

$$\lim_{a}|f| = \left|\lim_{a} f\right|;$$

5. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(\overline{f})$ halmaznak, $\lim\limits_{a}\overline{f}$ létezik és*

$$\lim_{a}\overline{f} = \overline{\lim_{a} f}.$$

6. *Ha az a pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom}\left(\dfrac{1}{f}\right)$ halmaznak és $\lim\limits_{a} f \neq 0$, akkor $\lim\limits_{a}\dfrac{1}{f}$ létezik és*

$$\lim_{a}\frac{1}{f} = \frac{1}{\lim\limits_{a} f}.$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}$ torlódási pontja a $K = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ halmaznak, legyen $F = \lim\limits_{a} f \in \mathbb{K}$ és $G = \lim\limits_{a} g$, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. Az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in K: \ 0 < |x-a| < \delta_f \ \Rightarrow \ |f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x \in K: \ 0 < |x-a| < \delta_g \ \Rightarrow \ |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in K: \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |(f+g)(x) - (F+G)| \leq |f(x) - F| + |g(x) - G| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (f+g) = F + G$.

2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K: \ 0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - F| < k,$$

vagyis minden $0 < |x-a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |F| + k.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in K: \ 0 < |x-a| < \delta_f \ \Rightarrow \ |f(x) - F| < \varepsilon'$$
$$\forall x \in K: \ 0 < |x-a| < \delta_g \ \Rightarrow \ |g(x) - G| < \varepsilon'.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $0 < |x-a| < \delta$ esetén

$$|(fg)(x) - (FG)| = |f(x)g(x) - f(x)G + f(x)G - FG| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - G| + |G| \cdot |f(x) - F| \leq$$
$$\leq (|F| + k) \cdot \varepsilon' + |G| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|F| + |G| + k) \leq \varepsilon,$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{|F| + |G| + k}$. Vagyis az ε, F, G és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1, δ_f, δ_g mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.

3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda F| = |\lambda| \cdot |f(x) - F| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda F$.

4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K: \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - F| < \varepsilon$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $0 < |x-a| < \delta$ esetén

$$||f(x)| - |F|| \leq |f(x) - F| < \varepsilon$$
$$\left|\overline{f(x)} - \overline{F}\right| = \left|\overline{f(x) - F}\right| = |f(x) - F| \leq |f(x) - F| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a |f| = |F|$ és $\lim\limits_a \overline{f} = \overline{F}$.

6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $0 < |x-a| < \delta_1$ esetén $|f(x) - F| < \dfrac{|F|}{2}$. Ekkor minden $0 < |x-a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \dfrac{|F|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $0 < |x-a| < \delta_f$ esetén $|f(x) - F| < \dfrac{\varepsilon\,|F|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f}$ és $0 < |x-a| < \delta$ esetén

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F}\right| = \frac{|f(x) - F|}{|f(x)| \cdot |F|} < \frac{|f(x) - F|}{\frac{|F|}{2} \cdot |F|} < \frac{2}{|F|^2} \cdot \frac{\varepsilon\,|F|^2}{2} = \varepsilon.$$

6.11. Tétel. *Ha az $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és létezik a $\lim\limits_a f, \lim\limits_a g$ határérték, akkor $\lim\limits_a f \leq \lim\limits_a g$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ és vezessük be a $H = \operatorname{Dom} f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \leq g(x)$, valamint létezik a $\lim\limits_a f, \lim\limits_a g$ határérték. Legyen $F = \lim\limits_a f$, $G = \lim\limits_a g$ és tegyük fel, hogy $G < F$. Az $\varepsilon = \dfrac{F-G}{2}$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ esetén, ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \varepsilon$ és $|g(x) - G| < \varepsilon$. Vagyis $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén az $F - \varepsilon < f(x)$ egyenlőtlenség miatt $\dfrac{F+G}{2} < f(x)$, és a $g(x) < G + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $g(x) < \dfrac{F+G}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $f(x) \leq g(x)$.

6.12. Tétel. *(Rendőr-elv függvények határértékére.) Ha az $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és valamely $A \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = A$ teljesül, akkor létezik a $\lim\limits_a g$ határérték és $\lim\limits_a g = A$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ teljesül és vezessük be a $H = \operatorname{Dom} f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint $A \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = A$. Bevezetve az $\alpha = g - f$ és a $\beta = h - f$ függvényeket, minden $x \in H$ esetén $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ teljesül. A $\lim\limits_a \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén $-\varepsilon < \beta(x) < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha(x)| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim\limits_a \alpha = 0$. Ekkor a $g = \alpha + f$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban és $\lim\limits_a g = \lim\limits_a \alpha + \lim\limits_a f = A$.

6.13. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_z f = F \in \mathbb{K}$ határérték és legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ a z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ 0 < |x - z| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - F| < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - F| < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = F$.
Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat, valamint

$$a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in \mathbb{K}$ szám, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim\limits_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, \ |f(x) - A| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}\,,\ |f(x) - A| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozat, melynek határértéke z. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - A| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

Kiegészítés. A sorozatok határértékére vonatkozó Cauchy-kritériumhoz hasonló állítás függvények határértékére is megfogalmazható és a határértékre vonatkozó átviteli elv segítségével egyszerűen igazolható.

6.14. Tétel. *(Cauchy-kritérium határértékre.)*

1. *Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ekkor*

$$\exists \lim_a f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \operatorname{Dom} f \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\}) \ \big(|f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

2. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és ∞ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ekkor*

$$\exists \lim_\infty f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \operatorname{Dom} f \cap]\delta, \infty[\ \big(|f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

◊

6.3. Féloldali határérték

6.15. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$.

– Ha a torlódási pontja az $]a, \infty[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]a,\infty[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]a,\infty[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény jobb oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim\limits_{a+} f$ vagy a $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

– Ha a torlódási pontja a $]-\infty, a[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]-\infty,a[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]-\infty,a[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény bal oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim\limits_{a-} f$ vagy a $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

Magyarázat. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a, A \in \mathbb{R}$. A fenti definíció szerint az f függvénynek a jobb oldali határértéke az a pontban A, pontosan akkor, ha a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap]a, \infty[$ halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \ (a < x < a + \delta \ \to \ |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül. Hasonlóan, az f függvénynek a bal oldali határértéke az a pontban A, pontosan akkor, ha a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap]-\infty, a[$ halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \ (a - \delta < x < a \ \to \ |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül.

6.16. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, ha ott létezik jobb, illetve bal oldali határértéke és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a-} f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és tegyük fel, hogy az a pontban létezik az f függvénynek határértéke. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon$$

teljesül. Ekkor minden $x \in]a-\delta, a[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon,$$

vagyis létezik $\lim\limits_{a-} f$ és $\lim\limits_{a-} f = \lim\limits_a f$. Hasonlóan igazolható, hogy létezik $\lim\limits_{a+} f$ és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_a f$.
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és tegyük fel, hogy az f függvénynek az a pontban létezik jobb, illetve bal oldali határértéke, és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a-} f$ teljesül. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a-\delta_1, a[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_{a-} f \right| < \varepsilon$$

teljesül és létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a, a+\delta_2[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_{a+} f \right| < \varepsilon.$$

Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor $A = \lim\limits_{a-} f = \lim\limits_{a+} f$ olyan szám, hogy minden $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$ esetén

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

vagyis létezik $\lim\limits_a f$ határérték és $\lim\limits_a f = A$.

6.4. Függvény folytonossága

6.17. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$. Az A halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A, \mathbb{K}) \triangleq \{f : A \to \mathbb{K} |\ f \text{ folytonos}\}$$

jelölést használjuk.

6.18. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{K}$. Ha az f és g függvény folytonos az a pontban, akkor az*

$$f+g, fg, cf, |f|, \overline{f}$$

függvények is folytonosak az a pontban, valamint ha $f(a) \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{f}$ függvény is folytonos az a pontban.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in K = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{K}$, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. A $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in K : \ |x-a| < \delta_f \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x \in K: \ |x-a| < \delta_g \ \Rightarrow \ |g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in \mathbb{K}: \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |(f+g)(x)-(f+g)(a)| \le |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $(f+g)$ függvény folytonos az a pontban.
2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K: \ |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x)-f(a)| < k,$$

vagyis minden $|x-a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |f(a)| + k.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in K: \ |x-a| < \delta_f \ \Rightarrow \ |f(x)-f(a)| < \varepsilon'$$
$$\forall x \in K: \ |x-a| < \delta_g \ \Rightarrow \ |g(x)-g(a)| < \varepsilon'.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $|x-a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned}|(fg)(x)-(fg)(a)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)| \le \\ &\le |f(x)|\cdot|g(x)-g(a)| + |g(a)|\cdot|f(x)-f(a)| \le \\ &\le (|f(a)|+k)\cdot\varepsilon' + |g(a)|\cdot\varepsilon' = \varepsilon'\cdot(|f(a)|+|g(a)|+k) \le \varepsilon,\end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{|f(a)|+|g(a)|+k}$. Vagyis az ε, $f(a)$, $g(a)$ és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1, δ_f, δ_g mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. A $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $|x-a| < \delta$, akkor $|f(x)-f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $|x-a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda|\cdot|f(x)-f(a)| < |\lambda|\cdot\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

Vagyis a λf függvény folytonos az a pontban.
4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K: \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $|x-a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned}&||f(x)|-|f(a)|| \le |f(x)-f(a)| < \varepsilon \\ &\left|\overline{f(x)} - \overline{f(a)}\right| = \left|\overline{f(x)-f(a)}\right| = |f(x)-f(a)| \le |f(x)-f(a)| < \varepsilon\end{aligned}$$

teljesül, vagyis az $|f|$ és a $\overline{f}$ függvény folytonos az a pontban.
6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $|x-a| < \delta_1$ esetén $|f(x)-f(a)| < \dfrac{|f(a)|}{2}$. Ekkor minden $|x-a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \dfrac{|f(a)|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $|x-a| < \delta_f$ esetén $|f(x)-f(a)| < \dfrac{\varepsilon\,|f(a)|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}\dfrac{1}{f}$ és $|x-a| < \delta$ esetén

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right| = \frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)|\cdot|f(a)|} < \frac{|f(x)-f(a)|}{\frac{|f(a)|}{2}\cdot|f(a)|} < \frac{2}{|f(a)|^2}\cdot\frac{\varepsilon\,|f(a)|^2}{2} = \varepsilon.$$

6.19. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$. Ekkor minden $f, g \in C(A, \mathbb{K})$ elemre és minden $c \in \mathbb{K}$ számra*

$$f + g, fg, cf, |f|, \overline{f} \in C(A, \mathbb{K}).$$

Bizonyítás. Az előző állítás kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

6.20. Tétel. *Folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ folytonos függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g \ \ |y - f(a)| < \delta_g \ \Rightarrow \ |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f \ \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$|x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

6.21. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : && 0 < |x - a| < \delta \quad \to \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : && |x - a| < \delta \quad \to \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

6.22. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ és $a, b, c \in \mathbb{K}$ olyan, melyre $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_b g = c$ és a torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \operatorname{Dom} g$;*
2. *$b \in \operatorname{Dom} g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ és $a, b, c \in \mathbb{K}$ olyan, melyre $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_b g = c$ és a torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.
Először tegyük fel, hogy $b \notin \operatorname{Dom} g$. A $\lim\limits_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim\limits_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek és $g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) = g\left(B_{\delta'}(b)\right)$ miatt

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.
Most tegyük fel, hogy $b \in \operatorname{Dom} g$ és g folytonos a b pontban. A g függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b)\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim\limits_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.

6.23. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozatra létezik a $\lim f \circ a$ határérték és $\lim f \circ a = f(z)$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $z \in \operatorname{Dom} f$, tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az z pontban és legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ |x - z| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(z)$. Visszafelé úgy bizonyítjuk az implikációt hogy feltesszük, hogy f nem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{x \in \operatorname{Dom} f |\ x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon\right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \operatorname{Dom} f |\ x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon\right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozat, melynek határértéke z. Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - f(z)| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

6.24. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazhoz létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ és $K = \operatorname{Dom} f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos függvény és $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_\delta(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup\limits_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.
$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz. Ekkor $\mathbb{K} \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K} \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K} \setminus (U \cap K)) = K \cap ((\mathbb{K} \setminus U) \cup (\mathbb{K} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{K} \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = \mathbb{K} \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.
$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{K} \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K} \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K} \setminus (Z \cap K)) = K \cap ((\mathbb{K} \setminus Z) \cup (\mathbb{K} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{K} \setminus Z)$$

teljesül, ahol ugyancsak felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = \mathbb{K} \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

6.25. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

6.26. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban szakadása van*, ha a függvény nem folytonos az a pontban.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban elsőfajú szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$, de $\lim\limits_{a-} f \neq f(a)$ vagy $\lim\limits_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban megszüntethető szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$ és $\lim\limits_{a-} f = \lim\limits_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban másodfajú szakadása van*, f nem folytonos az a pontban és nincs elsőfajú szakadása az a pontban.

6.5. Függvény folytonosságának elemi következményei

6.27. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a 6.24 folytonosság topologikus jellemzése alapján, minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i\in I}(V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i$$

teljesül, ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in J} f(V_i) \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

6.28. Tétel. *(Weierstrass tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$ melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 6.27 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a valós számokra vonatkozó 3.22 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.

6.29. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos injektív függvény. Ekkor a 6.27 tétel alapján a $K' = f(K)$ halmaz is kompakt. A 6.24 tétel felhasználásával úgy igazoljuk, hogy a $g = f^{-1}$ függvény folytonos. Megmutatjuk, hogy minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{g}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} g$ teljesül. Az f függvény injektivitása miatt $\overset{-1}{g}(A) = f(A)$. Az $A \cap K$ halmaz zárt és korlátos, ezért kompakt, valamint az f függvény folytonossága miatt $f(A \cap K)$ is kompakt halmaz, vagyis zárt. Legyen $Z = f(A \cap K)$. Mivel $\operatorname{Dom} g = K'$ és $Z \subseteq K'$, ezért $\overset{-1}{g}(A) = f(A) = f(A \cap K) = Z \cap \operatorname{Dom} g$.

6.30. Tétel. *(Bolzano-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $c \in]a, b[$, melyre $f(c) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Legyen

$$H = \{z \in [a, b] \mid \forall x \in [a, z] : \ f(x) < 0\}.$$

Ekkor H korlátos halmaz, tehát létezik szuprémuma, legyen $c = \sup H$.
Megmutatjuk, hogy $c \notin \{a, b\}$. Ha $c = a$, akkor az f függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $c = b$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]b - \delta, b[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak.
Végül igazoljuk, hogy $f(c) = 0$. Ha $f(c) < 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $f(c) > 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak. Mivel $f(c) > 0$ és $f(c) < 0$ is lehetetlen, ezért $f(c) = 0$.

6.31. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ekkor $\operatorname{Ran} f$ nyílt intervallum és f^{-1} folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növő függvény. Szigorúan monoton csökkenő függvényre teljesen hasonló a bizonyítás.
Először megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ran} f$ intervallum. Ehhez legyen $y_1, y_2 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges olyan pont, melyre $y_1 < y_2$. Legyen $x_1, x_2 \in I$ olyan, hogy $f(x_1) = y_1$ és $f(x_2) = y_2$. Ha $c \in]y_1, y_2[$, akkor a

$$h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) - c$$

folytonos függvényre $h(x_1)h(x_2) < 0$ teljesül, tehát a Bolzano-tétel alapján létezik olyan $x \in]x_1, x_2[$, hogy $f(x) = c$, vagyis $c \in \operatorname{Ran} f$. Ezért minden $y_1, y_2 \in \operatorname{Ran} f$, $y_1 \leq y_2$ esetén $[y_1, y_2] \subseteq \operatorname{Ran} f$ teljesül, amiből már következik, hogy $\operatorname{Ran} f$ intervallum.
Most megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ran} f$ nyílt halmaz. Ehhez legyen $y_0 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges pont és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$. Legyen $a = x_0 - \dfrac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \dfrac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$. Mivel f szigorúan monoton növő, ezért $y_1 < y_0 < y_2$. Legyen $r = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. Ekkor $B_r(y_0) \subseteq]y_1, y_2[$, és az elöbbi megállapítás alapján $\operatorname{Ran} f$ intervallum, ezért $B_r(y_0) \subseteq \operatorname{Ran} f$, vagyis y_0 belső pontja a $\operatorname{Ran} f$ halmaznak.
Végül megmutatjuk, hogy f^{-1} folytonos. Ehhez legyen $y_0 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges pont és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$. Legyen $a = x_0 - \dfrac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \dfrac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$ és tekintsük az

$$f|_{[a,b]} : [a, b] \to [y_1, y_2] \qquad x \mapsto f(x)$$

függvényt. Mivel ez folytonos bijekció, ezért a 6.29 tétel alapján az inverze is folytonos. Mivel $y_0 \in \operatorname{Int}[y_1, y_2] = \operatorname{Int}\operatorname{Dom}\left(f|_{[a,b]}\right)^{-1}$, valamint $f^{-1}|_{[y_1,y_2]} = \left(f|_{[a,b]}\right)^{-1}$ ezért az $f^{-1}|_{[y_1,y_2]}$ függvény is folytonos az y_0 pontban, vagyis az f^{-1} függvény is folytonos az y_0 pontban.

6.6. Függvény egyenletes folytonossága

6.32. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(|x - y| < \delta \ \to \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

6.33. Tétel. *Minden egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x - y| < \delta \ \to \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

6.34. Tétel. *(Heine tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H\right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $|x-y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A "háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|y-p| \leq |y-x| + |x-p| < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \leq \delta(p),$$

ezért

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(p)| + |f(p) - f(y)| < \varepsilon.$$

6.7. Hatványsorok határértéke

6.35. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha az a sorozat által meghatározott P_a hatványsor konvergenciasugara R_a, akkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara is R_a.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Megmutatjuk, hogy

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

teljesül, ebből már következik az állítás.
1. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, melyre $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < q$. Ekkor a lim sup definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\left\{\sqrt[n]{|a_n|} \mid n > N\right\} < q$. Vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n| < q^n$. Tehát minden $n > N$ számra

$$\begin{aligned}
(n+1)\,|a_{n+1}| &< (n+1)q^{n+1} \\
\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} &< \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q} \\
\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} &\leq \limsup_n \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q}
\end{aligned}$$

teljesül. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q} = q,$$

ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \leq q.$$

Mivel minden $q \in \mathbb{R}^+$ paraméterre teljesül a

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < q \quad \to \quad \limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \leq q$$

következtetés, ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \leq \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

2. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, melyre $\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} < q$. Ekkor a lim sup definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\left\{\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \mid n > N\right\} < q$. Vagyis minden $n > N$ esetén $(n+1)\,|a_{n+1}| < q^n$. Tehát minden $n > N$ számra

$$|a_{n+1}| < q^{n+1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$|a_n| < q^n \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{n} \qquad \forall n > N$$
$$\sqrt[n]{|a_n|} < q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$
$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

teljesül. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = q,$$

ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq q.$$

Mivel minden $q \in \mathbb{R}^+$ paraméterre teljesül a

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} < q \quad \to \quad \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

következtetés, ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}.$$

6.36. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in]0, R_a - |z_0|[$, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat, melyhez tartozó hatványsor konvergencisugara R_a és legyen

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Legyen $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in]0, R_a - |z_0|[$. Legyen $z \in B_\rho(0)$, ekkor

$$P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z^k - z_0^k) - (z - z_0)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}z_0^k =$$
$$= (z - z_0)\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - (z - z_0)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} =$$
$$= (z - z_0)\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1}\right) =$$
$$= (z - z_0)\sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1}\right).$$

Ennek egy részlete

$$\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1}((z - z_0) + z_0)^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z - z_0)^m z_0^{j-m}\right) z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z - z_0)^m z_0^{k-1-m} - k z_0^{k-1} =$$
$$= \sum_{m=0}^{k-1}\left(\sum_{j=m}^{k-1}\binom{j}{m}\right)(z - z_0)^m z_0^{k-1-m} - k z_0^{k-1} = \sum_{m=1}^{k-1}\left(\sum_{j=m}^{k-1}\binom{j}{m}\right)(z - z_0)^m z_0^{k-1-m}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{j=m}^{k-1}\binom{j}{m} \le \sum_{j=m}^{k-1}\binom{k-1}{m} = (k-m)\binom{k-1}{m} \le k\binom{k-1}{m}$$

a fenti kifejezésre

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1}\right| &\le \sum_{m=1}^{k-1} k\binom{k-1}{m} |z-z_0|^m |z_0|^{k-1-m} \le \\
&\le |z-z_0|\, k \sum_{m=1}^{k-1}\binom{k-1}{m-1+1} |z-z_0|^{m-1} |z_0|^{k-1-m} = \\
&= |z-z_0|\, k \sum_{m=0}^{k-2}\binom{k-1}{m+1} |z-z_0|^{m} |z_0|^{k-2-m} = \\
&= |z-z_0|\, k \sum_{m=0}^{k-2}\left(\frac{k-1}{m+1}\right)\binom{k-2}{m} |z-z_0|^{m} |z_0|^{k-2-m} \le \\
&\le |z-z_0|\, k \sum_{m=0}^{k-2} k\binom{k-2}{m} |z-z_0|^{m} |z_0|^{k-2-m} = \\
&= |z-z_0|\, k^2(|z-z_0|+|z_0|)^{k-2}
\end{aligned}$$

adódik. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
&|P_a(z) - P_a(z_0) - (z-z_0)P_{a'}(z_0)| \le |z-z_0| \left|\sum_{k=2}^{\infty} a_k |z-z_0|\, k^2(|z-z_0|+|z_0|)^{k-2}\right| \le \\
&\le |z-z_0|^2 \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|\, k^2(|z-z_0|+|z_0|)^{k-2} \le |z-z_0|^2 \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|\, k^2(\rho+|z_0|)^{k-2}.
\end{aligned}$$

Mivel $\rho + |z_0| < R_a$, ezért az 5.20 Cauchy-féle gyökkritérium alapján a

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k|\, k^2(\rho+|z_0|)^{k-2}$$

sor konvergens.
Tehát igazoltuk, hogy a

$$K = \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \cdot k^2 \cdot (\rho+|z_0|)^{k-2}$$

számra igaz, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z-z_0)P_{a'}(z_0)| < |z-z_0|^2 \cdot K.$$

teljesül.

6.37. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és tekintsük az R_a konvergenciasugarú P_a hatványsort. Ekkor $R_a > 0$ esetén, minden $z \in B_{R_a}(0)$ elemre $\lim\limits_{x\to z} P_a(x) = P_a(z)$ teljesül, vagyis a hatványsor folytonos a $B_{R_a}(0)$ halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Az a sorozathoz rendelt hatványsor konvergenciasugara legyen $R_a > 0$ és legyen $z_0 \in B_{R_a}(0)$. Az előző 6.36 tétel miatt minden $\rho \in]0, R_a - |z_0|[$ esetén létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ számra

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

Ekkor

$$|P_a(z) - P_a(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K + |z - z_0| \cdot |P_{a'}(z_0)|,$$

amiből a $\lim\limits_{z \to z_0}$ határértékképzés után

$$\lim_{z \to z_0} |P_a(z) - P_a(z_0)| = 0$$

adódik.

6.8. Elemi függvények folytonossága

6.38. Tétel. *Az* exp, sin, cos, tg, ctg, sh, ch, th *és* cth *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az előző állítás és az 5.22 tétel miatt nyilvánvaló.

6.39. Tétel. *(Nevezetes határértékek.)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bizonyítás. Az exponenciális és a szinusz függvény hatványsorából adódik.

6.40. Tétel. *Az* $\exp|_{\mathbb{R}}$ *függvényre* $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ *teljesül és a* log *függvényre pedig* $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$.

Bizonyítás. Csak a $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ állítást kell igazolni, hiszen a log függvény az exp függvény inverze. Legyen $a > 1$. Ekkor tekintsük a folytonos

$$\varphi : [0, a] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \exp(x) - a$$

függvényt. Mivel $\varphi(0) = 1 - a < 0$ és $\varphi(a) - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} > a$ ezért a 6.30 Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x_0 \in [0, a]$ pont, melyre $\varphi(x_0) = 0$, vagyis $\exp(x_0) = a$ teljesül. Tehát $a \in \operatorname{Ran} \exp$.
Ha $0 < a < 1$, akkor $1 < \frac{1}{a} \in \operatorname{Ran} \exp$, tehát létezik olyan x_0, melyre $\exp(x_0) = \frac{1}{a}$. Mivel $\exp(-x_0) = \frac{1}{\exp(x_0)} = a$, ezért $a \in \operatorname{Ran} \exp$.

6.41. Tétel. *(A logaritmus függvény.)* *A* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos, szigorúan monoton növő bijektív függvény.*

Bizonyítás. A 6.40 tétel alapján $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$, valamint mivel $\operatorname{Dom} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ és $(\exp|_{\mathbb{R}})^{-1} = \log$, ezért $\operatorname{Ran} \log = \mathbb{R}$. Az 5.42 tétel alapján az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény szigorúan monoton növő, ezért a log függvény is szigorúan monoton növő vagyis injektív függvény. Ezek alapján a $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény bijekció.
Mivel $\exp|_{\mathbb{R}}$ nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 6.31 tétel alapján az inverze is folytonos, vagyis a log függvény folytonos.

6.42. Tétel. *(A hatványfüggvény folytonossága.)* *Minden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén az*

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^\alpha$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter. Mivel a $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, az

$$M_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \alpha x$$

és az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény folytonos, ezért az $\exp \circ M_\alpha \circ \log$ függvény is folytonos, ami pedig éppen az $\mathrm{id}^\alpha_{\mathbb{R}^+}$ függvény.

6.43. Tétel. *(A π szám bevezetése.)*

1. *Minden $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ esetén $\sin x > 0$.*
2. *A $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $\left]0, \sqrt{3}\right[$ intervallumon.*
3. $\cos\sqrt{3} < -\dfrac{1}{8}$
4. *Létezik egyetlen olyan $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, ekkor

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \cdots = \\
&= x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{5!}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{10\cdot 11}\right) + \cdots \geq \\
&\geq x\left(1 - \frac{3}{6}\right) + \frac{x^5}{5!}\cdot\left(1 - \frac{3}{6\cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!}\cdot\left(1 - \frac{3}{10\cdot 11}\right) + \cdots \geq \\
&\geq x\left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{x}{2} > 0.
\end{aligned}$$

2. Az 5.49 tételben szereplő addíciós formulák alapján minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right).$$

Tehát elég azt megmutatni, hogy az $x_1, x_2 \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, $x_1 < x_2$ esetben $\sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$ és $\sin\left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Mivel $\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{x_2 - x_1}{2} \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, ezért az első pont alapján $\sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$, valamint $\sin\left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$.

3. A cos függvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}
\cos\sqrt{3} &= 1 - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{4!} - \left(\frac{3^3}{6!} - \frac{3^4}{8!}\right) - \left(\frac{3^5}{10!} - \frac{3^6}{12!}\right) - \cdots = \\
&= -\frac{1}{8} - \frac{3^3}{6!}\left(1 - \frac{3}{7\cdot 8}\right) - \frac{3^5}{10!}\left(1 - \frac{3}{11\cdot 12}\right) - \cdots < -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

adódik.

4. A cos függvény folytonossága miatt a Bolzano-tétel alapján adódik, hogy létezik olyan $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ szám, melyre $\cos x = 0$, valamint a cos függvény $\left[0, \sqrt{3}\right]$ intervallumon való szigorú monotonitásából adódik, hogy legfeljebb egy ilyen x szám létezhet ebben az intervallumban.

6.44. Definíció. Legyen $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ az a szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül, ekkor a $\pi \triangleq 2x$ számot *Ludolf-féle számnak* vagy *pi-nek* nevezzük és a görög π (pi) betűvel jelöljük.
(értéke megközelítőleg $\pi \approx 3.1415926535897932385$.)

Megjegyzés. A fenti tételben szereplő számoláshoz hasonlóan igazolható, hogy $\cos\dfrac{3}{2} > 0$ és egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\sqrt{3} < 1,74$. Tehát eddigi eredményeink alapján $3 < \pi < 3,48$ adódik.

$\Diamond$

6.9. Trigonometrikus függvények tulajdonságai

6.45. Tétel. *(Nevezetes szögek.)*

1. *A* $\frac{\pi}{2}$ *és a* π *szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad \sin\frac{\pi}{2}=1 \qquad \cos\pi=-1 \qquad \sin\pi=0$$

2. *Minden* $x\in\mathbb{C}$ *esetén*

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \qquad \sin(x+\pi)=-\sin x \qquad \sin(x+2\pi)=\sin x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x \qquad \cos(x+\pi)=-\cos x \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

3. *Minden* $x\in\mathbb{C}$ *számra*

$$\mathrm{e}^{x+2\pi\,\mathrm{i}}=\mathrm{e}^x, \qquad \operatorname{sh}(x+2\pi\,\mathrm{i})=\operatorname{sh}x, \qquad \operatorname{ch}(x+2\pi\,\mathrm{i})=\operatorname{ch}x.$$

4. *A* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ *és a* $\frac{\pi}{3}$ *szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bizonyítás. 1. A $\cos\frac{\pi}{2}=0$ a π szám definíciója alapján teljesül. Mivel $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, ezért $\sin\frac{\pi}{2}\in\{-1,1\}$. A 6.43 tétel alapján $\sin\frac{\pi}{2}>0$, ezért $\sin\frac{\pi}{2}=1$. A $\sin\pi$ és a $\cos\pi$ érték az 5.49 tételben szereplő addíciós formulával igazolható.
2–3. Az egyenlőségek az 5.49 tételben szereplő addíciós formulákkal igazolhatók.
4. Legyen $a=\sin\frac{\pi}{6}$ és $b=\cos\frac{\pi}{6}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin\frac{2\pi}{6}=2ab \quad \text{és} \quad \cos\frac{2\pi}{6}=b^2-a^2,$$

valamint

$$\sin\frac{3\pi}{6}=3ab^2-a^3 \quad \text{és} \quad \cos\frac{3\pi}{6}=b^3-3a^2b.$$

A $\frac{\pi}{2}$ szinuszát és koszinuszát az 1. pont alapján beírva az

$$1=3ab^2-a^3 \quad \text{és} \quad 0=b^3-3a^2b.$$

egyenletrendszer adódik. Ha a $b=0$ teljesülne, akkor az első egyenlet alapján $a<0$ teljesülne, azonban $\frac{\pi}{6}\in\left]0,\sqrt{3}\right[$, ezért a 6.43 tétel alapján $a>0$. Tehát $b\neq 0$. A második egyenlet miatt ekkor $b^2=3a^2$, amit az első egyenletbe írva $1=8a^3$ adódik. Innen már a és b értéke egyszerűen számolható.
A $\sin\frac{\pi}{3}$ és a $\cos\frac{\pi}{3}$ értéke számolható a $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$ összefüggésre alkalmazott addíciós formulákból.
Legyen $a=\sin\frac{\pi}{4}$ és $b=\cos\frac{\pi}{4}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin\frac{2\pi}{4}=2ab \quad \text{és} \quad \cos\frac{2\pi}{4}=b^2-a^2,$$

tehát

$$1=2ab \quad \text{és} \quad 0=b^2-a^2.$$

Mivel $\sin\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{4}>0$, ezért a második egyenletből $a=b$ adódik, amiből pedig $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kiegészítés. A függelékben a nevezetes szögekről szóló 6.45 tétel bizonyításához hasonló gondolatmenettel igazoljuk még a

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\qquad \cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

egyenlőséget (20.25 tétel) és megadjuk $\sin\frac{\pi}{17}$ és $\cos\frac{\pi}{17}$ értékét is. A következő tétel megmutatja, hogy mely α szögek esetén fejezhető ki $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$.

6.46. Definíció. *Fermat-prímeknek* nevezzük az $F_n=2^{(2^n)}+1$ $(n\in\mathbb{N})$ alakú prímszámokat.

Az eddig ismert Fermat-prímek: $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$ és $F_4=65537$. Nem ismert, hogy létezik-e ezeken kívül Fermat-prím.

6.47. Tétel. *Pontosan azon $x\in\mathbb{R}$ számok esetén fejezhető ki $\sin x$ és $\cos x$ értéke az összeadás, a szorzás, az osztás és a négyzetgyökvonás műveletek véges kombinációjával, ha*

$$x=\frac{m\pi}{2^n\cdot\prod\limits_{i=0}^{k}F_i^{n_i}}$$

alakú, ahol $m\in\mathbb{Z}$, $n,k\in\mathbb{N}$, F_i az i-edik Fermat-prím és minden $i=0,\dots,k$ esetén $n_i\in\{0,1\}$.

◊

6.48. Tétel. *(Euler képlet.)* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}=-1$

Bizonyítás. A 6.45 és az 5.41 Euler-tétel következménye.

6.49. Tétel. *(Trigonometrikus függvények periódusa.)*

1. *Minden $x\in\,]0,\pi[$ esetén $\sin x>0$, minden $x\in\,]\pi,2\pi[$ esetén $\sin x<0$.*
2. *A $\sin x=0$ egyenletnek $x\in[0,2\pi[$ esetén $x\in\{0,\pi\}$ az összes megoldása.*
3. *A $\sin$ függvény periódusa 2π.*
4. *Minden $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x>0$, minden $x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x<0$.*
5. *A $\cos x=0$ egyenletnek $x\in[0,2\pi[$ esetén $x\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ az összes megoldása.*
6. *A $\cos$ függvény periódusa 2π.*

Bizonyítás. 1. A 6.45 tétel alapján minden $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ számra $\sin x>0$. Ha $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, akkor az előző megállapítás és a $\sin x=\sin(\pi-x)$ azonosság miatt $\sin x>0$. Mivel $\sin\frac{\pi}{2}=1>0$, ezért minden $x\in\,]0,\pi[$ esetén $\sin x>0$. Ha $x\in\,]\pi,2\pi[$, akkor a $\sin x=-\sin(x-\pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\sin x<0$.
2. Az 1. pont és a 6.45 tétel alapján nyilvánvaló.
3. Tegyük fel, hogy létezik a sin függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p. Ekkor $p\in\,]0,2\pi[$, valamint $0=\sin 0=\sin(0+p)$. A 2. pont alapján ekkor $p=\pi$. Azonban

$$1=\sin\frac{\pi}{2}\neq\sin\left(\frac{\pi}{2}+p\right)=-1$$

miatt π sem lehet a periódus. Tehát a sin függvény legkisebb periódusa 2π.
4. A 6.45 tétel alapján minden $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x>0$, továbbá a cos függvény párossága és $\cos 0=1$ miatt minden $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x>0$. Ha $x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, akkor a $\cos x=-\cos(x-\pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\cos x<0$.
5. Az előző pont alapján ha $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, akkor $\cos x>0$; ha $x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, akkor $\cos x<0$; ha $x\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$, akkor $\cos x=-\cos(x-\pi)$ miatt $\cos x>0$. Tehát a $\cos x=0$ egyenletnek a $[0,2\pi[$

intervallumon csak $\frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2}$ lehet a megoldása és a 6.45 tétel alapján ezek valóban megoldások.
6. Tegyük fel, hogy létezik a cos függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p. Ekkor $p \in \,]0, 2\pi[$, valamint $0 = \cos -\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + p\right)$. A 4. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban $1 = \cos 0 \neq \cos(0 + p) = -1$ miatt π sem lehet a periódus. Tehát a cos függvény legkisebb periódusa 2π.

6.50. Tétel. *Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.*

1. *A* cos *függvény szigorúan monoton csökkenő a* $[0, \pi]$ *intervallumon és*

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \cos x$$

bijekció.

2. *A* sin *függvény szigorúan monoton növő a* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon és*

$$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \sin x$$

bijekció.

3. *A* tg *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz, valamint szigorúan monoton növő a* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *intervallumon és*

$$\operatorname{tg}|_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{tg} x$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Ha $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, akkor $0 < \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$ miatt a 6.49 tétel alapján $\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ halmazon. Mivel $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$ és a cos függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran} \cos|_{[0,\pi]} = [-1, 1]\,.$$

A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.
2. Ha $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, akkor $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ miatt a 6.49 tétel alapján $\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$, valamint $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$ miatt $\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\sin x_1 - \sin x_2 = -2 \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a sin függvény szigorúan monoton növő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon. Mivel $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ és a sin függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran} \sin|_{\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} = [-1, 1]\,.$$

A $\sin|_{\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.
3. A $\cos z = 0$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásához legyen $z = a + \mathrm{i}\, b$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. A $\cos(a + \mathrm{i}\, b) = 0$ egyenlet az 5.49 tétel alapján

$$\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,a - 2b} = -1$$

alakban íható fel, ami az 5.41 alapján az

$$\mathrm{e}^{-2b}\left(\cos(2a)+\mathrm{i}\sin(2a)\right)=-1$$

egyenlethez vezet. A két oldal abszolútértékét véve $\mathrm{e}^{-2b}=1$ adódik, vagyis $b=0$. A fenti egyenlet valós és képzetes részét véve az

$$\cos(2a)=-1 \qquad \sin(2a)=0$$

egyenleteket kapjuk. Keressük ennek a megoldását a $2a\in[0,2\pi[$ feltétel mellett. Ekkor a 6.49 tétel második pontja alapján a $\sin(2a)=0$ egyenletből $2a=0$ vagy $2a=\pi$ következik. A $2a=0$ esetben $\cos(2a)\neq-1$, a $2a=\pi$ esetben azonban $\cos(2a)=-1$. Tehát a $[0,2\pi[$ intervallumban egyetlen megoldás van $a=\dfrac{\pi}{2}$. A trigonometrikus függvények 2π szerinti periodicitása miatt a $\cos z=0$ egyenlet megoldása

$$z\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|\ k\in\mathbb{Z}\right\},$$

vagyis $\operatorname{Dom}\operatorname{tg}=\mathbb{C}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Legyen $-\dfrac{\pi}{2}\leq x_1<x_2\leq\dfrac{\pi}{2}$. Ekkor $0<x_2-x_1<\pi$, tehát a 6.49 tétel 1. pontja alapján $\sin(x_2-x_1)>0$. Vagyis a

$$\operatorname{tg}x_1-\operatorname{tg}x_2=\frac{-1}{\cos x_1\cos x_2}\sin\left(x_2-x_1\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a tg függvény szigorúan monoton növő a $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ halmazon.

A tg függvény páratlan és $\operatorname{tg}0=0$ ezért $\operatorname{Ran}\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}=\mathbb{R}$ igazolásához elég megmutatni, hogy minden $y\in\mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, melyre $\operatorname{tg}x=y$ teljesül. Legyen $y\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ és a sin függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_1\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\left]\dfrac{\pi}{2}-\delta_1,\dfrac{\pi}{2}\right[$ esetén $\sin x>\dfrac{1}{2}$. Mivel $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ és a cos függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_2\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\left]\dfrac{\pi}{2}-\delta_2,\dfrac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x<\dfrac{1}{2y}$. Legyen $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ és $x_0\in\left]\dfrac{\pi}{2}-\delta_2,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tetszőleges pont. Ekkor $\sin x_0>\dfrac{1}{2}$ és $\cos x_0<\dfrac{1}{2y}$, tehát

$$\operatorname{tg}x_0=\frac{\sin x_0}{\cos x_0}>\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2y}}=y.$$

A folytonos tg függvényre a $[0,x_0]$ intervallumon $\operatorname{tg}0<y<\operatorname{tg}x_0$ teljesül, vagyis a Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x\in]0,x_0[$, melyre $\operatorname{tg}x=y$, ezért $y\in\operatorname{Ran}\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.

6.51. Definíció. *Elemi függvények inverzei.*

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét *arkusz szinusz függvénynek* nevezzük, jele arcsin, vagyis
$$\arcsin\triangleq\left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$
2. A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény inverzét *arkusz koszinusz függvénynek* nevezzük, jele arccos, vagyis
$$\arccos\triangleq\left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$
3. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét *arkusz tangens függvénynek* nevezzük, jele arctg, vagyis
$$\operatorname{arctg}\triangleq\left(\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}.$$

6.52. Tétel. *Az* arcsin *az* arccos *és az* arctg *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az arcsin és az arccos függvény a 6.29 tétel alapján folytonos. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ függvény nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 6.31 tétel alapján az inverze is folytonos.

6.10. Hiperbolikus függvények tulajdonságai

6.53. Tétel. *Hiperbolikus függvények monotonitása.*

1. *A* ch *függvény szigorúan monoton növő a* $[0,\infty[$ *halmazon és*

$$\operatorname{ch}|_{[0,\infty[} : [0,\infty[\to [1,\infty[\qquad x \mapsto \operatorname{ch} x$$

bijekció.

2. *Az* sh *függvény szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*

$$\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{sh} x$$

bijekció.

3. *A* th *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi \mathrm{i}}{2} + k\pi \mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ *halmaz, szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*

$$\operatorname{th}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to]-1,1[\qquad x \mapsto \operatorname{th} x$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Megmutatjuk, hogy $0 < x$ esetén $0 < \operatorname{sh} x$. Ekkor a $q = \mathrm{e}^x$ jelöléssel $1 < q$ adódik és az igazolandó

$$\frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right) > 0$$

egyenlőtlenség következik az $1 < q^2$ egyenlőtlenségből. Ha $0 \le x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_1 + x_2}{2}$ és $0 < \frac{x_2 - x_1}{2}$, ezért a

$$\operatorname{ch} x_1 - \operatorname{ch} x_2 = -2 \operatorname{sh}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

azonosság alapján a ch függvény szigorúan monoton növő a $[0,\infty[$ halmazon.
Most igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén $\operatorname{ch} x > 1$. A $q = \mathrm{e}^x$ jelöléssel $1 < q$ és ekkor

$$\operatorname{ch} x > 1 \quad \leftrightarrow \quad q + \frac{1}{q} - 2 > 0 \quad \leftrightarrow \quad (q-1)^2 > 0.$$

Legyen $q \in [1,\infty[$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in [0,\infty[$, melyre $\operatorname{ch} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} &= 2q \\ (\mathrm{e}^x)^2 - 2q\,\mathrm{e}^x + 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^x &= \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 - 4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 - 1} \end{aligned}$$

Mivel $q + \sqrt{q^2-1} \ge 1$, ezért $q + \sqrt{q^2-1} \in \operatorname{Dom} \log$, sőt $\log\left(q + \sqrt{q^2-1}\right) \ge 0$, vagyis az

$$x = \log\left(q + \sqrt{q^2-1}\right) \in [0,\infty[$$

számra $\operatorname{ch} x = q$ teljesül.
A ch függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.
2. Mivel minden $x \in [0,\infty[$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$ és a ch függvény páros, ezért minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$. Ha $\le x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_2 - x_1}{2}$, vagyis az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$, ezért a

$$\operatorname{sh} x_1 - \operatorname{sh} x_2 = -2 \operatorname{ch}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

azonosság alapján az sh függvény szigorúan monoton növő a valós számok halmazán.
Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, melyre $\operatorname{sh} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2q \\ (\mathrm{e}^x)^2 - 2q\,\mathrm{e}^x - 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^x &= \frac{2q \pm \sqrt{4q^2+4}}{2} = q \pm \sqrt{1+q^2} \end{aligned}$$

Mivel $q + \sqrt{1+q^2} > 0$, ezért $q + \sqrt{1+q^2} \in \operatorname{Dom} \log$, vagyis az

$$x = \log\left(q + \sqrt{1+q^2}\right) \in \mathbb{R}$$

számra $\operatorname{sh} x = q$ teljesül.
Az sh függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.
3. A $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet az 5.49 tétel alapján a $\cos(\mathrm{i}\, z) = 0$ egyenlettel ekvivalens, vagyis a 6.50 tétel alapján a $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{ \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

vagyis $\operatorname{Dom} \operatorname{th} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Legyen $x_1 < x_2$. Ekkor $0 < x_2 - x_1$, tehát az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh}(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\operatorname{th} x_1 - \operatorname{th} x_2 = \frac{-1}{\operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2} \operatorname{sh}(x_2 - x_1)$$

azonosság alapján a th függvény szigorúan monoton növő a valós számok halmazán.
Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a

$$\operatorname{th} x < 1 \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \quad \leftrightarrow \quad 0 < \mathrm{e}^{-x}$$

ekvivalencia alapján $\operatorname{th} x < 1$, valamint a

$$-1 < \operatorname{th} x \quad \leftrightarrow \quad -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \quad \leftrightarrow \quad 0 < \mathrm{e}^x$$

ekvivalencia alapján $\operatorname{th} x < -1$.
A fenti bizonyításokhoz hasonlóan adott $q \in \left]-1, 1\right[$ megkeressük azt az $x \in \mathbb{R}$ számot, melyre $\operatorname{th} x = q$.
Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} &= q \\ \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} &= q \\ \mathrm{e}^{2x} - 1 &= q\,\mathrm{e}^{2x} + q \\ \mathrm{e}^{2x} &= \frac{1+q}{1-q} \end{aligned}$$

Mivel $\frac{1+q}{1-q} > 0$, ezért $\frac{1+q}{1-q} \in \operatorname{Dom} \log$, vagyis az

$$x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+q}{1-q}\right)$$

számra $\operatorname{th} x = q$ teljesül.
Az th függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

6.54. Definíció. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

– Az $\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area szinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arsh, vagyis

$$\operatorname{arsh} \triangleq (\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

– A $\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ függvény inverzét *area koszinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arch, vagyis

$$\operatorname{arch} \triangleq \left(\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}\right)^{-1}.$$

– A $\operatorname{th}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area tangens hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arth, vagyis

$$\operatorname{arth} \triangleq (\operatorname{th}|_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

6.55. Tétel. *Area hiperbolikus függvények.*

1. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arsh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
2. *Minden* $x \in [1,\infty[$ *esetén* $\operatorname{arch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
3. *Minden* $x \in]-1,1[$ *esetén* $\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Bizonyítás. Az előző 6.53 tétel bizonyításban már levezettük ezeket a formulákat.

6.56. Tétel. *Az* arsh *az* arch *és az* arth *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján ezek a függvények folytonos függvények kompozíció, ezért folytonosak.

7. Differenciálszámítás egy dimenzióban

7.1. Differenciálhatóság

7.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény differenciálható*, vagy *deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$$
teljesül. Ezt az A számot az f *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a
$$f' : \left\{ a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \mid \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right\} \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
függvényt.
- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Jelölés. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváltjára használjuk még a $\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x}$ jelölést is.

7.2. Definíció. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \to J$ függvény *diffeomorfizmus*, ha bijekció, differenciálható és az inverze is differenciálható.

7.3. Tétel. *(A differenciálhatóság általános jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|} = 0.$$
Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel,hogy az f függvény differenciálható az a pontban, és legyen $c = f'(a)$. Ekkor a derivált definíciója alapján
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a} = 0,$$
vagyis
$$0 = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a} \right| = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|} \right|,$$
amiből
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|} = 0$$
következik.
Most tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ olyan szám, melyhez létezik $c \in \mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|} = 0.$$
Ekkor
$$0 = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|} \right| = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a} \right|,$$
vagyis
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a} = 0,$$
amiből
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c = 0,$$
következik, tehát f differenciálható az a pontban és $f'(a) = c$.

7.4. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x-a| < \delta \ \to \ |f(x) - f(a) - c(x-a)| \le \varepsilon \cdot |x-a|\big).$$

Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

Bizonyítás. Az előző állításból és a határérték definíciójából következik.

7.5. Tétel. *Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$, $f'(a) = A$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a differenciálhatóság jellemzése alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x-a| < \delta \ \to \ |f(x) - f(a) - A(x-a)| \le \varepsilon \cdot |x-a|\big).$$

Vagyis minden $|x-a| < \delta$ számra

$$|f(x) - f(a)| \le (|A| + \varepsilon)\,|x-a|\,,$$

amiből $\lim\limits_a f = f(a)$ adódik. Ez pedig az f függvény folytonosságát jelenti.

7.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

7.6. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;*
3. *fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
4. *ha $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. A számolás folyamán a határértékekre vonatkozó 6.10 tételt fogjuk többször felhasználni.
1.

$$\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

2.

$$\lim_{x\to a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x-a} = c \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = cf'(a)$$

3. Mivel az f függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ teljesül.

$$\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

4. Mivel a g függvény folytonos az a pontban, ezért annak létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a)$ számra $g(x) \neq 0$. A továbbiakban az a pontnak ezt a környezetét fogjuk csak tekinteni. Továbbá a g függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ teljesül. Ezek alapján

$$\lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} - \frac{f(a)}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

7.7. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$f + g, fg, cf \in C^1(A, \mathbb{R})$$

teljesül, vagyis $C^1(A, \mathbb{R})$ algebra.

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

7.8. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a g függvény differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a) \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$, tehát

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \mathbb{R} : \\ &\qquad |y - g(a)| < \delta_1 \ \to \ |f(y) - f(g(a)) - f'(g(a))(y - g(a))| \leq \varepsilon_1 |y - g(a)| . \end{aligned}$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontan, ezért $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} g$, tehát

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : \\ &\qquad |x - a| < \delta_2 \ \to \ |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| \leq \varepsilon_2 |x - a| . \end{aligned}$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : \qquad |x - a| < \delta_3 \ \to \ |g(x) - g(a)| < \varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - a| < \delta_3 \ \to \ |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| \leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| .$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - a| < \delta_2 \ \to \ |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| \leq \varepsilon_1 |x - a| .$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra, ha $|x - a| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| &\leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| \\ |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| &\leq \varepsilon_1 |x - a| . \end{aligned}$$

Ezek alapján, ha $|x - a| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} &|f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x - a)| = \\ &\quad = |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a)) + \\ &\qquad + f'(g(a))(g(x) - g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x - a)| \leq \\ &\quad \leq |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| + \\ &\qquad + |f'(g(a))| \cdot |(g(x) - g(a)) - g'(a)(x - a)| \leq \\ &\quad \leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x - a| \leq \\ &\quad \leq \varepsilon_1 (\varepsilon_1 |x - a| + |g'(a)| |x - a|) + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x - a| = \\ &\quad = \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a))|) |x - a| \end{aligned}$$

Vagyis bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a)|\right) < \varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $|x-a| < \delta'$ esetén

$$|f(g(x)) - f(g(a)) - (f'(g(a)) \cdot g'(a))(g(x) - g(a))| \leq \varepsilon \cdot |x-a|,$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

7.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és tegyük fel, hogy a végtelen torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és léteznek az alábbi határértékek.

$$a \triangleq \lim_{\infty} f' \qquad b \triangleq \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

Ekkor az $x \mapsto ax + b$ függvényt az *f függvény végtelenben vett aszimptotájának* nevezzük. Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben vett aszimptota.

7.3. Hatványsorok deriválása

7.10. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a, a P_a hatványsor differenciálható a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor az $a'_n = (n+1)a_{n+1}$ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarára $R_{a'} = R_a$ teljesül a 6.35 tétel alapján.
Legyen $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in]0, R_a - |z_0|[$. Ekkor a 6.36 tétel alapján létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| \leq |z - z_0|^2 \cdot K.$$

A hatványsor deriválhatóságához a 7.4 differenciálhatóság jellemzése alapján elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in B_\rho(z_0) \cap \operatorname{Dom} P_a$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| \leq \varepsilon \cdot |z - z_0|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor a $\delta = \min\left\{\rho, \dfrac{\varepsilon}{K}\right\}$ számra teljesül, hogy minden $z \in B_\delta(z_0)$ esetén

$$|z - z_0|^2 \cdot K \leq |z - z_0| \cdot \delta \cdot K \leq |z - z_0| \cdot \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \cdot |z - z_0|.$$

Vagyis minden $z \in B_\delta(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| \leq \varepsilon \cdot |z - z_0|.$$

Tehát P_a differenciálható a z_0 pontban és $(P_a)'(z_0) = P_{a'}(z_0)$.

7.11. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-n}$ függvény deriváltja $g'(x) = -nx^{-n-1}$. (Vagyis $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ és $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n})' = -n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n-1}$.)*

Bizonyítás. Az $n = 0, 1$ esetben a deriválás definíciójából rögtön adódik az állítás. Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

7.12. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor a $B_{R_a}(0)$ halmazon*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k z^k\right)'$$

teljesül, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a hatványsort a konvergenciasugáron belül lehet tagonként deriválni.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. A 7.10 tétel alapján minden $z \in B_{R_a}(0)$ esetén $(P_a)'(z_0) = P_{a'}(z_0)$, ahol a' az $a'_n = (n+1)a_{n+1}$ képlettel definiált sorozat. Ezt összevetve a fenti tétellel

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)'\Big|_{z=z_0} &= (P_a)'(z_0) = P_{a'}(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}z_0^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k z_0^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k z^k\right)'|_{z=z_0}\end{aligned}$$

adódik.

7.13. Tétel. *(Elemi függvények deriváltja.)* $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.

Bizonyítás. Az előző állítás alkalmazása a megfelelő hatványsorokra.
Például

$$\sin' z = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k+1)z^{2k}}{(2k+1)!} = \cos z.$$

7.4. Középértéktételek

7.14. Tétel. *(Rolle-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és melyre $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a,b[$, hogy*

$$f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. A 6.28 Weierstrass-tétel értelmében az f függvény valamely $\alpha, \beta \in [a,b]$ pontokban felveszi a minimumát és maximumát. Ha $\{\alpha, \beta\} = \{a, b\}$, akkor az f függvény állandó, vagyis minden $\xi \in]a,b[$ pontban $f'(\xi) = 0$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az f függvény a minimumát az α pontban veszi fel, melyre $\alpha \in]a,b[$ teljesül. Mivel az f függvény differenciálható az α pontban, ezért

$$f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \begin{cases} = \lim\limits_{x\to\alpha+} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \geq 0; \\ = \lim\limits_{x\to\alpha-} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq 0, \end{cases}$$

ahol felhasználtuk, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \geq f(\alpha)$. A fenti egyenlőtlenségekből $f'(\alpha) = 0$ adódik.
Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy $f'(\beta) = 0$, ha azt tesszük fel, hogy az f függvény a maximumát a β pontban veszi fel, melyre $\beta \in]a,b[$ teljesül.

7.15. Tétel. *(Cauchy-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a,b[$, hogy*

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

Bizonyítás. Elég Rolle-tételt alkalmazni a

$$h : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

függvényre.

7.16. Tétel. *(Lagrange-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Bizonyítás. Cauchy-tételt kell alkalmazni a $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ függvényre.

7.17. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor*

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \right) \cdot |b - a| .$$

Bizonyítás. A Lagrange-féle középérték tétel közvetlen következménye.

7.18. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f állandó az I intervallumon.*
2. *Az f függvény pontosan akkor monoton növő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.*
3. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növő az I intervallumon.*
4. *Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.*
5. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$ olyan, hogy $a < b$. A Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a, b[$, melyre

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

teljesül. Ebből egyszerűen kapjuk az állításokat.
1. Ha $f' = 0$, akkor $f(b) - f(a) = 0$.
2. Ha f monoton növő és $c \in I$, akkor az f függvény differenciálhatósága miatt

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Ha $f' \geq 0$, akkor $f(b) - f(a) \geq 0$, vagyis f monoton növő.
3. Ha $f' > 0$, akkor $f(b) - f(a) > 0$, vagyis f szigorúan monoton növő.
A 4. és 5. pont a fentiekhez hasonlóan igazolható.

7.5. Függvény inverzének deriválása

Magyarázat. A következő tétel segítségével az inverzfüggvények deriváltjait határozhatjuk meg.

7.19. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' folytonos és $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$ vagy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^-$. Ekkor $f(I)$ nyílt intervallum, f^{-1} folytonos, differenciálható és minden $b \in f(I)$ pontra*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$. Mivel $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$, ezért f szigorúan monoton növő, tehát invertálható is, valamint f differenciálhatósága miatt f folytonos.
1. Megmutatjuk, hogy $f(I)$ intervallum. Legyen $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$, valamint legyen $x_1 = f^{-1}(y_1)$ és $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Ha $c \in]y_1, y_2[$, akkor a

$$h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) - c$$

függvényre teljesülnek a 6.30 Bolzano-tétel feltételei, ezért létezik olyan $v \in]x_1, x_2[$, melyre $f(v) = c$, vagyis $c \in f(I)$. Ezek alapján minden $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$ esetén $[y_1, y_2] \in f(I)$, tehát $f(I)$ intervallum.
2. Legyen $b \in f(I)$ tetszőleges. Vezessük be az $a = f^{-1}(b)$ és a $g = f^{-1}$ jelölést. Mivel $a \in I$ és I nyílt, ezért létezik olyan $r_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_1}(a) \subseteq I$. Ekkor $T = \left[a - \frac{r_1}{2}, a + \frac{r_1}{2}\right] \subseteq I$ és

$$f\left(a - \frac{r_1}{2}\right) < f(a) < f\left(a + \frac{r_1}{2}\right).$$

Mivel $f\left(a - \frac{r_1}{2}\right), f\left(a + \frac{r_1}{2}\right) \in I$ és $f(I)$ intervallum, ezért

$$b \in \left]f\left(a - \frac{r_1}{2}\right), f\left(a + \frac{r_1}{2}\right)\right[\subseteq I.$$

Vagyis a $\delta_1 = \min\left\{b - f\left(a - \frac{r_1}{2}\right), f\left(a + \frac{r_1}{2}\right) - b\right\}$ számra $B_{\delta_1}(b) \subseteq I$ teljesül, vagyis az $f(I)$ halmaz nyílt. Az $f' : T \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény felveszi minimumát a T kompakt halmazon. Tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $c \in T$ esetén $K \leq f'(c)$. Vagyis a Lagrange-féle középértéktétel alapján minden $x \in T$ számra

$$K\,|a - x| \leq |f(a) - f(x)| \tag{7.1}$$

teljesül. Tehát, ha $y \in f(I)$ olyan, hogy $|y - b| < \delta_1$, akkor $x = g(y) \in T$ és a fenti egyenlőtlenség alapján

$$|g(b) - g(y)| \leq \frac{1}{K}\,|b - y|\,. \tag{7.2}$$

Megmutatjuk, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $\delta = \min\{\varepsilon K, \delta_1\}$, akkor minden $y \in f(I)$ számra fennáll az

$$|y - b| < \delta \quad \to \quad |g(y) - g(b)| < \varepsilon$$

implikáció. Valóban, ha $y \in f(I)$ olyan, hogy $|y - b| < \delta$, akkor $x = g(y) \in T$ és a (7.2) egyenlőtlenség alapján

$$|g(b) - g(y)| \leq \frac{1}{K}\,|b - y| < \frac{1}{K} \cdot K\varepsilon = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk, hogy az f^{-1} függvény folytonos a $b \in f(I)$ pontban.
Megmutatjuk, hogy a g függvény differenciálható a $b \in f(I)$ pontban és

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$$

teljesül. Ehhez a differenciálás jellemzése alapján elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y \in f(I)$ elemre

$$|y - b| < \delta \quad \to \quad \left|g(y) - g(b) - \frac{1}{f'(g(b))}(y - b)\right| \leq \varepsilon \cdot |y - b|\,.$$

teljesül. Felírva az f függvény a pontbeli deriválhatóságát és a g függvény b pontbeli folytonosságát

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' \in \mathbb{R}^+ \exists \delta' \in \mathbb{R}^+ \forall x \in I : \qquad & |x - a| < \delta' \;\to\; |f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq \varepsilon' \cdot |x - a| \\ \forall \varepsilon'' \in \mathbb{R}^+ \exists \delta'' \in \mathbb{R}^+ \forall y \in f(I) : \qquad & |y - b| < \delta'' \;\to\; |g(y) - g(b)| < \varepsilon'', \end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon^*\in\mathbb{R}^+\exists\delta^*\in\mathbb{R}^+\forall y\in f(I):\\&\quad|y-b|<\delta^*\ \to\ |f(g(y))-f(g(b))-f'(a)(g(y)-g(b))|\le\varepsilon^*\cdot|g(y)-g(b)|\,,\end{aligned}$$

teljesül. (Az $\varepsilon'=\varepsilon^*$ választással kapott δ' paramétert választva ε'' számnak, a hozzá tartozó δ'' adja a δ^* mennyiséget.) Ha felhasználjuk, hogy f és g egymás inverzei, akkor

$$\forall\varepsilon^*\in\mathbb{R}^+\exists\delta^*\in\mathbb{R}^+\forall y\in f(I):\quad|y-b|<\delta^*\ \to\ |y-b-f'(a)(g(y)-a)|\le\varepsilon^*\cdot|g(y)-a|\,,\tag{7.3}$$

adódik. A (7.2) egyenlet alapján alapján

$$\forall y\in f(I):\quad|y-b|<\delta_1\ \to\ |g(y)-a|\le\frac{1}{K}\,|y-b|\,.$$

Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ezek után legyen $\varepsilon^*=|f'(a)|\,K\varepsilon$, illetve $\delta=\min\{\delta_1,\delta^*\}$, ahol δ^* az ε^* paraméterhez tartozó paraméter a (7.3) egyenletben. Ha $|y-b|<\delta$, akkor

$$\begin{aligned}\left|g(y)-g(b)-\frac{1}{f'(g(b))}(y-b)\right|&=\frac{1}{|f'(a)|}\cdot|y-b-f'(a)(g(y)-g(b))|\le\\&\le\frac{1}{|f'(a)|}\cdot|f'(a)|\,K\varepsilon\cdot|g(y)-a|\le K\varepsilon\cdot\frac{1}{K}\,|y-b|=\\&=\varepsilon\cdot|y-b|\,,\end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

7.6. Elemi függvények inverzének deriválása

7.20. Tétel. *(Elemi függvények inverzének a deriváltja.)*

1. *Minden* $x\in\mathbb{R}^+$ *számra* $\log'(x)=\dfrac{1}{x}$.
2. *Minden* $x\in\,]-1,1[$ *esetén* $\arcsin'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. *Minden* $x\in\,]-1,1[$ *esetén* $\arccos'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. *Minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arctg}'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
5. *Minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arsh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. *Minden* $x\in\,]1,\infty[$ *esetén* $\operatorname{arch}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
7. *Minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arth}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás. 1. Legyen $x\in\mathbb{R}^+$. A 7.19 tételt alkalmazva az $f=\exp$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\log'(x)=\frac{1}{\exp'(\log x)}=\frac{1}{\exp(\log x)}=\frac{1}{x}$$

teljesül.
2. Legyen $x\in\,]-1,1[$. A 7.19 tételt alkalmazva az $f=\sin$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sin'(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

teljesül. Mivel

$$1=\cos^2(\arcsin x)+\sin^2(\arcsin x)=\cos^2(\arcsin x)+x^2,$$

ezért

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Abból, hogy a sin függvény szigorúan monoton növő a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon következik, hogy az arcsin függvény is szigorúan monoton növő, vagyis $\arcsin' > 0$. Ezek alapján

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Az arcsin függvénynél bemutatott gondolatmenet alapján bizonyítható.
4. Legyen $x \in \mathbb{R}$. A 7.19 tételt alkalmazva az $f = \operatorname{tg}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2 \operatorname{arctg} x$$

teljesül. Mivel

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x) \\ \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} &= 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) \\ \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} &= 1 + x^2, \end{aligned}$$

ezért $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. 5. Legyen $x \in \mathbb{R}$. A 7.19 tételt alkalmazva az $f = \operatorname{sh}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch} \operatorname{arsh} x}$$

teljesül. Mivel minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch} a = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 a}$, ezért $\operatorname{ch} \operatorname{arsh} x = \sqrt{1+x^2}$, vagyis

$$\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6–7. A 7.19 tétel és a 6.55 tételben szereplő formulák segítségével könnyen igazolható.

7.21. Tétel. *A táblázatban szereplő f függvényeknek értelmezhető az f^{-1} inverze a* $\operatorname{Ran} f$ *halmazon és az f^{-1} függvény értékkészletére és deriváltjára a táblázatban szereplők teljesülnek, minden $x \in$* $\operatorname{Int} \operatorname{Dom} f^{-1}$ *elemre.*

f	$\operatorname{Dom} f$	$\operatorname{Ran} f$	f'	f^{-1}	$\operatorname{Dom} f^{-1}$	$\operatorname{Ran} f^{-1}$	$(f^{-1})'(x)$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	exp	log	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$
sin	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	cos	arcsin	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
cos	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin$	arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
tg	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2}$	arctg	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{1}{1+x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch	arsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
ch	$\mathbb{R}$	$[1,\infty[$	sh	arch	$[1,\infty[$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
th	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$	arth	$]-1,1[$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x^2}$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján nyilvánvaló.

7.22. Tétel. *(A hatványozás deriválása.)*

1. *Ha* $a \in [1, \infty[$, *akkor az* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{a}$ *függvény deriváltja* $a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{a-1}$.
2. *Ha* $a \in]-\infty, 1[$, *akkor az* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{a}$ *függvény deriváltja* $a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{a-1}$.

Bizonyítás. Legyen $a \in [1, \infty[$ és $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ az $f(x) = x^a$ függvény. Ekkor

$$f'(x) = (\exp(a\log(x)))' = \exp(a\log(x))a\frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

teljesül a hatványozás definíciója, a láncszabály és az exponenenciális valamint a logaritmus függvény deriválási szabálya alapján.

7.7. L'Hospital szabály

7.23. Tétel. *(L'Hospital szabály.) Legyen* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, $a < b$ *és* $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *olyan differenciálható függvény, hogy* $0 \notin g'(]a, b[)$.

1. *Ha* $\lim\limits_{b-} f = \lim\limits_{b-} g \in \{-\infty, 0, \infty\}$ *és létezik a* $\lim\limits_{b-} \frac{f'}{g'}$ *határérték, akkor létezik a* $\lim\limits_{b-} \frac{f}{g}$ *határérték is és*
$$\lim_{b-} \frac{f}{g} = \lim_{b-} \frac{f'}{g'}.$$
2. *Ha* $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g \in \{-\infty, 0, \infty\}$ *és létezik a* $\lim\limits_{a+} \frac{f'}{g'}$ *határérték, akkor létezik a* $\lim\limits_{a+} \frac{f}{g}$ *határérték is és*
$$\lim_{a+} \frac{f}{g} = \lim_{a+} \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g'(]a, b[)$, valamint $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g \in \{0, \infty\}$. Ennek a bizonyításnak a mintájára igazolható a többi eset is.
1. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g = 0$ és

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta[$ számra

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon$$

teljesül, ami igazolja a $\lim\limits_{a+} \frac{f}{g} = A$ határértéket. Terjesszük ki az f és g függvényt az a pontra is a 0 értékkel és jelölje $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ ezeket a függvényeket. Legyen $c \in]a, b[$ tetszőleges pont. Ekkor az $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, c]$ intervallumon az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]a, c[$, melyre

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tehát ha $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\xi \in]a, a+\delta[$ esetén

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon,$$

akkor az $x \in]a, a+\delta[$ számokra

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon$$

teljesül.
2. Most tegyük fel, hogy $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g = \infty$ és

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami igazolja a $\lim\limits_{a+} \dfrac{f}{g} = A$ határértéket.

Mivel $\lim\limits_{a+} \dfrac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta_1[$ esetén $\left| \dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < 1$, vagyis minden $x \in]a, a+\delta_1[$ számra

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| < 1 + |A|$$

teljesül, tehát az $\dfrac{f'}{g'}$ függvény korlátos a $]a, a+\delta_1[$ halmazon.

Mivel $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g = \infty$, ezért létezik olyan $c \in]a, a+\delta_1[$, hogy minden $x \in]a, c]$ esetén $f(x), g(x) > 0$. Mégegyszer alkalmazva ezt az elvet, azt kapjuk, hogy létezik olyan $d \in]a, c[$, hogy minden $x \in]a, d]$ esetén $f(x) > f(c)$ és $g(x) > g(c)$. Vezessük be a

$$T :]a, d[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}}$$

függvényt. Legyen $z \in]a, d[$ tetszőleges pont. Ekkor az f és g függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt a $[z, c]$ intervallumon, az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]z, c[$, melyre

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

vagyis az

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{T(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

egyenlőség alapján

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} T(z) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(T(z) - 1 \right),$$

tehát

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - A \right| \leq \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(T(z) - 1 \right) \right|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $\lim\limits_{a+} \dfrac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta_2[$ esetén

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $\lim\limits_{x \to a+0} T(x) = 1$ és az $\dfrac{f'}{g'}$ korlátos a $]a, d[$ halmazon, ezért létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta_3[$ esetén

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \left(T(x) - 1 \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül minden $z \in]a, d[$ számra. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ olyan szám, hogy minden $x \in]a, a+\delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

7.8. Többszörös deriváltak

7.24. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)} \triangleq f$ és minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)} \triangleq (f^{(i-1)})'$.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban*, ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül.
- Az *f függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$ teljesül. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R})$ jelöli.
- Az *f függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható*, ha f n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Megjegyzés. A fenti definícióban minden függvényre értelmeztük az $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, azonban könnyen lehet, hogy valamely $i \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(i)} = \emptyset$ és ekkor természetesen minden $\mathbb{N} \ni j > i$ esetén is $\operatorname{Dom} f^{(j)} = \emptyset$.

◊

7.25. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton növő.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő.*

Bizonyítás. 1. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex differenciálható függvény és legyen $a, b \in I$, $a < b$. Megmutatjuk, hogy ekkor $f'(a) \le f'(b)$. Minden $x \in]a, b[$ esetén

$$x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a,$$

valamint $\frac{x-a}{b-a}, \frac{b-x}{b-a} \in [0,1]$ és $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$. Tehát az f függvény konvexitása alapján

$$f(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a\right) \le \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

Rövid számolással ebből az egyenlőtlenségből

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

adódik, amiből

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le$$
$$\le \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b)$$

következik.
Megfordítva, legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' monoton növő és legyen $a, b \in I$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $t \in [0,1]$ számra

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b)$$

teljesül, vagy másképp, hogy a

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(ta + (1-t)b) - tf(a) - (1-t)f(b)$$

függvényre $g \leq 0$ teljesül. A g függvény a folytonossága és a $[0,1]$ kompaktsága miatt felveszi a maximumát valamely $t_0 \in [0,1]$ pontban. Tegyük fel, hogy $g(t_0) = c > 0$. Ekkor a Rolle-tétel bizonyítása alapján $g'(t_0) = 0$. Mivel f' monoton növő és

$$g'(t) = f'(t(a-b)+b)(a-b) - f(a) + f(b),$$

ezért g' is monoton növő. Tehát minden $z \in]t_0, 1[$ esetén $g'(z) \geq 0$. A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva a $[t_0, 1]$ intervallumra, azt kapjuk, hogy létezik olyan $z \in]t_0, 1[$, melyre

$$g(1) - g(t_0) = g'(z)(1 - t_0),$$

azonban $g(1) - g(t_0) = 0 - c < 0$ és $g'(z)(1 - t_0) \geq 0$. Mivel ellentmondást kaptunk így a $g(t_0) = c > 0$ feltételezés nem helytálló, vagyis a g függvény maximuma nem lehet szigorúan pozitív.
2. A konkáv eset a -1 számmal való szorzással visszavezethető a konvex esetre.

7.26. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*
1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha $f'' \leq 0$.*

Bizonyítás. A 7.25 előző állítás és a 7.18 tétel alapján nyilvánvaló.

7.27. Tétel. *(Súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha_i \in [0,1]$ olyan, melyre $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ teljesül. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}.$$

Bizonyítás. Az exponenciális függvény konvexitásából és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \log x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp(\log x_k)$$

7.28. Tétel. *(Hölder-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, valamint $\alpha, \beta \in]0,1[$ olyan, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^{\beta}.$$

Bizonyítás. Legyen $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ és $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Ha $0 < x, y$, akkor a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ számra

$$\left(\frac{x_i}{x}\right)^{\alpha} \left(\frac{y_i}{y}\right)^{\beta} \leq \alpha \left(\frac{x_i}{x}\right) + \beta \left(\frac{y_i}{y}\right)$$

teljesül, melyet összegezve az i indexre

$$\frac{1}{x^{\alpha} y^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \alpha \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha + \beta = 1$$

adódik. Ennek átrendezése a bizonyítandó egyenlőtlenség.

7.29. Tétel. *(Minkowski-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. Ekkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. A Hölder-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1}x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1}y_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}(x_i^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^{n}\left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{i}}(y_i^p)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\end{aligned}$$

adódik, aminek az átrendezése a bizonyítandó tétel.

7.9. Taylor-sorfejtés

7.30. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n + 1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor minden $p \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(b - \xi)^{n+1-p}(b - a)^p.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter esetén definiáljuk a

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k - \lambda(b - x)^p.$$

függvényt. Ekkor a

$$\begin{aligned}g(a) &= f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k - \lambda(b - a)^p \\ g(b) &= 0\end{aligned}$$

egyenlőségből látszik, hogy a

$$\lambda = \frac{1}{(b - a)^p}\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k\right)$$

választás esetén $g(a) = g(b) = 0$ teljesül. Mivel a g függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az intervallum belsejében, valamint $g(a) = g(b) = 0$, ezért a Rolle-tétel értelmében létezik olyan $\xi \in]a, b[$ pont, melyre $g'(\xi) = 0$ teljesül.
Most meghatározzuk a g' függvényt.

$$g'(x) = -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k\right)' + p\lambda(b - x)^{p-1} =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1}\right) + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + p\lambda(b-x)^{p-1}.
\end{aligned}
$$

Vagyis a $g'(\xi) = 0$ egyenletből

$$-\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(b-x)^n + \lambda p(b-\xi)^{p-1} = 0$$

adódik, amibe beírva λ értékét és átrendezve a bizonyítani kívánt egyenlőséghez jutunk.

Magyarázat. Külön definiáljuk a fenti tétel két speciális esetét.

7.31. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

teljesül, amiből a $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$$

teljesül, amiből a $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$ kifejezést *Cauchy-féle maradéktagnak* nevezzük.

7.32. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T_{n,a}^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és $a \in \operatorname{Dom} f$, akkor az *$f$ függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T_a^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hatványsort.

7.33. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f'$. Az *$f$ függvény a pontbeli érintőjének* nevezzük a $T_{1,a}^f$ polinomot, vagyis az érintő egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

7.34. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f^{(n)} \cap \operatorname{Dom} g^{(n)})$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ és g függvények az a pontban n-ed rendben érintkeznek*, ha minden $n \geq k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ teljesül.

7.35. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f^{(n)}$ és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Ekkor $P_n = T^f_{n,a}$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f^{(n)}$, és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Az $n = 0$ esetben nyilvánvaló az állítás, ezért tegyük fel, hogy $n \geq 1$. Legyen

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

olyan polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $j \in \{0, \dots, n\}$ esetén

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} b_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-a)^{k-j}$$

teljesül. Az n-ed rendben való érintkezés miatt minden $j \in \{0, \dots, n\}$ számra

$$f^{(j)}(a) = P_n^{(j)}(a) \quad \to \quad f^{(j)}(a) = j! \cdot b_j$$

teljesül, vagyis $b_j = \dfrac{f^{(j)}(a)}{j!}$, ezért

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = T^f_{n,a}(x).$$

7.36. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

Bizonyítás. A tételt az n paraméter szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(1)}$. Ekkor $T^f_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ egyenlőség miatt a bizonyítandó határérték

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{|x-a|} = 0,$$

mely következik a differenciálhatóság általános jellemzéséből (7.3 tétel).
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített szám. Tegyük fel, hogy minden $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre és $a \in \mathbb{R}$ pontra, $a \in \operatorname{Dom} g^{(n)}$ esetén

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T^g_{n,a}(x)}{|x-a|^n} = 0$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n+1)}$, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n+1,a}(x)}{|x-a|^{n+1}} = 0.$$

Mivel $a \in \operatorname{Dom} f^{(n+1)}$, ezért $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül és tekintsük a

$$h : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) - T^f_{n+1,a}(x)$$

függvényt. Mivel

$$\left(T^f_{n+1,a}\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(f')^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1} = T^{f'}_{n,a}(x),$$

ezért

$$h'(x) = f'(x) - T_{n,a}^{f'}(x).$$

A $g = f'$ függvényre alkalmazva az indukciós hipotézist a

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n,a}^{f'}(x)}{|x-a|^n} = 0$$

határértéket kapjuk, vagyis

$$\lim_{x\to a} \frac{h'(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $z \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\left| \frac{h'(z)}{|z-a|^n} \right| < \varepsilon,$$

vagyis

$$|h'(z)| < \varepsilon \cdot |z-a|^n .$$

Legyen $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges és alkalmazzuk a véges növekmények formuláját a h függvényre az a és x végpontú szakaszra, melyet jelöljön J.

$$|h(x) - h(a)| = |h(x)| \le \left(\sup_{z\in J} |h'(z)| \right) \cdot |x-a| \le \varepsilon \cdot \left(\sup_{z\in J} |z-a|^n \right) \cdot |x-a| < \varepsilon \cdot |x-a|^{n+1}$$

Vagyis megmutattuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\left| \frac{h(x)}{|x-a|^{n+1}} \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a bizonyítandó

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{|x-a|^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n+1,a}^{f}(x)}{|x-a|^{n+1}} = 0$$

határértéket jelenti.

7.10. Lokális szélsőérték jellemzése

7.37. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \ge f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \le f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$. *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

7.38. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$, valamint $f^{(n)}(a) \ne 0$.*

1. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) < 0$.*

2. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) > 0$.*
3. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ és tegyük fel, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$ teljesül, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$. Az 1. pontot igazoljuk, a második pont a -1 számmal való szorzással visszavezethető az elsőre.
Mivel $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $]a-r, a+r[\subseteq \operatorname{Dom} f$. Az infinitezimális Taylor-formula alapján (7.36 tétel) a

$$\varphi :]a-r, a+r[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{|x-a|^n}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a \end{cases}$$

függvény folytonos, továbbá a deriváltakra vonatkozó feltételek miatt

$$T^f_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

vagyis az $x \neq a$ esetben

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{|x-a|^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x-a)^n}{|x-a|^n},$$

amiből

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x-a)^n}{|x-a|^n} + \varphi(x) \right) \tag{7.4}$$

következik.
1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban. Ekkor létezik olyan δ_1, hogy minden $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[\setminus \{a\}$ esetén $f(x) < f(a)$. Legyen $\delta = \min\{r, \delta_1\}$. Ha n páros, akkor (7.4) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right),$$

vagyis minden $x \in]a-\delta, a+\delta[$ számra

$$0 > \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \quad \to \quad -n!\varphi(x) > f^{(n)}(a),$$

amiből a $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt $0 \ge f^{(n)}(a)$ adódik, azonban feltettük, hogy $f^{(n)}(a) \neq 0$, ezért $0 > f^{(n)}(a)$.
Ha n páratlan, akkor a $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[$ esetén

$$\varphi(x) < \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|.$$

Legyen $\delta = \min\{r, \delta_1\}$.
Ha $0 < f^{(n)}(a)$ és $x \in]a, a+\delta[$, akkor $a < x$, $\dfrac{(x-a)^n}{|x-a|^n} = 1$, tehát a (7.4) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) > 0,$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.
Ha $0 > f^{(n)}(a)$ és $x \in]a-\delta, a[$, akkor $x < a$, $\dfrac{(x-a)^n}{|x-a|^n} = -1$, tehát a (7.4) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(-\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) > 0,$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.
2. Tegyük fel, hogy n páros és $f^{(n)}(a) < 0$. A (7.4) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right).$$

A $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $]a-\delta_1, a+\delta_1[$ esetén

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) < 0.$$

Ekkor a $\delta = \min\{r, \delta_1\}$ számra teljesül az, hogy minden $x \in]x-\delta, x+\delta[\setminus \{a\}$ elemre

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) < 0,$$

vagyis $f(x) < f(a)$.

7.39. Tétel. *Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy*

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a): \ \left(\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K \right)$$

teljesül, ekkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \qquad \forall x \in B_r(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$, továbbá legyen $K \in \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a): \ \left(\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K \right)$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ rögzített szám. A Taylor-formula alapján, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $y \in B_r(a)$, hogy

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} r^{n+1}.$$

Mivel az $n \mapsto \dfrac{K}{(n+1)!} r^{n+1}$ sorozat a nullához tart, ezért

$$\lim_{n \to \infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| = 0$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

7.40. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{Dom} f$. Azt mondjuk, hogy az f *függvény analitikus az a pontban* ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és olyan $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, hogy $B_r(a) \in \operatorname{Dom} f$, valamint a

$$P_{s,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} s_k (x-a)^k$$

hatványsor abszolút konvergens minden $x \in B_r(a)$ elemre, és $P_{s,a} = f$ teljesül a $B_r(a)$ halmazon. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *analitikus*, ha analitikus minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban. Adott $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű analitikus függvények halmazát $C^\omega(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.41. Tétel. *Legyen $c \in \mathbb{K}$ és $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ olyan sorozat, melyre létezik $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in B_r(0)$ esetén*

$$P_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = P_b(x)$$

teljesül. Ekkor $a = b$.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$. A hatványsorok n-edik deriváltja

$$P_a^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = P_b^{(n)}(x).$$

Amiből az $x = 0$ helyettesítés után $a_n = b_n$ adódik. Mivel ez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, ezért $a = b$.

7.42. Tétel. *Ha $x \in]-1, 1[$, akkor*

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

Bizonyítás. Az $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$ hatványsor konvergenciasugara $R = 1$, ezért minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

függvény. Valamint $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$ miatt minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$f(x) = \log(1+x)$$

függvény. A hatványsor illetve a logaritmus függvény deriválási szabály alapján

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x)}$$
$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k.$$

Mivel $|x| < 1$, ezért a geometriai sor összegképlete alapján $(f-g)' = 0$ a $]-1, 1[$ intervallumon. Vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $x \in]-1, 1[$ esetén $f(x) = C + g(x)$. Mivel $f(0) = g(0) = 0$, ezért $C = 0$. Vagyis minden $x \in]-1, 1[$ számra $f(x) = g(x)$.

7.11. Binomiális sorfejtés

7.43. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\binom{z}{n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{k+1} & \text{ha} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

7.44. Tétel. *(Binomiális-sorfejtés.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in]-1, 1[$ esetén*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x) = (1+x)^\alpha$ és $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. A

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\alpha - k + 1}{k-1} \right| = 1,$$

határérték alapján a hatványsor konvergenciasugara 1, vagyis minden $x \in \,]-1,1[$ esetén a $P(x)$ hatványsor konvergens.

Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$. Ez az

$$\begin{aligned}
P'(x)f(x) - f'(x)P(x) &= (1+x)^{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} - \alpha(1+x)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \\
&= (1+x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{k} x^k \right) = \\
&= (1+x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} \right) x^k - \alpha \right) = \\
&= (1+x)^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} \right) x^k = 0
\end{aligned}$$

egyenlőségből következik, ahol felhasználtuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$(k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} = 0.$$

Mivel $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$, ezért létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, melyre $f = cP$ teljesül a $]-1,1[$ halmazon. Továbbá az $f(0) = P(0)$ miatt $c = 1$, vagyis $f = P$.

8. Határozatlan integrál

8.1. Primitív függvény és tulajdonságai

8.1. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. A differenciálható $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f *primitív függvényének* nevezzük, ha $F' = f$ teljesül. Az f *függvény határozatlan integráljának* nevezzük az

$$\{F : I \to \mathbb{R} |\ F' = f\}$$

halmazt, melyre az $\int f$ vagy $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

8.2. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f bármelyik primitív függvénye. Ekkor*

$$\int f = \{F + C |\ C \in \mathbb{R}\}\,.$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye.
Ha $G \in (F + C |\ C \in \mathbb{R})$, akkor létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, melyre $G = F + C$. Ekkor $G' = F' = f$, vagyis a G függvény is az f primitívfüggvénye.
Ha $G : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye, akkor $G' = f$, tehát $(G - F)' = 0$. Ebből a 7.18 tétel alapján következik, hogy létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, szám, hogy $G - F = C$, vagyis $G \in (F + C |\ C \in \mathbb{R})$.

Megjegyzés. A fenti tétel nem igaz, ha I nem összefüggő halmaz!

◊

Jelölés. A fenti tétel miatt, ha F az f függvény egy primitív függvénye, akkor az

$$\int f = F + C$$

rövidebb, de pontatlanabb jelölést is használjuk.

8.3. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy mindkettőnek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ számra*

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{és} \quad \int (cf) = c \int f.$$

Bizonyítás. Az $F, G : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre vonatkozó

$$(F + G)' = F' + G' \qquad (cF)' = cF'$$

deriválási szabályból következik.

8.4. Tétel. *(Elemi határozatlan integrálok.) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ekkor az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \exp = \exp + C \qquad \int \sin = -\cos + C \qquad \int \cos = \sin + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \log|x| + C \qquad \int \mathrm{sh} = \mathrm{ch} + C \qquad \int \mathrm{ch} = \mathrm{sh} + C$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{1+a}}{1+a} + C$$

Bizonyítás. A primitív függvények deriválásával könnyen bizonyíthatóak az egyenlőségek.

8.2. Integrálási módszerek

8.5. Tétel. *(Parciális integrálás.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye.
Legyen $F \in fg - \int (fg')$. Ekkor

$$fg - F \in \int (fg') \quad \to \quad (fg - F)' = fg' \quad \to \quad f'g + fg' - F' = fg' \quad \to \quad F' = f'g,$$

vagyis $F \in \int (f'g)$, ezért az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye, valamint

$$fg - \int (fg') \subseteq \int (f'g)$$

teljesül.
Most megmutatjuk, hogy $\int (f'g) \subseteq fg - \int (fg')$. Ehhez legyen $F \in \int (f'g)$. Ekkor a bizonyítandó $F \in fg - \int (fg')$ kifejezés ekvivalens alakja az alábbi.

$$fg - F \in \int (fg')$$

Ez viszont egyszerűen adódik az

$$(fg - F)' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

deriválásból.

8.6. Tétel. *(Helyettesítéses integrálás.) Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmus. Ekkor az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f\right) \circ \varphi.$$

Bizonyítás. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmus.
Megmutatjuk, hogy az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye. Legyen $F \in \int f$ és legyen $G = F \circ \varphi$. A közvetett függvény deriválási szabálya alapján

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

vagyis $G \in \int (f \circ \varphi)\varphi'$. A fenti gondolatmenetből

$$\left(\int f\right) \circ \varphi \subseteq \int (f \circ \varphi)\varphi'$$

is következik.
Most igazoljuk, hogy

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' \subseteq \left(\int f\right) \circ \varphi$$

teljesül. Legyen $F \in \int (f \circ \varphi)\varphi'$, ami azt jelenti, hogy $F' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Azt kell igazolni, hogy $F \circ \varphi^{-1} \in \int f$, ami ekvivalens azzal, hogy $(F \circ \varphi^{-1})' = f$. A függvénykompozíció deriválására vonatkozó láncszabály és az inverzfüggvény deriválására vonatkozó

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}.$$

szabály felhasználásával a bizonyítandó

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi^{-1})' &= \left(F' \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \left(\varphi^{-1}\right)' = \\ &= \left(((f \circ \varphi) \cdot \varphi') \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = \\ &= \left(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = f\end{aligned}$$

egyenlőség adódik.

Megjegyzés. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \to I$ differenciálható homeomorfizmus. Ekkor a fenti képlet az

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \ \mathrm{d}\, t = \int f(x) \ \mathrm{d}\, x$$

az alakban írható fel az $x = \varphi(t)$ helyettesítéssel.

$\Diamond$

8.7. Tétel. *(Az elemi függvények inverzének az integrálja.) Az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \arcsin(x) \ \mathrm{d}\, x = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\int \arccos(x) \ \mathrm{d}\, x = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\int \operatorname{arctg}(x) \ \mathrm{d}\, x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{arsh}(x) \ \mathrm{d}\, x = x \operatorname{arsh} x - \sqrt{1 + x^2} + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{arch}(x) \ \mathrm{d}\, x = x \operatorname{arch} x - \sqrt{x^2 - 1} + C \qquad x \in]1, \infty[$$

$$\int \operatorname{arth}(x) \ \mathrm{d}\, x = x \operatorname{arth} x + \frac{1}{2} \log(1 - x^2) + C \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\int \log(x) \ \mathrm{d}\, x = x \log(x) - x + C \qquad x \in]0, \infty[$$

Bizonyítás. Mindegyik formula a parciális integrálás következménye.
Az első integrált megmutatjuk részletesen. Legyen

$$\begin{aligned} f &:]-1, 1[\qquad x \mapsto x \\ g &:]-1, 1[\qquad x \mapsto \arcsin x \\ \varphi &:]-1, 1[\qquad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Ekkor f, g és φ differenciálható függvény, valamint

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

formula felhasználásával azt kapjuk, hogy az fg' függvénynek létezik primitív függvénye, hiszen

$$(-\varphi)' = fg' \quad \to \quad -\varphi \in \int (fg').$$

A 8.5 parciális integrálás tétele alapján az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül, ami ebben az esetben az alábbi egyenlőséget jelenti.

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= x\arcsin x - (-\varphi(x)) + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Magyarázat. A parciális integrálás segítségével számolható az alábbi típusú integrál.

$$\int \left\{ \begin{array}{c} \text{polinom} \\ \exp, \log \\ \sin, \cos \\ \mathrm{sh}, \mathrm{ch} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \text{polinom} \\ \exp, \log \\ \sin, \cos \\ \mathrm{sh}, \mathrm{ch} \end{array} \right\}$$

8.8. Tétel. *Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbb{R}$ bármely nyílt intervallumán az*

$$\int \sin^n \cos^m$$

integrált az alábbi módszerek rekurzív alkalmazásával lehet kiszámolni.

1. *Ha $m = 0$, akkor*

$$\int \sin^n x \;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}} \displaystyle\int (1-\cos t)^k \;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ -\displaystyle\int (1-t^2)^k \;\mathrm{d}\,t, & t = \cos x \quad \textit{ha} \quad n = 2k+1 \ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

2. *Ha $n = 0$, akkor*

$$\int \cos^m x \;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}} \displaystyle\int (1+\cos t)^k \;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad m = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ \displaystyle\int (1-t^2)^k \;\mathrm{d}\,t, & t = \sin x \quad \textit{ha} \quad m = 2k+1 \ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

3. *Ha n páratlan, akkor a $t = \cos x$, ha m páratlan, akkor a $t = \sin x$ helyettesítés egyszerűsíti az integrált.*
4. *Ha n és m páros, valamint $n = 2k$, $m = 2l$ $(k, l \in \mathbb{N})$, akkor*

$$\int \sin^n x \cos^m x \;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+l+1}} \displaystyle\int (\sin^{2k} t)(1+\cos t)^{l-k} \;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n \le m, \\ \dfrac{1}{2^{k+l+1}} \displaystyle\int (\sin^{2l} t)(1-\cos t)^{k-l} \;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n > m. \end{cases}$$

Bizonyítás. A helyettesítéses integrálás alapján egyszerűen igazolható.

8.9. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$.*

1. *Ekkor az $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{b}{a} \right\}$ halmaz nyílt intervallumain*

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} \;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \log|ax+b| + C, & \textit{ha } n = 1; \\ \dfrac{1}{a(1-n)} \cdot \dfrac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C, & \textit{ha } n > 1. \end{cases}$$

teljesül.

2. *Ha* $b^2 - 4ac < 0$, *akkor az* $\mathbb{R}$ *halmazon*

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+C,$$

és ha $b^2 - 4ac > 0$ *akkor az* $\{x \in \mathbb{R} |\ ax^2+bx+c \neq 0\}$ *halmaz nyílt intervallumain*

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C$$

teljesül.

3. *Ha* $n > 1$ *és* $b^2 - 4ac \neq 0$, *akkor az* $\{x \in \mathbb{R} |\ ax^2+bx+c \neq 0\}$ *halmazon*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x =& \frac{2ax+b}{(1-n)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\\ &+\frac{2(2n-3)a}{(1-n)(b^2-4ac)}\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

4. *Az* $\{x \in \mathbb{R} |\ ax^2+bx+c \neq 0\}$ *halmazon*

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a}\log\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x.$$

5. *Ha* $n > 1$ *és* $b^2 - 4ac \neq 0$, *akkor az* $\{x \in \mathbb{R} |\ ax^2+bx+c \neq 0\}$ *halmazon*

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x =& \frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\\ &+\frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)}\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

Bizonyítás. Deriválással egyszerűen adódik.

8.3. Parciális törtekre bontás

Magyarázat. A következő tétel szerint bármely két polinomnak a hányadosa integrálható az előző tételben szereplő formulák segítségével. Azt a módszert, ahogy visszavezetjük a polinomok hányadosát a fenti tételben szereplő integrandusokra *parciális törtekre bontásnak* nevezik. Mivel a tétel bizonyítása bizonyos lineáris egyenletrendszerek egyértelmű megoldhatóságának a vizsgálatáról szól, és számos tételt felhasznál a lineáris algebra témaköréből, ezért nem ismertetjük.

8.10. Tétel. *(Parciális törtekre bontás.) Legyen* $P_n(x)$ *egy tetszőleges* n*-ed fokú-,* $Q_m(x)$ *pedig egy olyan* m*-ed fokú polinom, melynek a főegyütthatója* 1.

1. *Ha* $n \geq m$, *akkor létezik egyetlen olyan* $\bar{P}(x)$ $(n-m)$*-ed fokú- és* m*-nél kisebb fokú* $\tilde{P}(x)$ *polinom, hogy*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \bar{P}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}$$

teljesül.

2. *A* Q_m *polinomhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott* $(\lambda_i)_{i=1,\dots,k}$, $(p_i,q_i)_{i=1,\dots,l}$ *páronként különböző valós számok és számpárok, valamint* $(z_i)_{i=1,\dots,k}$, $(v_i)_{i=1,\dots,l}$ *természetes számok, hogy minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$Q_m(x) = \left(\prod_{i=1}^{k}(x+\lambda_i)^{z_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{l}(x^2+p_ix+q_i)^{v_i}\right)$$

teljesül, továbbá egyetlen $1 \leq i \leq l$ *esetén sem létezik valós gyöke az* $x^2+p_ix+q_i$ *polinomnak. Ha*

$n < m$, akkor egyértelműen léteznek olyan $(\mu_{ij})_{i=1,\dots,k;j=1,\dots,z_i}$, $(\alpha_{ij},\beta_{ij})_{i=1,\dots,l;j=1,\dots,v_i}$ valós számok, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{z_i}\frac{\mu_{ij}}{(x+\lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{v_i}\frac{\alpha_{ij}x+\beta_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

teljesül minden $x \in \operatorname{Dom}\dfrac{P_n}{Q_m}$ elemre.

8.11. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $l \in \mathbb{Z}^n$. Ekkor $x \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen

$$x^{[l]} \triangleq \prod_{i=1}^{n} x_i^{l_i}.$$

Legyen továbbá $k \in \mathbb{N}^+$. Ha minden $1 \le j \le k$ esetén $l_j \in \mathbb{Z}^n$ és $c_j \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{k} c_j x^{[l_j]}$$

függvényt *n változós polinomnak* nevezzük.

8.12. Definíció. (*Racionális függvény.*)

- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *racionális függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan P, Q polinomok, hogy $f = \dfrac{P}{Q}$ teljesül a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.
- Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt *n változós racionális függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan P, Q n változós polinomok, hogy $f = \dfrac{P}{Q}$ teljesül a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

Magyarázat. Azt már láttuk, hogy a parciális törtekre bontás segítségével számolható a racionális törtfüggvények integrálja. Most a speciális gyökös kifejezések integráljára vonatkozó Csebisev-tételt említjük meg bizonyítás nélkül.

8.13. Tétel. *(Csebisev-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $m, n, p \in \mathbb{Q}$, ahol $p = \dfrac{q}{r}$ valamilyen q egészre. Az*

$$\int x^m (a+bx^n)^p \,\mathrm{d}\,x$$

integrál csak az alábbi három esetben fejezhető ki elemi függvények segítségével.

1. *Ha $p \in \mathbb{Z}$. Az integrál meghatározásához a binomiális kifejtés alkalmazandó az $(a+bx^n)^p$ kifejezésre.*
2. *Ha $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $t = \sqrt[r]{a+bx^n}$ helyettesítéssel racionális függvényre vezethető vissza az integrandus.*
3. *Ha $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $t = \sqrt[r]{b+ax^{-n}}$ helyettesítéssel racionális függvényre vezethető vissza az integrandus.*

8.14. Tétel. *Legyen R kétváltozós racionális törtfüggvény. Ekkor az alábbi integrálok a megadott helyettesítések rekurzív alkalmazásával racionális törtfüggvények integráljává transzformálhatók. Az integráloknál $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ továbbá $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

$$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2}) \,\mathrm{d}\,x \qquad x = a\operatorname{sh} t \text{ vagy } x = a\operatorname{tg} t$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) \,\mathrm{d}\,x \qquad x = a\operatorname{ch} t \text{ vagy } x = a\frac{1}{\cos t}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) \,\mathrm{d}\,x \qquad x = a\sin t \text{ vagy } x = a\cos t$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}\,x \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Az $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ \mathrm{d}\,x$ *integrálnál*

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x, & ha \quad a > 0; \\ \sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}, & ha \quad c > 0; \\ \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda_1), & ha \quad ax^2+bx+c = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \end{cases}$$

alkalmazandó.

Bizonyítás. Az utolsó esetet bizonyítjuk, a többi teljesen hasonló gondolatmenettel igazolható. Legyen R kétváltozós racionális törtfüggvény és $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Ekkor a trigonometrikus függvényekre vonatkozó összefüggések alapján

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{és} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

valamint

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Vagyis az eredeti integrál felírható az

$$\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}\,x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,t$$

alakban, ami a t változónak racionális törtfüggvénye.

9. Határozott integrál

9.1. A *majdnem mindenütt* tulajdonság

9.1. Definíció. Az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumainak a halmazát jelölje

$$\mathfrak{I}_0 \triangleq \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a\le b}} \{[a,b]\,,[a,b[,]a,b],]a,b[\},$$

és az $\mathfrak{I}_0$ halmazban szereplő intervallumok *hossza* legyen

$$\mu_0 : \mathfrak{I}_0 \to \mathbb{R}^+ \qquad [a,b]\,,[a,b[,]a,b],]a,b[\mapsto b-a.$$

Jelölés. Adott $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$ esetén sokszor fogjuk tekinteni az a és b pontok által meghatározott intervallumokat. Azokban az esetekben, mikor mondanivalónk érvényes az $[a,b]$,$[a,b[$, $]a,b]$ és $]a,b[$ intervallumok mindegyikére, az $\wr a,b\wr$ szimbólummal fogunk élni.

9.2. Tétel. *Ha $A_1,A_2\in\mathfrak{I}_0$ olyan halmazok, melyre $A_1\cap A_2\neq\emptyset$ teljesül, akkor $A_1\cup A_2\in\mathfrak{I}_0$ és*

$$\mu_0(A_1\cup A_2)\le\mu_0(A_1)+\mu_0(A_2).$$

Bizonyítás. Legyen $A_1=\wr a_1,b_1\wr$ és $A_2=\wr a_2,b_2\wr$.
Ha $b_1=a_2$, akkor az $A_1\cap A_2\neq\emptyset$ feltétel miatt $A_1=\wr a_1,b_1]$ és $A_2=[a_2,b_2\wr$, tehát $A_1\cup A_2=\wr a_1,b_2\wr\in\mathfrak{I}_0$, továbbá

$$\mu_0(A_1\cup A_2)=b_2-a_1=b_2-a_2+b_1-a_1=\mu_0(A_1)+\mu_0(A_2).$$

Ha $b_1>a_2$, akkor $A_1\cup A_2=\wr\min\{a_1,a_2\}\,,\max\{b_1,b_2\}\wr\in\mathfrak{I}_0$, továbbá

$$\mu_0(A_1\cup A_2)=\max\{b_1,b_2\}-\min\{a_1,a_2\}\le b_1+b_2-a_1-a_2=\mu_0(A_1)+\mu_0(A_2),$$

ahol felhasználtuk az $a_1\le b_1$ és $a_2\le b_2$ egyenlőtlenséget.

9.3. Definíció. Az $A\subseteq\mathbb{R}$ halmaz *Lebesgue nulla mértékű*, vagy rövidebben *nulla mértékű*, ha minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty}\mu_0(A_i)<\varepsilon.$$

9.4. Tétel. *(Nulla mértékű halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Az $A\subseteq\mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor nulla mértékű, ha minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó nyílt halmazokból álló $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy*

$$A\subseteq\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\mu_0(A_n)<\varepsilon$$

   teljesül.
2. *Nulla mértékű halmaz minden részhalmaza nulla mértékű.*
3. *Ha minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $A_n\subseteq\mathbb{R}$ nulla mértékű, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ is nulla mértékű.*
4. *Minden megszámlálható halmaz nulla mértékű.*

Bizonyítás. 1. Legyen $A\subseteq\mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz és $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $A_n\in\mathfrak{I}_0$,

$$A\subseteq\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\mu_0(A_n)<\frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. Legyen

$$N_p = \{n \in \mathbb{N} |\ \exists c_n \in \mathbb{R} :\ A_n = \{c_n\}\}$$
$$N_r = \{n \in \mathbb{N} |\ \exists a_n, b_n \in \mathbb{R} :\ a_n < b_n\ \wedge\ A_n = \wr a_n, b_n \wr\}\,.$$

Ekkor $N_p \cap N_r = \emptyset$ és $N_p \cup N_r = \mathbb{N}$. Minden $n \in N_r$ számhoz létezik olyan $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, hogy $A_n = \wr a_n, b_n \wr$ teljesül, ekkor legyen

$$U_n = \left]\frac{3a_n - b_n}{2}, \frac{3b_n - a_n}{2}\right[.$$

Az $U_n \in \mathfrak{I}_0$ halmaz nyilván nyílt, $A_n \subseteq U_n$ és $\mu_0(U_n) = 2\mu_0(A_n)$. Minden $n \in N_p$ számhoz létezik olyan $c_n \in \mathbb{R}$, hogy $A_n = \{c_n\}$ teljesül, ekkor legyen

$$U_n = \left]c_n - \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n}\right[.$$

Az $U_n \in \mathfrak{I}_0$ halmaz nyilván nyílt, $A_n \subseteq U_n$ és $\mu_0(U_n) = \dfrac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n}$. Az így definiált nyílt halmazokból álló $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{és}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(U_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}_r} \mu_0(U_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}_p} \mu_0(U_n) < 2\sum_{n\in\mathbb{N}_r} \mu_0(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}_p} \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n} \leq$$
$$\leq 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül.
2. A definíció alapján nyilvánvaló.
3. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $n \in \mathbb{N}$ paraméterhez tartozó A_n halmaz nulla mértékű, ezért létezik olyan $(U_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $U_{n,i} \in \mathfrak{I}_0$, $A_n \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{n,i}$ és $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(U_{n,i}) < \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Ekkor

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{\infty} U_{n,i} = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_{\sigma(k)},$$

valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(U_{\sigma(k)}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(U_{n,i}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

4. Mivel az egy elemű halmaz nulla mértékű, ezért az előző pont alapján nyilvánvaló.

9.5. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]\,, [a, b[\,,]a, b]\,,]a, b[$ halmazok közül egyik sem nulla mértékű.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és ehhez definiáljuk az $\alpha = \dfrac{3a + b}{4}$ és $\beta = \dfrac{a + 3b}{4}$ számokat. Mivel

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]\,, [a, b[\,,]a, b]\,,]a, b[\,,$$

ezért elég igazolni, hogy $[\alpha, \beta]$ nem nulla mértékű. Indirekt, tegyük fel, hogy $[\alpha, \beta]$ nulla mértékű. Ekkor a 9.4 tétel alapján létezik olyan $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nyílt halmazokból álló halmazrendszer, melyre

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(U_n) < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

teljesül, továbbá feltehetjük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[\alpha, \beta] \cap U_n \neq \emptyset$, hiszen egyébként kihagyhatjuk az $[\alpha, \beta]$ halmaz lefedéséből. Mivel az $[\alpha, \beta]$ halmaz kompakt, ezért véges sok nyílt halmazzal is lefedhető, vagyis létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} U_n.$$

Ezek után tekintsük az alábbi konstrukciót.

– Mivel $\alpha \in \bigcup_{n=0}^{N} U_n$, ezért létezik olyan $r_0 \in \{0, \dots, N\}$ szám, melyre $\alpha \in U_{r_0}$ teljesül, és legyen $L_0 = U_{r_0}$.

– Ha már valamilyen $i \in \mathbb{N}$ esetén r_i és L_i definiált, akkor ha $\beta < \sup L_i$ teljesül, akkor ne definiáljunk több elemet, ha pedig $\beta \geq \sup L_i$, akkor a

$$\sup L_i \in \left(\bigcup_{n=0}^{N} U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{i} U_{r_k} \right)$$

tartalmazás miatt létezik olyan $m \in \{0, \dots, N\} \setminus \{r_k | k = 0, \dots, i\}$ elem, melyre $\sup L_i \in U_m$ teljesül. Ekkor legyen $r_{i+1} = m$ és legyen $L_{i+1} = L_i \cup U_{r_{i+1}}$.

Tegyük fel, hogy a fenti konstrukcióval $M + 1$ elemet definiáltunk, vagyis ismert az $(L_i)_{i \in \{0, \dots, M\}}$ halmazrendszer. A konstrukció miatt $[\alpha, \beta] \subseteq L_M$ teljesül, valamint minden $i \in \{0, \dots, M-1\}$ esetén $L_i \cap U_{r_{i+1}} \neq \emptyset$, tehát a 9.2 tétel miatt $L_{i+1} = L_i \cup U_{r_{i+1}} \in \mathfrak{I}_0$ és

$$\mu_0(L_{i+1}) = \mu_0(L_i \cup U_{r_{i+1}}) \leq \mu_0(L_i) + \mu_0(U_{r_{i+1}})$$

teljesül. Ebből az

$$\beta - \alpha = \mu_0([\alpha, \beta]) \leq \mu_0(L_M) \leq \sum_{k=0}^{M} \mu_0(U_{r_k}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(U_k) < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

ellentmondás adódik.

9.6. Definíció. A

$$C \triangleq [0, 1] \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{3^m - 1} \left] \frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}} \right[$$

halmazt *Cantor-halmaznak* nevezzük.

9.7. Tétel. *(A Cantor-halmaz tulajdonságai.) A Cantor-halmaz kompakt és nulla mértékű.*

Bizonyítás. 1. A Cantor-halmaz korlátos és zárt, tehát kompakt.

2. Definiáljuk rekurzív módon a

$$\rho : \mathcal{P}([0, 1]) \to \mathcal{P}([0, 1]) \qquad J \mapsto \left(\frac{1}{3} J \right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} J \right)$$

leképezéssel és az $I_0 = [0, 1]$ kezdőelemmel az $n \mapsto I_n$ sorozatot, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_{n+1} = \rho(I_n)$. Ha $J \in \mathcal{P}([0, 1])$ az $\mathfrak{I}_0$ halmaz véges sok elemének az uniója, akkor $\rho(I)$ is ilyen tulajdonságú, vagyis mindegyik I_n halmaz véges sok intervallum uniója. A ρ definíciója alapján minden $i \in \mathbb{N}$ elemre $\mu_0(I_{n+1}) = \frac{2}{3} \mu_0(I_n)$ is teljesül, vagyis $\mu_0(I_0) = 1$ miatt $\mu_0(I_n) = \left(\frac{2}{3} \right)^n$. Rövid számolással igazolható, hogy minden $i \in I$ esetén $C \subseteq I_n$ teljesül, ahol C jelöli a Cantor-halmazt. Mivel $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, ezért minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\left(\frac{2}{3} \right)^n < \varepsilon$ és ekkor I_n intervallumoknak olyan véges rendszere, melyre

$$C \subseteq \cup I_n \quad \text{és} \quad \sum_{J \in I_n} \mu_0(J) < \varepsilon.$$

9.8. Definíció. Legyen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x)$ egy-egy igaz vagy hamis formula. Azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* $p(x)$, ha az $\{x \in \mathbb{R} |\ p(x) \text{ hamis}\}$ halmaz nulla mértékű. Ezt úgy rövidítjük, hogy m.m. p.

9.9. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre m.m. $f = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ majdnem mindenütt nulla folytonos függvény, és tegyük fel, hogy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ pont, melyre $f(a) \neq 0$. Ekkor a folytonosság miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a-\delta, a+\delta[$ pontra $|f(x)| \geq \dfrac{|f(a)|}{2}$. Mivel a $]a-\delta, a+\delta[$ halmaz a 9.5 tétel alapján nem nulla mértékű, ezért a

$$]a-\delta, a+\delta[\subseteq \{x \in \mathbb{R} |\ f(x) \neq 0\}$$

a tartalmazás miatt az $\{x \in \mathbb{R} |\ f(x) \neq 0\}$ halmaz sem lehet nulla mértékű.

9.2. A Riemann-integrál

9.10. Definíció. Az $[a, b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ szám n-est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \leq i \leq n-1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a,b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a,b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n, [a, b]) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ x_0 = a,\ x_{n-1} = b,\ \forall i \in (n-1) :\ x_i < x_{i+1} \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, ha $\operatorname{Ran} y \subseteq \operatorname{Ran} x$, melyet az $y \leq x$ szimbólummal jelölünk.

Magyarázat. Vagyis az $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás pontosan akkor finomabb, mint az $y = (y_0, \dots, y_m) \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, ha

$$\{y_0, \dots, y_m\} \subseteq \{x_0, \dots, x_n\}$$

teljesül és ezt az $y \leq x$ vagy másképp a $(y_i)_{i=0,\dots,m} \leq (x_i)_{i=0,\dots,n}$ szimbólummal jelöljük.

9.11. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a, b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i |\ 0 \leq i \leq n\} \cup \{y_i |\ 0 \leq i \leq m\}, \qquad k = |L| - 1,$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0,\dots,k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

- Legyen $z_0 = a$.
- Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min\left(L \setminus \{z_0, \dots, z_i\}\right).$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0,\dots,k}$ felosztást az *x és az y felosztás egyesítésének* nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

9.12. Definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ egy felosztás. Ekkor az *f függvény $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege*

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát.*

$$s(f) = \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} |\ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$
$$S(f) = \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} |\ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$

9.13. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.*

1. *Minden $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_x(f) \leq S_x(f)$.*
2. *Ha z jelöli az $[a,b]$ intervallum triviális folsztását, azaz $z = (a,b)$, akkor minden más $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_z(f) \leq s_x(f)$ és $S_x(f) \leq S_z(f)$.*
3. *Ha az $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $x \leq y$ teljesül, akkor $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_y(f) \leq S_x(f)$.*
4. *Bármely $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $s_x(f) \leq S_y(f)$ teljesül.*
5. *Az $s(f)$ halmaz felülről korlátos, valamint az $S(f)$ halmaz alulról korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, jelölje z a $z_0 = a$ és $z_1 = b$ triviális felosztást továbbá legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a,b]$ intervallum olyan felosztása, melyre $x \leq y$ teljesül.
1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Az $s_z(f) \leq s_x(f)$ egyenlőtlenséget

$$s_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) =$$
$$= \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t) \right) (b - a) = s_z(f)$$

igazolja, ehhez hasonlóan mutatható meg, hogy $S_x(f) \leq S_z(f)$ teljesül.
3. Tegyük fel, hogy az x felosztást oly módon finomítjuk, hogy valamely $j \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén az $[x_j, x_{j+1}]$ szakasz belsejéből hozzáveszünk még egy c osztópontot. Jelölje x' az így kapott felosztást. Mivel

$$\left(\inf_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\inf_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \geq$$
$$\geq \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j)$$
$$\left(\sup_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\sup_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \leq$$
$$\leq \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j),$$

ezért $s_x(f) \leq s_{x'}(f)$ és $S_x(f) \geq S_{x'}(f)$.
Mivel az y felosztást megkaphatjuk az x felosztásból véges sok új osztópont hozzávételével, ezért $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_x(f) \geq S_y(f)$ teljesül.
4. Legyen x, y tetszőleges felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, és tekintsük a $z = x \sqcup y$ felosztást. Ekkor $x \leq z$ és $y \leq z$, amiből az előző pont alapján $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$ adódik. Mivel az 1. pont alapján $s_z(f) \leq S_z(f)$, ezért $s_x(f) \leq S_y(f)$.
5. Mivel minden x felosztásra $z \leq x$ teljesül, ezért

$$s_z(f) \leq s_x(f) \leq S_x(f) \leq S_z(f),$$

ami igazolja, hogy az $s(f)$ halmaz felülről, az $S(f)$ halmaz pedig alulról korlátos.

9.14. Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

– *alsó integráljának* nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\underline{\int_a^b} f$;

– *felső integráljának* nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\overline{\int_a^b} f$;

– *Riemann-integrálható*, ha $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, ekkor $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ jelöli az $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ értéket. Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \triangleq \{f : [a,b] \to \mathbb{R} |\ f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}.$$

– Ha $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor bevezetjük a

$$\int_b^a f \triangleq -\int_a^b f$$

jelölést.

– Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén legyen

$$\int_a^a f \triangleq 0.$$

– Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az f *függvény határozott integráljának* nevezzük.

9.15. Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ függvény *Riemann-integrálható*, ha $\operatorname{Re}\circ f, \operatorname{Im}\circ f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és ekkor a

$$\int_a^b f \triangleq \left(\int_a^b \operatorname{Re}\circ f\right) + \mathrm{i}\left(\int_a^b \operatorname{Im}\circ f\right)$$

képlettel értelmezzük a komplex értékű függvény integrálját.

9.16. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Azt kell megmutatni, hogy $\alpha \leq \beta$. Az állítással ellentétben tegyül fel, hogy $\beta < \alpha$. Ekkor legyen $\varepsilon = \alpha - \beta$. Legyen x és y az a felosztás, melyre $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f)$ és $S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel a 9.13 tétel szerint minden x, y felosztás esetén $s_x(f) \leq S_y(f)$, ezért

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\alpha - \beta < \varepsilon$, ami lehetetlen, hiszen $\alpha - \beta = \varepsilon$.

9.3. A Riemann-integrálhatóság kritériumai

Magyarázat. Ebben a fejezetben először csak elégséges feltételeket adunk függvények Riemann-integrálhatóságára. A fejezet végén közelebbről is megvizsgáljuk a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó Lebesgue-tételt, mely szükséges és elégséges feltételt ad korlátos függvény Riemann-integrálhatóságára.

9.17. Tétel. *Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \; S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $c = \int_a^b f$, valamint $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan x, y felosztása az $[a, b]$ halmaznak, melyre

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \qquad S_y < c + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $z = x \sqcup y$. Mivel $x \leq z$ és $y \leq z$, ezért $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$, vagyis

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq s_z(f) \leq c$$
$$c \leq S_z(f) \leq S_y \leq c + \frac{\varepsilon}{2},$$

ezért

$$c - c \leq S_z(f) - s_z(f) < c + \frac{\varepsilon}{2} - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk az állítás egyik irányú következtetését.
Most tegyük fel, hogy f olyan függvény, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Megmutatjuk, hogy $\alpha = \beta$. A 9.16 tétel alapján $\alpha \leq \beta$.
Tegyül fel, hogy $\alpha < \beta$. Ekkor legyen $\varepsilon = \beta - \alpha$. A feltételezésünk alapján ehhez a ε paraméterhez létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$\beta \leq S_x(f) < s_x(f) + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon,$$

vagyis a $\varepsilon = \beta - \alpha < \varepsilon$ ellentmondást kapjuk.
Mivel $\alpha \leq \beta$ és $\alpha < \beta$ lehetetlen, ezért $\alpha = \beta$, ami azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

9.18. Definíció. A korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*

$$\omega(f, [a, b]) \triangleq \left(\sup_{t \in [a,b]} f(t)\right) - \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t)\right).$$

Az f *függvény* $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ *felosztáshoz tartozó oszcillációs összege*

$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i).$$

Magyarázat. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény és $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén

$$\Omega_x(f) = S_x(f) - s_x(f)$$

teljesül.

9.19. Tétel. *Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \; \Omega_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A 9.17 tétel alapján nyilvánvaló.

9.20. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor*

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{u,v \in [a,b]} |f(u) - f(v)|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $H = f([a, b])$ és $A = \{|x - y| \mid x, y \in H\}$. Mivel f korlátos, ezért a H halmaz is korlátos, vagyis létezik az $\alpha = \sup H$ és a $\beta = \inf H$ valós szám. Megmutatjuk az

$$\alpha - \beta = \sup A$$

egyenlőséget, melyből már következik a bizonyítandó állítás.
Bármely $x, y \in H$ számra $\beta \leq x, y \leq \alpha$ teljesül, ezért

$$\beta - \alpha \leq x - y \leq \alpha - \beta,$$

vagyis

$$|x - y| \leq \alpha - \beta.$$

Tehát $\alpha - \beta$ felső korlátja az A halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik kisebb felső korlátja az A halmaznak. Legyen $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan felső korlát, melyre $\delta < \alpha - \beta$ teljesül. Vezessük be a pozitív $\varepsilon = \dfrac{\alpha - \beta - \delta}{2}$ paramétert. Ekkor létezik olyan $x, y \in H$, melyre $\alpha - \varepsilon < x$ és $y < \beta + \varepsilon$ teljesül, vagyis

$$x - y > \alpha - \varepsilon - \beta - \varepsilon = \delta > 0.$$

Tehát van olyan $x, y \in H$ elem, melyre $|x - y| > \delta$ teljesül, tehát δ nem felső korlátja az A halmaznak.

9.4. Riemann-integrálás alaptulajdonságai

9.21. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + g, cf, fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, vagyis az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ algebra, valamint*

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f \qquad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, melyre

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{4} < s_x(f) \leq S_x(f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$\int_a^b g - \frac{\varepsilon}{4} < s_y(g) \leq S_y(g) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. A továbbiakban felhasználjuk, hogy bármely $z = (z_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén

$$s_z(f) + s_z(g) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} f(t) + \inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = s_z(f + g)$$
$$S_z(f) + S_z(g) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} f(t) + \sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \geq$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t\in[z_i,z_{i+1}]} (f(t)+g(t)) \right) (z_{i+1}-z_i) = S_z(f+g).$$

Legyen $z = x \sqcup y$, azaz z az x és az y felosztás egyesítése, ekkor az

$$s_x(f)+s_x(g) \leq s_x(f+g) \leq s_z(f+g) \leq S_z(f+g) \leq S_y(f+g) \leq S_y(f)+S_y(g)$$

egyenlőtlenségek miatt

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < s_z(f+g) \leq S_z(f+g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\Omega_z(f+g) < \varepsilon$. Ez pedig a 9.19 tétel alapján azt jelenti, hogy $f+g \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. Továbbá a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\sup s(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \text{és} \qquad \inf S(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

teljesül, vagyis

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

A számmal való szorzásra vonatkozó szabály egyszerűen igazolható a definíció alapján.
Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $t \in [a,b]$ esetén $|f(t)| < K$ teljesül. Ekkor minden $u, v \in [a,b]$ elemre

$$\left|f^2(u) - f^2(v)\right| = |f(u)+f(v)| \cdot |f(u)-f(v)| \leq 2K \cdot |f(u)-f(u)|.$$

Vagyis bármely $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra a 9.20 tétel alapján

$$\begin{aligned}
\Omega_x(f^2) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f^2,[x_i,x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1}-x_i) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v\in[x_i,x_{i+1}]} \left|f^2(u)-f^2(v)\right| \right) \cdot (x_{i+1}-x_i) \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v\in[x_i,x_{i+1}]} |f(u)-f(v)| \right) \cdot 2K \cdot (x_{i+1}-x_i) = 2K\Omega_x(f)
\end{aligned}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f^2 \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. Ha $g \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor az $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$ egyenlőség alapján $fg \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ teljesül.

9.22. Tétel. *Legyen $a,b,c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathcal{R}([a,c],\mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c,b],\mathbb{R})$, valamint ebben az esetben*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bizonyítás. Legyen $a,b,c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
1. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a,c]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, ezért létezik olyan x' felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_{x'}(f) < \varepsilon$. Legyen x_0 az x' és az (a,c,b) felosztás egyesítése. Ekkor $x' \leq x_0$, ezért a 9.13 tétel alapján

$$s_{x'}(f) \leq s_{x_0}(f) \quad \text{és} \quad S_{x'}(f) \geq S_{x_0}(f),$$

vagyis

$$\Omega_{x_0}(f) = S_{x_0}(f) - s_{x_0}(f) \leq S_{x'}(f) - s_{x'}(f) = \Omega_{x'}(f) < \varepsilon.$$

Ha az $x_0 = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztásból csak azokat az x_i pontokat hagyjuk meg, melykere $x_i \leq c$ teljesül, akkor az $[a, c]$ intervallumnak kapjuk x egy felosztását, melyre $\Omega_x(f) \leq \Omega_{x'}(f) < \varepsilon$ teljesül.
A fenti gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[c, b]$ intervallumon is.

2. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$. Legyen $\alpha = \int_a^c f$ és $\beta = \int_c^b f$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül.

Ebből ugyanis egyrészt $\Omega_I(f) < \varepsilon$ következik, vagyis $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, másrészt $\int_a^b f = \alpha + \beta$ adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_1 felosztása az $[a, c]$ intervallumnak, melyre

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_1}(f) \leq S_{x_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül és mivel $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_2 felosztása a $[c, b]$ intervallumnak, melyre

$$\beta - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_2}(f) \leq S_{x_2}(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Legyen x az x_1 és x_2 felosztások osztópontjainak az egyesítéséből nyert felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. Ekkor a közelítő összegek definíciója alapján

$$s_x(f) = s_{x_1}(f) + s_{x_2}(f) \quad \text{és} \quad S_x(f) = S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f),$$

vagyis a fenti egyenlőtlenségek összeadásából

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) \leq \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik.

9.23. Tétel. *Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Mivel f folytonos függvény és $[a, b]$ kompakt halmaz, ezért a 6.34 Heine-tétel alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $u, v \in [a, b]$ számra

$$|u - v| < \delta \quad \to \quad |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $n = \left[\frac{b - a}{\delta}\right] + 1$ és minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén legyen

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b - a),$$

és jelölje x az $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztást. Ekkor a 9.20 tétel alapján

$$\begin{aligned}
\Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) < \\
&< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \frac{b - a}{n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

9.24. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Ha $f(b) = f(a)$, akkor a függvény állandó, tehát folytonossága miatt integrálható. Ezért feltesszük, hogy $f(a) < f(b)$.
Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és vegyünk egy olyan $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztást, melyre minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_{i+1} - x_i < c$ teljesül. (Ilyen felosztás létezik, hiszen ehhez hasonlót konstruáltunk a 9.23 tétel bizonyításában.) Ekkor

$$\Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) - \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \cdot c = c(f(b) - f(a))$$

teljesül, vagyis ha $c = \dfrac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$ paraméterhez választjuk meg a felosztást, akkor $\Omega_x(f) < \varepsilon$.

9.25. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, akkor $|f| \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Mivel minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|,$$

ezért minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ indexre a 9.20 tétel alapján

$$\omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) = \sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} ||f(u)| - |f(v)|| \leq \sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| = \omega(f, [x_i, x_{i+1}]).$$

Ebből pedig

$$\Omega_x(|f|) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \Omega_x(f) < \varepsilon$$

adódik, amiből $|f| \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ következik.

9.26. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ függvényre*

1. *ha $f \geq 0$, akkor $\int_a^b f \geq 0$;*
2. *ha $f \geq g$, akkor $\int_a^b f \geq \int_a^b g$;*
3. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.
1. Ha $f \geq 0$, akkor az $[a,b]$ intervallum bármely I felosztása esetén $s_I(f), S_I(f) \geq 0$, ezért a közös határértékükre is $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$ teljesül.
2. Ha $f \geq g$, akkor a $h = f - g$ függvényre $h \geq 0$ teljesül, valamint h a 9.21 tétel értelmében szintén Riemann-integrálható és

$$\int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

A tétel 1. pontja alapján $\displaystyle\int_a^b h \geq 0$, ezért $\displaystyle\int_a^b f \geq \int_a^b g$.
3. Mivel $f \leq |f|$, ezért a 2. pont alapján $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Továbbá a $-|f| \leq f$ egyenlőtlenség miatt $\displaystyle -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f$. Ezek alapján $\displaystyle\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

9.5. Newton–Leibniz-tétel

9.27. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és $F \in C([a,b],\mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és itt $F' = f$. Ekkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, $F \in C([a,b],\mathbb{R})$ legyen olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon, és itt $F' = f$ teljesül rá, valamint tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztását. Minden $i \in \{0,\dots,n-1\}$ esetén alkalmazzuk az F függvényre a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon. Ekkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ szám, melyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül. Ezeket az egyenleteket összeadva

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)\\ F(b) - F(a) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)\end{aligned}$$

adódik. Mivel $i \in \{0,\dots,n-1\}$ esetén

$$\inf_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) \le f(c_i) \le \sup_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t),$$

ezért

$$\begin{aligned}s_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\inf_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t)\right)(x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) =\\ &= F(b) - F(a) \le \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\right)(x_{i+1} - x_i) = S_x(f).\end{aligned}$$

Tehát minden x felosztásra

$$s_x(f) \le F(b) - F(a) \le S_x(f)$$

teljesül, amiből f integrálhatósága miatt $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$ következik.

9.28. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon, akkor*

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'.$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon. Ekkor f' folytonos az $[a,b]$ halmazon, tehát $f' \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és innen már a 9.27 Newton–Leibniz-tétel alapján következik az állítás.

9.6. Az integrálfüggvény

9.29. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f.$$

9.30. Tétel. *Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$.*

1. *Az I_f függvény folytonos.*
2. *Ha f folytonos az $x_0 \in]a,b[$ pontban, akkor I_f differenciálható az x_0 pontban és $I_f'(x_0) = f(x_0)$.*
3. *Ha $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, akkor létezik primitív függvénye.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, $x_0 \in]a,b[$ és jelölje I_f az f integrálfüggvényét. Mivel f korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $|f(x)| < K$.
1. Legyen $x, y \in [a,b]$. Ekkor a 9.22 tétel alapján

$$I_f(x) - I_f(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_y^x f,$$

vagyis felhasználva a 9.26 tételt

$$|I_f(x) - I_f(y)| < K\,|x-y|$$

adódik, amiből az $y \to x$ határértékkel kapjuk az

$$\lim_x I_f = I_x$$

egyenletet, ami az I_f függvény x pontbeli folytonosságát garantálja.
2. Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\forall z \in [a,b] : |z - x_0| < \delta \quad \to \quad |f(z) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy $z \in]x_0, x_0 + \delta[\cap [a,b]$. Ekkor a 9.22 tétel és a fenti egyenlőtlenség alapján

$$I_f(z) - I_f(x_0) = \int_a^z f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^z f$$
$$(f(x_0) - \varepsilon)(z - x_0) \le \int_{x_0}^z f \le (f(x_0) + \varepsilon)(z - x_0),$$

melyek kombinációjából

$$f(x_0) - \varepsilon \le \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} \le f(x_0) + \varepsilon$$

adódik. Vagyis

$$\lim_{z \to x_0 + 0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

Teljesen hasonlóan igazolható, hogy az x_0 pontban vett bal oldali határérték is létezik és értéke $f(x_0)$. Tehát

$$I_f'(x_0) = \lim_{z \to x_0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

3. Ha f folytonos, akkor a 2. pont alapján I_f az f egy primitív függvénye.

9.31. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor*

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. Ekkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [a,b]$ elemre $|f(x)| < K$ teljesül. A 9.22 tétel alapján minden $x \in]a,b[$ esetén

$$\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f,$$

ebből a 9.26 tétel felhasználásával

$$\left|\int_a^b f - \int_x^b f\right| = \left|\int_a^x f\right| \le \int_a^x |f| \le \int_a^x K = (x-a)K$$
$$\left|\int_a^b f - \int_a^x f\right| = \left|\int_x^b f\right| \le \int_x^b |f| \le \int_x^b K = (b-x)K$$

adódik. Ebből

$$\lim_{x\to a+}\left|\int_a^b f - \int_x^b f\right| = 0$$
$$\lim_{x\to b-}\left|\int_a^b f - \int_a^x f\right| = 0$$

következik, melynek egyszerű átalakítása a bizonyítandó állítás.

9.7. Lebesgue-tétel

9.32. Tétel. *(Lebesgue-tétel.) Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha majdnem mindenütt folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $x \in [a,b]$ számra $|f(x)| < K$ teljesül.
1. Az, hogy az f függvény nem folytonos az $x \in [a,b]$ pontban azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists y \in [a,b] : \quad |x-y| < \delta \ \wedge \ |f(x)-f(y)| \ge \varepsilon.$$

Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$ teljesül, ezért az, hogy az f függvény nem folytonos az $x \in [a,b]$ pontban az

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists y \in [a,b] : \quad |x-y| < \delta \ \wedge \ |f(x)-f(y)| > \frac{1}{n}.$$

alakban is felírható. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$D_n = \left\{ x \in [a,b] \ \middle| \ \forall \delta > 0 \exists y \in [a,b] : \ |x-y| < \delta \ \wedge \ |f(x)-f(y)| > \frac{1}{n} \right\},$$

valamint legyen $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Ekkor $x \in D$ pontosan akkor teljesül, ha f nem folytonos az x pontban.
2. Ha f majdnem mindenütt folytonos, akkor a D halmaz nulla mértékű, ezért a 9.4 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a D_n halmaz is nulla mértékű. Fordítva, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a D_n halmaz nulla mértékű, akkor a 9.4 tétel alapján D is nulla mértékű. Tehát elég az alábbi következtetéseket igazolni.

$$D \text{ nulla mértékű} \quad \to \quad f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \quad \to \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ : D_n \text{ nulla mértékű}$$

3/a. Tegyük fel, hogy a D halmaz nulla mértékű és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 9.4 tétel alapján létezik olyan $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nyílt intervallumokból álló halmazrendszer, melyre

$$D \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon'$$

teljesül. Ha $z \in [a,b] \setminus D$, akkor az f függvény folytonos az z pontban, vagyis létezik olyan $\delta_z \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy

$$\forall y \in \,]z-\delta_z, z+\delta_z[\, \cap [a,b]: \quad |f(z)-f(y)| < \varepsilon'$$

teljesül. Ekkor

$$[a,b] \subseteq D \cup ([a,b] \setminus D) \subseteq \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{z\in[a,b]\setminus D} \left]z - \frac{\delta_z}{2}, z + \frac{\delta_z}{2}\right[\right)$$

az $[a,b]$ kompakt halmaz egy nyílt halmazokkal való lefedését adja meg, melyből kiválasztható véges sok, mely szintén lefedi az $[a,b]$ halmazt. Tehát létezik olyan $F \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz és véges sok $z_1, \dots, z_m \in [a,b] \setminus D$ pont, melyre

$$[a,b] \subseteq \left(\bigcup_{n\in F} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \left]z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2}\right[\right) \tag{9.1}$$

teljesül.

3/b. Most elkészítjük ezen lefedés végpontjai által meghatározott felosztást. Ehhez legyen

$$\mathcal{G}' = \left(\bigcup_{n\in F} \{\inf A_n, \sup A_n\} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \left\{ z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right\} \right) \cup \{a,b\},$$
$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cap [a,b],$$

és az alábbi rekurzióval definiáljunk egy sorozatot.

- Legyen $x_0 = a$ és $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \setminus \{x_0\}$.
- Ha valamilyen $i \in \mathbb{N}$ esetén x_i és $\mathcal{G}_i$ már definiált és $x_i < b$, akkor legyen $x_{i+1} = \min \mathcal{G}_i$ és $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i \setminus \{x_{i+1}\}$, ha pedig $x_i = b$, akkor legyen vége a sorozatnak.

Mivel a véges elemszámú $\mathcal{G}$ halmazból válogatunk elemeket így egy véges hosszúságú $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ sorozatot kapunk, mely egy felosztása az $[a,b]$ intervallumnak.

3/c. Az x felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget két részre bontjuk, az egyikben az intervallumok hossza kicsi, a másikban az oszcillációs összeg kicsi. Ehhez definiáljuk a

$$J_1 = \{j \in \{0,\dots,n-1\} \mid \exists n \in F: \ ]x_j, x_{j+1}[\, \subseteq A_n\}$$
$$J_2 = \left\{ j \in \{0,\dots,n-1\} \setminus J_1 \mid \exists i \in \{1,\dots,m\}: \ ]x_j, x_{j+1}[\, \subseteq \left]z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2}\right[\right\}$$

indexhalmazt. Nyilván $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ és $J_1 \cap J_2 \subseteq \{0,\dots,n-1\}$. Megmutatjuk, hogy $J_1 \cup J_2 = \{0,\dots,n-1\}$ teljesül. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $i_0 \in \{0,\dots,n-1\}$, melyre $i_0 \notin J_1$ és $i_0 \notin J_2$ teljesül. Legyen $\alpha = x_{i_0}$ és $\beta = x_{i_0+1}$. Mivel $\alpha \in [a,b]$ ezért a (9.1) képlet alapján az alábbi esetek lehetségesek.

- Létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\alpha \in A_n$ teljesül. Ekkor $i_0 \notin J_1$ miatt $\sup A_n < \beta$, tehát a felosztás konstrukciója miatt az $[\alpha, \beta]$ intervallumban $\sup A_n$ is szerepelne osztópontként.
- Létezik olyan $i \in \{1,\dots,m\}$, melyre $\alpha \in \left]z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2}\right[$ teljesül. Ekkor $i_0 \notin J_2$ miatt $z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} < \beta$, tehát az $[\alpha, \beta]$ intervallumban lenne még egy osztópont, $z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2}$, a konstrukció miatt.

Tehát mindkét esetben ellentmondást kapunk, így $J_1 \cup J_2 = \{0,\dots,n-1\}$.

3/d. Az I felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget két részben számoljuk ki.

$$\omega_1 = \sum_{i\in J_1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i\in J_1} 2K \cdot (x_{i+1} - x_i) \le 2K \sum_{n\in F} \mu_0(A_n) \le$$
$$\le 2K \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < 2K\varepsilon'$$

$$\omega_2 = \sum_{i\in J_2} \omega(f,[x_i,x_{i+1}])\cdot(x_{i+1}-x_i) \le \sum_{i\in J_2} 2\varepsilon'\cdot(x_{i+1}-x_i) \le$$
$$\le 2\varepsilon' \sum_{i\in J_2}(x_{i+1}-x_i) \le 2\varepsilon'(b-a)$$

Ezek alapján

$$\Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f,[x_i,x_{i+1}])\cdot(x_{i+1}-x_i) = \omega_1+\omega_2 < 2K\varepsilon' + 2(b-a)\varepsilon' = 2(K+b-a)\varepsilon'.$$

Vagyis a tetszőlegesen választott ε paraméterhez legyen $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(K+b-a)}$. Ebből az ε' paraméterből kapott x felosztásra $\Omega_x(f) < \varepsilon$ fog teljesülni, vagyis $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$.
4. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,m}$ olyan felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \dfrac{\varepsilon}{n}$ teljesül, továbbá nézzük meg, hogy a D_n halmaz az osztópontok mely intervallumába metsz bele, ehhez definiáljuk a

$$J = \{i \in \{0,\dots,m-1\} \mid D_n \cap]x_i,x_{i+1}[\neq \emptyset\}$$

indexhalmazt. Ha $i \in J$, akkor létezik olyan $x_0 \in]x_i,x_{i+1}[$, melyre $x_0 \in D_n$ is teljesül. A D_n halmaz definíciója alapján ekkor létezik olyan $z \in]x_i,x_{i+1}[$, melyre

$$|f(x_0)-f(z)| > \frac{1}{n}$$

teljesül. Ebből viszont a 9.20 tétel alapján

$$\omega(f,[x_i,x_{i+1}]) > \frac{1}{n}$$

következik. Felírva az x felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget

$$\frac{\varepsilon}{n} > \Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \omega(f,[x_i,x_{i+1}])\cdot(x_{i+1}-x_i) \ge$$
$$\ge \sum_{i\in J} \omega(f,[x_i,x_{i+1}])\cdot(x_{i+1}-x_i) \ge \frac{1}{n}\sum_{i\in J}(x_{i+1}-x_i)$$

adódik, amiből pedig

$$\sum_{i\in J}(x_{i+1}-x_i) < \varepsilon.$$

Mivel

$$D_n \subseteq \left(\bigcup_{i=0}^{m}\{x_i\}\right) \cup \bigcup_{i\in J}]x_i,x_{i+1}[\,,$$

ezért a D_n halmaz lefedhető véges sok, tetszőlegesen kicsi összhosszúságú intervallumokkal, vagyis nulla mértékű.

9.8. A Riemann-integrál néhány alkalmazása

9.33. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a,b \in \mathbb{R}$, melyre $a < b$ és $[a,b] \subseteq I$, legyen valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Ekkor*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a, b \in \mathbb{R}$, melyre $a < b$ és $[a, b] \subseteq I$, legyen valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Ha $n = 0$, akkor a bizonyítandó állítás

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) \ \mathrm{d}\, t,$$

mely egyből következik a 9.27 Newton–Leibniz-formulából.
Az $n > 0$ esetben definiáljuk a $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{(b-t)^n}{n!}$ függvényt, melyre minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén $g^{(k)}(t) = (-1)^k \dfrac{(b-t)^{n-k}}{(n-k)!}$ teljesül. Ekkor a parciális integrálás szabálya alapján minden $k \in \{0, \dots, n\}$ számra

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t) &= (-1)^k \left[f^{(n-k)}(t) g^{(k)}(t) \right]_a^b - \int_a^b f^{(n-k)}(t) g^{(k+1)}(t) \ \mathrm{d}\, t = \\ &= -(-1)^k \frac{f^{(n-k)}(a)}{(n-k)!} (b-a)^{n-k} - \int_a^b f^{(n-k)}(t) g^{(k+1)}(t) \ \mathrm{d}\, t,\end{aligned}$$

amiből átrendezéssel

$$-\frac{f^{(n-k)}(a)}{(n-k)!} (b-a)^{n-k} = (-1)^k \int_a^b f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t) + f^{(n-k)}(t) g^{(k+1)}(t) \ \mathrm{d}\, t$$

adódik. Ha ennek az egyenletnek a bal oldalát összegezzük, akkor

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n-k)}(a)}{(n-k)!} (b-a)^{n-k} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k$$

adódik, ha a jobb oldalát, akkor

$$\begin{aligned}&\int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k f^{(n-k)}(t) g^{(k+1)}(t) \right) \ \mathrm{d}\, t \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t) \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^{k+1} f^{(n+1-(k+1))}(t) g^{(k+1)}(t) \right) \ \mathrm{d}\, t \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t) \right) - \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k f^{(n+1-k))}(t) g^{(k)}(t) \right) \ \mathrm{d}\, t \\ &= \int_a^b f^{(n+1)}(t) g(t) - \left((-1)^n f^{(1)}(t) g^{(n)}(t) \right) \ \mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n \ \mathrm{d}\, t - \int_a^b (-1)^n f^{(1)}(t) (-1)^n \frac{(b-t)^0}{0!} \ \mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n \ \mathrm{d}\, t - \int_a^b f'(t) \ \mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n \ \mathrm{d}\, t - f(b) + f(a)\end{aligned}$$

adódik. Vagyis azt kapjuk, hogy

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n \ \mathrm{d}\, t - f(b) + f(a),$$

aminek az átrendezése a bizonyítandó állítás.

9.34. Tétel. *(Az integrálszámítás középértéktételei.) Legyen* $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$.

1. *Ha $g \geq 0$, akkor létezik $\xi \in [a,b]$, hogy*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

2. *Létezik $\xi \in [a,b]$, hogy*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(\xi).$$

Bizonyítás. Legyen $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$.
1. Tegyük fel, hogy $g \geq 0$. Ha $g = 0$, akkor nyilván teljesül az állítás, ezért feltehető, hogy $g \neq 0$. Mivel az f függvény folytonos, ezért korlátos is, tehát létezik véges $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ és $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Ekkor minden $x \in [a,b]$ esetén $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, vagyis a 9.26 tétel alapján

$$\int_a^b mg(x) \ \mathrm{d}\, x \leq \int_a^b f(x)g(x) \ \mathrm{d}\, x \leq \int_a^b Mg(x) \ \mathrm{d}\, x.$$

Ebből az $\alpha = \displaystyle\int_a^b g$ jelöléssel

$$m \leq \frac{1}{\alpha} \int_a^b (fg) \leq M$$

adódik. A Bolzano-tétel alapján az f függvény valamely $\xi \in [a,b]$ pontban az $\dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_a^b (fg)$ értéket is felvesz és ekkor

$$f(\xi)\alpha = \int_a^b (fg)$$

teljesül.
2. Az 1 pontban szereplő egyenlőséget kell alkalmazni a $g = 1$ választással.

9.35. Tétel. *A*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C([a,b], \mathbb{R}) \times C([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \langle f, g \rangle \triangleq \int_a^b fg$$

leképezés skaláris szorzás.

Bizonyítás. Legyen $f, g, h \in C([a,b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor a 9.21 tétel alapján

$$\langle f+g, h \rangle = \int_a^b (f+g)h = \int_a^b (fh+gh) = \int_a^b fh + \int_a^b gh = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$
$$\langle cf, g \rangle = \int_a^b cfg = c \int_a^b fg = c \langle f, g \rangle$$
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b fg = \langle g, f \rangle .$$

Továbbá az $f^2 \geq 0$ egyenlőtlenség miatt

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2 \geq \int_a^b 0 = 0.$$

Ha $f = 0$, akkor nyilván $\langle f, f \rangle = 0$.
Tehát azt kell csak megmutatni, hogy az $\langle f, f \rangle = 0$ egyenletből $f = 0$ következik.
Tegyük fel, hogy van olyan $x_0 \in \,]a,b[$ pont, melyre $f(x_0) \neq 0$, vagyis $c = f^2(x_0) > 0$. Ekkor

létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \cap [a,b]$ esetén $f^2(x) > \frac{c}{2}$. Legyen $\delta' = \min\{x_0-a, b-x_0, \delta\}$ és tekintsük a

$$g : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |x-x_0| > \delta'; \\ \frac{c}{2\delta'}(x-x_0+\delta'), & \text{ha} \quad x_0-\delta' \le x < x_0; \\ \frac{c}{2\delta'}(x_0+\delta'-x) & \text{ha} \quad x_0 \le x < x_0+\delta' \end{cases}$$

függvényt. Ekkor $g \in C([a,b], \mathbb{R})$ és $g \le f^2$ teljesül, ezért a 9.26 tétel miatt az

$$0 = \langle f, f\rangle = \int_a^b f^2 \ge \int_a^b g \ge \frac{c\delta'}{2} > 0$$

ellentmondást kapjuk.

9.36. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Ha $f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, akkor*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

teljesül.

Bizonyítás. A 15.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség és a 9.35 tétel következménye.

9.9. Improprius integrál

9.37. Definíció. (*Improprius integrál.*)

– Legyen $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,\infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az $[a,\infty[$ intervallumon* és erre a

$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az *f függvény improprius integrálja divergens az $[a,\infty[$ intervallumon.*

– Ha $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty, a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,a], \mathbb{R})$ teljesül és a

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja a $]-\infty, a]$ intervallumon*, és erre a

$$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $[a, b[$ *intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x \to b-} \int_a^x f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x, b], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x \to a+} \int_x^b f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $]a, b]$ *intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x \to a+} \int_x^b f$$

jelölést használjuk.

9.38. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ függvényt.*

1. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $[a, \infty[$ intervallumon, ha $\alpha > 1$ és ebben az esetben*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{a^{\alpha-1}(\alpha - 1)}.$$

2. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $]0, a]$ intervallumon, ha $\alpha < 1$ és ebben az esetben*

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}\, x = \frac{a^{1-\alpha}}{1 - \alpha}.$$

Bizonyítás. A 9.27 Newton–Leibniz-formula alapján rövid számolással igazolható.

10. Véges dimenziós terek topológiája

10.1. Skaláris szorzás és norma

10.1. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren az alábbi műveleteket értelmezzük.

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \mapsto (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \\ \cdot &: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad (\lambda,(x_1,\dots,x_n)) \mapsto (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) \end{aligned}$$

10.2. Tétel. *A $\mathbb{K}^n$ tér a fenti műveletekkel vektortér.*

Bizonyítás. A vektortér tulajdonságai nyilvánvaló módon teljesülnek a fenti műveletekre.

10.3. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad (x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

műveletet *skaláris szorzásnak* nevezzük.

10.4. Tétel. *A $\mathbb{K}^n$ téren a skaláris szorzásra az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in \mathbb{K}^n : \ \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$
2. $\forall x \in \mathbb{K}^n : \ \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x,y,z \in \mathbb{K}^n : \ \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
4. $\forall x,y \in \mathbb{K}^n \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \langle \lambda x,y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$
5. $\forall x,y \in \mathbb{K}^n : \ \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

Bizonyítás. A definíció nyilvánvaló következménye.

10.5. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden $x,y \in \mathbb{K}^n$ vektorra*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $x,y \in \mathbb{K}^n$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \le \langle z,z\rangle = \langle x-ty,x-ty\rangle = \langle x,x\rangle - \overline{t}\langle y,x\rangle - t\langle x,y\rangle + |t|^2\langle y,y\rangle .$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$ értéket

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \frac{\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle\langle y,y\rangle}\langle y,y\rangle = \\ &= \frac{1}{\langle y,y\rangle}\Big(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - |\langle x,y\rangle|^2\Big) \end{aligned}$$

adódik.

10.6. Definíció. Az $x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *vektorok által bezárt szög*

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}}.$$

10.7. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}: \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}: \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér*, ha $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren.

10.8. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának vagy sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

Bizonyítás. Egyedül a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség nem adódik rögtön a definícióból. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges. Adott $p \in [1, \infty[$ esetén

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

a 7.29 Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Mivel az x, y vektor minden $k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ komponensére $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ teljesül, ezért

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max\{|x_k + y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} \leq \max\{|x_k| + |y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} \leq \\ &\leq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} + \max\{|y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty . \end{aligned}$$

10.9. Tétel. *A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ teljesül.*

Bizonyítás. A definíciók alapján nyilvánvaló.

10.10. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\langle x, y \rangle = \|x\|_2 \, \|y\|_2 \cos \alpha$$

teljesül, ahol α a vektorok által bezárt szög.

Bizonyítás. A vektorok által bezárt szög definíciója és a fenti tétel k alapján nyilvánvaló.

10.11. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges. A norma tulajdonsága alapján

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \to \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| ,$$

az x és y szerepét felcserélve és kihasználva, hogy $\|x - y\| = \|y - x\|$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

adódik. Vagyis

$$\pm (\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| ,$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

10.2. Topológiai alapfogalmak

10.12. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in \mathbb{K}^n$ pontra a

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K}^n \mid \|x-y\| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, a normát nem írjuk ki, tehát csak a $B_r(x)$ szimbólumot fogjuk használni.

Megjegyzés. A továbbiakban számtalanszor fogjuk használni általában hivatkozás nélkül az alábbi egyszerű, de fontos tényt.

$\Diamond$

10.13. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - \|x-y\|[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathbb{K}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$, $y \in B_r(x)$ és $\rho \in]0, r - \|x-y\|[$. Ha $z \in B_\rho(y)$, akkor $\|y-z\| < \rho$, amiből

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| < \|x-y\| + \rho < r$$

következik, azaz $z \in B_r(x)$. Tehát $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$.

10.14. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \|x-y\|$$

leképezésre az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ d(x,y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Bizonyítás. A norma definíciója alapján mindegyik tulajdonság nyilvánvaló.

Jelölés. Adott $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in \mathbb{K}^n$ pontok esetén a továbbiakban a $d(x,y) = \|x-y\|$ jelölést használjuk.

10.15. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.

- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *zárt*, ha $\mathbb{K}^n \setminus X$ nyílt.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}^n$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

10.16. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció alapján nyilvánvaló. A második állításhoz vegyük a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér $A_1, \ldots, A_n$ korlátos részhalmazait, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1,\ldots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \ldots, n$ esetén legyen $R_i = r_i + \|x_i - x_1\|$. Ekkor minden i számra a 10.13 tétel miatt $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

10.17. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x \in \mathbb{K}^n$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R \in]0, r - \|x-y\|[$. Ekkor a 10.13 tétel miatt $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül.

10.18. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. *Az üres halmaz és* $\mathbb{K}^n$ *nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges véges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i = 1, \dots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min\{r_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i\in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

10.19. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. *Az üres halmaz és* $\mathbb{K}^n$ *zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ zárt halmazok tetszőleges véges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{K}^n \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$\mathbb{K}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{K}^n \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.

3. Legyen $(Z_i)_{i\in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{K}^n \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$\mathbb{K}^n \setminus \bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{K}^n \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcap_{i\in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i\in I} Z_i$ halmaz zárt.

10.20. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $Z, U \subseteq \mathbb{K}^n$. *Ha* Z *zárt halmaz és* U *nyílt halmaz, akkor* $Z \setminus U$ *zárt halmaz és* $U \setminus Z$ *nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben legyen $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz és $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (\mathbb{K}^n \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (\mathbb{K}^n \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

10.21. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (\mathbb{K}^n \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

10.22. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

10.23. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K}^n | \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K}^n | \ \forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

10.24. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz esetén*
1. *$\operatorname{Int} X$ halmaz nyílt;*
2. *$\operatorname{Int} X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. *$\overline{X}$ halmaz zárt;*
4. *$\overline{X}$ az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in \mathbb{K}^n \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq \mathbb{K}^n \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - \|y - z\| > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

10.25. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz esetén*
1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

10.26. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz és legyen $x \in \mathbb{K}^n$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

10.27. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $X \subseteq \mathbb{K}^n$. *Ekkor*

$$\operatorname{Int} X = \mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus X},$$
$$\overline{X} = \mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X).$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül. Vagyis $(\mathbb{K}^n \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $x \notin \overline{\mathbb{K}^n \setminus X}$ következik. Fordítva, ha $x \notin \overline{\mathbb{K}^n \setminus X}$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $(\mathbb{K}^n \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $B_r(x) \subseteq X$ következik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. A második egyenlőség következik az előből, hiszen

$$\mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X) = \mathbb{K}^n \setminus \left(\mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus (\mathbb{K}^n \setminus X)}\right) = \overline{\mathbb{K}^n \setminus (\mathbb{K}^n \setminus X)} = \overline{X}.$$

10.28. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X, Y \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = \mathbb{K}^n$.

10.3. Sorozatok

10.29. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{K}^n$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

10.30. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatnak legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ a határértéke. Tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $d(a_n, x) < \dfrac{d(x,y)}{2}$ és $d(a_n, y) < \dfrac{d(x,y)}{2}$. Amiből a

$$d(x,y) \leq d(x, a_n) + d(a_n, y) < d(x,y)$$

ellentmondás adódik.

Magyarázat. Tehát a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben, ha létezik egy sorozatnak határértéke, akkor az egyértelmű.

10.31. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

10.32. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

10.33. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \le n \le N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} \{a_n\}\right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, ezért a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

10.34. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \ge n$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $\left|a_{\sigma(n)} - \lim a\right| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

10.35. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$.*
1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra $\lim a \in A$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$.
1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Az 1.39 kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, x) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in \left(B_{\frac{1}{r}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Mivel α eleme a nyílt $\mathbb{K}^n \setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha) \subseteq (\mathbb{K}^n \setminus A)$, amiből $B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a_n \in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1} \in B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^n$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárt definíciója alapján α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

10.36. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *és* $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *konvergens sorozat.*

1. *Az* $a + b$ *sorozat konvergens és* $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. *A* ca *sorozat konvergens és* $\lim(ca) = c(\lim a)$.
3. *A* λa *sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.
4. *Az* $\|a\|$ *sorozat konvergens és* $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat az $A = \lim a$, a $B = \lim b$ és a $\Lambda = \lim \lambda$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.
1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n > N_b$ számra $\|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|(a_n + b_n) - (A + B)\| \leq \|a_n - A\| + \|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $c = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $c \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ekkor minden $n > N_a$ számra

$$\|ca_n - cA\| = |c| \cdot \|a_n - A\| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

3. Mivel a λ sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\lambda_n| < K$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ és legyen $N_\lambda \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_\lambda$ esetén $|\lambda_n - \Lambda| < \frac{\varepsilon}{2\|A\|}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\begin{aligned}\|\lambda_n a_n - \Lambda A\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda_n A + \lambda_n A - \Lambda A\| \leq |\lambda_n| \cdot \|a_n - A\| + \|A\| \cdot |\lambda_n - \Lambda| < \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|A\|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ha $A = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$\|\lambda_n a_n - 0\| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \varepsilon$, akkor minden $n > N_a$ számra

$$|\|a_n\| - \|A\|| \leq \|a_n - A\| < \varepsilon.$$

10.37. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, *és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *sorozat. Az* a *sorozat pontosan akkor konvergens a* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_p)$ *térben, ha minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *esetén az* $a_i = \mathrm{pr}_i \circ a$ *sorozat konvergens és ekkor minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *indexre*

$$\mathrm{pr}_i(\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat.
Ha az a sorozat konvergens, akkor legyen $x = \lim a$, $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d_p(a_n, x) < \varepsilon$. Ekkor $|\mathrm{pr}_i(a_n) - \mathrm{pr}_i(x)| < \varepsilon$, vagyis $\lim(\mathrm{pr}_i \circ a) = \mathrm{pr}_i(\lim a)$.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (\lim(\mathrm{pr}_1 \circ a), \ldots, \lim(\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}} \circ a)) \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$

esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i < n$ természetes számra $|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i| < \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}}$. Legyen $N = \max\{N_i |\ i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}\}$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra a $p \neq \infty$ esetben

$$d_p(a_n, x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i|^p} < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}}\right)^p} = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} 1} = \varepsilon \frac{\sqrt[p]{\mathfrak{n}}}{\mathfrak{n}} \leq \varepsilon,$$

a $p = \infty$ esetben pedig

$$d_\infty(a_n, x) = \max\{|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i| \mid i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}\} < \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} \leq \varepsilon$$

teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az a sorozat konvergens.

10.4. Cauchy-sorozatok

10.38. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \ \big((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon\big).$$

10.39. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < 1$ teljesül, vagyis minden $N < n$ természetes szám esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a$ véges sok korlátos halmaz uniója, ezért korlátos.

10.40. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ konvergens sorozat, melynek határértéke $A \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $N < n, m$ természetes szám esetén

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, A) + d(a_m, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

10.41. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_1 < n, m$ esetén $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$ és $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d(a_n, A) \leq d(a_n, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

10.42. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér *teljes*, ha $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ teljes halmaz.

10.43. Tétel. *A $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes, továbbá minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ zárt halmaz teljes.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ Cauchy-sorozat a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Mivel minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $n, m \in \mathbb{N}$ index esetén

$$|\mathrm{pr}_i(a_n) - \mathrm{pr}_i(a_m)| \leq \|a_n - a_m\|_\infty ,$$

ezért $\mathrm{pr}_i \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat a $\mathbb{K}$ számtestben vagyis a 4.29 tétel alapján konvergens. Amiből a 10.37 tétel alapján adódik, hogy az a sorozat konvergens.
Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ zárt halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ térben, azonban zárt halmazban haladó konvergens sorozat határértéke is a halmazban van, ezért A teljes.

Kiegészítés. A normával ellátott vektorterek teljessége nem szükségszerű.

◊

10.44. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

10.45. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér Banach-tér.*

10.5. Kompakt halmazok

10.46. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér.

– Az $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ térnek.

10.47. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

Bizonyítás. A kompaktság definíciójának közvetlen következménye.

10.48. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *kompakt halmaz.*

1. *Ekkor* X *korlátos és zárt.*
2. *Az* $Y \subseteq X$ *halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ kompakt halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy X korlátos. Legyen $p \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges pont. Mivel $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} B_n(p)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $X \subseteq \bigcup_{n \in I} B_n(p)$. Ekkor az $r = \max\{I\}$ számra $X \subseteq B_r(p)$ teljesül.
Most igazoljuk, hogy X zárt. Ehhez legyen $p \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus X$ tetszőleges pont. Minden $x \in X$ pont esetén ha $r(x) = \dfrac{d(x,p)}{2}$, akkor $B_{r(x)}(x) \cap B_{r(x)}(p) = \emptyset$. Mivel

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} B_{r(x)}(x)$$

az X kompakt halmaz nyílt fedése, ezért létezik olyan $H \subseteq X$ véges halmaz, melyre

$$X \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{r(x)}(x)$$

teljesül. Legyen $r = \min\{r(x) |\ x \in H\}$. Ekkor minden $x \in H$ esetén $B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) = \emptyset$, vagyis

$$X \cap B_r(p) \subseteq \left(\bigcup_{x \in H} B_{r(x)}(x) \right) \cap B_r(p) = \bigcup_{x \in H} \left(B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) \right) = \emptyset.$$

Ez azt mutatja, hogy $B_r(p) \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus X$. Tehát $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus X$ halmaz minden pontja belső pont, ezért $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus X$ nyílt halmaz, vagyis X zárt.
2. Legyen $Y \subseteq X$ zárt halmaz és legyen $(U_i)_{i\in I}$ az Y halmaz nyílt fedése és legyen $V = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus Y$. Ekkor $V, (U_i)_{i\in I}$ az X halmaz nyílt fedése ($X \subseteq V \cup \bigcup_{i\in I} U_i$), ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, melyre $X \subseteq V \cup \bigcup_{i\in I'} U_i$. A V halmaz definíciójából adódik, hogy ekkor $Y \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i$ is teljesül, vagyis az Y halmaz kompakt. Ha $Y \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor az első pont alapján zárt.

10.49. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $(K_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $(K_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül, valamint rögzítsünk egy $i_0 \in I$ indexet. Minden $i \in I$ esetén legyen $U_i = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0})$, mely nyílt halmaz. A bizonyítandó állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$. Ekkor

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I} (K_i \cap K_{i_0})\right) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}},$$

vagyis $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Mivel K_{i_0} kompakt, ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i$. Ebből

$$K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i = \bigcup_{i\in I'} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})\right)$$

adódik. A feltevés miatt véges sok K_i kompakt halmaz metszete sem üres, tehát létezik $j \in I$, melyre $K_j \subseteq \bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})$. Erre a halmazra a fenti tartalmazás alapján

$$K_j \subseteq K_{i_0} \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})\right) \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus K_j$$

következik, ami a nyilvánvaló $K_j \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus K_j$ ellentmondásra vezet.

10.6. Heine–Borel-tétel

10.50. Tétel. *Minden $R \in \mathbb{R}^+$ esetén a $[-R, R]^n$ halmaz kompakt az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben.*

Bizonyítás. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és tekintsük a $T_0 = [-R, R]^n$ halmazt az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben. A T_0 halmaz nyilván korlátos, hiszen az $r_0 = 1 + 2R$ számra teljesül, hogy bármely $x \in T_0$ esetén $T_0 \subseteq B_{r_0}(x)$.
Most megmutatjuk, hogy zárt is. Ehhez legyen $c : \mathbb{N} \to T_0$ tetszőleges konvergens sorozat, a $\lim c = C$ határértékkel. Ekkor a 10.37 tétel alapján minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre $\lim \mathrm{pr}_i(c) = C_i$ teljesül. Mivel a $\mathrm{pr}_i(c)$ konvergens sorozat az $[a_i, b_i]$ zárt halmazban halad, ezért $C_i \in [a_i, b_i]$. Tehát $C \in T_0$.
Indirekt módon tegyük fel, hogy a T_0 halmaz nem kompakt. Ekkor létezik olyan $(U_k)_{k\in K}$ nyílt halmazokból álló lefedése a T_0 halmaznak, melynek nem létezik véges részbefedése. Vegyünk egy ilyen $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszert.
Most definiáljuk a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazokat az alábbi rekurzióval. A T_0 halmazt már fent definiáltuk. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén a T_n halmaz ismert és
i) ha $n \geq 1$, akkor $T_n \subseteq T_{n-1}$;

ii) az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek nem létezik olyan véges részhalmaza, mely lefedi a T_n halmazt;
iii) $T_n = \prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} [\alpha_i, \beta_i]$ alakú, ahol minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.
Ezek a feltételek teljesülnek a T_0 halmazra. Legyen $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ és definiáljuk a

$$A_j = \prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} \left[\alpha_i + j_i \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}, \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + j_i \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}\right]$$

halmazokat. Ekkor a

$$T_n = \bigcup_{j\in\{0,1\}^{\mathfrak{n}}} A_j$$

felbontás nem más mint a T_n halmaz $2^{\mathfrak{n}}$ darabra való felosztása az élek felezésével. Minden $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ esetén az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszer lefedi az A_j halmazt. Ha minden $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ esetén az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek létezne olyan véges részhalmaza, mely lefedi az A_j halmazt, akkor a T_n halmaznak is létezne véges részbefedése. Tehát létezik legalább egy olyan $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ index, melyre az teljesül, hogy a $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek egyetlen véges részhalmaza sem fedi be az A_j halmazt. Válasszunk egy ilyen j indexet és legyen $T_{n+1} = A_j$. Ekkor az így definiált T_{n+1} halmazra teljesülnek az i)–iii) tulajdonságok.
Tekintsük a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazokat. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $r_n = \frac{r_0}{2^n}$. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in T_n$ esetén $T_n \subseteq B_{r_n}(x)$ teljesül.
Minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén a $(\mathrm{pr}_i(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-féle közösrésztétel feltételei, ezért

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_i(T_n) \neq \emptyset.$$

Legyen $x_i \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_i(T_n)$ és $x = (x_1, \dots, x_{\mathfrak{n}})$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in T_n$. Mivel $x \in T_0$, ezért létezik olyan $k_0 \in K$ index, melyre $x \in U_{k_0}$ teljesül. Az U_{k_0} halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R(x) \subseteq U_{k_0}$. Mivel $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, ezért létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $r_n < R$ teljesül. Ekkor

$$x \in T_n \subseteq B_{r_n}(x) \subseteq B_R(x) \subseteq U_{k_0}$$

miatt azt kaptuk, hogy a T_n halmaz lefedhető véges sok, nevezetesen egyetlen U_{k_0} nyílt halmazzal, ellentmondva ezzel feltételezésünknek.

10.51. Tétel. *(Heine–Borel-tétel végtelen normára.) Az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Ha $K \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy kompakt részhalmaza, akkor K a 10.48 tétel alapján korlátos és zárt.
Most tegyük fel, hogy $K \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ korlátos és zárt halmaz. A K halmaz korlátossága miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy $K \subseteq B_R(0)$ teljesül. Ekkor a végtelen norma definíciója alapján $K \subseteq \prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} [-R, R]$.
A 10.50 tétel alapján $\prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} [-R, R]$ kompakt halmaz és K ennek zárt részhalmaza, tehát a 10.48 tétel alapján K kompakt.

10.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

10.52. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel euklidészi terekben végtelen normára.) Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$. Az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \to A$ tetszőleges sorozat. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ halmazt. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-tétel feltételei, ezért létezik $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ teljesül. Ebből a lezárt definíciója alapján következik, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge \ a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x. Ekkor $\lim(a \circ \sigma) \in \overline{K}$, vagyis a K halmaz zártsága miatt $\lim(a \circ \sigma) \in K$.
Most legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nem kompakt halmaz. Ekkor a 10.51 tétel alapján A vagy nem zárt vagy nem korlátos.
Ha A nem zárt, akkor létezik egy $x \in \overline{A} \setminus A$ pont és ehhez egy $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Ekkor az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melynek nincsen olyan konvergens részsorozata, mely határértéke az A halmazban lenne.
Ha A nem korlátos, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \nsubseteq B_{n+1}(0)$ teljesül. Legyen $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A \setminus B_{n+1}(0)$ tetszőleges. Ekkor az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \leq \|a_n\|$ teljesül. Tehát a egyetlen részsorozata sem korlátos, ezért konvergens sem lehet. Vagyis az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melynek nincsen konvergens részsorozata.

10.8. Függvények határértéke

10.53. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}^m$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

10.54. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény, az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in \mathbb{K}^m$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $a \in \mathbb{K}^n$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{K}^m$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$0 < d(x,a) < \delta_A \ \to \ d'(f(x), A) < \frac{d'(A,B)}{2}$$
$$0 < d(x,a) < \delta_B \ \to \ d'(f(x), B) < \frac{d'(A,B)}{2}$$

teljesül, ahol d' jelöli a $\|\cdot\|'$ norma szerinti távolságot, azaz $d'(A,B) = \|A - B\|'$. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre a

$$d'(A,B) \leq d'(A, f(x)) + d'(f(x), B) < d'(A,B)$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

10.55. Definíció. (*A lim művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ jelöli.

10.56. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ *függvény és a* $z \in \mathbb{K}^n$ *pont a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaz torlódási pontja. A* $\lim\limits_z f$ *határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan* $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ *sorozatra, mely a* z *ponthoz konvergál, létezik a* $\lim f \circ a$ *határérték.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in M$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_z f = F \in \mathbb{K}^m$ határérték. Legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ 0 < d(x, z) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), F) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), F) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = F$.
Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ két olyan tetszőleges sorozat, mely a z ponthoz konvergál, valamint legyen

$$a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in \mathbb{K}^m$ pont, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim\limits_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, \ d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, \ d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), A) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), A) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

10.57. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $a \in \mathbb{K}^n$ *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ *halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik* $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_a g$ *és* $\lim\limits_a \varphi$. *Akkor az a pont torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}(f+g)$, *a* $\operatorname{Dom}(\lambda f)$, *a* $\operatorname{Dom}(\varphi f)$ *és a* $\operatorname{Dom}(\|f\|)$ *halmaznak, valamint*

1. $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$;
2. $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda(\lim\limits_a f)$;
3. $\lim\limits_a (\varphi f) = (\lim\limits_a \varphi)(\lim\limits_a f)$;
4. $\lim\limits_a \|f\| = \left\| \lim\limits_a f \right\|$.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$,, $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}^n$ torlódási pontja a $H = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ halmaznak, legyen $F = \lim\limits_a f$, $G = \lim\limits_a g$, $\Phi = \lim\limits_a \varphi$,

valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
1. Az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x-a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x)-F\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall x \in H: \ 0 < \|x-a\| < \delta_g \ \Rightarrow \ \|g(x)-G\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x-a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|(f+g)(x)-(F+G)\| \le \|f(x)-F\| + \|g(x)-G\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (f+g) = F+G$.
2. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ számra, ha $0 < \|x-a\| < \delta$, akkor $\|f(x)-F\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ezek alapján ha $x \in H$, $0 < \|x-a\| < \delta$, akkor

$$\|\lambda f(x) - \lambda F\| = |\lambda| \cdot \|f(x)-F\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda F$.
3. Létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x-a\| < \delta_1 \ \Rightarrow \ \|f(x)-F\| < 1,$$

vagyis, ha $x \in H$ olyan, hogy $\|x-a\| < \delta_1$, akkor

$$\|f(x)\| < \|F\| + 1.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_φ, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x-a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x)-F\| < \varepsilon',$$
$$\forall x \in H: \ 0 < \|x-a\| < \delta_\varphi \ \Rightarrow \ |\varphi(x)-\Phi| < \varepsilon'.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_\varphi, \delta_1\}$ számra, ha $x \in H$ olyan, hogy $0 < \|x-a\| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned}\|(\varphi f)(x) - \Phi F\| &= \|\varphi(x)f(x) - \Phi f(x) + \Phi f(x) - \Phi F\| \le \\ &\le \|f(x)\| \cdot |\varphi(x)-\Phi| + |\Phi| \cdot \|f(x)-F\| \le \\ &\le (\|F\|+1)\cdot\varepsilon' + |\Phi|\cdot\varepsilon' = \varepsilon'\cdot(\|F\|+|\Phi|+1) < \varepsilon,\end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{\|F\|+|\Phi|+1}$.
Ezek alapján az ε, $\|F\|$ és $|\Phi|$ számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1 ,δ_f, δ_φ mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
4. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x-a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x)-F\| < \varepsilon.$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $0 < \|x-a\| < \delta$ esetén

$$|\|f(x)\| - \|F\|| \le \|f(x)-F\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a \|f\| = \|F\|$.

10.9. Függvények folytonossága

10.58. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Jelölés. Adott $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált terek és $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$ részhalmazok esetén a

$$C(U, V) \triangleq \{f : U \to V \mid f \text{ folytonos}\}$$

jelölést fogjuk használni.

10.59. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos a z pontban és legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Az f függvény z pontbeli folytonossága miatt tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez, létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ d(x, z) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(z)$.
Tegyük fel, hogy f nem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \operatorname{Dom} f \cap B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Big\{ x \in \operatorname{Dom} f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), \ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \Big\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ x \in \operatorname{Dom} f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), \ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \Big\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

10.60. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : && 0 < d(x, a) < \delta \quad \to \quad d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \\
&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : && d(x, a) < \delta \quad \to \quad d'(f(x), f(a)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

10.61. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. *Tegyük fel,* f, g *és* φ *folytonos az* a *pontban. Ekkor az* a *pontban*

1. $f + g$;
2. λf;
3. φf;
4. $\|f\|$

folytonos.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in H$, ahol $H = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. Tegyük fel, f, g és φ folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. Az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in H : \ \|x - a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall x \in H : \ \|x - a\| < \delta_g \ \Rightarrow \ \|g(x) - g(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in H : \ \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|(f + g)(x) - (f + g)(a)\| \leq \|f(x) - f(a)\| + \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $f + g$ folytonos az a pontban.

2. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ számra, ha $\|x - a\| < \delta$, akkor $\|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ezért ha $\|x - a\| < \delta$, akkor

$$\|\lambda f(x) - \lambda f(a)\| = |\lambda| \cdot \|f(x) - f(a)\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis λf folytonos az a pontban.

3. Létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H : \ \|x - a\| < \delta_1 \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < 1,$$

vagyis, ha $x \in H$ olyan, hogy $\|x - a\| < \delta_1$, akkor

$$\|f(x)\| < \|F\| + 1.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_φ, hogy

$$\forall x \in H : \ \|x - a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < \varepsilon'$$
$$\forall x \in H : \ \|x - a\| < \delta_\varphi \ \Rightarrow \ |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon'.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_\varphi, \delta_1\}$ számra, ha $x \in H$ olyan, hogy $0 < \|x - a\| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned}\|(\varphi f)(x) - \varphi(a)f(a)\| &= \|\varphi(x)f(x) - \varphi(a)f(x) + \varphi(a)f(x) - \varphi(a)f(a)\| \leq \\ &\leq \|f(x)\| \cdot |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x) - f(a)\| \leq \\ &\leq (\|f(a)\| + 1) \cdot \varepsilon' + |\varphi(a)| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (\|f(a)\| + |\varphi(a)| + 1) < \varepsilon,\end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{\|f(a)\| + |\varphi(a)| + 1}$. Tehát az ε, $\|f(a)\|$ és $|\varphi(a)|$ számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1, δ_f, δ_φ mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.

4. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H : \ \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $\|x - a\| < \delta$ esetén

$$|\|f(x)\| - \|f(a)\|| \leq \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\|f\|$ folytonos az a pontban.

10.62. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $\lambda \in \mathbb{K}$*, valamint* $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *és* $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *folytonos függvény. Ekkor* $f + g$*,* λf*,* φf *és* $\|f\|$ *is folytonos.*

Bizonyítás. Az előző állítást kell alkalmazni minden $a \in \mathbb{K}^n$ pontra.

10.63. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$*. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az* f *függvény folytonos.*
2. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *nyílt halmazra létezik olyan* $U \subseteq \mathbb{K}^n$ *nyílt halmaz, melyre* $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*
3. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *zárt halmazra létezik olyan* $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ *zárt halmaz, melyre* $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $K = \operatorname{Dom} f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_{\delta(z)}(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup\limits_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}^m$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^m$ zárt halmaz. Ekkor $\mathbb{K}^m \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K}^m \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K}^n \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K}^m \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K}^n \setminus (U \cap K)) = K \cap (\mathbb{K}^n \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}^m$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = \mathbb{K}^n \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{K}^m \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K}^m \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K}^n \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K}^m \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K}^n \setminus (Z \cap K)) = K \cap (\mathbb{K}^n \setminus Z)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}^m$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = \mathbb{K}^n \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

10.64. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$*. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az* f *függvény folytonos.*
2. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *nyílt halmazra* $\overset{-1}{f}(A)$ *nyílt.*
3. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *zárt halmazra* $\overset{-1}{f}(A)$ *zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

10.65. Tétel. *Véges dimenziós normált terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{n_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ normált tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, $f : \mathbb{K}^{n_1} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{n_2}$, $g : \mathbb{K}^{n_2} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{n_3}$ folytonos függvény, és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g : \quad d_2(y, f(a)) < \delta_g \;\Rightarrow\; d_3(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) = d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

10.66. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

10.67. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér és $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér és $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijekció. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az f^{-1} függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $\overset{-1}{(f^{-1})}(U) \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz, azaz $f(U) \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz, vagyis amikor f nyílt.

10.68. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$. Az $f : U \to V$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy az U *és U részhalmazok homeomorfak*, ha létezik $f : U \to V$ homeomorfizmus.

10.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

10.69. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a folytonosság topologikus jellemzése ((10.63) tétel) alapján minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i,$$

ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(V_i) = \bigcup_{i \in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

10.70. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Ekkor létezik* $x, y \in K$*, melyekre* $f(x) = \inf f(K)$ *és* $f(y) = \sup f(K)$ *teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 10.69 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a 3.22 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

10.71. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos injektív függvény. Ekkor az* f^{-1} *függvény is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos injektív függvény és legyen $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz. Ekkor $Z \cap K$ a K kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt. Felhasználva, hogy kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt, valamint az

$$\left(\overset{-1}{f^{-1}}\right)(Z) = f(Z) = f(Z \cap K)$$

egyenlőséget az adódik, hogy minden Z zárt halmazra a $\left(\overset{-1}{f^{-1}}\right)(Z)$ halmaz zárt, tehát a 10.63 tétel alapján f^{-1} folytonos függvény.

10.72. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz,* $V \subseteq \mathbb{K}^m$ *és* $f : K \to V$ *folytonos bijekció. Ekkor* f *homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $V \subseteq \mathbb{K}^m$ és $f : K \to V$ folytonos bijekció. Ekkor a 10.69 tétel alapján V kompakt halmaz, és a 10.71 állítás alapján az f^{-1} függvény is folytonos.

10.11. Egyenletesen folytonos függvények

10.73. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *egyenletesen folytonos az* A *halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d(x, y) < \delta \ \to \ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

10.74. Tétel. *Normált terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(d_1(x, y) < \delta \ \to \ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

10.75. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos függvény. Ekkor* f *egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H\right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $d_1(x,y) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in K$ olyan, melyre $d_1(x,y) < \delta$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d_1(y,p) \leq d_1(y,x) + d_1(x,p) < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \leq \delta(p),$$

vagyis

$$\begin{aligned} d_1(x,p) < \delta(p) \quad &\rightarrow \quad d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d_1(y,p) < \delta(p) \quad &\rightarrow \quad d_2(f(y), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ezekből viszont a bizonyítandó

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(p)) + d_2(f(p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

egyenlőtlenség következik.

10.12. Normák ekvivalenciája

10.76. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.*
2. *Minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.*
3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$.*

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren.
$1 \Rightarrow 2$ Minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a $\|\cdot\|'$ norma szerint is nyílt. Mivel x belső pontja a $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint, ezért létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$ teljesül.
$2 \Rightarrow 3$ Az $x = 0$ vektorhoz és az $r = 1$ számhoz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|}(0)$. Vagyis minden $y \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén ha $\|y\|' < R$, akkor $\|y\| < 1$. Legyen $z \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges vektor. Ha $z \neq 0$, akkor $Z = \frac{R}{2\|z\|'} \cdot z$ olyan vektor, melyre $\|Z\|' = \frac{R}{2} < R$, vagyis $\|Z\| = \frac{R}{2\|z\|'} \cdot \|z\| < 1$, amiből $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ adódik. Ha $z = 0$, akkor is teljesül a $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ egyenlőtlenség. Vagyis a $K = \frac{2}{R}$ jelöléssel az adódik, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\| \leq K \|x\|'$.
$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$ teljesül és legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ a $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz. Ha $z \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|}(z) \subseteq X$. Megmutatjuk, hogy $R = \frac{r}{K}$ esetén $B_R^{\|\cdot\|'}(z) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(z)$ teljesül, vagyis z belső pontja az X halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint is. Ha $y \in B_R^{\|\cdot\|'}(z)$, akkor nyilván $\|y - z\|' < R$ és azt kell igazolni, hogy $\|y - z\| < r$ teljesül. Ez rögtön adódik a

$$\|y - z\| \leq K \cdot \|y - z\|' < K \cdot R = K \cdot \frac{r}{K} = r$$

egyenlőtlenségből.

10.77. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ *normák ekvivalensek egymással*, ha ugyanazok a nyílt halmazok a térben, azaz, ha minden $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint és minden $\|\cdot\|'$ szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

10.78. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

10.79. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$ esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek a $\mathbb{K}^n$ téren.*

Bizonyítás. Egyszerűen igazolható, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \cdot \|x\|_\infty$$

teljesül, ezért az előző állítás alapján a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek.

Magyarázat. Ennél többet is tudunk igazolni, nevezetesen a következő állítás azt mutatja, hogy véges dimenziós vektortereken létezik egy kitüntetett nyílt (zárt, kompakt, korlátos, stb.) halmaz fogalom, melyet a normák indukálnak.

10.80. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbb{K}^n$ vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\mathbb{K}^n$ téren a végtelen norma ekvivalens bármely más normával. Legyen $\|\cdot\|$ tetszőleges norma. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a $\mathbb{K}^n$ tér kanonikus bázisa, azaz minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén e_i legyen az a vektor, melynek az i-edik komponense 1, minden más komponense 0. Definiáljuk még a $K_1 = \max\{\|e_i\| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot K_1 \leq K_1 n \cdot \|x\|_\infty .$$

Most megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Ehhez igazolni kell, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ elemekhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^n$ vektorra

$$\|x - y\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$$

teljesül. A $\delta = \dfrac{\varepsilon}{nK_1}$ választás jó lesz, ugyanis ebben az esetben ha $\|x - y\|_\infty < \delta$, akkor

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq K_1 n \|x - y\|_\infty < \varepsilon.$$

Most tekintsük az $S = \{x \in \mathbb{K}^n | \, \|x\|_\infty = 1\}$ halmazt. Mivel a $\|\cdot\|_\infty$ függvény nyilván folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint és $S = \overset{-1}{\|\cdot\|_\infty}(\{1\})$, ezért S egy zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe, tehát zárt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Továbbá S nyilván korlátos, ezért a 10.51 tétel alapján S kompakt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Mivel $\|\cdot\|$ folytonos függvény, ezért a Weierstrass-tétel miatt léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $x \in S$ vektorra

$$\alpha \leq \|x\| \leq \beta$$

teljesül. Ha $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor, akkor $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, ezért $\alpha \leq \left\| \dfrac{x}{\|x\|_\infty} \right\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$. Vagyis $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\|_\infty \leq \dfrac{1}{\alpha} \cdot \|x\|$ teljesül.

Mivel a normák ekvivalenciája tranzitív, ezért megmutattuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren bármely két norma ekvivalens.

10.13. Normák ekvivalenciájának következményei

10.81. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyíltsága, zártsága, korlátossága és kompaktsága független attól, hogy a $\mathbb{K}^n$ tér milyen normával van ellátva.*

Bizonyítás. A 10.80 tétel alapján halmazok nyíltság független a norma megválasztásától. Tehát minden norma esetén ugyanazok a nyílt halmazok. Ezért a nyílt halmazok komplementerei, a zárt halmazok, szintén ugyanazok minden norma esetén. A kompaktság fogalma egyedül a nyíltságot használja a topológiai fogalmak közül, ezért a kompaktság szintén normafüggetlen tulajdonság a $\mathbb{K}^n$ téren. A korlátosság normafüggetlensége pedig a a 10.78 tétel következménye.

10.82. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli folytonossága független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$. Legyen $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ norma az $\mathbb{K}^n$ téren és $\|\cdot\|_{(a)}$, $\|\cdot\|_{(b)}$ norma az $\mathbb{K}^m$ téren. A 10.78 tétel alapján léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\|_{(1)} \le c\,\|x\|_{(2)}$ és minden $y \in \mathbb{K}^m$ esetén $\|y\|_{(b)} \le d\,\|y\|_{(a)}$.
Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az a pontban a $\|\cdot\|_{(1)}$ és az $\|\cdot\|_{(a)}$ norma szerint. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontra, ha $\|x-a\|_{(1)} < \delta'$, akkor $\|f(x)-f(a)\|_{(a)} < \dfrac{\varepsilon}{d}$. Legyen $\delta = \dfrac{\delta'}{c}$ és $x \in \operatorname{Dom} f$ tetszőleges. Ha $\|x-a\|_{(2)} < \delta$, akkor

$$\|x-a\|_{(1)} \le c\,\|x-a\|_{(2)} < c\delta = \delta',$$

amiből a pedig

$$\|f(x)-f(a)\|_{(b)} \le d\,\|f(x)-f(a)\|_{(a)} < d \cdot \frac{\varepsilon}{d} = \varepsilon$$

adódik. Ami éppen azt jelenti, hogy az f függvény folytonos az a pontban a $\|\cdot\|_{(2)}$ és a $\|\cdot\|_{(b)}$ norma szerint.

10.83. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat konvergenciája és határértéke független a $\mathbb{K}^n$ téren választott normától.*

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ norma az $\mathbb{K}^n$ téren, $A \in \mathbb{K}^n$ és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\|\cdot\|_{(1)}$ norma szerint. A 10.78 tétel alapján létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\|_{(2)} \le c\,\|x\|_{(1)}$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ $N < n$ esetén

$$\|a_n - A\|_{(1)} < \frac{\varepsilon}{c},$$

amiből

$$\|a_n - A\|_{(2)} \le c\,\|a_n - A\|_{(1)} < \varepsilon$$

következik. Ez viszont igazolja, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\|\cdot\|_{(2)}$ norma szerint is.

10.84. Tétel. *(Heine–Borel-tétel.) Az $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Ha $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben, akkor a 10.48 tétel alapján K korlátos és zárt.
Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben. Ekkor a 10.80 tétel alapján K korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben, vagyis a 10.51 tétel alapján K kompakt a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben. A 10.80 tétel alapján ekkor K kompakt az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben.
Legyen $K \subseteq \mathbb{C}^n$ korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ normált térben. Tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n} \qquad (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$$

valós lineáris leképezést. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^{2\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|$$

norma az $\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}$ téren, valamint minden $z \in \mathbb{C}^{\mathfrak{n}}$ esetén $\|z\| = \|\varphi(z)\|_*$ teljesül. Továbbá φ homeomorfizmus a $(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_*)$ tér között. Tehát $\varphi(K)$ korlátos és zárt halmaz az $(\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_*)$ térben. Ezért az előzőek alapján $\varphi(K)$ kompakt az $(\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_*)$ térben. Vagyis K kompakt a $(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ térben.

10.85. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel véges dimenziós normált terekben.) Legyen a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált teret és egy $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ halmazt. A 10.80 tétel alapján az A halmaz pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált térben, amikor kompakt a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ térben. A 10.52 tétel alapján A pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ térben, ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme az A halmaznak. A 10.80 tétel alapján egy sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ térben, ha konvergens a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ térben. Tekintsük az $(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált teret és egy $A \subseteq \mathbb{C}^{\mathfrak{n}}$ halmazt. Legyen

$$\varphi : \mathbb{C}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{2\mathfrak{n}} \qquad (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_{\mathfrak{n}}, \operatorname{Im} z_{\mathfrak{n}}).$$

Ekkor

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^{2\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|$$

norma az $\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}$ téren, valamint minden $z \in \mathbb{C}^{\mathfrak{n}}$ esetén $\|z\| = \|\varphi(z)\|_*$ teljesül. Mivel φ homeomorfizmus a $(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_*)$ tér között, ezért A pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ térben, amikor $\varphi(A)$ kompakt a $(\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_*)$ térben. Az eddigiek alapján tudjuk, hogy $\varphi(A)$ pontosan akkor kompakt ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme a $\varphi(A)$ halmaznak. Mivel φ lineáris izometria, ezért pontosan akkor teljesül, hogy minden $\varphi(A)$ halmazban haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme a $\varphi(A)$ halmaznak, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme az A halmaznak.

10.86. Tétel. *Az $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér Banach-tér, továbbá minden zárt részhalmaza teljes.*

Bizonyítás. Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ Cauchy-sorozat, a $\|\cdot\|$ norma szerint, akkor a 10.80 tétel alapján Cauchy-sorozat, a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint is. Ekkor viszont konvergens a 10.43 tétel szerint. Ugyancsak a 10.80 tétel alapján a sorozat konvergens lesz a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

10.87. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ lineáris altér, akkor L teljes.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ lineáris altér. Ha $u_1, \dots, u_m \in L$ bázis az L vektortérben, akkor tekintsük a

$$\varphi : L \to \mathbb{K}^m \qquad \sum_{i=1}^m a_i u_i \mapsto \sum_{i=1}^m a_i e_i$$

bijekciót és a

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|$$

normát. Ha $a : \mathbb{N} \to L$ Cauchy-sorozat, akkor $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauhy-sorozat a $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_*)$ Banach-térben, ezért konvergens is. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(a_n) = x$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \varphi^{-1}(x) \in L$ teljesül.

10.88. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \dots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. A 10.80 tétel alapján a pr_i függvény pontosan akkor folytonos bármely norma szerint, ha folytonos a végtelen norma szerint. Ha $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, akkor a $\delta = \varepsilon$ választással élve azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra, ha $\|x - a\|_\infty < \delta$, akkor

$$|\mathrm{pr}_i(x) - \mathrm{pr}_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_\infty < \varepsilon.$$

Vagyis pr_i folytonos minden tetszőlegesen választott pontban, ezért folytonos.

10.89. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak. Pontosan akkor létezik a $\lim\limits_a f$ határérték, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_i$ határérték és ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$\left(\lim_a f\right)_i = \lim_a f_i$$

teljesül.

Bizonyítás. A 10.80 tétel alapján az állítás független a normák megválasztásától, tehát elég a végtelen normákat tekinteni. Ezért a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és a $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ téren a $\|\cdot\|_\infty$ normával dolgozunk. Legyen $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.
Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_a f$ határérték és legyen $F = \lim\limits_a f$. Legyen $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontra, ha $0 < \|x - a\|_\infty < \delta$, akkor $\|f(x) - F\|_\infty < \varepsilon$. Az

$$|f_i(x) - F_i| \leq \|f(x) - F\|_\infty$$

egyenlőtlenségből viszont következik már a $F_i = \lim\limits_a f_i$ határérték.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_i$ határérték és legyen

$$F = \left(\lim_a f_i, \ldots, \lim_a f_{\mathfrak{m}}\right).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre, ha $0 < \|x - a\|_\infty < \delta_i$, akkor $|f_i(x) - F_i| < \varepsilon$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{\mathfrak{m}}\}$. Ekkor

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ \|x - a\|_\infty < \delta \quad \to \quad \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon,$$

vagyis $F = \lim\limits_a f$.

10.90. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén az f_i függvény folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen f folytonos az a pontban. Mivel minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén pr_i folytonos, ezért a kompozíciójuk, $\mathrm{pr}_i \circ f$, is folytonos lesz az a pontban.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén az f_i függvény folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre, ha $\|x - a\| < \delta_i$, akkor $\|f(x)_i - f(a)_i\| < \varepsilon$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{\mathfrak{m}}\}$. Ekkor

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ \|x - a\| < \delta \quad \to \quad \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon,$$

vagyis f folytonos az a pontban, ha a $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ téren a végtelen normát tekintjük. Azonban 10.80 tétel alapján ekkor $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ tér bármely normája szerint folytonos lesz f az a pontban.

10.14. Sorok

10.91. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

10.92. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor az $n \mapsto \alpha_n$ és az $n \mapsto \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük A. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

10.93. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ sor konvergens és*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| .$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Mivel a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n > N$ természetes számra $m > n$ mellett

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik $A = \lim \alpha$, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ határérték. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| ,$$

amiből az $n \to \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

10.94. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens és legyen $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor az $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ részletösszeg sorozatokra alkalmazva a 10.57 tételt adódik az állítás.

10.15. Lineáris leképezések

10.95. Definíció. A

$$A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto A(x)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *lineáris*, ha minden $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ számra

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

teljesül. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelölést használjuk.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ teret a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortér duálisának* nevezzük, jele $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^*$.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazra a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ jelölést fogjuk használni.

Jelölés. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazt elterjedt jelölése még az $\mathrm{L}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ vagy $\mathrm{L}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K})$.
Megemlítjük még az alábbi gyakran használt jelöléseket.

$$\mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) = \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) = \left\{A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \mid \exists A^{-1}\right\}$$
$$\mathrm{SL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) = \mathrm{SL}(\mathbb{K}^n) = \{A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \mid \det A = 1\}$$

Továbbá, az irodalomban elterjedt konveciót követve a lineáris leképezés argumentumát nem tesszük zárójelbe, vagyis ha A lineáris leképezés és $x \in \mathrm{Dom}\, A$ akkor $Ax \triangleq A(x)$.

10.96. Tétel. *Ha $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \dots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény lineáris.

Bizonyítás. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren értelmezett összeadás és skalárral való szorzás definíciója alapján nyilvánvaló.

10.97. Tétel. *Legyen $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ és minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$, $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji} = (Ae_i)_j$. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$, $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$. Ekkor

$$(Ax)_j = \mathrm{pr}_j\, A\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i\, \mathrm{pr}_j(Ae_i) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i (Ae_i)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

10.98. Definíció. Adott $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ leképezés esetén az $(A_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,\mathfrak{m}\}\\ j\in\{1,\dots,\mathfrak{n}\}}}$ rendszert nevezzük az *A lineáris leképezés mátrixának*, ahol minden $j \in \{1,\dots,\mathfrak{n}\}$ és $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ indexre $A_{ij} = A(e_j)_i$. A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az A leképezés mátrixának az elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \dots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}$$

módon szokás felírni.

10.99. Tétel. *Minden $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$\varphi(y) = \langle x, y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ és tekintsük az

$$x = \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \overline{\varphi(e_k)} e_k$$

vektort. Ekkor minden $y = (y_1, \dots, y_{\mathfrak{n}}) \in \mathbb{K}$ vektorra

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \varphi(e_k) y_k = \varphi\left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} y_k e_k\right) = \varphi(y)$$

teljesül.
Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan, hogy minden $y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra

$$\varphi(y) = \langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle\,,$$

akkor ebből az $y = x_1 - x_2$ vektorra

$$0 = \langle x_1, y\rangle - \langle x_2, y\rangle = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = \|x_1 - x_2\|^2$$

adódik, vagyis $x_1 = x_2$.

10.100. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*
$$X = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x\| \le 1\right\}$$
jelölés mellett $\sup\limits_{x\in X} \|Ax\|' < \infty$ teljesül;
2. *minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*
$$\|Ax\|' \le \|x\| \cdot \sup_{x\in X} \|Ax\|'\,;$$
3. *A folytonos.*

Bizonyítás. Tekintsük a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_1)$ és a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tereket. Legyen

$$K = \max\left\{\|Ae_1\|', \dots, \|Ae_{\mathfrak{n}}\|'\right\}.$$

A véges dimenziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással a 10.80 tétel szerint, ezért létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_1 \le C\,\|x\|$ teljesül. Ekkor minden $x = (x_1, \dots, x_{\mathfrak{n}}) \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$\|Ax\|' = \left\|A\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} x_k e_k\right\|' = \left\|\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} x_k A e_k\right\|' \le \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \|x_k A e_k\|' \le \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} |x_k|\,K = \|x\|_1\,K \le KC\,\|x\|\,.$$

Tehát

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|' \le \sup_{\|x\|\le 1} KC\,\|x\| = KC < \infty.$$

Vezessük be a $c = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|'$ jelölést. Minden $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektor esetén ekkor

$$\|Ax\|' = \|x\| \cdot \left\| A\frac{x}{\|x\|} \right\|' \le \|x\| \cdot c$$

teljesül. Az $x = 0$ esetben pedig nyilván $\|Ax\|' \le \|x\| \cdot c$.
Legyen $a \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ha a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c+1}$ választással élünk és valamely $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{a\}$ pontra $\|x - a\| < \delta$ teljesül, akkor

$$\|Ax - Aa\|' = \|x - a\| \cdot \left\| A\frac{x-a}{\|x-a\|} \right\|' \le \|x - a\|\, c < \delta \cdot c = \varepsilon \cdot \frac{c}{c+1} < \varepsilon$$

teljesül. Vagyis A folytonos a tetszőlegesen választott a pontban, ezért folytonos.

10.101. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér. A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|'$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint legyen $A, B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. A 10.100 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|(A+B)x\|' = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax + Bx\|' \le \sup_{\|x\|\le 1} \left(\|Ax\|' + \|Bx\|'\right) \le \\
&\le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|' + \sup_{\|x\|\le 1} \|Bx\|' = \|A\| + \|B\|\,; \\
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|\lambda Ax\|' = |\lambda| \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|' = |\lambda| \cdot \|A\|
\end{aligned}$$

teljesül.
Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \le 1$ esetén $\|Ax\|' = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ vektorra $\|x'\| \le 1$, ezért $Ax' = \dfrac{1}{\|x\|}Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

10.102. Definíció. A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált terek esetén a

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|'$$

leképezést *operátornormának* nevezzük.

Jelölés. Ha lineáris leképezésnek a normáját vesszük, akkor mindig az operátornormát számoljuk, hacsak másképp nem nyilatkozunk.

Magyarázat. Későbbi számolások és bizonyítások során számtalanszor fogjuk használni hivatkozás nélkül az alábbi tételben foglalt egyenlőtlenséget, mely valójában csak újrafogalmazása a 10.100 tétel 2. pontjának.

10.103. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *és* $x \in \mathbb{K}^n$. *Ekkor*

$$\|Ax\|' \le \|A\| \cdot \|x\|\,.$$

Bizonyítás. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ vektorra $\|x'\| \leq 1$, ezért $\|Ax'\|' \leq \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

10.104. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ *normált tér minden* $i = 1, 2, 3$ *esetén, legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2})$ *és* $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_3})$. *Ekkor*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ normált tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, valamint $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2})$ és $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_3})$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}$ vektor esetén

$$\|BAx\|_{(3)} \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_{(2)} \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_{(1)},$$

ezért

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|_{(1)} \leq 1} \|BAx\|_{(3)} \leq \sup_{\|x\|_{(1)} \leq 1} \Big(\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_{(1)} \Big) = \|B\| \cdot \|A\|.$$

10.105. Tétel. *A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *tér Banach-tér.*

Bizonyítás. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ tér véges dimenziós normált tér, ezért a 10.86 tétel alapján teljes.

Jelölés. Ha $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ tér elemeivel dolgozva a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tér identitás leképezését nem írjuk ki, ha ezzel nem okozunk félreértést, illetve az 1 fogja jelölni az alábbi konvenciónak megfelelően.

$$\forall A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \forall \lambda \in \mathbb{K}: \qquad \lambda \pm A \stackrel{\triangle}{=} \lambda \, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}} \pm A$$

10.106. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Ha az* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ *leképezésre* $\|A\| < 1$ *teljesül, akkor a* $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ *sor konvergens, az* $\mathrm{id} - A$ *elem invertálható és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (\mathrm{id} - A)^{-1}$$

teljesül, ahol id *jelöli a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *identitásfüggvényt.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ olyan, hogy $\|A\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Ebből $\lim_{n \to \infty} \|A^n\| = 0$ adódik, melynek következménye, hogy $\lim_{n \to \infty} A^n = 0$. Továbbá a $\sum_n A^n$ sor abszolút konvergens, mert $\sum_n \|A^n\| \leq \sum_n \|A\|^n < \infty$, hiszen $\|A\| < 1$. A minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényes

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^{n} A^k = \left(\sum_{k=0}^{n} A^k \right) \cdot (1 - A) = 1 - A^{n+1}$$

képletnél az $n \to \infty$ határátmenetet véve az eddigi megállapítások alapján

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \right) \cdot (1 - A) = 1$$

adódik, vagyis $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ az $1 - A$ elem inverze.

10.107. Tétel. *Legyen*

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \stackrel{\triangle}{=} \left\{ a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \mid \exists a^{-1} \right\}.$$

(Vagyis $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *jelöli az invertálható lineáris leképezések halmazát.) Ekkor*

1. *minden* $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *elemre* $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*;*
2. a $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *halmaz nyílt;*
3. *az* $i : \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*,* $i(a) = a^{-1}$ *leképezés folytonos.*

Bizonyítás. 1. Legyen $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ és legyen $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ tetszőleges elem. Ekkor $\|a - b\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$, vagyis $\|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt

$$\|1 - ba^{-1}\| = \|(a - b)a^{-1}\| \leq \|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1,$$

ami a Carl Neumann-féle sorfejtés miatt azt jelenti, hogy az $1 - (1 - ba^{-1})$ elem invertálható és az inverze is folytonos lineáris leképezés, vagyis $ba^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$. Legyen $b' = a^{-1}(ba^{-1})^{-1}$. Ekkor $bb' = 1$ nyilván teljesül, valamint ha a

$$(ba^{-1})^{-1}(ba^{-1}) = 1$$

egyenletet megszorozzuk jobbról az a, balról az a^{-1} mennyiségekkel, akkor $b'b = 1$ adódik. Tehát b' a b inverze, vagyis $b \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$.
2. Mivel a $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ halmaz minden pontja belső pont, ezért nyílt halmaz.
3. Legyen $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ elemre

$$\|a - x\| < \delta \quad \to \quad x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \ \wedge \ \|a^{-1} - x^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az i leképezés folytonos az a pontban. Legyen $\delta_1 = \dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$ és $x \in B_{\delta_1}(a)$. Ekkor az 1. pont alapján $x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$. Tekintsük a következő átalakításokat.

$$\begin{aligned}
&\left((x^{-1} - a^{-1}) + a^{-1}\right) \cdot ((x - a) + a) = 1 \\
&(x^{-1} - a^{-1})(x - a) + (x^{-1} - a^{-1})a + a^{-1}(x - a) = 0 \\
&(x^{-1} - a^{-1})a = -a^{-1}(x - a) - (x^{-1} - a^{-1})(x - a) \\
&x^{-1} - a^{-1} = -a^{-1}(x - a)a^{-1} - (x^{-1} - a^{-1})(x - a)a^{-1} \\
&\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|^2 \cdot \|x - a\| + \|x^{-1} - a^{-1}\| \cdot \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\| \\
&\|x^{-1} - a^{-1}\| \left(1 - \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\|\right) \leq \|a^{-1}\|^2 \cdot \|x - a\| \\
&\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\|} \cdot \|x - a\| < \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \|x - a\|
\end{aligned}$$

Itt az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\|x - a\| < \delta_1 \quad \to \quad \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\| < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget. Vagyis ha $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2\|a^{-1}\|^2}$ és $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor minden $x \in B_\delta(a)$ elemre

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül.

10.16. Multilineáris leképezések

10.108. Definíció. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$A : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto A(x_1, \ldots, x_k)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *k-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $(x_i)_{i=1,\dots,k}, (y_i)_{i=1,\dots,k} \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorrendszere, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre és minden $i \in \{1, \dots, k\}$ indexre

$$A(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \dots, x_k) = \lambda A(x_1, \dots, x_k) + \mu A(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

teljesül.

A k-lineáris $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}^k\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ vagy a $\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ jelölést használjuk.

10.109. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, valamint $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$. Minden $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji_1\dots i_k} = A(e_{i_1} \dots e_{i_k})_j$. Ekkor minden $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektor és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(k)})_j = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k} \tag{10.1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$, $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} A(x^{(1)}, \dots, x^{(k)})_j &= A\left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} x^{(1)}_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} x^{(1)}_{i_1} e_{i_1}\right)_j = \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k} A(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})_j = \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} A_{j,i_1\dots i_k} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k} \end{aligned}$$

teljesül.

10.110. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ multilineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*
$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \mid \|x_i\| \le 1\right\}$$
jelölés mellett $\sup_{x \in X} \|A(x)\|' < \infty$ teljesül;
2. *minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*
$$\|A(x_1, \dots, x_k)\|' \le \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_k\| \cdot \sup_{x \in X} \|A(x)\|';$$
3. *A folytonos.*

Bizonyítás. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren tekintsük a

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} a_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |a_i|$$

normát. A véges dimenziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással a 10.80 tétel szerint, ezért létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_1 \le C \|x\|$ teljesül. Legyen

$$K = \max\left\{\|A(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})\|' \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} : i_j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}\right\}.$$

Legyen minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges vektor, melyet a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tér standard bázisában az

$$x_j = \sum_{i_j=1}^{\mathfrak{n}} a_{j,i_j} e_{i_j}$$

alakban írhatunk fel. Az A multilinearitásának a felhasználásával az

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \dots, x_k)\|' &= \left\| A\left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} a_{1,i_1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}} a_{2,i_2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} a_{k,i_k} e_{i_k} \right) \right\|' \leq \\
&\leq \sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} \sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}} \cdots \sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} |a_{1,i_1}| \, |a_{2,i_2}| \dots |a_{k,i_k}| \, \|A(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})\|' \leq \\
&\leq K \sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} \sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}} \cdots \sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} |a_{1,i_1}| \, |a_{2,i_2}| \dots |a_{k,i_k}| = \\
&= K \left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}_1} |a_{1,i_1}| \right) \left(\sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}_2} |a_{2,i_2}| \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}_k} |a_{k,i_k}| \right) = \\
&= K \|x_1\|_1 \|x_2\|_1 \cdot \dots \cdot \|x_k\|_1 \leq \\
&\leq KC \cdot C \cdot \dots \cdot C \, \|x_1\| \, \|x_2\| \cdot \dots \cdot \|x_k\| \leq \\
&\leq KC^k \prod_{j=1}^{k} \|x_j\|
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség adódik. Tehát ha

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{ x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x_i\| \leq 1 \right\},$$

akkor $\sup\limits_{x \in X} \|A(x)\|' \leq KC^k < \infty$.
Vezessük be a $c = \sup\limits_{x \in X} \|Ax\|'$ jelölést. Minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektor esetén ekkor

$$\|A(x_1, \dots, x_k)\|' = \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_k\| \left\| A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_k}{\|x_k\|} \right) \right\|' \leq \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_k\| \, c$$

teljesül.
A (10.1) képlet alapján minden $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ indexre $\mathrm{pr}_j \circ A$ nem más, mint egy olyan véges összeg, melynek tagjai véges sok projekció szorzatának számszorosai. Ezért minden $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ indexre $\mathrm{pr}_j \circ A$ folytonos, tehát a 10.90 tétel alapján A folytonos.

10.111. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. Ekkor a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup \left\{ \|Ax\|' \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} | \; \|x_i\| \leq 1\} \right\}$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint vezessük be az

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{ x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x_i\| \leq 1 \right\}$$

jelölést. Legyen $A, B \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \right)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. A 10.110 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\|A + B\| = \sup_{x \in X} \|(A+B)x\|' = \sup_{x \in X} \|Ax + Bx\|' \leq \sup_{x \in X} \left(\|Ax\|' + \|Bx\|' \right) \leq$$

$$\leq \sup_{x\in X} \|Ax\|' + \sup_{x\in X} \|Bx\|' = \|A\| + \|B\|\,;$$
$$\|\lambda A\| = \sup_{x\in X} \|\lambda Ax\|' = |\lambda| \sup_{x\in X} \|Ax\|' = |\lambda| \cdot \|A\|\,.$$

Tegyük fel, hogy egy $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektorrendszerre

$$A(x_1, \dots, x_k) = \|x_1\| \dots \|x_k\|\, A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_k}{\|x_k\|}\right) = 0$$

teljesül, vagyis $A = 0$. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

10.112. Tétel. *Ha $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, akkor $\left(\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right), \|\cdot\|\right)$ Banach-tér.*

Bizonyítás. Mivel $\dim \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right) = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}^k < \infty$, ezért véges dimenziós normált tér, tehát a 10.86 tétel alapján teljes.

10.113. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy az $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ függvény *szimmetrikus leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ permutációra és minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ elemre

$$A(x_1, \dots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

teljesül. A $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin}^k_{\mathrm{s}}((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelöli a továbbiakban.

10.114. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. A*

$$\rho : \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right) \to \mathrm{Lin}^{k+1}\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^{k+1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$$
$$A \mapsto \left((x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (A(x_1))(x_2, \dots, x_{k+1})\right)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér $A, B \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$, $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, $y \in (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\rho(A+B)(x,y) &= ((A+B)(x))(y) = (A(x) + B(x))(y) = (A(x))(y) + (B(x))(y) = \\
&= \rho(A)(x,y) + \rho(B)(x,y) = (\rho(A) + \rho(B))(x,y) \\
\rho(\lambda A)(x,y) &= ((\lambda A)(x))(y) = (\lambda \cdot A(x))(y) = \\
&= \lambda \cdot (A(x))(y) = \lambda \cdot \rho(A)(x,y)
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ és $\rho(\lambda A) = \lambda\rho(A)$, tehát ρ lineáris.
Most igazoljuk, hogy ρ injektív. Tegyük fel, hogy $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$ olyan, hogy $\rho(A) = 0$. Legyen $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges. Ekkor minden $y \in (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k$ esetén

$$0 = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y),$$

vagyis $A(x) = 0$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ elemre $A(x) = 0$, ezért $A = 0$.
Mivel ρ lineáris injektív leképezés, ezért a képterének a dimenziója megegyezik az értelmezési tartományának a dimenziójával. Az

$$\dim \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right) = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}^{k+1} = \dim \mathrm{Lin}^{k+1}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \times (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right),$$

egyenlőség alapján ρ szürjektív, tehát lineáris bijekció.
Használjuk a továbbiakban az

$$X = \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \mid \|x_i\| \leq 1\}$$

jelölést. Ha $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathrm{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}\right)\right)$, akkor

$$\|\rho(A)\| = \sup_{\substack{y \in X \\ x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \ \|x\| \leq 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \\ \|x\| \leq 1}} \sup_{y \in X} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \\ \|x\| \leq 1}} \|A(x)\| = \|A\|$$

teljesül.

10.115. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{R}\right)$.

- Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) > 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) < 0$.
- Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ melyre $A(x, \ldots, x) > 0$ és $A(y, \ldots, y) < 0$.

10.116. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{R}\right)$. Ha A leképezés pozitív definit, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ esetén $A(v^{[k]}) \geq K \|v\|^k$; illetve ha A negatív definit, akkor létezik olyan $K' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ esetén $A(v^{[k]}) \leq -K' \|v\|^k$.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{R}\right)$ pozitív definit leképezés. Tekintsük az $S = \{v \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} | \ \|v\| = 1\}$ halmazt. Az S halmaz korlátos, zárt, tehát a 10.84 tétel alapján kompakt. Vagyis az A folytonos függvény korlátos ezen a kompakt halmazon és felveszi a minimumát is. Az A függvény minimumát jelölje $K \in \mathbb{R}_0^+$, vagyis minden $v \in S$ esetén $K \leq A(v^{[n]})$. Ez a K szám szigorúan pozitív, ugyanis a $K = 0$ esetben a folytonos A függvény valamely $v_0 \in S$ pontban felvenné a minimumát, és arra $A(v_0^{[n]}) = 0$ teljesülne, ami ellentmondana A pozitív definitségének.
Megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ esetén $A(x^{[k]}) \geq K \|x\|^k$ teljesül. Ha $x = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Ha $x \neq 0$, akkor $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$, vagyis

$$K \leq A\left(\frac{x}{\|x\|}, \ldots, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

teljesül, amiből az A operátor multilinearitása miatt

$$A(x, \ldots, x) \geq K \cdot \|x\|^k$$

adódik.
Ha A negatív definit, akkor $-A$ pozitív definit, amire alkalmazva az előző eredményt, kapjuk a bizonyítandó állítást ebben az esetben is.

10.17. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel

10.117. Definíció. Egy $f : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ függvény *kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[\ \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f : \quad \Big(d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)\Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

10.118. Tétel. *Minden kontrakció folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ kontrakció a $C \in [0,1[$ kontrakciós együtthatóval. Legyen $x \in \operatorname{Dom} f$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ha $y \in B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{Dom} f$, akkor

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x,y) < d(x,y) < \varepsilon,$$

vagyis $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, amiből $f(B_\varepsilon(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ következik. Ez viszont éppen az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti.

10.119. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel euklidészi terekben.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in \Omega$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció a $C \in]0,1[$ kontrakciós együtthatóval és a tetszőleges pont. (Feltehető, hogy $C > 0$ teljesül, hiszen ha C_1 a kontrakciós együtthatója a függvénynek, akkor bármely $C \in [C_1, 1[$ szám is kontrakciós együtthatója.) Vegyük azt az $x : \mathbb{N} \to M$ sorozatot, melyre $x_0 = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = f(x_n)$ teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq Cd(x_{n+1}, x_n)$$

teljesül, ezért teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0).$$

Ennek felhasználásával az adódik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $m > n$ számra

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} C^i d(x_1, x_0) = C^n \frac{1 - C^{m-n}}{1 - C} d(x_1, x_0) < C^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$$

teljesül. Mivel az $n \mapsto C^n \cdot \dfrac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$ sorozat határértéke nulla, ezért x Cauchy-sorozat. Legyen $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ekkor az f folytonossága alapján

$$f(y) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y,$$

vagyis y fixpontja az f függvénynek.
Tegyük fel, hogy $y_1, y_2 \in \Omega$ az f függvény két különböző fixpontja. Ekkor az

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \leq Cd(y_1, y_2)$$

egyenlőtlenségből a $1 \leq C$ ellentmondás adódik.

10.18. Konvex halmazok szétválasztása

10.120. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Ekkor az A *halmaztól való távolság függvénye*

$$\operatorname{dist}_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z, x).$$

10.121. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén*
$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x,y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos és folytonos;*
3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz.
1. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ és $z \in A$ tetszőleges elem. Ekkor

$$\mathrm{dist}_A(x) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

vagyis

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x,y) \leq d(y,z).$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $z \in A$ elemre fennáll, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x,y) \leq \inf_{z \in A} d(y,z) = \mathrm{dist}_A(y),$$

amiből átrendezéssel

$$\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y) \leq d(x,y)$$

adódik. Ebből az x és az y pontok cseréjével

$$\mathrm{dist}_A(y) - \mathrm{dist}_A(x) \leq d(x,y)$$

adódik, vagyis

$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \leq d(x,y).$$

2. A fenti egyenlőtlenségből következik, hogy dist_A egyenletesen folytonos, amiből pedig a folytonossága következik.
3. Mivel a dist_A függvény folytonos, ezért a $B = \{z \in M |\ \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$ halmaz zárt, hiszen a zárt $\{0\}$ halmaz folytonos függvény általi ősképe ($B = \overset{-1}{\mathrm{dist}_A}(\{0\})$), továbbá a dist_A definíciója alapján $A \subseteq B$ nyilván teljesül, ezért $\overline{A} \subseteq B$. Tehát azt kell még megmutatni, hogy $B \subseteq \overline{A}$, vagy ami ezzel ekvivalens $M \setminus \overline{A} \subseteq M \setminus B$. Ennek igazolásához legyen $x \in M \setminus \overline{A}$. Mivel $M \setminus \overline{A}$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq M \setminus \overline{A}$, vagyis $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Tehát minden $z \in A$ esetén $d(x,z) \geq r$, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) = \inf_{z \in A} d(x,z) \geq r,$$

vagyis $\mathrm{dist}_A(x) \neq 0$, ebből pedig $x \notin B$ és $x \in M \setminus B$ következik.

10.122. Definíció. Az $A, B \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmazok távolsága* a $\|\cdot\|$ norma szerint

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf \{\|x-y\| \ \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

10.123. Definíció. A $K \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *konvex*, ha minden $x, y \in K$ pontra és $t \in [0,1]$ paraméterre $(1-t)x + ty \in K$ teljesül.

10.124. Tétel. *(Zárt konvex és kompakt konvex halmazok szétválasztása.) Tegyük fel, hogy $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt.*

1. *Létezik olyan $a \in K$ és $b \in Z$, melyre $d(a,b) = \mathrm{dist}(K,Z)$ teljesül.*
2. *Létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált teret. Legyenek $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt. A jelölések egyszerűsítése végett legyen $r = \mathrm{dist}(K,Z)$. Vizsgáljuk az

$$\mathrm{dist}_Z : K \to \mathbb{R} \qquad y \mapsto \mathrm{dist}_Z(y)$$

függvényt. A 10.121 tétel értelmében ez folytonos függvény, ezért a K kompakt halmazon felveszi minimumát. Tegyük fel, hogy az $a \in K$ pontban veszi fel a minimumát. Ekkor $\mathrm{dist}_Z(a) > 0$, ugyanis ha $\mathrm{dist}_Z(a) = 0$ teljesülne, abból a 10.121 tétel alapján $a \in \overline{Z} = Z$ teljesülne, amiből az $a \in K \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódna.

Igazoljuk, hogy $\operatorname{dist}_Z(a) = r$. Ha $\operatorname{dist}_Z(a) > r$ lenne, akkor minden $y \in K$ esetén $\operatorname{dist}_Z(y) \geq \operatorname{dist}_Z(a)$, vagyis minden $x \in Z$ esetén $d(x, y) \geq \operatorname{dist}_Z(a)$ adódna, ebből pedig az

$$r = \inf \{d(x, y) |\ x \in Z,\ y \in K\} \geq \operatorname{dist}_Z(a) > r$$

ellentmondást kapnánk. A $\operatorname{dist}_Z(a) < r$ egyenlőtlenség pedig $\operatorname{dist}(K, Z)$ definíciójának mondana ellent. Ezért $\operatorname{dist}_Z(a) = r$.
Megmutatjuk, hogy $\overline{B_{r+1}(a)} \cap Z \neq \emptyset$. Ha $\overline{B_{r+1}(a)} \cap Z = \emptyset$ teljesülne, akkor minden $x \in Z$ esetén $d(a, x) \geq r + 1$ lenne, amiből $\operatorname{dist}_Z(a) \geq r + 1$ adódna. Tekintsük a

$$d(a, \cdot) : \overline{B_{r+1}(a)} \cap Z \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto d(a, x)$$

kompakt halmazon értelmezett folytonos függvényt. Ennek legyen a minimuma a $b \in Z$ pontban.
Megmutatjuk, hogy ekkor $d(a, b) = \operatorname{dist}_Z(a)$ teljesül. A $\operatorname{dist}_Z(a)$ definíciója alapján

$$\operatorname{dist}_Z(a) = \inf \{d(a, x) |\ x \in Z\} \leq d(a, b).$$

Ha $\operatorname{dist}_Z(a) < d(a, b)$ lenne, akkor létezne olyan $b' \in Z$ melyre $\operatorname{dist}_Z(a) < d(a, b') < d(a, b)$ teljesülne. Ekkor $b' \in \overline{B_{r+1}(a)} \cap Z$ olyan pont lenne, ahol a $d(a, \cdot)$ függvény kisebb értéket venne fel, mint a minimumhelyén, a b pontban.
Ezzel igazoltuk, hogy az $a \in K$ és $b \in Z$ pontra $d(a, b) = r = \operatorname{dist}(K, Z)$.
A továbbiakban tekintsük az $\mathbb{R}^n$ teret a $\|\cdot\|_2$ normával és tegyük fel, hogy az előzőekben ezen norma mellett határoztuk meg az a, b pontokat. Legyen $z = a - b$, $c = \frac{1}{2}\left(\|a\|_2^2 - \|b\|_2^2\right)$ és $x \in K \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Tekintsük a

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \|t(x - a) + a - b\|_2^2$$

kvadratikus kifejezést, melyet az

$$\alpha(t) = t^2 \|x - a\|_2^2 + 2t \langle x - a, a - b\rangle + \|a - b\|_2^2$$

alakban is felírhatunk. Ennek a függvénynek a minimumhelye a $t_0 = -\dfrac{\langle x - a, a - b\rangle}{\|x - a\|_2^2}$ pontban van. Ha $0 < t_0$ teljesülne, akkor létezne olyan $t' \in]0, 1[$ ahol $\alpha(0) > \alpha(t')$ lenne, vagyis a $p = t'(x - a) + a \in K$ pontra a $d(a, b) > d(p, b)$ teljesülne, ami ellentmonda annak, hogy a két halmaz távolsága éppen $d(a, b)$.
Tehát $t_0 \leq 0$, ami éppen az $\langle x - a, a - b\rangle \geq 0$ egyenlőtlenséget jelenti. Ebből

$$\begin{aligned} &\langle x, a - b\rangle \geq \langle a, a - b\rangle \\ &\langle x, z\rangle - c \geq \langle a, a - b\rangle - c = \frac{\|a - b\|_2^2}{2} > 0 \end{aligned}$$

következik. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $x = a$ esetben $\langle a, z\rangle - c = \dfrac{\|a - b\|_2^2}{2} > 0$. Vagyis minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$.
Legyen most $x \in Z \setminus \{b\}$ tetszőleges pont. Tekintsük a

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \|t(x - b) + b - a\|_2^2$$

kvadratikus kifejezést, melyet az

$$\beta(t) = t^2 \|x - b\|_2^2 + 2t \langle x - b, b - a\rangle + \|a - b\|_2^2$$

alakban is felírhatunk. Ennek a függvénynek a minimumhelye a $t_0 = -\dfrac{\langle x - b, b - a\rangle}{\|x - b\|_2^2}$ pontban van. Ha $0 < t_0$ teljesülne, akkor létezne olyan $t' \in]0, 1[$ ahol $\beta(0) > \beta(t')$ lenne, vagyis a $p = t'(x - b) + b \in Z$ pontra a $d(a, b) > d(a, p)$ teljesülne, ami ellentmonda annak, hogy a két halmaz távolsága éppen $d(a, b)$. Tehát $t_0 \leq 0$, ami éppen az $\langle x - b, b - a\rangle \geq 0$ egyenlőtlenséget jelenti. Ebből

$$\langle x - b, a - b\rangle \leq 0$$

$$\langle x, z\rangle \leq \langle b, a-b\rangle$$
$$\langle x, z\rangle - c \leq \langle b, a-b\rangle - c = -\frac{\|a-b\|_2^2}{2} < 0$$

következik. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $x = b$ esetben $\langle b, z\rangle - c = -\frac{\|a-b\|_2^2}{2} < 0$. Vagyis minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.

10.125. Tétel. *(Zárt konvex halmaz és pont szétválasztása.) Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $p \in \mathbb{R}^n \setminus Z$ Ekkor létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\langle z, p\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

Bizonyítás. A 10.124 tételt kell alkalmazni a $K = \{p\}$ kompakt konvex halmazra.

10.126. Tétel. *Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és*

$$H = \{(z, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \forall x \in Z :\ \langle z, x\rangle < c\}.$$

Ekkor

$$Z = \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z, y\rangle < c\}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és

$$H = \{(z, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \forall x \in Z :\ \langle z, x\rangle < c\}.$$

Ha $p \in Z$, akkor minden $(z, c) \in H$ esetén $\langle z, p\rangle < c$, tehát

$$p \in \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z, y\rangle < c\}$$

Ha $p \notin Z$, akkor létezik olyan $(z, c) \in H$, hogy $\langle z, p\rangle > c$, tehát

$$p \notin \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z, y\rangle < c\}.$$

10.19. Az algebra alaptétele

10.127. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre*

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{C} :\ r < |x| \ \to\ C < |f(x)|$$
$$\forall x \in \mathbb{C} :\ f(x) \neq 0 \ \to\ \exists y \in \mathbb{C} :\ |f(y)| < |f(x)|$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre teljesülnek az állítás feltételei. Legyen $\alpha = \inf_{x\in\mathbb{C}} |f(x)|$. Ekkor a $C = \alpha + 1$ számhoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{C}$, $r < |x|$ esetén $C < |f(x)|$. A $\mathbb{C}$ normált térben $K = \overline{B_r(0)}$ korlátos és zárt halmaz, ezért kompakt. Az f függvény a K kompakt halmazon felveszi minimumát, vagyis létezik olyan $a \in K$, melyre $f(a) = \alpha$ teljesül. Ha $\alpha = 0$, akkor készen vagyunk a bizonyítással, hiszen létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$. Ha $\alpha > 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|f(y)| < |f(a)|$. Ekkor az $r < |y|$ esetben az

$$1 + \alpha \leq |f(y)| < |f(a)| = \alpha$$

ellentmondást kapjuk. Az $|y| \leq r$ esetén $y \in K$, ami pedig annak mond ellent, hogy a K kompakt halmazon az a pontban minimális az $|f|$ függvény. Tehát az $\alpha > 0$ feltevés esetén ellentmondást kapunk, így $\alpha = 0$.

10.128. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $C \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ esetén $C < |p(z)|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsük a

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

polinomot, ahol $a_n = 1$. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számra

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right|$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| = 0,$$

ezért létezik olyan r_k, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r_k < |z|$ esetén

$$\left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| < \frac{1}{2n}.$$

Legyen $R = \max\{r_0, \dots, r_{n-1}\}$. Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$, $R < |z|$ számra

$$\left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \geq 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| > 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} = 1 - \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Tehát, ha $z \in \mathbb{C}$ és $R < |z|$, akkor

$$|p(z)| > \frac{|z|^n}{2},$$

ha még $1 < |z|$ is teljesül, akkor

$$|p(z)| > \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{|z|}{2}.$$

Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter esetén

$$r = \max\{R, 1, 2C\}.$$

Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ számra

$$|p(z)| > C$$

teljesül.

Ha $a_n \notin \{0, 1\}$ és adott egy $C \in \mathbb{R}^+$ paraméter, akkor az előzőek alapján a $\dfrac{C}{|a_n|}$ számhoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ számra

$$\left| \frac{p(z)}{|a_n|} \right| > \frac{C}{|a_n|},$$

vagyis $|p(z)| > C$.

10.129. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $x \in \mathbb{C}$ esetén, ha $p(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|p(y)| < |p(x)|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsük a

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

polinomot, ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $p(x) \neq 0$. Alakítsuk át a p polinomot az alábbiak szerint.

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k((z-x)+x)^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j}(z-x)^j x^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j}(z-x)^j x^{k-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n}(z-x)^j \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} x^{k-j}\right)$$

Minden $j \in \{0,\dots,n\}$ esetén bevezetve a $b_j = \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} x^{k-j}$ jelölést

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z-x)^k$$

adódik. Mivel $p(x) \neq 0$, ezért $b_0 \neq 0$, valamint $b_n = a_n \neq 0$. Tekintsük a $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ polinomot. Ha van olyan $y' \in \mathbb{C}$, melyre $|q(y')| < |b_0|$ teljesül, akkor készen vagyunk a bizonyítással, hiszen az $y = y' + x$ számra

$$|p(y)| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k (y')^k\right| = |q(y')| < |b_0| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k (x-x)^k\right| = |p(x)|$$

teljesül.
Tehát azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan $y' \in \mathbb{C}$, melyre $|q(y')| < |b_0|$. Ehhez legyen

$$m = \min\{k \in \{1,\dots,n\} \mid b_k \neq 0\}.$$

Mivel $b_n = a_n \neq 0$, ezért $1 \leq m \leq n$. Ekkor

$$|q(z)| = \left|b_0 + b_m z^m + \sum_{k=m+1}^{n} b_k z^k\right| = |b_0| \cdot \left|1 + \frac{b_m}{b_0} z^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} z^k\right|.$$

Olyan $y' \in \mathbb{C}$ számot kell találnunk, melyre

$$\left|1 + \frac{b_m}{b_0}(y')^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}(y')^k\right| < 1.$$

Legyen $\omega \in \mathbb{C}$ egy olyan komplex szám, melyre $\omega^m = -\frac{b_0}{b_m}$ teljesül és keressük az y' értékét $t\omega$ alakban, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor olyan $t \in \mathbb{R}$ számot keresünk, melyre

$$\left|1 - t^m + t^m \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} \omega^k t^{k-m}\right| < 1.$$

Mivel $\lim_{t\to 0} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} \omega^k t^{k-m} = 0$, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in \mathbb{R}$, $|t| < r_1$ esetén

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} \omega^k t^{k-m}\right| < \frac{1}{2}.$$

Legyen $t \in]0, \min\{1, r\}[$ tetszőleges. Mivel ekkor $1 - t^m, t^m \in \mathbb{R}^+$, ezért

$$\left|1 - t^m + t^m \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} \omega^k t^{k-m}\right| \leq 1 - t^m + t^m \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} t^m < 1.$$

Tehát például $y' = \frac{\min\{1, r\}}{2}\omega$ olyan, melyre $|q(y')| < |b_0|$ teljesül.

10.130. Tétel. *(Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomnak létezik gyöke.*

Bizonyítás. Minden $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőkú polinom folytonos függvény, valamint a 10.128 és a 10.129 tétel miatt teljesülnek rá a 10.127 tétel feltételei, ezért a 10.127 tétel alapján létezik gyöke.

11. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

11.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

11.1. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, $A \subseteq M$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t) \ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha létezik olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \to \ \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens* ha minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

11.2. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.

- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t) \right)$$

  képlettel definiáljuk.
- A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \ .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a M halmazon pontonként abszolút konvergens.

Megjegyzés. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^n)$. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ számra a

$$g_n : M \to \mathbb{K}^n \qquad t \mapsto \sum_{j=0}^{n} f_j(t)$$

függvényt. Ekkor a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonkénti összegfüggvénye megegyezik a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvényével. A definíció szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz rendelt függvénysor éppen a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat. Így beszélhetünk a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletes konvergenciájáról. Tehát a $\sum_n f_n$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens az $A \subseteq M$ halmazon, ha létezik olyan $F \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^n)$ függvény, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \left(N < n \ \to \ \left\| F(t) - \sum_{j=0}^{n} f_j(t) \right\| < \varepsilon \right)$$

teljesül.

$\Diamond$

11.3. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \ (N < n, m \ \to \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ függvényhez.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f_m(t)\| \le \|f_n(t) - f(t)\| + \|f(t) - f_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja az egyik irányú következtetést.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \ (N < n, m \ \to \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a feltevés miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon$$

teljesül, amiből a $\|\cdot\|$ folytonossága miatt

$$\forall t \in M : \ \lim_{m\to\infty} \|f_n(t) - f_m(t)\| = \left\| f_n(t) - \lim_{m\to\infty} f_m(t) \right\| = \|f_n(t) - f(t)\| \le \varepsilon$$

adódik.

11.4. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^m)$.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Azt kell megmutatni, hogy az f függvény minden $x \in M$ pontban folytonos. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{3}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t\in M} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel az f_{N+1} függvény folytonos az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(x)$ pontra $f_{N+1}(t) \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_{N+1}(x))$ teljesül. Ekkor

$$t \in B_\delta(x) \quad \Rightarrow \quad \|f(t) - f(x)\| \leq \|f(t) - f_{N+1}(t)\| + \|f_{N+1}(t) - f_{N+1}(x)\| + \|f_{N+1}(x) - f(x)\| < \varepsilon,$$

vagyis az f függvény folytonos az x pontban.

11.5. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^m)$.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra definiáljuk a $g_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ függvényt. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 11.4 tételt adódik az állítás.

11.6. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Legyen továbbá $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
Ekkor a lokálisan egyenletes konvergencia miatt minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x)}(x)$ halmazon. A K halmaznak természetes módon adott a

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{r(x)}(x)$$

nyílt halmazokkal való befedése, amiből a K halmaz kompaktsága miatt az következik, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, \ldots, x_n \in K$, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} B_{r(x_k)}(x_k)$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \ldots, n\}$ esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x_k)}(x_k)$ halmazon, ezért létezik olyan $m_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $m_k < l \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{z\in B_{r(x_k)}(x_k)} \|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$$

teljesül. Legyen $N = \max\{m_k |\ k \in \{0, \ldots, n\}\}$, valamint legyen $N < l \in \mathbb{N}$ és $z \in K$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $k \in \{0, \ldots, n\}$, hogy $z \in B_{r(x_k)}(x_k)$. Továbbá $m_k \leq N < l$ miatt

$$\|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$$

teljesül. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < l \in \mathbb{N}$ számra és $z \in K$ pontra $\|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$ teljesül, ami éppen a K halmazon való egyenletes konvergenciát jelenti.

11.2. A korlátos folytonos függvények tere

11.7. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathbf{n}}$ nem üres halmaz és $f : M \to \mathbb{K}^{\mathbf{m}}$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq \mathbb{K}^{\mathbf{m}}$ korlátos halmaz. Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathbf{n}}$, akkor az $M \to \mathbb{K}^{\mathbf{m}}$ folytonos korlátos függvények halmazát $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}})$ jelöli.

11.8. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathbf{n}}$. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}}) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t \in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}})$ vektortéren, azaz

1. $\forall f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}}) : \ \|f\|_{\sup} = 0 \ \leftrightarrow \ f = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}}) : \ \|\lambda f\|_{\sup} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\sup}$;
3. $\forall f, g \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}}) : \ \|f + g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$.

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{\sup}$ függvény nyilvánvaló módon teljesíti a norma tulajdonságait.

11.9. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathbf{n}}$ és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}})$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}})$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben, azaz, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ \Big(N < n \ \to \ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\Big)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{n}})$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{n}})$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \ (N < n \ \to \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon),$$

vagyis minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} = \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Tehát az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{n}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{n}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon,$$

vagyis

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \ \big(N < n \ \to \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\big),$$

tehát az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

11.10. Tétel. *Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathbf{n}}$, akkor $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér, azaz minden olyan $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}})$ halmazban haladó $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozathoz, melyre*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \ \big(N < n, m \ \to \ \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon\big),$$

teljesül, létezik olyan $f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathbf{m}})$, melyre

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ \big(N < n \ \to \ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\big).$$

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat, melyre

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n,m\in\mathbb{N}:\ \big(N<n,m\ \to\ \|f_n-f_m\|_{\sup}<\varepsilon\big).$$

Ha $x\in M$ és $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n,m>N$ természetes számra

$$\varepsilon>\|f_n-f_m\|_{\sup}=\sup_{t\in M}\|f_n(t)-f_m(t)\|\geq\|f_n(x)-f_m(x)\|$$

teljesül. Vagyis minden $x\in M$ pont esetén az $n\mapsto f_n(x)$ sorozat Cauchy-sorozat a $\mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ Banach-térben, ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ határérték.
Megmutatjuk, hogy az f függvény korlátos. Mivel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $N<n$ természetes számra $\|f_{N+1}-f_n\|_{\sup}<1$ teljesül. Mivel f_{N+1} korlátos függvény, ezért létezik olyan $K\in\mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x\in M$ pontra $\|f_{N+1}(x)\|<K$ teljesül. Ezek alapján minden $N<n$ természetes számra és $x\in M$ pontra

$$\|f_{N+1}(x)-f_n(x)\|\leq\|f_{N+1}-f_n\|_{\sup}<1,$$

vagyis

$$\|f_n(x)\|<1+\|f_{N+1}(x)\|<1+K$$

adódik, ebből pedig $\|f(x)\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(x)\|<1+K$. Tehát az f függvény korlátos.
A 11.3 tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Mivel az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat elemei folytonos függvények, ezért az egyenletes konvergencia miatt az f függvény is folytonos, vagyis $f\in C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
A 11.9 tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergenciája éppen a $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}}),\|\cdot\|_{\sup})$ térbeli $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ konvergenciát jelenti.

11.11. Tétel. *Legyen $M\subseteq\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

Bizonyítás. Legyen $M\subseteq\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens. Ekkor minden $t\in M$ esetén a $\sum\limits_n f_n(t)$ sor abszolút konvergens a $\mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ Banach-térben, ezért konvergens is. Tehát a függvénysor minden pontban konvergens.

11.12. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $M\subseteq\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in M}\|f_n(t)\|<\infty$$

teljesül, akkor a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor konvergens és egyenletesen is konvergens.

Bizonyítás. Legyen $M\subseteq\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó olyan függvénysorozat, melyre

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in M}\|f_n(t)\|<\infty.$$

Ekkor a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, tehát konvergens is. Legyen $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n$.
Definiáljuk az

$$a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+\qquad n\mapsto\sup_{t\in T}\|f_n(t)\|$$

sorozatot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az 5.5 tétel miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $N < n$ természetes számra és $t \in T$ pontra

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.

11.3. Függvénysorozat és függvénysor deriválása és integrálása

11.13. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén a

$$\{tx + (1-t)y |\ t \in [0,1]\}$$

halmazt *szakasznak* nevezzük. Az $\mathfrak{n} > 1$ esetben $[a,b]$ fogja jelölni a fenti halmazt, az $\mathfrak{n} = 1$ esetben, pedig $\lfloor a, b \rfloor$.

11.14. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_n f_n(a)$ határérték és az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $g : B_r(a) \to \mathbb{R}$ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$|f_n(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 11.3 tétel alapján létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} |f_n'(y) - f_m'(y)| < \frac{\varepsilon}{2r}$$

teljesül. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$.
Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az $f_n - f_m$ függvényre és az $\lfloor a, x \rfloor$ szakaszra alkamazva a 7.17 véges növekmények formuláját

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| \leq \left(\sup_{y\in]a,x[} |(f_n - f_m)'(y)| \right) \cdot |x - a|$$

adódik. Ekkor minden $N < n, m$ természetes számra

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(a) - f_m(a)| + \left(\sup_{y\in]a,x[} |(f_n - f_m)'(y)| \right) \cdot |x - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon.$$

Vagyis $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ valós Cauchy-sorozat, tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.
Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül, amiből a 11.3 tétel alapján adódik, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.
Legyen $t \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(t) - f_n'(t)(x-t)}{|x-t|}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t, \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(t) - g(t)(x-t)}{|x-t|}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t. \end{cases}$$

Az f_n függvény t pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 11.4 tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne a t pontban, és teljesülne a bizonyítandó

$$f'(t) = g(t)$$

egyenlőség.
Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 11.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} |f_n'(y) - f_m'(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - (f_n'(t) - f_m'(t))u$$

függvényre és az $\lfloor t, x \rfloor$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t)) - (f_n'(t)(x-t) - f_m'(t))(x-t)| \leq$$
$$\left(\sup_{y\in]t,x[} |(f_n - f_m)'(y) - (f_n'(t) - f_m'(t))| \right) \cdot |t-a|$$

adódik, vagyis ha $N < m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} &|f_n(x) - f_n(t) - f_n'(t)(x-t) - (f_m(x) - f_m(t) - f_m'(t))(x-t))| \leq \\ &\leq \left(\sup_{y\in]t,x[} (|(f_n - f_m)'(y)| + |f_n'(t) - f_m'(t)|) \right) \cdot |x-t| \leq \\ &\leq \left(\left(\sup_{y\in B_r(a)} |(f_n - f_m)'(y)| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |x-t| \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |x-t| = \varepsilon\,|x-t|\,. \end{aligned}$$

Ezek alapján minden $N < n, m$ természetes számra $x \neq t$ esetén

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \frac{\varepsilon \cdot |x-t|}{|x-t|} = \varepsilon,$$

valamint $x = t$ esetén is $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = 0 < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \ (N < n, m \ \rightarrow \ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon)$$

teljesül, amiből a 11.3 tétel értelmében következik, hogy a a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

11.15. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték.
Definiáljuk az

$$\Omega' = \left\{ x \in \Omega | \ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy Ω' nyílt halmaz. Legyen $x \in \Omega'$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 11.14, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $B_r(x) \subseteq \Omega'$.
Tegyük fel, hogy $\Omega' \neq \Omega$. Vegyünk egy $x \in \Omega \setminus \Omega'$ elemet. Legyen

$$H = \{t \in [0,1] \,|\ \lfloor a, a + t(x-a) \rfloor \subseteq \Omega'\},$$

$c = \sup H$ és $p = a + c(x-a)$. Az a pontra és olyan $B_r(a)$ környezetére alkalmazva a 11.14 tételt, ahol az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, az adódik, hogy $c > 0$. Az Ω' halmaz nyíltsága miatt pedig $p \notin \Omega'$. Mivel $p \in \Omega$, ezért létezik olyan $r > 0$, hogy a $B_r(p)$ halmazon egyenletesen konvergens az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat.
A c szám konstrukciója folytán létezik olyan $t_0 \in H$, melyre $c - \dfrac{r}{4\,|x-a|} < t_0$, ezért a $q = a + t_0(x - a) \in \Omega'$ elemre

$$|p - q| = |a + c(x-a) - a - t_0(x-a)| = |c - t_0| \cdot |x - a| < \frac{r}{4}.$$

Ekkor viszont alkalmazható a 11.14 tétel a $B_{\frac{r}{2}}(q)$ halmazon, mely szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens ezen a halmazon, tehát a $p \in B_{\frac{r}{2}}(q)$ pontban is konvergens. Ez azonban ellentmond a $p \notin \Omega'$ feltevésnek. Tehát $\Omega' = \Omega$.
Legyen $x \in \Omega$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 11.14, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan egyenletesen konvergens.

11.16. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum\limits_n f_n'$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sor, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sor;*

2. *az* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál a* $\sum_n f_n$ *függvénysor;*
3. *minden* $x \in \Omega$ *esetén*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Legyen $a \in \Omega$ olyan pont, ahol konvergens a $\sum_{n\in\infty} f_n(a)$ sor, és tegyük fel, hogy az $\sum_n f_n'$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 11.15 állítást adódik a tétel.

11.17. Tétel. *(Függvénysorozat határfüggvényének integrálhatósága.) A* $C([a,b],\mathbb{R})$ *halmazban haladó* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a függvénysorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez az* $[a,b]$ *intervallumon. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat, mely egyenletesen konvergál az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor a 11.4 tétel miatt f folytonos függvény, tehát Riemann-integrálható. Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon'$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b (f - f_n)\right| \le \int_a^b |f - f_n| \le \int_a^b \varepsilon' = (b-a)\varepsilon'$$

teljesül. Vagyis minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a bizonyítandó

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

határértéket jelenti.

11.18. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének integrálhatósága.) Legyen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $C([a,b],\mathbb{R})$ *halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a* $\sum_n f_n$ *függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez az* $[a,b]$ *intervallumon. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 11.17 tételt adódik az állítás.

11.4. Hatványsorok

11.19. Definíció. (*Hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

11.20. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r \in [0, R_a[$, akkor a $B_r(0)$ halmazon a P_a hatványsorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty$$

teljesül.

4. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat, továbbá legyen R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara.

3. Legyen $r \in [0, R_a[$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in B_r(0)} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n < \infty,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél az 5.38 tételt használtuk.

1. Ha $x \in \mathbb{K}$ és $|x| < R_a$, akkor legyen $r \in \,]|x|, R_a[$ tetszőleges paraméter. A 3. pont alapján a hatványsor nomálisan konvergens a $B_r(0)$ halmazon, ezért ott abszolút konvergens is.

2. Legyen $|x| > R_a$ és tegyük fel, hogy a $\sum\limits_n a_n x^n$ sor konvergens. Ekkor a 10.92 tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n = 0$ teljesül. Tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < k \in \mathbb{N}$ számra $\left|a_k x^k\right| < 1$, azaz

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{|x|}.$$

Vagyis

$$\frac{1}{R_a} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup \left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \;\middle|\; k \geq n \right\} \leq \sup \left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \;\middle|\; k \geq N+1 \right\} \leq \frac{1}{|x|},$$

amiből az $|x| \leq R_a$ ellentmondás adódik.

4. Legyen $x \in B_{R_a}(0)$ tetszőleges pont. Válasszunk egy $r \in \,]|x|, R_a[$ paramétert. A 3. pont alapján a hatványsorra a $B_r(0)$ halmazon alkalmazható a 11.12 Weierstrass-tétel, ezért ezen a halmazon egyenletesen konvergens a hatványsor. Vagyis az x pontnak a $B_r(0)$ halmaz olyan környezete ahol a hatványsor egyenletesen konvergens.

5. Mivel a függvénysor bármely véges összege folytonos függvény és a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletes a konvergencia, ezért a 11.4 tétel alapján az összegfüggvény is folytonos.

11.21. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R_a$ esetén a hatványsor tagonként differenciálható az x pontban, azaz*

$$P_a'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ a sorozat által meghatározott hatványsor R_a konvergenciasugárral. Tekintsük a

$$b : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad k \mapsto (k+1)a_{k+1}$$

sorozatot és az általa meghatározott P_b hatványsort. A P_b hatványsor konvergenciasugarára $R_b = R_a$ teljesül. Ekkor a Cauchy–Hadamard-tétel alapján a P_b hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens az $I =]-R_a, R_a[$ intervallumon, valamint $x_0 = 0$ olyan pont az I intervallumban, ahol a P_a hatványsor konvergens. Ezért a 11.16 tétel alapján a P_a hatványsort lehet tagonként deriválani az I intervallum minden pontjában.

11.22. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ esetén a hatványsor tagonként integrálható az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, azaz*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \mathrm{d}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta a_k x^k \,\mathrm{d}\, x.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ a sorozat által meghatározott hatványsor R_a konvergenciasugárral. Legyen továbbá $[\alpha, \beta]$ olyan korlátos intervallum, melyre $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ teljesül. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján a P_a hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ kompakt halmazon, azonban a 11.6 tétel miatt egyenletesen is itt. Figyelembe véve, hogy a hatványsor minden részletösszeg függvénye folytonos és egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ véges intervallumon, a 11.18 tétel alapján a hatványsor tagonként intergrálható.

11.5. Abel-tétel

11.23. Tétel. *Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens. Vezessük be az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést valamint, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right|$ és $\alpha_n = A - \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} C_n &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n+m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| = \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} |(A - \alpha_{n+m}) - (A - \alpha_{n-1})| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}|. \end{aligned}$$

Mivel az $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\alpha_n| < K$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}| \le |\alpha_{n-1}| + \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n+m}| \le K + K < \infty.$$

Tegyük fel, hogy a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart a nullához. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \leq C_n$. Vagyis minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varepsilon_0 \leq C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}|$$

teljesül. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < n \in \mathbb{N}$ számra $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, vagyis minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}| \leq |\alpha_{n-1}| + \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n+m}| \leq \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ezek alapján az $N_1 + 1$ számhoz létezik olyan $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \leq C_n$, ugyanakkor minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra $C_n \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$, ami nyilvánvalóan ellentmondás, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$.

11.24. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül. Ha a P_a hatványsor konvergens az $x_0 \in \{R_a, -R_a\}$ pontban, akkor egyenletesen konvergens a $\lfloor 0, x_0 \rfloor$ szakaszon és a $P_a|_{\lfloor 0,x_0\rfloor}$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $R_a = 1$ teljesül és a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Ha $x \in [0, 1[$, akkor a P_a hatványsor konvergens az x pontban és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right|$$

teljesül. Az $m \in \mathbb{N}^+$ változó szerinti teljes indukcióval igazolható az alábbi Abel-féle átrendezés.

$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k = \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(x^k - x^{k+1}\right) \left(\sum_{j=n}^{k} a_j \right) + x^{n+m} \sum_{j=n}^{n+m} a_j$$

Mivel a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ezért a 11.23 tétel alapján ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right|,$$

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$. Mivel $x \in [0, 1[$, ezért minden $m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \left|x^k - x^{k+1}\right| \left| \sum_{j=n}^{k} a_j \right| + |x|^{n+m} \left| \sum_{j=n}^{n+m} a_j \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \left|x^k - x^{k+1}\right| C_n + |x|^{n+m} C_n = \\
&= C_n \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} \left(x^k - x^{k+1}\right) + x^{n+m} \right) = \\
&= C_n \left(x^n - x^{n+m} + x^{n+m}\right) C_n = C_n x^n
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis

$$\left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right| \leq \lim_{m\to\infty} C_n x^n = C_n x^n \leq C_n.$$

Az $P_a(1)$ értékre

$$\left|P_a(1) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| \le \sup_{m\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| = C_n$$

teljesül. Tehát minden $x \in [0,1]$ esetén

$$\left|P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| \le C_n,$$

vagyis

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| \le C_n.$$

Mivel a 11.23 tétel alapján a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a nullához tart, ezért a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon.
Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül és a P_a hatványsor konvergens az R_a pontban. Definiáljuk a $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b_n = a_n R_a^n$ sorzatot. Ekkor $R_b = 1$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor konvergens. Az előzőek alapján a P_b hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ halmazon. Amiből az

$$\sup_{x\in[0,R_a]}\left|P_a(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = \sup_{t\in[0,1]}\left|P_a(tR_a) - \sum_{k=0}^{n} a_k\,(tR_a)^k\right| = \sup_{t\in[0,1]}\left|P_b(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k t^k\right|$$

azonosságok alapján következik, hogy a P_a hatványsor egyenletesen konvergens az $[0,R_a]$ halmazon.
Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül és a P_a hatványsor konvergens a $-R_a$ pontban. Definiáljuk a $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b_n = (-1)^n a_n$ sorzatot. Ekkor $R_b = R_a$ és a P_b hatványsor konvergens az R_b pontban. Az előzőek alapján a P_b hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,R_b]$ halmazon. Amiből a

$$\sup_{x\in[-R_a,0]}\left|P_a(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = \sup_{t\in[0,R_a]}\left|P_b(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k t^k\right|$$

azonosságok alapján következik, hogy a P_a hatványsor egyenletesen konvergens a $[-R_a,0]$ szakaszon.
A P_a hatványsor folytonossága a folytonos részletösszeg függvények egyenletes konvergenciájából következik.

11.6. Approximáció polinomokkal

Magyarázat. A továbbiakban a folytonos függvények polinomokkal való közelítéséről szóló alaptételt tárgyaljuk.

11.25. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k(b-t)^{n-k}$$

polinomot.

11.26. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]}\left|B_n^f(t) - f(t)\right|\right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $[a, b]$ kompakt halmaz és f folytonos, ezért: f korlátos, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [a, b]$ pontra $\|f(t)\| < C$; valamint a Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos, vagyis a később rögzítendő $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| < \delta$ esetén $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon'$ teljesül. Legyen $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$\left|B_n^f(t) - f(t)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right) \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\right|. \tag{11.1}$$

Tekintsük az

$$I_n = \left\{k \in \{0, \dots, n\} \mid \left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| < \delta\right\}$$
$$J_n = \left\{k \in \{0, \dots, n\} \mid \left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| \geq \delta\right\}$$

halmazokat. Ekkor $I_n \cap J_n = \emptyset$ és $I_n \cup J_n = \{0, \dots, n\}$, vagyis a (11.1) egyenlet alapján

$$\begin{aligned}
\left|B_n^f(t) - f(t)\right| &\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \left|f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \\
&+ \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left\|f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \cdot \varepsilon' \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \cdot 2C \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \varepsilon' \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} = \\
&= \varepsilon' + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ha $k \in J_n$, akkor definíció szerint

$$\left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| \geq \delta,$$

amiből

$$\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \cdot \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \geq 1$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k},
\end{aligned}$$

ahol $x = \dfrac{t-a}{b-a}$. Minden $y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$(y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k z^{n-k},$$

melynek y szerinti első és második deriváltjából

$$ny(y+z)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k y^k z^{n-k}$$

$$n(n-1)y^2(y+z)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)y^k z^{n-k}$$

adódik. Ha $z = 1 - y$, akkor ezekből

$$ny = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ky^k(1-y)^{n-k}$$
$$n(n-1)y^2 + ny = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 y^k(1-y)^{n-k}$$

következik, vagyis

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Figyelembe véve, hogy $|x|, |1-x| \leq 1$

$$\left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \leq \varepsilon' + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n}$$

adódik. Vagyis ha $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, melyre $N > \dfrac{4C(b-a)^2}{\delta^2 \varepsilon}$ teljesül, akkor minden $n > N$ és $t \in [a,b]$ esetén

$$\left| B_n^f(t) - f(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n} \leq \varepsilon,$$

ezért

$$\sup_{t \in [a,b]} \left| B_n^f(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon.$$

11.27. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinom, hogy minden $x \in [a,b]$ számra*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. A 11.26 Bernstein-polinomokkal való approximációs tétel közvetlen következménye.

12. Differenciálszámítás véges dimenzióban

12.1. Differenciálhatóság

12.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ olyan, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy $A = u - v \neq 0$. Ekkor létezik olyan $0 \neq e \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $Ae \neq 0$. Legyen $\varepsilon = \dfrac{\|Ae\|}{\|e\|} \in \mathbb{R}^+$. A fenti két határérték különbségeként

$$\lim_{x\to a} \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

adódik, a határérték definíciója alapján pedig létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| < \varepsilon.$$

Az $x = a + \dfrac{\delta}{2\|e\|} \cdot e \in E$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, azonban a fenti egyenlőtlenségből az

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| = \left\| \frac{Ae}{\|e\|} \right\| = \varepsilon < \varepsilon$$

ellentmondás adódik.

12.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right\}$$

  függvényt.
- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.

12.3. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^n : \Big(\|x-a\| < \delta \;\to\; \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x-a\| \Big)$$

teljesül.

Bizonyítás. A derivált és a határérték definíciójából következik.

12.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága és $(\mathrm{D}f)(a)$ értéke független az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ tereken választott normától.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Legyen $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ norma az $\mathbb{R}^n$ téren és $\|\cdot\|_{(a)}$, $\|\cdot\|_{(b)}$ norma az $\mathbb{R}^m$ téren. A 10.78 tétel alapján léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $c\|x\|_{(1)} \le \|x\|_{(2)}$ és minden $y \in \mathbb{R}^m$ esetén $\|y\|_{(b)} \le d\|y\|_{(a)}$.
Ha f differenciálható az a pontban a $\|\cdot\|_{(1)}$ és az $\|\cdot\|_{(a)}$ norma szerint, akkor az

$$\frac{\frac{1}{d}\|f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)\|_{(b)}}{\frac{1}{c}\|x-a\|_{(2)}} \le \frac{\|f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)\|_{(a)}}{\|x-a\|_{(1)}}$$

egyenlőtlenség alapján a $\|\cdot\|_{(2)}$ és a $\|\cdot\|_{(b)}$ norma szerint is differenciálható, ugyanazzal a deriválttal.

12.5. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.
Ha f differenciálható az a pontban és létezik a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$$

határérték, akkor legyen A olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Ax = f'(a)x$$

teljesül. Ekkor

$$0 = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x-a},$$

tehát

$$0 = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x-a}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|}\right|,$$

vagyis

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül és legyen $c = ((\mathrm{D}f)(a))(1)$. Ekkor

$$0 = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{|x-a|},$$

vagyis

$$0 = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-c\right|$$

ezért

$$0 = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-c\right),$$

tehát létezik a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$$

határérték és $c = f'(a)$.

12.6. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. A differenciálhatóság jellemzéséről szóló 12.3 tétel alapján ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorra a $\|x-a\| < \delta$ esetben

$$\|f(x)-f(a)-(\mathrm{D}f)(a)(x-a)\| \le \|x-a\|$$

teljesül, aminek az átrendezéséből

$$\|f(x)-f(a)\| \le \|x-a\|\cdot(1+\|(\mathrm{D}f)(a)\|)$$

adódik. Ezért $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)-f(a)\| = 0$, vagyis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, amiből következik az f függvény a pontbeli folytonossága.

12.7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül, amit a mátrixok nyelvén úgy is kifejezhetünk, hogy ha minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ esetén

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{i\mathfrak{n}} \end{pmatrix},$$

akkor

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \dots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.
Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az a pontban és jelölje $A = (\mathrm{D}f)(a)$ a deriváltat. A 12.4 tétel alapján megtehetjük, hogy a végtelen normát tekintjük a $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ téren. Legyen $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f függvény differenciálható az a pontban ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ elemre $0 < \|x-a\| < \delta$ esetén

$$\frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|_\infty}{\|x-a\|} < \delta$$

teljesül. A

$$\frac{|f_i(x)-f_i(a)-(A(x-a))_i|}{\|x-a\|} \le \frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|_\infty}{\|x-a\|}$$

egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban és $(Df_i)(a) = \mathrm{pr}_i \circ A$ teljesül.

Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban, és legyen $B_i = (\mathrm{D}f_i)(a)$. Tekintsük a

$$B : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto (B_1 x, \dots, B_{\mathfrak{m}} x)$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy $(Df)(a) = B$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ esetén f_i differenciálható az a pontban, ezért

$$\exists \delta_i \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} : \ \Big(\|x - a\| < \delta_i \ \to \ \|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x-a)\|_\infty \le \varepsilon \cdot \|x - a\| \Big)$$

teljesül. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_{\mathfrak{m}}\}$. Ha $x \in B_\delta(a)$, akkor

$$\begin{aligned} &\|f(x) - f(a) - B(x-a)\|_\infty = \\ &\quad = \|(f_1(x) - f_1(a) - B_1(x-a), \dots, (f_n(x) - f_n(a) - B_n(x-a))\|_\infty = \\ &\quad = \max\{|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x-a)| \mid i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}\} \le \varepsilon \cdot \|x - a\| \end{aligned}$$

teljesül, vagyis az f függvény differenciálható az a pontban, és $(\mathrm{D}f)(a) = B$ teljesül.

12.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

12.8. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $\varphi : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $\varphi : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Legyen továbbá $F = (\mathrm{D}f)(a)$, $G = (\mathrm{D}g)(a)$ és $\Phi = (\mathrm{D}\varphi)(a)$. Mivel $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$, ezért vehetünk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre $B_r(a) \subseteq a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x - a\|} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a) - G(x-a)}{\|x - a\|} = 0 \\ &\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)}{\|x - a\|} = 0. \end{aligned}$$

1. Az

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a) - (F+G)(x-a)}{\|x - a\|} = \\ &\quad = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x - a\|} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a) - G(x-a)}{\|x - a\|} = 0 \end{aligned}$$

egyenlőség igazolja, hogy $f + g$ is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = F + G$.
2. Az

$$\lim_{x \to a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a) - (cF)(x-a)}{\|x - a\|} = c \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$

egyenlőség igazolja, hogy cf is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = cF$.
3. A minden $x \in B_r(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned} &\|(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)\| = \\ &= \Big\| \Big(\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\Big) f(x) + \varphi(a)\Big(f(x) - f(a) - F(x-a)\Big) + (f(x) - f(a))\Phi(x-a) \Big\| \le \\ &\le \|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x) - f(a) - F(x-a)\| + \\ &\quad + \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x - a\| \end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\left\|\frac{(\varphi f)(x)-(\varphi f)(a)-f(a)\Phi(x-a)-\varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|}\right\| \le \\
&\le \lim_{x\to a}\left\|\frac{\varphi(x)-\varphi(a)-\Phi(x-a)}{\|x-a\|}\right\|\cdot\|f(x)\|+|\varphi(a)|\cdot\lim_{x\to a}\left\|\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|}\right\|+ \\
&\quad+\lim_{x\to a}\|f(x)-f(a)\|\cdot\|\Phi\|= \\
&=0\cdot\|f(a)\|+|\varphi(a)|\cdot 0+0\cdot\|\Phi\|=0
\end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x\to a}\frac{(\varphi f)(x)-(\varphi f)(a)-f(a)\Phi(x-a)-\varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|}=0$$

következik, vagyis a φf függvény is differenciálható az a pontban és $\mathrm{D}(\varphi f)=f(a)\Phi+\varphi(a)F$.

12.9. Tétel. *Minden $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz esetén $C^1(\Omega,\mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ vektortér.*

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a\in\Omega$ pontra alkalmazni.

12.10. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $g:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}$, $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_3}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f\circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f\circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f\circ g))(a)=(\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a).$$

Bizonyítás. Legyen $g:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}$, $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_3}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f\circ g$. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$, tehát

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+\exists\delta_1\in\mathbb{R}^+\forall y\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}: \\
&\qquad\|y-g(a)\|<\delta_1\ \to\ \|f(y)-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(y-g(a))\|\le\varepsilon_1\cdot\|y-g(a)\|.
\end{aligned}$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontan, ezért $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}g$, tehát

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon_2\in\mathbb{R}^+\exists\delta_2\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}: \\
&\qquad\|x-a\|<\delta_2\ \to\ \|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\|\le\varepsilon_2\cdot\|x-a\|.
\end{aligned}$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall\varepsilon_3\in\mathbb{R}^+\exists\delta_3\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}:\qquad\|x-a\|<\delta_3\ \to\ \|g(x)-g(a)\|<\varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}$ esetén

$$\|x-a\|<\delta_3\ \to\ \|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\|\le\varepsilon_1\cdot\|g(x)-g(a)\|.$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}$ esetén

$$\|x-a\|<\delta_2\ \to\ \|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\|\le\varepsilon_1\cdot\|x-a\|.$$

Legyen $\delta'=\min\{\delta_2,\delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}$ vektorra, ha $\|x-a\|<\delta'$, akkor

$$\begin{aligned}
\|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\|&\le\varepsilon_1\cdot\|g(x)-g(a)\| \\
\|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\|&\le\varepsilon_1\cdot\|x-a\|
\end{aligned}$$

teljesül, valamint az utolsó egyenlőtlenség alapján ha $\|x-a\|<\delta'$, akkor

$$\|g(x)-g(a)\|\le\varepsilon_1\cdot\|x-a\|+\|(\mathrm{D}g)(a)\|\cdot\|x-a\|.$$

Ezek alapján, ha $\|x-a\| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f(g(x)) - f(g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| = \\
&= \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a)) + \\
&\qquad + (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| \leq \\
&\leq \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\| + \\
&\quad + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \cdot \|(g(x)-g(a)) - (\mathrm{D}g)(a)(x-a)\| \leq \\
&\leq \varepsilon_1 \|g(x)-g(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \varepsilon_1 \|x-a\| \leq \\
&\leq \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \|x-a\| + \|(\mathrm{D}g)(a)\| \|x-a\|) + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \varepsilon_1 \|x-a\| = \\
&= \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \|(\mathrm{D}g)(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|) \|x-a\|
\end{aligned}$$

Mivel bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \|(\mathrm{D}g)(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|) < \varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x-a\| < \delta'$ esetén

$$\|f(g(x)) - f(g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(g(x)-g(a))\| \leq \varepsilon \cdot \|x-a\|,$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $(\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a)$.

12.3. Iránymenti derivált

12.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az f *függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

Megjegyzés. Egyes könyvekben megkövetelik az iránymenti derivált e irányvektoráról, hogy egységnyi hosszú legyen. Mi nem teszünk ilyen kikötést. ◊

12.12. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ pontban, valamint legyen $A = (\mathrm{D}f)(a)$ és $e \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor. Az $e = 0$ esetben nyilván teljesül az állítás, így feltehető, hogy $e \neq 0$. A

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t} = Ae$$

egyenlőtlenség igazolásához válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paramétert. A függvény a pontbeli differenciálhatósága alapján az $\dfrac{\varepsilon}{\|e\|}$ számhoz létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ melyre

$$\forall x \in B_{\delta'}(a) : \ \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|e\|} \cdot \|x-a\|$$

teljesül. Ha $\delta = \dfrac{\delta'}{\|e\|}$ és $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$, akkor $a + te \in B_{\delta'}(a)$, vagyis

$$\|f(a+te) - f(a) - A(te)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|e\|} \cdot |t| \, \|e\| = \varepsilon |t|.$$

Amiből $\lim\limits_{t \to 0} \left\| \dfrac{f(a+te) - f(a) - tA(e)}{t} \right\| = 0$ következik.

12.4. Néhány speciális függvény deriváltja

12.13. Tétel. *Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbb{R}^{\mathbf{m}})$ lineáris leképezés minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbb{R}^{\mathbf{m}}) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ tetszőleges pont. Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbb{R}^{\mathbf{m}})$ linearitása miatt minden $x \in U$ esetén

$$Ax - Aa - A(x-a) = 0$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{Ax - Aa - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

amiből $(\mathrm{D}A)(a) = A$ következik.

12.14. Tétel. *Ha $u = (u_1, \dots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathbf{n}_i}$, és $j \in \{1, \dots, k\}$, akkor az*

$$\mathrm{in}_{u,j} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathbf{n}_i} \qquad x \mapsto (u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_k)$$

inklúzió függvény deriváltjára minden $a \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}_j}$ pontban

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) = \mathrm{in}_{0,j}$$

teljesül, azaz

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) : \mathbb{R}^{\mathbf{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathbf{n}_i} \qquad x \mapsto (0, \dots, 0, \underbrace{x}_{j.\ hely}, 0, \dots, 0).$$

Bizonyítás. Az állítás jelölései mellett az

$$\mathrm{in}_{u,j}(x) - \mathrm{in}_{u,j}(a) = \mathrm{in}_{0,j}(x-a)$$

egyenlőség miatt

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{in}_{u,j}(x) - \mathrm{in}_{u,j}(a) - \mathrm{in}_{0,j}(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

12.15. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$, $f(a) = a^k$. Ekkor minden $a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ esetén*

$$(\mathrm{D}f)(a) : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$, $f(a) = a^k$, $a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ és tekintsük a

$$\tau : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

leképezést. Ekkor A olyan Banach-tér, melyen a norma szubmultiplikatív. A minden $h \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \setminus \{0\}$, $\|h\| \le 1$ esetén érvényes

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - \tau(h)}{\|h\|} \right\| = \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| (a+h)^n - a^n - \sum_{i=0}^{k-1} a^i h a^{k-1-i} \right\| \le$$

$$\leq \frac{1}{\|h\|}\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\|h\|^{i}\cdot\|a\|^{k-i}\leq\|h\|\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\|h\|^{i-2}\cdot\|a\|^{k-i}\leq$$
$$\leq\|h\|\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\cdot\|a\|^{k-i}\leq\|h\|\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\|a\|^{k-i}=\|h\|\cdot(1+\|a\|)^{k}$$

becslésből következik, hogy $(\mathrm{D}f)(a)=\tau$.

12.16. Tétel. *Ha*

$$\mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R})=\left\{a\in\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})\mid\exists a^{-1}\right\},$$

akkor az invertálás $i:\mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R})\to\mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R})$, $i(a)=a^{-1}$ *függvényére minden* $a\in\mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R})$ *pontban*

$$(\mathrm{D}i)(a):\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\qquad b\mapsto -a^{-1}ba^{-1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a\in\mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R})$ tetszőleges pont és tekintsük a $\tau\in\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})$, $\tau(b)=-a^{-1}ba^{-1}$ leképezést. A jelölések egyszerűsítése végett most jelölje 1 az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}}$ leképezést. Ha $0\neq h\in\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})$ és $\|h\|\leq\dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$, akkor a $-a^{-1}h$ elemre alkalmazható a Carl Neumann-féle sorfejtés, vagyis ebben az esetben érvényes a

$$\left\|\frac{i(a+h)-i(a)-\tau(h)}{\|h\|}\right\|=\frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|(a+h)^{-1}-a^{-1}+a^{1}ha^{-1}\right\|=$$
$$=\frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|((1+a^{-1}h)^{-1}-1+a^{-1}h)a^{-1}\right\|\leq\frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|\sum_{k=2}^{\infty}(-a^{-1}h)^{k}\right\|\cdot\left\|a^{-1}\right\|\leq$$
$$\leq\frac{\left\|a^{-1}\right\|}{\|h\|}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left\|a^{-1}h\right\|^{k}\leq\frac{\left\|a^{-1}\right\|}{\|h\|}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(\left\|a^{-1}\right\|\cdot\|h\|\right)^{k}=$$
$$=\frac{\left\|a^{-1}\right\|}{\|h\|}\cdot\frac{\left\|a^{-1}\right\|^{2}\cdot\|h\|^{2}}{1-\left\|a^{-1}\right\|\cdot\|h\|}\leq\|h\|\cdot 2\left\|a^{-1}\right\|^{3}$$

becslés, amiből következik az állítás.

12.5. Vektor-vektor függvény deriváltja

12.17. Definíció. Legyen $k\in\mathbb{N}^{+}$, $f:\prod_{i=1}^{k}\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $a=(a_1,\ldots,a_k)\in\mathrm{Dom}\,f$, valamint $i\in\{1,\ldots,k\}$ tetszőleges index.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény parciálisan deriválható a i-edik változója szerint az a pontban*, ha az
$$f\circ\mathrm{in}_{a,i}:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}\qquad x\mapsto f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_k)$$
függvény differenciálható az a_i pontban és ekkor a
$$(\partial_i f)(a)=(\mathrm{D}(f\circ\mathrm{in}_{a,i}))(a_i)$$
jelölést használjuk.
- Az f függvény *i-edik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a
$$\partial_i f=\left\{(a,A)\in(\mathrm{Dom}\,f)\times\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i},\mathbb{R}^{\mathfrak{m}})\;\middle|\;\begin{array}{l}f\circ\mathrm{in}_{a,i}\text{ differenciálható az }a_i\text{ pontban}\\ \text{és }A=(\mathrm{D}(f\circ\mathrm{in}_{a,i}))(a_i)\end{array}\right\}$$
függvényt.
- Az *f függvény parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha $\mathrm{Dom}\,\partial_i f=\mathrm{Dom}\,f$.

– Az f *függvény parciálisan folytonosan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint és $\partial_i f$ folytonos.

12.18. Tétel. *Ha az $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban, akkor minden $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}$ vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{k} ((\partial_i f)(a))(x_i)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen az $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban és legyen $j \in \{1, \dots, k\}$. Mivel f és az $\mathrm{in}_{a,j}$ függvény differenciálható, ezért a közvetett függvény deriválási szabálya alapján

$$(\partial_j f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,j}))(a_j) = ((\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,j}(a_j))) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,j})(a_j) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,j}\,.$$

Legyen $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}$ tetszőleges vektor. Mivel

$$x = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{in}_{0,i}(x_i)$$

és $(\mathrm{D}f)(a)$ lineáris leképezés, ezért

$$(\mathrm{D}f)(a)(x) = ((\mathrm{D}f)(a)) \sum_{i=1}^{k} \mathrm{in}_{0,i}(x_i) = \sum_{i=1}^{k} ((\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,i})(x_i) = \sum_{i=1}^{k} (\partial_i f)(a)(x_i)$$

teljesül.

12.19. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban, akkor minden $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_i f)(a)) x_i$$

teljesül, vagyis a mátrixok nyelvén

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) & \dots & (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a) \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Az előző állítás következménye.

12.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ lineáris leképezés mátrixa*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. A 12.7 és a 12.19 tétel egyszerű következménye.

12.21. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ lineáris leképezés mátrixát az *f függvény a pontbeli Jacobi-mátrixának* nevezzük. Az Jacobi-mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}$$

Az $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ esetben ezen mátrix determinánsát nevezzük *Jacobi-determinánsnak*.

12.22. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ tetszőleges index. Ekkor az f függvénynek pontosan akkor létezik a k-adik változó szerinti parciális deriváltja az a pontban, ha létezik az e_k iránymenti deriváltja az a pontban és ebben az esetben $(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}_{e_k} f)(a)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $k \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index. Válasszunk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.
Az alábbi ekvivalens átalakítások igazolják az állítást.

$$\begin{aligned} \exists(\partial_k f)(a) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a_k} \frac{(f \circ \mathrm{in}_{a,k})(x) - (f \circ \mathrm{in}_{a,k})(a_k) - (\partial_k f)(a)(x - a_k)}{|x - a_k|} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a_k} \left| \frac{f(a + (x - a_k)e_k) - f(a)}{x - a_k} - (\partial_k f)(a) \right| = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = (\partial_k f)(a) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \exists(\mathrm{D}_{e_k} f)(a) \end{aligned}$$

12.6. Gradiens, divergencia és rotáció

12.23. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban, akkor a $((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a)) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektort az *f függvény a pontbeli gradiensének* nevezzük és a $(\operatorname{grad} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény gradiensének* nevezzük a

$$\operatorname{grad} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \qquad a \mapsto ((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a))$$

  függvényt.

Bevezetjük a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{grad} f$ jelölést, ahol a ∇ szimbólumot *nabla-operátornak* nevezzük.

12.24. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektor esetén*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), x \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. A gradiens definíciójának közvetlen következménye.

12.25. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és legyen $a, e \in \mathbb{R}^n$. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor létezik az f függvény a pontbeli e iránymenti deriváltja és*

$$(\mathrm{D}_e f)(a) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), e \rangle .$$

Bizonyítás. A 12.12 és a 12.24 tétel közvetlen következménye.

12.26. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban, akkor a $\operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$ számot az *f függvény a pontbeli divergenciájának* nevezzük és a $(\operatorname{div} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az f *függvény divergenciájának* nevezzük a

$$\operatorname{div} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$$

függvényt.

A divergenciára használjuk még a $\nabla f \triangleq \operatorname{div} f$ jelölést.

12.27. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor*

$$(\operatorname{div} f)(a) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f_i)(a).$$

Bizonyítás. A 12.20 tételből és a nyom értelmezéséből rögtön adódik.

12.28. Definíció. Minden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényhez bevezetjük a

$$\Delta f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\operatorname{grad} f)) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto (\operatorname{div} \operatorname{grad} f)(a)$$

jelölést és a Δ szimbólumot *Laplace-operátornak* nevezzük. Tehát formálisan $\Delta = \nabla^2$.

12.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor minden $a \in \operatorname{Dom}(\Delta f)$ elemre*

$$(\Delta f)(a) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k^2 f)(a)$$

teljesül.

Bizonyítás. A gradiens definíciójából és a 12.27 tételből adódik.

12.30. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges függvény.

– Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^3$ pontban, akkor a

$$((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \in \mathbb{R}^3$$

vektort az f *függvény a pontbeli rotációjának* nevezzük és a $(\operatorname{rot} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az f *függvény rotációjának* nevezzük a

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f : &\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^3 \\ &a \mapsto ((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \end{aligned}$$

függvényt.

A rotációra használjuk még a $\nabla \times f \triangleq \operatorname{rot} f$ jelölést.

Kiegészítés. Bizonyos esetekben szükség van a gradiens és a Laplace-operátor általánosabb értelmezésére, most ezeket adjuk meg.

12.31. Definíció. Legyen $g \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ olyan szimmetrikus bilineáris leképezés, melyre a

$$\tilde{g} : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^* \qquad x \mapsto g(x, \cdot)$$

leképezés bijekció, továbbá legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

– Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a $\tilde{g}^{-1} \circ (\mathrm{D}f)(a) \in \mathbb{R}^n$ vektort az f *függvény a pontbeli g-gradiensének* nevezzük és a $(\operatorname{grad}_g f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az f *függvény g-gradiensének* nevezzük a

$$\operatorname{grad}_g f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^n \qquad a \mapsto \tilde{g}^{-1}((\mathrm{D}f)(a))$$

függvényt.

– Bevezetjük a

$$\Delta_g f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\operatorname{grad}_g f)) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto (\operatorname{div} \operatorname{grad}_g f)(a)$$

jelölést és a Δ_g szimbólumot *g-Laplace-operátornak* nevezzük.

$\Diamond$

12.7. Folytonosan differenciálható függvények

12.32. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \|(\mathrm{D}f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ha $f(a) = f(b)$, akkor nyilván teljesül az állítás, ezért tegyük fel, hogy $f(b) - f(a) \neq 0$. Tekintsük a

$$\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \langle f(b) - f(a), f(a + t(b - a)) - f(a)\rangle$$

függvényt. A φ függvényre alkalmalmazva a Lagrange-féle középérték tételt, kapjuk, hogy létezik olyan $t_0 \in]0, 1[$, hogy

$$\varphi'(t_0) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0},$$

vagyis

$$\langle f(b) - f(a), (\mathrm{D}f)(a + t_0(b - a))(b - a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|_2^2 .$$

Legyen $c = a + t_0(b - a)$. Ekkor a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\|f(b) - f(a)\|_2^2 \leq \|f(b) - f(a)\|_2 \cdot \|(\mathrm{D}f)(c)(b - a)\|_2 \leq \|f(b) - f(a)\|_2 \cdot \|(\mathrm{D}f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2 .$$

Amit elosztva a $\|f(b) - f(a)\|_2$ számmal kiadja a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

12.33. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Ha $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \left(\sup_{c \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(c)\| \right) \cdot \|b - a\|_2 ,$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

Bizonyítás. Az előző állítás nyilvánvaló következménye.

12.34. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{D}f = 0$ teljesül. Ekkor f állandó.*

Bizonyítás. A véges növekmények formulájának következménye.

12.35. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.
Legyen $a \in \Omega$ és $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \Omega$ teljesül, valamint definiáljuk az

$$A : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i),$$

lineáris leképezést. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített szám és az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren használjuk a végtelen normát. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén

$$|f(x) - f(a) - A(x - a)| \leq \varepsilon \|x - a\|_\infty$$

teljesül, melyből következik, hogy f differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) = A$.
Mivel minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta \in]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ és $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesül.
Legyen $x \in B_\delta(a)$ tetszőleges pont. Definiáljuk a $z_0, z_1, \dots, z_\mathfrak{n} \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ vektorokat az alábbi módon.

$$\begin{aligned}
z_0 &= (x_1, x_2, x_3 \dots, x_\mathfrak{n}) \\
z_1 &= (a_1, x_2, x_3 \dots, x_\mathfrak{n}) \\
z_2 &= (a_1, a_2, x_3, \dots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
z_i &= (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
z_\mathfrak{n} &= (a_1, a_2, \dots, a_\mathfrak{n})
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) - A(a)(x - a) &= f(z_0) - f(z_n) - A(z_0 - z_n) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - A(z_{i-1} - z_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - a_i)
\end{aligned}$$

adódik. Minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén legyen

$$\gamma_i : [x_i, a_i] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (f \circ \mathrm{in}_{z_i,i})(t) - (A \circ \mathrm{in}_{z_i,i})(t),$$

vagy másképp írva

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= f(t, x_2, x_3, \dots, x_\mathfrak{n}) - A(t, x_2, x_3, \dots, x_\mathfrak{n}) \\
\gamma_2(t) &= f(a_1, t, x_3, \dots, x_\mathfrak{n}) - A(a_1, t, x_3, \dots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
\gamma_i(t) &= f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_\mathfrak{n}) - A(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
\gamma_\mathfrak{n}(t) &= f(a_1, a_2, \dots, a_{\mathfrak{n}-1}, t) - A(a_1, a_2, \dots, a_{\mathfrak{n}-1}, t).
\end{aligned}$$

teljesül. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ indexre

$$f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - a_i) = \gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i).$$

A parciális deriválás definíciójából, a közvetett függvény deriválási szabályából, a lineáris leképezés (12.13 tétel) és az inklúzió deriválási szabályából (12.14 tétel) adódik, hogy minden $w \in [x_i, a_i]$ esetén

$$(\mathrm{D}\gamma_i)(w) = (\partial_i f)(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, w, x_{i+1}, \dots, x_\mathfrak{n}) - (\partial_i f)(a).$$

A γ_i függvényre és az $[x_i, a_i]$ szakaszra alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt, azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, a_i[$, hogy

$$|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| = |(\gamma_i')(c_i)| \cdot |x_i - a_i|.$$

Minden $c_i \in [x_i, a_i]$ esetén legyen $w_i = \mathrm{in}_{z_i,i}(c_i)$, azaz

$$w_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \dots, x_{\mathfrak{n}}).$$

Ekkor $w_i \in B_\delta(a)$ miatt

$$|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| = |(\partial_i f)(w_i) - (\partial_i f)(a)| \cdot |x_i - a_i| \le \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} \cdot |x_i - a_i|.$$

Összerakva ezeket az eredményeket

$$|f(x) - f(a) - A(a)(x-a)| \le \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| \le \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} |x_i - a_i| \le \varepsilon \|x-a\|_\infty$$

adódik. Ezzel igazoltuk, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in B_\delta(a): \quad |f(x) - f(a) - A(x-a)| \le \varepsilon \|x-a\|_\infty.$$

Tehát f differenciálható az Ω halmazon és minden $a \in \Omega$ pontban $(\mathrm{D}f)(a) = A$.
Legyen $a \in \Omega$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Mivel minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ és $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesül. Ezekből $x \in B_\delta(a)$ esetén az $(\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x)$ lineáris leképezés normájára

$$\|(\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x)\| = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |(\partial_i f)(a) - (\partial_i f)(x)| < \varepsilon$$

adódik, amivel igazoltuk a $\mathrm{D}f$ függvény folytonosságát.
Most tegyük fel, hogy az f függvény folytonosan differenciálható az Ω halmazon. A parciális derivált értelmezése, a közvetett függvény deriválási szabálya és az inklúziófüggvény deriváltja alapján minden $k \in \{1, \dots, n\}$ és $a \in \Omega$ esetén

$$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) = (\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,k}(a_k)) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,k})(a_k) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,k}$$

teljesül. Ezért a minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\partial_k f$ függvény értelmezett az Ω halmazon, továbbá az $\mathrm{in}_{0,k}$ függvény és a $\mathrm{D}f$ függvény folytonossága miatt a $\partial_k f$ függvény is folytonos.

12.36. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz.
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor a 12.35 tétel alapján minden $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ mellett az f_j függvény folytonosan differenciálható. A 12.7 tétel alapján ebből $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálhatósága következik és a 10.90 tételből pedig $\mathrm{D}f$ folytonossága.
Most tegyük fel, hogy f folytonosan differenciálható az Ω halmazon. Ekkor a projekciófüggvény folytonos differenciálhatósága miatt minden $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ indexre f_j függvény folytonosan differenciálható, a 12.35 tétel miatt pedig minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\partial_i f_j$ folytonos.

12.8. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága

12.37. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_n f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*

2. *az* $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *függvényhez egyenletesen konvergál az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat;*
3. *minden* $x \in B_r(a)$ *esetén*
$$(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x).$$

Bizonyítás. Mivel a tételben szereplő fogalmak függetlenek az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ téren választott normától, valamint a bizonyítás során használni szeretnénk a véges növekmények formuláját, ezért az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ téren tekintsük a $\|\cdot\|_2$ (euklidészi) normát.
Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $g : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < m, n \in \mathbb{N}$ számra
$$\|f_n(a) - f_m(a)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$
teljesül. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 11.3 tétel alapján létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < m, n \in \mathbb{N}$ számra
$$\sup_{y\in B_r(a)} \|(\mathrm{D}f_n)(y) - (\mathrm{D}f_m)(y)\| < \frac{\varepsilon}{2r}$$
teljesül. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$.
Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az $f_n - f_m$ függvényre és az $\lfloor a, x \rfloor$ szakaszra alkalmazva a 7.17 véges növekmények formuláját
$$\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\|_2 \le \left(\sup_{y\in]a,x[} \|(\mathrm{D}(f_n - f_m))(y)\| \right) \cdot \|x - a\|_2$$
adódik. Ekkor minden $N < n, m$ természetes számra
$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_2 \le \|f_n(a) - f_m(a)\|_2 + \left(\sup_{y\in]a,x[} |(\mathrm{D}(f_n - f_m))(y)| \right) \cdot \|x - a\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon.$$
Vagyis $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.
Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra
$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_2 < \varepsilon$$
teljesül, amiből a 11.3 tétel alapján adódik, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.
Legyen $t \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen
$$\varphi_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(t) - (\mathrm{D}f_n)(t)(x-t)}{\|x-t\|_2}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t, \end{cases}$$
továbbá legyen
$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(t) - g(t)(x-t)}{\|x-t\|_2}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t. \end{cases}$$
Az f_n függvény t pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 11.4 tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne a t pontban, és teljesülne a bizonyítandó
$$(\mathrm{D}f)(t) = g(t)$$

egyenlőség.
Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 11.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} \|(\mathrm{D}f_n)(y) - (\mathrm{D}f_m)(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \qquad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - ((\mathrm{D}f_n)(t) - (\mathrm{D}f_m)(t))u$$

függvényre és az $[t, x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t)) - ((\mathrm{D}f_n)(t)(x-t) - (\mathrm{D}f_m)(t))(x-t)\|_2 \leq$$
$$\left(\sup_{y\in]t,x[} \|(D(f_n - f_m))(y) - ((\mathrm{D}f_n)(t) - (\mathrm{D}f_m)(t))\|\right) \cdot \|t-a\|_2$$

adódik, vagyis ha $N < m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f_n(x) - f_n(t) - (\mathrm{D}f_n)(t)(x-t) - (f_m(x) - f_m(t) - (\mathrm{D}f_m)(t))(x-t))\|_2 \leq \\
&\leq \left(\sup_{y\in]t,x[} (\|(D(f_n - f_m))(y)\| + \|(\mathrm{D}f_n)(t) - (\mathrm{D}f_m)(t)\|)\right) \cdot \|x-t\|_2 \leq \\
&\leq \left(\left(\sup_{y\in B_r(a)} \|(D(f_n - f_m))(y)\|\right) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \|x-t\|_2 \leq \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \|x-t\|_2 = \varepsilon \|x-t\|_2 .
\end{aligned}$$

Ezen egyenlőtlenség alapján minden $N < n, m$ természetes számra $x \neq t$ esetén

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|x-t\|_2}{\|x-t\|_2} = \varepsilon,$$

valamint $x = t$ esetén is $\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\|_2 = 0 < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a): \ (N < n, m \ \to \ \|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\|_2 \leq \varepsilon)$$

teljesül, amiből a 11.3 tétel értelmében következik, hogy a a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

12.38. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ differenciálható függvény. Ha az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték.
Definiáljuk az

$$\Omega' = \left\{x \in \Omega | \ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy Ω' nyílt halmaz. Legyen $x \in \Omega'$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 12.37, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $B_r(x) \subseteq \Omega'$.
Tegyük fel, hogy $\Omega' \neq \Omega$. Vegyünk egy $x \in \Omega \setminus \Omega'$ elemet. Legyen

$$H = \{t \in [0,1] \mid [a, a + t(x-a)] \subseteq \Omega'\},$$

$c = \sup H$ és $p = a + c(x-a)$. Az a pontra és olyan $B_r(a)$ környezetére alkalmazva a 12.37 tételt, ahol az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, az adódik, hogy $c > 0$. Az Ω' halmaz nyíltsága miatt pedig $p \notin \Omega'$. Mivel $p \in \Omega$, ezért létezik olyan $r > 0$, hogy a $B_r(p)$ halmazon egyenletesen konvergens az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat.
A c szám konstrukciója folytán létezik olyan $t_0 \in H$, melyre $c - \dfrac{r}{4\|x-a\|} < t_0$, ezért a $q = a + t_0(x-a) \in \Omega'$ elemre

$$\|p - q\| = \|a + c(x-a) - a - t_0(x-a)\| = |c - t_0| \cdot \|x - a\| < \frac{r}{4}.$$

Ekkor viszont alkalmazható a 12.37 tétel a $B_{\frac{r}{2}}(q)$ halmazon, mely szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens ezen a halmazon, tehát a $p \in B_{\frac{r}{2}}(q)$ pontban is konvergens. Ez azonban ellentmond a $p \notin \Omega'$ feltevésnek. Tehát $\Omega' = \Omega$.
Legyen $x \in \Omega$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 12.37, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan egyenletesen konvergens.

12.39. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ összeg;*
2. *az $\sum_n (f_n)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ összeg. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n : \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_n(x).$$

Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 12.38 tételt adódik az állítás.

12.9. Inverzfüggvény tétel

12.40. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és $a \in \mathbb{R}^n$. Ha $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban és $\det(\mathrm{D}f)(a) \neq 0$, akkor létezik olyan $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. *$f|_\Omega$ injektív;*
2. *$f(\Omega)$ nyílt halmaz;*
3. *$f|_\Omega$ homeomorfizmus Ω és $f(\Omega)$ között;*
4. *az $(f|_\Omega)^{-1}$ függvény differenciálható;*
5. *minden $x \in \Omega$ pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban.*

Bizonyítás. Mivel a tételben szereplő fogalmak függetlenek az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ téren választott normától, valamint a bizonyítás során használni szeretnénk a véges növekmények formuláját, ezért az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ teret az euklidészi (kettes) normával látjuk el. (Azaz minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ és hasonlóan az $\mathbb{R}^m$ térben lévő vektorokra.)
Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ olyan pont, hogy $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban.
A bizonyítást több lépésben végezzük.
1. Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést és legyen $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ teljesül. A $\mathrm{D}f$ függvény a pontbeli $\mathrm{D}f$ folytonossága miatt létezik olyan $r \in]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_r(a)$ esetén
$$\|(\mathrm{D}f)(x) - A\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}.$$
Definiáljuk az $\Omega = B_r(a)$ halmazt. Lépésenként megmutatjuk, hogy erre az Ω halmazra teljesülnek a tételben felsorolt tulajdonságok. Előbb azonban megjegyezzük, hogy a 10.107 tétel miatt minden $x \in \Omega$ pont esetén a $(\mathrm{D}f)(x)$ leképezés invertálható.
2. A bizonyítás folyamán szükségünk lesz az alábbi függvényre. Minden $y \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen
$$\varphi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto x + A^{-1}(y - f(x)).$$
Vegyük észre, hogy egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont pontosan akkor fixpontja a φ_y függvénynek, ha $y = f(x)$ teljesül. A φ_y függvénynek pontosan akkor létezik fixpontja, ha $y \in \operatorname{Ran} f$, valamint pontosan akkor van egy darab fixpontja, ha az f függvény csak egyszer veszi fel az y értéket.
Mivel minden $y \in \mathbb{R}^n$ estén
$$\varphi_y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + (A^{-1}y) - A^{-1} \circ f,$$
ezért minden $x \in \Omega$ pontra
$$(\mathrm{D}\varphi_y)(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - A^{-1} \circ (\mathrm{D}f)(x) = A^{-1}(A - (\mathrm{D}f)(x))$$
teljesül, amiből
$$\|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|(A - (\mathrm{D}f)(x))\| < \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{1}{2\|A^{-1}\|} = \frac{1}{2}$$
következik. Vagyis minden $y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $x_1, x_2 \in \Omega$ pont esetén a véges növekmények formuláját felírva az $[x_1, x_2]$ szakaszra és a φ_y függvényre
$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \le \left(\sup_{x \in]x_1, x_2[} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \le$$
$$\le \left(\sup_{x \in \Omega} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \le \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$
adódik. Tehát φ_y kontrakció és
$$\forall y \in \mathbb{R}^n \ \forall x_1, x_2 \in \Omega \qquad \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \le \frac{\|x_1 - x_2\|}{2} \tag{12.1}$$

teljesül.
3. Most megmutatjuk, hogy az $f|_\Omega$ függvény injektív. Ehhez tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \Omega$ olyan, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Ha $y = f(x_1)$, akkor $\varphi_y(x_1) = x_1$ és $\varphi_y(x_2) = x_2$, amiből a (12.1) egyenlet segítségével

$$\|x_1 - x_2\| = \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$

adódik, vagyis $x_1 = x_2$.
4. Most igazoljuk, hogy minden $X \subseteq \Omega$ nyílt halmaz esetén $f(X)$ nyílt halmaz. Legyen $y_0 \in f(X)$ tetszőleges pont. Ekkor $f|_\Omega$ injektivitása miatt létezik egyetlen olyan $x_0 \in X$ pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel X nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{2r}(x_0) \subseteq X$. Legyen $\rho \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $x \in \overline{B_r(x_0)}$, $y \in B_\rho(y_0)$ tetszőleges pontok. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y(x) - x_0\| &\leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \left\|A^{-1}(y - f(x_0))\right\| \leq \\
&\leq \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \leq \\
&\leq \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $\frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho = r$, azaz $\rho = \frac{r}{2\|A^{-1}\|}$, akkor minden $x \in \overline{B_r(x_0)}$ esetén

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r.$$

Mostantól legyen $\rho = \frac{r}{2\|A^{-1}\|}$. Ekkor az előző egyenlőtlenség alapján

$$\varphi_y\left(\overline{B_r(x_0)}\right) \subseteq \overline{B_r(x_0)}.$$

Mivel $\mathbb{R}^n$ teljes és $\overline{B_r(x_0)}$ zárt részhalmaza, ezért a 10.43 tétel alapján a $\overline{B_r(x_0)}$ halmaz is teljes. Ekkor az $M = \overline{B_r(x_0)}$ halmazra és a $\varphi_y|_M$ függvényre alkalmazva a 10.119 Banach-féle fixponttételt, az adódik, hogy létezik egyetlen olyan $x \in \overline{B_r(x_0)}$ pont, melyre

$$\varphi_y(x) = x$$

teljesül, ez pedig azzal ekvivalens, hogy $f(x) = y$. Tehát azt kaptuk, hogy minden $y \in B_\rho(y_0)$ ponthoz létezik olyan $x \in X$, melyre $f(x) = y$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy $B_\rho(y_0) \subseteq f(X)$. Ezzel igazoltuk, hogy $f(X)$ nyílt halmaz.
5. Az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük a $g = f|_\Omega$ és az $\Omega' = f(\Omega)$ jelöléseket. Most megmutatjuk, hogy g homeomorfizmus Ω és Ω' között. Mivel f differenciálható az Ω halmazon, ezért ott folytonos is, vagyis g folytonos. A folytonosság topologikus jellemzése alapján a g^{-1} függvény folytonossága azzal ekvivalens, hogy minden $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra létezik olyan $X' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre $\left(\overset{-1}{g^{-1}}\right)(X) = X' \cap \operatorname{Dom} g^{-1}$ teljesül. Mivel g injektív, ezért azt kell igazolnunk, hogy minden $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazhoz létezik olyan $X' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre

$$g(X) = X' \cap \Omega'.$$

Ha $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, akkor $g(X) = g(\Omega \cap X)$ és mivel $\Omega \cap X$ nyílt halmaz, ezért a 4. pont alapján $g(\Omega \cap X)$ nyílt halmaz. A nyilvánvaló $g(\Omega \cap X) \subseteq \Omega'$ tartalmazás miatt

$$g(X) = g(\Omega \cap X) \cap \Omega',$$

vagyis az $X' = g(\Omega \cap X)$ nyílt halmazra teljesül a kívánt tartalmazás.
6. Most igazoljuk, hogy g^{-1} differenciálható és minden $x \in \Omega$ pontra

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$

teljesül. Ezzel ekvivalens, hogy minden minden $y \in \Omega'$ pontban g^{-1} differenciálható és

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(y) = ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y)))^{-1}$$

teljesül. Ennek igazolásához legyen $y_0 \in \Omega'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Azt kell bizonyítani, hogy

$$\begin{aligned}&\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}: \\ &\qquad \left(\|y-y_0\| < \delta \quad \to \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y-y_0)\right\| \le \varepsilon \|y-y_0\|\right)\end{aligned}$$

teljesül. Mivel Ω' nyílt halmaz a 4. pont alapján, ezért létezik olyan $r_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, melyre $B_{r_1}(y_0) \subseteq \Omega'$. Legyen $x_0 = g^{-1}(y_0)$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenségben szereplő kifejezésen végezzük el a következő átalakításokat, ahol $y \in B_{r_1}(y_0)$ tetszőleges és $x = g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}&\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y-y_0)\right\| = \\ &\quad = \left\|x - x_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}(y-y_0)\right\| = \\ &\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\left(((\mathrm{D}g)(x_0))(x-x_0) - (y-y_0)\right)\right\| \le \\ &\quad \le \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|((\mathrm{D}g)(x_0))(x-x_0) - (y-y_0)\| = \\ &\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x-x_0)\| = \\ &\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\|\end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ egy paraméter, melynek majd később rögzítjük az értékét. Mivel $x_0 \in \Omega$, Ω nyílt halmaz és a g függvény differenciálható az x_0 pontban, ezért létezik olyan $r_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{r_2}(x_0) \subseteq \Omega$ és

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}: \qquad \left(\|x-x_0\| < r_2 \quad \to \quad \|g(x) - g(x_0) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x-x_0)\| \le \varepsilon' \|x-x_0\|\right).$$

Mivel a g^{-1} függvény folytonos az y_0 pontban, ezért létezik olyan $r_3 \in]0, r_1[$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}: \qquad \left(\|y-y_0\| < r_3 \quad \to \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| < r_2\right).$$

Ezekből

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0): \ \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le \varepsilon' \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|$$

következik. Tetszőleges $y \in B_{r_3}(y_0)$ pont esetén

$$\begin{aligned}&\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| = \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y-y_0) + A^{-1}(y-y_0)\right\| \le \\ &\quad \le \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y-y_0)\right\| + \left\|A^{-1}(y-y_0)\right\| \le \\ &\quad \le \left\|\varphi_{y_0}(g^{-1}(y)) - \varphi_{y_0}(g^{-1}(y_0))\right\| + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y-y_0\| \le \\ &\quad \le \frac{\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y-y_0\|\end{aligned}$$

adódik, ahol az utolsó lépésnél felhasználtuk a (12.1) becslést és ennek az egyenlőtlenségnek az átrendezéséből

$$\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| \le 2\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y-y_0\|$$

következik. Tehát az eddigiek alapján

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0): \ \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le 2\varepsilon' \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y-y_0\|.$$

Vagyis ha $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\| \cdot \|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\|}$, akkor minden $y \in B_{r_3}(y_0)$ pontra teljesül a bizonyítandó

$$\left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le \varepsilon \|y-y_0\|$$

egyenlőtlenség. Tehát a fent definiált ε' paraméterhez kell r_2 és r_3 számokat választani, és r_3 lesz a keresett δ.
7. Végül igazoljuk, hogy a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban. Már megmutattuk, hogy

$$\mathrm{D}(g^{-1}) = i \circ (\mathrm{D}g) \circ g^{-1},$$

ahol i jelöli az invertálást. A g^{-1} függvény folytonosságát igazoltuk, a $(\mathrm{D}g)$ függvény folytonosságát feltettük az a pontban és a 10.107 tétel alapján tudjuk, hogy i folytonos. Ezek alapján a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény is folytonos az $f(a)$ pontban.

12.10. Implicitfüggvény tétel

12.41. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ tetszőleges függvény. Ha $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az (a_1, a_2) pontban és $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$, akkor létezik olyan Ω_1, Ω_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre*

1. *$\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom}(Df)$;*
2. *létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ differenciálható függvény, melyre $\varphi(a_1) = a_2$, minden $x \in \Omega_1$ esetén*

$$f(x, \varphi(x)) = f(a_1, a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$

teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ folytonos az a_1 pontban.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$, $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(Df)$ olyan pont, melyben $\mathrm{D}f$ folytonos és $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$.
A $\operatorname{Dom} f$ halmazon értelmezzük az

$$\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, f(x_1, x_2))$$

függvényt. Ekkor ha $(b_1, b_2) \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, akkor

$$((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \qquad (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ (\partial_1 f)(b_1, b_2) & (\partial_2 f)(b_1, b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

teljesül. Ebből adódik, hogy $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}\eta)$, továbbá a $\mathrm{D}f$ függvény (a_1, a_2) pontbeli folytonossága miatt a $\mathrm{D}\eta$ függvény is folytonos az (a_1, a_2) pontban. Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$\det((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) = \det(\partial_2 f)(b_1, b_2),$$

vagyis $\det((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) \neq 0$, ezért alkalmazható az η függvényre az inverzfüggvény tétel. Az η függvényre és az (a_1, a_2) pontra alkalmazva a 12.40 inverzfüggvény tételt az adódik, hogy létezik olyan Ω_1', Ω_2' nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre

1. $\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'}$ injektív;
2. az $\Omega = \eta\left(\Omega_1' \times \Omega_2'\right) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ halmaz nyílt;
3. az $(\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ függvény differenciálható;
4. minden $x \in \Omega_1' \times \Omega_2'$ pontra

$$(\mathrm{D}((\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}))(\eta(x)) = ((\mathrm{D}\eta)(x))^{-1}$$

teljesül;

5. a $\mathrm{D}(\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ függvény folytonos az $\eta(a_1, a_2)$ pontban.

Vezessük be a $\rho = (\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ jelölést, tehát $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény, melynek komponensei legyenek

$$\rho_1 : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_1(\rho(x, y))$$
$$\rho_2 : \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x, y)).$$

Ha $(x_1, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, akkor

$$(x_1, y) = \eta(\rho(x_1, y)) = \eta(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y)) = (\rho_1(x_1, y), f(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y))),$$

vagyis minden $(x_1, y) \in \Omega$ pont esetén

$$x_1 = \rho_1(x_1, y) \qquad \text{és} \qquad y = f(x_1, \rho_2(x_1, y)). \tag{12.2}$$

Legyen $c = f(a_1, a_2)$. Ekkor $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} f$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} \eta$ is teljesül és $\eta(a_1, a_2) = (a_1, c)$ miatt $(a_1, c) \in \Omega$, mivel Ω nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\Omega_1 \subseteq \Omega_1' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre $\Omega_1 \times \{c\} \subseteq \Omega$.
Tekintsük a

$$\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2 \qquad x \mapsto \operatorname{pr}_2(\rho(x, c))$$

függvényt, ahol $\Omega_2 = \Omega_2'$. Mivel ρ differenciálható és pr_2 lineáris leképezés, ezért φ is differenciálható függvény. A (12.2) egyenlet alapján minden $x \in \Omega_1$ pontra

$$c = f(x, \rho_2(x, c)) = f(x, \varphi(x))$$

teljesül, melyből a közvetett függvény deriválási szabálya alapján az adódik, hogy minden $x \in \Omega_1$ esetén

$$0 = (\partial_1 f)(x, \varphi(x)) + (\partial_2 f)(x, \varphi(x)) \circ (D\varphi)(x)$$

teljesül, aminek átrendezéséből

$$(D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$

adódik.
Az implicitfüggvény egyértelműségének igazolásához tegyük fel, hogy $\varphi_2 : \Omega_1 \to \Omega_2$ olyan függvény, hogy minden $x \in \Omega_1$ pontra $c = f(x, \varphi_2(x))$ teljesül. Ekkor minden $x \in \Omega_1$ esetén

$$\eta(x, \varphi(x)) = (x, f(x, \varphi(x))) = (x, c) = (x, f(x, \varphi_2(x))) = \eta(x, \varphi_2(x))$$

teljesül, amiből η injektivitása miatt $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ következik.

12.11. Többszörös deriváltak

12.42. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Az *f függvény k-szor differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^n)^{k-1}, \mathbb{R}^m))$, ennek a kompozícióját a

$$\begin{aligned} \rho_{k-1} : \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^n)^{k-1}, \mathbb{R}^m)) &\to \operatorname{Lin}^k((\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R}^m)) \\ A &\mapsto \Big((x_1, \dots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \dots, x_n)\Big) \end{aligned}$$

  izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$. Az f függvény *k-adik deriváltjának* nevezzük a

$$\mathrm{D}^{(k)} f : \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f) \to \operatorname{Lin}^k((\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R}^m) \qquad a \mapsto \rho_{k-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a)$$

  függvényt.
- Az *f függvény k-szor differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(k)} f$.
- Az *f függvény k-szor folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, k-szor folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^k(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.

12.43. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-szor differenciálható függvény. Ekkor minden $a \in \Omega$ és $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén*

$$((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f)(a)) \cdot x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_k}^{(k)}.$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-szor differenciálható függvény. A $k = 1$ esetben az állítás a 12.19 tételből adódik. Tegyük fel, hogy valamilyen $p \in \mathbb{N}^+$, $p < k$ számra teljesül az állítás és legyen $g = \mathrm{D}^{(p)} f$. Megmutatjuk, hogy ekkor a $p + 1$ számra is igaz az állítás. Ekkor

$$g : \Omega \to \mathrm{Lin}^p\left((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^p, \mathbb{R}\right)$$

és minden $a \in \Omega$, valamint $x^{(1)}, \dots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$(g(a))(x^{(1)}, \dots, x^{(p)}) = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} f)(a)) \cdot x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_p}^{(p)}.$$

A

$$\eta : \mathrm{Lin}^p\left((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^p, \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}^{(\mathfrak{n}^p)} \qquad A \mapsto \left(A(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p})\right)_{i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,\mathfrak{n}\}}$$

lineáris izomorfizmus segítségével elkészíthetjük a

$$\eta \circ g : \Omega \to \mathbb{R}^{(\mathfrak{n}^p)} \qquad a \mapsto \left((\partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} f)(a)\right)_{i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,\mathfrak{n}\}}$$

függvényt, erre alkalmazva a 12.18 tételt azt kapjuk, hogy minden $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorra

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a))(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_0}(\eta \circ g))(a))(x_{i_0}^{(0)})$$

teljesül, ebből pedig

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a))(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \left(x_{i_0}^{(0)} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} f)(a)\right)_{i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,\mathfrak{n}\}}$$

adódik. Mivel

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a)) = (\mathrm{D}\eta)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a) = \eta \circ (\mathrm{D}g)(a),$$

ezért

$$\eta \circ (\mathrm{D}g)(a)(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \left(x_{i_0}^{(0)} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} f)(a)\right)_{i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,\mathfrak{n}\}}$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $x^{(1)}, \dots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$(\mathrm{D}g)(a)(x^{(0)})(x^{(1)}, \dots, x^{(p)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} \left(x_{i_0}^{(0)} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} f)(a)\right) x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_p}^{(p)}.$$

Ebből a $\mathrm{D}^{(p+1)} f = \rho_p \circ \mathrm{D}\left(\mathrm{D}^{(p)} f\right)$ definíció figyelembe vételével adódik, hogy minden $a \in \Omega$ és $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$((\mathrm{D}^{(p+1)} f)(a))(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p)}) = \sum_{i_0,i_1,\dots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_0} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} f)(a)) \cdot x_{i_0}^{(0)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_p}^{(p)}.$$

12.44. Tétel. *(Schwarz-tétel vagy Clairaut tétele a vegyes parciális deriváltakról.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_i \partial_j f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor minden $i, j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ indexre $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ teljesül az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren tekintsük a végtelen normát. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_i \partial_j f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Legyen $a = (a_1, \dots, a_{\mathfrak{n}}) \in \Omega$ és ehhez $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_r(a) \subseteq \Omega$ teljesül. Továbbá legyen $i, j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$, $i < j$ tetszőleges index. Minden $c \in]0, r[$ esetén definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\alpha : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(a + xe_i + ce_j) - f(a + xe_i)$$

$$\beta : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(a + xe_j + ce_i) - f(a + xe_j)$$

A Lagrange-féle középérték tételt alkalmazva az α függvényre az $[0, c]$ szakaszon az adódik, hogy létezik olyen $\vartheta_1 \in]0, 1[$ paraméter, hogy

$$\alpha(c) - \alpha(0) = ((\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + ce_j) - (\partial_i f)(a + \vartheta_1 e_i))\, c.$$

A

$$B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + te_j)$$

függvényre alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt a $[0, c]$ szakaszon, azt kapjuk, hogy létezik olyan $\vartheta_2 \in]0, 1[$, hogy

$$(\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + ce_j) - (\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i) = (\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j)c,$$

tehát

$$\alpha(c) - \alpha(0) = (\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j)c^2.$$

A Lagrange-féle középérték tételt alkalmazva az β függvényre az $[0, c]$ szakaszon az adódik, hogy létezik olyen $\vartheta_3 \in]0, 1[$ paraméter, hogy

$$\beta(c) - \beta(0) = ((\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + ce_i) - (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j))\, c.$$

A

$$B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + te_i)$$

függvényre alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt a $[0, c]$ szakaszon, azt kapjuk, hogy létezik olyan $\vartheta_4 \in]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + ce_i) - (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + \vartheta_4 ce_i)c,$$

tehát

$$\beta(c) - \beta(0) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j)c^2.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\alpha(c) - \alpha(0) = \beta(c) - \beta(0)$$

azt kapjuk, hogy minden $c \in]0, r[$ esetén létezik olyan $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \in]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a $(\partial_j \partial_i f)$ és a $(\partial_i \partial_j f)$ függvény folytonos az a pontban ezért létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén

$$|(\partial_j \partial_i f)(x) - (\partial_j \partial_i f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad |(\partial_i \partial_j f)(x) - (\partial_i \partial_j f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezek alapján, ha $c \in]0, \delta[$ tetszőleges paraméter, akkor létezik olyan $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \in]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j),$$

továbbá

$$\|(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) - a\| < \delta, \|(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j) - a\| < \delta$$

miatt

$$|(\partial_j \partial_i f)(a) - (\partial_i \partial_j f)(a)| =$$

$$= |(\partial_j\partial_i f)(a) - (\partial_j\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) + (\partial_i\partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j) - (\partial_i\partial_j f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Amiből az $\varepsilon \to 0$ határértékkel a bizonyítandó

$$(\partial_j\partial_i f)(a) = (\partial_i\partial_j f)(a)$$

egyenlőséget kapjuk.

12.45. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor f k-szor folytonosan differenciálható és minden $a \in \Omega$ pontban $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ szimmetrikus k-lineáris leképezés.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$ függvény folytonos az Ω halmazon.
A 12.43 tétel értelmében minden $a \in \Omega$ pontban a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés szimmetrikussága azon múlik, hogy a $((\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f)(a))_{i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,\mathfrak{n}\}}$ parciális deriválatak sorrendje invariáns a permutációkra.
Legyen $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $p \in \{1, \dots, k-1\}$. Ekkor a

$$\partial_{i_{p-1}} \dots \partial_{i_1} f : \Omega \to \mathbb{R}$$

függvényre teljesülnek a 12.44 Schwarz-tétel feltételei, ezért

$$\partial_{i_{p+1}}\partial_{i_p}\partial_{i_{p-1}} \dots \partial_{i_1} f = \partial_{i_p}\partial_{i_{p+1}}\partial_{i_{p-1}} \dots \partial_{i_1} f$$

teljesül, amiből pedig

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_{p+2}}\partial_{i_{p+1}}\partial_{i_p}\partial_{i_{p-1}} \dots \partial_{i_1} f = \partial_{i_k} \dots \partial_{i_{p+1}}\partial_{i_p}\partial_{i_{p+1}}\partial_{i_{p-1}} \dots \partial_{i_1} f$$

következik. Tehát a parciális deriváltak invariánsak az egymás melletti elemek cseréjére. Mivel minden permutáció felírható véges sok egymás utáni elem cseréjének kompozíciójaként, ezért a parciális deriváltak invariánsak a permutációkra.

Kiegészítés. A magasabbrendű derivált szimmetrikussága az előbbinél gyengébb feltételek mellett is garantálható.

12.46. Tétel. *(Young-tétel.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(k)} f$. Ekkor $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ szimmetrikus multilineáris leképezés.*

◊

12.12. Taylor-sorfejtés

12.47. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^{(k)} f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli k-ad fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{k,a} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x) \mapsto T^f_{k,a}(x) \triangleq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!}((\mathrm{D}^{(l)} f)(a))(x-a)^{[l]}$$

polinomot, amit az

$$T^f_{k,a}(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{i_1,\dots,i_l=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f)(a))\,(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_l} - a_{i_l}).$$

alakban is felírhatunk. Ha f végetelenszer differenciálható az $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

12.48. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}((\mathrm{D}^{(i)} f)(a))(b-a)^{[i]} + \frac{1}{(k+1)!}(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}.$$

Bizonyítás. $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon.
Tekintsük a

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad t \mapsto a + t(b-a)$$

függvényt és legyen $\tilde{f} = f \circ \gamma$. Mivel a γ függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, U) \qquad t \mapsto (b-a)$$

teljesül, vagyis $\mathrm{D}\gamma$ konstans függvény, ezért minden $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ esetén $\mathrm{D}^{(p)}\gamma = 0$, vagyis γ végtelenszer differenciálható az $\mathbb{R}$ halmazon. Ezért az $\tilde{f}$ függvény k-szer folytonosan differenciálható a $[0, 1]$ szakaszon, illetve $(k+1)$-szer differenciálható a $]0, 1[$ szakaszon. A 7.30 Taylor sorfejtést alkalmazva az $\tilde{f}$ függvényre a $[0, 1]$ szakaszra a $p = 1$ választással az adódik, hogy létezik olyan $\tilde{\xi} \in]0, 1[$ paraméter, melyre

$$\tilde{f}(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\tilde{f}^{(i)}(0) \cdot (1-0)^i + \frac{1}{(k+1)!}\tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{\xi}) \cdot (1-0)^{k+1},$$

vagyis

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\tilde{f}^{(i)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}\tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{\xi}). \tag{12.3}$$

A közvetett függvény deriválási szabálya alapján minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(\gamma(\tilde{z}))\gamma'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(a + \tilde{z}(b-a))(b-a) = (\mathrm{D}f)(z)(b-a),$$

ahol $z = \gamma(\tilde{z})$. Tegyük fel, hogy valamilyen $p \in \mathbb{N}^+$ számra minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}^{(p)}(\tilde{z}) = ((\mathrm{D}^{(p)} f)(z))(b-a)^{[p]}$$

teljesül. Ha az f függvény $(p+1)$-szer differenciálható a $z_0 \in [a, b]$ pontban, akkor a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \to z_0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)} f)(x) - (\mathrm{D}^{(p)} f)(z_0) - (\mathrm{D}^{(p+1)} f)(z_0)(x - z_0)}{\|x - z_0\|} = 0,$$

ezért ha $x = z_0 + h(b-a)$, ahol $h \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)} f)(z_0 + h(b-a)) - (\mathrm{D}^{(p)} f)(z_0) - h(\mathrm{D}^{(p+1)} f)(z_0)(b-a)}{|h|} = 0.$$

A $\bar{z}_0 = \gamma^{-1}(z_0)$ jelöléssel a fenti egyenletből

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)} f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h)) - (\mathrm{D}^{(p)} f)(\gamma(\tilde{z}_0)) - h(\mathrm{D}^{(p+1)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)}{h} = 0$$

következik. Ezért

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h))(b-a)^{[k]} - (\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k]} - h(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k+1]}}{h} = 0,$$

vagyis

$$\tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{z}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0+h) - \tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0)}{h} = (\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k+1]}.$$

Ezen eredményt beírva a (12.3) képletbe a $\xi = \gamma^{-1}(\tilde{\xi})$ helyettesítéssel a bizonyítandó

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)(b-a)^{[k]} + \frac{1}{(k+1)!}(\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}$$

formula adódik.

12.49. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a,b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a,b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left| f(b) - T^f_{k,a}(b) \right| \le \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(k+1)}f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Bizonyítás. A 12.48 tétel közvetlen következménye.

12.50. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban. Ekkor*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban.
Ha $x \in B_r(a)$, akkor a 12.48 tétel alapján létezik olyan $\xi \in [a,x]$, melyre

$$f(x) - T^f_{k-1,a}(x) = \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)}f)(\xi)(x-a)^{[k]},$$

amiből

$$f(x) - T^f_{k,a}(x) = \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)}f)(\xi)(x-a)^{[k]} - \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)(x-a)^{[k]}$$

következik. Tehát

$$\left| f(x) - T^f_{k,a}(x) \right| \le \frac{1}{k!} \left\| (\mathrm{D}^{(k)}f)(\xi) - (\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \right\| \cdot \|x-a\|^k.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A k-adik derivált a pontbeli folytonossága alapján létezik olyan $\delta \in]0,r[$, hogy minden $z \in B_\delta(a)$ esetén

$$\left\| (\mathrm{D}^{(k)}f)(z) - (\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \right\| < \varepsilon,$$

amiből következik, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\frac{\left| f(x) - T^f_{k,a}(x) \right|}{\|x-a\|^k} \le \frac{1}{k!} \sup_{z\in B_{\delta(a)}} \left\| (\mathrm{D}^{(k)}f)(z) - (\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \right\| \le \varepsilon.$$

Ez pedig éppen bizonyítandó határértéket jelenti.

12.13. Lokális szélsőérték jellemzése

12.51. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Az f *függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
- Az f *függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

12.52. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(a) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$ és minden $x \in B_r(a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$. Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést. Tegyük fel, hogy létezik olyan $v \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre $Av \neq 0$ teljesül, és legyen $q = Av$.
A 12.12 tétel alapján ekkor

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = q.$$

Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $|t| \cdot \|v\| < r$, akkor az $a + tv \in B_r(a)$ tartalmazás miatt

$$f(a+tv) - f(a) \leq 0.$$

Tehát $t \in \left]0, \frac{r}{\|v\|}\right[$ esetén

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \leq 0,$$

illetve $t \in \left]-\frac{r}{\|v\|}, 0\right[$ esetén

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \geq 0.$$

Vagyis az

$$0 \leq \lim_{t \to 0-} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \leq 0$$

egyenlőtlenségekből a $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = q = 0$ ellentmondást kaptuk. Tehát nem létezik olyan v vektor, amire $Av \neq 0$ teljesülne, tehát $A = 0$.
Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek ott lokális maximuma van, vagyis az előző gondolatmenet alapján $(\mathrm{D}(-f))(a) = 0$, amiből $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ adódik.

12.53. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \neq 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*

3. *Ha a* $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ *multilineáris leképezés pozitív definit, akkor az* f *függvénynek szigorú lokális minimuma van az* a *pontban.*
4. *Ha a* $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ *multilineáris leképezés negatív definit, akkor az* f *függvénynek szigorú lokális maximuma van az* a *pontban.*
5. *Ha a* $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ *multilineáris leképezés indefinit, akkor az* f *függvénynek nincs lokális szélsőértéke az* a *pontban.*
6. *Ha* k *páratlan, akkor az* f *függvénynek nincs lokális szélsőértéke az* a *pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \neq 0$. Vezessük be a $Q = (\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ jelölést és az

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x-a\|^k}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a \end{cases}$$

függvényt. Az infinitezimális Taylor-formula alapján $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a)$, vagyis a φ függvény folytonos az a pontban, az a ponton kívül pedig nyilvánvalóan folytonos. A deriváltakra vonatkozó feltételezés alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)\,\|x-a\|^k + \frac{1}{k!}Q(x-a)^{[k]} \tag{12.4}$$

teljesül.
1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $\delta \in \,]0, r[$ olyan szám, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $f(x) \le f(a)$ teljesül. Ekkor a (12.4) egyenlet alapján minden $x \in B_\delta(a)$ pontra

$$\varphi(x)\,\|x-a\|^k + \frac{1}{k!}Q(x-a)^{[k]} \le 0.$$

Legyen $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor. Ekkor minden $t \in \left[0, \dfrac{\delta}{\|v\|}\right[$ esetén az $x = a + tv$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, vagyis az előző egyenlet alapján

$$\varphi(a+tv)\,\|v\|^k\, t^k + \frac{t^k}{k!}Q(v)^{[k]} \le 0,$$

azaz

$$k!\varphi(a+tv)\,\|v\|^k + Q(v)^{[k]} \le 0.$$

Végrehajtva a $t \to 0$ határátmenetet

$$Q(v)^{[k]} \le 0$$

adódik, vagyis Q negatív. A Young-tétel alapján Q szimmetrikus, ezért a $-v$ vektorra felírva a fenti egyenlőtlenséget

$$0 \ge Q(-v)^{[k]} = (-1)^k Q(v)^{[k]}$$

adódik, amiből pedig következik, hogy k páros.
2. Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek lokális maximuma van ott és az 1. pontban igazolt eredmény alapján ekkor Q pozitív leképezés lesz.
3. Tegyük fel, hogy a Q leképezés pozitív definit. A 10.116 tétel alapján ekkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra $Q(v)^{[k]} \ge K\,\|v\|^k$ teljesül. Ekkor a (12.4) egyenlet alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) - \varphi(x)\,\|x-a\|^k = \frac{1}{k!}Q(x-a)^{[k]} \ge \frac{K}{k!}\,\|x-a\|^k\,,$$

vagyis

$$f(x) - f(a) \ge \|x-a\|^k \left(\varphi(x) + \frac{K}{k!}\right).$$

Mivel $\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$, ezért létezik olyan $\delta\in\,]0,r[$, hogy minden $x\in B_\delta(a)\setminus\{a\}$ esetén $|\varphi(x)|<\dfrac{K}{2k!}$. Ekkor minden ilyen x vektorra

$$f(x)-f(a)\geq\|x-a\|^k\left(\varphi(x)+\frac{K}{k!}\right)>\|x-a\|^k\left(-\frac{K}{2k!}+\frac{K}{k!}\right)\geq 0$$

teljesül, vagyis az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.
4. Ha $(\mathrm{D}^kf)(a)$ negatív definit, akkor $(\mathrm{D}^k(-f))(a)$ pozitív definit és a 3. pontban igazolt eredmény alapján ekkor a $-f$ függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban, tehát az f függvénynek szigorú lokális maximuma van ott.
5. Tegyük fel, hogy a Q leképezés indefinit. Legyen $v_1,v_2\in\mathbb{R}^n$ olyan vektor, melyre $Q(v_1)^{[k]}>0$ és $Q(v_2)^{[k]}<0$. Ha $u_i=\dfrac{v_i}{\|v_i\|}$ $(i=1,2)$, akkor a multilinearitás miatt $Q(u_1)^{[k]}>0$ és $Q(u_2)^{[k]}<0$ teljesül. Legyen $\alpha_1=Q(u_1)^{[k]}$ és $\alpha_2=-Q(u_2)^{[k]}$. Ekkor minden $t\in[0,r[$ esetén ha $x_1=a+tu_1$ és $x_2=a+tu_2$, akkor $x_1,x_2\in B_r(a)$, vagyis a (12.4) egyenlet alapján

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(a)&=t^k\left(\varphi(x_1)+\frac{\alpha_1}{k!}\right)\\ f(x_2)-f(a)&=t^k\left(\varphi(x_2)-\frac{\alpha_2}{k!}\right).\end{aligned}$$

Mivel $\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$, ezért létezik olyan $\delta_1,\delta_2\in\,]0,r[$, hogy minden $x\in B_{\delta_1}(a)\setminus\{a\}$ esetén $|\varphi(x)|<\dfrac{\alpha_1}{2k!}$ és minden $x\in B_{\delta_2}(a)\setminus\{a\}$ esetén $|\varphi(x)|<\dfrac{\alpha_2}{2k!}$. Legyen $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Ekkor minden $t\in\,]0,\delta[$ esetén ha $x_1=a+tu_1$ és $x_2=a+tu_2$

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(a)&=t^k\left(\varphi(x_1)+\frac{\alpha_1}{k!}\right)>\frac{t^k\alpha_1}{2k!}>0\\ f(x_2)-f(a)&=t^k\left(\varphi(x_2)-\frac{\alpha_2}{k!}\right)<-\frac{t^k\alpha_2}{2k!}<0.\end{aligned}$$

Tehát az a pont bármely kis sugarú környezetében található olyan x_1 és x_2 vektor melyre $f(x_2)<f(a)<f(x_1)$ teljesül, ezért az f függvénynek nem lehet lokális szélsőértéke az a pontban.
6. Az 1. és a 2. pontból adódik.

12.54. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ és $a\in\operatorname{Dom}f$. Ha az f függvény kétszer differenciálható az a pontban, $(\mathrm{D}f)(a)=0$ és $(\mathrm{D}^{(2)}f)(a)$ indefinit leképezés, akkor azt mondjuk, hogy *a nyeregpontja az f függvénynek.*

12.14. Feltételes szélsőérték

12.55. Tétel. *Legyen $k\in\mathbb{N}^+$, $f:\mathbb{R}^n\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i\in\{1,\dots,k\}$ esetén legyen $g_i:\mathbb{R}^n\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Tekintsük a $H=\bigcap_{i=1}^k g_i^{-1}(0)$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a\in H\cap\operatorname{Dom}f$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i\in\{1,\dots,k\}}$ rendszer lineárisan független. Ekkor, ha az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor egyértelműen léteznek olyan $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ paraméterek, melyekre*

$$(\mathrm{D}f)(a)=\sum_{i=1}^k\alpha_i((\mathrm{D}g_i)(a))$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k\in\mathbb{N}^+$, $f:\mathbb{R}^n\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i\in\{1,\dots,k\}$ esetén legyen $g_i:\mathbb{R}^n\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Definiáljuk a

$$G:\bigcap_{i=1}^k\operatorname{Dom}g_i\to\mathbb{R}^k\qquad x\mapsto(g_1(x),\dots,g_k(x))$$

függvényt és a $H = \overset{-1}{G}(0) \cap \operatorname{Dom} f$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a \in H$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i\in\{1,\dots,k\}}$ rendszer lineárisan független és az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban. Ekkor a

$$(\mathrm{D}G)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 g_1)(a) & (\partial_2 g_1)(a) & \dots & (\partial_n g_1)(a) \\ (\partial_1 g_2)(a) & (\partial_2 g_2)(a) & \dots & (\partial_n g_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 g_k)(a) & (\partial_2 g_k)(a) & \dots & (\partial_n g_k)(a) \end{pmatrix}$$

mátrixnak k lineárisan független sora van, vagyis a sorrangja k. Mivel a mátrix oszloprangja megegyezik a sorranggal, azért a fenti mátrixnak k darab lineárisan független oszlopa van. Az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren használt koordináták átszámozásával elérhető, hogy a $(\mathrm{D}G)(a)$ mátrix utolsó k oszlopa legyen lineárisan független. Legyen $d = \mathfrak{n} - k$ és tekintsük az

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \twoheadrightarrow \mathbb{R}^k \qquad (x_1, x_2) \mapsto G(x_1, x_2)$$

függvényt és az $a = (a_1, a_2)$ pontot. Ebben az esetben alkalmazható az implicitfüggvény tétel, tehát létezik az a_1, a_2 pontnak olyan nyílt Ω_1, Ω_2 környezete, hogy $\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom} G \cap \operatorname{Dom} f$, valamint létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ függvény, hogy minden $x_1 \in \Omega_1$ esetén

$$\mathcal{G}(x_1, \varphi(x_1)) = \mathcal{G}(a_1, a_2) = 0.$$

Ez alapján minden $x_1 \in \Omega_1$ esetén

$$(\partial_1 \mathcal{G})(x_1, \varphi(x_1)) + (\partial_2 \mathcal{G})(x_1, \varphi(x_1)) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(x_1) = 0. \tag{12.5}$$

Továbbá ha $x_1 \in \Omega_1$ és $x_2 \in \Omega_2$ olyan pont, hogy $G(x_1, x_2) = 0$, akkor $x_2 = \varphi(x_1)$. Tekintsük az

$$\mathfrak{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad x_1 \mapsto f(x_1, \varphi(x_1))$$

függvényt. Hogy az $f|_H$ függvénynek feltételes szélsőértéke van az (a_1, a_2) pontban, pontosan azt jelenti, hogy az $\mathfrak{f}$ függvénynek szélsőértéke van az a_1 pontban. Ez utóbbiból

$$(\mathrm{D}\mathfrak{f})(a_1) = (\partial_1 f)(a) + (\partial_2 f)(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a_1) = 0 \tag{12.6}$$

következik. A 12.5 egyenletet alkalmazva az a_1 pontra

$$(\mathrm{D}\varphi)(a_1) = ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_1 \mathcal{G})(a)$$

adódik ami a 12.6 egyenlet felhasználásával az alábbi egyenletre vezet.

$$(\partial_1 f)(a) = (\partial_2 f)(a) ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_1 \mathcal{G})(a)$$

Bevezetve a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdots \lambda_k \end{pmatrix} = (\partial_2 f)(a) ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1}$$

jelölést $(\partial_1 f)(a) = \Lambda(\partial_1 \mathcal{G})(a)$ adódik. Továbbá

$$(\partial_2 f)(a) = (\partial_2 f)(a) ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_2 \mathcal{G})(a) = \Lambda(\partial_2 \mathcal{G})(a)$$

miatt

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(\partial_1 \mathcal{G})(a) & \Lambda(\partial_2 \mathcal{G})(a) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} (\partial_1 \mathcal{G})(a) & (\partial_2 \mathcal{G})(a) \end{pmatrix} = \Lambda(\mathrm{D}\mathcal{G})(a).$$

Tehát tetszőleges $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ index esetén

$$((\mathrm{D}f)(a))_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j ((\mathrm{D}g_j)(a))_i$$

teljesül.

Magyarázat. A fenti tételben szereplő $(\alpha_i)_{i=1,\dots,k}$ számokat *Lagrange-féle multiplikátoroknak* nevezzük.

Kiegészítés. Megemlítjük az alábbi tételt, mely többletfeltételek mellett garantálja a feltételes lokális szélsőérték létezését.

12.56. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f \in C^2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R})$, valamint minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén legyen $g_i \in C^2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R})$ és legyen $H = \bigcap_{i=1}^{k} \overset{-1}{g_i}(0)$. Tegyük fel, hogy az $a \in H$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i\in\{1,\dots,k\}}$ rendszer lineárisan független, valamint $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ olyan paraméterek, melyekre*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k((\mathrm{D}g_i)(a))$$

teljesül.

1. *Ha minden $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\Big(\forall i \in \{1, \dots, k\} : (\mathrm{D}g_i)(a)(x) = 0\Big) \Longrightarrow \left(\mathrm{D}^{(2)}\left(f - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i\right)\right)(a)(x, x) > 0$$

teljesül, akkor az $f|_H$ függvénynek lokális minimuma van az a pontban.

2. *Ha minden $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\Big(\forall i \in \{1, \dots, k\} : (\mathrm{D}g_i)(a)(x) = 0\Big) \Longrightarrow \left(\mathrm{D}^{(2)}\left(f - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i\right)\right)(a)(x, x) < 0$$

teljesül, akkor az $f|_H$ függvénynek lokális maximuma van az a pontban.

◊

13. Metrikus terek

13.1. Metrikus terek topológiája

13.1. Definíció. Az M halmazon értelmezett *metrikának* vagy *távolságfüggvénynek* nevezünk minden olyan

$$d : M \times M \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

függvényt, melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x, y \in M : \ d(x, y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in M : \ d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in M : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Az (M, d) párt *metrikus térnek* nevezzük, ha M halmaz és d metrika az M halmazon.

13.2. Tétel. *Tetszőleges M nem üres halmaz esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & ha \quad x \neq y, \\ 0 & ha \quad x = y \end{cases}$$

metrika, tehát minden nem üres halmazon létezik egy kitüntetett metrika.

Bizonyítás. A metrika definíciójából rögtön adódik az állítás.

13.3. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in M$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in M | \ d(x, y) < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

Megjegyzés. A metrikus terek elméletében számtalanszor fogjuk használni hivatkozás nélkül az alábbi egyszerű, de fontos tényt.

$\Diamond$

13.4. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - d(x, y)[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $x \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$, $y \in B_r(x)$ és $\rho \in]0, r - d(x, y)[$. Ha $z \in B_\rho(y)$, akkor $d(y, z) < \rho$, amiből

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \rho < r$$

következik, azaz $z \in B_r(x)$. Tehát $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$.

13.5. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $M \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in M$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

13.6. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció alapján nyilvánvaló. A második állításhoz vegyük az (M, d) metrikus tér $A_1, \ldots, A_n$ korlátos részhalmazait, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1,\ldots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \ldots, n$ esetén legyen $R_i = r_i + d(x_i, x_1)$. Ekkor minden i számra $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül a metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

13.7. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér. Minden $x \in M$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R = r - d(x,y)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z \in B_R(y)$, akkor $d(z,y) < R = r - d(x,y)$, vagyis $d(x,y) + d(y,z) < r$, amiből pedig $d(x,z) < r$ adódik, vagyis $z \in B_r(x)$.

13.8. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és M nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges véges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i = 1,\dots,n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min\{r_i \mid i = 1,\dots,n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i\in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

13.9. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és M zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ zárt halmazok tetszőleges véges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén $M \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i = \bigcap_{i=1}^{n} (M \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.

3. Legyen $(Z_i)_{i\in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén $M \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$M \setminus \bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcup_{i\in I} (M \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcap_{i\in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i\in I} Z_i$ halmaz zárt.

13.10. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $Z, U \subseteq M$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Az (M, d) metrikus térben legyen $Z \subseteq M$ zárt halmaz és $U \subseteq M$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (M \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (M \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

13.11. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in M$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge\ B_r(x) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

13.12. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

13.13. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in M |\ \exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in M |\ \forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

13.14. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*
1. *$\operatorname{Int} X$ halmaz nyílt;*
2. *$\operatorname{Int} X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. *$\overline{X}$ halmaz zárt;*
4. *$\overline{X}$ az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in M \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq M \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - d(y, z) > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

13.15. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*
1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

13.16. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq M$ zárt halmaz és legyen $x \in M$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq M$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

13.17. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Ekkor*

$$\operatorname{Int} X = M \setminus \overline{M \setminus X},$$
$$\overline{X} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus X).$$

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül. Vagyis $(M \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $x \notin \overline{M \setminus X}$ következik. Fordítva, ha $x \notin \overline{M \setminus X}$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $(M \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $B_r(x) \subseteq X$ következik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. A második egyenlőség következik az elsőből, hiszen

$$M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus X) = M \setminus \left(M \setminus \overline{M \setminus (M \setminus X)}\right) = \overline{M \setminus (M \setminus X)} = \overline{X}.$$

13.18. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = M$.

13.2. Metrikus alterek

13.19. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor $(A, d|_{A \times A})$ is metrikus tér.*

Bizonyítás. A metrika tulajdonságai öröklődnek az M halmazról az A részhalmazára.

13.20. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $(A, d|_{A \times A})$ párt az (M, d) *metrikus tér alterének* nevezzük.

13.21. Tétel. *(Nyílt és zárt halmazok metrikus altérben.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $B \subseteq A$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *A B halmaz pontosan akkor nyílt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül.*
2. *A B halmaz pontosan akkor zárt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $Z \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $B = A \cap Z$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A\times A}$ és legyen $B \subseteq A$. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$B_r^d(x) = \{y \in M|\ d(x,y) < r\}$$
$$B_r^{d'}(x) = \{y \in A|\ d(x,y) < r\}$$

Ekkor nyilván $B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A$.
1. Tegyük fel, hogy B nyílt az (A,d) térben. Ekkor minden $x \in B$ esetén létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r(x)}^{d'}(x) \subseteq B$ teljesül. Legyen

$$U = \bigcup_{x\in B} B_{r(x)}^d(x).$$

Az U halmaz nyílt az (M,d) térben, hiszen nyílt halmazok uniója. Megmutatjuk, hogy $B = A \cap U$ teljesül. Az U definíciója és $B \subseteq A$ alapján a $B \subseteq A \cap U$ tartalmazás nyilvánvaló. Legyen $z \in A \cap U$. Ekkor $z \in A$ és $z \in \bigcup_{x\in B} B_{r(x)}^d(x)$. Vagyis létezik olyan $y \in B$, melyre $z \in B_{r(y)}^d(y)$ teljesül. Mivel $z \in A$, ezért

$$z \in B_{r(y)}^d(y) \cap A = B_{r(y)}^{d'}(y) \subseteq B.$$

Tehát $A \cap U \subseteq B$ is teljesül.
Most tegyük fel, hogy létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül és legyen $x \in B$ tetszőleges. Ha $x \in U$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^d(x) \subseteq U$ teljesül. Ekkor

$$B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A \subseteq U \cap A = B$$

teljesül, vagyis x belső pontja a B halmaznak az (A,d') térben.
2. Az alábbi ekvivalens lépések igazolják az állítást.

$$\begin{aligned}
&B \text{ zárt az } (A,d') \text{ térben } \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\ A \setminus B \text{ nyílt az } (A,d') \text{ térben } \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\ \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } A \setminus B = (A \setminus B) \cap U \ \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\ \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } B = A \setminus ((A \setminus B) \cap U) \ \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\ \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } B = A \cap (M \setminus U) \ \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\ \exists Z \subseteq M \text{ zárt halmaz, melyre } B = A \cap Z
\end{aligned}$$

13.22. Tétel. *(Halmaz lezártja metrikus altérben.) Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A\times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M,d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A,d') metrikus térben. Ekkor minden $B \subseteq A$ halmazra*

$$\tilde{B} = \overline{B} \cap A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A\times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M,d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A,d') metrikus térben. Továbbá minden $x \in A$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$B_r^d(x) = \{y \in M|\ d(x,y) < r\}$$
$$B_r^{d'}(x) = \{y \in A|\ d(x,y) < r\}.$$

Ekkor nyilván $B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A$.
Ha $x \in \tilde{B}$, akkor $x \in A$, valamint minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{d'}(x) \cap B \neq \emptyset$, amiből $B_r^{d'}(x) \subseteq B_r^d(x)$ miatt $B_r^d(x) \cap B \neq \emptyset$ következik, vagyis $x \in \overline{B}$. Vagyis igazoltuk a $\tilde{B} \subseteq \overline{B} \cap A$ tartalmazást.
Fordítva, legyen $x \in \overline{B} \cap A$. Ekkor $x \in A$ és minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^d(x) \cap B \neq \emptyset$. Ha $x \notin \tilde{B}$ teljesülne, akkor létezne olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{d'}(x) \cap B = \emptyset$ teljesülne. Ekkor

$$\emptyset = B_R^{d'}(x) \cap B \subseteq B_R^d(x) \cap B \neq \emptyset.$$

Vagyis létezne $z \in B_R^d(x) \cap B$, $z \notin B_R^{d'}(x) \cap B$ elem. Erre az elemre $z \in B \subseteq A$, $d(x,z) = d'(x,z) < R$ teljesülne, amiből a $z \in B_R^{d'}(x) \cap B$ ellentmondás adódna. Tehát $x \in \tilde{B}$, amivel igazoltuk a $\overline{B} \cap A \subseteq \tilde{B}$ tartalmazást.

13.3. Ekvivalens metrikák

13.23. Definíció. Legyen d_1 és d_2 metrika az M halmazon. Azt mondjuk, hogy *a d_1 és d_2 metrikák ekvivalensek*, ha minden d_1 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_2 metrika szerint is, valamint minden d_2 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_1 metrika szerint is.

Magyarázat. Tehát két metrika pontosan akkor ekvivalens, ha ugyanazok a nyílt halmazok a metrikák szerint.

13.24. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$.*

1. *A*

$$d_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d_p(x, y) \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) \triangleq \max \{ |x_k - y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\} \}$$

leképezés metrika.

2. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a d_p és a d_∞ metrikák ekvivalensek.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A d_p és a d_∞ függvények nyilván szimmetrikusak, és minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\begin{aligned} d_p(x, y) = 0 \quad &\leftrightarrow \quad x = y \\ d_\infty(x, y) = 0 \quad &\leftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

Legyen $x, y, z \in \mathbb{K}^n$. Ekkor a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} d_p(x, z) &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k + y_k - z_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d_p(x, y) + d_p(y, z), \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} d_\infty(x, z) &= \max \{ |x_k - y_k + y_k - z_k| \mid k \in \{1, \dots, n\} \} \leq \\ &\leq \max \{ |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \mid k \in \{1, \dots, n\} \} \leq \\ &\leq \max \{ |x_k - y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\} \} + \max \{ |y_k - z_k| \mid k \in \{1, \dots, n\} \} = \\ &= d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy bármely $p \in [1, \infty[$ esetén a d_p és a d_∞ metrikák ekvivalensek.
Legyen $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz a d_∞ metrika szerint és legyen $x \in U$. Ekkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{d_\infty}(x) \subseteq U$. Ha $z \in B_r^{d_p}(x)$, akkor minden $k \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$|z_k - x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < r$$

teljesül, vagyis $d_\infty(z, x) < r$, amiből $z \in B_r^{d_\infty}(x)$ következik. Tehát a

$$B_r^{d_p}(x) \subseteq B_r^{d_\infty}(x) \subseteq U$$

tartalmazás miatt az x pont belső pontja az U halmaznak a d_p metrika szerint. Ezért az U halmaz a d_p metrika szerint is nyílt.

Legyen $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz a d_p metrika szerint és legyen $x \in U$. Ekkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{d_p}(x) \subseteq U$. Legyen $R = \frac{r}{\sqrt[p]{n}}$ és $z \in B_R^{d_\infty}(x)$. Ekkor

$$d_p(x,z) = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{\sqrt[p]{n}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = r$$

teljesül, vagyis $d_p(z,x) < r$, amiből $z \in B_r^{d_p}(x)$ következik. Tehát a

$$B_R^{d_\infty}(x) \subseteq B_r^{d_p}(x) \subseteq U$$

tartalmazás miatt az x pont belső pontja az U halmaznak a d_∞ metrika szerint. Ezért az U halmaz a d_∞ metrika szerint is nyílt.

13.4. Sorozatok metrikus terekben

13.25. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen (M,d) metrikus tér.

- Az $a : \mathbb{N} \to M$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in M$ az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

13.26. Tétel. *Metrikus térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozatnak legyen $x, y \in M$ a határértéke. Tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $d(a_n, x) < \frac{d(x,y)}{2}$ és $d(a_n, y) < \frac{d(x,y)}{2}$. Amiből az

$$d(x,y) \leq d(x,a_n) + d(a_n,y) < d(x,y)$$

ellentmondás adódik.

Magyarázat. Tehát minden metrikus térben, ha létezik egy sorozatnak határértéke, akkor az egyértelmű.

13.27. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen (M,d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

13.28. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér.

- Az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to M$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to M$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

13.29. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} \{a_n\}\right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, ezért a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

13.30. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $a:\mathbb{N}\to M$ konvergens sorozat, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $|a_n-\lim a|<\varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n)\geq n$, ezért minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $\left|a_{\sigma(n)}-\lim a\right|<\varepsilon$ teljesül, vagyis az $a\circ\sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a\circ\sigma)=\lim a$.

13.31. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér, $A\subseteq M$ és $x\in M$.*

1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a:\mathbb{N}\to A\setminus\{x\}$ sorozat, melyre $\lim a=x$.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a:\mathbb{N}\to A$ sorozatra $\lim a\in A$.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $A\subseteq M$ és $x\in M$.
1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x)\setminus\{x\}\right)\cap A\neq\emptyset.$$

Az 1.39 kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x)\setminus\{x\}\right)\cap A\neq\emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N}\to A\setminus\{x\}$ sorozat, melyre $\lim a=x$, hiszen minden $n\in\mathbb{N}$ számra $d(a_n,x)<\dfrac{1}{n+1}$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $a:\mathbb{N}\to A\setminus\{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a=x$, és legyen $r\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d(a_n,x)<r$, vagyis $a_{N+1}\in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1}\in A\setminus\{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1}\in(B_r(x)\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset.$$

2. Legyen $A\subseteq M$ zárt halmaz, $a:\mathbb{N}\to A$ konvergens sorozat és $\lim a=\alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha\notin A$. Mivel α eleme a nyílt $M\setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha)\subseteq(M\setminus A)$, amiből $B_r(\alpha)\cap A=\emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ esetén $a_n\in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1}\in B_r(\alpha)\cap A=\emptyset$ ellentmondás adódik.
Legyen $A\subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a:\mathbb{N}\to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a\in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha\in\overline{A}\setminus A$. A lezárt definíciója alapján α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a:\mathbb{N}\to A$ sorozat, melyre $\lim a=\alpha$, vagyis az $\alpha\in A$ ellentmondást kapjuk.

13.32. Tétel. *Legyen $n\in\mathbb{N}^+$, $p\in[1,\infty[\,\cup\{\infty\}$, és $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^n$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{K}^n,d_p)$ térben, ha minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén az $a_i=\mathrm{pr}_i\circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i\in\{1,\dots,n\}$ indexre*

$$\mathrm{pr}_i\left(\lim a\right)=\lim(\mathrm{pr}_i\circ a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n\in\mathbb{N}^+$, $p\in[1,\infty[\,\cup\{\infty\}$, és $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^n$ sorozat.
Ha az a sorozat konvergens, akkor legyen $x=\lim a$, $i\in\{1,\dots,n\}$ tetszőleges index és $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a konvergens, ezért létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d_p(a_n,x)<\varepsilon$. Ekkor $|\mathrm{pr}_i(a_n)-\mathrm{pr}_i(x)|<\varepsilon$, vagyis $\lim\left(\mathrm{pr}_i\circ a\right)=\mathrm{pr}_i\left(\lim a\right)$.
Most tegyük fel, hogy minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i\circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x=\left(\lim\left(\mathrm{pr}_1\circ a\right),\dots,\lim\left(\mathrm{pr}_n\circ a\right)\right)\in\mathbb{K}^n$. Minden $i\in\{1,\dots,n\}$

esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i < n$ természetes számra $|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. Legyen $N = \max\{N_i |\ i \in \{1, \dots, n\}\}$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra a $p \neq \infty$ esetben

$$d_p(a_n, x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i|^p} < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^p} \leq \varepsilon \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^p}} \leq n,$$

a $p = \infty$ esetben pedig

$$d_\infty(a_n, x) = \max\{|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\} < \frac{\varepsilon}{n} \leq n$$

teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az a sorozat konvergens.

13.5. Cauchy-sorozatok

13.33. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ d(a_n, a_m) < \varepsilon\right).$$

13.34. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $a : \mathbb{N} \to M$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < 1$ teljesül, vagyis minden $N < n$ természetes szám esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a$ véges sok korlátos halmaz uniója, ezért korlátos.

13.35. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat, melynek határértéke $A \in M$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $N < n, m$ természetes szám esetén

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, A) + d(a_m, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

13.36. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \to M$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_1 < n, m$ esetén $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$ és $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d(a_n, A) \leq d(a_n, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

13.37. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *teljes*, ha M teljes halmaz.

13.38. Tétel. *Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $X \subseteq M$ zárt halmaz. Ekkor az $(X, d|_{X \times X})$ metrikus altér is teljes.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) teljes metrikus tér, $X \subseteq M$ zárt halmaz, és legyen $a : \mathbb{N} \to X$ Cauchy-sorozat. Mivel M teljes, ezért létezik $\lim a$ és mivel X zárt, ezért $\lim a \in X$. Vagyis minden $a : \mathbb{N} \to X$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke eleme az X halmaznak.

13.6. Kompakt halmazok metrikus terekben

13.39. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér.

- Az $X \subseteq M$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az M térnek.
- Azt mondjuk, hogy az (M, d) *metrikus tér kompakt*, ha M kompakt halmaz.

13.40. Tétel. *Metrikus térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

Bizonyítás. A kompaktság definíciójának közvetlen következménye.

13.41. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.*

1. *Ekkor X korlátos és zárt.*
2. *Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy X korlátos. Legyen $p \in M$ tetszőleges pont. Mivel $X \subseteq M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} B_n(p)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $X \subseteq \bigcup_{n \in I} B_n(p)$. Ekkor az $r = \max\{I\}$ számra $X \subseteq B_r(p)$ teljesül.
Most igazoljuk, hogy X zárt. Ehhez legyen $p \in M \setminus X$ tetszőleges pont. Minden $x \in X$ pont esetén ha $r(x) = \dfrac{d(x,p)}{2}$, akkor $B_{r(x)}(x) \cap B_{r(x)}(p) = \emptyset$. Mivel

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} B_{r(x)}(x)$$

az X kompakt halmaz nyílt fedése, ezért létezik olyan $H \subseteq X$ véges halmaz, melyre

$$X \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{r(x)}(x)$$

teljesül. Legyen $r = \min\{r(x) |\ x \in H\}$. Ekkor minden $x \in H$ esetén $B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) = \emptyset$, vagyis

$$X \cap B_r(p) \subseteq \left(\bigcup_{x \in H} B_{r(x)}(x) \right) \cap B_r(p) = \bigcup_{x \in H} \left(B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) \right) = \emptyset.$$

Ez azt mutatja, hogy $B_r(p) \subseteq M \setminus X$. Tehát $M \setminus X$ halmaz minden pontja belső pont, ezért $M \setminus X$ nyílt halmaz, vagyis X zárt.
2. Legyen $Y \subseteq X$ zárt halmaz és legyen $(U_i)_{i \in I}$ az Y halmaz nyílt fedése és legyen $V = M \setminus Y$. Ekkor $V, (U_i)_{i \in I}$ az X halmaz nyílt fedése ($X \subseteq V \cup \bigcup_{i \in I} U_i$), ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, melyre $X \subseteq V \cup \bigcup_{i \in I'} U_i$. A V halmaz definíciójából adódik, hogy ekkor $Y \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i$ is teljesül, vagyis az Y halmaz kompakt. Ha $Y \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor az első pont alapján zárt.

13.42. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér és $(K_i)_{i \in I}$ az M kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $(K_i)_{i\in I}$ az M kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i,j\in I$ esetén létezik olyan $k\in I$, hogy $K_k\subseteq K_i\cap K_j$ teljesül, valamint rögzítsünk egy $i_0\in I$ indexet. Minden $i\in I$ esetén legyen $U_i=M\setminus(K_i\cap K_{i_0})$, mely nyílt halmaz. A bizonyítandó állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\bigcap\limits_{i\in I}K_i=\emptyset$. Ekkor

$$\bigcup_{i\in I}U_i=\bigcup_{i\in I}M\setminus(K_i\cap K_{i_0})=M\setminus\left(\bigcap_{i\in I}(K_i\cap K_{i_0})\right)=M,$$

vagyis $K_{i_0}\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}U_i$. Mivel K_{i_0} kompakt, ezért létezik olyan $I'\subseteq I$ véges halmaz, hogy $K_{i_0}\subseteq\bigcup\limits_{i\in I'}U_i$. Ebből

$$K_{i_0}\subseteq\bigcup_{i\in I'}U_i=\bigcup_{i\in I'}M\setminus(K_i\cap K_{i_0})=M\setminus\left(\bigcap_{i\in I'}(K_i\cap K_{i_0})\right)$$

adódik. A feltevés miatt véges sok K_i kompakt halmaz metszete sem üres, tehát létezik $j\in I$, melyre $K_j\subseteq\bigcap\limits_{i\in I'}(K_i\cap K_{i_0})$. Erre a halmazra a fenti tartalmazás alapján

$$K_j\subseteq K_{i_0}\subseteq M\setminus\left(\bigcap_{i\in I'}(K_i\cap K_{i_0})\right)\subseteq M\setminus K_j$$

következik, ami a nyilvánvaló $K_j\subseteq M\setminus K_j$ ellentmondásra vezet.

13.43. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (M,d) metrikus tér *lokálisan kompakt*, ha minden pontjának létezik kompakt környezete.

13.44. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A\subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *relatív kompakt*, ha létezik olyan $K\subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A\subseteq K$ teljesül.

13.45. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A\subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha $\overline{A}$ kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $A\subseteq M$.
Ha A relatív kompakt, akkor létezik olyan $K\subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A\subseteq K$ teljesül. Mivel ekkor K zárt, ezért $\overline{A}\subseteq K$ is teljesül. Mivel kompakt halmaz zárt részhalmaza is kompakt, ezért $\overline{A}$ kompakt.
Ha $\overline{A}$ kompakt, akkor $A\subseteq\overline{A}$ miatt A relatív kompakt.

13.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

13.46. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $K\subseteq M$ kompakt halmaz. Ekkor minden $a:\mathbb{N}\to K$ sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme a K halmaznak.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $K\subseteq M$ kompakt halmaz és $a:\mathbb{N}\to K$ sorozat. Ekkor K korlátos és zárt halmaz. Definiáljuk minden $n\in\mathbb{N}$ esetén az $A_n=\overline{\{a_k\ |k\geq n\}}$ halmazt. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-tétel feltételei, ezért létezik $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\neq\emptyset$. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $x\in\overline{\{a_k\ |k\geq n\}}$ teljesül. Ebből a lezárt definíciója alapján következik, hogy minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ és $n\in\mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x)\cap\{a_k\ |k\geq n\}\neq\emptyset$, ezért létezik olyan $k\geq n$, melyre $a_k\in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0)=\min\{k\in\mathbb{N}\mid a_k\in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1)=\min\left\{k\in\mathbb{N}\mid\sigma(n)<k\ \wedge\ a_k\in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a\circ\sigma$ sorozat konvergens, határértéke x. Ekkor $\lim(a\circ\sigma)\in\overline{K}$, vagyis a K halmaz zártsága miatt $\lim(a\circ\sigma)\in K$.

13.47. Tétel. *(Lebesgue-lemma.) Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor a K halmaz bármely $(U_i)_{i\in I}$ nyílt befedéséhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in K$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. A bizonyítandó állítás szerint

$$\forall (U_i)_{i\in I} \text{ nyílt befedéséhez: } \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in K \exists i \in I: \ B_r(x) \subseteq U_i.$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$\exists (U_i)_{i\in I} \text{ nyílt befedés: } \forall r \in \mathbb{R}^+ \exists x \in K \forall i \in I: \ B_r(x) \setminus U_i \neq \emptyset.$$

Legyen $(U_i)_{i\in I}$ a fenti tulajdonságokkal bíró nyílt befedése a K halmaznak. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{x \in K |\ \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus U_i \neq \emptyset\right\} \neq \emptyset,$$

vagyis az 1.39 kiválasztási axióma miatt

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in K |\ \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus U_i \neq \emptyset\right\} \neq \emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak. Ekkor a egy olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall i \in I: \ B_{\frac{1}{n+1}}(a_n) \nsubseteq U_i.$$

Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ olyan konvergens részsorozat, melyre $\lim(a \circ \sigma) = x \in K$ teljesül. Mivel $x \in K$ ezért létezik olyan $i_0 \in I$, hogy $x \in U_{i_0}$, valamint az U_{i_0} halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U_{i_0}$. Ekkor az $\frac{r}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra $d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2}$. Megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $n > N$ és $\frac{1}{n+1} < \frac{r}{2}$ teljesül, akkor a $B_{\frac{1}{\sigma(n)+1}}(a_{\sigma(n)}) \subseteq U_{i_0}$ ellentmodást kapjuk. Legyen ugyanis $z \in B_{\frac{1}{\sigma(n)+1}}(a_{\sigma(n)})$ tetszőleges. Ekkor

$$d(z, a_{\sigma(n)}) < \frac{1}{\sigma(n)+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{r}{2},$$

a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$d(z,x) \leq d(z, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

vagyis $z \in B_r(x) \subseteq U_{i_0}$.

13.48. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. A bizonyítandó állítás szerint

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \exists H \subseteq K: \ |H| < \infty \ \wedge \ K \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x).$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ \forall H \subseteq K: \ |H| < \infty \ \to K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset.$$

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ egy olyan szám, melyre igaz, hogy minden $H \subseteq K$ véges részhalmaz esetén

$$K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x) \neq \emptyset.$$

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $a : \mathbb{N} \to K$ sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén $d(a_n, a_m) \geq r$ teljesül. A K halmaz nem üres, tehát létezik eleme, legyen $a_0 \in K$. Ekkor a $H = \{a_0\}$ halmaz véges, vagyis $K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x) \neq \emptyset$, legyen $a_1 \in K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x)$. Ekkor a $H = \{a_0, a_1\}$ halmaz nem üres és az előző gondolatmenet alapján tudunk $a_2 \in K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x)$ elemet választani. Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió segítségével lehet egy $a : \mathbb{N} \to K$ sorozatot konstruálni. Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ olyan konvergens részsorozat, melyre $\lim(a \circ \sigma) = x \in K$ teljesül. Ekkor az $\frac{r}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ $d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2}$. Vagyis bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $N < n, m$, $m \neq n$ esetén az

$$r \leq d(a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(n)}) \leq d(a_{\sigma(m)}, x) + d(x, a_{\sigma(n)}) < r$$

ellentmondást kapjuk.

13.49. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. A 13.46 tétel alapján ha $A \subseteq M$ kompakt halmaz, akkor minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.
Most tegyük fel, hogy A olyan halmaz, hogy minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak és legyen $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ az A halmaz egy nyílt fedése. Ekkor a 13.47 Lebesgue-lemma alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in A$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül. Az előző állítás alapján ehhez az r számhoz létezik olyan $H \subseteq A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x)$ teljesül. Ekkor minden $x \in H \subseteq A$ ponthoz van olyan $i(x) \in I$ index, amelyre $B_r(x) \subseteq U_{i(x)}$ teljesül. Tehát az eddigiek alapján

$$A \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x) \subseteq \bigcup_{x \in H} U_{i(x)},$$

ami az A halmaz véges nyílt fedése.

13.50. Tétel. *Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \to K$ Cauchy-sorozat. A Bolzano–Weierstrass-tétel alapján ekkor létezik az a sorozatnak olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme a K halmaznak. Viszont egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata ((13.36) tétel). Tehát az a Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke a K halmazban van, vagyis a K halmaz teljes.

13.8. Szeparábilis metrikus terek

13.51. Definíció. Az (M, d) metrikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha létezik olyan $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup_{n \in I} U_n$ teljesül.

13.52. Tétel. *Egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható sűrű halmaz.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) szeparábilis metrikus tér és legyen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $U_n\subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega\subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I\subseteq\mathbb{N}$, hogy $\Omega=\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ teljesül. Nyilván feltehető, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $U_n\neq\emptyset$. Ekkor $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}U_n\neq\emptyset$, legyen $a\in\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}U_n\neq\emptyset$. Ekkor $a:\mathbb{N}\to M$ olyan sorozat, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ számra $a_n\in U_n$ teljesül. Legyen $D=\operatorname{Ran}a$. A D halmaz nyilván megszámlálható, most igazoljuk, hogy sűrű, azaz $\overline{D}=M$. Legyen $x\in M$ tetszőleges pont és $r\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Igazoljuk, hogy $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$. Legyen $I\subseteq\mathbb{N}$ olyan, hogy $B_r(x)=\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ teljesül. Ekkor minden $i\in I$ esetén $a_i\in U_i\subseteq B_r(x)$, valamint $a_i\in D$, tehát $a_i\in B_r(x)\cap D$, ezért $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$, azaz $x\in\overline{D}$.
Most tegyük fel, hogy (M,d) metrikus tér és $D\subseteq M$ megszámlálható sűrű halmaz. Legyen $\alpha:\mathbb{N}\to D$ szürjekció, valamint $\beta:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+$ és $\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ bijekció. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$U_n=B_{\beta(\gamma(n)_1)}(\alpha(\gamma(n)_2)).$$

Az $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer nyilván olyan, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $U_n\subseteq M$ nyílt halmaz. Legyen $\Omega\subseteq M$ tetszőleges nyílt halmaz. Ehhez definiáljuk az $I=\{n\in\mathbb{N}|\ U_n\subseteq\Omega\}$ indexhalmazt. Megmutatjuk, hogy $\Omega=\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ teljesül. Mivel $\bigcup\limits_{n\in I}U_n\subseteq\Omega$, ezért csak az $\Omega\subseteq\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ tartalmazást kell igazolnunk. Ehhez legyen $x\in\Omega$ tetszőleges pont. Mivel Ω nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\rho\in\mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(x)\subseteq\Omega$. Legyen $r\in\left]0,\frac{\rho}{2}\right[\cap\mathbb{Q}^+$. Mivel D sűrű, ezért $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$, most legyen $z\in B_r(x)\cap D$ és tekintsük az

$$i=\beta^{-1}(r),\quad j=\min\overset{-1}{\alpha}(z)\quad\text{és}\quad n=\gamma^{-1}(i,j)$$

számokat. Ekkor $U_n=B_r(z)$. Tehát ha $y\in U_n$, akkor $y\in B_r(z)$, valamint $d(y,z)<r$ és $d(z,x)<r$ miatt $d(x,y)<2r<\rho$, azaz $y\in B_\rho(x)\subseteq\Omega$. Ez azt jelenti, hogy $U_n\subseteq\Omega$, vagyis $n\in I$. Mivel $x\in B_r(z)=U_n$, ezért $x\in\bigcup\limits_{n\in I}U_n$. Ezzel igazoltuk a $\Omega\subseteq\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ tartalmazást.

13.53. Tétel. *Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és $p\in[1,\infty[$. Az $(\mathbb{R}^n,d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ terek szeparábilisek.*

Bizonyítás. Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és $D=\mathbb{Q}^n$. Ekkor D nyilván megszámlálható halmaz, ezért ha sűrű lenne, akkor az előző tétel értelmében a tér szeparábilis volna. Megmutatjuk, hogy a D halmaz sűrű. Legyen $p\in[1,\infty[$ és tekintsük az $(\mathbb{R}^n,d_p)$ teret. Legyen $x\in\mathbb{R}^n$ és $r\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén legyen $a_i\in\left]x_i,x_i+\frac{r}{\sqrt[p]{n}}\right[\cap\mathbb{Q}$ és tekintsük az $a=(a_1,\dots,a_n)$ elemet. Ekkor

$$d(a,x)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n(a_i-x_i)^p}<\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n\frac{r^p}{n}}=\sqrt[p]{r^p}=r,$$

vagyis $a\in B_r(x)$, valamint $a\in D$, ezért $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$ minden $r\in\mathbb{R}^+$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy D sűrű a $(\mathbb{R}^n,d_p)$ térben.
Az $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ térben legyen $x\in R^n$ és $r\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén legyen $a_i\in\,]x_i,x_i+r[\cap\mathbb{Q}$ és tekintsük az $a=(a_1,\dots,a_n)$ elemet. Ekkor

$$d(a,x)=\max\{|a_i-x_i|\,|\ i\in\{1,\dots,n\}\},<r$$

vagyis $a\in B_r(x)$, valamint $a\in D$, ezért $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$ minden $r\in\mathbb{R}^+$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy D sűrű a $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ térben.

13.9. Teljesen korlátos halmazok

13.54. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A\subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljesen korlátos*, ha minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X\in A$ véges halmaz, melyre $A\subseteq\bigcup\limits_{x\in X}B_\varepsilon(x)$ teljesül.
Az (M,d) metrikus teret teljesen korlátosnak nevezzük, ha M teljesen korlátos halmaz.

13.55. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$.
A teljesen korlátosság definíciója miatt csak azt kell megmutatni, hogy ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \subseteq M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül, akkor A teljesen korlátos. Ehhez tegyük fel, hogy A olyan nem üres halmaz, melyre teljesül, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists X \in M: \ X \text{ véges és } A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x).$$

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az A halmaz tulajdonsága alapján létezik $X \subseteq M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_{\frac{r}{2}}(x)$. Legyen

$$X' = \left\{x \in X |\ B_{\frac{r}{2}}(x) \cap A \neq \emptyset\right\}.$$

Mivel X' is véges halmaz, ezért valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $X' = \{x_1, \dots, x_n\}$. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre legyen $x_i' \in B_{\frac{r}{2}}(x_i) \cap A$ tetszőleges pont és tekintsük az $Y = \{x_1', \dots, x_n'\} \subseteq A$ halmazt. Ha $a \in A$ tetszőleges pont, akkor létezik olyan $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $a \in B_{\frac{r}{2}}(x_i)$. Mivel $d(a, x_i) < \dfrac{r}{2}$ és $d(x_i, x_i') < \dfrac{r}{2}$, ezért $a \in B_r(x_i')$. Vagyis $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i')$, tehát A teljesen korlátos.

13.56. Tétel. *(Teljesen korlátos halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos.*
2. *Véges sok teljesen korlátos halmaz uniója is teljesen korlátos.*
3. *Metrikus térben minden teljesen korlátos halmaz korlátos.*

Bizonyítás. Az 1. és a 2. pont az előző tétel alapján nyilvánvaló.
3. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ha $A = \emptyset$, akkor nyilván korlátos. Tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$. Ekkor létezik olyan $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ halmaz, hogy $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_1(x_i)$. Legyen $R = \max\{d(x_1, x_j) |\ 1 < j \leq n\}$. Tetszőleges $a \in A$ ponthoz van olyan $i \in \{1, \dots, n\}$ index, hogy $a \in B_1(x_i)$. Ekkor $d(a, x_i) < 1$ és $d(x_1, x_i) \leq R$ miatt $d(a, x_1) < R + 1$, azaz $a \in B_{R+1}(x_1)$. Ezek alapján $A \subseteq B_R(x_1)$, vagyis A korlátos.

13.57. Tétel. *Minden kompakt halmaz teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $A \subseteq \bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a)$, ezért az A halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $X \subseteq A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{a\in X} B_\varepsilon(a)$ teljesül, tehát A teljesen korlátos.

13.58. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat. Ekkor A teljesen korlátos halmaz.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat. Ha $A = \emptyset$, akkor nyilván teljesen korlátos, ezért feltehető, hogy $A \neq \emptyset$. Indirekt módon tegyük fel, hogy A nem teljesen korlátos. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $H \subseteq A$ véges halmazra $A \not\subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x)$. Mivel az A halmaz nem üres, tehát létezik eleme, legyen $a_0 \in A$. Ekkor a $H = \{a_0\}$ halmaz véges, vagyis $A \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset$, legyen

$a_1 \in A \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x)$. Ekkor a $H = \{a_0, a_1\}$ halmaz véges és az előző gondolatmenet alapján tudunk egy $a_2 \in A \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ elemet választani. Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió segítségével lehet egy olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatot konstruálni, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B_r(a_k)$$

teljesül. Ebből következik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, a_m) \geq r$.
Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to A$ olyan részsorozat, mely Cauchy-sorozat. Ekkor az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n < m$ természetes számra $d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) < r$. Ez viszont ellentmondásban van a sorozat $d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) \geq r$ tulajdonságával.

13.59. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz és $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Legyen $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre $\lim \alpha = 0$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$ teljesül. (Például $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$.)
Először legyen $A_0 = A$. Mivel A_0 teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_0 \subseteq A_0$ véges halmaz, hogy $A_0 \subseteq \bigcup_{x\in H_0} B_{\alpha_0}(x)$. Minden $x \in H_0$ esetén legyen

$$N(x) = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_0}(x) \cap A_0\}.$$

Ekkor van olyan $x_0 \in H_0$, melyre az $N(x_0)$ halmaz végtelen. Legyen $N_0 = N(x_0)$ és

$$\sigma(0) = \min N_0.$$

Most legyen $A_1 = A_0 \cap B_{a_0}(x_0)$. Mivel A_1 teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_1 \subseteq A_1$ véges halmaz, hogy $A_1 \subseteq \bigcup_{x\in H_1} B_{\alpha_1}(x)$. Minden $x \in H_1$ esetén legyen

$$N(x) = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_1}(x) \cap A_1\}.$$

Ekkor van olyan $x_1 \in H_1$, melyre az $N(x_1)$ halmaz végtelen. Legyen $N_1 = N(x_1)$ és

$$\sigma(1) = \min\left(N_1 \cap [\sigma(0) + 1, \infty[\right).$$

Ha valamilyen $i \in \mathbb{N}$ számra már definiáltuk az A_i halmazt, az x_i pontot és a $\sigma(i)$ értéket, akkor legyen $A_{i+1} = A_i \cap B_{\alpha_i}(x_i)$. Mivel A_{i+1} teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_{i+1} \subseteq A_{i+1}$ véges halmaz, hogy $A_{i+1} \subseteq \bigcup_{x\in H_{i+1}} B_{\alpha_{i+1}}(x)$. Minden $x \in H_{i+1}$ esetén legyen

$$N(x) = \left\{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_{i+1}}(x) \cap A_{i+1}\right\}.$$

Ekkor van olyan $x_{i+1} \in H_{i+1}$, melyre az $N(x_{i+1})$ halmaz végtelen. Legyen $N_{i+1} = N(x_{i+1})$ és

$$\sigma(i+1) = \min\left(N_{i+1} \cap [\sigma(i) + 1, \infty[\right).$$

Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételével lehet olyan

$$N : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad x : \mathbb{N} \to M, \qquad \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

függvények létezését igazolni, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén N_i végtelen halmaz és

$$N_{i+1} \subseteq N_i, \quad x_{i+1} \in B_{\alpha_i}(x_i), \quad \sigma(i) < \sigma(i+1), \quad a_{\sigma_{i+1}} \in B_{\alpha_{i+1}}(x_{i+1}).$$

Most igazoljuk, hogy $x : \mathbb{N} \to M$ Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a $\sum_n \alpha_n$ sor konvergens és $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n$ számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $N < n, m$. Ekkor

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-n} d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) < \sum_{k=1}^{m-n} \alpha_{n+k-1} = \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon,$$

vagyis x Cauchy-sorozat.
Végül megmutatjuk, hogy $a \circ \sigma$ Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $\lim \alpha = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < n$ esetén $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Mivel x Cauchy-sorozat az eddigiek alapján, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_2 < n, m$ esetén $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$, valamint $N < n, m$ tetszőleges természetes szám. Ekkor $n \leq \sigma(n)$ és $m \leq \sigma(m)$ miatt

$$d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) \leq d(a_{\sigma(n)}, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_{\sigma(m)}) < \alpha_n + \frac{\varepsilon}{3} + \alpha_m < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

tehát $a \circ \sigma$ Cauchy-sorozat.

13.60. Tétel. *(Hausdorff-tétel.) Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden benne haladó sorozatnak van olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. A 13.59 és a 13.58 tétel következménye.

13.61. Tétel. *Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljesen korlátos és teljes.*

Bizonyítás. Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes a 13.50 tétel alapján és teljesen korlátos a 13.57 tétel miatt. Most legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ teljesen korlátos teljes halmaz. Továbbá legyen $a : \mathbb{N} \to K$ tetszőleges sorozat. Mivel K teljesen korlátos, ezért a 13.59 tétel miatt az a sorozatnak van Cauchy-részsorozata. Mivel a K halmaz teljes, ezért ennek a Cauchy-részsorozatnak van határértéke a K halmazban. Tehát létezik olyan konvergens részsorozata az a sorozatnak, mely határértéke a K halmazban van. Ezért a 13.49 Bolzano–Weierstrass-tétel miatt K kompakt.

13.10. Függvények metrikus terek között

13.62. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f *függvény határértéke az a pontban* $A \in M'$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

13.63. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény, az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in M'$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, $a \in M$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in M'$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$0 < d(x, a) < \delta_A \;\to\; d'(f(x), A) < \frac{d'(A, B)}{2}$$

$$0 < d(x,a) < \delta_B \;\to\; d'(f(x),B) < \frac{d'(A,B)}{2}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre a

$$d'(A,B) \le d'(A, f(x)) + d'(f(x), B) < d'(A,B)$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

13.64. Definíció. (A lim *művelet.*) Legyen (M,d) és (M',d') topologikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ jelöli.

13.65. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és a $z \in M$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $z \in M$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_z f = F \in M'$ határérték. Legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \; 0 < d(x,z) < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x),F) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), F) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = F$.
Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ két olyan tetszőleges sorozat, mely a z ponthoz konvergál, valamint legyen

$$a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in M'$ pont, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim\limits_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}\,,\; d'(f(x),A) \ge \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}\,,\; d'(f(x),A) \ge \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), A) \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), A) \ge \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

13.66. Definíció. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az f *függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az f *függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.
A $C(M, M')$ szimbólum jelöli az $M \to M'$ folytonos függvények halmazát.

13.67. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, és $z \in \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos a z pontban és legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Az f függvény z pontbeli folytonossága miatt tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez, létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ d(x, z) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(z)$.
Tegyük fel, hogy minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel, azonban az f függvény mégsem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \operatorname{Dom} f \cap B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Big\{ x \in \operatorname{Dom} f |\ x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \Big\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ x \in \operatorname{Dom} f |\ x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \Big\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

13.68. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : && 0 < d(x, a) < \delta \quad \to \quad d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \\
&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : && d(x, a) < \delta \quad \to \quad d'(f(x), f(a)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

13.69. Tétel. *Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér, $\varphi : M_1 \to M_2$ folytonos függvény és $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Ekkor*

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)).$$

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér, $\varphi : M_1 \to M_2$ folytonos függvény és $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra az

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

egyenletből

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)) \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

adódik, amiből az $x \leftrightarrow a_n$ és $y \leftrightarrow b_n$ szerepcserével

$$|d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))| \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

következik. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján ezért

$$\lim_{n\to\infty} |d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))| = 0,$$

vagyis

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))$$

teljesül.

13.70. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér, valamint $a, b : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(\lim a, \lim b)$$

teljesül.

Bizonyítás. Ehhez elég a 13.69 tételt használni az $(M_1, d_1) = (M_2, d_2) = (M, d)$ és a $\varphi = \mathrm{id}_M$ szereposztással.

13.71. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) és (M_3, d_3) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_b g = c$ és a torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \mathrm{Dom}\, g$;*
2. *$b \in \mathrm{Dom}\, g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) és (M_3, d_3) metrikus tér, $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_b g = c$ és a torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.
Először tegyük fel, hogy $b \notin \mathrm{Dom}\, g$. A $\lim\limits_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim\limits_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek és $g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) = g\left(B_{\delta'}(b)\right)$ miatt

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.
Most tegyük fel, hogy $b \in \mathrm{Dom}\, g$ és g folytonos a b pontban. A g függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b)\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim\limits_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.

13.72. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ és $K = \operatorname{Dom} f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to M_2$ folytonos függvény és $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_\delta(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup\limits_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to M_2$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq M_2$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq M_2$ zárt halmaz. Ekkor $M_2 \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(M_2 \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(M_1 \setminus \overset{-1}{f}(M_2 \setminus A)\right) = K \cap (M_1 \setminus (U \cap K)) = K \cap (M_1 \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq M_2$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = M_1 \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz. Ekkor $M_2 \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(M_2 \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(M_1 \setminus \overset{-1}{f}(M_2 \setminus A)\right) = K \cap (M_1 \setminus (Z \cap K)) = K \cap (M_1 \setminus Z)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq M_2$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = M_1 \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

13.73. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*

2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

13.74. Tétel. *(Egyenlőség folytatásának az elve.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f, g : M_1 \to M_2$ folytonos függvény. Ha valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül, akkor $f|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$ is teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f, g : M_1 \to M_2$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül és legyen $x \in \overline{U} \setminus U$ tetszőleges pont. Ekkor x torlódási pontja az U halmaznak, tehát létezik olyan $a : \mathbb{N} \to U$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(x).$$

13.75. Tétel. *Metrikus terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen (M_i, d_i) metrikus tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$, $g : M_2 \twoheadrightarrow M_3$ folytonos függvény, és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g : \quad d_2(y, f(a)) < \delta_g \;\Rightarrow\; d_3(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) = d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

13.76. Definíció. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \to M_2$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

13.77. Tétel. *Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ bijekció. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az f^{-1} függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $\left(\overset{-1}{f^{-1}}\right)(U) \subseteq M_2$ nyílt halmaz, azaz $f(U) \subseteq M_2$ nyílt halmaz, vagyis amikor f nyílt.

13.11. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

13.78. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a folytonosság topologikus jellemzése ((13.72) tétel) alapján minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i\in I}(V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i,$$

ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in J} f(V_i) = \bigcup_{i\in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

13.79. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 13.78 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a 3.22 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

13.80. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \to M'$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy a (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek homeomorfak*, ha létezik $f : M \to M'$ homeomorfizmus.

13.81. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos injektív függvény és legyen $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz. Ekkor $Z \cap K$ a K kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt. Felhasználva, hogy kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt, valamint az

$$\left(\overset{-1}{f^{-1}}\right)(Z) = f(Z) = f(Z \cap K)$$

egyenlőséget, az adódik, hogy minden Z zárt halmazra a $\left(\overset{-1}{f^{-1}}\right)(Z)$ halmaz zárt, tehát a 13.72 tétel alapján f^{-1} folytonos függvény.

13.82. Tétel. *Ha (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor minden $f : M_1 \to M_2$ folytonos bijekció homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, (M_2, d_2) metrikus tér és legyen $f : M_1 \to M_2$ folytonos bijekció. Ekkor a 13.78 tétel alapján M_2 kompakt tér, és a 13.81 állítás alapján az f^{-1} függvény is folytonos.

13.12. Egyenletesen folytonos függvények

13.83. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d_1(x, y) < \delta \ \to \ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

13.84. Tétel. *Metrikus terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(d_1(x,y) < \delta \ \to \ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

13.85. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H\right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $d_1(x,y) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in K$ olyan, melyre $d_1(x,y) < \delta$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d_1(y,p) \le d_1(y,x) + d_1(x,p) < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \le \delta(p),$$

vagyis

$$\begin{aligned} d_1(x,p) < \delta(p) \quad &\to \quad d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d_1(y,p) < \delta(p) \quad &\to \quad d_2(f(y), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ezekből viszont a bizonyítandó

$$d_2(f(x), f(y)) \le d_2(f(x), f(p)) + d_2(f(p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

egyenlőtlenség következik.

13.86. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Tegyük fel, hogy (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : \overline{\operatorname{Dom} f} \to M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. A jelölések egyszerűsítése végett legyen $X = \operatorname{Dom} f$.
1. Ha $g_1, g_2 : \overline{X} \to M_2$ olyan folytonos függvény, melyre $g_1|_X = g_2|_X$ teljesül, akkor az egyenlőség folytatásának az elve alapján ((13.74) tétel) $g_1|_{\overline{X}} = g_2|_{\overline{X}}$, azaz $g_1 = g_2$.
2. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor az $f \circ a$ sorozat konvergens. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y_1, y_2 \in X$

pontra $d_1(y_1, y_2) < \delta$ esetén $d_2(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon$ teljesül. Mivel az a sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat is, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n, m$ természetes számra $d_1(a_n, a_m) < \delta$. Ekkor viszont minden $N < n, m$ természetes számra $d_2(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$. Mivel az (M_2, d_2) tér teljes, ezért az $f \circ a$ Cauchy-sorozat konvergens.
3. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont és $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = \lim b = x$ teljesül. Fésüljük össze az a és b sorozatot az alábbi módon.

$$c : \mathbb{N} \to X \qquad n \mapsto \begin{cases} a_{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_{\frac{n-1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor nyilván $\lim c = x$, továbbá az előző pont miatt létezik a $\lim f \circ c$ határérték. Mivel $f \circ a$ és $f \circ b$ részsorozata az $f \circ b$ sorozatnak, ezért $\lim f \circ c = \lim f \circ b = \lim f \circ a$ teljesül.
4. Ezek után definiálhatjuk úgy a g függvényt, hogy minden $x \in \overline{X}$ esetén vegyünk egy olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozatot, melyre $\lim a = x$ teljesül és legyen $g(x) = \lim(f \circ a)$. Vagy másképp leírva

$$g = \left\{(x, y) \in \overline{X} \times M_2 |\ \exists a : \mathbb{N} \to X : \ \lim a = x \ \wedge \ y = \lim(f \circ a)\right\}.$$

Ekkor nyilván $f \subseteq g$.
5. Végül igazoljuk, hogy g egyenletesen folytonos. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x_1, x_2 \in X$ pontra $d_1(x_1, x_2) < \delta$ esetén $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x_1, x_2 \in \overline{X}$ olyan, hogy $d_1(x_1, x_2) < \delta$. Most legyen $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x_1$ és $\lim b = x_2$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$d_1(a_n, x_1) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} \quad \text{és} \quad d_1(b_n, x_2) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén

$$d_1(a_n, b_n) \leq d_1(a_n, x_1) + d_1(x_1, x_2) + d_1(x_2, b_n) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} + d_1(x_1, x_2) + \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} = \delta.$$

Tehát minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$, amiből az $n \to \infty$ határátmenet után a 13.69 tétel alapján

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$$

adódik.

13.87. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és X halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : M \twoheadrightarrow X$ függvény *sűrűn értelmezett*, ha $\overline{\operatorname{Dom} f} = M$.

13.88. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) tetszőleges metrikus tér, (M_2, d_2) pedig teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett, egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : M_1 \to M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. A 13.86 tétel alapján nyilvánvaló.

13.89. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény *izometria*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ esetén $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ teljesül. Az (M, d) és (M', d') metrikus tér *izometrikusan homeomorf*, ha létezik $f : M \to M'$ izometrikus homeomorfizmus.

13.90. Tétel. *Minden izometria egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Az izometria definíciója alapján nyilvánvaló.

13.91. Tétel. *(Izometria kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. Ekkor az f függvény folytonos $g : M_1 \to M_2$ kiterjesztése is izometria.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. A 13.88 tétel alapján az f függvénynek létezik $g : M_1 \to M_2$ egyenletesen folytonos kiterjesztése. Legyen $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a, b : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. A 13.69 tétel alapján

$$d_2(g(x), g(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(g(a_n), g(b_n)) = \lim_{n\to\infty} d_2(f(a_n), f(b_n)).$$

Mivel f izometria, ezért

$$d_2(g(x), g(y)) = \lim_{n\to\infty} d_1(a_n, b_n),$$

amiből a 13.70 tétel akapján

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y)$$

következik.

13.13. Kontrakciók és Lipschitz-folytonos függvények

13.92. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *Lipschitz-folytonos függvény*, ha

$$\exists C \in \mathbb{R}_0^+ \forall x, y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x), f(y)) \le C d_1(x, y)\Big).$$

13.93. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[\forall x, y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x), f(y)) \le C d_1(x, y)\Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

13.94. Tétel. *Minden Lipschitz-folytonos függvény egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ Lipschitz-folytonos a $C \in \mathbb{R}_0^+$ együtthatóval. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + C}$. Ha $x, y \in M_1$ olyan pontok, hogy $d_1(x, y) < \delta$, akkor

$$d_2(f(x), f(y)) \le C d_1(x, y) \le C\delta = \varepsilon \cdot \frac{C}{1 + C} < \varepsilon,$$

ami viszont éppen az f függvény egyenletes folytonosságát jelenti.

13.95. Tétel. *Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor az $f : M_1 \to M_2$ függvények tulajdonságai között az alábbi reláció teljesül.*

$$\textit{kontrakció} \Rightarrow \textit{Lipschitz-folytonos} \Rightarrow \textit{egyenletesen folytonos} \Rightarrow \textit{folytonos}$$

Bizonyítás. Az első implikáció a definíció közvetlen következménye. A második következtetést a 13.94 tétel és a harmadikat pedig a 13.84 tétel garantálja.

13.96. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel.) Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $f : M \to M$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in M$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) teljes metrikus tér, $f : M \to M$ kontrakció a $C \in]0, 1[$ kontrakciós együtthatóval és a tetszőleges pont. (Feltehető, hogy $C > 0$ teljesül, hiszen ha C_1 a kontrakciós együtthatója a függvénynek, akkor bármely $C \in [C_1, 1[$ szám is kontrakciós együtthatója.) Vegyük azt az $x : \mathbb{N} \to M$ sorozatot, melyre $x_0 = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = f(x_n)$ teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \le C d(x_{n+1}, x_n)$$

teljesül, ezért teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0).$$

Ennek felhasználásával az adódik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $m > n$ számra

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} C^i d(x_1, x_0) = C^n \frac{1 - C^{m-n}}{1 - C} d(x_1, x_0) < C^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$$

teljesül. Mivel az $n \mapsto C^n \cdot \dfrac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$ sorozat határértéke nulla, ezért x Cauchy-sorozat. Legyen $y = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Ekkor az f folytonossága alapján

$$f(y) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = y,$$

vagyis y fixpontja az f függvénynek.
Tegyük fel, hogy $y_1, y_2 \in M$ az f függvény két különböző fixpontja. Ekkor a

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \leq C d(y_1, y_2)$$

egyenlőtlenségből az $1 \leq C$ ellentmondás adódik.

13.14. Halmazok szétválasztása

13.97. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam}(A) \triangleq \begin{cases} \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}, & \text{ha} \quad A \neq \emptyset; \\ 0, & \text{ha} \quad A = \emptyset. \end{cases}$$

13.98. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor korlátos, ha* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.
Ha A korlátos, akkor létezik olyan $z \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $A \subseteq B_r(z)$ teljesül. Ekkor minden $x, y \in A$ esetén

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r,$$

vagyis

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) \leq 2r < \infty.$$

Most tegyük fel, hogy $\operatorname{diam}(A) = R < \infty$ és legyen $z \in A$ tetszőleges pont. Ha $x \in A$, akkor az $d(x, z) \leq \operatorname{diam}(A) = R < R + 1$ egyenlőtlenség alapján $x \in B_{R+1}(z)$. Ezzel megmutattuk, hogy $A \subseteq B_{R+1}(z)$ teljesül, vagyis az A halmaz korlátos.

13.99. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor az A *halmaztól való távolság függvénye*

$$\operatorname{dist}_A : M \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z, x).$$

13.100. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in M$ esetén*
$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x, y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos;*
3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$.

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz.
1. Legyen $x, y \in M$ és $z \in A$ tetszőleges elem. Ekkor

$$\mathrm{dist}_A(x) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

vagyis

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x,y) \leq d(y,z).$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $z \in A$ elemre fennáll, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x,y) \leq \inf_{z \in A} d(y,z) = \mathrm{dist}_A(y),$$

amiből átrendezéssel

$$\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y) \leq d(x,y)$$

adódik. Ebből az x és az y pontok cseréjével

$$\mathrm{dist}_A(y) - \mathrm{dist}_A(x) \leq d(x,y)$$

adódik, vagyis

$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \leq d(x,y).$$

2. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ha $\delta = \varepsilon$, akkor minden $x, y \in M$ pontra $d(x,z) < \delta$ esetén

$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon$$

teljesül, ami az egyenletes folytonosságot jelenti.
3. Mivel a dist_A függvény folytonos, ezért a $B = \{z \in M |\ \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$ halmaz zárt, hiszen a zárt $\{0\}$ halmaz folytonos függvény általi ősképe ($B = \overset{-1}{\mathrm{dist}}_A(\{0\})$), továbbá a dist_A definíciója alapján $A \subseteq B$ nyilván teljesül, ezért $\overline{A} \subseteq B$. Tehát azt kell még megmutatni, hogy $B \subseteq \overline{A}$, vagy ami ezzel ekvivalens $M \setminus \overline{A} \subseteq M \setminus B$. Ennek igazolásához legyen $x \in M \setminus \overline{A}$. Mivel $M \setminus \overline{A}$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq M \setminus \overline{A}$, vagyis $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Tehát minden $z \in A$ esetén $d(x,z) \geq r$, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) = \inf_{z \in A} d(x,z) \geq r,$$

vagyis $\mathrm{dist}_A(x) \neq 0$, ebből pedig $x \notin B$ és $x \in M \setminus B$ következik.

Magyarázat. A *topologikus terek* elméletében fontos szerepet kap az alábbi tétel, mely azt mutatja meg, hogy minden metrikus tér *normális*, *Hausdorff-féle topologikus tér.*

13.101. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.*

1. *Létezik olyan $f : M \to [0,1]$ folytonos függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $f(x) = 0$ és minden $y \in Y$ esetén $f(y) = 1$.*
2. *Létezik $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, hogy $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.
1. A $\mathrm{dist}_X + \mathrm{dist}_Y : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá ha valamilyen $z \in M$ pontra

$$(\mathrm{dist}_X + \mathrm{dist}_Y)(z) = 0$$

teljesülne, akkor abból $\mathrm{dist}_X(z) = \mathrm{dist}_Y(z) = 0$ következne, amiből a 13.100 tétel alapján $z \in \overline{X}$ és $z \in \overline{Y}$ adódna; az X és Y halmaz zártsága miatt ez azt jelentené, hogy $z \in X \cap Y$, vagyis az $X \cap Y \neq \emptyset$ ellentmondás adódna. Ezért $\mathrm{dist}_X + \mathrm{dist}_Y : M \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Legyen $f = \dfrac{\mathrm{dist}_X}{\mathrm{dist}_X + \mathrm{dist}_Y}$. Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy az f függvény eleget tesz a feltételeknek.
2. Legyen f olyan függvény melynek létezését bizonyítottuk az 1. pontban, továbbá legyen

$$U = \overset{-1}{f}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right) \quad \text{és} \quad V = \overset{-1}{f}\left(\left]\frac{1}{2}, \infty,\right[\right).$$

Az f függvény folytonossága és a folytonosság topologikus jellemzése miatt U és V nyílt halmaz, valamint a konstrukció folytán nyilvánvaló, hogy eleget tesz az $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$ követelményeknek.

13.15. Metrikus tér teljessé tétele

13.102. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Létezik olyan (M',d') teljes metrikus tér és $j : M \to M'$ izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül.*
2. *Ha (M_1,d_1) és (M_2,d_2) teljes metrikus tér, valamint $j_1 : M \to M_1$ és $j_2 : M \to M_2$ olyan izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j_1} = M_1$ és $\overline{\operatorname{Ran} j_2} = M_2$, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : M_1 \to M_2$ izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér.
1. Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathbb{N} \to M$ Cauchy-sorozatok halmaza, azaz

$$\mathcal{M} = \left\{a : \mathbb{N} \to M \middle| \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n,m \in \mathbb{N} : (N < n,m \ \to \ d(a_n,a_m) < \varepsilon)\right\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $a,b \in \mathcal{M}$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,b_n)$ határérték. Válaszunk $a,b \in \mathcal{M}$ tetszőleges elemet és tekintsük az

$$\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto d(a_n,b_n)$$

sorozatot, melyről elég megmutatni, hogy Cauchy-sorozat, hiszen a valós számok halmazában minden Cauchy-sorozat konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m,n \in \mathbb{N}$ természetes számra $N < m,n$ esetén

$$d(a_n,a_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad d(b_n,b_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $m,n \in \mathbb{N}$ és $N < m,n$, akkor

$$d(a_n,b_n) \le d(a_n,a_m) + d(a_m,b_m) + d(b_m,b_n),$$

aminek átrendezéséből

$$d(a_n,b_n) - d(a_m,b_m) \le d(a_n,a_m) + d(b_m,b_n) < \varepsilon,$$

adódik, valamint az m és n betűk cseréje után

$$|\eta_n - \eta_m| = |d(a_n,b_n) - d(a_m,b_m)| \le d(a_n,a_m) + d(b_m,b_n) < \varepsilon$$

következik, ami igazolja, hogy η valóban Cauchy-sorozat.
2. Definiáljuk az $\sim$ relációt az $\mathcal{M}$ halmazon az alábbi módon.

$$\sim = \left\{(a,b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \middle| \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n) = 0\right\}$$

Vagyis $a,b \in \mathcal{M}$ esetén $a \sim b$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n) = 0.$$

A $\sim$ reláció nyilván reflexív és szimmetrikus, a tranzitivitása pedig a minden $a,b,c \in \mathcal{M}$ elemre és a minden $n \in \mathbb{N}$ számra érvényes

$$0 \le d(a_n,c_n) \le d(a_n,b_n) + d(b_n,c_n)$$

egyenlőtlenségből következik. Vagyis $\sim$ ekvivalenciareláció.
3. Most megmutatjuk, hogy ha $a,b,c,d \in \mathcal{M}$ olyanok, hogy $a \sim b$ és $c \sim d$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n,c_n) = \lim_{n\to\infty} d(b_n,d_n). \tag{13.1}$$

Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $a \sim b$ és $c \sim d$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n,b_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $d(c_n,d_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén az

$$d(a_n,c_n) \le d(a_n,b_n) + d(b_n,d_n) + d(d_n,b_n)$$

egyenlőtlenség átrendezéséből

$$d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n) \leq d(a_n, b_n) + d(d_n, b_n)$$

adódik, amiből a, b és c, d felcserélésével

$$|d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n)| \leq d(a_n, b_n) + d(d_n, b_n) < \varepsilon$$

következik. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} |d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n)| = 0$, amiből már adódik az (13.1) egyenlet.
. Legyen $M' = \mathcal{M}/\sim$. A 3. pont alapján értelmezhető a $d' : M' \times M' \to \mathbb{R}_0^+$ függvény úgy, hogy minden $a', b' \in M'$ esetén válasszunk $a \in a'$, $b \in b'$ elemet és legyen $d'(a', b') = \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$. Vagy másképp

$$d' : M' \times M' \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (a', b') \mapsto \sup\left\{\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) | a \in a', b \in b'\right\},$$

ahol a sup műveletre azért van szükség, hogy az egyetlen számot tartalmazó halmazból számot képezzen. A d' függvényről egyszerűen megmutatható, hogy metrika, tehát (M', d') metrikus tér.
5. Minden $x \in M$ esetén jelölje $\tilde{x}$ a konstans x sorozatot (mely nyilván Cauchy-sorozat), és legyen $x' = \tilde{x}/\sim$, valamint

$$j : M \to M' \qquad x \mapsto x'.$$

Minden $x, y \in M$ esetén $\tilde{x} \in x'$ és $\tilde{y} \in y'$, ezért

$$d'(x', y') = \lim_{n\to\infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y),$$

vagyis j izometria.
6. Legyen $x \in M'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $a \in x$ tetszőleges Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen y a konstans a_{N+1} sorozat ekvivalenciaosztálya, azaz $y = \widetilde{a_{N+1}}/\sim$. Ekkor nyilván $y \in \operatorname{Ran} j$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $d(a_n, a_{N+1}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$d'(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{N+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{Ran} j \neq \emptyset$, tehát $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$.
7. Most igazoljuk, hogy az (M', d') metrikus tér teljes. Legyen $x : \mathbb{N} \to M'$ tetszőleges Cauchy-sorozat. Az előző pont alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\operatorname{Ran} j) \cap B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n) \neq \emptyset$, ezért $\overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right) \neq \emptyset$, amiből

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right) \neq \emptyset$$

következik. Legyen $a \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right)$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \in M$ olyan elem, melyre $d'(j(a_n), x_n) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{3}$, valamint $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_2 < n, m$ esetén $d'(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Képezzük az $N = \max\{N_1, N_2\}$ számot. Ekkor minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ esetén

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) = d'(j(a_n), j(a_m)) &\leq d'(j(a_n), x_n) + d'(x_n, x_m) + d'(x_m, j(a_m)) < \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

vagyis a Cauchy-sorozat. Legyen $z = a/\sim$, vagyis z az a elem által meghatározott ekvivalenciaosztály, tehát $z \in M'$.
Megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ teljesül. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a

Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < n, m$ természetes számra $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ számra $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tekintsük az $N = \max\{N_1, N_2\}$ számot. Ha $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d'(x_n, z) \leq d'(x_n, j(a_n)) + d'(j(a_n), z) < \frac{1}{n+1} + \lim_{m\to\infty} d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} d'(x_n, z) = 0$.
8. Most legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) olyan teljes metrikus tér, melyekhez létezik olyan $j_1 : M \to M_1$, $j_2 : M \to M_2$ izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j_1} = M_1$ és $\overline{\operatorname{Ran} j_2} = M_2$. Legyen $f : \operatorname{Ran} j_1 \to M_2$, $f = j_2 \circ j_1^{-1}$. Ekkor $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria, ezért a 13.91 tétel alapján létezik egyetlen folytonos $\varphi : M_1 \to M_2$ kiterjesztése, mely szintén izometria. Mivel $f \circ j_1 = j_2$, ezért $\varphi \circ j_1 = j_2$. Megcserélve az (M_1, j_1) és (M_2, j_2) szerepét az adódik, hogy létezik olyan folytonos $\varphi' : M_2 \to M_1$ izometria, mely az $f' : \operatorname{Ran} j_2 \to M_1$, $f' = j_1 \circ j_2^{-1}$ kiterjesztése és melyre $\varphi' \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi \circ j_1 \circ j_2^{-1} &= j_2 \circ j_2^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} j_2} \\ (\varphi \circ \varphi')|_{\operatorname{Ran} j_2} &= \mathrm{id}_{M_2}|_{\operatorname{Ran} j_2} \end{aligned}$$

miatt az egyenlőség folytatásának az elve (13.74 tétel) alapján $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{M_2}$. Szerepcserével pedig $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{M_1}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy φ bijekció, valamint $\varphi^{-1} = \varphi'$ miatt φ^{-1} is folytonos. Tehát olyan φ izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.
9. Az előbbi jelölések mellett tegyük fel, hogy $\varphi_1, \varphi_2 : M_1 \to M_2$ olyan izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_1$ teljesül. Ekkor $\varphi_1|_{\operatorname{Ran} j_1} = \varphi_2|_{\operatorname{Ran} j_1}$, amiből az egyenlőség folytatásának az elve alapján $\varphi_1 = \varphi_2$ következik.

13.103. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden (M', d') teljes metrikus teret és $j : M \to M'$ izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül, az (M, d) *metrikus tér teljes burkának* nevezzük.

13.104. Tétel. *Minden metrikus térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

Bizonyítás. A 13.102 tétel alapján nyilvánvaló.

13.16. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok

13.105. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.
- Az A *halmaz összefüggő*, ha nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül.
- Az M *metrikus tér összefüggő*, ha az M halmaz összefüggő.
- Az A *halmaz ívszerűen összefüggő*, ha minden $x, y \in A$ esetén létezik olyan $\gamma : [0, 1] \to A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
- Az M *metrikus tér ívszerűen összefüggő*, ha az M halmaz ívszerűen összefüggő.

13.106. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.*
1. *Az A halmaz pontosan akkor összefüggő, ha az $(A, d|_{A\times A})$ altér összefüggő.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor ívszerűen összefüggő, ha az $(A, d|_{A\times A})$ altér ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.
1. Legyen $d' = d|_{A\times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M, d) metrikus térben és $\widetilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A, d') metrikus térben.
Legyen az A halmaz összefüggő az (M, d) térben és indirekt módon tegyük fel, hogy az (A, d') tér nem összefüggő. Ekkor létezik olyan $U, V \subseteq A$ halmaz, melyekre

$$U \neq \emptyset \quad V \neq \emptyset \quad \widetilde{U} \cap V = U \cap \widetilde{V} = \emptyset \quad U \cup V = A$$

teljesül. Ekkor a 13.22 tétel alapján $\widetilde{U} = \overline{U} \cap A$ és $\widetilde{V} = \overline{V} \cap A$, továbbá $U \subseteq A$, $V \subseteq A$ miatt $U \cap A = U$, $A \cap V = V$, vagyis

$$\overline{U} \cap V = \overline{U} \cap (A \cap V) = (\overline{U} \cap A) \cap V = \widetilde{U} \cap V = \emptyset$$
$$U \cap \overline{V} = (U \cap A) \cap \overline{V} = U \cap (A \cap \overline{V}) = U \cap \widetilde{V} = \emptyset.$$

Ebből azt az ellentmondást kaptuk, hogy az A halmaz nem összefüggő az (M, d) térben, vagyis az (A, d') tér összefüggő.
Legyen az (A, d') tér összefüggő és tegyük fel, hogy az A halmaz nem összefüggő az (M, d) térben. Ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyekre

$$U \neq \emptyset \quad V \neq \emptyset \quad \overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset \quad U \cup V = A$$

teljesül. Ekkor ismét a 13.22 tétel alapján $\widetilde{U} = \overline{U} \cap A$ és $\widetilde{V} = \overline{V} \cap A$, $\widetilde{U} \subseteq \overline{U}$ és $\widetilde{V} \subseteq \overline{V}$ vagyis

$$\widetilde{U} \cap V \subseteq \overline{U} \cap V = \emptyset$$
$$U \cap \widetilde{V} \subseteq U \cap \overline{V} = \emptyset.$$

Ebből azt az ellentmondást kaptuk, hogy az (A, d') tér nem összefüggő, vagyis az A halmaz összefüggő az (M, d) térben.
2. Legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont és legyen $\gamma : [0, 1] \to A$ olyan függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül. Csak azt kell meggondolni, hogy γ pontosan akkor folytonos az (M, d) téren, ha folytonos az (A, d') téren. Ez azonban a folytonosság definíciójából és a $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq A \subseteq M$ tartalmazásból rögtön adódik.

13.107. Tétel. *Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ ívszerűen összefüggő halmaz. Ha $A = \emptyset$, akkor A összefüggő, ezért feltehetjük, hogy $A \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy A nem összefüggő és legyen $U, V \subseteq M$ olyan, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül. Legyen $x \in U$ és $y \in V$ tetszőleges és legyen $\gamma : [0, 1] \to A$ egy olyan folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül. Legyen

$$t_0 = \sup \{t \in [0, 1] \mid \forall x \in [0, t[: \gamma(x) \in U\},$$

valamint legyen $z = \gamma(t_0)$. Mivel $z \in A$, ezért $z \in U$ vagy $z \in V$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $z \in V$. Ekkor $z \notin \overline{U}$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap U = \emptyset$. A γ függvény t_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(t_0)$ esetén $\gamma(t) \in B_r(z)$ teljesül, azaz $\gamma(t) \notin U$. Ez viszont ellentmondásban van t_0 definíciójával, hiszen minden $x \in \left[0, t_0 - \frac{\delta}{2}\right[$ számra a $\gamma(x) \in U$ tartalmazásnak kellenne teljesülnie, ez viszont az $x = t_0 - \frac{3\delta}{4}$ számra biztosan nem teljesül.
Most tegyük fel, hogy $z \in U$. Ekkor $z \notin \overline{V}$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap V = \emptyset$. A γ függvény t_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(t_0)$ esetén $\gamma(t) \in B_r(z)$ teljesül, azaz $\gamma(t) \notin V$. Ez viszont ellentmondásban van a t_0 definíciójával, hiszen minden $x \in \left[0, t_0 + \frac{\delta}{2}\right[$ számra is $\gamma(x) \in U$ teljesül.

13.108. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az M halmaz összefüggő.*
2. *Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$.*
3. *Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ és $M = X \cup Y$.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér.
1⇒2 Legyen M összefüggő és tegyük fel, hogy létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $\overline{U} \cap V = \emptyset$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{U} \cap V$ elem. Ekkor a V halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq V$ teljesül. Mivel $U \cap V = \emptyset$, ezért $B_r(x) \cap U = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $x \in \overline{U}$.

Hasonlóan igazolható, hogy $U \cap \overline{V} = \emptyset$. Vagyis azt az ellentmondást kaptuk, hogy M nem összefüggő. Tehát nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$ teljesül.
2⇒1 Ezt úgy mutatjuk meg, hogy igazoljuk a $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$ következtetést. Tehát legyen M nem összefüggő halmaz. Ekkor létezik olyan $A, B \subseteq M$ halmaz, hogy $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ és $A \cup B = M$ teljesül.
Legyen $U = M \setminus \overline{A}$ és $V = M \setminus \overline{B}$. Nyilván U és V nyílt halmaz. Megmutatjuk, hogy $U \cup V = M$. Ha nem így lenne, akkor létezne olyan $x \in M$ elem, melyre $x \notin U$ és $x \notin V$ teljesülne. Az U és V definíciója alapján ebből $x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B}$ következik.
Mivel $x \in M = A \cup B$, ezért $x \in A$ vagy $x \in B$.
Ha $x \in A$, akkor $x \in \overline{B}$ miatt az $x \in A \cap \overline{B} = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Ha $x \in B$, akkor $x \in \overline{A}$ miatt az $x \in \overline{A} \cap B = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Tehát $U \cup V = M$ teljesül.
A U és V halmaz metszetére vonatkozó követelmény is teljesül az alábbiak szerint.

$$U \cap V = (M \setminus \overline{A}) \cap (M \setminus \overline{A}) = M \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) \subseteq M \setminus (A \cup B) = M \setminus M = \emptyset$$

Már csak azt kell igazolni, hogy $U \neq \emptyset$ és $V \neq \emptyset$. Ha $U = \emptyset$, akkor $\overline{A} = M$, amiből az

$$\emptyset = \overline{A} \cap B = M \cap B = B = \emptyset$$

ellentmondás adódik, tehát $U \neq \emptyset$. Hasonlóan megmutatható, hogy $V \neq \emptyset$.
2⇔3 Az alábbi ekvivalens lépések igazolják az állítást.

$$\begin{aligned}
&\exists U, V \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre} && U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset,\ M = U \cup V \ \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\exists U, V \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre} && \left\{ \begin{array}{c} (M \setminus U) \neq \emptyset,\ (M \setminus V) \neq \emptyset, \\ (M \setminus U) \cap (M \setminus V) = \emptyset,\ M = (M \setminus U) \cup (M \setminus V) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\exists X, Y \subseteq M \text{ zárt halmaz, melyre} && X \neq \emptyset,\ Y \neq \emptyset,\ X \cap Y = \emptyset,\ M = X \cup Y
\end{aligned}$$

13.17. Összefüggő és ívszerűen összefüggő metrikus alterek

13.109. Tétel. *(Metrikus altér összefüggősége.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az A halmaz összefüggő az (M, d) térben.*
2. *Az (A, d') metrikus altér összefüggő.*
3. *Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$.*
4. *Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \cap A \neq \emptyset$, $Y \cap A \neq \emptyset$, $X \cap Y \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq X \cup Y$.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A \times A}$.
1.⇔2. A 13.106 tétel épp ezt az ekvivalenciát mondja ki.
2.⇒3. Igazoljuk a $\neg 3. \Rightarrow \neg 2.$ következtetést. Legyen $U, V \subseteq M$ olyan nyílt halmaz, melyre $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$ teljesül. Ekkor a 13.21 tétel alapján az $U' = U \cap A$ és $V' = V \cap A$ halmazok nyíltak az (A, d') metrikus térben és ezen nyílt halmazokra $U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, $U' \cap V' = \emptyset$ és $A = U' \cup V'$ teljesül. A 13.108 tétel alapján ezért az (A, d') tér nem összefüggő.
3.⇒2. Igazoljuk a $\neg 2. \Rightarrow \neg 3.$ következtetést. Ha (A, d') nem összefüggő, akkor a 13.108 tétel alapján létezik olyan $U', V' \subseteq A$ nyílt halmaz az (A, d') metrikus térben, melyre $U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, $U' \cap V' = \emptyset$ és $A = U' \cup V'$ teljesül. A 13.21 tétel alapján ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz az (M, d) metrikus térben, melyre $U' = U \cap A$ és $V' = V \cap A$. Ekkor $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$.
3.⇔4. A 2.⇒3. illetve a 3.⇒2. bizonyításában a *nyílt* szót kicserélve a *zárt* szóra kapjuk a bizonyítást.

13.110. Tétel. *Legyen (M, d) összefüggő metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Ekkor $A = \emptyset$ vagy $A = M$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) összefüggő metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$ és $A \neq M$. Legyen $U = A$ és $V = M \setminus A$. Ebből azt az ellentmondást kapjuk, hogy az M tér nem összefüggő. Ugyanis ekkor $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, valamint $\overline{U} = U$ és $\overline{V} = V$ miatt $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ teljesül, valamint $U \cup V = M$.

13.111. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint legyen $A \subseteq M_1$ és $f : A \to M_2$ folytonos függvény.*

1. *Ha A összefüggő, akkor $f(A)$ is összefüggő.*
2. *Ha A ívszerűen összefüggő, akkor $f(A)$ is ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint legyen $A \subseteq M_1$ és $f : A \to M_2$ folytonos függvény.
1. Tegyük fel, hogy A összefüggő és $B = f(A)$ nem összefüggő. Ekkor a 13.109 tétel alapján létezik olyan $U', V' \subseteq M_2$ nyílt halmaz, melyre $U' \cap B \neq \emptyset$, $V' \cap B \neq \emptyset$, $U' \cap V' \cap B = \emptyset$ és $B \subseteq U' \cup V'$ teljesül. A folytonosság topologikus jellemzéséről szóló 13.72 tétel alapján ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U') = U \cap A$ és $\overset{-1}{f}(V') = V \cap A$. Ekkor $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$ teljesül, vagyis a 13.109 tétel alapján azt az ellentmondást kaptuk, hogy A nem összefüggő.
2. Tegyük fel, hogy A ívszerűen összefüggő és legyen $x', y' \in f(A)$ két tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $x, y \in A$, melyre $f(x) = x'$ és $f(y) = y'$. Mivel A ívszerűen összefüggő, ezért létezik olyan $\gamma : [0, 1] \to A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$. Legyen $\gamma' = f \circ \gamma$. Ekkor $\gamma' : [0, 1] \to f(A)$ olyan folytonos függvény, melyre melyre $\gamma'(0) = x'$ és $\gamma'(1) = y'$ teljesül.

13.18. Metrikus terek szorzata

13.112. Tétel. *Ha I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén (M_i, d_i) metrikus tér, akkor $M = \prod_{i \in I} M_i$ esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto \max\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

metrika.

Bizonyítás. A metrika tulajdonságai egyszerűen igazolhatók.

13.113. Definíció. Legyen I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén (M_i, d_i) metrikus tér. Az $M = \prod_{i \in I} M_i$ halmazból és a

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto \max\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

metrikából álló (M, d) párt nevezzük az $(M_i, d_i)_{i \in I}$ *metrikus terek szorzatának.*

Megjegyzés. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén (M_k, d_k) metrikus tér. Jelölje (M, d) az $(M_k, d_k)_{k \in \{1, \ldots, n\}}$ metrikus terek rendszerének a szorzatát. A d definíciója alapján ekkor minden $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r^d(x) = B_r^{d_1}(x_1) \times \cdots \times B_r^{d_n}(x_n)$$

teljesül.

◊

13.114. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i \in I}$ metrikus terek véges rendszere és (M, d) ezek szorzata. Ekkor minden $j \in I$ esetén a*

$$\mathrm{pr}_j : \prod_{i \in I} M_i \to M_j \qquad (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$$

projekció folytonos és nyílt.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és (M, d) ezek szorzata, valamint $j \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index.
Legyen $U \subseteq M_j$ tetszőleges nyílt halmaz és $\Omega = \overset{-1}{\mathrm{pr}}_j(U)$. A projekció értelmezése alapján

$$\Omega = M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times U \times M_{j+1} \cdots \times M_n,$$

amiről megmutatjuk, hogy nyílt halmaz. Ha $x \in \Omega$, akkor $x_j \in U$, tehát van olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy $B_r(x_j) \in U$, ekkor viszont

$$B_r^d(x) = B_r^{d_1}(x_1) \times \cdots \times B_r^{d_n}(x_n) \tag{13.2}$$

miatt $B_r^d(x) \subseteq \Omega$. Tehát minden nyílt halmaz képe nyílt, ezért a folytonosság topologikus jellemzése alapján pr_j folytonos.
Most legyen $\Omega \subseteq M$ tetszőleges nyílt halmaz és $x \in \mathrm{pr}_j(\Omega)$. Az $\Omega \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}}_j(x) \neq \emptyset$ miatt válszthatunk $t \in \Omega \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}}_j(x)$ elemet. Ekkor $t \in \Omega$ és $\mathrm{pr}_j(t) = x$, vagy másképp $t_j = x$. Mivel Ω nyílt, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(t) \subseteq \Omega$. Ekkor $\mathrm{pr}_j\left(B_r(t)\right) \subseteq \mathrm{pr}_j(\Omega)$ és a (13.2) képlet alapján

$$B_r(x) = B_r(t_j) = \mathrm{pr}_j(B_r(t)) \subseteq \mathrm{pr}_j(\Omega),$$

tehát $\mathrm{pr}_j(\Omega)$ nyílt halmaz, vagyis pr_j nyílt.

13.115. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata és $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in I$ indexre*

$$\mathrm{pr}_i\left(\lim a\right) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata, valamint $a : \mathbb{N} \to M$ tetszőleges sorozat.
Ha az a sorozat konvergens, akkor legyen $x = \lim a$, $i \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < \varepsilon$. A szorzatmetrika értelmezése alapján ezért $d_i(\mathrm{pr}_i(a_n), \mathrm{pr}_i(x))\varepsilon$, vagyis $\lim\left(\mathrm{pr}_i \circ a\right) = \mathrm{pr}_i\left(\lim a\right)$.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = \left(\lim\left(\mathrm{pr}_1 \circ a\right), \dots, \lim\left(\mathrm{pr}_n \circ a\right)\right) \in M$. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i < n$ természetes számra $d_i(\mathrm{pr}_i\, a_n, x_i) < \varepsilon$. Legyen $N = \max\{N_i |\ i \in \{1, \dots, n\}\}$. Ekkor a szorzatmetrika értelmezése alapján minden $N < n$ természetes számra $d(a_n, x) < \varepsilon$ teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az a sorozat konvergens.

13.116. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata, (M', d') metrikus tér és $f : M' \to M$ függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor folytonos az $a \in \mathrm{Dom}\, f$ pontban, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f : M' \to M_i$ függvény folytonos az a pontban.*
2. *Az f függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata, (M', d') metrikus tér és $f : M' \to M$ függvény.
Legyen $a \in \mathrm{Dom}\, f$ tetszőleges pont. Tegyük fel, hogy f folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $i \in I$ tetszőleges index. Ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, f$ pontra $d'(x, a) < \delta$ esetén $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ teljesül. A szorzatmetrika értelmezése alapján ekkor

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, f :\ d'(x, a) < \delta\ \to d((\mathrm{pr}_i \circ f)(x), (\mathrm{pr}_i \circ f)(a)) < \varepsilon$$

teljesül, vagyis a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $a \in \mathrm{Dom}\, f$ tetszőleges pont. Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos

az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} a$ pontra

$$d'(a,x) < \delta_i \quad \to \quad d_i((\mathrm{pr}_i \circ f)(x), \mathrm{pr}_i(f(a))) < \varepsilon.$$

Legyen $\delta = \min\{\delta_i |\ i \in \{1, \dots, n\}\}$. Ekkor a szorzatmetrika értelmezése alapján $x \in \operatorname{Dom} a$ pontra $d'(a,x) < \delta$ esetén $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, tehát az f függvény folytonos az a pontban.
A 2. pont egyszerűen adódik az 1. pont minden $a \in \operatorname{Dom} f$ elemre való alkalmazásából.

13.117. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(M_i, d_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és (M, d) ezek szorzata. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz és legyen $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$. Ekkor a K halmaz kompakt az M metrikus térben.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(M_i, d_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és (M, d) ezek szorzata. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz és legyen $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$.
Az $n = 1$ esetben nyilvánvaló az állítás.
A teljes indukció módszerét használva tegyük fel, hogy az $(n-1) \in \mathbb{N}^+$ számra igaz az állítás. Ehhez legyen (E, d_E) az $(M_i, d_i)_{i \in \{1,\dots,n-1\}}$ terek szorzata és $K_E = \prod_{i=1}^{n-1} K_i$. Ekkor $K = K_E \times K_n$.
Legyen $c : \mathbb{N} \to K$ tetszőleges sorozat. Ekkor $\mathrm{pr}_1 \circ c : \mathbb{N} \to K_E$ sorozat az (E, d_E) metrikus térben, vagyis a teljes indukciós feltevés miatt $\mathrm{pr}_1 \circ c$ kompakt halmazban haladó sorozat, ezért a 13.49 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján létezik konvergens részsorozata, melynek a határértéke benne van a K_E halmazban; vagyis létezik olyan $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $(\mathrm{pr}_1 \circ c) \circ \sigma_1$ konvergens és határértéke eleme a K_E halmaznak. A $\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1) : \mathbb{N} \to K_n$ sorozat is kompakt halmazban halad, ezért ennek is létezik konvergens részsorozata, vagyis létezik olyan $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $(\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1)) \circ \sigma_2$ konvergens és $\lim(\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1) \circ \sigma_2) \in K_n$. Ekkor a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ indexsorozat olyan, hogy a $c \circ \sigma$ sorozat első és második komponense is konvergens, ami a d metrika értelmezése alapján azt jelenti, hogy a $c \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ sorozat konvergens és a határértéke nyilvánvaló módon benne van a K halmazban.
Tehát a K halmaz rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme a K halmaznak, ezért a 13.49 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján a K halmaz kompakt.

13.19. Baire-féle kategóriatétel

13.118. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sehol sem sűrű*, ha $\operatorname{Int} \overline{X} = \emptyset$;
- *első kategóriájú*, ha X előállítható megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként;
- *második kategóriájú*, ha nem első kategóriájú.

13.119. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér.*
1. *Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $M \setminus \overline{X}$ halmaz sűrű.*
2. *Véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.*
3. *Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik az M sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér.
1. Legyen $X \subseteq M$. Mivel $\operatorname{Int} \overline{X} = M \setminus \overline{M \setminus \overline{X}}$, ezért ha X sehol sem sűrű, akkor $M \setminus \overline{M \setminus \overline{X}} = \emptyset$, vagyis $\overline{M \setminus \overline{X}} = M$, azaz $M \setminus \overline{X}$ sűrű. Ha $M \setminus \overline{X}$ sűrű, akkor $\overline{M \setminus \overline{X}} = M$, amiből $M \setminus \overline{M \setminus \overline{X}} = \emptyset$ adódik, vagyis X sehol sem sűrű.
2. Legyen $X, Y \subseteq M$ sehol sem sűrű halmaz. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges

paraméter. Mivel $M\setminus\overline{X}$ sűrű, ezért létezik $y \in B_r(x)\cap\big(M\setminus\overline{X}\big) \neq \emptyset$ elem. A $B_r(x)\cap\big(M\setminus\overline{X}\big)$ halmaz nyílt, hiszen két nyílt halmaz metszete, ezért létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)\cap\big(M\setminus\overline{X}\big)$. Mivel $M\setminus\overline{Y}$ sűrű, ezért létezik $z \in B_\rho(y)\cap\big(M\setminus\overline{Y}\big) \neq \emptyset$ elem. Ekkor

$$z \in B_r(x)\cap\big(M\setminus\overline{X}\big)\cap\big(M\setminus\overline{Y}\big) \subseteq B_r(x)\cap\big(M\setminus\big(\overline{X}\cup\overline{Y}\big)\big) = B_r(x)\cap\big(M\setminus\big(\overline{X\cup Y}\big)\big).$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(x)\cap\big(M\setminus\big(\overline{X\cup Y}\big)\big) \neq \emptyset$, ezért a $\big(M\setminus\big(\overline{X\cup Y}\big)\big)$ halmaz sűrű, tehát $X\cup Y$ sehol sem sűrű. Mivel két sehol sem sűrű halmaz uniója is sehol sem sűrű, így teljes indukcióval adódik az állítás véges sok sehol sem sűrű halmazra.

3. Tegyük fel, hogy X első kategóriájú. Ekkor létezik olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq M$, $\operatorname{Int}\overline{F_n} = \emptyset$ és $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ekkor $(\overline{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ az M sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n}$ teljesül. Fordítva, ha $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az M sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n}$ teljesül, akkor az $(F_n\cap X)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén sehol sem sűrű halmazok rendszere és $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (F_n\cap X)$.

13.120. Tétel. *(Baire-féle kategóriatétel.) Teljes metrikus tér minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) teljes metrikus tér, $U \subseteq M$ nem üres, nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $Z_n \subseteq M$ sehol sem sűrű zárt halmaz és tegyük fel, hogy $U \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ teljesül. Ekkor az alábbi iterációval definiáljunk az $a : \mathbb{N} \to M$ és $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ sorozatot.

- Az $U \setminus Z_0$ halmaz nyílt és nem üres, ugyanis ha üres lenne, akkor $U \subseteq Z_0$ teljesülne, amiből az $\emptyset \neq \operatorname{Int} U \subseteq \operatorname{Int} Z_0 = \emptyset$ ellentmondás következne. Ezért létezik $a_0 \in U \setminus Z_0$ és ehhez létezik olyan $r_0 \in \mathbb{R}^+$, melyre
$$\overline{B_{r_0}(a_0)} \subseteq U \setminus Z_0$$
teljesül.
- Ha a_n és r_n már definiált, akkor tekintsük a
$$B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$$
halmazt. Ez a halmaz nyilván nyílt és nem üres, ugyanis $\bigcup\limits_{k=0}^{n+1} Z_k$ véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója, ezért sehol sem sűrű, vagyis $\operatorname{Int}\bigcup\limits_{k=0}^{n+1} Z_k = \emptyset$. Ha a fenti halmaz üres lenne, akkor $B_{r_n}(a_n) \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} Z_k$ teljesülne, amiből az $\emptyset \neq \operatorname{Int} B_{r_n}(a_n) \subseteq \operatorname{Int}\bigcup\limits_{k=0}^{n+1} Z_k = \emptyset$ ellentmondás következne. Ezért létezik $a_{n+1} \in B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} Z_k$ és ehhez létezik olyan $r_{n+1} \in \left]0, \frac{r_n}{2}\right[$, melyre
$$\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subseteq B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$$
teljesül.

Ekkor a minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő $r_n \leq \frac{r_0}{2^n}$ egyenlőtlenség miatt $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Az $a_{n+1} \in B_{r_n}(a_n)$ tartalmazás miatt $d(a_n, a_{n+1}) < r_n$, vagyis ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, $m > n$, akkor

$$d(a_m, a_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} r_k \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{r_0}{2^k} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r_0}{2^k} = \frac{2r_0}{2^n},$$

amiből, következik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Az $\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$ tartalmazás miatt ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, $m > n$, akkor $\overline{B_{r_m}(a_m)} \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$, amiből $a_m \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$ következik. Tehát a $k \mapsto a_{n+k}$ sorozat részsorozata az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, tehát konvergens és mivel minden eleme a $\overline{B_{r_n}(a_n)}$ zárt halmazban van, ezért $x \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$.
A $\overline{B_{r_0}(a_0)} \subseteq U$ miatt $x \in U$, továbbá a minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő

$$\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subseteq B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$$

tartalmazás miatt $x \notin \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} Z_k$. Tehát az $x \in U \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} Z_k$ ellentmondást kaptuk.

14. Normált terek

14.1. Normált terek topológiája

14.1. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in V: \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in V: \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Az $(V, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

Magyarázat. Az állítások teljesen precíz kimondását néha megnehezíti az egyetlen nullvektorból álló $V = \{0\}$ normált tér speciális esete. Ezért a továbbiakban hallgatólagosan mindig feltesszük, hogy nem az egyetlen pontból álló normált térrel foglalkozunk.

14.2. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x, y \in V$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in V$ tetszőleges. A norma tulajdonsága alapján

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \to \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \,,$$

az x és y szerepét felcserélve és kihasználva, hogy $\|x - y\| = \|y - x\|$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

adódik. Vagyis

$$\pm \left(\|x\| - \|y\|\right) \leq \|x - y\| \,,$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

14.3. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezés metrika, így $(V, d_{\|\cdot\|})$ metrikus tér.

Bizonyítás. A norma definíciójából rögtön adódnak a metrikára megkövetelt tulajdonságok.

Magyarázat. Tehát minden normált tér egyben metrikus tér is, így értelmezhető rajta minden olyan fogalom melyet metrikus téren értelmeztünk. Most a metrikus tereken bevezetett fogalmak jellemzését adjuk meg a norma segítségével.

14.4. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Az x középpontú r sugarú nyílt gömb*

$$B_r(x) = \{y \in V | \ \|x - y\| < r\} \,.$$

2. *Az $X \subseteq V$ halmaz nyílt, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.*
3. *Az $X \subseteq V$ halmaz zárt, ha $V \setminus X$ nyílt.*
4. *Az $X \subseteq V$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in V$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. A normált téren bevezetett metrika definíciója alapján nyilvánvaló.

14.5. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A $\mathbb{K}^n$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának, illetve sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

Bizonyítás. Egyedül a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség nem adódik rögtön a definícióból. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges. Adott $p \in [1, \infty[$ esetén

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

a 7.29 Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Mivel az x, y vektor minden $k \in \{1, \dots, n\}$ komponensére $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ teljesül, ezért

$$\begin{aligned}\|x + y\|_\infty &= \max\{|x_k + y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \leq \max\{|x_k| + |y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \leq \\ &\leq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} + \max\{|y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .\end{aligned}$$

14.2. Sorok és sorozatok normált terekben

14.6. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to V$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat.*

1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A ca sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.*
3. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.*
4. *Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b : \mathbb{N} \to V$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat az $A = \lim a$, a $B = \lim b$ és a $\Lambda = \lim \lambda$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.
1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n > N_b$ számra $\|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|(a_n + b_n) - (A + B)\| \leq \|a_n - A\| + \|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $c = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ekkor minden $n > N_a$ számra

$$\|ca_n - cA\| = |c| \cdot \|a_n - A\| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

3. Mivel a λ sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\lambda_n| < K$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ és legyen $N_\lambda \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_\lambda$ esetén $|\lambda_n - \Lambda| < \frac{\varepsilon}{2\|A\|}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\begin{aligned}\|\lambda_n a_n - \Lambda A\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda_n A + \lambda_n A - \Lambda A\| \leq |\lambda_n| \cdot \|a_n - A\| + \|A\| \cdot |\lambda_n - \Lambda| < \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|A\|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ha $A = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\|a_n\| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$\|\lambda_n a_n - 0\| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \varepsilon$, akkor minden $n > N_a$ számra

$$|\|a_n\| - \|A\|| \leq \|a_n - A\| < \varepsilon.$$

14.7. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

14.8. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to V$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

14.9. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor az $n \mapsto \alpha_n$ és az $n \mapsto \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük A. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

14.10. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens.*

1. *Ha V Banach-tér, akkor a $\sum a$ sor konvergens.*
2. *Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|.$$

Bizonyítás. 1. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Mivel a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n > N$ természetes számra $m > n$ mellett

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik $A = \lim \alpha$, vagyis létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ határérték.

2. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|,$$

amiből az $n \to \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

14.11. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. A $(V, \|\cdot\|)$ pár pontosan akkor Banach-tér, ha minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens.*

Bizonyítás. A 14.10 tétel alapján minden abszolút konvergens sor konvergens Banach-térben. Ezért csak azt kell igazolnunk, hogy ha a $(V, \|\cdot\|)$ normált térben minden abszolút konvergens sor konvergens, akkor $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér.
Ehhez legyen $(V, \|\cdot\|)$ olyan normált tér, melyben minden abszolút konvergens sor konvergens. Legyen $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges Cauchy-sorozat és $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre $\lim \alpha = 0$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$ teljesül. (Például az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$ sorozat ilyen.)
Az $n = 0$ esetben létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_0 < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_0$ teljesül. Ekkor legyen $\sigma_0 = N_0 + 1$.
Az $n = 1$ esetben létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_1$ teljesül. Ekkor legyen $\sigma(1) = \max\{\sigma_0, N_1\} + 1$.
Ha már valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra σ_n definiált, akkor vegyük azt az $N_{n+1} \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, melyre minden $N_{n+1} < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_{n+1}$ teljesül és legyen

$$\sigma(n+1) = \max\{\sigma_n, N_{n+1}\} + 1.$$

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele alapján így előállíthatunk egy $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sorozatot, mely a konstrukció folytán indexsorozat.
Tekintsük a

$$b : \mathbb{N} \to V \qquad n \mapsto (a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1)$$

sorozatot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $N_n < \sigma_n, \sigma_{n+1}$, ezért

$$\|b_n\| = \|(a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1)\| < \alpha_n,$$

továbbá

$$\sum_{k=0}^{n} \|b_k\| < \sum_{k=0}^{n} \alpha_k < \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k.$$

Tehát a b sorozatból képzett sor abszolút konvergens, ezért konvergens is. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} ((a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1)) = \lim_{n\to\infty} \left(a_{\sigma_0} - a_{\sigma_{n+1}}\right) = a_{\sigma_0} - \lim_{n\to\infty} a_{\sigma_n}$$

egyenlőség alapján az a Cauchy-sorozatnak létezik konvergens részsorozata, ezért a 13.36 tétel alapján konvergens.

14.3. Normák ekvivalenciája

14.12. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq V$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.*

2. *Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.*
3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$.*

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.
$1 \Rightarrow 2$ Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a $\|\cdot\|'$ norma szerint is nyílt. Mivel x belső pontja a $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint, ezért létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$ teljesül.
$2 \Rightarrow 3$ Az $x = 0$ vektorhoz és az $r = 1$ számhoz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|}(0)$. Vagyis minden $y \in V$ vektor esetén ha $\|y\|' < R$, akkor $\|y\| < 1$. Legyen $z \in V$ tetszőleges vektor. Ha $z \neq 0$, akkor $Z = \dfrac{R}{2\|z\|'} \cdot z$ olyan vektor, melyre $\|Z\|' = \dfrac{R}{2} < R$, vagyis $\|Z\| = \dfrac{R}{2\|z\|'} \cdot \|z\| < 1$, amiből $\|z\| \leq \dfrac{2}{R} \cdot \|z\|'$ adódik. Ha $z = 0$, akkor is teljesül a $\|z\| \leq \dfrac{2}{R} \cdot \|z\|'$ egyenlőtlenség. Vagyis a $K = \dfrac{2}{R}$ jelöléssel az adódik, hogy minden $x \in V$ esetén $\|x\| \leq K \|x\|'$.
$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$ teljesül és legyen $X \subseteq V$ a $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz. Ha $z \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|}(z) \subseteq X$. Megmutatjuk, hogy $R = \dfrac{r}{K}$ esetén $B_R^{\|\cdot\|'}(z) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(z)$ teljesül, vagyis z belső pontja az X halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint is. Ha $y \in B_R^{\|\cdot\|'}(z)$, akkor nyilván $\|y - z\|' < R$ és azt kell igazolni, hogy $\|y - z\| < r$ teljesül. Ez rögtön adódik a

$$\|y - z\| \leq K \cdot \|y - z\|' < K \cdot R = K \cdot \frac{r}{K} = r$$

egyenlőtlenségből.

14.13. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

14.4. Folytonos lineáris leképezések

14.14. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az A leképezés folytonos.*
2. *Az A leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. $\sup\limits_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$
4. *Az A leképezés egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés.
$1 \Rightarrow 2$ Ha A folytonos, akkor minden pontban folytonos.
$2 \Rightarrow 3$ Ha A folytonos a 0 pontban, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x - 0\|_1 < \delta$ esetén $\|Ax - A0\|_2 < 1$. Mivel A lineáris, ezért $A0 = 0$. Ha $x \in V_1$ olyan vektor, melyre $\|x\|_1 \leq 1$ teljesül, akkor $\left\|\dfrac{\delta}{2} \cdot x\right\|_1 < \delta$, ezért $\left\|A\left(\dfrac{\delta}{2} \cdot x\right)\right\|_2 < 1$, vagyis $\|Ax\|_2 < \dfrac{2}{\delta}$. Tehát minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|Ax\|_2 < \dfrac{2}{\delta}$, ezért

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

$3 \Rightarrow 4$ Legyen $K = \sup\limits_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$, valamint legyen $z \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméterek.

Megmutatjuk, hogy ha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K+1}$ és a $z \in V$ vektorra $\|y-z\|_1 < \delta$ teljesül, akkor $\|Ay - Az\|_2 < \varepsilon$. Ez az alábbiakból következik $y \neq z$ esetén.

$$\|Ay - Az\|_2 = \|A(y-z)\|_2 = \|y-z\|_1 \cdot \left\| A\left(\frac{y-z}{\|y-z\|_1}\right)\right\|_2 \leq \|y-z\|_1 \cdot K \leq \delta \cdot K = \varepsilon \cdot \frac{K}{K+1} < \varepsilon$$

Ezek alapján az A leképezés egyenletesen folytonos.
$4 \Rightarrow 1$ Minden egyenletesen folytonos leképezés folytonos.

Jelölés. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. A $V_1 \to V_2$ folytonos lineáris leképezések halmazára a továbbiakban a $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ jelölést fogjuk használni.

14.15. Definíció. Adott $(V, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a folytonos lineáris $V \to \mathbb{K}$ leképezéseket *folytonos lineáris funkcionáloknak*, vagy röviden csak *funkcionáloknak* nevezzük. Bevezetjük még a $V' \triangleq \mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ jelölést a funkcionálok halmazára. A V' teret a V *normált tér topologikus duálisának* nevezzük.

Magyarázat. A következő állításokban összefoglaljuk az $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ tér főbb jellemzőit.

14.16. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. Az $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}(V_1, V_2) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A, B \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Mivel A és B folytonos, ezért a 14.14 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|(A+B)x\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax + Bx\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2) \leq \\
&\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 + \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Bx\|_2 = \|A\| + \|B\|\,; \\
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\lambda A x\|_2 = |\lambda| \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = |\lambda| \cdot \|A\|
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\|A+B\|, \|\lambda A\| < \infty$, ezért a 14.14 tétel alapján $A+B, \lambda A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$, vagyis $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ vektortér. Továbbá a fenti egyenletek igazolják az $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ és a $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ egyenleteket.
Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in V_1$ vektorra $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|Ax\|_2 = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $Ax' = \dfrac{1}{\|x\|_1} Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

Magyarázat. Későbbi számolások és bizonyítások során számtalanszor fogjuk használni hivatkozás nélkül az alábbi tételben foglalt egyenlőtlenséget.

14.17. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$. Ekkor*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 .$$

Bizonyítás. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $\|Ax'\|_2 \leq \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

14.18. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathscr{L}(V_2, V_3)$. Ekkor $BA \in \mathscr{L}(V_1, V_3)$, továbbá*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathscr{L}(V_2, V_3)$. Mivel minden $x \in V_1$ vektor esetén

$$\|BAx\|_3 \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_2 \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1 ,$$

ezért

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|BAx\|_3 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1) = \|B\| \cdot \|A\| .$$

Mivel $\|BA\| < \infty$, ezért BA folytonos lineáris leképezés.

14.19. Tétel. *Minden $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén az*

$$\begin{aligned} M_c : V \to V \qquad & x \mapsto cx, \\ L_z : V \to V \qquad & x \mapsto z + x \end{aligned}$$

leképezés homeomorfizmus.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált rér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az $M_c : V \to V$, $M_c(x) = cx$ leképezés lineáris bijekció, melyre

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|M_c x\| \leq |c| \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| = |c|$$

és hasonlóan

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|M_{c^{-1}} x\| \leq |c|^{-1}$$

teljesül, ezért a 14.14 tétel alapján M_c és M_c^{-1} is folytonos.
Tekintsük az $L_z : V \to V$, $L_z(x) = z + x$ leképezést, mely nyilván bijekció. Elég megmutatni, hogy minden $z \in V$ esetén L_z folytonos, ugyanis minden $z \in V$ elemre $L_z^{-1} = L_{-z}$ teljesül. Az L_z leképezés folytonos bármely $x_0 \in V$ pontban, hiszen

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x \in V : \qquad \|x - x_0\| < \varepsilon \quad \to \quad \|L_z(x) - L_z(x_0)\| = \|x - x_0\| < \varepsilon$$

teljesül.

14.5. Folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai

14.20. Tétel. *Ha $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér, akkor $(\mathscr{L}(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ is Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(V_1, V_2)$ Cauchy-sorozat. Legyen $x \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, vagyis az

$$\|a_n(x) - a_m(x)\| \leq \|x\| \cdot \|a_n - a_m\| < \|x\| \cdot \varepsilon$$

egyenlőtlenség alapján $n \mapsto a_n(x)$ Cauchy-sorozat a V_2 teljes térben, ezért létezik a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n(x)$ határérték minden $x \in V_1$ esetén. Ennek a segítségével definiáljuk a

$$A : V_1 \to V_2 \qquad x \mapsto \lim_{n \to \infty} a_n(x)$$

függvényt.
Megmutatjuk, hogy A lineáris leképezés. Legyen $x, y \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Ekkor az

$$\begin{aligned} A(x + y) &= \lim_{n \to \infty} a_n(x + y) = \lim_{n \to \infty} (a_n(x) + a_n(y)) = \lim_{n \to \infty} a_n(x) + \lim_{n \to \infty} a_n(y) = Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lim_{n \to \infty} a_n(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} (\lambda a_n(x)) = \lambda \lim_{n \to \infty} a_n(x) = \lambda \cdot Ax \end{aligned}$$

egyenlőségek igazolják A linearitását.
Megmutatjuk, hogy A folytonos lineáris leképezés. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért korlátos is, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|a_n\| < K$. Ekkor minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \leq 1$ vektorra

$$\|a_n x\|_2 \leq \|a_n\|_1 \cdot \|x\| < K$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \left\| \lim_{n\to\infty} a_n(x) \right\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \lim_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_2 \leq$$
$$\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \, \|x\|_1 \leq \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \leq K$$

következik, ami a 14.14 tétel alapján azt jelenti, hogy A folytonos lineáris leképezés. Vagyis $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$.
Azt kell még igazolni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ normált térben. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|a_n x - a_m x\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|a_n - a_m\| \cdot \|x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenségen végrehajtva az $n \to \infty$ határátmenetet

$$\|A - a_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik. Így minden $m > N$ számra $\|A - a_m\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

14.21. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és legyen $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ha $\dim V_1 < \infty$, akkor A folytonos. Azaz minden véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezés folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint tegyük fel, hogy V_1 véges dimenziós. Legyen $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ egy bázisa a V_1 vektortérnek és a V_1 téren tekintsük a

$$\|\cdot\|_1' : V_1 \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\|_1' = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

normát. Legyen továbbá $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Definiáljuk a $K = \max\{\|Ae_i\|_2 \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in V_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot Ae_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Ae_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot K = K \cdot \|x\|_1',$$

vagyis

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1' \leq 1} \|Ax\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1' \leq 1} \left(K \cdot \|x\|_1'\right) = K < \infty,$$

ezért A folytonos a $(V_1, \|\cdot\|_1')$ téren. Mivel V_1 véges dimenziós, ezért a 14.30 tétel alapján a $\|\cdot\|_1$ és a $\|\cdot\|_1'$ normák ekvivalensek egymással ezért A a $(V_1, \|\cdot\|_1)$ téren is folytonos.

14.22. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható, inverze folytonos lineáris leképezés és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol 1 jelöli a $V \to V$ identitásfüggvényt.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{L}(V,V)$ olyan, hogy $\|A\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Ebből $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ adódik, melynek következménye, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$. Továbbá a $\sum\limits_n A^n$ sor abszolút konvergens, mert $\sum\limits_n \|A^n\| \leq \sum\limits_n \|A\|^n < \infty$, hiszen $\|A\| < 1$. A minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényes

$$(1-A)\cdot\sum_{k=0}^{n} A^k = \left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right)\cdot(1-A) = 1 - A^{n+1}$$

képletnél az $n \to \infty$ határátmenetet véve az eddigi megállapítások alapján

$$(1-A)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)\cdot(1-A) = 1$$

adódik, vagyis $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ az $1-A$ elem inverze.

14.23. Tétel. *Legyen U és V Banach-tér és legyen*

$$G(\mathscr{L}(U,V)) \triangleq \{a \in \mathscr{L}(U,V) |\ \exists a' \in \mathscr{L}(V,U):\ aa' = \mathrm{id}_V,\ a'a = \mathrm{id}_U\}.$$

(Vagyis $G(\mathscr{L}(U,V))$ jelöli a azon invertálható lineáris leképezések halmazát, melyek inverze is folytonos.) Ekkor

1. *minden $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G(\mathscr{L}(U,V))$;*
2. *a $G(\mathscr{L}(V,V))$ halmaz nyílt;*
3. *az $i : G(\mathscr{L}(U,V)) \to G(\mathscr{L}(V,U))$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.*

Bizonyítás. Legyen U és V Banach-tér és legyen

$$G(\mathscr{L}(U,V)) \triangleq \{a \in \mathscr{L}(U,V) |\ \exists a' \in \mathscr{L}(V,U):\ aa' = \mathrm{id}_V,\ a'a = \mathrm{id}_U\}.$$

1. Legyen $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ és legyen $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ tetszőleges elem. Ekkor $\|a-b\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$, vagyis $\|a-b\|\cdot\|a^{-1}\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt

$$\|\mathrm{id}_V - ba^{-1}\| = \|(a-b)a^{-1}\| \leq \|a-b\|\cdot\|a^{-1}\| < 1,$$

ami a Carl Neumann-féle sorfejtés miatt azt jelenti, hogy az $\mathrm{id}_V - (\mathrm{id}_V - ba^{-1})$ elem invertálható és az inverze is folytonos lineáris leképezés, vagyis $ba^{-1} \in G(\mathscr{L}(V,V))$. Legyen $b' = a^{-1}(ba^{-1})^{-1}$. Ekkor $bb' = 1$ nyilván teljesül, valamint ha a

$$(ba^{-1})^{-1}(ba^{-1}) = 1$$

egyenletet megszorozzuk jobbról az a, balról az a^{-1} mennyiségekkel, akkor $b'b = 1$ adódik. Tehát b' a b inverze, vagyis $b \in G(\mathscr{L}(U,V))$.
2. Mivel a $G(\mathscr{L}(U,V))$ halmaz minden pontja belső pont, ezért nyílt halmaz.
3. Legyen $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathscr{L}(U,V)$ elemre

$$\|a-x\| < \delta \quad \to \quad x \in G(\mathscr{L}(U,V)) \ \wedge\ \|a^{-1} - x^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az i leképezés folytonos az a pontban. Legyen $\delta_1 = \dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$ és $x \in B_{\delta_1}(a)$. Ekkor az 1. pont alapján $x \in G(\mathscr{L}(U,V))$. Tekintsük a következő átalakításokat.

$$\left((x^{-1} - a^{-1}) + a^{-1}\right)\cdot((x-a)+a) = \mathrm{id}_U$$

$$
\begin{aligned}
&(x^{-1}-a^{-1})(x-a)+(x^{-1}-a^{-1})a+a^{-1}(x-a)=0\\
&(x^{-1}-a^{-1})a=-a^{-1}(x-a)-(x^{-1}-a^{-1})(x-a)\\
&x^{-1}-a^{-1}=-a^{-1}(x-a)a^{-1}-(x^{-1}-a^{-1})(x-a)a^{-1}\\
&\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\|\le\left\|a^{-1}\right\|^2\cdot\|x-a\|+\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\|\cdot\|x-a\|\cdot\left\|a^{-1}\right\|\\
&\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\|\left(1-\|x-a\|\cdot\left\|a^{-1}\right\|\right)\le\left\|a^{-1}\right\|^2\cdot\|x-a\|\\
&\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\|\le\frac{\left\|a^{-1}\right\|^2}{1-\|x-a\|\cdot\|a^{-1}\|}\cdot\|x-a\|<\frac{\left\|a^{-1}\right\|^2}{1-\frac{1}{2}}\cdot\|x-a\|
\end{aligned}
$$

Itt az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\|x-a\|<\delta_1\quad\to\quad\|x-a\|\cdot\left\|a^{-1}\right\|<\frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget. Vagyis ha $\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{2\left\|a^{-1}\right\|^2}$ és $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, akkor minden $x\in B_\delta(a)$ elemre

$$\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\|<\varepsilon$$

teljesül.

Kiegészítés. A fenti tételek és az azokhoz tartozó bizonyítások sokkal általánosabb keretek között is érvényben maradnak.

14.24. Definíció. Legyen A algebra és legyen $\|\cdot\|:A\to\mathbb{R}^+$ norma az A vektortéren.

- Azt mondjuk, hogy a $\|\cdot\|$ norma *szubmultiplikatív*, ha minden $a,b\in A$ elemre $\|ab\|\le\|a\|\cdot\|b\|$.
- Az $(A,\|\cdot\|)$ párt *normált algebrának* nevezzük, ha $\|\cdot\|$ szubmultiplikatív norma az A vektortéren.
- Az $(A,\|\cdot\|)$ párt *Banach-algebrának* nevezzük, ha az $(A,\|\cdot\|)$ normált algebra teljes.

14.25. Tétel. *Legyen $(V,\|\cdot\|)$ Banach-tér. Ekkor az $\mathscr{L}(V,V)$ tér az operátornormával egységelemes Banach-algebra.*

Bizonyítás. A $\mathscr{L}(V,V)$ tér a 14.20 tétel miatt Banach-tér, melyen a norma a 14.18 tétel miatt szubmultiplikatív.

14.26. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Legyen A egységelemes Banach-algebra, melynek jelölje 1 az egységelemét és legyen $a\in A$. Ekkor*

1. *a $\sum_{n=0}^{\infty}a^n$ sor pontosan akkor konvergens, ha $\lim_{n\to\infty}a^n=0$ és létezik $(1-a)^{-1}\in A$;*
2. *ha a $\sum_{n=0}^{\infty}a^n$ sor konvergens, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=(1-a)^{-1}.$$

Bizonyítás. A 14.22 Carl Neumann-tételnél leírt bizonyítás, változtatás nélkül, ilyen keretek között is érvényes.

14.27. Tétel. *Legyen A egységelemes Banach-algebra és legyen $a\in A$. Ha $\|a\|<1$, akkor az $1-a$ elem invertálható.*

Bizonyítás. Az előző tétel közvetlen következménye.

14.28. Tétel. *Legyen A egységelemes Banach-algebra és jelölje $G(A)$ az A invertálható elemeinek a halmazát. Ekkor*

1. *minden $a\in G(A)$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)\subseteq(A)$;*
2. *a $G(A)$ nyílt halmaz;*
3. *az $i:G(A)\to G(A)$, $i(a)=a^{-1}$ leképezés folytonos.*

Bizonyítás. A 14.23 tételnél leírt bizonyítás ebben az esetben is érvényes változtatás nélkül. ◊

14.6. Véges dimenziós normált terek

14.29. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér a $\mathbb{K}$ számtest felett és legyen $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ ennek egy bázisa. Tekintsük a*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezést.

1. *A φ lineáris homeomorfizmus a $(V, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ terek között.*
2. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt.*
3. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér és legyen $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ ennek egy bázisa. Ekkor a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezés nyilvánvalóan lineáris bijekció és az inverze is lineáris.
1. Mivel

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

norma a $\mathbb{K}^n$ téren, ahol a 10.80 tétel alapján bármely két norma ekvivalens, ezért léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\|' = \|\varphi(x)\| \le \alpha \|x\|_\infty \quad \text{és} \quad \|x\|_\infty \le \beta \|x\|' = \beta \|\varphi(x)\| . \tag{14.1}$$

Az első egyenlőtlenségből

$$\sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|\varphi(x)\| \le \alpha < \infty$$

adódik, vagyis φ folytonos. A második egyenletbe minden $y \in V$ esetén az $x = \varphi^{-1}(y)$ elemet írva

$$\left\|\varphi^{-1}(y)\right\|_\infty \le \beta \|y\|$$

adódik, vagyis

$$\sup_{\|y\| \le 1} \left\|\varphi^{-1}(y)\right\|_\infty \le \beta < \infty$$

teljesül, tehát φ^{-1} is folytonos.
2. Legyen $U \subseteq V$. Ha U nyílt, akkor a φ leképezés folytonossága miatt a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ha az $U' \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt, akkor a φ^{-1} leképezés folytonossága miatt a $\left(\varphi^{-1}\right)^{-1}(U') = \varphi(U') \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ezt alkalmazva az $U' = \varphi^{-1}(U)$ halmazra azt kapjuk, hogy ha $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt, akkor $U \subseteq V$ is nyílt.
3. Ha $U \subseteq V$ korlátos halmaz, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi^{-1}(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi^{-1}(U)$, akkor $\|\varphi(x)\| < r$ és a (14.1) egyenlet alapján

$$\|x\|_\infty \le \beta \|\varphi(x)\| < \beta r,$$

vagyis az $R = \beta r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.
Ha az $U \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi(U)$, akkor $\left\|\varphi^{-1}(x)\right\|_\infty < r$ és a (14.1) egyenlet alapján

$$\|x\| = \left\|\varphi(\varphi^{-1}(x))\right\| \le \alpha \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|_\infty < \alpha r,$$

vagyis az $R = \alpha r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.

14.30. Tétel. *Minden V véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Legyen V véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a V egy bázisa és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezést, mely a 14.29 tétel értelmében homeomorfizmus, a V téren értelmezett normától függetlenül.
Tegyük fel, hogy $U \subseteq V$ nyílt halmaz a $\|\cdot\|$ norma szerint. Mivel φ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|)$ terek között, ezért $\varphi^{-1}(U)$ nyílt a $\mathbb{K}^n$ térben. Továbbá φ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|')$ terek között is, ezért $\varphi\left(\varphi^{-1}(U)\right) = U$ nyílt a $(V, \|\cdot\|')$ térben.
Ezután a $\|\cdot\|'$ és a $\|\cdot\|$ norma felcserélésével kapjuk az állítást.

Magyarázat. Ezek után minden véges dimenziós V vektorteret olyan normált térnek tekintünk, ahol a nyílt halmazokat a normák indukálják.

14.31. Tétel. *Legyen V véges dimenziós vektortér és legyen $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ tetszőleges norma. Ekkor*

1. *a V tér teljes;*
2. *a V egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Legyen V véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a V egy bázisa és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezést, mely a 14.29 tétel értelmében homeomorfizmus.
1. A

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

leképezés norma a $\mathbb{K}^n$ téren. A véges dimenziós $\mathbb{K}^n$ téren $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalens normák, ezért a 14.13 tétel alapján létezik olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\alpha \|x\|' \le \|x\|_\infty \le \beta \|x\|' .$$

teljesül. Tehát minden $z \in V$ esetén a fenti egyenlőtlenséget alkalmazva az $x = \varphi^{-1}(z)$ vektorra

$$\alpha \|z\| \le \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|_\infty \le \beta \|z\|$$

adódik. Legyen $a : \mathbb{N} \to V$ Cauchy-sorozat. Mivel minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\varphi^{-1}(a_n) - \varphi^{-1}(a_m)\right\|_\infty = \left\|\varphi^{-1}(a_n - a_m)\right\|_\infty \le \beta \|a_n - a_m\| ,$$

ezért az $n \mapsto b_n = \varphi^{-1}(a_n)$ sorozat Cauchy-sorozat a teljes $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, tehát a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Legyen $A' = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ és $A = \varphi(A')$. A minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő

$$\|a_n - A\| \le \frac{1}{\alpha} \left\|\varphi^{-1}(a_n - A)\right\|_\infty = \frac{1}{\alpha} \|b_n - A'\|_\infty$$

egyenlőtlenség alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
2. Legyen $K \subseteq V$ korlátos és zárt halmaz. Ekkor a 14.29 tétel alapján a $\varphi^{-1}(K)$ halmaz korlátos és zárt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, vagyis a 10.51 tétel Heine–Borel-tétel alapján $\varphi^{-1}(K)$ kompakt. Azonban a $\varphi^{-1}(K)$ kompakt halmaznak az f folytonos függvény általi képe kompakt, ezért $\varphi(\varphi^{-1}(K)) = K$ kompakt halmaz.
Ha $K \subseteq V$ kompakt halmaz, akkor a 13.41 tétel alapján korlátos, és zárt.

14.32. Tétel. *Minden normált tér minden véges dimenziós altere zárt.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $L \subseteq V$ ennek véges dimenziós altere. Ekkor $(L, \|\cdot\|\,|_L)$ véges dimenziós normált tér, tehát az előző 14.31 tétel alapján teljes.

14.33. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *A V vektortér véges dimenziós.*
2. *A V valamely nem nulla sugarú zárt gömbje kompakt.*
3. *A V lokálisan kompakt tér.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
$1 \Rightarrow 2$ A 14.31 tétel alapján a minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $\overline{B_r(x)}$ halmaz kompakt, hiszen korlátos és zárt.
$2 \Rightarrow 3$ Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre az $\overline{B_r(x)}$ gömb kompakt és legyen $z \in V$ tetszőleges. Mivel a 14.19 tétel alapján a

$$L_{z-x} : V \to V \qquad y \mapsto z - x + y$$

leképezés homeomorfizmus és

$$L_{z-x}\left(\overline{B_r(x)}\right) = \overline{B_r(z)}$$

teljesül, ezért a $\overline{B_r(z)}$ halmaz is kompakt. Tehát a z pontnak létezik kompakt környezete.
$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \subseteq V$ a nullának egy kompakt környezete, ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(0) \subseteq K$ teljesül. Tekintsük a

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{r}{2}}(x)$$

nyílt befedést. Mivel K kompakt, ezért létezik olyan véges $H \subseteq K$, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{r}{2}}(x) \tag{14.2}$$

is teljesül. Legyen $W = \operatorname{Span}\{x \in H\}$, vagyis W jelöli a H halmazban lévő vektorok lineáris burkát, mely véges dimenziós altér a V vektortérben, ezért a 14.32 tétel miatt W zárt lineáris altere a V normált térnek.
A (14.2) tartalmazást a

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} x + \frac{1}{2}B_r(0) \subseteq W + \frac{1}{2}B_r(0)$$

alakban is felírhatjuk, amiből a $G = B_r(0)$ jelöléssel

$$G \subseteq W + \frac{1}{2}G$$

adódik. Ebből teljes indukcióval minden $n \in \mathbb{N}$ számra $G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G$ következik, hiszen az $n = 0$ esetben nyilvánvaló, az $n = 1$ esetben pedig az imént bizonyítottuk és ha az n számra igaz az állítás, akkor

$$G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G \subseteq W + \frac{1}{2^n}\left(W + \frac{1}{2}G\right) = W + \frac{1}{2^{n+1}}G,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\frac{1}{2}W = W$ és $W + W = W$.
Igazoljuk, hogy $G \subseteq W$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in G \setminus W$ elem. Ekkor a W halmaz zártsága és $x \notin \overline{W}$ miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, $R < \|x\|$, hogy $B_R(x) \cap W = \emptyset$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x \in G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G \quad \to \quad x \in \frac{1}{2^n}G,$$

amiből az $x = 0$ ellentmondás következik.
Mivel W lineáris altér, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra $nW = W$, valamint

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} nG \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W = W$$

miatt $V \subseteq W$. A $W \subseteq V$ tartalmazás pedig nyilvánvaló. Tehát $V = W$, azaz V véges dimenziós.

14.7. Elpé terek

14.34. Definíció. Minden $p \in [1, \infty[$ paraméter mellett az

$$l^p_{\mathbb{K}} \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p < \infty \right\}$$

halmazt, valamint $p = \infty$ esetén az

$$l^p_{\mathbb{K}} \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n| < \infty \right\}$$

halmazt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén *valós-* illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén *komplex* l^p (ejtsd: *elpé*) *térnek* nevezzük.

14.35. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén $l^p_{\mathbb{K}}$ vektortér, a*

$$\|\cdot\|_p : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R} \qquad s \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés pedig norma az $l^p_{\mathbb{K}}$ téren. Tehát minden $p \in [1, \infty[$ valós számra $(l^p_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_p)$ normált-tér.

Bizonyítás. Legyen $p \in [1, \infty[$, $x, y \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $c \in \mathbb{K}$. Megmutatjuk, hogy $x + y \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. A 7.29 Minkowski-egyenlőtlenség alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p},$$

ezért

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p \leq \left(\sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p} \right)^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right)^p < \infty.$$

Tehát a $\sum_n |x_n + y_n|^p$ sor konvergens, amiből $x + y \in l^p_{\mathbb{K}}$ következik, továbbá $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ is teljesül. Minden $c \in \mathbb{K}$ és $x \in l^p_{\mathbb{K}}$ esetén $\|cx\|_p = |c| \cdot \|x\|_p$ nyilvánvalóan teljesül, ezért $cx \in l^p_{\mathbb{K}}$, tehát $l^p_{\mathbb{K}}$ vektortér. A normára vonatkozó

$$\|x\|_p = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad x = 0$$

követelmény szintén a definíció közvetlen következménye.

14.8. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok normált terekben

14.36. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Ha $x_0, x_1 \in V$, akkor a*

$$\gamma_{x_0, x_1} : [0, 1] \to V \qquad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0)$$

függvény folytonos.

2. *Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \ldots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$, akkor a*

$$\gamma : [0, 1] \to V \qquad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\} \left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]} \right)$$

függvény folytonos, továbbá minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén minden $t \in [0, 1]$ számra

$$\gamma_{x_k, x_{k+1}}(t) = \gamma \left(\frac{k + t}{n} \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. Legyen $x_0, x_1 \in V$ olyan, hogy $x_0 \neq x_1$ és legyen

$$\gamma_{x_0,x_1} : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0).$$

Legyen $t_0 \in [0,1]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ehhez definiáljuk a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|}$ paramétert. Ha $t \in [0,1]$ olyan, melyre $|t - t_0| < \delta$ teljesül, akkor

$$\|\gamma_{x_0,x_1}(t) - \gamma_{x_0,x_1}(t_0)\| = \|(t - t_0)(x_1 - x_0)\| = |t - t_0| \cdot \|x_1 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|} \cdot \|x_1 - x_0\| = \varepsilon.$$

Vagyis γ folytonos a t_0 pontban és így minden pontban is folytonos. Ha $x_0 = x_1$, akkor a γ függvény nyilván folytonos.
2. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \dots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$ és tekintsük a

$$\gamma : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\}\,(x_{[nt]+1} - x_{[nt]})$$

függvényt. Legyen $k \in \{0, \dots, n-1\}$ és $t \in [0,1[$ tetszőleges. Ekkor

$$\gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) = x_{[k+t]} + \{k+t\}\,(x_{[k+t]+1} - x_{[k+t]}) = x_k + t(x_{k+1} - x_k) = \gamma_{x_k,x_{k+1}}(t).$$

Ha $k \in \{0, \dots, n-1\}$ és $t = 1$, akkor

$$\gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) = x_{[k+1]} + \{k+1\}\,(x_{[k+1]+1} - x_{[k+1]}) = x_{k+1} = \gamma_{x_k,x_{k+1}}(1).$$

Tehát minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ és $t \in [0,1]$ számra

$$\gamma_{x_k,x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right)$$

teljesül.
Megmutatjuk, hogy a γ függvény folytonos. Legyen $t_0 \in [0,1]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és ehhez definiáljuk a

$$\delta_1 = \frac{1}{n} \cdot \min\left\{ \frac{\varepsilon}{\|x_{k+1} - x_k\|} \;\middle|\; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

számot.
Ha $nt_0 \notin \mathbb{N}$, akkor legyen

$$\delta_2 = \min\left\{ \left| t_0 - \frac{k}{n} \right| \;\middle|\; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

és legyen $\delta = \dfrac{1}{2} \cdot \min\{\delta_1, \delta_2\}$, valamint $k_1 = [nt_0]$ és $k_2 = k_1 + 1$. Ekkor nyilván $k_1, k_2 \in \{0, \dots, n\}$
Ha $t \in [0,1]$ olyan, hogy $|t - t_0| < \delta$, akkor az

$$\frac{k_1}{n} = t_0 - \left| t_0 - \frac{k_1}{n} \right| \leq t_0 - \frac{\delta_2}{2} < t < t_0 + \frac{\delta_2}{2} \leq t_0 + \left| t_0 - \frac{k_2}{n} \right| = \frac{k_2}{n}$$

egyenlőtlenség alapján

$$k_1 < nt < k_2,$$

vagyis $[nt] = [nt_0] = k_1$, továbbá az

$$nt = [nt] + \{nt\}$$
$$nt_0 = [nt_0] + \{nt_0\}$$

egyenlőségekből

$$\{nt\} - \{nt_0\} = n(t - t_0)$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\| &= \left\|x_{[nt]}+\{nt\}\left(x_{[nt]+1}-x_{[nt]}\right)-x_{[nt_0]}-\{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1}-x_{[nt_0]}\right)\right\| = \\ &= \|\{nt\}\left(x_{k_2}-x_{k_1}\right)-\{nt_0\}\left(x_{k_2}-x_{k_1}\right)\| = \\ &= |\{nt\}-\{nt_0\}|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = \\ &= |n(t-t_0)|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = n\cdot|t-t_0|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| < \\ &< n\cdot\delta_1\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| \le n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{\|x_{k_2}-x_{k_1}\|}\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = \varepsilon,\end{aligned}$$

ami mutatja a γ függvény t_0 pontbeli folytonosságát.
Ha $nt_0\in\mathbb{N}$, akkor legyen $\delta_2=\dfrac{1}{n}$ és $\delta=\dfrac{1}{2}\cdot\min\{\delta_1,\delta_2\}$, valamint $k_1=nt_0$, $k_2=k_1+1$ és $k_0=k_1-1$.
Ha $t\in\,]t_0,t_0+\delta[\,\cap[0,1]$, akkor

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\| &= \left\|x_{[nt]}+\{nt\}\left(x_{[nt]+1}-x_{[nt]}\right)-x_{[nt_0]}-\{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1}-x_{[nt_0]}\right)\right\| = \\ &= \|x_{k_1}+\{nt\}\left(x_{k_2}-x_{k_1}\right)-x_{k_1}\| = \\ &= |\{nt\}|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = \\ &= |n(t-t_0)|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| < \\ &< n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{\|x_{k_2}-x_{k_1}\|}\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ha $t\in\,]t_0-\delta,t_0[\,\cap[0,1]$, akkor az $nt=[nt]+\{nt\}=k_1-1+\{nt\}$ egyenletből

$$1-\{nt\}=k_1-nt=nt_0-nt$$

adódik, amit alapján

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\| &= \left\|x_{[nt]}+\{nt\}\left(x_{[nt]+1}-x_{[nt]}\right)-x_{[nt_0]}-\{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1}-x_{[nt_0]}\right)\right\| = \\ &= \|x_{k_0}+\{nt\}\left(x_{k_1}-x_{k_0}\right)-x_{k_1}\| = \\ &= |1-\{nt\}|\cdot\|x_{k_0}-x_{k_1}\| = \\ &= |n(t-t_0)|\cdot\|x_{k_0}-x_{k_1}\| < \\ &< n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{\|x_{k_0}-x_{k_1}\|}\cdot\|x_{k_0}-x_{k_1}\| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tehát minden $t\in\,]t_0-\delta,t_0+\delta[\,\cap[0,1]$ esetén

$$\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|<\varepsilon$$

teljesül, vagyis a γ függvény folytonos a t_0 pontban.

14.37. Tétel. *Normált térben minden konvex halmaz ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér, $A\subseteq V$ konvex halmaz és legyen $x,y\in A$ tetszőleges két pont. Ha $x=y$, akkor a $\gamma:[0,1]\to V$, $\gamma(t)=x$ függvény nyilván folytonos. Ha $x\neq y$, akkor az előző 14.36 tétel alapján a

$$\gamma:[0,1]\to A \qquad t\mapsto x+t(y-x)$$

függvény folytonos és nyilvánvaló módon teljesül rá $\gamma(0)=x$ és $\gamma(1)=y$, vagyis γ összeköti az x és az y pontot.

14.38. Tétel. *Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *A V halmaz ívszerűen összefüggő.*
2. *A V halmaz összefüggő.*
3. *Ha $A\subseteq V$ olyan halmaz mely nyílt és zárt, akkor $A=\emptyset$ vagy $A=V$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér.
1. Mivel V konvex halmaz, ezért a 14.37 tétel alapján ívszerűen összefüggő.
2. Mivel V ívszerűen összefüggő, ezért a 13.107 tétel alapján összefüggő.
3. A 13.110 tétel következménye.

14.39. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Ha $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül, akkor $B = A$.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Legyen $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül. Tegyük fel, hogy $A \setminus B \neq \emptyset$. Definiáljuk az $U = B$ és $V = A \setminus B$ halmazokat. Ekkor $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cup V = A$ és

$$\overline{U} \cap V = \overline{B} \cap (A \setminus B) = \overline{B} \cap (A \setminus (\overline{B} \cap A)) = \overline{B} \cap (A \setminus \overline{B}) = \emptyset$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$, legyen $z \in U \cap \overline{V}$. Ekkor $z \in U = B$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \subseteq B$. Továbbá $z \in \overline{V} = \overline{A \setminus B}$ miatt létezik olyan $x \in A \setminus B$, melyre $\|x - z\| < r$ teljesül. Ebben az esetben $x \in A$, $x \notin B$, azonban $x \in B_r(z)$ miatt $x \in B$. Tehát téves volt az $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$ feltételezés, vagyis $U \cap \overline{V} = \emptyset$.
Ebből az az ellentmondás adódik, hogy az A halmaz nem összefüggő, vagyis az $A \setminus B \neq \emptyset$ feltételezés nem tartható, így $A \setminus B = \emptyset$, amiből $B \subseteq A$ miatt $B = A$ adódik.

14.40. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az A halmaz összefüggő.*
2. *Minden $x, y \in A$ ponthoz létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \ldots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$.*
3. *Az A halmaz ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz.
1⇒2 Legyen $c \in A$ egy rögzített pont. Legyen

$$A_c = \left\{ y \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N}^+, \exists z_0, \ldots, z_n \in A: \; z_0 = c, \; z_n = y, \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A \end{array} \right\}.$$

Megmutatjuk, hogy az A_c halmaz nyílt. Ha $x \in A_c$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\exists z_0, \ldots, z_n \in A: \; z_0 = c, \; z_n = x, \; \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A.$$

Továbbá $x \in A$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq A$. Ha $y \in B_r(x) \setminus \{x\}$, akkor $[x, y] \subseteq B_r(x) \subseteq A$, vagyis ha $z_{n+1} = y$, akkor

$$z_0 = c, \; z_{n+1} = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, n\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A$$

teljesül, vagyis $y \in A_c$. Tehát $B_r(x) \subseteq A_c$ is teljesül, vagyis A_c nyílt halmaz.
Most igazoljuk, hogy $\overline{A_c} \cap A = A_c$. Mivel $A_c \subseteq \overline{A_c} \cap A$ nyilvánvalóan teljesül, ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{A_c} \cap A \subseteq A_c$. Legyen $x \in \overline{A_c} \cap A$. Ekkor $x \in A$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq A$ teljesül. Mivel $x \in \overline{A_c}$, ezért létezik olyan $y \in A_c$, melyre $\|x - y\| < \dfrac{r}{2}$ teljesül. Ekkor $y \in B_r(x)$, vagyis $[y, x] \subseteq B_r(x) \subseteq A$, valamint $y \in A_c$, miatt létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\exists z_0, \ldots, z_n \in A: \; z_0 = c, \; z_n = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A.$$

Ha $z_{n+1} = x$, akkor

$$z_0 = c, \; z_{n+1} = x, \; \forall k \in \{0, \ldots, n\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A$$

teljesül, vagyis $x \in A_c$.
Ezek alapján $A_c \subseteq A$ olyan nyílt részhalmaza az A összefüggő halmaznak, melyre $\overline{A_c} \cap A = A_c$ teljesül, vagyis az előző 14.39 tétel alapján $A_c = A$.
Most legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont. Ekkor $x, y \in A_c$, vagyis

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ \exists z_0, \ldots, z_n \in A: \; z_0 = c, \; z_n = x, \; \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A$$
$$\exists m \in \mathbb{N}^+ \exists v_0, \ldots, v_m \in A: \; v_0 = c, \; v_m = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, m-1\}: \; v_k \neq v_{k+1}, \; [v_k, v_{k+1}] \in A.$$

Legyen $l = n + m$ és minden $k \in \{0, \dots, l\}$ esetén legyen

$$u_k = \begin{cases} z_{n-k}, & \text{ha} \quad k \leq n; \\ v_{k-n}, & \text{ha} \quad k > n. \end{cases}$$

Ekkor

$$u_0 = x, \ u_l = y, \ \forall k \in \{0, \dots, l-1\} : \ u_k \neq u_{k+1}, \ [u_k, u_{k+1}] \in A.$$

2⇒3 Legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont. Ehhez létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \dots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $z_k \neq z_{k+1}$ és $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$. A 14.36 tétel alapján ekkor létezik olyan folytonos $\gamma : [0,1] \to A$ görbe, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
3⇒1 Ha A ívszerűen összefüggő, akkor a 13.107 tétel alapján összefüggő.

14.9. Normált terek szorzata

14.41. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér, és legyen $p \in [1, \infty[$. A $V = \prod_{k=1}^{n} V_k$ halmazon értelmezzük a*

$$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

függvényeket. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. *A $\|\cdot\|_\infty$ függvény norma.*
2. *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ függvény norma.*
3. *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek egymással.*

Bizonyítás. A bizonyítása teljesen analóg a 14.35 tétel bizonyításával.

14.42. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér és legyen

$$\|\cdot\| : \prod_{k=1}^{n} V_k \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

A $\left(\prod_{k=1}^{n} V_k, \|\cdot\|\right)$ normált teret nevezzük a $(V_k, \|\cdot\|_k)_{k=1,\dots,n}$ *normált terek szorzatának.*

14.10. Normált terek teljes burka

14.43. Tétel. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor létezik olyan $(V', \|\cdot\|')$ Banach-tér és $j : V \to V'$ lineáris izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $\mathcal{V}$ az $\mathbb{N} \to V$ Cauchy-sorozatok halmaza, azaz

$$\mathcal{V} = \left\{a : \mathbb{N} \to V \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (N < n, m \ \to \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon)\right\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $a \in \mathcal{V}$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|$ határérték. Válaszunk $a \in \mathcal{M}$ tetszőleges elemet. Mivel minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\|a_n\| - \|a_m\|| \leq \|a_n - a_m\|$$

teljesül, ezért az $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Definiáljuk az $\sim$ relációt az $\mathcal{V}$ halmazon az alábbi módon.

$$\sim = \left\{(a, b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mid \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \lim_{n\to\infty} \|b_n\|\right\}$$

A $\sim$ reláció nyilván ekvivalenciareláció.
Legyen $V' = \mathcal{V}/\sim$ és

$$\|\cdot\|' : V' \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (a') \mapsto \sup_{a \in a'} \lim_{n\to\infty} \|a_n\|$$

ahol a sup műveletre azért van szükség, hogy az egyetlen számot tartalmazó halmazból számot képezzen.
Ha $a^{(1)}, a^{(2)}, b^{(1)}, b^{(2)} \in \mathcal{V}$ olyan elemek, hogy $a^{(1)} \sim a^{(2)}$ és $b^{(1)} \sim b^{(2)}$, akkor mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\left(a_n^{(1)} + b_n^{(1)}\right) - \left(a_n^{(2)} + b_n^{(2)}\right)\right\| \le \left\|a_n^{(1)} - a_n^{(2)}\right\| + \left\|b_n^{(1)} - b_n^{(2)}\right\|$$

teljesül, ezért $a^{(1)} + b^{(1)} \sim a^{(2)} + b^{(2)}$. Vagyis értelmezhető az összeadás művelet az ekvivalencia osztályokon is, melyet szintén a $+$ szimbólummal fogunk jelölni.
Továbbá, ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a^{(1)}, a^{(2)} \in \mathcal{V}$ olyan elemek, hogy $a^{(1)} \sim a^{(2)}$, akkor mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\lambda a_n^{(1)} - \lambda a^{(2)}\right\| \le |\lambda| \cdot \left\|a_n^{(1)} - a_n^{(2)}\right\|$$

teljesül, ezért $\lambda a^{(1)} \sim \lambda a^{(2)}$. Vagyis értelmezhető a számmal való szorzás művelet az ekvivalencia osztályokon, melyet szintén nem írunk ki. Ezek alapján egyszerűen megmutatható, hogy $(V', \|\cdot\|')$ normált tér.
Minden $x \in V$ esetén jelölje $\tilde{x}$ a konstans x sorozatot (mely nyilván Cauchy-sorozat), és legyen $x' = \tilde{x}/\sim$, valamint

$$j : V \to V' \qquad x \mapsto x'.$$

Ekkor j lineáris izometria. A $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ egyenlőség és a $(V', \|\cdot\|')$ normált tér teljessége a metrikus tér teljes burkának konstrukciójából (13.102 tétel) adódik.

14.44. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $(V', \|\cdot\|')$ Banach-teret és $j : V \to V'$ lineáris izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ teljesül, az $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér teljes burkának* nevezzük.

14.45. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \to V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\|\,|_X)$ normált téren. Ekkor létezik egyetlen olyan $A' : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, mely az A kiterjesztése, vagyis $A'|_{\operatorname{Dom} A} = A$, valamint $\|A'\| = \|A\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \to V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\|\,|_X)$ normált téren.
1. Ha $A_1', A_2' : U \to V$ olyan folytonos függvény, melyre $A_1'|_X = A_2'|_X$ teljesül, akkor az egyenlőség folytatásának az elve alapján (13.74 tétel) $A_1' = A_2'$. Tehát, ha létezik folytonos kiterjesztése az A operátornak, akkor az egyértelmű.
2. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor az $(Aa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel A egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y_1, y_2 \in X$ pontra $\|y_1 - y_2\| < \delta$ esetén $\|Ay_1 - Ay_2\|_V < \varepsilon$ teljesül. Mivel az a sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat is, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n, m$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \delta$. Ekkor viszont minden $N < n, m$ természetes számra $\|Aa_n - Aa_m\|_V < \varepsilon$. Mivel a $(V, \|\cdot\|_V)$ tér teljes, ezért az $(Aa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat konvergens.
3. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont és $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = \lim b = x$ teljesül. Fésüljük össze az a és b sorozatot az alábbi módon.

$$c : \mathbb{N} \to X \qquad n \mapsto \begin{cases} a_{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_{\frac{n-1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor nyilván $\lim c = x$, továbbá az előző pont miatt létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} Ac_n$ határérték. Mivel $(Aa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(Ab_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata az $(Ac_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, ezért

$$\lim_{n\to\infty} Ac_n = \lim_{n\to\infty} Ab_n = \lim_{n\to\infty} Aa_n.$$

4. Ezek után definiálhatjuk úgy az A' függvényt, hogy minden $x \in \overline{X}$ esetén vegyünk egy olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozatot, melyre $\lim a = x$ teljesül és legyen $A'x = \lim\limits_{n\to\infty} Aa_n$. Vagy másképp leírva

$$A' = \left\{(x, y) \in \overline{X} \times V \mid \exists a : \mathbb{N} \to X : \ \lim a = x \ \wedge \ y = \lim_{n\to\infty} Aa_n\right\}.$$

Ekkor nyilván $A \subseteq A'$. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in \overline{X}$, valamint $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Ekkor az

$$\begin{aligned} A'(x+y) &= \lim_{n\to\infty} (A(a_n + b_n)) = \lim_{n\to\infty} (Aa_n) + \lim_{n\to\infty} (Ab_n) = A'x + A'y \\ A'(\lambda x) &= \lim_{n\to\infty} A(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} Aa_n = \lambda A'x \end{aligned}$$

egyenletek alapján A' lineáris.
5. Legyen $x \in \overline{X}$, $\|x\| \leq 1$ tetszőleges vektor és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $a : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Ekkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $\|a_n - x\| < \varepsilon$, vagyis $\|a_n\| < \|x\| + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$. Valamit $A'x = \lim\limits_{n\to\infty} Aa_n$ miatt létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $\|A'x - Aa_n\| < \varepsilon$, vagyis $\|A'x\| < \|Aa_n\| + \varepsilon$. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\max\{N_1, N_2\} < n$, akkor

$$\|A'x\| < \|Aa_n\| + \varepsilon \leq \|A\| \cdot \|a_n\| + \varepsilon \leq (1 + \varepsilon)\|A\| + \varepsilon$$

adódik. Mivel ez minden pozitív ε paraméterre teljesül, ezért $\|A'x\| \leq \|A\|$, amiből pedig

$$\|A'\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A'x\| \leq \|A\|$$

következik. A nyilvánvaló

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \|A'x\| \leq \sup_{\substack{x\in \overline{X} \\ \|x\|\leq 1}} \|A'x\| = \|A'\|$$

egyenlőtlenség miatt $\|A\| = \|A'\|$.

14.46. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j). Minden $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-térhez és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezéshez létezik egyetlen olyan $A' : U' \to V$ folytonos lineáris leképezés, melyre $A' \circ j = A$ teljesül, továbbá $\|A'\| = \|A\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j), $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés. Vezessük be az $X = \operatorname{Ran} j$ jelölést. Ekkor X sűrű lineáris altér az U' Banach-térben. Legyen $\tilde{A} : X \to V$, $\tilde{A}x = A(j^{-1}(x))$. Az $\tilde{A}$ leképezés nyilván lineáris, továbbá

$$\left\|\tilde{A}\right\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \left\|\tilde{A}x\right\|_V = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \left\|A(j^{-1}x)\right\|_V = \sup_{\substack{y\in U \\ \|y\|\leq 1}} \|Ay\|_V = \|A\|.$$

A 14.45 tétel alapján létezik egyetlen olyan $A' : U' \to V$ folytonos lineáris leképezés, mely az $\tilde{A}$ kiterjesztése és amelyre $\|A'\| = \left\|\tilde{A}\right\| = \|A\|$ teljesül. Továbbá, minden $y \in U$ esetén

$$(A' \circ j)(x) = A'(j(x)) = \tilde{A}(j(x)) = A(j^{-1}(j(x))) = Ax,$$

vagyis $A' \circ j = A$.

14.47. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka. Ekkor létezik egyetlen olyan $A : V_1 \to V_2$ lineáris izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka.
Legyen $f : \operatorname{Ran} j_1 \to V_2$, $f = j_2 \circ j_1^{-1}$. Ekkor $f : V_1 \twoheadrightarrow V_2$ sűrűn értelmezett lineáris izometria, ezért a 14.46 tétel alapján létezik egyetlen folytonos lineáris $A : V_1 \to V_2$ kiterjesztése, mely szintén izometria. Mivel $f \circ j_1 = j_2$, ezért $A \circ j_1 = j_2$. Megcserélve a (V_1, j_1) és (V_2, j_2) szerepét az adódik,

hogy létezik olyan folytonos lineáris $A' : V_2 \to V_1$ izometria, mely az $f' : \operatorname{Ran} j_2 \to V_1$, $A' = j_1 \circ j_2^{-1}$ kiterjesztése és melyre $A' \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor

$$A \circ j_1 \circ j_2^{-1} = j_2 \circ j_2^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} j_2}$$
$$(A \circ A')|_{\operatorname{Ran} j_2} = \mathrm{id}_{V_2}|_{\operatorname{Ran} j_2}$$

miatt az egyenlőség folytatásának az elve (13.74 tétel) alapján $A \circ A' = \mathrm{id}_{V_2}$. Szerepcserével pedig $A' \circ A = \mathrm{id}_{V_1}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy A izometrikus bijekció, tehát A^{-1} is folytonos. Vagyis A izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.
Az eőbbi jelölések mellett tegyük fel, hogy $A_1, A_2 : V_1 \to V_2$ olyan folytonos lineáris leképezések, melyekre $j_2 = A_1 \circ j_1 = A_2 \circ j_1$ teljesül. Ekkor $A_1|_{\operatorname{Ran} j_1} = A_2|_{\operatorname{Ran} j_1}$, amiből az egyenlőség folytatásának az elve alapján $A_1 = A_2$ következik.

14.48. Tétel. *Minden normált térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

Bizonyítás. A 14.43 és a 14.47 tétel alapján nyilvánvaló.

14.11. Folytonos multilineáris leképezések

14.49. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ vektorterek rendszere, valamint legyen W is vektortér. Az

$$A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto A(x_1, \dots, x_n)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *n-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $j \in \{1, \dots, n\}$ indexre, minden $(x_i)_{i=1,\dots,n}, (y_i)_{i=1,\dots,n} \in \prod_{i=1}^{n} V_i$ vektorrendszere és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre

$$A(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda A(x_1, \dots, x_n) + \mu A(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

teljesül. A $: \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ n-lineáris leképezések halmazára a $\operatorname{Lin}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ jelölést használjuk.

14.50. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint legyen V és W vektortér. Azt mondjuk, hogy az $A : V^n \to W$ függvény *szimmetrikus multilineáris leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ permutációra és minden $x_1, \dots, x_n \in V$ elemre

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

teljesül. A $V^n \to W$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\operatorname{Lin}_{\mathrm{s}}^n(V^n, W)$ jelöli a továbbiakban.

14.51. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ multilineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az A leképezés folytonos.*
2. *Az A leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. *A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i |\ \|x_i\|_i \le 1\}$ jelölés mellett $\sup_{x \in B} \|A(x)\|_W < \infty$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ a $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek szorzata.
$1 \Rightarrow 2$ Ha A folytonos akkor minden pontban folytonos.
$2 \Rightarrow 3$ Ha A folytonos a 0 pontban, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in V$ vektorra

$\|x-0\|_V < \delta$ esetén $\|Ax - A0\|_W < 1$. Mivel A lineáris, ezért $A0 = 0$. Ha $x \in V$ olyan vektor, melyre $\|x\|_V \leq 1$ teljesül, akkor $\left\|\frac{\delta}{2} \cdot x\right\|_V < \delta$, ezért

$$\left\|A\left(\frac{\delta}{2} \cdot x\right)\right\|_W = \left(\frac{\delta}{2}\right)^n \cdot \|Ax\|_W < 1,$$

vagyis $\|Ax\|_W < \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$. Tehát minden $x \in V$, $\|x\|_V \leq 1$ esetén $\|Ax\|_W < \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$, ezért

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_W \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n < \infty.$$

$3 \Rightarrow 2$ A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i |\ \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett a szorzat téren értelmezett norma definíciója alapján $B = \{x \in V |\ \|x\|_V \leq 1\}$ teljesül. Vezessük be a $K = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W$ jelölést. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, valamint $\delta = \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{K}}$. Ekkor minden $x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $\|x\|_V < \delta$ esetén

$$\|Ax - A0\|_W = \|A(x_1, \ldots, x_n)\|_W = \|x\|_V^n \cdot \left\|A\left\{\frac{x_1}{\|x\|_V}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_V}\right\}\right\|_W \leq \|x\|_V^n \cdot K < \varepsilon$$

teljesül, vagyis A folytonos a 0 pontban.

$3 \Rightarrow 1$ A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i |\ \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett vezessük be a $K = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W$ jelölést. Legyen $a = (a_1, \ldots, a_n) \in V \setminus \{0\}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, valamint $\delta' \in]0,1[$ olyan paraméter, melyre $\delta' < \|a\|$ teljesül. Legyen $x \in V$ olyan, melyre $\|a - x\|_V < \delta'$. Definiáljuk a $z_1, \ldots, z_n \in V$ vektorokat a komponensenként: a z_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) vektor j-edik ($j \in \{1, \ldots, n\}$) komponense legyen

$$(z_i)_j = \begin{cases} a_j, & \text{ha} \quad j < i; \\ x_j - a_j, & \text{ha} \quad j = i; \\ x_j, & \text{ha} \quad j > i. \end{cases}$$

(Vagyis például $n = 3$ esetén $z_1 = (x_1 - a_1, x_2, x_3)$, $z_2 = (a_1, x_2 - a_2, x_3)$, $z_3 = (a_1, a_2, x_3 - a_3)$.) Ekkor teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$A(x) = A(a) + \sum_{k=1}^{n} A(z_k),$$

vagyis

$$\|Ax - Aa\|_W \leq \sum_{k=1}^{n} \|Az_k\|_W .$$

Mivel $\|x\|_V \leq \|x - a\|_V + \|a\| < 1 + \|a\|$, ezért minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned} \|Az_k\|_W &= \|A(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k - a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\|_W = \\ &= \|a\|_V^{k-1} \cdot \|x\|_V^{n-k} \cdot \left\|A\left(\frac{a_1}{\|a\|_V}, \ldots, \frac{a_{k-1}}{\|a\|_V}, x_k - a_k, \frac{x_{k+1}}{\|x\|_V}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_V}\right)\right\|_W \leq \\ &\leq \|a\|_V^{k-1} \cdot \|x\|_V^{n-k}\, \delta' K < \delta' K \, \|a\|_V^{k-1} \, (1 + \|a\|)^{n-k} , \end{aligned}$$

amiből pedig

$$\|Ax - Aa\|_W \leq \delta' \cdot K \sum_{k=1}^{n} \|a\|_V^{k-1} \, (1 + \|a\|)^{n-k}$$

következik. Tehát a

$$\delta = \min\left\{1, \|a\|, \frac{\varepsilon}{K\sum_{k=1}^{n}\|a\|_V^{k-1}(1+\|a\|)^{n-k}}\right\}$$

olyan paraméter, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|a-x\|_V < \delta$ esetén $\|Ax - Aa\|_W < \varepsilon$ teljesül.

Jelölés. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$,$(V_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, W normált tér. A továbbiakban jelölje $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ az $\prod_{i=1}^n V_i \to W$ folytonos multilineáris leképezések halmazát, és $\mathscr{L}_s{}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ a folytonos szimmetrikus leképezések halmazát.

14.52. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Az $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup\left\{\|Ax\|_W \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^n \{x_i \in V_i \mid \|x_i\|_i \le 1\}\right\}$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ a $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek szorzatát.
Legyen $A, B \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Mivel A és B folytonos, ezért a 14.51 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &= \sup_{\|x\|_V \le 1} \|(A+B)x\|_W = \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax+Bx\|_W \le \sup_{\|x\|_V \le 1} (\|Ax\|_W + \|Bx\|_W) \le \\
&\le \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax\|_W + \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Bx\|_W = \|A\| + \|B\|; \\
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|_V \le 1} \|\lambda Ax\|_W = |\lambda| \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax\|_W = |\lambda| \cdot \|A\|
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\|A+B\|, \|\lambda A\| < \infty$, ezért a 14.51 tétel alapján $A+B, \lambda A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$, vagyis $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ vektortér.
Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}^n(V, W)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in V$ vektorra $\|x\|_V \le 1$ esetén $\|Ax\|_W = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in V \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \frac{x}{\|x\|_V}$ vektorra $\|x'\|_V \le 1$, ezért $Ax' = \left(\frac{1}{\|x\|_V}\right)^n Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

14.53. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ és $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n V_i$. Ekkor*

$$\|Ax\|_W \le \|A\| \cdot \prod_{i=1}^n \|x_i\|_i .$$

Bizonyítás. Legyen $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ ezen normált terek szorzatát, legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$.
Legyen $v = (x_1, \dots, x_n) \in V$ tetszőleges vektor. Ha valamelyik $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_i = 0$, akkor az A leképezés multilinearitása miatt $Av = 0$, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesül.
Tegyük fel, hogy a v vektor egyetlen komponense sem a nullvektor. A

$$v' = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|_1}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_n}\right)$$

vektorra $\|v'\|_V \leq 1$ teljesül, tehát $\|Av'\|_W \leq \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

14.54. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-tér. Ekkor $\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right), \|\cdot\|\right)$ is Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ ezen normált terek szorzatát és legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-tér, valamint $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ Cauchy-sorozat. Legyen $x \in V$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, vagyis az

$$\|a_n(x) - a_m(x)\|_W \leq \|x\|_V \cdot \|a_n - a_m\| < \|x\|_V \cdot \varepsilon$$

egyenlőtlenség alapján $n \mapsto a_n(x)$ Cauchy-sorozat a W teljes térben, ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$ határérték minden $x \in V$ esetén. Ennek a segítségével definiáljuk a

$$A : V \to W \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n(x)$$

függvényt.
Megmutatjuk, hogy A multilineáris leképezés. Legyen $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $k \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges. Ekkor az

$$\begin{aligned}
&A(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\
&= \lim_{n\to\infty} (a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n)) = \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\
&= A(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\
&A(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\
&= \lim_{n\to\infty} (\lambda a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)) = \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \lambda \cdot A(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

egyenlőségek igazolják A linearitását a k-adik változóban. Tehát A n-lineáris.
Megmutatjuk, hogy A folytonos lineáris leképezés. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért korlátos is, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|a_n\| < K$. Ekkor minden $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ vektorra $\|x\|_V \leq 1$ esetén a 14.53 tétel alapján

$$\|a_n x\|_W \leq \|a_n\| \cdot \prod_{i=1}^n \|x_i\|_i \leq \|a_n\| \cdot \prod_{i=1}^n 1 < K$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \left\|\lim_{n\to\infty} a_n(x)\right\|_W = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \lim_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_W \leq$$

$$\leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_W \leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \, \|x\|_V \leq \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \leq K$$

következik, ami a 14.51 tétel alapján azt jelenti, hogy A folytonos multilineáris leképezés, vagyis $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$.

Azt kell még igazolni, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right), \|\cdot\|\right)$ normált térben. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a 14.53 tétel alapján

$$\sup_{\|x\|_V \leq 1} \|a_n x - a_m x\|_W \leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|a_n - a_m\| \cdot \prod_{i=1}^n \|x_i\|_i \leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|a_n - a_m\| \cdot \prod_{i=1}^n 1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik. Ebből az $n \to \infty$ határátmenettel

$$\|A - a_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik. Így minden $m > N$ számra $\|A - a_m\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

14.55. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ véges dimenziós normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^n V_i \to W$ n-lineáris leképezés. Ekkor $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ véges dimenziós normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^n V_i \to W$ n-lineáris leképezés. Minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(e_{k,i})_{i=1,\dots,m_k}$ a V_k normált tér egy bázisa.
Minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\|\cdot\|'_k : V_k \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{m_k} a_i e_{k,i} \mapsto \sum_{i=1}^{m_k} |a_i|$$

norma a V_k véges dimenziós téren. A véges dimneziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással a 14.30 tétel szerint, ezért létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V_k$ vektorra $\|x\|'_k \leq C_k \|x\|_k$ teljesül. Legyen $C = \max\{C_k |\ k \in \{1, \dots, n\}\}$ és

$$K = \max\left\{\|A(e_{1,i_1}, e_{2,i_2}, \dots, e_{n,i_n})\|_W \mid \forall k \in \{1, \dots, n\} : i_k \in \{1, \dots, m_k\}\right\}.$$

Legyen minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_k \in V_k$ tetszőleges vektor, melyet írjunk fel a V_k tér bázisában

$$x_k = \sum_{i_k=1}^{m_k} a_{k,i_k} e_{k,i_k}.$$

Az A multilinearitásának a felhasználásával az

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \dots, x_n)\|_W &= \left\| A\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} a_{1,i_1} e_{1,i_1}, \sum_{i_2=1}^{m_2} a_{2,i_2} e_{2,i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{m_n} a_{n,i_n} e_{n,i_n}\right)\right\|_W \leq \\
&\leq \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} |a_{1,i_1}| \, |a_{2,i_2}| \dots |a_{n,i_n}| \, \|A(e_{1,i_1}, e_{2,i_2}, \dots, e_{n,i_n})\|_W \leq \\
&\leq K \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} |a_{1,i_1}| \, |a_{2,i_2}| \dots |a_{n,i_n}| =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= K\left(\sum_{i_1=1}^{m_1}|a_{1,i_1}|\right)\left(\sum_{i_2=1}^{m_2}|a_{2,i_2}|\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{i_n=1}^{m_n}|a_{n,i_n}|\right)=\\
&= K\,\|x_1\|_1'\,\|x_2\|_2'\cdot\ldots\cdot\|x_n\|_n'\le\\
&\le KC_1C_2\cdot\ldots\cdot C_n\,\|x_1\|_1\,\|x_2\|_2\cdot\ldots\cdot\|x_n\|_n\le\\
&\le KC^n\prod_{k=1}^{n}\|x_k\|_k
\end{aligned}
$$

egyenlőtlenség adódik. A $B=\prod_{k=1}^{n}\{x_k\in V_k|\ \|x_k\|_k\le 1\}$ jelöléssel élve a fenti egyenlőtlenség szerint

$$\sup_{x\in B}\|A(x)\|_W\le KC^n<\infty.$$

Ez pedig a 14.51 tétel alapján garantálja A folytonosságát.

14.56. Tétel. *Legyen $n\in\mathbb{N}^+$, $(V_i,\|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(W,\|\cdot\|_W)$ normált tér. Ekkor $\mathscr{L}_s{}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i,W)\right)$ zárt lineáris altere a $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i,W)\right)$ térnek.*

Bizonyítás. Legyen $n\in\mathbb{N}^+$, $(V_i,\|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(W,\|\cdot\|_W)$ normált tér. Vezessük be a

$$\mathrm{Perm}(n)=\{\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}\mid\sigma\text{ bijekció}\}$$

jelölést. Minden $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}V_i$ vektorra és $\sigma\in\mathrm{Perm}(n)$ permutációra legyen

$$J_{x,\sigma}:\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i,W\right)\to W\qquad A\mapsto A(x_1,\ldots,x_n)-A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

A $J_{x,\sigma}$ leképezés nyilván lineáris és a 14.53 tétel segítségével származtatott

$$\|J_{x,\sigma}A\|_W\le 2\,\|A\|\cdot\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|_i$$

egyenlőtlenség alapján folytonos is, ezért a $\overset{-1}{J_{x,\sigma}}(0)$ halmaz zárt. Mivel zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt és

$$\mathscr{L}_s\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i,W)\right)\right)=\bigcap_{x\in\prod_{i=1}^{n}V_i}\ \bigcap_{\sigma\in\mathrm{Perm}(n)}\overset{-1}{J_{x,\sigma}}(0),$$

ezért a $\mathscr{L}_s\left(\prod_{i=1}^{n}V_i,W\right)$ halmaz zárt.

14.57. Tétel. *Legyen $n\in\mathbb{N}^+$, $(V_i,\|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(V,\|\cdot\|_V)$ és $(W,\|\cdot\|_W)$ normált tér. A*

$$\rho:\mathscr{L}\left(V,\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i,W)\right)\right)\to\mathscr{L}^{n+1}\left(V\times\prod_{i=1}^{n}V_i,W\right)\qquad A\mapsto\Big((x_1,x_2)\mapsto(A(x_1))(x_2)\Big)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A\in\mathscr{L}\left(V,\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i,W\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\|=\|A\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V', \|\cdot\|')$ a $\prod_{i=1}^n V_i$ a normált terek szorzatát, valamint legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és tekintsük a

$$\rho : \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)\right) \to \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right) \qquad A \mapsto \Big((x_1, x_2) \mapsto (A(x_1))(x_2)\Big)$$
$$\eta : \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right) \to \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W)\right)\right) \qquad B \mapsto \Big(x_1 \mapsto (x_2 \mapsto B(x_1, x_2))\Big)$$

leképezéseket. Ha $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$, akkor a 14.51 tétel alapján $\|A\| < \infty$ továbbá

$$\|\rho(A)\| = \sup_{\substack{y \in V',\ \|y\|' \le 1 \\ x \in V,\ \|x\| \le 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \le 1}} \sup_{\substack{y \in V' \\ \|y\|' \le 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \le 1}} \|A(x)\| = \|A\|$$

teljesül, vagyis $\|\rho(A)\| < \infty$, amiből a 14.51 tétel alapján $\rho(A) \in \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ következik, továbbá $\|\rho(A)\| = \|A\|$ miatt ρ izometria.

Megmutatjuk, hogy ρ lineáris. Ehhez legyen $A, B \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$\begin{aligned}
\rho(A+B)(x,y) &= ((A+B)(x))(y) = (A(x)+B(x))(y) = (A(x))(y) + (B(x))(y) = \\
&= \rho(A)(x,y) + \rho(B)(x,y) \\
\rho(\lambda A)(x,y) &= ((\lambda A)(x))(y) = (\lambda \cdot A(x))(y) = \\
&= \lambda \cdot (A(x))(y) = \lambda \cdot \rho(A)(x,y)
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ és $\rho(\lambda A) = \lambda\rho(A)$, tehát ρ lineáris.

Most igazoljuk, hogy ρ injektív. Tegyük fel, hogy $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$ olyan, hogy $\rho(A) = 0$. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Ekkor minden $y \in V'$ esetén

$$0 = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y),$$

vagyis $A(x) = 0$. Mivel minden $x \in V$ elemre $A(x) = 0$, ezért $A = 0$.

Ha $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$, akkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$((\eta(\rho(A)))(x))(y) = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y),$$

vagyis $\eta \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathscr{L}(V, \mathscr{L}^n(\prod_i^n V_i, W))}$.

Ha $A \in \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right)$, akkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$(\rho(\eta(A)))(x,y) = (\eta(A)x)(y) = A(x,y),$$

vagyis $\rho \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathscr{L}^{n+1}(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W)}$.

Tehát ρ és η egymás inverzei, ezért ρ és η bijekció. Továbbá η lineáris leképezés inverze, ezért lineáris, továbbá ρ izometrikussága miatt η is izometria.

14.58. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.

– Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \dots, x) \ge 0$.

- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x,\dots,x) \le 0$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x,\dots,x) > 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x,\dots,x) < 0$.
- Az A *multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x,\dots,x) \ge K \|x\|^n$.
- Az A *multilineáris leképezés szigorúan negatív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x,\dots,x) \le -K \|x\|^n$.
- Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in V$ melyre $A(x,\dots,x) > 0$ és $A(y,\dots,y) < 0$.

Magyarázat. A következő tétel előtt emlékeztetünk arra, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és tetszőleges X halmaz esetén $a \in X$, akkor $a^{[n]}$ jelöli azt az X^n halmazbeli elemet, melynek minden komponense a, vagyis

$$a^{[n]} = (\underbrace{a,\dots,a}_{n\text{-szer}}).$$

14.59. Tétel. *(Polarizációs formula.) Legyen V és W vektortér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^n(V^n, W)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Minden $x_1,\dots,x_n \in V$ vektorra*

$$A(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_1 \dots t_n \cdot A\left(t_1x_1 + \dots + t_nx_n\right)^{[n]}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V és W vektortér, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ és $A \in \mathrm{Lin}^n(V^n, W)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Minden $z \in V$ vektor esetén definiáljuk az

$$A_z : V^{n-1} \to W \qquad (x_1,\dots,x_{n-1}) \mapsto A(z, x_1,\dots,x_{n-1})$$

$(n-1)$-lineáris leképezést és legyen $x_0, x_1, \dots, x_n \in V$ tetszőleges vektor.
Az $n = 1$ esetben

$$\frac{1}{2} \sum_{t_1 \in \{-1,1\}} t_1 A(t_1x_1) = \frac{1}{2}\left(-A(-x_1) + A(x_1)\right) = A(x_1),$$

és az $n = 2$ esetben

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} \sum_{t_1,t_2 \in \{0,1\}} & t_1t_2 A\left(t_1x_1 + t_2x_2, t_1x_1 + t_2x_2\right) = \\
&= \frac{1}{8}\Big(A(x_1+x_2, x_1+x_2) - A(x_1-x_2, x_1-x_2) - \\
&\qquad - A(-x_1+x_2, -x_1+x_2) + A(-x_1-x_2, -x_1-x_2)\Big) = \\
&= \frac{1}{8}\left(4A(x_1,x_2) + 4A(-x_1,-x_2)\right) = A(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

teljesül, tehát az $n = 1, 2$ számokra igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ számra igaz az állítás. Ekkor

$$\begin{aligned}
A(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{t_2,\dots,t_n \in \{-1,1\}} & t_2 \dots t_n \cdot A\left(x_1 + t_2x_2 \dots + t_nx_n\right)^{[n]} - \\
& - t_2 \dots t_n \cdot A\left(-x_1 + t_2x_2 \dots + t_nx_n\right)^{[n]}.
\end{aligned} \tag{14.3}$$

Megmutatjuk, hogy az $n+1$ számra is igaz az állítás. Jelölje α az $n+1$ esetben a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát, vagyis

$$2^{n+1}(n+1)!\alpha = \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1 \dots t_n A\left(t_0x_0 + t_1x_1 + \dots + t_nx_n\right)^{[n+1]} =$$

$$= \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n\in\{-1,1\}} t_0t_1\dots t_nA_{t_0x_0+t_1x_1+\dots+t_nx_n}(t_0x_0+t_1x_1+\dots+t_nx_n)^{[n]} =$$
$$= \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n\in\{-1,1\}} t_0t_1\dots t_n\sum_{i=0}^{n}A_{t_ix_i}(t_0x_0+\dots+t_nx_n)^{[n]} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{t_0,t_1,\dots,t_n\in\{-1,1\}} t_0t_1\dots t_nA_{t_ix_i}(t_0x_0+\dots+t_nx_n)^{[n]}.$$

Legyen minden $i\in\{0,\dots,n\}$ esetén

$$\beta_i = \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n\in\{-1,1\}} t_0t_1\dots t_nA_{t_ix_i}(t_0x_0+\dots+t_nx_n)^{[n]}.$$

Ha $i\in\{1,\dots,n\}$, akkor a t_0 és a t_i indexre történő összegzést fejtsük ki.

$$\begin{aligned}\beta_i = &\sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n\in\{-1,1\}} t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_n\cdot\\ &\cdot\Big(A_{x_i}(x_0+x_i+t_1x_1+\dots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\dots+t_nx_n)^{[n]}-\\ &-A_{x_i}(-x_0+x_i+t_1x_1+\dots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\dots+t_nx_n)^{[n]}-\\ &-A_{-x_i}(x_0-x_i+t_1x_1+\dots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\dots+t_nx_n)^{[n]}+\\ &+A_{-x_i}(-x_0-x_i+t_1x_1+\dots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\dots+t_nx_n)^{[n]}\Big).\end{aligned}$$

Ha az első és a negyedik összeadandót nézzük, akkor az $A_{-z}=-A_z$ formula és a (14.3) képlet felhasználásával

$$\begin{aligned}&\sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n\in\{-1,1\}} t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_n\cdot\\ &\cdot\Big(A_{x_i}(x_0+x_i+t_1x_1+\dots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\dots+t_nx_n)^{[n]}-\\ &-A_{x_i}(-x_0-x_i+t_1x_1+\dots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\dots+t_nx_n)^{[n]}\Big) =\\ &= 2^nn!A_{x_i}(x_0+x_i,x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)\end{aligned}$$

adódik. Hasonlóan, ha a második és harmadik összeadandót nézzük, akkor

$$\begin{aligned}&\sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n\in\{-1,1\}} t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_n\cdot\\ &\cdot\Big(-A_{x_i}(-x_0+x_i+t_1x_1+\dots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\dots+t_nx_n)^{[n]}+\\ &+A_{x_i}(x_0-x_i+t_1x_1+\dots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\dots+t_nx_n)^{[n]}\Big) =\\ &= 2^nn!A_{x_i}(x_0-x_i,x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)\end{aligned}$$

adódik. Ezek alapján

$$\begin{aligned}\beta_i &= 2^nn!A_{x_i}(2x_0,x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) =\\ &= 2^{n+1}n!A_{x_i}(x_0,x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) =\\ &= 2^{n+1}n!A(x_i,x_0,x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) =\\ &= 2^{n+1}n!A(x_0,x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$

Tehát minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén $\beta_i=2^{n+1}n!A(x_0,x_1,\dots,x_n)$. Teljesen hasonlóan igazolható, hogy $\beta_0=2^{n+1}n!A(x_0,x_1,\dots,x_n)$. Ezek alapján a

$$2^{n+1}(n+1)!\alpha = \sum_{i=0}^{n}\beta_i = \sum_{i=0}^{n}2^{n+1}n!A(x_0,x_1,\dots,x_n) = 2^{n+1}(n+1)!A(x_0,x_1,\dots,x_n)$$

egyenletből

$$\alpha = A(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség bal oldala.

14.60. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \neq A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.*

1. *Ha A szimmetrikus pozitív vagy negatív multilineáris leképezés, akkor n páros szám.*
2. *Ha A szigorúan pozitív definit, akkor pozitív definit.*
3. *Ha A szigorúan negatív definit, akkor negatív definit.*
4. *Ha $\dim V < \infty$ és A pozitív definit, akkor szigorúan pozitív definit.*
5. *Ha $\dim V < \infty$ és A negatív definit, akkor szigorúan negatív definit.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \neq A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.
1. Tegyük fel, hogy A szimmetrikus, pozitív és n páratlan. Az A szimmetrikussága miatt a 14.59 tétel alapján létezik olyan $z \in V$, melyre $A(z^{[n]}) = \alpha \neq 0$, valamint A pozitivitása miatt $\alpha \geq 0$. Felhasználva A multilinearitását és n páratlanságát $A((-z)^{[n]}) = -A(z^{[n]}) = -\alpha < 0$ adódik, ami ellentmond A pozitivitásának.
Ha A szimmetrikus és negatív, akkor n páratlanságát feltételezve hasonló gondolatmenettel kaphatunk ellentmondást.
2–3. A definíció alapján nyilvánvaló.
4. Legyen $n = \dim V$. Mivel V véges dimenziós, ezért a 14.55 tétel alapján A folytonos multilineáris leképezés. Tekintsük az $S = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ halmazt. Az S halmaz korlátos, zárt, tehát a 14.31 tétel alapján kompakt. Vagyis az A folytonos függvény korlátos ezen a kompakt halmazon és felveszi a minimumát is. Az A függvény minimumát jelölje $K \in \mathbb{R}_0^+$, vagyis minden $v \in S$ esetén $K \leq A(v^{[n]})$. Ez a K szám szigorúan pozitív, ugyanis a $K = 0$ esetben a folytonos A függvény valamely $v_0 \in S$ pontban felvenné a minimumát, és arra $A(v_0^{[n]}) = 0$ teljesülne, ami ellentmondana A szigorú pozitivitásának.
Megmutatjuk, hogy minden $x \in V$ esetén $A(x^{[n]}) \geq K \|x\|^n$ teljesül. Ha $x = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Ha $x \neq 0$, akkor $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$, vagyis

$$K \leq A\left(\frac{x}{\|x\|}, \dots, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

teljesül, amiből az A operátor multilinearitása miatt

$$A(x, \dots, x) \geq K \cdot \|x\|^n$$

adódik.
5. A 4. ponthoz hasonlóan igazolható.

14.12. Konvex zárt elnyelő halmazok Banach-terekben

Magyarázat. A következő fogalmak és állítás segítségével lehet majd a későbbiekben a funkcionálanalízis alaptételei közül többet egyszerűen igazolni.

14.61. Definíció. Legyen V vektortér és $K \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy a K halmaz

- *elnyelő*, ha minden $x \in V$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $|\lambda| > r$ esetén $x \in \lambda K$;
- *konvex*, ha minden $x, y \in K$ és $c \in [0, 1]$ elemre $cx + (1 - c)y \in K$ teljesül;
- *szimmetrikus*, ha $K = -K$ teljesül.

14.62. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és legyen $Z \subseteq V$ zárt, konvex és elnyelő halmaz. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ melyre $B_r(0) \subseteq Z$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és legyen $Z \subseteq V$ zárt, konvex és elnyelő halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy $K = Z \cap (-Z)$ zárt, konvex, elnyelő és szimmetrikus halmaz. A K halmaz nyilván zárt, hiszen két zárt halmaz metszete; konvex is, hiszen két konvex halmaz metszete és nyilván szimmetrikus is. Megutatjuk, hogy K elnyelő. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Mivel Z elnyelő, ezért létezik olyan $c_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in c_1 Z$, valamint létezik olyan $c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy $-x \in c_2 Z$. Ekkor bármely $c \in \mathbb{R}^+$, $c > \max\{c_1, c_2\}$ számra $x, -x \in cK$, vagyis $x \in (cK) \cap (-cK) = cZ$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (nK)$ teljesül. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Mivel K elnyelő, létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, melyre $x \in cK$. Mivel K konvex és elnyelő, ezért ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq c$, akkor $x \in nK$, tehát $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (nK)$.
3. A Baire-féle kategóriatétel alapján létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\operatorname{Int} \overline{nK} \neq \emptyset$. Mivel a

$$\varphi : V \to V \qquad x \mapsto nx$$

leképezés a 14.19 tétel alapján homeomorfizmus, ezért $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$. Legyen $z \in \operatorname{Int} K$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(z) \subseteq \operatorname{Int} K$.
4. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(0) \subseteq K$. Legyen $x \in B_r(0)$. A K halmaz szimmetrikussága miatt $B_r(-z) \subseteq K$. Tehát az $x - z \in B_r(-z) \subseteq K$ és az $x + z \in B_r(z) \subseteq K$ tartalmazás miatt $x - z, x + z \in K$, amiből K konvexitása miatt

$$x = \frac{1}{2}(x - z) + \frac{1}{2}(x + z) \in K$$

adódik. Mivel $B_r(0) \subseteq K = Z \cap (-Z)$ teljesül, ezért $B_r(0) \subseteq Z$.

14.13. Hahn–Banach-tétel

14.63. Definíció. Legyen V vektortér és $\varphi : V \to \mathbb{R}$ leképezés. Azt mondjuk, hogy
- φ *szubadditív*, ha minden $x, y \in V$ esetén $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$;
- φ *pozitív homogén*, ha minden $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$;
- φ *szublineáris*, ha szubadditív és pozitív homogén.

14.64. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto p(x)$$

függvényt *félnormának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.
- $p(0) = 0$
- $\forall x \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$
- $\forall x, y \in V :\ p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Az (V, p) párt *félnormált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér, és p félnorma a V vektortéren.

14.65. Tétel. *Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ha $x \in V \setminus M$, akkor létezik olyan $\tilde{f} : M \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq \tilde{f}$ és $\tilde{f} \leq \varphi|_{M \oplus \mathbb{R}x}$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $x \in V \setminus M$, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ekkor minden $u, v \in M$ esetén

$$f(u) + f(v) = f(u + v) \leq \varphi(u + v) = \varphi(u - x + x + v) \leq \varphi(u - x) + \varphi(v + x),$$

ezért

$$f(u) - \varphi(u - x) \leq \varphi(v + x) - f(v).$$

Vagyis az $\{f(u) - \varphi(u - x) |\ u \in M\}$ halmaz korlátos felülről és a $\{\varphi(v + x) - f(v) |\ v \in M\}$ halmaz korlátos alulról. Az

$$\alpha = \sup\{f(u) - \varphi(u - x) |\ u \in M\} \quad \text{és} \quad \beta = \inf\{\varphi(v + x) - f(v) |\ v \in M\}.$$

számokra $\alpha \leq \beta$ teljesül. Legyen $c \in [\alpha, \beta]$ tetszőleges és

$$\tilde{f} : M \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R} \qquad u + \lambda x \mapsto f(u) + \lambda c.$$

Ekkor $f \subseteq \tilde{f}$ nyilván teljesül.
Minden $u \in M$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$c \leq \beta \leq \varphi\left(\frac{1}{\lambda}u + x\right) - f\left(\frac{1}{\lambda}u\right) = \frac{1}{\lambda}\varphi(u + \lambda x) - \frac{1}{\lambda}f(u)$$

vagyis ez alapján

$$f(u + \lambda x) = f(u) + c\lambda \leq \varphi(u + \lambda x).$$

Minden $u \in M$ és $-\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$c \geq \alpha \geq f\left(-\frac{1}{\lambda}u\right) - \varphi\left(-\frac{1}{\lambda}u - x\right) = -\frac{1}{\lambda}f(u) + \frac{1}{\lambda}\varphi(u + \lambda x)$$

vagyis ez alapján

$$f(u + \lambda x) = f(u) + c\lambda \leq \varphi(u + \lambda x).$$

Tehát minden $u \in M$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(u + \lambda x) \leq \varphi(u + \lambda x)$$

teljesül.

14.66. Tétel. *Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ha $x \in V \setminus M$, akkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq F$ és $F \leq \varphi$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $x \in V \setminus M$, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$.
Legyen

$$\mathcal{A} = \{g : V \nrightarrow \mathbb{R} |\ \operatorname{Dom} g \text{ lineáris altér},\ M \subseteq \operatorname{Dom} g,\ g \text{ lineáris},\ g|_M = f,\ g \leq \varphi|_{\operatorname{Dom} g}\}$$

és az $\mathcal{A}$ halmazon jelölje $\leq$ a $\subseteq$ tartalmazás relációt. Ekkor $(\mathcal{A}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz, ezért a Kuratowski–Zorn-lemma alapján létezik maximális eleme, ezt jelöljük a F szimbólummal. Mivel $F \in \mathcal{A}$, ezért F az f kiterjesztése és $F \leq \varphi|_{\operatorname{Dom} F}$ teljesül. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{Dom} F = V$. Ha $\operatorname{Dom} F \neq V$, akkor a 14.65 tétel alapján létezik egy g valódi kiterjesztése a F funkcionálnak az $\mathcal{A}$ halmazban, melyre $F \lneqq g$ teljesül, ami viszont ellentmond F maximalitásának.

14.67. Tétel. *Komplex vektortér feletti lineáris funkcionált egyértelműen meghatároz a valós része. Legyen V komplex vektortér és jelölje V_R a V vektorteret az összeadással és a $\mathbb{C} \times V \to V$ szorzás $\mathbb{R} \times V \to V$ megszorításával.*

1. *Ha $f : V \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés akkor az $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ leképezés olyan $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in V$ esetén $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$ teljesül.*
2. *Ha $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor az $f : V \to \mathbb{C}$, $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$ olyan lineáris leképezés, melyre $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen V komplex vektortér.
1. Legyen $f : V \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés és $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$. Ekkor $f_\mathbb{R}$ nyilván additív, valamint minden $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_\mathbb{R}(\lambda x) = \operatorname{Re}(f(\lambda x)) = \operatorname{Re}(\lambda f(x)) = \lambda \operatorname{Re}(f(x)) = \lambda f_\mathbb{R}(x)$$

teljesül, vagyis $f_\mathbb{R}$ lineáris. Továbbá minden $x \in V$ esetén

$$f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix) = \operatorname{Re}(f(x)) - i \operatorname{Re}(f(ix)) = \operatorname{Re}(f(x)) - i \operatorname{Re}(if(x)) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x)) = f(x).$$

2. Legyen $f_{\mathbb{R}} : V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés és minden $x \in V$ esetén legyen $f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - if_{\mathbb{R}}(ix)$. Ekkor f nyilván additív, valamint minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f((\alpha + i\beta)x) &= f_{\mathbb{R}}(\alpha x + i\beta x) - if_{\mathbb{R}}(i\alpha x - \beta x) = f_{\mathbb{R}}(\alpha x) + f_{\mathbb{R}}(i\beta x) - if_{\mathbb{R}}(i\alpha x) + if_{\mathbb{R}}(\beta x) = \\ &= \alpha f_{\mathbb{R}}(x) + \beta f_{\mathbb{R}}(ix) - i\alpha f_{\mathbb{R}}(ix) + i\beta f_{\mathbb{R}}(x) = (\alpha + i\beta)(f_{\mathbb{R}}(x) - if_{\mathbb{R}}(ix)) = \\ &= (\alpha + i\beta)f(x) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis f lineáris. Az $f_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \circ f$ egyenlőség pedig f definiálása alapján nyilvánvaóan igaz.

14.68. Tétel. *(Hahn–Banach-tétel.) Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ félnorma, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris leképezés, melyre $|f| \leq p_M$. Ekkor létezik olyan $F : M \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq F$ és $|F| \leq p$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ félnorma, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $|f| \leq p_M$.
A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben 14.66 a tételt alkalmazva a p szublineáris leképezésre azt kapjuk, hogy létezik olyan $F : V \to \mathbb{R}$ kiterjesztése az f funkcionálnak, melyre $F \leq p$ teljesül. Ekkor minden $x \in V$ vektor esetén

$$F(-x) \leq p(-x)$$

miatt

$$-p(x) = -p(-x) \leq -F(-x) = F(x) \leq p(x)$$

teljesül, azaz $|F(x)| \leq p(x)$.
A $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben tekintsük a $V_{\mathbb{R}}$ valós vektorteret és az $f_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \circ f$ lineáris leképezést. Az 1. pont alapján létezik olyan $F_{\mathbb{R}} : V \to \mathbb{R}$ lineáris kiterjesztése az $f_{\mathbb{R}}$ funkcionálnak, melyre $|F_{\mathbb{R}}| \leq p$ teljesül. A 14.67 tétel alapján

$$F : V \to \mathbb{C} \qquad x \mapsto F_{\mathbb{R}}(x) - iF_{\mathbb{R}}(ix).$$

olyan lineáris leképezés, melyre $F_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \circ F$ teljesül.
Ha $x \in M$, akkor

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) = F_{\mathbb{R}}(x) = \operatorname{Re} F(x) \\ &\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re}(if(x)) = -\operatorname{Re} f(ix) = -f_{\mathbb{R}}(ix) = -F_{\mathbb{R}}(ix) = -\operatorname{Re} F(ix) = -\operatorname{Re}(iF(x)) = \operatorname{Im} F(x), \end{aligned}$$

vagyis $f(x) = F(x)$, tehát F az f kiterjesztése.
Végül megmutatjuk, hogy $|F| \leq p$. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Ha $F(x) = 0$, akkor nyilván $|F(x)| \leq p(x)$; ezért feltesszük a továbbiakban, hogy $F(x) \neq 0$. Ekkor viszont a $z = \dfrac{F(x)}{|F(x)|}$ komplex szám egységnyi abszolútértékű és

$$|F(x)| = \overline{z} \cdot F(x) = F(\overline{z}x) = \operatorname{Re} F(\overline{z}x) = F_{\mathbb{R}}(\overline{z}x) \leq p(\overline{z}x) = p(x)$$

teljesül, vagyis $|F| \leq p$.

Magyarázat. A következőkben a Hahn–Banach-tétel pár egyszerűbb következményét említjük meg.

14.69. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, mely f kiterjesztése és $\|f\| = \|F\|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. A

$$p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|f\| \cdot \|x\|$$

félnormára és az f leképezésre alkalmazva a 14.68 Hahn–Banach-tételt kapjuk olyan $F : V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezésnek a létezését, mely f kiterjesztése, melyre $|F| \leq p$ teljesül. Vagyis minden $x \in V$ esetén

$$|F(x)| \leq \|x\| \cdot \|f\|$$

miatt $\|F\| \leq \|f\|$, azonban a kiterjesztés miatt $\|F\| \geq \|f\|$, tehát $\|F\| = \|f\|$.

14.70. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárisan független vektorrendszer és $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tetszőleges paraméterek. Ekkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, hogy minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $F(x_k) = a_k$.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárisan független vektorrendszer és $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tetszőleges paraméterek. Jelölje M az $x_1, \dots, x_n$ vektorrendszer által generált lineáris alteret. Ekkor

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to M \qquad (c_1, \dots, c_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$

lineáris bijekció, továbbá

$$\eta : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad (c_1, \dots, c_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k a_k$$

lineáris leképezés. Az $f = \eta \circ \varphi^{-1} : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris leképezés, melyre minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $f(x_k) = a_k$ teljesül. Mivel M véges dimenziós és f lineáris, ezért a 14.21 tétel alapján folytonos, továbbá a 14.69 tétel alapján létezik folytonos kiterjesztése.

14.71. Tétel. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor V' szétválasztó.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in V$, $x \neq y$ vektor. A 14.70 tétel alapján létezik olyan $\varphi : V \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, melyre $\varphi(x - y) = 1$ teljesül. Ekkor $\varphi \in V'$ és $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

14.72. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Minden $x \in V$ esetén legyen*

$$j_x : V' \to \mathbb{K} \qquad \varphi \mapsto \varphi(x).$$

Ekkor j_x folytonos lineáris leképezés.

2. *A*

$$j : V \to V'' \qquad x \mapsto j_x$$

leképezés lineáris és injektív.

3. *A $j : V \to V''$ leképezés izometria, azaz minden $x \in V$ esetén*

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|\,.$$

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. Ha $x \in V$, $\varphi_1, \varphi_2 \in V'$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor a

$$\begin{aligned} j_x(\varphi_1 + \varphi_2) &= (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = j_x(\varphi_1) + j_x(\varphi_2) \\ j_x(\lambda\varphi_1) &= (\lambda\varphi_1)(x) = \lambda\varphi_1(x) = \lambda j_x(\varphi_1) \end{aligned}$$

egyenletek alapján j_x lineáris. A folytonosság a

$$\sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\| < \infty$$

egyenlőtlenségekből következik. Sőt ebben a pontban még azt is igazoltuk, hogy $\|j_x\| \leq \|x\|$.
2. Legyen $x, y \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Ekkor a minden $\varphi \in V'$ esetén érvényes

$$\begin{aligned} j_{x+y}(\varphi) &= \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = j_x(\varphi) + j_y(\varphi) = (j_x + j_y)(\varphi) \\ j_{\lambda x}(\varphi) &= \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda j_x(\varphi) = (\lambda j_x)(\varphi) \end{aligned}$$

egyenlőségek miatt j lineáris.
Tegyük fel, hogy valamely $x, y \in V$ esetén $j_x = j_y$. Ekkor minden $\varphi \in V'$ funkcionálra $\varphi(x) = \varphi(y)$ teljesül és mivel a 14.71 tétel miatt V' szétválasztó, ez csak úgy lehet, ha $x = y$.

3. Legyen $x \in V$. Ha $x = 0$, akkor az 1. pont alapján $\|j_x\| \leq \|x\| = 0$ miatt $\|j_x\| = 0 = \|x\|$. Ha $x \neq 0$, akkor legyen $x_0 = \dfrac{x}{\|x\|}$ és tekintsük az $M = \mathbb{K}x_0$ alteret és az

$$f : M \to \mathbb{K} \qquad ax_0 \mapsto a$$

lineáris leképezést. Ekkor

$$\|f\| = \sup_{y \in M,\ \|y\| \leq 1} |f(y)| = \sup_{a \in \mathbb{K},\ |a| \cdot \|x_0\| \leq 1} |f(ax)| = \sup_{a \in \mathbb{K},\ |a| \leq 1} |a| = 1$$

továbbá a 14.69 tétel alapján létezik olyan $F : V \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionál, melyre $f \subseteq F$ és $\|F\| = \|f\| = 1$ teljesül. Ekkor

$$\|j_x\| = \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| = 1} |\varphi(x)| \geq |F(x)| = |f(x)| = |f(\|x\| \cdot x_0)| = \|x\|\,.$$

Az 1. pontban pedig láttuk, hogy $\|j_x\| \leq \|x\|$, ezért $\|j_x\| = \|x\|$.

14.73. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(V, \|\cdot\|)$ normált tér *reflexív*, ha a $j : V \to V''$ leképezés szürjektív.

14.14. Banach egyenletes korlátosság tétele

14.74. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. $\overline{B_1(0)} = \{x \in V |\ \|x\| \leq 1\}$
2. *Ha $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, W vektortér és $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor $A(\Omega)$ is konvex.*
3. *Ha $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, akkor $\overline{\Omega}$ is konvex halmaz.*
4. *A $B_1(0)$ és a $\overline{B_1(0)}$ halmaz konvex.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. egyen $x \in V$, $\|x\| = 1$ és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor az $R = \min\{r, 1\}$ számra és az $y = (1 - R/2)x$ vektorra $y \in B_1(0)$ és $y \in B_r(x)$ teljesül, vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_1(0) \cap B_r(x) \neq \emptyset$, tehát

$$\{x \in V |\ \|x\| \leq 1\} \subseteq \overline{B_1(0)}.$$

Ha $x \in V$, $\|x\| > 1$, akkor az $r = \|x\| - 1 \in \mathbb{R}^+$ számra $B_1(0) \cap B_r(x) = \emptyset$ teljesül, ugyanis, ha $y \in B_1(0) \cap B_r(x)$, akkor $\|y\| < 1$ és $\|x - y\| < r$, amiből az

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| < \|x\| - 1 + 1 = \|x\|$$

ellentmondás adódik. Ez azt jelenti, hogy $x \notin \overline{B_1(0)}$. Tehát

$$V \setminus \{x \in V |\ \|x\| \leq 1\} \subseteq V \setminus \overline{B_1(0)},$$

amiből

$$\overline{B_1(0)} \subseteq \{x \in V |\ \|x\| \leq 1\}$$

következik.
2. Legyen $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, W vektortér és $A : V \to W$ lineáris leképezés, valamint $x, y \in A(\Omega)$ és $t \in [0, 1]$. Ekkor létezik olyan $x', y' \in \Omega$, melyre $Ax' = x$ és $Ay' = y$. Az A linearitása és Ω konvexitása miatt $tx' + (1 - t)y' \in \Omega$ és $A(tx' + (1 - t)y') = tx + (1 - t)y \in A(\Omega)$.
3. Legyen $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\overline{\Omega}$ nem konvex. Ekkor létezik olyan $x, y \in \overline{\Omega}$ és $t \in]0, 1[$, melyre $z = tx + (1 - t)y \notin \overline{\Omega}$. Mivel $\overline{\Omega}$ zárt, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$.
A lezárás definíciója alapján létezik olyan $x', y' \in \Omega$, melyre $\|x - x'\| < r$ és $\|y - y'\| < r$. Legyen $z' = tx' + (1 - t)y'$. Mivel Ω konvex, ezért $z' \in \Omega$. A

$$\|z - z'\| = \|t(x - x') + (1 - t)(y - y')\| \leq t\,\|x - x'\| + (1 - t)\,\|y - y'\| < tr + (1 - t)r = r$$

becslés alapján a $z' \in B_r(z) \cap \Omega \neq \emptyset$ ellentmondást kapjuk. Tehát $\overline{\Omega}$ konvex.
4. Legyen $x, y \in B_1(0)$ és $t \in [0,1]$. Ekkor a $z = tx + (1-t)y$ pontra

$$\|z\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| < t + 1 - t = 1$$

miatt $z \in B_1(0)$ teljesül, vagyis $B_1(0)$ halmaz konvex, ekkor viszont a 3. pont alapján $\overline{B_1(0)}$ is konvex.

14.75. Tétel. *(Banach egyenletes korlátosság tétele.) Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(U,V)$. A H halmaz pontosan akkor korlátos pontonként, ha korlátos az operátornomában, azaz*

$$\forall x \in U: \ \sup_{A \in H} \|Ax\|_V < \infty \quad \leftrightarrow \quad \sup_{A \in H} \|A\| < \infty.$$

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(U,V)$.
Tegyük fel, hogy minden $x \in U$ esetén az $\{Ax |\ A \in H\}$ halmaz korlátos a V térben. Tekintsük a

$$T = \bigcap_{A \in H} \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy $A \in \mathscr{L}(U,V)$, akkor az $\overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$ halmaz konvex. Ehhez legyen $x, y \in \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$, valamint $t \in [0,1]$ és tekintsük a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor $Ax, Ay \in \overline{B_1(0)}$, valamint a $\overline{B_1(0)}$ halmaz konvexitása miatt

$$Az = A(tx + (1-t)y) = tAx + (1-t)Ay \in \overline{B_1(0)},$$

vagyis $z \in \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$. Mivel konvex halmazok metszete konvex, ezért T konvex.

Minden $A \in H$ esetén az $\overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$ halmaz zárt, hiszen zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe, valamint zárt halmazok metszete zárt, ezért T zárt.
Megmutatjuk, hogy T elnyelő. Legyen $x \in U \setminus \{0\}$ tetszőleges, $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $A \in H$ esetén $\|Ax\|_V < r$, valamint legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > r$ tetszőleges. Ekkor minden $A \in H$ esetén

$$\left\| A\left(\frac{1}{\lambda}x\right)\right\|_V \leq \frac{r}{|\lambda|} \leq 1,$$

vagyis minden $A \in H$ esetén $A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \overline{B_1(0)}$, ezért

$$\frac{1}{\lambda}x \in \bigcap_{A \in H} \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right) = T,$$

vagy másképp $x \in \lambda T$.
Mivel T konvex, zárt, elnyelő halmaz egy Banach-térben, ezért a 14.62 tétel alapján a nullvektor környezete, azaz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_R(0) \subseteq T$. Ha $r = \frac{R}{2}$, akkor $\overline{B_r(0)} \subseteq T$. Tehát minden $x \in U$, $\|x\|_U \leq 1$ és $A \in H$ esetén

$$rx \in \overline{B_r(0)} \quad \to \quad rx \in T \quad \to \quad A(rx) \in \overline{B_1(0)} \quad \to \quad r\|Ax\| \leq 1 \quad \to \quad \|Ax\| \leq \frac{1}{r}.$$

Vagyis minden $A \in H$ esetén

$$\|A\| = \sup_{x \in U,\ \|x\|_U \leq 1} \|Ax\| \leq \frac{1}{r},$$

tehát

$$\sup_{A \in H} \|A\| = \frac{1}{r} < \infty.$$

Fordítva, legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre

$$\sup_{A \in H} \|A\| < K$$

teljesül és legyen $x \in U$ tetszőleges. Ekkor

$$\sup_{A \in H} \|Ax\|_V \leq \sup_{A \in H} \|A\| \cdot \|x\|_U < K \|x\|_U < \infty.$$

14.15. Banach–Steinhaus-tétel

14.76. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(U, V)$ olyan sorozat, mely pontonként konvergens az U halmazon. Ekkor $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$, valamint az $A = \lim_{n \to \infty} a_n$ határérték folytonos lineáris operátor, melyre $\|A\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|a_n\|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(U, V)$ olyan sorozat, mely pontonként konvergens az U halmazon. Tehát minden $x \in U$ esetén az $n \mapsto a_n x$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát a 14.75 Banach egyenletes korlátosság tétele alapján az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmaz korlátos az operátornormában is.
Az $A = \lim_{n \to \infty} a_n$ operátorra minden $x, y \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$A(x+y) = \lim_{n \to \infty} a_n(x+y) = \lim_{n \to \infty} a_n(x) + a_n(y) = \lim_{n \to \infty} a_n(x) + \lim_{n \to \infty} a_n(y) = Ax + Ay$$
$$A(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} a_n(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} \lambda a_n(x) = \lambda \lim_{n \to \infty} a_n(x) = \lambda Ax$$

teljesül, ezért lineáris.
Minden $x \in U$ esetén

$$\|Ax\|_V = \left\| \lim_{n \to \infty} a_n x \right\|_V = \lim_{n \to \infty} \|a_n x\|_V \leq \liminf_{n \to \infty} (\|a_n\| \cdot \|x\|) = \|x\| \liminf_{n \to \infty} \|a_n\|,$$

ezért $\|A\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|a_n\|$. Nyilván $\liminf_{n \to \infty} \|a_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|$, valamint $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$. Ezért $\|A\| < \infty$, vagyis A folytonos lineáris operátor.

14.16. Banach nyílt leképezések tétele és közvetlen következményei

14.77. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés. Ha létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre*

$$B_R(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))},$$

akkor minden $r \in]0, R[$ esetén

$$B_r(0) \subseteq A(B_1(0)).$$

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_R(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$ és $c \in]0, 1[$ tetszőleges paraméter. Ekkor felhasználva, hogy a nem nulla számmal való szorzás homeomorfizmus, valamint az A operátor linearitását és folytonosságát

$$B_{cR}(0) = cB_R(0) \subseteq c\overline{A(B_1(0))} = \overline{cA(B_1(0))} = \overline{A(B_c(0))} \tag{14.4}$$

adódik, amiből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$B_{c^n R}(0) \subseteq \overline{A(B_{c^n}(0))}. \tag{14.5}$$

Legyen $y \in B_R(0)$. A lezárás definíciója alapján ekkor létezik olyan $y_0 \in A(B_1(0))$ és $x_0 \in B_1(0)$, melyre

$$\|y - y_0\| < cR, \qquad Ax_0 = y_0 \quad \text{és} \quad \|x_0\| < 1.$$

Ekkor $y - y_0 \in B_{cR}(0)$, vagyis a (14.4) képlet alapján létezik olyan $y_1 \in A(B_c(0))$ és $x_1 \in B_c(0)$, melyre

$$\|y - y_0 - y_1\| < c^2 R, \qquad Ax_1 = y_1 \quad \text{és} \quad \|x_1\| < c.$$

Ha már valamilyen $N \in \mathbb{N}$ értékig definiáltuk az x_N és y_N vektorokat úgy, hogy azokra minden $k \in \{0, \dots, N\}$ esetén

$$\left\| y - \sum_{j=0}^{k} y_j \right\| < c^{k+1} R, \qquad Ax_k = y_k \quad \text{és} \quad \|x_k\| < c^k$$

teljesül, akkor a (14.5) képlet alapján létezik olyan $y_{N+1} \in A(B_{c^{N+1}}(0))$ és $x_{N+1} \in B_{c^{N+1}}(0)$, melyre

$$\left\| y - \sum_{j=0}^{N+1} y_j \right\| < c^{N+2} R, \qquad Ax_{N+1} = y_{N+1} \quad \text{és} \quad \|x_{N+1}\| < c^{N+1}.$$

Ekkor a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele alapján létezik egy olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{y\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| y - \sum_{k=0}^{n} y_k \right\| < c^{n+1} R \qquad Ax_n = y_n, \quad \text{és} \quad \|x_n\| < c^n.$$

Ekkor $\sum_{k=0}^{\infty} y_k = y$, valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c} < \infty$$

miatt a $\sum_k x_k$ sor abszolút konvergens az U Banach-térben, ezért konvergens is. Az $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ vektorra normájára a $\|x\| < \frac{1}{1-c}$ becslésünk van az a sor abszolút konvergenciájából.
Az A folytonossága miatt

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Ax_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k = y.$$

Tehát egy rögzített $c \in]0,1[$ paraméter esetén azt kaptuk, hogy minden $y \in B_R(0)$ vektorhoz létezik egy olyan $x \in B_{\frac{1}{1-c}}(0)$ vektor, melyre $Ax = y$.
Az A linearitását kihasználva ez azt jelenti, hogy minden $y \in B_{(1-c)R}(0)$ vektorhoz létezik egy olyan $x \in B_1(0)$ vektor, melyre $Ax = y$; vagy másképp

$$B_{(1-c)R}(0) \subseteq A(B_1(0)).$$

Adott $r \in]0, R[$ esetén ebből a $c = 1 - \frac{r}{R}$ választással kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

14.78. Tétel. *(Banach nyílt leképezés tétele.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, akkor az A operátor pontosan akkor nyílt, ha szürjektív.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés.
Tegyük fel, hogy A nyílt. Ekkor az $A(B_1(0))$ halmaz is nyílt. Mivel $A0 = 0$, ezért a 0 belső pontja az $A(B_1(0))$ halmaznak, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(0) \subseteq A(B_1(0))$. Ekkor az A linearitása miatt

$$\operatorname{Ran} A = A \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n(0)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(B_1(0)) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_r(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{rn}(0) = V$$

teljesül, vagyis A szürjektív.
Most tegyük fel, hogy A szürjektív. Ekkor

$$V = A\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n)(0).$$

Mivel V teljes metrikus tér, ezért a Baire-féle kategóritétel miatt nem áll elő megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Tehát létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\operatorname{Int}\overline{A(B_n(0))} \neq \emptyset$. Mivel a nem nulla számmal való szorzás lineáris homeomorfizmus és A lineáris, ezért

$$\operatorname{Int}\overline{A(B_n(0))} = \operatorname{Int}\overline{A(nB_1(0))} = \operatorname{Int}\overline{nA(B_1(0))} = \operatorname{Int}\left(n\overline{A(B_1(0))}\right) = n\operatorname{Int}\overline{A(B_1(0))} \neq \emptyset.$$

Legyen $z \in \operatorname{Int}\overline{A(B_1(0))}$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$, valamint a $B_1(0)$ halmaz szimmetrikussága és A linearitása miatt $B_r(-z) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$ is teljesül. A 14.74 tétel alapján $\overline{A(B_1(0))}$ konvex halmaz. Ha $x \in U$ olyan, hogy $\|x\| < r$, akkor $x + z \in B_r(z)$ és $x - z \in B_r(-z)$ miatt $x + z, x - z \in \overline{A(B_1(0))}$, vagyis a konvexitás miatt

$$x = \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2}(x-z) \in \overline{A(B_1(0))}.$$

Tehát $B_r(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$. Ekkor viszont a 14.77 tétel miatt az $R = \dfrac{r}{2}$ számra $B_R(0) \subseteq A(B_1(0))$ teljesül.
Ennek a segítségével megmutatjuk, hogy A nyílt leképezés. Legyen $\Omega \subseteq U$ nyílt halmaz és $y \in A(\Omega)$. Ekkor létezik olyan $x \in \Omega$, melyre $Ax = y$, továbbá létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_c(x) \subseteq \Omega$. Így

$$A(\Omega) \supseteq A(B_c(x)) = A(x + B_c(0)) = A(x + cB_1(0)) = Ax + cA(B_1(0)) \supseteq y + cB_R(0) = B_{Rc}(y)$$

miatt y belső pontja az Ω halmaznak.

14.79. Tétel. *(Banach tétele a folytonos inverz létezéséről.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris bijekció, akkor A^{-1} is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris bijekció. Ekkor A szürjektív, vagyis 14.78 Banach nyílt leképezés tétele alapján nyílt is. Ami a folytonosság topologikus jellemzése alapján éppen azt jelenti, hogy A^{-1} folytonos.

14.80. Definíció. Azt mondjuk, hogy a V vektortéren értelmezett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma *összehasonlítható*, ha létezik olyan $C_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_1 \leq C_1 \|\cdot\|_2$ teljesül, vagy létezik olyan $C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_2 \leq C_2 \|\cdot\|_1$ teljesül.

14.81. Tétel. *Legyen V vektortér, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan norma a V vektortéren, mellyel V Banach-tér. Ha $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ összehasonlítható, akkor $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens normák.*

Bizonyítás. Legyen V vektortér, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan norma a V vektortéren, mellyel V Banach-tér. Tegyük fel, hogy létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_1 \leq C_1 \|\cdot\|_2$ teljesül. Tekintsük az

$$\mathrm{id}_V : (V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1) \qquad x \mapsto x$$

lineáris leképezést. Ez a

$$\sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|\mathrm{id}_V(x)\|_1 = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|x\|_1 \leq \sup_{\|x\|_2 \leq 1} C\|x\|_2 = C < \infty$$

egyenlőtlenség alapján folytonos. Ezért a 14.79 folytonos inverzről szóló tétel alapján id_V inverze is folytonos, vagyis

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \left\|\mathrm{id}_V^{-1}(x)\right\|_2 < \infty.$$

Ha $K \in \mathbb{R}^+$ jelöli a fenti képletben szereplő szuprémumot, akkor minden $x \in V$, $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|x\|_2 \leq K$ teljesül. Vagyis ha $x \in V \setminus \{0\}$ tetszőleges, akkor $\left\|\dfrac{1}{\|x\|_1}x\right\|_1 \leq 1$ miatt $\left\|\dfrac{1}{\|x\|_1}x\right\|_2 \leq K$, azaz $\|x\|_2 \leq K\|x\|_1$. Amivel igazoltuk, hogy a $\|\cdot\|_1$ és a $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek.

14.17. Zárt gráf tétel

14.82. Definíció. Legyen X, Y halmaz és $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény. Az f *függvény gráfjának* nevezzük a $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in \operatorname{Dom} f\}$ halmazt.

Magyarázat. A halmazelméletben éppen a függvény gráfján keresztül vezettük be a függvényeket, vagyis szigorúan véve $\Gamma(f) = f$.

14.83. Definíció. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy A *zárt*, ha $\Gamma(A)$ zárt halmaz az $U \times V$ szorzattérben.

14.84. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Az A leképezés pontosan akkor zárt, ha minden olyan $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ konvergens sorozatra, melyre az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{Dom} A$ és*

$$A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. A $\Gamma(A)$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden benne haladó konvergens sorozat határértéke eleme a $\Gamma(A)$ halmaznak. Ha $z : \mathbb{N} \to \Gamma(A)$ konvergens sorozat, akkor létezik olyan $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z_n = (x_n, Ax_n)$ teljesül, valamint z konvergenciája miatt az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens. Tehát $\Gamma(A)$ pontosan akkor zárt, ha minden ilyen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in \Gamma(A)$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$, ami másképp $\lim\limits_{n\to\infty} x_x \in \operatorname{Dom} A$ és $A\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ teljesülését jelenti.

14.85. Tétel. *Zártgráf-tétel Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris altéren értelmezett lineáris leképezés. Ekkor az alábbi állítások közül bármely kettő maga után vonja a harmadikat.*

i. $\operatorname{Dom} A$ *zárt;*
ii. $\Gamma(A)$ *zárt;*
iii. A *folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris altéren értelmezett lineáris leképezés.
Tegyük fel, hogy $\operatorname{Dom} A$ és $\Gamma(A)$ zárt. Mivel $\operatorname{Dom} A$ zárt lineáris altere egy teljes térnek, ezért teljes is, vagyis $(\operatorname{Dom} A, \|\cdot\|_U |_{\operatorname{Dom} A})$ Banach-tér. Mivel $U \times V$ is Banach-tér és ennek $\Gamma(A)$ zárt altere, ezért $\Gamma(A)$ is Banach-tér a szorzatnorma megszorításával. A

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}_U &: U \times V \to U & (x, y) &\mapsto x \\ \operatorname{pr}_V &: U \times V \to V & (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

projekciók folytonos lineáris leképezések, ezért a

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)} &: \Gamma(A) \to \operatorname{Dom} A & (x, Ax) &\mapsto x \\ \operatorname{pr}_V |_{\Gamma(A)} &: \Gamma(A) \to \operatorname{Ran} A & (x, Ax) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

megszorításuk is folytonos. Így $\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}$ Banach-terek között ható folytonos lineáris bijekció, vagyis a folytonos inverz létezéséről szóló 14.79 tétel alapján a

$$\left(\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}\right)^{-1} : \operatorname{Dom} A \to \Gamma(A) \qquad x \mapsto (x, Ax)$$

leképezés folytonos. Ekkor viszont $A = \operatorname{pr}_V |_{\Gamma(A)} \circ \left(\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}\right)^{-1}$ miatt A folytonos leképezések kompozíciója, tehát folytonos.
Tegyük fel, hogy $\operatorname{Dom} A$ zárt és A folytonos. Legyen $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ tetszőleges konvergens sorozat a $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ határértékkel. Mivel $\operatorname{Dom} A$ zárt, ezért $z \in A$, valamit A folytonossága miatt

$$A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

Ezért a 14.84 tétel alapján $\Gamma(A)$ zárt.
Tegyük fel, hogy $\Gamma(A)$ zárt és A folytonos. Legyen $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ konvergens sorozat és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z_n = (x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$. Ekkor minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\|(x_n, Ax_n) - (x_m, Ax_m)\| = \|(x_n - x_m, A(x_n - x_m))\| = \max\{\|x_n - x_m\|_U, \|A(x_n - x_m)\|_V\} \leq \\ \leq \max\{\|x_n - x_m\|_U, \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_U\} < (1 + \|A\|)\|x_n - x_m\|_U,\end{aligned}$$

amiből adódik, hogy $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\Gamma(A)$ teljes térben, vagyis létezik a határértéke és a határértéke is benne van a $\Gamma(A)$ térben. Ezért $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n\right) \in \Gamma(A)$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{Dom} A$. Tehát $\operatorname{Dom} A$ zárt halmaz.

15. Hilbert-terek

15.1. Skaláris szorzással ellátott terek

15.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

- $\forall x \in V: \ \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V: \ \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x,y,z \in V: \ \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$;
- $\forall x,y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \langle \lambda x,y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$;
- $\forall x,y \in V: \ \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

Azt mondjuk, hogy V *skalárszorzatos vektortér*, ha a V vektortéren adott egy skaláris szorzás.

15.2. Tétel. *Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x,y,z \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra*

$$\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle \qquad \langle x,\lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x,y,z \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\langle x,y+z\rangle &= \overline{\langle y+z,x\rangle} = \overline{\langle y,x\rangle + \langle z,x\rangle} = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle\\ \langle x,\lambda y\rangle &= \overline{\langle \lambda y,x\rangle} = \overline{\lambda\langle y,x\rangle} = \lambda\langle x,y\rangle .\end{aligned}$$

15.3. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x,y \in V$ vektorra*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett és legyen $x,y \in V$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \le \langle z,z\rangle = \langle x-ty,x-ty\rangle = \langle x,x\rangle - \overline{t}\langle y,x\rangle - t\langle x,y\rangle + |t|^2\langle y,y\rangle .$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$ értéket

$$\begin{aligned}0 &\le \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \frac{\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle\langle y,y\rangle}\langle y,y\rangle =\\ &= \frac{1}{\langle y,y\rangle}\left(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - |\langle x,y\rangle|^2\right)\end{aligned}$$

adódik.

15.4. Tétel. *Legyen V vektortér és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzás a V vektortéren. Ekkor*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

norma.

Bizonyítás. A skaláris szorzás definíciója alapján minden $x \in V$ vektorra és $c \in \mathbb{K}$ számra

$$\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx\rangle} = \sqrt{\overline{c}\,\langle x, cx\rangle} = \sqrt{\overline{c}\left(\overline{\langle cx, x\rangle}\right)} = \sqrt{\overline{c}\left(\overline{\overline{c}\,\langle x, x\rangle}\right)} = \sqrt{\overline{c}c\,\langle x, x\rangle} = |c| \cdot \|x\|$$

teljesül.
Ha $x = 0$, akkor $\|x\| = \sqrt{0} = 0$. Ha valamilyen $x \in V$ vektorra $\|x\| = 0$, akkor $\langle x, x\rangle = 0$, vagyis $x = 0$.
Legyen $x, y \in V$ tetszőleges. Azt kell igazolni, hogy

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

teljesül. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség minden tagja pozitív, ezért elég az egyenlőtlenség négyzetét igazolni, vagyis, hogy

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y\rangle &\leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle &\leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ \operatorname{Re}\langle x, y\rangle &\leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

teljesül. Ez viszont rögtön adódik a 15.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből és a komplex számokra vonatkozó $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$ egyenlőtlenségből.

15.5. Tétel. *(Parallelogramma-egyenlőség.) Ha V skalárszorzatos vektortér, akkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorzatos vektortér és $x, y \in V$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

15.6. Definíció. Legyen V vektortér és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzás a V téren.
- Ekkor a $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ párt *prehilbert-térnek* nevezzük.
- A $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ párt *Hilbert-térnek* nevezzük, ha a skaláris szorzásból származtatott normára nézve teljes normált tér.

Jelölés. A (pre-) Hilbert-tereket a továbbiakban csak az alaphalmaz szimbólumával jelöljük és a térhez tartozó skaláris szorzást csak akkor írjuk ki, ha annak elhagyása félrevezető lenne. Továbbá adott $\mathscr{H}$ Hilbert-tér esetén a $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ térre a $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ vagy a $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ jelölést fogjuk használni.

15.7. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in \mathscr{H}$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i\in I}$ vektorrendszer
- *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha
$$\forall x \in \mathscr{H}\Big((\forall i \in I : \langle e_i, x\rangle = 0) \to x = 0\Big)$$
teljesül;
- *Schauder-bázis*, ha teljes lineárisan független vektorrendszer.

15.8. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor a*

$$\begin{aligned} \langle\cdot, z\rangle : &\mathscr{H} \to \mathbb{K} \qquad x \mapsto \langle x, z\rangle \\ \langle z, \cdot\rangle : &\mathscr{H} \to \mathbb{K} \qquad x \mapsto \langle z, x\rangle \end{aligned}$$

leképezések folytonosak.

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Mivel a $\langle z, \cdot \rangle$ leképezés a skaláris szorzás definíciója alapján lineáris és a 15.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\|\langle z, \cdot \rangle\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle z, x \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \cdot \|z\| \leq \|z\| < \infty,$$

ezért a lineáris leképezések folytonosságára vonatkozó 14.14 tétel alapján $\langle z, \cdot \rangle$ folytonos lineáris leképezés.
Mivel a konjugálás művelete folytonos és $\langle \cdot, z \rangle = \overline{\langle z, \cdot \rangle}$, ezért $\langle \cdot, z \rangle$ két folytonos leképezés kompozíciója, így folytonos.

15.9. Tétel. *Legyen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *(Bessel-egyenlőtlenség.) Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra és $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra*
$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$
2. *Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra*
$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle \, e_n .$$
3. *(Parseval-egyenlőség.) Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra*
$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 .$$

Bizonyítás. Legyen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben és legyen $x \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor.
1. Mivel minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x \rangle \, e_n \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{i=0}^{N} \langle e_i, x \rangle \, e_i, x - \sum_{j=0}^{N} \langle e_j, x \rangle \, e_j \right\rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{N} \overline{\langle e_i, x \rangle} \, \langle e_i, x \rangle - \sum_{j=0}^{N} \langle e_j, x \rangle \, \langle x, e_j \rangle + \sum_{i,j=0}^{N} \overline{\langle e_i, x \rangle} \, \langle e_j, x \rangle \, \langle e_i, e_j \rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=0}^{N} |\langle e_i, x \rangle|^2 + \sum_{i=0}^{N} \overline{\langle e_i, x \rangle} \, \langle e_i, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{N} |\langle e_i, x \rangle|^2 \end{aligned}$$

teljesül, ezért minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{N} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Tehát

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

is teljesül, valamint ha az összegzés csak egy $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra végezzük el, azzal csak csökkenteni tudjuk a bal oldalon álló kifejezés értékét, vagyis minden $J \subseteq \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x \rangle \, e_k$. Minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ számra

$$\|\alpha_m - \alpha_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \langle e_k, x \rangle \, e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=n+1}^{m} \langle e_i, x \rangle \, e_i, \sum_{j=n+1}^{m} \langle e_j, x \rangle \, e_j \right\rangle = \tag{15.1}$$

$$= \sum_{i,j=n+1}^{m} \overline{\langle e_i, x\rangle} \langle e_j, x\rangle \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=n+1}^{m} |\langle e_i, x\rangle|^2 .$$

Az 1. pont alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 < \infty$, tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 < \varepsilon^2$$

teljesül, vagyis a (15.1) egyenlőtlenség alapján minden $n, m \in \mathbb{N}$ számra $N < n, m$ esetén

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért konvergens is, vagyis létezik a Hilbert-térben a $z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle e_n$ vektor.

Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. A skaláris szorzás folytonossága miatt

$$\begin{aligned}
\left\langle e_k, x - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle e_n \right\rangle &= \langle e_k, x\rangle - \left\langle e_k, \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n \right\rangle = \\
&= \langle e_k, x\rangle - \lim_{N\to\infty} \left\langle e_k, \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n \right\rangle = \langle e_k, x\rangle - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle \langle e_k, e_n\rangle = \\
&= \langle e_k, x\rangle - \langle e_k, x\rangle = 0
\end{aligned}$$

teljesül. Mivel az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorrendszer teljes, ezért

$$x - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle e_n = 0.$$

3. A 2. pontban bizonyított egyenlőséget skalárisan szorozva az x vektorral

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \left\langle x, \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle e_n \right\rangle \\
\|x\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle \langle x, e_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2
\end{aligned}$$

adódik.

Kiegészítés. Az alábbi tétel segítségével könnyen eldönthető, hogy egy normált tér normája skaláris szorzásból származik-e vagy sem.

15.10. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Pontosan akkor létezik a V vektortéren olyan skaláris szorzás mely V normáját generálja, ha minden $x, y \in V$ vektorra*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

◊

15.2. Vektor ortogonális projekciója zárt altérre

15.11. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathscr{H}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in W$, melyre*

$$\operatorname{dist}_W(x) = \inf_{z\in W} \|z - x\| = \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathscr{H}$. Vezessük be a $d = \operatorname{dist}_W(x)$ jelölést. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $w_n \in W$ vektor, melyre

$$\|w_n - x\| < d + \frac{1}{n+1}$$

teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d \leq \|w_n - x\|$ ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \|w_n - x\| = d$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a $\lim\limits_{n\to\infty} \|w_n - x\|^2 = d^2$ határérték miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ természetes számra $\|w_n - x\|^2 < d^2 + \frac{\varepsilon}{4}$. Ha $n, m \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $N < n, m$, akkor W konvexitása miatt $\frac{w_n + w_m}{2} \in W$ és parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned}
\|w_n - w_m\|^2 &= \|(w_n - x) - (w_m - x)\|^2 = 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - \|(w_n - x) + (w_m - x)\|^2 = \\
&= 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{w_n + w_m}{2} - x\right\|^2 \leq \\
&\leq 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4d^2 = 2\left(\|w_n - x\|^2 - d^2\right) + 2\left(\|w_n - x\|^2 - d^2\right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tehát a $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat. Mivel $\mathscr{H}$ teljes, ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = y$ határérték, valamint W zártsága miatt $y \in W$. Erre az y vektorra

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - w_n\| = d$$

teljesül.
Az y vektor egyértelműségének a bizonyításához tegyük fel, hogy léteznek olyan $y_1, y_2 \in W$, melyekre $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$. Ekkor a parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned}
\|y_1 - y_2\|^2 &= \|(y_1 - x) - (y_2 - x)\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - \|(y_1 - x) + (y_2 - x)\|^2 \leq \\
&= 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \leq \\
&\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,
\end{aligned}$$

tehát $\|y_1 - y_2\| = 0$ miatt $y_1 = y_2$.

15.12. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér.
- Az $x, y \in V$ vektorok *ortogonálisak* vagy *merőlegesek egymásra*, ha $\langle x, y\rangle = 0$.
- Az $x \in V$ vektor *ortogonális* vagy *merőleges a $W \subseteq V$ halmazra*, ha minden $y \in W$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$.
- Az $L, W \subseteq V$ *halmazok ortogonálisak*, ha minden $x \in L$ és $y \in W$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$.

15.13. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathscr{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf\limits_{z\in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor x_W az egyetlen olyan vektora a W lineáris altérnek, melyre $x - x_W$ ortogonális a W altérre.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, $x \in \mathscr{H}$ és $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf\limits_{z\in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Legyen $z \in W$ tetszőleges vektor és $t \in \mathbb{K}$ paraméter. Mivel W lineáris altér, ezért $x_W + tz \in W$. Ebben az esetben viszont

$$\|x - x_W\|^2 \leq \|x - x_W - tz\|^2 = \|x - x_W\|^2 + |t|^2\|z\|^2 - 2\operatorname{Re}(t\langle x - x_W, z\rangle)$$

alapján

$$0 \leq |t|^2\|z\|^2 - 2\operatorname{Re}(t\langle x - x_W, z\rangle).$$

Tehát minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $t = \lambda$ választással élve $0 \leq \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda\operatorname{Re}(\langle x - x_W, z\rangle)$, amiből $\operatorname{Re}(\langle x - x_W, z\rangle) = 0$ következik. Továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $t = \mathrm{i}\lambda$ választással élve $0 \leq$

$\lambda^2 \|z\|^2 + 2t \operatorname{Im}(\langle x - x_W, z\rangle)$, amiből $\operatorname{Im}(\langle x - x_W, z\rangle) = 0$ következik. Vagyis $\langle x - x_W, z\rangle = 0$ teljesül minden $z \in W$ vektorra, tehát $x - x_W$ ortogonális a W altérre.
Tegyük fel, hogy $y \in W$ olyan vektor, hogy $x - y$ ortogonális a W altérre, tehát minden $z \in W$ esetén $\langle z, x - y\rangle = 0$. Mivel $x_W - y \in W$, ezért $\langle x_W - y, x - y\rangle = 0$, amiből pedig

$$\begin{aligned}\|x_W - y\|^2 &= \langle x_W - y, x_W - y\rangle = \langle x_W - y, (x_W - x) + (x - y)\rangle = \\ &= \langle x_W - y, x_W - x\rangle + \langle x_W - y, x - y\rangle = 0\end{aligned}$$

következik, tehát $y = x_W$.

15.14. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathscr{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf\limits_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor az x_W vektort az x *vektor W altérre való ortogonális vetületének* vagy *projekciójának* nevezzük.

15.3. Zárt altér ortogonális kiegészítő altere

15.15. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz. Ekkor a

$$L^\perp \triangleq (z \in \mathscr{H} \mid \forall x \in L : \ \langle x, z\rangle = 0)$$

halmazt L *ortogonálisának* nevezzük.

15.16. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér.*

1. *Minden nem üres $L \subseteq \mathscr{H}$ esetén $L^\perp$ zárt lineáris altér.*
2. *Minden nem üres $L \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ esetén $K^\perp \subseteq L^\perp$.*
3. *Minden nem üres $L \subseteq \mathscr{H}$ esetén $L \subseteq L^{\perp\perp}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér.
1. Tegyük fel, hogy $L \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz. Ekkor minden $x, y \in L^\perp$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén mivel minden $z \in L$ vektorra

$$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0 \qquad \langle \lambda x, z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, z\rangle = 0$$

teljesül, ezért $x + y, \lambda x \in L^\perp$. Tehát $L^\perp$ lineáris altér. Az $L^\perp$ zártságának igazolásához legyen $a : \mathbb{N} \to L^\perp$ tetszőleges konvergens sorozat a $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ határértékkel. Tetszőleges $z \in L$ esetén a skaláris szorzás folytonossága (15.8 tétel) miatt

$$\langle z, c\rangle = \left\langle z, \lim_{n\to\infty} a_n\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, a_n\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

vagyis $c \in L^\perp$. Mivel minden $L^\perp$ halmazban haladó konvergens sorozat határértéke a halmazban van, ezért $L^\perp$ zárt halmaz.
2. Tegyük fel, hogy $L \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmazok és $x \in K^\perp$. Ekkor minden $z \in K$ esetén $\langle x, z\rangle = 0$. Mivel $L \subseteq K$, ezért minden $z \in L$ esetén is $\langle x, z\rangle = 0$, vagyis $x \in L^\perp$.
3. Legyen $L \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz és $x \in L$. Ekkor minden $z \in L^\perp$ esetén $\langle z, x\rangle = 0$, vagyis $x \in L^{\perp\perp}$.

15.17. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér. Ekkor W és $W^\perp$ zárt ortogonális kiegészítő alterek, vagyis $W \cap W^\perp = \{0\}$ és $W + W^\perp = \mathscr{H}$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér. Ha $z \in W \cap W^\perp$, akkor $\langle z, z\rangle = 0$, vagyis $z = 0$. Legyen $x \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor $x_W \in W$ és $x - x_W \in W^\perp$, tehát az

$$x = x_W + (x - x_W)$$

egyenlőség miatt $W + W^\perp = \mathscr{H}$.

15.18. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, akkor $W = W^{\perp\perp}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér. A 15.17 tételt alkalmazva a $W^\perp$ zárt altérre $W^{\perp\perp} + W^\perp = \mathscr{H}$ adódik, ugyanakkor $W + W^\perp = \mathscr{H}$ és nyilván $W \subseteq W^{\perp\perp}$. Ezek alapján $W = W^{\perp\perp}$, ugyanis ha $0 \neq x \in W^{\perp\perp}$, akkor $x \notin W^\perp$, tehát $W + W^\perp = \mathscr{H}$ miatt $x \in W$.

15.19. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ lineáris altér, akkor $\overline{L} = L^{\perp\perp}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ lineáris altér. Mivel $L \subseteq \overline{L}$, ezért a 15.16 tétel alapján $\overline{L}^\perp \subseteq L^\perp$, amiből viszont $L^{\perp\perp} \subseteq \overline{L}^{\perp\perp}$ adódik. A 15.18 tételt alkalmazva az $\overline{L}$ lineáris altérre azt kapjuk, hogy $\overline{L} = \overline{L}^{\perp\perp}$. Ezek alapján $L^{\perp\perp} \subseteq \overline{L}$. Az $\overline{L} \subseteq L^{\perp\perp}$ tartalmazás pedig a 15.16 tétel alapján nyilvánvaló.

15.4. Ortogonális projekciók

15.20. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, tekintsük a*

$$P : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \qquad x \mapsto x_W$$

leképezést.

1. *A P leképezés lineáris.*
2. *A P leképezésre $\operatorname{Ran} P = W$ és $\operatorname{Ker} P = W^\perp$.*
3. *$P^2 = P$*
4. *Ha $W \neq \{0\}$, akkor $\|P\| = 1$.*

Bizonyítás. Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $P : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $Px = x_W$.
1. Legyen $x, y \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár. A 15.13 tétel alapján ekkor minden $z \in W$ esetén $\langle x - Px, z\rangle = \langle y - Py, z\rangle = 0$. Tehát minden $z \in W$ esetén

$$\langle x + y - (Px + Py), z\rangle = 0 \qquad \text{és} \qquad \langle \lambda x - \lambda Px, z\rangle = 0$$

amiből megint a 15.13 tétel alapján $P(x + y) = Px + Py$ és $P(\lambda x) = \lambda Px$ adódik.
2. A P leképezés definíciója alapján $\operatorname{Ran} P \subseteq W$ és ugyancsak a definíció alapján minden $x \in W$ vektorra $Px = x$ teljesül, tehát $W \subseteq \operatorname{Ran} P$. Ha $x \in \operatorname{Ker} P$, akkor $Px = 0$, a 15.13 tétel alapján pedig ekkor $x - Px = x$ merőleges a W altérre, tehát $x \in W^\perp$. Ha $x \in W^\perp$, akkor $x - Px$ is merőleges a W altérre, ami $Px = 0$ mellett következik be, tehát $x \in \operatorname{Ker} P$.
3. Minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $Px \in W$ és minden $z \in W$ esetén definíció szerint $Pz = z$, ezért $P^2x = P(Px) = Px$.
4. Mivel $W \neq \{0\}$, ezért létezik olyan $z \in W$, hogy $\|z\| = 1$ és ekkor az operátornomára

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Px\| \geq \|Pz\| = \|z\| = 1$$

teljesül, vagyis $1 \leq \|P\|$.

15.5. Riesz-féle reprezentációs tétel

15.21. Tétel. *(Riesz-féle reprezentációs tétel.) Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $\varphi \in \mathscr{H}'$, azaz $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, akkor létezik egyetlen olyan $z \in \mathscr{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathscr{H}$ esetén*

$$\varphi(x) = \langle z, x\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. Ha $\varphi = 0$, akkor $z = 0$ olyan vektor, melyre

$$\forall x \in \mathscr{H} : \qquad \varphi(x) = \langle z, x\rangle .$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\varphi \neq 0$. Ekkor létezik olyan $y \in \mathscr{H}$, melyre $\varphi(y) \neq 0$. A $W = \operatorname{Ker} \varphi$ lineáris altér zárt φ folytonossága miatt, így erre az altérre lehet ortogonálisan vetíteni. Legyen P

a W altérre való ortogonális vetítés operátora és tekintsük az $y' = y - Py$ vektort, melyről a 15.13 tétel alapján tudjuk, hogy ortogonális a W altérre, azaz $y' \in W^{\perp}$.
Ekkor $y' \neq 0$, hiszen

$$0 \neq \varphi(y) = \varphi(Py) + \varphi(y') = \varphi(y').$$

Ekkor bármely $x \in \mathscr{H}$ vektor esetén

$$\varphi(y')x - \varphi(x)y' \in \operatorname{Ker}\varphi = W$$

amiből $y' \in W^{\perp}$ miatt

$$\langle y', \varphi(y')x - \varphi(x)y' \rangle = 0$$

adódik. Vagyis minden $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\langle y', \varphi(y')x \rangle = \langle y', \varphi(x)y' \rangle \quad \Rightarrow \quad \varphi(y') \langle y', x \rangle = \varphi(x) \|y'\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{\overline{\varphi(y')}}{\|y'\|^2} y', x \right\rangle = \varphi(x).$$

Tehát a $z = \dfrac{\overline{\varphi(y')}}{\|y'\|^2} y'$ vektorra minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $\varphi(x) = \langle z, x \rangle$ teljesül.
A z vektor egyértelműségét úgy igazoljuk, hogy tegyük fel létezik olyan $z_1, z_2 \in \mathscr{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\varphi(x) = \langle z_1, x \rangle = \langle z_2, x \rangle .$$

Ebből az $x = z_1 - z_2$ választással $\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = 0$ adódik, vagyis $z_1 = z_2$.

16. Függvénysorozatok, függvénysorok

16.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

16.1. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $A \subseteq T$, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to M \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t) \ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \to \ d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha létezik olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens*, ha a T halmazon adott egy d_T metrika és minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

16.2. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$.

- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(T, V) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t) \right)$$

  képlettel definiáljuk.
- A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to V \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \ .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a T halmazon pontonként abszolút konvergens.

Megjegyzés. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ számra a

$$g_n : T \to V \qquad t \mapsto \sum_{j=0}^{n} f_j(t)$$

függvényt. Ekkor a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonkénti összegfüggvénye megegyezik a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvényével. A definíció szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz rendelt függvénysor éppen a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat. Így beszélhetünk a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletes konvergenciájáról. Tehát a $\sum_n f_n$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens az $A \subseteq T$ halmazon, ha létezik olyan $F \in \mathcal{F}(T, V)$ függvény, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \left(N < n \ \to \ \left\| F(t) - \sum_{j=0}^{n} f_j(t) \right\| < \varepsilon \right)$$

teljesül.

$\Diamond$

16.3. Tétel. *Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : \ (N < n, m \ \to \ d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : \ d(f_n(t), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : \ d(f_n(t), f_m(t)) \le d(f_n(t), f(t)) + d(f(t), f_m(t)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja az egyik irányú következtetést.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : \ (N < n, m \ \to \ d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a feltevés miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : \ d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$$

teljesül, amiből a d metrika folytonossága miatt

$$\forall t \in T : \ \lim_{m\to\infty} d(f_n(t), f_m(t)) = d\left(f_n(t), \lim_{m\to\infty} f_m(t)\right) = d(f_n(t), f(t)) \le \varepsilon$$

adódik.

16.4. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, M')$.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy az f függvény minden $x \in M$ pontban folytonos. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{3}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t \in M} d'(f_n(t), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel az f_{N+1} függvény folytonos az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(x)$ pontra $f_{N+1}(t) \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_{N+1}(x))$ teljesül. Ekkor

$$t \in B_\delta(x) \quad \Rightarrow \quad d'(f(t), f(x)) \leq d'(f(t), f_{N+1}(t)) + d'(f_{N+1}(t), f_{N+1}(x)) + d'(f_{N+1}(x), f(x)) < \varepsilon,$$

vagyis az f függvény folytonos az x pontban.

16.5. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, V)$.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra definiáljuk a $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ függvényt. Ekkor a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 16.4 tételt adódik az állítás.

16.6. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Legyen továbbá $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
Ekkor a lokálisan egyenletes konvergencia miatt minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x)}(x)$ halmazon. A K halmaznak természetes módon adott a

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{r(x)}(x)$$

nyílt halmazokkal való befedése, amiből a K halmaz kompaktsága miatt az következik, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, \ldots, x_n \in K$, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} B_{r(x_k)}(x_k)$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \ldots, n\}$ esetén az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x_k)}(x_k)$ halmazon, ezért létezik olyan $m_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $m_k < l \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{z \in B_{r(x_k)}(x_k)} d'(f(z), f_l(z)) < \varepsilon$$

teljesül. Legyen $N = \max\{m_k |\ k \in \{0, \ldots, n\}\}$, valamint legyen $N < l \in \mathbb{N}$ és $z \in K$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $k \in \{0, \ldots, n\}$, hogy $z \in B_{r(x_k)}(x_k)$. Továbbá $m_k \leq N < l$ miatt

$$d'(f(z), f_l(z)) < \varepsilon$$

teljesül. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < l \in \mathbb{N}$ számra és $z \in K$ pontra $d'(f(z), f_l(z)) < \varepsilon$ teljesül, ami éppen a K halmazon való egyenletes konvergenciát jelenti.

16.2. Korlátos folytonos függvények tere

16.7. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, (M,d) metrikus tér és $f : T \to M$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq M$ korlátos halmaz. A $T \to M$ korlátos függvények halmazát jelölje $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}(T,M)$. Ha (T,d_T) metrikus tér, akkor a $T \to M$ folytonos korlátos függvények halmazát pedig jelölje $C^{\mathrm{b}}(T,M)$.

16.8. Tétel. *Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér és (M,d) metrikus tér. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^{\mathrm{b}}(M,V) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t\in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma az $C^{\mathrm{b}}(M,V)$ vektortéren, így $(C^{\mathrm{b}}(M,V),\|\cdot\|_{\sup})$ normált tér.

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{\sup}$ függvény nyilvánvaló módon teljesíti a norma tulajdonságait.

16.9. Tétel. *Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér és (M,d) metrikus tér. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M,V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M,V)$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,V),\|\cdot\|_{\sup})$ normált térben.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M,V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M,V)$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \ (N < n \ \to \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon),$$

vagyis minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} = \sup_{x\in M} \|f_n(x) - f(x)\| \le \varepsilon.$$

Tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,V),\|\cdot\|_{\sup})$ normált térben.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,V),\|\cdot\|_{\sup})$ normált térben és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon,$$

vagyis

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \ \big(N < n \ \to \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\big),$$

tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

16.10. Tétel. *Legyen $(V,\|\cdot\|)$ Banach-tér, valamint (M,d) metrikus tér. Ekkor $(C^{\mathrm{b}}(M,V),\|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(V,\|\cdot\|)$ Banach-tér, (M,d) metrikus tér, és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $(C^{\mathrm{b}}(M,V),\|\cdot\|_{\sup})$ térben. Ha $x \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n,m > N$ természetes számra

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\|_{\sup} = \sup_{t\in M} \|f_n(t) - f_m(t)\| \ge \|f_n(x) - f_m(x)\|$$

teljesül. Vagyis minden $x \in M$ pont esetén az $n \mapsto f_n(x)$ sorozat Cauchy-sorozat a V Banach-térben, ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték. Definiáljuk az alábbi függvényt.

$$f : M \to V \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Először megmutatjuk, hogy az f függvény korlátos. Mivel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra $\|f_{N+1} - f_n\|_{\sup} < 1$ teljesül. Mivel f_{N+1} korlátos

függvény, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in M$ pontra $\|f_{N+1}(x)\| < K$ teljesül. Ezek alapján minden $N < n$ természetes számra és $x \in M$ pontra

$$\|f_{N+1}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{N+1} - f_n\|_{\sup} < 1,$$

vagyis

$$\|f_n(x)\| < 1 + \|f_{N+1}(x)\| < 1 + K$$

adódik, ebből pedig $\|f(x)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(x)\| < K + 1$. Tehát az f függvény korlátos.
A 16.3 tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Mivel az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat elemei folytonos függvények, ezért az egyenletes konvergencia miatt az f függvény is folytonos, vagyis $f \in C^{\mathrm{b}}(M, V)$.
A 16.9 tétel alapján $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletes konvergenciája éppen a $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ térbeli $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ konvergenciát jelenti.

Kiegészítés. Az iménti gondolatmenet megismételhető a kompakt tartójú függvények, illetve a végtelenben eltűnő függvények terére is.

16.11. Definíció. Legyen V vektortér és (T, d_T) metrikus tér. Az $f : T \to V$ *függvény tartójának* nevezzük a

$$\operatorname{supp} f \triangleq \overline{\{x \in T|\ f(x) \neq 0\}}$$

halmazt.

16.12. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (T, d_T) metrikus tér. Az $f : T \to V$ függvény *kompakt tartójú*, ha $\operatorname{supp} f$ kompakt halmaz. A folytonos kompakt tartójú függvények halmazát $C_0(T, V)$ jelöli, azaz

$$C_0(T, V) \triangleq \{f \in C(T, V)|\ \text{a } \operatorname{supp} f \text{ halmaz kompakt}\}.$$

16.13. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (T, d_T) metrikus tér. A $C_0(T, V)$ halmaz a pontonkénti műveletekkel vektortér és a*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C_0(T, V) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{x\in T} \|f(x)\|$$

leképezés norma, tehát $(C_0(T, V), \|\cdot\|_{\sup})$ normált-tér.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in C_0(T, V)$. Ha $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, akkor a $\operatorname{supp}(\lambda f) = \operatorname{supp} f$ egyenlőség miatt $\lambda f \in C_0(T, V)$, továbbá a $\lambda = 0$ esetben $\operatorname{supp}(\lambda f) = \emptyset$, tehát $\lambda f \in C_0(T, V)$ ekkor is teljesül. Mivel

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(f + g) &= \overline{\{x \in T|f(x) + g(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\{x \in T|f(x) \neq 0\} \cup \{x \in T|g(x) \neq 0\}} = \\ &= \overline{\{x \in T|f(x) \neq 0\}} \cup \overline{\{x \in T|g(x) \neq 0\}} = (\operatorname{supp} f) \cup (\operatorname{supp} g),\end{aligned}$$

és folytonos függvények összege is folytonos, ezért $f + g \in C_0(T, V)$. Tehát $C_0(T, V)$ vektortér. A $\|\cdot\|_{\sup}$ függvény pedig nyilvánvaló módon teljesíti a norma tulajdonságait.

A kompakt tartójú függvények tere általában nem Banach-tér, de az alább bemutatandó bővítéssel már teljessé lehet tenni a kompakt tartójú függvények terét.

16.14. Definíció. Legyen (T, d_T) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $f : T \to V$ függvény *végtelenben eltűnő*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy minden $x \in T \setminus K$ elemre $\|f(x)\| < \varepsilon$.

16.15. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen (T, d_T) lokálisan kompakt metrikus tér. Ekkor a $(C^{\mathrm{b}}(T, V), \|\cdot\|_{\sup})$ térben a $\overline{C_0(T, V)}$ halmaz megegyezik a folytonos végtelenben eltűnő $T \to V$ függvények halmazával.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (T, d_T) lokálisan kompakt metrikus tér.
Tegyük fel, hogy az $f \in C^{\mathrm{b}}(T, V)$ függvényre $f \in \overline{C_0(T, V)}$ teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $\varphi \in C_0(T, V)$, hogy $\|f - \varphi\|_{\sup} < \varepsilon$. Tekintsük a $K = \operatorname{supp} \varphi$ kompakt halmazt. Ekkor minden $t \in T \setminus K$ esetén $\varphi(t) = 0$, ezért $\|f(t)\| < \varepsilon$ teljesül. Tehát az f függvény folytonos és végtelenben eltűnő.
Legyen $f \in C^{\mathrm{b}}(T, V)$ végtelenben eltűnő függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{4}$ és tekintsük az

$$X = \{t \in T|\ \|f(t)\| \geq \varepsilon'\} \quad \text{és} \quad Y = \left\{t \in T|\ \|f(t)\| \leq \frac{\varepsilon'}{2}\right\}$$

halmazokat, melyek zártak, hiszen

$$X = (\overset{-1}{\|\cdot\|} \circ f)\,([\varepsilon', \infty[) \quad \text{és} \quad Y = (\overset{-1}{\|\cdot\|} \circ f)\left(\left[0, \frac{\varepsilon'}{2}\right]\right)$$

zárt halmazok folytonos függvény átali ősképei, valamint $X \cap Y = \emptyset$. A 13.101 tétel alapján létezik olyan folytonos $\varphi : T \to [0, 1]$ folytonos függvény, hogy minden $t \in X$ esetén $\varphi(t) = 1$ és minden $t \in Y$ esetén $\varphi(t) = 0$. Legyen $g = \varphi f$. A g függvény folytonos és megmutatjuk, hogy kompakt tartójú. Mivel az f függvény a végtelenben eltűnő, ezért létezik olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy minden $t \in T \setminus K$ esetén $\|f(t)\| < \dfrac{\varepsilon'}{4}$. Ekkor nyilván $T \setminus K \subseteq Y$, vagyis $T \setminus Y \subseteq K$. Mivel $\{t \in T|\ \varphi(t) > 0\} \subseteq T \setminus Y$, ezért $\{t \in T|\ \varphi(t) > 0\} \subseteq K$ is teljesül. Felhasználva, hogy a K kompakt halmaz zárt és $\operatorname{Ran} \varphi \subseteq \mathbb{R}_0^+$ ezért

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{t \in T|\ \varphi(t) \neq 0\}} \subseteq K.$$

A K kompakt halmaznak $\operatorname{supp} \varphi$ zárt részhalmaza, ezért a $\operatorname{supp} \varphi$ halmaz is kompakt. Mivel a

$$\operatorname{supp} g = \operatorname{supp}(\varphi f) = \overline{\{x \in T|\ \varphi(x) f(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\{x \in T|\ \varphi(x) \neq 0\}} = \operatorname{supp} \varphi,$$

tartalmazás alapján $\operatorname{supp} g$ zárt részhalmaza a $\operatorname{supp} \varphi$ kompakt halmaznak, ezért $\operatorname{supp} g$ is kompakt. Tehát $g \in C_0(T, V)$. Megmutatjuk, hogy minden $t \in T$ pontra $\|f(t) - g(t)\| \leq 2\varepsilon'$ teljesül.
Ha $t \in X$, akkor a $\varphi(t) = 1$ miatt $g(t) = f(t)$, vagyis $\|g(t) - f(t)\| = 0$.
Ha $t \in Y$, akkor $\|f(t)\| \leq \dfrac{\varepsilon'}{2}$ és a $\varphi(t) = 0$ miatt $\|g(t)\| = 0$, vagyis

$$\|g(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Ha $t \in T \setminus (X \cup Y)$, akkor $\dfrac{\varepsilon'}{2} < \|f(t)\| < \varepsilon'$, és a $0 \leq \varphi(t) \leq 1$ miatt $\|g(t)\| \leq 1 \cdot \varepsilon'$, vagyis

$$\|g(t) - f(t)\| \leq \|g(t)\| + \|f(t)\| \leq \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon'.$$

Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $g \in C_0(T, V)$, melyre $\|f - g\|_{\sup} \leq 2\dfrac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$ teljesül.

$\Diamond$

16.16. Tétel. *Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

Bizonyítás. Legyen T halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens. Ekkor minden $t \in T$ esetén a $\sum\limits_n f_n(t)$ sor abszolút konvergens a V Banach-térben, ezért konvergens is. Tehát a függvénysor minden pontban konvergens.

16.17. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen T egy nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T,V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor egyenletesen is konvergens.

Bizonyítás. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T,V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysorra

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} \|f_n(t)\| < \infty.$$

Ekkor a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, tehát konvergens is. Legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Definiáljuk az

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad n \mapsto \sup_{t\in T} \|f_n(t)\|$$

sorozatot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az 5.5 tétel miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $N < n$ természetes számra és $t \in T$ pontra

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(t)\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.

16.18. Tétel. *(Dini-tétel.) Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan, a $C(M,\mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ teljesül. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az M halmazon és a $\lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan, a $C(M,\mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ teljesül. Ha $x \in M$, akkor az $n \mapsto f_n(x)$ sorozat monoton növő és felülről korlátos, vagyis konvergens. Tehát létezik az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatnak a pontonkénti határfüggvénye, ami legyen

$$f : M \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez, akkor a 16.4 tétel értelmében az f függvény is folytonos.
Most tegyük fel, hogy az f függvény folytonos és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor minden $x \in M$ ponthoz van olyan $N_x \in \mathbb{N}$ szám, melyre $f_{N_x}(x) > f(x) - \varepsilon$ teljesül és definiáljuk az $U_x = \{y \in M |\ f_{N_x}(y) > f(y) - \varepsilon\}$ halmazt. Ekkor minden $x \in M$ esetén U_x nyílt halmaz, hiszen $U_x = (f_{N_x} - f)^{-1}(]-\varepsilon, \infty[)$, valamint

$$M = \bigcup_{x\in M} U_x.$$

Mivel M kompakt, ezért az $(U_x)_{x\in M}$ lefedésnek létezik véges részlefedése, vagyis létezik véges sok $x_1,\dots,x_n\in M$ pont, melyre

$$M=\bigcup_{k=1}^{n}U_{x_k}$$

teljesül. Legyen $N=\max\{N_{x_1},\dots,N_{x_n}\}$. Megmutatjuk, hogy minden $N<n\in\mathbb{N}$ számra és minden $x\in M$ pontra

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Legyen $N<n\in\mathbb{N}$ és $x\in M$ rögzített. Ekkor létezik olyan $i\in\{1,\dots,n\}$, hogy $x\in U_{x_i}$, vagyis $f_{N_{x_i}}(x)>f(x)-\varepsilon$. Mivel $N_{x_i}\le N<n$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként monoton növő, ezért $f_n(x)\ge f_{N_{x_i}}(x)>f(x)-\varepsilon$, tehát

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

16.19. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér, $A\subseteq M$, $(V,\|\cdot\|)$ Banach-tér, minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n:A\to V$ olyan függvény, mely egyenletesen konvergál az $f:A\to V$ függvényhez, valamint legyen $a\in M$ olyan pont, mely torlódási pontja az A halmaznak. Ha minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_n$ határérték, akkor a $\lim\limits_a f$ határérték is létezik, valamint*

$$\lim_a f=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_a f_n\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $A\subseteq M$, $(V,\|\cdot\|)$ Banach-tér, minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n\in C(A,V)$ olyan függvény, mely egyenletesen konvergál az $f:A\to V$ függvényhez, valamint legyen $a\in M$ olyan pont, mely torlódási pontja az A halmaznak. Tegyük fel, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_n=c_n$ határérték. Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat a $(C(A,V),\|\cdot\|_{\sup})$ térben, ezért Cauchy-sorozat is, vagyis létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $N<n,m\in\mathbb{N}$ számra

$$\|f_n-f_m\|_{\sup}=\sup_{x\in A}\|f_n(x)-f_m(x)\|<\varepsilon.$$

Tehát minden $N<n,m\in\mathbb{N}$ számra

$$\|c_n-c_m\|=\lim_{x\to a}\|f_n(x)-f_m(x)\|\le\varepsilon,$$

vagyis a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat a V Banach-térben, ezért konvergens is. Legyen $c=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$. Most megmutatjuk, hogy $\lim\limits_a f=c$ teljesül. Ehhez legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ teljesül a $(C(A,V),\|\cdot\|_{\sup})$ térben, ezért létezik olyan $N_1\in\mathbb{N}$, hogy minden $N_1<n\in\mathbb{N}$ számra

$$\|f_n-f\|_{\sup}=\sup_{x\in A}\|f_n(x)-f(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel $c=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$, ezért létezik olyan $N_2\in\mathbb{N}$, hogy minden $N_2<n\in\mathbb{N}$ számra

$$\|c_n-c\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $m=\max\{N_1,N_2\}+1$. (Ekkor $\|f_m-f\|_{\sup}<\dfrac{\varepsilon}{3}$ és $\|c_m-c\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.) Mivel $c_m=\lim\limits_{x\to a}f_m(x)$, ezért létezik olyan $\delta\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in A$ elemre $0<d(a,x)<\delta$ esetén $\|f_m(x)-c_m\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ teljesül. Ekkor minden $x\in A$ elemre $0<d(a,x)<\delta$ esetén

$$\|f(x)-c\|\le\|f(x)-f_m(x)\|+\|f_m(x)-c_m\|+\|c_m-c\|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$.

16.3. Hatványsorok

16.20. Definíció. (*Hatványsorok.*)

– Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to V \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to V$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

16.21. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r \in [0, R_a[$, akkor*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty.$$
4. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat, továbbá legyen R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara.

3. Legyen $r \in [0, R_a[$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in B_r(0)} \|a_n x^n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot r^n < \infty,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél az 5.38 tételt használtuk.

1. Ha $x \in V$ és $|x| < R_a$, akkor legyen $r \in \,]|x|, R_a[$ tetszőleges paraméter. A 3. pont alapján a hatványsor nomálisan konvergens a $B_r(0)$ halmazon, ezért ott abszolút konvergens is.

2. Legyen $|x| > R_a$ és tegyük fel, hogy a $\sum\limits_n a_n x^n$ sor konvergens. Ekkor a 14.9 tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n = 0$ teljesül. Tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < k \in \mathbb{N}$ számra $\left\|a_k x^k\right\| < 1$, azaz

$$\sqrt[k]{\|a_k\|} < \frac{1}{|x|}.$$

Vagyis

$$\frac{1}{R_a} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup \left\{ \sqrt[k]{\|a_k\|} \mid k \geq n \right\} \leq \sup \left\{ \sqrt[k]{\|a_k\|} \mid k \geq N+1 \right\} \leq \frac{1}{|x|},$$

amiből az $|x| \leq R_a$ ellentmondás adódik.

4. Legyen $x \in B_{R_a}(0)$ tetszőleges pont. Válasszunk egy $r \in \,]|x|, R_a[$ paramétert. A 3. pont alapján a hatványsorra a $B_r(0)$ halmazon alkalmazható a 16.17 Weierstrass-tétel, tehát itt egyenletesen is konvergens a hatványsor. Vagyis az x pontnak a $B_r(0)$ halmaz olyan környezete ahol a hatványsor egyenletesen konvergens.

5. Mivel a függvénysor bármely véges összege folytonos függvény és a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletes a konvergencia, ezért a 16.4 tétel alapján az összegfüggvény is folytonos.

16.4. Abel-tétel

16.22. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\|$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $C_n < \infty$ és $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\|$. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen $\alpha_n = A - \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} C_n &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^{n+m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right\| = \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \|(A - \alpha_{n+m}) - (A - \alpha_{n-1})\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\| . \end{aligned}$$

Mivel az $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\alpha_n\| < K$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\| \le \|\alpha_{n-1}\| + \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n+m}\| \le K + K < \infty.$$

Tegyük fel, hogy a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart a nullához. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \le C_n$. Vagyis minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varepsilon_0 \le C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\|$$

teljesül. Mivel $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < n \in \mathbb{N}$ számra $\|\alpha_n\| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, vagyis minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\| \le \|\alpha_{n-1}\| + \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n+m}\| \le \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ezek alapján az $N_1 + 1$ számhoz létezik olyan $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \le C_n$, ugyanakkor minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra $C_n \le \frac{\varepsilon_0}{2}$, ami nyilvánvalóan ellentmondás, ezért $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$.

Magyarázat. A következő állítás előtt célszerű bevezetni az alábbi jelöléseket.

16.23. Definíció. Ha V vektortér és $a, b \in V$, akkor a

$$[a, b] \triangleq \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}, \qquad]a, b[\triangleq \{ta + (1-t)b \mid t \in]0, 1[\}$$

halmazokat az *a és b végpontú szakasznak*, illetve *nyílt szakasznak* nevezzük.

16.24. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z| = R_a$ és a P_a hatványsor konvergens a z pontban. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, z]$ szakaszon és a $P_a|_{[0,z]}$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z| = R_a$ és a P_a hatványsor konvergens a z pontban. Ha $x \in [0, z[$, akkor a hatványsor konvergens az x pontban és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\|$$

teljesül. Az $m \in \mathbb{N}^+$ változó szerinti teljes indukcióval igazolható az alábbi Abel-féle átrendezés.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k &= \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \left(\frac{x}{z}\right)^k = \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(\left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1}\right) \left(\sum_{j=n}^{k} a_j z^j\right) + \left(\frac{x}{z}\right)^{n+m} \sum_{j=n}^{n+m} a_j z^j\end{aligned}$$

Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sor konvergens, ezért a 16.22 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| < \infty,$$

valamint $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$. Mivel $\frac{x}{z} \in [0, 1[$, ezért minden $m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\| &\le \sum_{k=n}^{n+m-1} \left| \left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \right| \left\| \sum_{j=n}^{k} a_j z^j \right\| + \left|\frac{x}{z}\right|^{n+m} \left\| \sum_{j=n}^{n+m} a_j z^j \right\| \le \\ &\le \sum_{k=n}^{n+m-1} \left| \left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \right| C_n + \left|\frac{x}{z}\right|^{n+m} C_n \le \\ &\le C_n \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(\left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1}\right) + \left(\frac{x}{z}\right)^{n+m} C_n \le \\ &\le C_n \left(\left(\frac{x}{z}\right)^n - \left(\frac{x}{z}\right)^{n+m}\right) + \left(\frac{x}{z}\right)^{n+m} C_n = C_n \left(\frac{x}{z}\right)^n\end{aligned}$$

teljesül, vagyis

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\| \le \lim_{m\to\infty} C_n \left(\frac{x}{z}\right)^n = C_n \left(\frac{x}{z}\right)^n \le C_n.$$

A z pontban

$$\left\| P_a(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| = C_n$$

teljesül. Tehát minden $x \in [0, z]$ esetén

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| \le C_n,$$

vagyis

$$\sup_{x\in[0,z]} \left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| \le C_n.$$

Mivel a 16.22 tétel alapján a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a nullához tart, ezért a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, z]$ intervallumon.

16.5. Lineáris leképezés függvénye

16.25. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor minden $A \in \mathscr{L}(V, V)$, elemre $\|A\| < R_a$ esetén a*

$$\sum_n a_n A^n$$

sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$ olyan elem, melyre $\|A\| < R_a$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|a_k A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \|A\|^k .$$

A $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k$ sor konvergens az 5.38 Cauchy–Hadamard-tétel miatt, hiszen a $k \mapsto |a_k|$ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara is R_a, továbbá az $\|A\|$ számra $|\|A\|| < R_a$ teljesül. Ez azt mutatja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|a_k A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k ,$$

vagyis a $\sum_n a_n A^n$ sor abszolút konvergens a $\mathscr{L}(V, V)$ Banach-térben, ezért konvergens is.

16.26. Definíció. Legyen V Banach-tér és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

teljesül. Ekkor minden $A \in \mathscr{L}(V, V)$ elemre legyen

$$f(A) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n .$$

Kiegészítés. Az előbbiek kicsit általánosabb keretek között is érvényben maradnak teljesen azonos bizonyítás mellett.

16.27. Tétel. *Legyen A egységelemes Banach-algebra, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor minden $x \in A$ elemre $\|x\| < R_a$ esetén a*

$$\sum_n a_n x^n$$

sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen A egységelemes Banach-algebra, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Legyen $x \in A$ olyan elem, melyre $\|x\| < R_a$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|a_k x^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \|x\|^k .$$

A $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|x\|^k$ sor konvergens az 5.38 Cauchy–Hadamard-tétel miatt, hiszen a $k \mapsto |a_k|$ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara is R_a, továbbá a $\|x\|$ számra $|\|x\|| < R_a$ teljesül. Ez azt mutatja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|a_k x^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|x\|^k ,$$

vagyis a $\sum_n a_n x^n$ sor abszolút konvergens az A Banach-térben, ezért konvergens is.

16.28. Definíció. Legyen A egységelemes Banach-algebra és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

teljesül. Ekkor minden $a \in A$ elemre legyen

$$f(a) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a^n.$$

A fenti definícióban szereplő $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény helyett lehet $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex függvényt is tekinteni, melyekre csak azt a megkötést kell tenni, hogy legyen minden pontban komplex értelemben differenciálható (holomorf).

$\Diamond$

16.29. Definíció. Legyen T tetszőleges nem üres halmaz. A

$$\delta : T \times T \to \{0, 1\} \qquad (i, j) \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i \neq j; \\ 1, & \text{ha} \quad i = j \end{cases}$$

függvény a *Kronecker-féle delta-függvény.*

16.30. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel.*

1. *Ha A diagonalizálható, azaz létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) = Sf(D)S^{-1}$, ahol*

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

2. *Ha az A mátrix Jordan-felbontása egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis létezik olyan invertálható S mátrix és J mátrix, melyre $A = SJS^{-1}$, ahol*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \tag{16.1}$$

akkor $f(A) = Sf(J)S^{-1}$, ahol

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Vagyis

$$\text{ha} \quad J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i > j \text{ vagy } j - i > 1; \\ \lambda, & \text{ha} \quad i = j; \\ 1, & \text{ha} \quad j - i = 1, \end{cases} \qquad \text{akkor} \quad f(J_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i > j; \\ \dfrac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}, & \text{ha} \quad i \le j. \end{cases}$$

3. Ha A tetszőleges mátrix, melynek Jordan-felbontása $A = SPS^{-1}$ alakú, ahol S invertálható mátrix és P blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában a $(J_i)_{i=1,\dots,k}$ Jordan-blokkok állnak, akkor $f(A) = Sf(P)S^{-1}$, ahol $f(P)$ az a blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában az $(f(J_i))_{i=1,\dots,k}$ blokkok állnak.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan analitikus függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel. Ekkor az $m \mapsto a_m = \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!}$ olyan sorozat, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

teljesül, továbbá az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara végtelen. A 16.25 tétel alapján minden $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ leképezésre az

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m A^m$$

sor konvergens.
Mivel az f függvény mindenhol konvergens hatványsorral van meghatározva, ezért az f függvény minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor deriválható és minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\prod_{i=0}^{k-1} (m-i) \right) x^{m-k} = \sum_{m=k}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$$

teljesül.
Legyen S invertálható mátrix és legyen $B = S^{-1}AS$. Ekkor $A = SBS^{-1}$ teljesül, valamint minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{m} a_k A^k = \sum_{k=0}^{m} a_k S B^k S^{-1} = S \left(\sum_{k=0}^{m} a_k B^k \right) S^{-1}.$$

Mivel a mátrixszal való szorzás folytonos művelet, ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \lim_{m\to\infty} \left(S \left(\sum_{k=0}^{m} a_k B^k \right) S^{-1} \right) = S \left(\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k B^k \right) \right) S^{-1} =$$
$$= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k \right) S^{-1} = Sf(B)S^{-1}.$$

1. Ha B diagonális mátrix, akkor hatványaira teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ kitevőre és $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$B_{ij}^m = \begin{cases} B_{ii}^m, & \text{ha} \quad i = j; \\ 0, & \text{ha} \quad i \ne j \end{cases}$$

teljesül, amiből adódik az állítás.
2–3. Tegyük fel, hogy B olyan mátrix, mely egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis (16.1) alakú. Ekkor teljes indukcióval igazolható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ kitevőre és $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$B_{ij}^m = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j - i < 0; \\ \lambda^m, & \text{ha} \quad j - i = 0; \\ \binom{m}{j-i} \lambda^{k-j+i}, & \text{ha} \quad 0 < j - i \le m; \\ 0, & \text{ha} \quad j - i > m \end{cases}$$

teljesül. Ekkor az $f(B)$ mátrix $i, j \in \{1, \dots, n\}$ elemeire
$j < i$ esetén $f(B)_{ij} = 0$;
$j = i$ esetén $f(B)_{ii} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m = f(\lambda)$;
$j > i$ esetén

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \binom{m}{j-i} \lambda^{k-j+i} = \frac{1}{(j-i)!} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-(j-i))!} \lambda^{k-(j-i)} = \frac{1}{(j-i)!} f^{(j-i)}(\lambda)$$

teljesül.

16.31. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsünk egy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, legyen $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ az A lineáris leképezés sajátértékeinek a halmaza és $f : \mathrm{Sp}(A) \to \mathbb{C}$ függvény. Ha létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) \triangleq Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

16.6. Approximáció Bernstein-polinommal

Magyarázat. A továbbiakban a függvények közelítéséről szóló alaptételeket tekintjük át.

16.32. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to V$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az f *függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to V \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

16.33. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to V$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to V$ folytonos függvény, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $[a, b]$ kompakt halmaz és f folytonos, ezért: f korlátos, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [a, b]$ pontra $\|f(t)\| < C$; valamint a Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos, vagyis a később rögzítendő $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| < \delta$ esetén $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon'$ teljesül. Legyen $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$\left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right) \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \right\|. \tag{16.2}$$

Tekintsük az

$$I_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| < \delta \right\}$$
$$J_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta \right\}$$

halmazokat. Ekkor $I_n \cap J_n = \emptyset$ és $I_n \cup J_n = \{0, \dots, n\}$, vagyis a (16.2) egyenlet alapján

$$\begin{aligned}
\|B_n^f(t) - f(t)\| &\le \sum_{k\in I_n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \\
&+ \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \le \\
&\le \sum_{k\in I_n} \binom{n}{k} \cdot \varepsilon' \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k} \cdot 2C \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \le \\
&\le \varepsilon' \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + 2C \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} = \\
&= \varepsilon' + 2C \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ha $k \in J_n$, akkor definíció szerint

$$\left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \ge \delta,$$

amiből

$$\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \cdot \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \ge 1$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \le \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k} \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \le \\
&\le \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k},
\end{aligned}$$

ahol $x = \dfrac{t-a}{b-a}$. Minden $y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$(y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k z^{n-k},$$

melynek y szerinti első és második deriváltjából

$$\begin{aligned}
ny(y+z)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k y^k z^{n-k} \\
n(n-1)y^2(y+z)^{n-2} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) y^k z^{n-k}
\end{aligned}$$

adódik. Ha $z = 1 - y$, akkor ezekből

$$\begin{aligned}
ny &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k y^k (1-y)^{n-k} \\
n(n-1)y^2 + ny &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 y^k (1-y)^{n-k}
\end{aligned}$$

következik, vagyis

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Figyelembe véve, hogy $|x|, |1-x| \leq 1$

$$\left\|B_n^f(t) - f(t)\right\| \leq \varepsilon' + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n}$$

adódik. Vagyis ha $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, melyre $N > \dfrac{4C(b-a)^2}{\delta^2\varepsilon}$ teljesül, akkor minden $n > N$ és $t \in [a,b]$ esetén

$$\left\|B_n^f(t) - f(t)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n} \leq \varepsilon,$$

ezért

$$\sup_{t\in[a,b]} \left\|B_n^f(t) - f(t)\right\| \leq \varepsilon.$$

16.34. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. A $(C([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben a polinomok sűrű halmazt alkotnak.*

Bizonyítás. Az előző, 16.33 tétel következménye.

16.7. Stone-féle sűrűségi tétel

16.35. Definíció. Legyen T tetszőleges, nem üres halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$.

- Azt mondjuk, hogy az A *halmaz szétválasztó T felett*, vagy röviden *szétválasztó*, ha minden $x, y \in T$ elemre $x \neq y$ esetén van olyan $f \in A$, melyre $f(x) \neq f(y)$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az A *halmaz lineáris függvényháló*, ha lineáris altere az $\mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ térnek, valamint minden $f \in A$ esetén $|f| \in A$.

16.36. Tétel. *Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ függvényháló. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, ha $f_1, \ldots, f_n \in A$, akkor*

$$\sup\{f_1, \ldots, f_n\}, \inf\{f_i, \ldots, f_n\} \in A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ lineáris függvényháló, valamint legyen $f, g \in A$. Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sup(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \qquad \inf(x,y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}$$

teljesül, ezért

$$\sup(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \qquad \inf(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},$$

vagyis $\sup(f,g), \inf(f,g) \in A$. Ebből következik, hogy véges sok A halmazban lévő függvény infimuma és szuprémuma is eleme az A halmaznak.

16.37. Tétel. *(Stone-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan lineáris függvényháló, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.
1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan szétválasztó függvényháló, amely tartalmazza a konstans függvényeket. Legyen továbbá $f \in C(M, \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy létezik $u \in A$, melyre $\|f - u\|_{\sup} < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in M$ tetszőleges, ha $x \neq y$, akkor létezik olyan $h_{x,y} \in A$, melyre $h_{x,y}(x) \neq h_{x,y}(y)$, ekkor legyen $u_{x,y} : M \to \mathbb{R}$

$$u_{x,y}(t) = \frac{h_{x,y}(t) - h_{x,y}(x)}{h_{x,y}(y) - h_{x,y}(x)} \cdot (f(y) - f(x)) + f(x);$$

ha $x = y$, akkor legyen $u_{x,y} : M \to \mathbb{R}$

$$u_{x,y}(t) = f(x).$$

Mivel A lineáris altér, ezért minden $x, y \in M$ esetén $u_{x,y} \in A$, valamint $u_{x,y}(x) = f(x)$ és $u_{x,y}(y) = f(y)$. Minden $x, y \in M$ esetén legyen

$$U_{x,y} = \{t \in M |\ u_{x,y}(t) > f(t) - \varepsilon\}.$$

Ekkor $U_{x,y} \subseteq M$ nyílt halmaz, hiszen az $U_{x,y} = (\overset{-1}{u_{x,y} - f})(]-\varepsilon, \infty[)$ azonosság miatt $U_{x,y}$ nyílt halmaz folytonos függvény általi ősképe. Az $U_{x,y}$ konstrukciója folytán

$$M = \bigcup_{y \in M} U_{x,y},$$

amiből M kompaktsága miatt következik, hogy létezik véges sok $y_1, \dots, y_n$, melyre

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x,y_i}.$$

Minden $x \in M$ esetén legyen $u_x : M \to \mathbb{R}$

$$u_x = \sup \{u_{x,y_i} |\ i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Mivel A lineáris függvényháló, ezért a 16.36 tétel alapján $u_x \in A$, valamint minden $t \in M$ pont esetén $u_x(t) > f(t) - \varepsilon$. Most minden $x \in M$ esetén legyen

$$U_x = \{t \in M |\ u_x(t) < f(t) + \varepsilon\}.$$

Ekkor $U_x \subseteq M$ nyílt halmaz, hiszen az $U_x = (\overset{-1}{u_{x,y} - f})(]-\infty, \varepsilon[)$ azonosság miatt U_x nyílt halmaz folytonos függvény általi ősképe. Az U_x konstrukciója folytán

$$M = \bigcup_{x \in M} U_x,$$

amiből M kompaktsága miatt következik, hogy létezik véges sok $x_1, \dots, x_m$, melyre

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}.$$

Ekkor legyen $u : M \to \mathbb{R}$

$$u = \inf \{u_{x_i} |\ i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Mivel A lineáris függvényháló ezért a 16.36 tétel alapján $u \in A$, valamint minden $t \in M$ esetén

$$f(t) - \varepsilon < u(t) < f(t) + \varepsilon.$$

Tehát $\|f - u\|_{\sup} < \varepsilon$, ezért $\overline{A} = C(M, \mathbb{R})$.

16.8. Stone–Weierstrass-féle sűrűségi tétel

16.38. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus-tér és $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.
1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Megmutatjuk, hogy $\overline{A}$ olyan szétválasztó lineáris függvényháló, mely tartalmazza a konstans függvényeket, ekkor ugyanis a Stone-tétel miatt $\overline{\overline{A}} = C(M, \mathbb{R})$ teljesül. Az nyilvánvaló, hogy $\overline{A}$ lineáris

altér, szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, egyedül az szorul igazolásra, hogy minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$.
Először megmutatjuk, hogy minden $f \in A$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Ehhez legyen $f \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel f kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért az értékkészlete is kompakt halmaz, vagyis létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $\operatorname{Ran} f \subseteq [-c, c]$. A $\sqrt{\ }: \left[0, c^2\right] \to [0, c]$ függvény kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért létezik olyan $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom, melyre

$$\sup_{x \in [0, c^2]} \left|p(x) - \sqrt{x}\right| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\sup_{t \in M} \left||f(t)| - (p \circ f^2)(t)\right| \leq \sup_{y \in [-c, c]} \left||y| - p(y^2)\right| = \sup_{x \in [0, c^2]} \left|\sqrt{x} - p(x)\right| < \varepsilon.$$

Mivel A algebra, ezért $\tilde{f} = p \circ f^2 \in A$ olyan elem, melyre $\left\||f| - \tilde{f}\right\|_{\sup} < \varepsilon$, vagyis $|f| \in \overline{A}$.
Most megmutatjuk, hogy minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Ehhez legyen $f \in \overline{A}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $f_A \in A$, melyre $\|f - f_A\|_{\sup} < \varepsilon$. Ekkor $|f_A| \in \overline{A}$, valamint

$$\||f| - |f_A|\|_{\sup} \leq \|f - f_A\|_{\sup} < \varepsilon$$

miatt $|f| \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

16.39. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f \in A$ elemre $\bar{f} \in A$. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.
1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó, tartalmazza a konstans függvényeket és zárt a konjugálásra nézve. Megmutatjuk, hogy

$$A' = \{\operatorname{Re} \circ u \mid u \in A\}$$

olyan függvényalgebra, mely szétválasztó, tartalmazza a konstans függvényeket és melyre melyre $A' \subseteq A$ teljesül. Mivel A zárt a konjugálásra, ezért ha $a \in A'$ és $u \in A$ olyan, hogy $a = \operatorname{Re} u$, akkor az

$$a = \frac{u + \overline{u}}{2}$$

egyenlet alapján $a \in A$. Vagyis $A' \subseteq A$. Ha $a_1, a_2 \in A'$, akkor létezik olyan $u_1, u_2 \in A$, melyre $a_1 = \operatorname{Re} \circ u_1$ és $a_2 = \operatorname{Re} \circ u_2$ teljesül. Mivel A algebra és zárt a konjugálásra, ezért az

$$a_1 a_2 = \operatorname{Re}(u_1) \cdot \operatorname{Re}(u_2) = \frac{u_1 + \overline{u_1}}{2} \cdot \frac{u_2 + \overline{u_2}}{2}$$

egyenlet alapján az $u = \dfrac{u_1 + \overline{u_1}}{2} \cdot \dfrac{u_2 + \overline{u_2}}{2}$ elemre $u \in A$ és $a_1 a_2 = \operatorname{Re} \circ u$ teljesül, tehát $a_1 a_2 \in A'$. Az $u = \dfrac{u_1 + \overline{u_1}}{2} + \dfrac{u_2 + \overline{u_2}}{2}$ elemre $u \in A$ és $a_1 + a_2 = \operatorname{Re} \circ u$ teljesül, tehát $a_1 + a_2 \in A'$. Hasonlóan igazolható, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda a_1 \in A'$. Tehát A' olyan függvényalgebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket. Ha $x, y \in M$ olyan, hogy $x \neq y$, akkor létezik olyan $u \in A$, melyre $u(x) \neq u(y)$. Ha $\operatorname{Re}(u(x)) \neq \operatorname{Re}(u(y))$, akkor az $a = \operatorname{Re}(u) \in A'$ olyan elem, melyre $a(x) \neq a(y)$; valamint, ha $\operatorname{Im}(u(x)) \neq \operatorname{Im}(u(y))$, akkor az $a = \operatorname{Re}(\mathrm{i} \cdot u) \in A'$ olyan elem, melyre $a(x) \neq a(y)$, tehát A' szétválasztó.
2. Legyen $f \in C(M, \mathbb{C})$ tetszőleges elem és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f_1 = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$ és $f_2 = \dfrac{f - \overline{f}}{2\,\mathrm{i}}$ függvényekre $f = f_1 + \mathrm{i}\, f_2$ és $f_1, f_2 \in C(M, \mathbb{R})$ teljesül. Ezért a 16.38 Stone–Weierstrass-tétel értelmében létezik olyan $g_1, g_2 \in A' \subseteq A$ függvény, melyre $\|f_1 - g_1\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $\|f_2 - g_2\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $g = g_1 + \mathrm{i}\, g_2$. Ekkor $g \in A$, valamint

$$\|f - g\|_{\sup} = \|(f_1 - g_1) + \mathrm{i}(f_2 - g_2)\|_{\sup} \leq \|f_1 - g_1\|_{\sup} + \|f_2 - g_2\|_{\sup} < \varepsilon$$

teljesül.

Magyarázat. Az előbbi tételből következik az alábbi.

16.40. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor a $C(K, \mathbb{R})$ halmazban a polinomok sűrű részhalmazt alkotnak.*

Kiegészítés. Természetes kérdés, hogy az identitásfüggvénynek mely hatványai feszítenek ki sűrű alteret a $C([0,1], \mathbb{R})$ térben. Erre ad választ az alábbi tétel.

16.41. Tétel. *(Müntz–Szász-tétel.) Legyen $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan szigorúan monoton növekedő sorozat, melyre $\lambda_0 = 0$. A $C([0,1], \mathbb{R})$ térben tekintsük a $\Lambda = \operatorname{Span}\left\{\mathrm{id}_{[0,1]}^{\lambda_k} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ alteret. Ekkor az alábbi ekvivalencia teljesül.*

$$\overline{\Lambda} = C([0,1], \mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$$

A $\left\{\mathrm{id}_{[0,1]}^{\lambda_k} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ általánosított polinomokhoz tartozó Bernstein-féle polinomot Gelfond adta meg.

16.42. Definíció. Legyen $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan szigorúan monoton növekedő sorozat, melyre $\lambda_0 = 0$, valamint legyen $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény λ sorozathoz asszociált n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^{\lambda,f} : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f(\eta_{n,k}) g_{n,k}(x)$$

általánosított polinomot, ahol

$$\eta_{n,k} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, & \text{ha} \quad 0 \le k < n; \\ 1, & \text{ha} \quad k = n, \end{cases}$$

valamint

$$g_{n,k}(x) = (-1)^{n-k} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \lambda_i\right) \sum_{i=k}^{n} \left(x^{\lambda_i} \prod_{\substack{j=k \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\right).$$

16.43. Tétel. *(Hirschmann–Widder–Gelfond-tétel.) Legyen $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan szigorúan monoton növekedő sorozat, melyre $\lambda_0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, továbbá legyen $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[0,1]} \left|B_n^{\lambda,f}(x) - f(x)\right|\right) = 0.$$

◊

Kiegészítés. A Stone-tétel és a Stone–Weierstrass-tételek fenti bizonyítása olyan, hogy azok bizonyítják a tételek alábbi általánosabb formáját is.

16.44. Tétel. *(Stone-tétel.) Legyen $(T, \mathfrak{T})$ kompakt Hausdorff-tér és legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{R})$ olyan függvényháló, mely tartalmazza a konstans függvényeket. Az A halmaz pontosan akkor szétválasztó T felett, ha A sűrű a $(C(T, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

16.45. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen $(T, \mathfrak{T})$ kompakt Hausdorff-tér és $A \subseteq C(T, \mathbb{R})$ olyan algebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket. Az A halmaz pontosan akkor szétválasztó T felett, ha A sűrű a $(C(T, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

16.46. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen $(T, \mathfrak{T})$ kompakt Hausdorff-tér és $A \subseteq C(T, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f \in A$ elemre $\bar{f} \in A$. Az A halmaz pontosan akkor szétválasztó T felett, ha A sűrű a $(C(T, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

A legutóbbi tételt könnyen ki lehet terjeszteni lokálisan kompakt terekre is az egypontú (Alexandrov-féle) kompaktifikáció segítségével.

16.47. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen $(T, \mathfrak{T})$ lokálisan kompakt tér és $A \subseteq \overline{C_0}(T, \mathbb{K})$ olyan algebra, mely zárt a komplex konjugálásra nézve, azaz minden $f \in A$ elemre $\bar{f} \in A$. Az A halmaz pontosan akkor sűrű a $(\overline{C_0}(T, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben, ha A szétválasztó T felett, valamint minden $t \in T$ ponthoz létezik olyan $f \in A$, melyre $f(t) \neq 0$.*

$\Diamond$

17. Differenciálszámítás

17.1. Differenciálhatóság

Jelölés. A jelen fejezetben követjük azt a matematika irodalomban elterjedt konvenciót, hogy normált térre pusztán az alaphalmaz kiírásával hivatkozunk és a normát nem említjük amennyiben ez nem okoz félreértést. Továbbá U, V normált terek és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés esetén $\|A\|$ az operátornormát jelenti, vagyis

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\| .$$

Valamint a jelen fejezetben csak $\mathbb{R}$ feletti normált terekkel foglalkozunk.

17.1. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \mathscr{L}(U, V)$, melyre*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ és legyen $u, v \in \mathscr{L}(U, V)$ olyan, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy $A = u - v \neq 0$. Ekkor létezik olyan $0 \neq e \in U$ vektor, hogy $Ae \neq 0$. Legyen $\varepsilon = \dfrac{\|Ae\|}{\|e\|} \in \mathbb{R}^+$. A fenti két határérték különbségeként

$$\lim_{x \to a} \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

adódik, a határérték definíciója alapján pedig létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| < \varepsilon.$$

Az $x = a + \dfrac{\delta}{2\|e\|} \cdot e \in E$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, azonban a fenti egyenlőtlenségből az

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| = \left\| \frac{Ae}{\|e\|} \right\| = \varepsilon < \varepsilon$$

ellentmondás adódik.

17.2. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathscr{L}(U, V)$, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : U \to V$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Dom} f) \times \mathscr{L}(U, V) \;\middle|\; \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right\}$$

  függvényt.

– Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
– Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, V)$ jelöli.

17.3. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az $A \in \mathscr{L}(U, V)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \ \Big(\|x - a\| < \delta \ \to \ \|f(x) - f(a) - A(x - a)\| \le \varepsilon \cdot \|x - a\| \Big)$$

teljesül.

Bizonyítás. A derivált és a határérték definíciójából következik.

17.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$.
Ha f differenciálható az a pontban és létezik a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, akkor legyen A olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Ax = f'(a)x$$

teljesül. Ekkor

$$0 = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a},$$

tehát

$$0 = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} \right|,$$

vagyis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül és legyen $c = ((\mathrm{D}f)(a))(1)$. Ekkor

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x - a)}{|x - a|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|},$$

vagyis

$$0 = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right|$$

ezért

$$0 = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c\right),$$

tehát létezik a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$$

határérték és $c = f'(a)$.

17.5. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. A differenciálhatóság jellemzéséről szóló 17.3 tétel alapján ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ vektorra a $\|x-a\| < \delta$ esetben

$$\|f(x) - f(a) - (\mathrm{D}f)(a)(x-a)\| \le \|x-a\|$$

teljesül, aminek az átrendezéséből

$$\|f(x) - f(a)\| \le \|x-a\| \cdot (1 + \|(\mathrm{D}f)(a)\|)$$

adódik. Ezért $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)-f(a)\| = 0$, vagyis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, amiből következik az f függvény a pontbeli folytonossága.

17.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

17.6. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f, g : U \to V$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f+g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a)\cdot(\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$;*
4. *ha $\varphi(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{\varphi}$ differenciálható az a pontban és*

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right)(a) = \frac{\varphi(a)(\mathrm{D}f)(a) - f(a)(\mathrm{D}\varphi)(a)}{\varphi^2(a)}.$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f, g : U \to V$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$ olyan, hogy f, g és φ differenciálható az a pontban. Legyen továbbá $F = (\mathrm{D}f)(a)$, $G = (\mathrm{D}g)(a)$ és $\Phi = (\mathrm{D}\varphi)(a)$. Mivel $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$, ezért vehetünk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre $B_r(a) \subseteq a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)-G(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)-\Phi(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

1. Az

$$\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)-(F+G)(x-a)}{\|x-a\|} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)-G(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

egyenlőség igazolja, hogy $f+g$ is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = F+G$.
2. Az

$$\lim_{x\to a}\frac{(cf)(x)-(cf)(a)-(cF)(x-a)}{\|x-a\|} = c\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

egyenlőség igazolja, hogy cf is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = cF$.
3. A minden $x \in B_r(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned}
&\|(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)\| = \\
&= \Big\|\Big(\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\Big)f(x) + \varphi(a)\Big(f(x) - f(a) - F(x-a)\Big) + (f(x) - f(a))\Phi(x-a)\Big\| \leq \\
&\leq \|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x) - f(a) - F(x-a)\| + \\
&\quad + \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x-a\|
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \left\| \frac{(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \leq \\
&\leq \lim_{x\to a} \left\| \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \lim_{x\to a} \left\| \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|} \right\| + \\
&\quad + \lim_{x\to a} \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| = \\
&= 0 \cdot \|f(a)\| + |\varphi(a)| \cdot 0 + 0 \cdot \|\Phi\| = 0
\end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x\to a} \frac{(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

következik, vagyis a φf függvény is differenciálható az a pontban és $\mathrm{D}(\varphi f) = f(a)\Phi + \varphi(a)F$.
4. Tegyük fel, hogy $\varphi(a) \neq 0$. Mivel a φ függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is. A folytonosság miatt azonban létezik olyan $\delta \in \,]0, r[$ paraméter, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $\varphi(x) \neq 0$.
Először megmutatjuk, hogy

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) = -\frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi$$

teljesül. A minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a) \right\| = \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left\| \varphi(a) - \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\Phi(x-a) \right\| = \\
&= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left\| \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\Phi(x-a) \right\| = \\
&= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left\| \varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a) + \left(1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right)\Phi(x-a) \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left(\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| + \left|1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x-a\| \right)
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \left\| \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \leq \\
&\leq \lim_{x\to a} \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left(\frac{\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\|}{\|x-a\|} + \left|1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\| \right) = \\
&= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(a)|} \left(0 + \left|1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\| \right) = 0
\end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

következik, vagyis az $\frac{1}{\varphi}$ függvény is differenciálható az a pontban és $\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) = -\frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi$ teljesül.
A 3. pont alapján ekkor

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right)(a) = \left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\cdot f\right)\right)(a) = f(a)\cdot\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) + \frac{1}{\varphi}(a)\cdot(\mathrm{D}f)(a) =$$
$$= -\frac{f(a)}{\varphi^2(a)}\Phi + \frac{1}{\varphi(a)}F = \frac{\varphi(a)F - f(a)\Phi}{\varphi^2(a)}$$

teljesül.

17.7. Tétel. *Legyen U és V normált tér és legyen $A \subseteq U$ nyílt halmaz. Ekkor $C^1(A,V)$ vektortér.*

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

17.8. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen U, V és W normált tér, $g : U \to V$, $f : V \to W$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f\circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a).$$

Bizonyítás. Legyen U, V és W normált tér, $g : U \to V$, $f : V \to W$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$ olyan, hogy g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$, tehát

$$\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \forall y \in V :$$
$$\|y - g(a)\| < \delta_1 \;\to\; \|f(y) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(y - g(a))\| \le \varepsilon_1 \cdot \|y - g(a)\|.$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontan, ezért $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$, tehát

$$\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U :$$
$$\|x - a\| < \delta_2 \;\to\; \|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \le \varepsilon_2 \cdot \|x - a\|.$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \qquad \|x - a\| < \delta_3 \;\to\; \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ esetén

$$\|x - a\| < \delta_3 \;\to\; \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a))\| \le \varepsilon_1 \cdot \|g(x) - g(a)\|.$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ esetén

$$\|x - a\| < \delta_2 \;\to\; \|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \le \varepsilon_1 \cdot \|x - a\|.$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in U$ vektorra, ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a))\| \le \varepsilon_1 \cdot \|g(x) - g(a)\|$$
$$\|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \le \varepsilon_1 \cdot \|x - a\|$$

teljesül, valamint az utolsó egyenlőtlenség alapján ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\|g(x) - g(a)\| \le \varepsilon_1 \cdot \|x - a\| + \|(\mathrm{D}g)(a)\| \cdot \|x - a\|.$$

Ezek alapján, ha $\|x-a\| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f(g(x)) - f(g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| = \\
&= \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a)) + \\
&\qquad + (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| \leq \\
&\leq \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\| + \\
&\qquad + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \cdot \|(g(x)-g(a)) - (\mathrm{D}g)(a)(x-a)\| \leq \\
&\leq \varepsilon_1 \|g(x)-g(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \varepsilon_1 \|x-a\| \leq \\
&\leq \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \|x-a\| + \|(\mathrm{D}g)(a)\| \|x-a\|) + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \varepsilon_1 \|x-a\| = \\
&= \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \|(\mathrm{D}g)(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|) \|x-a\|
\end{aligned}$$

Vagyis bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \|(\mathrm{D}g)(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|) < \varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x-a\| < \delta'$ esetén

$$\|f(g(x)) - f(g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(g(x)-g(a))\| \leq \varepsilon \cdot \|x-a\|,$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $(\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a)$.

17.3. Iránymenti derivált

17.9. Definíció. Legyen U vektortér és V normált tér. Legyen továbbá $f : U \to V$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in U$. Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az *f függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

17.10. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban, valamint legyen $A = (\mathrm{D}f)(a)$ és $e \in U$ tetszőleges vektor. Az $e = 0$ esetben nyilván teljesül az állítás, így feltehető, hogy $e \neq 0$. A

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t} = Ae$$

egyenlőtlenség igazolásához válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paramétert. A függvény a pontbeli differenciálhatósága alapján az $\dfrac{\varepsilon}{\|e\|}$ számhoz létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ melyre

$$\forall x \in B_{\delta'}(a) : \ \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|e\|} \cdot \|x-a\|$$

teljesül. Ha $\delta = \dfrac{\delta'}{\|e\|}$ és $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$, akkor $a + te \in B_{\delta'}(a)$, vagyis

$$\|f(a+te) - f(a) - A(te)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|e\|} \cdot |t| \, \|e\| = \varepsilon |t|.$$

Amiből $\lim\limits_{t \to 0} \left\| \dfrac{f(a+te) - f(a) - tA(e)}{t} \right\| = 0$ következik.

17.11. Tétel. *Legyen U, V és W normált tér, $a \in U$, $\alpha : U \to \mathscr{L}(V, W)$ és $\beta : U \to V$ az a pontban differenciálható függvény. Ekkor az*

$$\alpha\beta : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(\beta(u))$$

függvény deriváltja az a pontban a

$$\tau : U \to V \qquad u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))\beta(a) + \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(u))$$

leképezés.

Bizonyítás. Legyen U, V és W normált tér, $a \in U$, $\alpha : U \to \mathscr{L}(V, W)$ és $\beta : U \to V$ az a pontban differenciálható függvény. Tekintsük az

$$\begin{aligned} \alpha\beta : U \to W \qquad & u \mapsto (\alpha(u))(\beta(u)) \\ \tau : U \to V \qquad & u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))\beta(a) + \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(u)) \end{aligned}$$

függvényeket. Megmutatjuk, hogy $(\mathrm{D}(\alpha\beta))(a) = \tau$ teljesül. Ehhez tekintsük az alábbi határértéket.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \frac{(\alpha\beta(x)) - (\alpha\beta(a)) - \tau(x-a)}{\|x-a\|} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(a+h)\beta(a+h) - \alpha(a)\beta(a) - \tau(h)}{\|h\|} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(a)\beta(a+h) - \alpha(a)\beta(a) - \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(h))}{\|h\|} + \\ &\qquad + \frac{\alpha(a+h)\beta(a) - \alpha(a)\beta(a) - ((\mathrm{D}\alpha)(a)(h))\beta(a)}{\|h\|} + \\ &\qquad + \frac{(\alpha(a+h) - \alpha(a))(\beta(a+h) - \beta(a))}{\|h\|} \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy az utolsó összeg mindhárom tagjának nulla a határértéke.
Az első összeadandóban, mivel $\alpha(a)$ folytonos lineáris leképezés, ezért a derivált definíciója alapján

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(a)\beta(a+h) - \alpha(a)\beta(a) - \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(h))}{\|h\|} = \\ &= \alpha(a) \left(\lim_{h \to 0} \frac{\beta(a+h) - \beta(a) - ((\mathrm{D}\beta)(a)(h))}{\|h\|} \right) = \alpha(a)(0) = 0 \end{aligned}$$

teljesül.
A második tag esetében szintén nulla a határérték.

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(a+h)\beta(a) - \alpha(a)\beta(a) - ((\mathrm{D}\alpha)(a)(h))\beta(a)}{\|h\|} = \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\alpha(a+h) - \alpha(a) - ((\mathrm{D}\alpha)(a)(h))}{\|h\|} \right) \beta(a) = 0(\beta(a)) = 0 \end{aligned}$$

A harmadik összeadandónál a differenciálhatóság jellemzéséről szóló 17.3 tétel alapján létezik olyan $\delta_\alpha, \delta_\beta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $h \in U$ vektorra

$$\begin{aligned} \|h\| < \delta_\alpha \quad &\to \quad \|\alpha(a+h) - \alpha(a) - (\mathrm{D}\alpha)(a)(h)\| \le \|h\| \\ \|h\| < \delta_\beta \quad &\to \quad \|\beta(a+h) - \alpha(a) - (\mathrm{D}\beta)(a)(h)\| \le \|h\| \end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $\delta = \min\{\delta_\alpha, \delta_\beta\}$, akkor minden $h \in U$ vektorra $\|h\| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} \|\alpha(a+h) - \alpha(a)\| &\le \|h\| \cdot (1 + \|(\mathrm{D}\alpha)(a)\|) \\ \|\beta(a+h) - \beta(a)\| &\le \|h\| \cdot (1 + \|(\mathrm{D}\beta)(a)\|), \end{aligned}$$

vagyis ha $h \in B_\delta \setminus \{0\}$, akkor

$$\left\| \frac{(\alpha(a+h)-\alpha(a))(\beta(a+h)-\beta(a))}{\|h\|} \right\| \leq \|h\| \cdot (1+\|(\mathrm{D}\alpha)(a)\|)\,(1+\|(\mathrm{D}\beta)(a)\|)\,,$$

amiből már következik a

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\alpha(a+h)-\alpha(a))(\beta(a+h)-\beta(a))}{\|h\|} = 0$$

határérték.

17.12. Tétel. *Legyen U, V és W normált tér, $v \in V$, $a \in U$ és $\alpha : U \to \mathscr{L}(V,W)$ az a pontban differenciálható függvény. Ekkor az*

$$\alpha v : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(v)$$

függvény deriváltja az a pontban a

$$\tau : U \to V \qquad u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))v$$

leképezés.

Bizonyítás. Legyen U, V és W normált tér, $v \in V$, $a \in U$ és $\alpha : U \to \mathscr{L}(V,W)$ az a pontban differenciálható függvény. Ha bevezetjük az

$$\beta : U \to V \qquad u \mapsto v$$

függvényt, akkor $\alpha\beta = \alpha v$, ahol

$$\alpha v : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(v).$$

Tekintettel arra, hogy a konstans függvény deriváltja az azonosan nulla függvény; az előző 17.11 tétel a fenti α és β szereposztással egyből bizonyítja a tételt.

17.13. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \to W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban. Ekkor $\mathrm{Ran}((\mathrm{D}f)(a)) \subseteq W$, vagyis a $(\mathrm{D}f)(a)$ derivált $U \to W$ lineáris leképezésnek is tekinthető.*

Bizonyítás. Legyen U, V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \to W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban és vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést. Ha $v \in U$, akkor az

$$Av = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

egyenlőség és a minden $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számra $a + tv \in \mathrm{Dom}\, f$ esetén teljesülő $\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} \in W$ tartalmazás miatt $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} \in \overline{W} = W$.

17.4. Néhány speciális függvény deriváltja

17.14. Tétel. *Legyen U normált tér, $c \in U$ és*

$$L_c : U \to U \qquad x \mapsto x - c.$$

Ekkor L_c minden pontban differenciálható és

$$\mathrm{D}L_c : U \to \mathscr{L}(U,U) \qquad a \mapsto \mathrm{id}_U$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U normált tér és $c \in U$. Legyen $a \in U$ tetszőleges pont. Mivel minden $x \in U$ esetén

$$L_c x - L_c a = x - a$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{L_c x - L_c a - \mathrm{id}_U(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

amiből $(\mathrm{D}L_c)(a) = \mathrm{id}_u$ következik.

17.15. Tétel. *Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(U,V)$. Ekkor A minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(U,V)$. Legyen $a \in U$ tetszőleges pont. Mivel az A linearitása miatt minden $x \in U$ esetén

$$Ax - Aa - A(x-a) = 0$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{Ax - Aa - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

amiből $(\mathrm{D}A)(a) = A$ következik.

17.16. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. A*

$$\rho : U \to V \qquad x \mapsto A(x, \dots, x),$$

függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\rho : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a, \dots, a))$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Legyen

$$B : U \to V \qquad x \mapsto nA(x, a, \dots, a).$$

Megmutatjuk, hogy $(\mathrm{D}\rho)(a) = B$.
Az n szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $x, y \in U$ esetén

$$\rho(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A\left(x^{[k]}, y^{[n-k]}\right),$$

vagyis

$$\rho(x) - \rho(a) = \rho(a + (x-a)) - \rho(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right) - \rho(a) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right)$$

teljesül. Ebből az $\|x-a\| < 1$ esetben

$$\|\rho(x) - \rho(a) - B(x-a)\| = \left\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right) \right\| \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|A\| \, \|x-a\|^k \, \|a\|^{n-k} \le$$
$$\le \|x-a\|^2 \, \|A\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|x-a\|^{k-2} \, \|a\|^{n-k} \le \|x-a\|^2 \, \|A\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|a\|^{n-k} =$$

$$= \|x-a\|^2 \|A\| (1+\|a\|)^n$$

adódik. Vagyis ha $0 < \|x-a\| < 1$, akkor

$$\left\| \frac{\rho(x)-\rho(a)-B(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \leq \|x-a\| \|A\| (1+\|a\|)^n ,$$

amiből

$$\lim_{x\to a} \frac{\rho(x)-\rho(a)-B(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

következik.

17.17. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $c \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. A*

$$\eta : U \to V \qquad x \mapsto A(x-c, \dots, x-c),$$

függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\eta : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a-c, \dots, a-c))$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U, V normált tér, $c \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Bevezetve a

$$\begin{aligned} \rho :& U \to V \qquad x \mapsto A(x, \dots, x), \\ L_c :& U \to U \qquad x \mapsto x-c \end{aligned}$$

függvényeket $\eta = \rho \circ L_c$ adódik. A közvetett függvény deriválási szabálya és a 17.14, 17.16 tétel alapján minden $a, x \in U$ esetén

$$((\mathrm{D}\rho)(a))(x) = (\mathrm{D}\rho)(L_c(a)) \circ ((\mathrm{D}L_c)(a))(x) = (\mathrm{D}\rho)(a-c) \circ (\mathrm{id}_U)(x) = nA(x, a-c, \dots, a-c)$$

teljesül.

17.18. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor*

$$Df : A \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k} \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor A olyan Banach-tér, melyen a norma szubmultiplikatív. Legyen $a \in A$ tetszőleges pont és $\tau \in \mathscr{L}(A,A)$, $\tau(b) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k}$. A minden $h \in A \setminus \{0\}$, $\|h\| \leq 1$ esetén érvényes

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(a+h)-f(a)-\tau(h)}{\|h\|} \right\| &= \frac{1}{\|h\|} \left\| (a+h)^n - a^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k h a^{n-1-k} \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\|h\|} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|h\|^k \cdot \|a\|^{n-k} \leq \|h\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|h\|^{k-2} \cdot \|a\|^{n-k} \leq \\ &\leq \|h\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot \|a\|^{n-k} \leq \|h\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \|a\|^{n-k} = \|h\| \cdot (1+\|a\|)^n \end{aligned}$$

becslésből következik, hogy $(\mathrm{D}f)(a) = \tau$.

17.19. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$ és*

$$G(A) = \left\{a \in \mathscr{L}(V,V) \mid \exists a^{-1},\ a^{-1} \in \mathscr{L}(V,V)\right\}.$$

Az inverzképzés $i : G(A) \to G(A)$, $i(a) = a^{-1}$ függvényére ekkor

$$\mathrm{D}i : G(A) \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto -a^{-1}ba^{-1}\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$ és

$$G(A) = \left\{a \in \mathscr{L}(V,V) \mid \exists a^{-1},\ a^{-1} \in \mathscr{L}(V,V)\right\}.$$

Legyen $a \in G(A)$ tetszőleges pont, $\tau \in \mathscr{L}(A,A)$, $\tau(b) = -a^{-1}ba^{-1}$ és jelölje 1 az A egységelemét, vagyis az id_V leképezést. Ha $0 \neq h \in A$ és $\|h\| \leq \dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$, akkor a $-a^{-1}h$ elemre alkalmazható a Carl Neumann-féle sorfejtés, vagyis ebben az esetben érvényes a

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{i(a+h)-i(a)-\tau(h)}{\|h\|}\right\| = \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|(a+h)^{-1}-a^{-1}+a^{1}ha^{-1}\right\| = \\
&= \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|((1+a^{-1}h)^{-1}-1+a^{-1}h)a^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|\sum_{k=2}^{\infty}(-a^{-1}h)^k\right\|\cdot\left\|a^{-1}\right\| \leq \\
&\leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left\|a^{-1}h\right\|^k \leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(\|a^{-1}\|\cdot\|h\|\right)^k = \\
&= \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|}\cdot\frac{\|a^{-1}\|^2\cdot\|h\|^2}{1-\|a^{-1}\|\cdot\|h\|} \leq \|h\|\cdot 2\left\|a^{-1}\right\|^3
\end{aligned}$$

becslés, amiből következik az állítás.

Kiegészítés. A utolsó két tételt kicsit általánosabb formában is kimondhatjuk.

17.20. Tétel. *Legyen A Banach-algebra, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor*

$$Df : A \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k}\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. A 17.18 tétel bizonyításában csak azt használtuk fel, hogy A Banach-algebra, így az ott adott bizonyítás változatlan formában érvényes erre az esetre is.

17.21. Tétel. *Legyen A egységelemes Banach-algebra és legyen $i : G(A) \to G(A)$, $i(a) = a^{-1}$. Ekkor*

$$Di : G(A) \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto -a^{-1}ba^{-1}\right).$$

Bizonyítás. A 17.19 tétel bizonyításában csak azt használtuk fel, hogy A egységelemes Banach-algebra, így az ott adott bizonyítás változatlan formában érvényes erre az esetre is.

◊

17.5. Vektor-vektor függvény deriváltja

Megjegyzés. A következő állítás előtt emlékeztetünk arra, hogy tetszőleges $(A_k)_{k\in I}$ halmazrendszer és $i \in I$ index esetén pr_i jelöli az i-edik projekció függvényt, azaz

$$\mathrm{pr}_i : \prod_{k\in I} A_k \to A_i \qquad (x_k)_{k\in I} \mapsto x_i.$$

Továbbá $a \in \prod_{i \in I} A_i$, $k, i \in I$ és $x \in A_k$ esetén

$$(\mathrm{in}_{a,k}(x))_i = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad i = k; \\ a_k, & \text{ha} \quad i \neq k, \end{cases}$$

ahol $\mathrm{in}_{a,k} : A_k \to \prod_{k \in I} A_k$ a k koordinátához és a ponthoz tartozó inklúzió függvény.

$\Diamond$

17.22. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, U normált tér, $f : U \to \prod_{i=1}^{n} V_i$ és $a \in U$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ index esetén az $\mathrm{pr}_i \circ f : U \to V_i$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, U normált tér, $f : U \to \prod_{i=1}^{n} V_i$ és $a \in U$. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén vezessük az $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ függvényt.
Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az a pontban és legyen $i \in \{1, \dots, n\}$. Mivel a pr_i projekció függvény folytonos lineáris leképezés, a 17.15 tétel alapján deriválható és a deriváltja minden pontban önmaga. Felhasználva még az összetett függvény deriválási szabályáról szóló 17.8 tételt

$$(\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))(a) = (\mathrm{D}\,\mathrm{pr}_i)(f(a)) \circ (\mathrm{D}f)(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

adódik.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ index esetén az $f_i : U \to V_i$ függvény differenciálható az a pontban, és legyen $B_i = (\mathrm{D}f_i)(a)$. Tekintsük a

$$B : U \to \prod_{i=1}^{n} V_i \qquad x \mapsto (B_1 x, \dots, B_n x)$$

leképezést. Ekkor B folytonos lineáris leképezés, hiszen

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(B_1 x, \dots, B_n x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \max\{\|B_k x\| \,|k \in \{1, \dots, n\}\} \leq \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \max\{\|B_k\| \cdot \|x\| \,|k \in \{1, \dots, n\}\} = \\ &= \max\{\|B_k\| \,|k \in \{1, \dots, n\}\} < \infty \end{aligned}$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy $(Df)(a) = B$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan melyre $B_r(a) \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ teljesül. Mivel minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén f_i differenciálható az a pontban, ezért

$$\exists \delta_i \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \ \Big(\|x - a\| < \delta_i \ \to \ \|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x - a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\| \Big)$$

teljesül. Legyen $\delta = \min\{\delta_i |\ i \in \{1, \dots, n\}\}$. Ha $x \in B_\delta(a)$, akkor

$$\begin{aligned} &\|f(x) - f(a) - B(x - a)\| = \\ &\quad = \|(f_1(x) - f_1(a) - B_1(x - a), \dots, (f_n(x) - f_n(a) - B_n(x - a))\| = \\ &\quad = \max\{\|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x - a)\| \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \leq \varepsilon \cdot \|x - a\| \end{aligned}$$

teljesül, vagyis az f függvény differenciálható az a pontban, és $(\mathrm{D}f)(a) = B$ teljesül.

17.23. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és $k \in \{1, \dots, n\}$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény parciálisan deriválható a k-adik változója szerint az a pontban*, ha az $f \circ \mathrm{in}_{a,k} : U_k \to V$ függvény differenciálható az a_k pontban és ekkor a
$$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k)$$
jelölést használjuk.
- Az f függvény *k-adik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a
$$\partial_k f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \mathscr{L}(U_k, V) \;\middle|\; \begin{array}{c} f \circ \mathrm{in}_{a,k} \text{ differenciálható az } a_k \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) \end{array} \right\}$$
függvényt.
- Az *f függvény parciálisan differenciálható a k-adik változója szerint*, ha $\operatorname{Dom} \partial_k f = \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény parciálisan folytonosan differenciálható a k-adik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható a k-adik változója szerint és $\partial_k f$ folytonos.

17.24. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $u \in \prod_{i=1}^{n} U_i$, $k \in \{1, \dots, n\}$ és $a \in U_k$. Ekkor*
$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,k})(a) = \mathrm{in}_{0,k}$$
teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $u \in \prod_{i=1}^{n} U_i$, $k \in \{1, \dots, n\}$ és $a, x \in U_k$. Ekkor az
$$\mathrm{in}_{u,k}(x) - \mathrm{in}_{u,k}(a) = \mathrm{in}_{0,k}(x - a)$$
egyenlőség miatt
$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{in}_{u,k}(x) - \mathrm{in}_{u,k}(a) - \mathrm{in}_{0,k}(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

17.25. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban. Ekkor minden $x \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ vektorra*
$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(a)(x_i)$$
teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban. Legyen $k \in \{1, \dots, n\}$. Mivel f és az $\mathrm{in}_{a,k}$ függvény differenciálható, ezért a közvetett függvény deriválási szabálya alapján
$$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) = ((\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,k}(a_k))) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,k})(a_k) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,k}\,.$$
Legyen $x \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ tetszőleges vektor. Mivel
$$x = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{in}_{0,i}(x_i)$$

és $(\mathrm{D}f)(a)$ lineáris leképezés, ezért

$$(\mathrm{D}f)(a)(x) = ((\mathrm{D}f)(a)) \sum_{i=1}^{n} \mathrm{in}_{0,i}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} ((\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,i})(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(a)(x_i)$$

teljesül.

17.26. Tétel. *Legyen $m, n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,m}$ és $(V_j)_{j=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $f : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ pontban. Minden $i \in \{1, \dots, m\}$ és $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen*

$$A_{ji} = (\partial_i f_j)(a),$$

ahol $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, valamint értelmezzük az

$$A : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j \qquad (x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} A_{1i} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} A_{ni} x_i \right)$$

leképezést. Ekkor $(\mathrm{D}f)(a) = A$ teljesül, vagyis minden $x = (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ vektorra és $j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$((\mathrm{D}f)(a)x)_j = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a) x_i.$$

Bizonyítás. Legyen $m, n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,m}$ és $(V_j)_{j=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $f : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ pontban. Minden $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, és legyen $x \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ tetszőleges vektor.

A 17.22 tétel alapján minden $j \in \{1, \dots, n\}$ indexre az f_j függvény differenciálható az a pontban és

$$(\mathrm{D}f_j)(a)(x) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)(x) = ((\mathrm{D}f)(a)(x))_j \tag{17.1}$$

teljesül.

Minden $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén az f_j függvényre alkalmazva a 17.25 tételt

$$((\mathrm{D}f_j)(a))(x) = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a)(x_i)$$

adódik.

Tehát minden $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$((\mathrm{D}f)(a)(x))_j = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a)(x_i)$$

teljesül, amiből az $A_{ji} = (\partial_i f_j)(a)$ jelölés bevezetésével

$$((\mathrm{D}f)(a)(x))_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ji} x_i$$

következik, amiből már következik az állítás.

17.6. Folytonosan differenciálható függvények

17.27. Tétel. *Legyen U normált tér, $a, b \in U$ és legyen $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely folytonos az $[a, b]$ szakaszon és differenciálható az $]a, b[$ halmazon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(c)(b - a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U normált tér, $a, b \in U$ és legyen $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely folytonos az $[a, b]$ szakaszon és differenciálható az $]a, b[$ halmazon. Tekintsük a

$$\gamma : [0, 1] \to U \qquad t \mapsto a + t(b - a)$$

függvényt és legyen $\varphi = f \circ \gamma$. Ekkor a φ függvény folytonos a $[0, 1]$ szakaszon, és differenciálható a $]0, 1[$ halmazon. Ezért a Lagrange-tétel értelmében létezik olyan $t_0 \in]0, 1[$ pont, melyre

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) \cdot (1 - 0)$$

teljesül. Legyen $c = \gamma(t_0)$. Ekkor a közvetett függvény deriválási szabálya alapján a fenti egyenletet az

$$f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(\gamma(t_0)) \circ (\mathrm{D}\gamma)(t_0) = (\mathrm{D}f)(c)(b - a)$$

alakban is felírhatjuk, ami bizonyítja az állítást.

17.28. Tétel. *Legyen V normált tér és legyen $f : [0, 1] \to V$ és $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható a $]0, 1[$ halmazon, továbbá minden $t \in]0, 1[$ elemre $\|(\mathrm{D}f)(t)\| \le g'(t)$ teljesül. Ekkor*

$$\|f(1) - f(0)\| \le g(1) - g(0).$$

Bizonyítás. Legyen V normált tér és legyen $f : [0, 1] \to V$ és $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható a $]0, 1[$ halmazon, továbbá minden $t \in]0, 1[$ elemre $\|(\mathrm{D}f)(t)\| \le g'(t)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\|f(1) - f(0)\| \le g(1) - g(0) + \alpha + \beta$$

teljesül, amiből következik az állítás.
Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és ehhez definiáljuk a

$$h : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto g(t) - g(0) - \|f(t) - f(0)\| + \alpha t + \beta$$

függvényt. Mivel h folytonos és $h(0) = \beta \neq 0$, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [0, \delta[$ esetén $h(x) > 0$. Ez azt jelenti, hogy a

$$H = \{t \in [0, 1] \mid 0 \le h(t)\}$$

halmaz nem üres, hiszen például $\frac{\delta}{2} \in H$, továbbá zárt, mert $H = \overset{-1}{h}([0, \infty[)$, vagyis zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe. A H halmaz korlátos, ezért tekinthetjük a $c = \sup H$ számot, melyre H zártsága miatt $c \in H$ teljesül, továbbá $\frac{\delta}{2} \in H$ miatt $0 < c$.
Ha $c = 1$, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor

$$0 \le h(1) = g(1) - g(0) - \|f(1) - f(0)\| + \alpha + \beta$$

teljesül, amit bizonyítani akartunk.
Tegyük fel, hogy $c < 1$. Ekkor az f és g függvény differenciálható a c pontban, vagyis minden $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\begin{aligned}
&\exists \delta_f \in \mathbb{R}^+ \forall x \in [0, 1] : \quad c < x < c + \delta_f \quad \to \quad \|f(x) - f(c) - ((\mathrm{D}f)(c))(x - c)\| < \varepsilon_1 \cdot (x - c) \\
&\exists \delta_g \in \mathbb{R}^+ \forall x \in [0, 1] : \quad c < x < c + \delta_g \quad \to \quad \|g(x) - g(c) - g'(c)(x - c)\| < \varepsilon_1 \cdot (x - c)
\end{aligned}$$

vagyis ha $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, 1-c\}$, akkor minden $x \in]c, c+\delta[$ számra

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(c) - ((\mathrm{D}f)(c))(x-c)\| &< \varepsilon_1(x-c)\\ \|g(x) - g(c) - g'(c)(x-c)\| &< \varepsilon_1(x-c)\end{aligned}$$

teljesül. Vagyis ha $x \in]c, c+\delta[$, akkor

$$\begin{aligned}&\|f(x) - f(c)\| \le \varepsilon_1(x-c) + \|((\mathrm{D}f)(c))(x-c)\| \le \varepsilon_1(x-c) + \|(\mathrm{D}f)(c)\|\,(x-c) \le\\ &\quad \le \varepsilon_1(x-c) + g'(c)(x-c) \le \varepsilon_1(x-c) + \varepsilon_1(x-c) + g(x) - g(c) =\\ &\quad = g(x) - g(c) + 2\varepsilon_1(x-c),\end{aligned}$$

és ezért

$$\begin{aligned}&\|f(x) - f(0)\| \le \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(0)\| \le\\ &\quad \le g(x) - g(c) + 2\varepsilon_1(x-c) + g(c) - g(0) + \alpha c + \beta =\\ &\quad = g(x) - g(0) - c(2\varepsilon_1 - \alpha) + 2\varepsilon_1 x + \beta.\end{aligned}$$

Tehát legyen $\varepsilon_1 = \dfrac{\alpha}{2}$, mert ekkor minden $x \in]c, c+\delta[$ esetén

$$\|f(x) - f(0)\| \le g(x) - g(0) + \alpha x + \beta$$

teljesül, vagyis $0 \le h(x)$, ezért $x \in H$. Ebből az az ellentmondás adódik, hogy a H halmaz tartalmaz a szuprémumánál nagyobb elemket is.

17.29. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$. Továbbá legyen $a, b \in U$, $a \ne b$, olyan pont, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$, f folytonos az $[a, b]$ halmazon és f differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \le \left(\sup_{x \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\right) \cdot \|b - a\|.$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$. Továbbá legyen $a, b \in U$, $a \ne b$, olyan pont, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$, f folytonos az $[a, b]$ halmazon és f differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $\sup\limits_{x \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\| < \infty$, egyébként nyilvánvaló módon igaz az állítás. Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ és tekintsük a

$$\begin{aligned}\gamma &: [0,1] \to U \qquad t \mapsto (1-t)a + tb\\ g &: [0,1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto tC\,\|b - a\|\end{aligned}$$

függvényeket és legyen $\tilde{f} = f \circ \gamma$. Ekkor az $\tilde{f}$ és g függvény folytonos a $[0, 1]$ halmazon és differenciálható a $]0, 1[$ intervallumon. Továbbá, ha $t \in]0, 1[$, akkor

$$\left\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\right\| = \|(\mathrm{D}f)(\gamma(t)) \circ (\mathrm{D}\gamma)(t)\| \le \left(\sup_{x \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\right) \cdot \|b - a\|$$

teljesül. Vagyis a $C = \sup\limits_{x \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\|$ választással az adódik, hogy minden $t \in]0, 1[$ pontra $\left\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\right\| \le g'(t)$, ezért az előző, 17.28, tételből, valamint a $\tilde{f}(0) = a$ és a $\tilde{f}(1) = b$ formulából adódik a bizonyítandó állítás.

17.30. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $A \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz és $f : A \to V$ differenciálható függvény. Ha minden $a \in A$ esetén $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ teljesül, akkor az f függvény állandó.*

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $A \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz és $f : A \to V$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy minden $a \in A$ esetén $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ teljesül, és legyen $x, y \in A$ tetszőleges pont. A 14.40 tétel alapján létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \ldots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$

és minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$. Legyen $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tetszőleges. Ekkor a véges növekmények formulája alapján

$$\|f(z_k) - f(z_{k+1})\| \leq \left(\sup_{x \in]z_k, z_{k+1}[} \|(\mathrm{D}f)(x)\| \right) \cdot \|z_{k+1} - z_k\| = 0.$$

Vagyis minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $f(z_k) = f(z_{k+1})$ teljesül, amiből $f(x) = f(y)$ következik.

17.31. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény. Tegyük fel, hogy $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Int} \operatorname{Dom}(\partial_i f)$ olyan pont, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban. Legyen*

$$A : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i).$$

Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x, y \in B_\delta(a)$ esetén

$$\|f(x) - f(y) - A(x-y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

teljesül, f differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) = A$.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény. Tegyük fel, hogy $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Int} \operatorname{Dom}(\partial_i f)$ olyan pont, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban. Legyen $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Int} \operatorname{Dom}(\partial_i f)$ teljesül. Továbbá definiáljuk a

$$A : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i)$$

leképezést, mely nyilván folytonos és lineáris.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített szám. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x, y \in B_\delta(a)$ esetén

$$\|f(x) - f(y) - A(x-y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

teljesül, melyből az $y = a$ választással következik, hogy f differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) = A$. Mivel minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta \in]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ és $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesül.

Legyen $x, y \in B_\delta(a)$ tetszőleges pont. Definiáljuk a $z_0, z_1, \dots, z_n \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ vektorokat a komponensenként: a z_i ($i \in \{0, \dots, n\}$) vektor j-edik ($j \in \{1, \dots, n\}$) komponense legyen

$$(z_i)_j = \begin{cases} y_j, & \text{ha} \quad j \leq i; \\ x_j, & \text{ha} \quad j > i. \end{cases}$$

(Vagyis például $n = 3$ esetén $z_0 = (x_1, x_2, x_3)$, $z_1 = (y_1, x_2, x_3)$, $z_2 = (y_1, y_2, x_3)$, $z_3 = (y_1, y_2, y_3)$.)
Ekkor nyilván $z_0 = x$ és $z_n = y$ teljesül, továbbá

$$f(x) - f(y) - A(x-y) = f(z_0) - f(z_n) - A(z_0 - z_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - A(z_{i-1} - z_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - y_i)$$

adódik. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen

$$\gamma_i : [x_i, y_i] \to V \qquad t \mapsto (f \circ \mathrm{in}_{z_i,i})(t) - (A \circ \mathrm{in}_{z_i,i})(t).$$

(Vagyis például $n = 3$ esetén

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= f(t, x_2, x_3) - A(t, x_2, x_3)\\
\gamma_2(t) &= f(y_1, t, x_3) - A(y_1, t, x_3)\\
\gamma_3(t) &= f(y_1, y_2, t) - A(y_1, y_2, t)
\end{aligned}$$

teljesül.) Ekkor

$$f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - y_i) = \gamma_i(x_i) - \gamma_i(y_i).$$

A parciális deriválás definíciójából, a közvetett függvény deriválási szabályából, a folytonos lineáris leképezés (17.15 tétel) és az inklúzió deriválási szabályából (17.24 tétel) adódik, hogy minden $w \in [x_i, y_i]$ esetén

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}\gamma_i)(w) &= (\partial_i f)\,\mathrm{in}_{z_i,i}(w) - (\mathrm{D}A)(\mathrm{in}_{z_i,i}(w)) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{z_i,i})(w) =\\
&= (\partial_i f)\,\mathrm{in}_{z_i,i}(w) - A \circ \mathrm{in}_{0,i} =\\
&= (\partial_i f)\,\mathrm{in}_{z_i,i}(w) - (\partial_i f)(a).
\end{aligned}$$

A γ_i függvényre és az $[x_i, y_i]$ szakaszra alkalmazható a véges növekmények formulája

$$\|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(y_i)\| \le \left(\sup_{w \in]x_i, y_i[} \|(\mathrm{D}\gamma_i)(w)\| \right) \cdot \|x_i - y_i\|.$$

Mivel minden $w \in [x_i, y_i]$ esetén $\mathrm{in}_{z_i,i}(w) \in B_\delta(a)$, ezért

$$\sup_{w \in]x_i, y_i[} \|(\mathrm{D}\gamma_i)(w)\| = \left(\sup_{w \in]x_i, y_i[} \|(\partial_i f)\,\mathrm{in}_{z_i,i}(w) - (\partial_i f)(a)\| \right) \le \sup_{w \in B_\delta(a)} \|(\partial_i f)(w) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n},$$

ezért

$$\|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(y_i)\| \le \frac{\varepsilon}{n} \|x_i - y_i\|.$$

összerakva ezeket az eredményeket

$$\|f(x) - f(y) - A(x - y)\| \le \sum_{i=1}^{n} \|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(y_i)\| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} \|x_i - y_i\| \le \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x - y\| = \varepsilon \|x - y\|$$

adódik. Ezzel igazoltuk, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in B_\delta(a): \quad \|f(x) - f(y) - A(x - y)\| \le \varepsilon \|x - y\|$$

teljesül.

17.32. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, legyen $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény, és legyen $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, legyen $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény, és legyen $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz.
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1,\dots,n\}$ indexre $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Az előző, 17.31 tételt alkalmazva az Ω halmaz minden pontjára azt kapjuk, hogy f differenciálható az Ω halmazon. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{D}f$ folytonos is az Ω halmazon.
Ehhez legyen $a \in \Omega$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A 17.31 tétel alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \Omega$ és minden $x, y \in B_r(a)$ esetén

$$\|f(x) - f(y) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-y)\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\|$$

teljesül. Most rögzítsük az x vektort. Mivel f differenciálható az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in]0, r - \|x-a\|[$, hogy minden $z \in B_\delta(x)$ esetén

$$\|f(x) - f(z) - ((\mathrm{D}f)(x))(x-z)\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|x-z\|.$$

Mivel $B_\delta(x) \subseteq B_r(a)$ ezért minden $z \in B_\delta(x)$ vektorra

$$\begin{aligned}
&\|((\mathrm{D}f)(a))(x-z) - ((\mathrm{D}f)(x))(x-z)\| = \\
&\quad = \|(f(z) - f(x) - ((\mathrm{D}f)(a))(z-x)) + (f(x) - f(z) - ((\mathrm{D}f)(x))(x-z))\| \le \\
&\quad \le \|f(z) - f(x) - ((\mathrm{D}f)(a))(z-x)\| + \|f(x) - f(z) - ((\mathrm{D}f)(x))(x-z)\| \le \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{2}\|x-z\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x-z\| = \varepsilon\|x-z\|.
\end{aligned}$$

Vagyis $\|((\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x))(x-z)\| < \varepsilon\|x-z\|$. Mivel tetszőleges $e \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ egységvektor esetén, ha $t \in]-\delta, \delta[$, akkor $z = x + te \in B_\delta(a)$, vagyis

$$\|((\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x))te\| \le \varepsilon t$$

amiből a linearitás miatt az következik, hogy minden e egységvektorra

$$\|((\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x))e\| < \varepsilon,$$

tehát az operátornorma definíciója alapján

$$\|(\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x)\| \le \varepsilon,$$

ami igazolja a $\mathrm{D}f$ függvény a pontbeli folytonosságát.
Most tegyük fel, hogy az f függvény folytonosan differenciálható az Ω halmazon. A parciális derivált értelmezése, a közvetett függvény deriválási szabálya és az inklúziófüggvény deriváltja alapján minden $k \in \{1,\dots,n\}$ és $a \in \Omega$ esetén

$$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) = (\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,k}(a_k)) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,k})(a_k) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,k}$$

teljesül. Ezért a minden $k \in \{1,\dots,n\}$ esetén a $\partial_k f$ függvény értelmezett az Ω halmazon, továbbá az $\mathrm{in}_{0,k}$ függvény és a $\mathrm{D}f$ függvény folytonossága miatt a $\partial_k f$ függvény is folytonos.

17.7. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága

17.33. Tétel. *Legyen U normált tér, V Banach-tér, $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in U$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to V$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : B_r(a) \to V$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, V Banach-tér, $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in U$ valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to V$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\|f_n(a) - f_m(a)\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 16.3 tétel alapján létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} \|\mathrm{D}f_n(y) - \mathrm{D}f_m(y)\| < \frac{\varepsilon}{4r}$$

teljesül. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$.
Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az $f_n - f_m$ függvényre és az $[a, x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\| \le \left(\sup_{y\in]a,x[} \|(D(f_n - f_m))(y)\|\right) \cdot \|x - a\|$$

adódik, vagyis

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \le \|f_n(a) - f_m(a)\| + \left(\sup_{y\in]a,x[} \|(D(f_n - f_m))(y)\|\right) \cdot \|x - a\|.$$

Ekkor minden $N < n, m$ természetes számra

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \le \|f_n(a) - f_m(a)\| + \left(\sup_{y\in]a,x[} \|(D(f_n - f_m))(y)\|\right) \cdot \|x - a\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4r} \cdot r = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Vagyis minden $x \in B_r(a)$ esetén $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik az

$$f : B_r(a) \to V \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

határfüggvény. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül, amiből az $m \to \infty$ határértéket véve

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in B_r(a)} \|f_n(x) - f(x)\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

adódik, ami éppen az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletes konvergenciáját fejezi ki.

17.34. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Ha a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to V$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*

3. minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ határérték.
Definiáljuk az

$$\Omega' = \left\{ x \in \Omega \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right\}$$

halmazt.
1. Az első lépésben azt igazoljuk, hogy az Ω' halmaz nyílt és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω' halmazon.
Legyen $a \in \Omega'$. Ekkor létezik a $\lim\limits_{a} f_n(a)$ határérték, valamint a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenciája miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon. A 17.33 tétel alapján ebben az esetben minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{x} f_n(x)$ határérték és a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon. Tehát $B_r(a) \subseteq \Omega'$, vagyis Ω' nyílt és az a pontnak létezik olyan környezete $(B_r(a))$, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.
2. Most igazoljuk az $\overline{\Omega'} \cap \Omega = \Omega'$ egyenlőséget. Mivel $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \cap \Omega$ nyilván teljesül ezért csak az $\overline{\Omega'} \cap \Omega \subseteq \Omega'$ tartalmazást kell igazolni. Ehhez legyen $x \in \overline{\Omega'} \cap \Omega$. Mivel a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Továbbá $x \in \overline{\Omega'}$ miatt létezik olyan $z \in \Omega'$, melyre $\|x - z\| < \dfrac{r}{2}$ teljesül. Ekkor a $z \in B_{\frac{r}{2}}(x) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás miatt a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{\frac{r}{2}}(x)$ halmazon, vagyis a 17.33 tétel alapján $B_{\frac{r}{2}}(x) \subseteq \Omega'$, amiből $z \in \Omega'$ következik.
3. Megmutatjuk, hogy $\Omega' = \Omega$. Mivel $\Omega' \subseteq \Omega$ nyílt halmaz, valamint $x_0 \in \Omega'$ miatt $\Omega' \neq \emptyset$, továbbá $\overline{\Omega'} \cap \Omega = \Omega'$ teljesül, ezért a 14.39 tétel alapján $\Omega' = \Omega$.
Ezek után definiáljuk az

$$f : \Omega \to V \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

határfüggvényt.
4. Végül megmutatjuk, hogy a határfüggvény deriválható és minden $a \in \Omega$ esetén

$$(\mathrm{D}f)(a) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(a)$$

teljesül.
Ehhez legyen

$$g : \Omega \to V \qquad a \mapsto \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(a)$$

és $a \in \Omega$ tetszőleges pont. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n : B_r(a) \to V \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(a) - (\mathrm{D}f_n)(a)(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a, \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\varphi : B_r(a) \to V \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a) - g(a)(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a. \end{cases}$$

Az f_n függvény a pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 16.4

tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne az a pontban és teljesülne a bizonyítandó

$$(\mathrm{D}f)(a) = g(a)$$

egyenlőség.
Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 16.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} \|(\mathrm{D}f_n)(y) - (\mathrm{D}f_m)(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül.
Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \to V \qquad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - ((\mathrm{D}f_n)(a) - (\mathrm{D}f_m)(a))u$$

függvényre és az $[a, x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a)) - ((\mathrm{D}f_n)(a)(x-a) - (\mathrm{D}f_m)(a))(x-a)\| \leq$$
$$\left(\sup_{y\in]a,x[} \|(D(f_n - f_m))(y) - ((\mathrm{D}f_n)(a) - (\mathrm{D}f_m)(a))\|\right) \cdot \|x-a\|$$

adódik, vagyis ha $N < n, m$ teljesül, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f_n(x) - f_n(a) - (\mathrm{D}f_n)(a)(x-a) - (f_m(x) - f_m(a) - (\mathrm{D}f_m)(a))(x-a))\| \leq \\
&\leq \left(\sup_{y\in]a,x[} (\|(D(f_n - f_m))(y)\| + \|(\mathrm{D}f_n)(a) - (\mathrm{D}f_m)(a)\|)\right) \cdot \|x-a\| \leq \\
&\leq \left(\left(\sup_{y\in B_r(a)} \|(D(f_n - f_m))(y)\|\right) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \|x-a\| \leq \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \|x-a\| = \varepsilon \|x-a\|.
\end{aligned}$$

Ezek alapján minden $N < n, m$ természetes számra $x \neq a$ esetén

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| = \left\| \frac{f_n(x) - f_n(a) - f_m(x) + f_m(a)}{\|x-a\|} \right\| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|x-a\|}{\|x-a\|} = \varepsilon,$$

valamint $x = a$ esetén is $\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| = 0 < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \ (N < n, m \ \to \ \|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| \leq \varepsilon)$$

teljesül, amiből a 16.3 tétel értelmében következik, hogy a a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

17.35. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ összeg;*

2. *a* $\sum_n f_n$ *függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az* $f : \Omega \to V$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *függvényhez;*
3. *minden* $x \in \Omega$ *esetén* $(\mathrm{D}f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$ *teljesül.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ összeg. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n : \Omega \to V \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_n(x).$$

Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 17.34 tételt adódik az állítás.

17.8. Inverzfüggvény tétel

17.36. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen* U *és* V *Banach-tér,* $f : U \twoheadrightarrow V$ *tetszőleges függvény és* $a \in U$. *Ha* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ *folytonos az* a *pontban és* $(\mathrm{D}f)(a) \in \mathscr{L}(U, V)$ *homeomorfizmus, akkor létezik olyan* $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ *nyílt környezete az* a *pontnak, melyre*

1. $f|_\Omega$ *injektív;*
2. $f(\Omega)$ *nyílt halmaz;*
3. $f|_\Omega$ *homeomorfizmus* Ω *és* $f(\Omega)$ *között;*
4. *az* $(f|_\Omega)^{-1}$ *függvény differenciálható;*
5. *minden* $x \in \Omega$ *pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a* $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ *függvény folytonos az* $f(a)$ *pontban.*

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben végezzük.
1. Legyen U és V Banach-tér, $f : U \twoheadrightarrow V$ tetszőleges függvény és $a \in U$. Tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) \in \mathscr{L}(U, V)$ homeomorfizmus.
Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést és legyen $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ teljesül. A $\mathrm{D}f$ függvény a pontbeli $\mathrm{D}f$ folytonossága miatt létezik olyan $r \in]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_r(a)$ esetén

$$\|(\mathrm{D}f)(x) - A\| < \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|}.$$

Definiáljuk az $\Omega = B_r(a)$ halmazt. Lépésenként megmutatjuk, hogy erre az Ω halmazra teljesülnek a tételben felsorolt tulajdonságok. Előbb azonban megjegyezzük, hogy a 14.23 tétel miatt minden $x \in \Omega$ pont esetén a $(\mathrm{D}f)(x)$ leképezés invertálható.
2. A bizonyítás folyamán szükségünk lesz az alábbi függvényre. Minden $y \in V$ esetén legyen

$$\varphi_y : \Omega \to U \qquad x \mapsto x + A^{-1}(y - f(x)).$$

Mivel minden $y \in V$ estén

$$\varphi_y = \mathrm{id}_\Omega + (A^{-1}y) - A^{-1} \circ f,$$

ezért minden $x \in \Omega$ pontra

$$(\mathrm{D}\varphi_y)(x) = \mathrm{id}_U - A^{-1} \circ (\mathrm{D}f)(x) = A^{-1}(A - (\mathrm{D}f)(x))$$

teljesül, amiből

$$\|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|(A - (\mathrm{D}f)(x))\| < \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{1}{2\left\|A^{-1}\right\|} = \frac{1}{2}$$

következik. Vagyis minden $y \in V$ és bármely $x_1, x_2 \in \Omega$ pont esetén a véges növekmények formuláját felírva az $[x_1, x_2]$ szakaszra és a φ_y függvényre

$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| &\leq \left(\sup_{x \in]x_1, x_2[} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \leq \\ &\leq \left(\sup_{x \in \Omega} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}\end{aligned}$$

adódik. Tehát φ_y kontrakció és

$$\forall y \in V \ \forall x_1, x_2 \in \Omega \qquad \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2} \tag{17.2}$$

teljesül.
3. Most megmutatjuk, hogy az $f|_\Omega$ függvény injektív. Ehhez tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \Omega$ olyan, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Ha $y = f(x_1)$, akkor $\varphi_y(x_1) = x_1$ és $\varphi_y(x_2) = x_2$, amiből a (17.2) egyenlet segítségével

$$\|x_1 - x_2\| = \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$

adódik, vagyis $x_1 = x_2$.
4. Most igazoljuk, hogy minden $X \subseteq \Omega$ nyílt halmaz esetén $f(X)$ nyílt halmaz. Legyen $y_0 \in f(X)$ tetszőleges pont. Ekkor $f|_\Omega$ injektivitása miatt létezik egyetlen olyan $x_0 \in X$ pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel X nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{2r}(x_0) \subseteq X$. Legyen $\rho \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $x \in \overline{B_r(x_0)}$, $y \in B_\rho(y_0)$ tetszőleges pontok. Ekkor

$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x) - x_0\| &\leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \left\|A^{-1}(y - f(x_0))\right\| \leq \\ &\leq \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \leq \\ &\leq \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $\frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho = r$, azaz $\rho = \frac{r}{2\left\|A^{-1}\right\|}$, akkor minden $x \in \overline{B_r(x_0)}$ esetén

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r.$$

Mostantól legyen $\rho = \frac{r}{2\left\|A^{-1}\right\|}$. Ekkor az előző egyenlőtlenség alapján

$$\varphi_y\left(\overline{B_r(x_0)}\right) \subseteq \overline{B_r(x_0)}.$$

Mivel U Banach-tér és $\overline{B_r(x_0)}$ zárt részhalmaza, ezért a 13.38 tétel alapján a $\overline{B_r(x_0)}$ halmaz is teljes. Ekkor az $M = \overline{B_r(x_0)}$ halmazra és a $\varphi_y|_M$ függvényre alkalmazva a 13.96 Banach-féle fixponttételt, az adódik, hogy létezik egyetlen olyan $x \in \overline{B_r(x_0)}$ pont, melyre

$$\varphi_y(x) = x$$

teljesül, ez pedig azzal ekvivalens, hogy $f(x) = y$. Tehát azt kaptuk, hogy minden $y \in B_\rho(y_0)$ ponthoz létezik olyan $x \in X$, melyre $f(x) = y$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy $B_\rho(y_0) \subseteq f(X)$. Ezzel igazoltuk, hogy $f(X)$ nyílt halmaz.
5. Az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük a $g = f|_\Omega$ és az $\Omega' = f(\Omega)$ jelöléseket. Most megmutatjuk, hogy g homeomorfizmus Ω és Ω' között. Mivel f differenciálható az Ω halmazon, ezért ott

folytonos is, vagyis g folytonos. A folytonosság topologikus jellemzése alapján a g^{-1} függvény folytonossága azzal ekvivalens, hogy minden $X \subseteq U$ nyílt halmazra létezik olyan $X' \subseteq V$ nyílt halmaz, melyre $\left(\overset{-1}{g^{-1}}\right)(X) = X' \cap \operatorname{Dom} g^{-1}$ teljesül. Mivel g injektív, ezért azt kell igazolnunk, hogy minden $X \subseteq U$ nyílt halmazhoz létezik olyan $X' \subseteq V$ nyílt halmaz, melyre

$$g(X) = X' \cap \Omega'.$$

Ha $X \subseteq U$ nyílt halmaz, akkor $g(X) = g(\Omega \cap X)$ és mivel $\Omega \cap X$ nyílt halmaz, ezért a 4. pont alapján $g(\Omega \cap X)$ nyílt halmaz. A nyilvánvaló $g(\Omega \cap X) \subseteq \Omega'$ tartalmazás miatt

$$g(X) = g(\Omega \cap X) \cap \Omega',$$

vagyis az $X' = g(\Omega \cap X)$ nyílt halmazra teljesül a kívánt tartalmazás.
6. Most igazoljuk, hogy g^{-1} differenciálható és minden $x \in \Omega$ pontra

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$

teljesül. Ezzel ekvivalens, hogy minden minden $y \in \Omega'$ pontban g^{-1} differenciálható és

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(y) = ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y)))^{-1}$$

teljesül. Ennek igazolásához legyen $y_0 \in \Omega'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Azt kell bizonyítani, hogy

$$\begin{aligned} &\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in V : \\ &\qquad \left(\|y - y_0\| < \delta \quad \to \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y - y_0)\right\| \le \varepsilon \|y - y_0\|\right) \end{aligned}$$

teljesül. Mivel Ω' nyílt halmaz a 4. pont alapján, ezért létezik olyan $r_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, melyre $B_{r_1}(y_0) \subseteq \Omega'$. Legyen $x_0 = g^{-1}(y_0)$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenségben szereplő kifejezésen végezzük el a következő átalakításokat, ahol $y \in B_{r_1}(y_0)$ tetszőleges és $x = g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned} &\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y - y_0)\right\| = \\ &\quad = \left\|x - x_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}(y - y_0)\right\| = \\ &\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\left(((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0) - (y - y_0)\right)\right\| \le \\ &\quad \le \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0) - (y - y_0)\| = \\ &\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0)\| = \\ &\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ egy paraméter, melynek majd később rögzítjük az értékét. Mivel $x_0 \in \Omega$, Ω nyílt halmaz és a g függvény differenciálható az x_0 pontban, ezért létezik olyan $r_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{r_2}(x_0) \subseteq \Omega$ és

$$\forall x \in U : \qquad (\|x - x_0\| < r_2 \quad \to \quad \|g(x) - g(x_0) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0)\| \le \varepsilon' \|x - x_0\|).$$

Mivel a g^{-1} függvény folytonos az y_0 pontban, ezért létezik olyan $r_3 \in]0, r_1[$ paraméter, hogy

$$\forall y \in V : \qquad \left(\|y - y_0\| < r_3 \quad \to \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| < r_2\right).$$

Ezekből

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0) : \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le \varepsilon' \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|$$

következik. Tetszőleges $y \in B_{r_3}(y_0)$ pont esetén

$$\begin{aligned} &\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| = \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0) + A^{-1}(y - y_0)\right\| \le \\ &\quad \le \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0)\right\| + \left\|A^{-1}(y - y_0)\right\| \le \\ &\quad \le \left\|\varphi_{y_0}(g^{-1}(y)) - \varphi_{y_0}(g^{-1}(y_0))\right\| + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \le \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\left\|g^{-1}(y)-g^{-1}(y_0)\right\|}{2}+\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|y-y_0\|$$

adódik, ahol az utolsó lépésnél felhasználtuk a (17.2) becslést és ennek az egyenlőtlenségnek az átrendezéséből

$$\left\|g^{-1}(y)-g^{-1}(y_0)\right\|\leq 2\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|y-y_0\|$$

következik. Tehát az eddigiek alapján

$$\forall y\in B_{r_3}(y_0):\ \left\|g(g^{-1}(y))-g(g^{-1}(y_0))-((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y)-g^{-1}(y_0))\right\|\leq 2\varepsilon'\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|y-y_0\|.$$

Vagyis ha $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2\left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\|}$, akkor minden $y\in B_{r_3}(y_0)$ pontra teljesül a bizonyítandó

$$\left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\|\cdot\left\|g(g^{-1}(y))-g(g^{-1}(y_0))-((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y)-g^{-1}(y_0))\right\|\leq\varepsilon\|y-y_0\|$$

egyenlőtlenség. Tehát a fent definiált ε' paraméterhez kell r_2 és r_3 számokat választani, és r_3 lesz a keresett δ.
7. Végül igazoljuk, hogy a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban. Már megmutattuk, hogy

$$\mathrm{D}(g^{-1})=i\circ(\mathrm{D}g)\circ g^{-1},$$

ahol i jelöli az invertálást. A g^{-1} függvény folytonosságát igazoltuk, a $(\mathrm{D}g)$ függvény folytonosságát feltettük az a pontban és a 14.14 tétel alapján tudjuk, hogy i folytonos. Ezek alapján a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény is folytonos az $f(a)$ pontban.

17.9. Implicitfüggvény tétel

17.37. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen U_1,U_2 és V Banach-tér, $f:U_1\times U_2\twoheadrightarrow V$ tetszőleges függvény. Ha $(a_1,a_2)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az (a_1,a_2) pontban és a $(\partial_2 f)(a_1,a_2)\in\mathscr{L}(U_2,V)$ leképezés homeomorfizmus, akkor létezik olyan Ω_1, Ω_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre*

1. *$\Omega_1\times\Omega_2\subseteq\operatorname{Dom}(Df)$;*
2. *létezik egyetlen olyan $\varphi:\Omega_1\to\Omega_2$ differenciálható függvény, melyre minden $x\in\Omega_1$ esetén*

$$f(x,\varphi(x))=f(a_1,a_2)\quad\text{és}\quad(D\varphi)(x)=-\left((\partial_2 f)(x,\varphi(x))\right)^{-1}(\partial_1 f)(x,\varphi(x))$$

teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ folytonos az a_1 pontban.

Bizonyítás. Legyen U_1,U_2 és V Banach-tér, valamint $f:U_1\times U_2\twoheadrightarrow V$ függvény. Legyen $(a_1,a_2)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}(Df)$ olyan pont, melyben $\mathrm{D}f$ folytonos és a $(\partial_2 f)(a_1,a_2)\in\mathscr{L}(U_2,V)$ leképezés homeomorfizmus.
A $\operatorname{Dom}f\subseteq U_1\times U_2$ halmazon értelmezzük az

$$\eta:U_1\times U_2\to U_1\times V\qquad(x_1,x_2)\mapsto(x_1,f(x_1,x_2))$$

függvényt. Ekkor ha $(b_1,b_2)\in\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, akkor

$$((\mathrm{D}\eta)(b_1,b_2)):U_1\times U_2\to U_1\times V\qquad(x_1,x_2)\mapsto\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{U_1} & 0\\ (\partial_1 f)(b_1,b_2) & (\partial_2 f)(b_1,b_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

teljesül. Ebből adódik, hogy $(a_1,a_2)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ miatt $(a_1,a_2)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}\eta)$, továbbá a $\mathrm{D}f$ függvény (a_1,a_2) pontbeli folytonossága miatt a $\mathrm{D}\eta$ függvény is folytonos az (a_1,a_2) pontban. Egyszerű számolással igazolható, hogy az $A=(\mathrm{D}\eta)(a_1,a_2)$ leképezés inverze

$$U_1\times V\to U_1\times U_2\qquad(y_1,y_2)\mapsto(y_1,-((\partial_2 f)(a_1,a_2))^{-1}(\partial_1 f)(a_1,a_2)y_1+((\partial_2 f)(a_1,a_2))^{-1}y_2),$$

mely folytonos lineáris leképezés, vagyis $(\mathrm{D}\eta)(a_1,a_2)$ homeomorfizmus.
Az η függvényre és az (a_1,a_2) pontra alkalmazva a 17.36 inverzfüggvény tételt az adódik, hogy létezik olyan Ω_1', Ω_2' nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre

1. $\eta|_{\Omega_1'\times\Omega_2'}$ injektív;
2. az $\Omega = \eta|_{\Omega_1'\times\Omega_2'} \subseteq U_1 \times V$ halmaz nyílt;
3. az $(\eta|_{\Omega_1'\times\Omega_2'})^{-1}$ függvény differenciálható;
4. minden $x \in \Omega_1' \times \Omega_2'$ pontra
$$(\mathrm{D}((\eta|_{\Omega_1'\times\Omega_2'})^{-1}))(\eta(x)) = ((\mathrm{D}\eta)(x))^{-1}$$
teljesül;
5. a $\mathrm{D}(\eta|_{\Omega_1'\times\Omega_2'})^{-1}$ függvény folytonos az $\eta(a_1, a_2)$ pontban.

Vezessük be a $\rho = (\eta|_{\Omega_1'\times\Omega_2'})^{-1}$ jelölést, tehát $\rho : \Omega \to U_1 \times U_2$ differenciálható függvény, melynek komponensei legyenek
$$\begin{aligned} \rho_1 : \Omega \to U_1 \qquad & (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_1(\rho(x, y)) \\ \rho_2 : \Omega \to U_2 \qquad & (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x, y)). \end{aligned}$$
Ha $(x_1, y) \in \Omega \subseteq U_1 \times V$, akkor
$$(x_1, y) = \eta(\rho(x_1, y)) = \eta(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y)) = (\rho_1(x_1, y), f(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y))),$$
vagyis minden $(x_1, y) \in \Omega$ pont esetén
$$x_1 = \rho_1(x_1, y) \qquad \text{és} \qquad y = f(x_1, \rho_2(x_1, y)). \tag{17.3}$$
Legyen $c = f(a_1, a_2)$. Ekkor $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} f$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} \eta$ is teljesül és $\eta(a_1, a_2) = (a_1, c)$ miatt $(a_1, c) \in \Omega$, mivel Ω nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\Omega_1 \subseteq \Omega_1' \subseteq U_1$ nyílt halmaz, melyre $\Omega_1 \times \{c\} \subseteq \Omega$.
Tekintsük a
$$\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2' \qquad x \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x, c))$$
függvényt. Mivel ρ differenciálható és pr_2 lineáris leképezés, ezért φ is differenciálható függvény. A (17.3) egyenlet alapján minden $x \in \Omega_1$ pontra
$$c = f(x, \rho_2(x, c)) = f(x, \varphi(x))$$
teljesül, melyből a közvetett függvény deriválási szabálya alapján az adódik, hogy minden $x \in \Omega_1$ esetén
$$0 = (\partial_1 f)(x, \varphi(x)) + (\partial_2 f)(x, \varphi(x)) \circ (D\varphi)(x)$$
teljesül, aminek átrendezéséből
$$(D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$
adódik.

17.10. Többszörös deriváltak

17.38. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f))(a) \in \mathscr{L}(U, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V))$, ennek a kompozícióját a
$$\rho_{n-1} : \mathscr{L}(U, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V)) \to \mathscr{L}^n(U^n, V)) \quad A \mapsto \Big((x_1, \dots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \dots, x_n)\Big)$$
izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$. Az $f : U \to V$ függvény *n-edik deriváltjának* nevezzük a
$$\mathrm{D}^{(n)} f : \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f) \to \mathscr{L}^n(U^n, V) \qquad a \mapsto \rho_{n-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f))(a)$$
függvényt.

– Az f *függvény n-szer differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(n)} f$.
– Az f *függvény n-szer folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(n)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, n-szer folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, V)$ jelöli.
– Az f *függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szer differenciálható. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, V)$ jelöli.

17.39. Tétel. *(Young-tétel.) Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ tetszőleges függvény, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(n)} f$. Ekkor $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a) \in \mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$, azaz $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ szimmetrikus multilineáris leképezés.*

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ tetszőleges függvény.
Ha $n = 1$ és $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(n)} f$, akkor definíció szerint $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ szimmetrikus lineáris leképezés.
Most igazoljuk az állítás az $n = 2$ esetre.
Legyen $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(2)} f$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom}(\mathrm{D} f)$ teljesül, vagyis az f függvény differenciálható a $B_r(a)$ halmazon. Legyen $x, y \in U \setminus \{0\}$ tetszőleges vektorok és $R = \dfrac{r}{\|x\| + \|y\|}$.
Definiáljuk az

$$s :]-R, R[\to V \qquad t \mapsto f(a + tx + ty) - f(a + tx) - f(a + ty) + f(a)$$

függvényt. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$\lim_{t \to 0} \frac{s(t)}{t^2} = (\mathrm{D}^{(2)} f)(a)(x, y) \tag{17.4}$$

teljesül, amiből következik a bizonyítandó

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}^{(2)} f)(a)(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tx + ty) - f(a + tx) - f(a + ty) + f(a)}{t^2} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + ty + tx) - f(a + ty) - f(a + tx) + f(a)}{t^2} = (\mathrm{D}^{(2)} f)(a)(y, x)\end{aligned}$$

képlet. A (17.4) képlethez igazolni kell az

$$\lim_{t \to 0} \frac{s(t) - (\mathrm{D}^{(2)} f)(a)(tx, ty)}{t^2} = 0$$

egyenlőséget, amit az alábbi két részre bontunk.

$$\lim_{t \to 0} \frac{s(t) - (\mathrm{D} f)(a + tx)(ty) + (\mathrm{D} f)(a)(ty)}{t^2} = 0 \tag{17.5}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{(\mathrm{D} f)(a + tx)(ty) - (\mathrm{D} f)(a)(ty) - (\mathrm{D}^2 f)(a)(tx, ty)}{t^2} = 0 \tag{17.6}$$

A $\mathrm{D} f$ függvény a pontbeli deriválhatósága alapján

$$\lim_{z \to 0} \frac{(\mathrm{D} f)(a + z) - (\mathrm{D} f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D} f))(a)(z)}{\|z\|} = 0,$$

tehát a

$$\varphi : B_r(a) \to V \qquad z \mapsto \begin{cases} \dfrac{(\mathrm{D} f)(a + z) - (\mathrm{D} f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D} f))(a)(z)}{\|z\|}, & \text{ha} \quad z \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad z = 0 \end{cases}$$

formulával értelmezett függvény folytonos a 0 pontban, ezért

$$\lim_{z \to 0} \varphi(z) = 0 \tag{17.7}$$

és minden $z \in B_r(a)$ vektorra

$$(\mathrm{D}f)(a+z) = \|z\| \cdot \varphi(z) + (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(z) \tag{17.8}$$

teljesül.
A (17.6) egyenlőség bizonyításához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a φ függvény 0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in U$, $0 < \|z\| < \delta$ esetén

$$\|\varphi(z)\| = \frac{\|(\mathrm{D}f)(a+z) - (\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(z)\|}{\|z\|} < \varepsilon.$$

Vagyis minden $t \in \mathbb{R}$, $0 < |t| < \dfrac{\delta}{\|x\|}$ számra

$$\frac{\|(\mathrm{D}f)(a+tx) - (\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx)\|}{|t| \cdot \|x\|} < \varepsilon,$$

amiből

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{(\mathrm{D}f)(a+tx)(ty) - (\mathrm{D}f)(a)(ty) - (\mathrm{D}^2 f)(a)(tx,ty)}{t^2} \right\| \leq \\
&\quad \leq \frac{\|(\mathrm{D}f)(a+tx) - (\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx)\| \cdot \|ty\|}{t^2} = \\
&\quad = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \frac{\|(\mathrm{D}f)(a+tx) - (\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx)\|}{|t| \cdot \|x\|} < \varepsilon \cdot \|x\| \cdot \|y\|
\end{aligned}$$

következik. Ezzel igazoltuk a (17.6) egyenlőséget.
A (17.5) egyenlőség igazolásához minden $t \in \,]-R, R[$ paraméter esetén tekintsük az alábbi függvényt.

$$\alpha_t : [0,1] \to V \qquad s \mapsto f(a+tx+sty) - f(a+sty) - (\mathrm{D}f)(a+tx)(sty) + (\mathrm{D}f)(a)(sty)$$

Ekkor minden $t \in \,]-R, R[$ esetén

$$s(t) - (\mathrm{D}f)(a+tx)(ty) + (\mathrm{D}f)(a)(ty) = \alpha_t(1) - \alpha_t(0)$$

teljesül.
A véges növekmények formulája alapján minden $t \in \,]-R, R[$ számra

$$\begin{aligned}
&\|\alpha_t(1) - \alpha_t(0)\| \leq \sup_{s \in]0,1[} \|(\mathrm{D}\varphi_t)(s)\| = \\
&\quad = \sup_{s \in]0,1[} \|(\mathrm{D}f)(a+tx+sty)(ty) - (\mathrm{D}f)(a+sty)(ty) - (\mathrm{D}f)(a+tx)(ty) + (\mathrm{D}f)(a)(ty)\| \leq \\
&\quad \leq |t| \cdot \|y\| \cdot \sup_{s \in]0,1[} \|(\mathrm{D}f)(a+tx+sty) - (\mathrm{D}f)(a+sty) - (\mathrm{D}f)(a+tx)(ty) + (\mathrm{D}f)(a)\|
\end{aligned}$$

teljesül, amit a (17.8) képlet segítségével az alábbi formában is felírhatunk.

$$\begin{aligned}
&\|\alpha_t(1) - \alpha_t(0)\| \leq \\
&\quad \leq |t| \cdot \|y\| \cdot \sup_{s \in]0,1[} \Bigg(\Bigg\| \begin{aligned} &\|tx+sty\| \cdot \varphi(tx+sty) + (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx+sty) \\ &- \|sty\| \cdot \varphi(sty) - (\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(sty) \\ &- \|tx\| \cdot \varphi(tx) - (\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx) + (\mathrm{D}f)(a) \end{aligned} \Bigg\| \Bigg) \leq \\
&\quad \leq |t| \cdot \|y\| \cdot \sup_{s \in]0,1[} (\|\|tx+sty\| \cdot \varphi(tx+sty) - \|sty\| \cdot \varphi(sty) - \|tx\| \cdot \varphi(tx)\|) \leq \\
&\quad \leq |t| \cdot \|y\| \cdot \sup_{s \in]0,1[} (|t| \cdot (\|x\| + s\,\|y\|) \cdot \|\varphi(tx+sty)\| + s\,|t| \cdot \|y\| \cdot \|\varphi(sty)\| + |t| \cdot \|x\| \cdot \|\varphi(tx)\|) \leq \\
&\quad \leq |t|^2 \cdot \|y\| \cdot \sup_{s \in]0,1[} ((\|x\| + \|y\|) \cdot \|\varphi(tx+sty)\| + \|y\| \cdot \|\varphi(sty)\| + \|x\| \cdot \|\varphi(tx)\|)
\end{aligned}$$

Vagyis, ha $t \in \,]-R, R[\, \setminus \{0\}$, akkor

$$\left\| \frac{s(t) - (\mathrm{D}f)(a+tx)(ty) + (\mathrm{D}f)(a)(ty)}{t^2} \right\| \leq$$
$$\leq \|y\| \cdot \left((\|x\| + \|y\|) \cdot \sup_{s \in]0,1[} \|\varphi(tx + sty)\| + \|y\| \cdot \sup_{s \in]0,1[} \|\varphi(sty)\| + \|x\| \cdot \|\varphi(tx)\| \right).$$

A (17.5) egyenlőség bizonyításához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A (17.7) egyenlet alapján
– létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in U$, $0 < \|z\| < \delta_1$ esetén

$$\varphi(z) < \frac{\varepsilon}{3\,\|y\|\,(\|x\| + \|y\|)};$$

– létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in U$, $0 < \|z\| < \delta_2$ esetén

$$\varphi(z) < \frac{\varepsilon}{3\,\|y\|^2};$$

– létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in U$, $0 < \|z\| < \delta_3$ esetén

$$\varphi(z) < \frac{\varepsilon}{3\,\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Ha $\delta = \dfrac{\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}}{\|x\| + \|y\|}$, akkor minden $t \in \,]-\delta, \delta[$ és $s \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} \|tx + sty\| &< \delta \leq \delta_1 \\ \|sty\| &< \delta \leq \delta_2 \\ \|tx\| &< \delta \leq \delta_3. \end{aligned}$$

Vagyis ha $t \in \,]-\delta, \delta[$, akkor

$$\left\| \frac{s(t) - (\mathrm{D}f)(a+tx)(ty) + (\mathrm{D}f)(a)(ty)}{t^2} \right\| \leq$$
$$\leq \|y\| \cdot \left((\|x\| + \|y\|) \cdot \sup_{s \in]0,1[} \|\varphi(tx + sty)\| + \|y\| \cdot \sup_{s \in]0,1[} \|\varphi(sty)\| + \|x\| \cdot \|\varphi(tx)\| \right) <$$
$$< \|y\| \cdot \left((\|x\| + \|y\|) \cdot \sup_{s \in]0,1[} \frac{\varepsilon}{3\,\|y\|\,(\|x\| + \|y\|)} + \|y\| \cdot \sup_{s \in]0,1[} \frac{\varepsilon}{3\,\|y\|^2} + \|x\| \cdot \frac{\varepsilon}{3\,\|x\| \cdot \|y\|} \right) =$$
$$= \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk a (17.5) képletet.
Tehát eddig megmutattuk, hogy a tétel igaz az $n = 1$ és az $n = 2$ esetben. Most teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha $2 \leq n$ és az n számra igaz az állítás, akkor az $n+1$ számra is igaz.
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$ és tegyük fel, hogy igaz az állítás az n számra. Vezessük be a $g = \mathrm{D}^{(n)}f$ függvényt, ekkor $g : U \to \mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$, ahol $\mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$ jelöli a folytonos szimmetrikus n-lineáris leképezések terét. Mivel a 14.56 tétel alapján $\mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$ zárt lineáris altere a $\mathscr{L}^n(U^n, V)$ térnek, ezért a 17.13 állítás miatt a g függvény deriváltjára $\mathrm{D}g : U \to \mathrm{Lin}\,(U, \mathscr{L}_s{}^n(U^n, V))$ teljesül. Ezért, ha $Q = (\mathrm{D}^{(n+1)}f)(a)$, $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in U$ és $\sigma : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ olyan permutáció, melyre $\sigma(1) = 1$ teljesül, akkor a magasabbrendű derivált értelmezése alapján

$$\begin{aligned} Q(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n+1)}) &= \Big(\rho_{n-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n)}f))(a)\Big)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n+1)}) = \\ &= \Big((\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n)}f))(a)\Big)(x_{\sigma(1)})(x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n+1)}) = \\ &= \Big((\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n)}f))(a)\Big)(x_1)(x_2, \ldots, x_{n+1}) = \\ &= Q(x_1, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Legyen $\sigma^* : \{1,\dots,n+1\} \to \{1,\dots,n+1\}$ a $\sigma^*(1) = 2$, $\sigma^*(2) = 1$ és minden $3 \le k \le n$ esetén $\sigma^*(k) = k$ hozzárendeléssel értelmezett permutáció, valamint $h = \mathrm{D}^{n-1}f$ függvény. Ekkor a $h : U \to \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V)$ függvényre alkalmazva a Young-tételt az $n = 2$ esetben, azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{D}^2 h : U \to \mathscr{L}_s{}^2\left(U^2, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V)\right),$$

vagyis minden $x_1,\dots,x_n,x_{n+1} \in U$ vektorra a magasabbrendű deriváltak értelmezése alapján

$$\begin{aligned} Q(x_{\sigma^*(1)}, x_{\sigma^*(2)}, \dots, x_{\sigma^*(n+1)}) &= \left((\mathrm{D}^2(h))(a)(x_{\sigma^*(1)}, x_{\sigma^*(2)})\right)(x_{\sigma^*(3)}, \dots, x_{\sigma^*(n+1)}) = \\ &= \left((\mathrm{D}^2(h))(a)(x_2, x_1)\right)(x_3, \dots, x_{n+1}) = \\ &= \left((\mathrm{D}^2(h))(a)(x_1, x_2)\right)(x_3, \dots, x_{n+1}) = \\ &= Q(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

teljesül.
Végül legyen $\sigma : \{1,\dots,n+1\} \to \{1,\dots,n+1\}$ olyan permutáció, melyre $\sigma(1) \ne 1$, valamint legyen $x_1,\dots,x_{n+1} \in U$ tetszőleges vektor. Legyen $i = \sigma^{-1}(1)$ és legyen $\sigma_1 : \{1,\dots,n+1\} \to \{1,\dots,n+1\}$ a $\sigma_1(2) = i$, $\sigma_1(i) = 2$ és minden $k \in \{1,\dots,n+1\} \setminus \{2, i\}$ esetén $\sigma_1(k) = k$ hozzárendeléssel értelmezett permutáció. Ekkor a $\sigma' = \sigma^* \circ \sigma \circ \sigma_1$ permutációra $\sigma'(1) = 1$ teljesül és a

$$\sigma^* \circ \sigma^* = \sigma_1 \circ \sigma_1 = \mathrm{id}_{\{1,\dots,n+1\}}$$

azonosság miatt

$$\sigma = \sigma^* \circ \sigma' \circ \sigma_1.$$

Az eddigiek alapján

$$\begin{aligned} Q(x_{\sigma_1(1)}, x_{\sigma_1(2)}, \dots, x_{\sigma_1(n+1)}) &= Q(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \\ Q(x_{\sigma'(1)}, x_{\sigma'(2)}, \dots, x_{\sigma'(n+1)}) &= Q(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \\ Q(x_{\sigma^*(1)}, x_{\sigma^*(2)}, \dots, x_{\sigma^*(n+1)}) &= Q(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

amiből

$$Q(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n+1)}) = Q(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

következik.

Jelölés. Legyen A halmaz, $a \in A$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az $a^{[n]} = (a,\dots,a) \in A^n$ jelölést használjuk, vagyis

$$a^{[n]} = \underbrace{(a,\dots,a)}_{n-\text{szer}}.$$

17.11. Taylor-sorfejtés

17.40. Definíció. Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \to V$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n)}f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{n,a} : U \to V \qquad (x) \mapsto T^f_{n,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)}f)(a))(x-a)^{[k]}$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(U, V)$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)}f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

17.41. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen U normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in U$ és $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(b-a)^{[k]} + \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{D}^{(n+1)} f)(\xi)(b-a)^{[n+1]}.$$

Bizonyítás. Legyen U normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in U$ és $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Tekintsük a

$$\gamma : \mathbb{R} \to U \qquad t \mapsto a + t(b-a)$$

függvényt és legyen $\tilde{f} = f \circ \gamma$. Mivel a γ függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, U) \qquad t \mapsto (b-a)$$

teljesül, vagyis $\mathrm{D}\gamma$ konstans függvény, ezért minden $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ esetén $\mathrm{D}^{(k)}\gamma = 0$, vagyis γ végtelenszer differenciálható az $\mathbb{R}$ halmazon. Ezért az $\tilde{f}$ függvény n-szer folytonosan differenciálható a $[0, 1]$ szakaszon, illetve $(n+1)$-szer differenciálható a $]0, 1[$ szakaszon. A 7.30 Taylor sorfejtést alkalmazva az $\tilde{f}$ függvényre, a $[0, 1]$ szakaszra a $p = 1$ választással az adódik, hogy létezik olyan $\tilde{\xi} \in]0, 1[$ paraméter, melyre

$$\tilde{f}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\tilde{f}^{(k)}(0) \cdot (1-0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\tilde{f}^{(n+1)}(\tilde{\xi}) \cdot (1-0)^{n+1},$$

vagyis

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\tilde{f}^{(k)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\tilde{f}^{(n+1)}(\tilde{\xi}). \tag{17.9}$$

A közvetett függvény deriválási szabálya alapján minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(\gamma(\tilde{z}))\gamma'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(\gamma(\tilde{z}))(b-a),$$

ahol $z = \gamma(\tilde{z})$. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \in \mathbb{N}^+$ számra minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}) = ((\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z})))(b-a)^{[k]}$$

teljesül, valamint az f függvény $(k+1)$-szer differenciálható valamely $z_0 \in [a, b]$ pontban. Ekkor az $\tilde{f}$ függvény $(k+1)$-szer differenciálható a $\tilde{z}_0 = \gamma^{-1}(z_0)$ pontban. Mivel a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \to z_0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(x) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(z_0) - (\mathrm{D}^{(k+1)} f)(z_0)(x - z_0)}{\|x - z_0\|} = 0,$$

ezért ha $x = z_0 + h(b-a)$, ahol $h \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(z_0 + h(b-a)) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(z_0) - h(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(z_0)(b-a)}{|h|} = 0,$$

amiből

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h)) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0)) - h(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)}{h} = 0$$

következik. Ezért

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h))(b-a)^{[k]} - (\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k]} - h(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k+1]}}{h} = 0,$$

vagyis

$$\tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{z}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0+h) - \tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0)}{h} = (\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k+1]}.$$

Ezen eredményt beírva a (17.9) képletbe a $\xi = \gamma^{-1}(\tilde{\xi})$ helyettesítéssel a bizonyítandó

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)(b-a)^{[k]} + \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{D}^{(n+1)}f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}$$

formula adódik.

17.42. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in U$ és $f : U \to V$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left\| f(b) - T^f_{n,a}(b) \right\| \le \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(n+1)}f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in U$ és $f : U \to V$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon.
Az n szerinti teljes indukcióval igazoljuk az állítást. Ha $n = 0$, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség következik a véges növekmények formulájából.
Most tegyük fel, hogy valamely n számra igaz az állítás és legyen $f : U \to V$ olyan függvény, mely $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+2)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Tekintsük az alábbi függvényeket.

$$\tilde{f} : [0,1] \to V \qquad t \mapsto f(a+t(b-a)) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}^{[k]}f)(a)(b-a)^{[k]}$$

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \frac{t^{n+2}\|b-a\|^{n+2}}{(n+2)!} \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(n+2)}f)(x) \right\| \right)$$

Ekkor minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}\tilde{f})(t) &= (\mathrm{D}f)(a+t(b-a))(b-a) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{kt^{k-1}}{k!}(\mathrm{D}^{[k]}f)(a)(b-a)^{[k]} = \\
&= (\mathrm{D}f)(a+t(b-a))(b-a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}^{[k]}(\mathrm{D}f))(a)(b-a)^{[k]}(b-a) = \\
&= \left((\mathrm{D}f)(a+t(b-a)) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}^{[k]}(\mathrm{D}f))(a)(b-a)^{[k]} \right)(b-a)
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha alkalmazzuk indukciós hipotézisünket a $\mathrm{D}f : U \to \mathscr{L}(U, V)$ függvényre és az $[a, a+t(b-a)]$ szakaszra, akkor

$$\begin{aligned}
&\left\| (\mathrm{D}f)(a+t(b-a)) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}^{[k]}(\mathrm{D}f))(a)(b-a)^{[k]} \right\| \le \\
&\le \left(\sup_{x\in]a,a+t(b-a)[} \left\| (\mathrm{D}^{(n+1)}(\mathrm{D}f))(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|t(b-a)\|^{n+1}}{(n+1)!} \le \\
&\le \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(n+2)}f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{t^{n+1}\|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

adódik, vagyis minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\left\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\right\| \leq \left(\sup_{x\in]a,b[}\left\|(\mathrm{D}^{(n+2)}f)(x)\right\|\right)\cdot\frac{t^{n+1}\left\|b-a\right\|^{n+2}}{(n+1)!} = g'(t)$$

teljesül. Ezen egyenlőtlenségből a 17.28 tétel alapján

$$\left\|\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)\right\| \leq g(1)-g(0)$$

következik, ami pedig nem más mint a bizonyítandó

$$\left\|f(b)-T^f_{n+1,a}(b)\right\| \leq \left(\sup_{x\in]a,b[}\left\|(\mathrm{D}^{(n+2)}f)(x)\right\|\right)\cdot\frac{\left\|b-a\right\|^{n+2}}{(n+2)!}$$

képlet.

17.43. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen az $f : U \to V$ függvény n-szer differenciálható az $a \in U$ pontban. Ekkor*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T^f_{n,a}(x)}{\left\|x-a\right\|^n} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér és $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in U$. A tételt az n paraméter szerinti teljes indukcióval igazoljuk.
Ha $n = 1$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(1)}$, akkor $T^f_{n,a}(x) = f(a) + (\mathrm{D}f)(a)(x-a)$ egyenlőség miatt a bizonyítandó határérték

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-(\mathrm{D}f)(a)(x-a)}{\left\|x-a\right\|} = 0,$$

mely következik a differenciálhatóság definíciójából.
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített szám. Tegyük fel, hogy minden U' és V' normált térre, valamint minden $g : U' \to V'$ függvényre és $a \in U'$ pontra, $a \in \operatorname{Dom} g^{(n)}$ esetén

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-T^g_{n,a}(x)}{\left\|x-a\right\|^n} = 0$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n+1)}$, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T^f_{n+1,a}(x)}{\left\|x-a\right\|^{n+1}} = 0.$$

Mivel $a \in \operatorname{Dom} f^{(n+1)}$, ezért $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül és tekintsük a

$$h : B_r(a) \to V \qquad x \mapsto f(x) - T^f_{n+1,a}(x)$$

függvényt. Mivel a 17.17 tétel szerint minden $u \in U$ esetén

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}T^f_{n+1,a})(x)u &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}k\left(((\mathrm{D}^{[k]}f)(a))(u,x-a,\dots,x-a)\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(k-1)!}\left(((\mathrm{D}^{[k-1]}(\mathrm{D}f))(a))(u,x-a,\dots,x-a)\right) = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(((\mathrm{D}^{[k]}(\mathrm{D}f))(a))(x-a)^{[k]}\right)\right)u = \\
&= (T^{\mathrm{D}f}_{n,a}(x))u,
\end{aligned}$$

ezért

$$(\mathrm{D}h)(x) = (\mathrm{D}f)(x) - T_{n,a}^{\mathrm{D}f}(x).$$

A $g = \mathrm{D}f$ függvényre alkalmazva az indukciós hipotézist a

$$\lim_{x\to a} \frac{(\mathrm{D}f)(x) - T_{n,a}^{\mathrm{D}f}(x)}{\|x-a\|^n} = 0$$

határértéket kapjuk, vagyis

$$\lim_{x\to a} \frac{(\mathrm{D}h)(x)}{\|x-a\|^n} = 0.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $z \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\left\| \frac{(\mathrm{D}h)(z)}{\|z-a\|^n} \right\| < \varepsilon,$$

vagyis

$$\|(\mathrm{D}h)(z)\| < \varepsilon \cdot \|z-a\|^n.$$

Legyen $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges és alkalmazzuk a véges növekmények formuláját a h függvényre és az $[a, x]$ szakaszra.

$$\|h(x) - h(a)\| = \|h(x)\| \leq \left(\sup_{z\in]a,x[} \|(\mathrm{D}h)(z)\| \right) \|x-a\| \leq \varepsilon \left(\sup_{z\in]a,x[} \|z-a\|^n \right) |x-a| < \varepsilon \|x-a\|^{n+1}$$

Vagyis megmutattuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\left\| \frac{h(x)}{\|x-a\|^{n+1}} \right\| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a bizonyítandó

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{\|x-a\|^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n+1,a}^{f}(x)}{\|x-a\|^{n+1}} = 0$$

határértéket jelenti.

17.12. Lokális szélsőérték jellemzése

17.44. Definíció. Legyen U normált tér $f : U \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Az f *függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
- Az f *függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

17.45. Tétel. *Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(a) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ és minden $x \in B_r(a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$. Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést. Tegyük fel, hogy létezik olyan $v \in V$ vektor, melyre $Av \neq 0$ teljesül, és legyen $q = Av$.
A 17.10 tétel alapján ekkor

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = q.$$

Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $|t| \cdot \|v\| < r$, akkor az $a + tv \in B_r(a)$ tartalmazás miatt

$$f(a+tv) - f(a) \leq 0.$$

Tehát $t \in \left]0, \dfrac{r}{\|v\|}\right[$ esetén

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \leq 0,$$

illetve $t \in \left]-\dfrac{r}{\|v\|}, 0\right[$ esetén

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \geq 0.$$

Vagyis az

$$0 \leq \lim_{t\to 0-} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \leq 0$$

egyenlőtlenségekből a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t} = q = 0$ ellentmondást kaptuk. Tehát nem létezik olyan v vektor, amire $Av \neq 0$ teljesülne, tehát $A = 0$.
Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek ott lokális maximuma van, vagyis az előző gondolatmenet alapján $(\mathrm{D}(-f))(a) = 0$, amiből $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ adódik.

17.46. Tétel. *Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in U$ és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n)}f)$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a) \neq 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor n páros és a $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor n páros és a $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a)$ multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a)$ multilineáris leképezés szigorúan negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in U$ és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n)}f)$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a) \neq 0$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_r(a) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n-1)}f)$ teljesül. Vezessük be a $Q = (\mathrm{D}^{(n)}f)(a)$ jelölést és az

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{\|x-a\|^n}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a \end{cases}$$

függvényt. Az infinitezimális Taylor-formula alapján $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a)$, vagyis a φ függvény folytonos az a pontban, az a ponton kívül pedig nyilvánvalóan folytonos. A deriváltakra vonatkozó feltételezés alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)\,\|x-a\|^n + \frac{1}{n!} Q(x-a)^{[n]} \tag{17.10}$$

teljesül.
1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $\delta \in]0, r[$ olyan szám, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ teljesül. Ekkor a (17.10) egyenlet alapján minden $x \in B_\delta(a)$ pontra

$$\varphi(x) \|x-a\|^n + \frac{1}{n!} Q(x-a)^{[n]} \leq 0.$$

Legyen $v \in U \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor. Ekkor minden $t \in \left[0, \frac{\delta}{\|v\|}\right[$ esetén az $x = a + tv$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, vagyis az előző egyenlet alapján

$$\varphi(a+tv) \|v\|^n t^n + \frac{t^n}{n!} Q(v)^{[n]} \leq 0,$$

azaz

$$n!\varphi(a+tv) \|v\|^n + Q(v)^{[n]} \leq 0.$$

Végrehajtva a $t \to 0$ határátmenetet

$$Q(v)^{[n]} \leq 0$$

adódik, vagyis Q negatív. A Young-tétel alapján Q szimmetrikus is, ezért a 14.60 tétel alapján n páros.
2. Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek lokális maximuma van ott és az 1. pontban igazolt eredmény alapján ekkor Q pozitív leképezés lesz.
3. Tegyük fel, hogy a Q leképezés szigorúan pozitív. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $v \in U$ vektorra $Q(v)^{[n]} \geq K \|v\|^n$ teljesül. Ekkor a (17.10) egyenlet alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) - \varphi(x) \|x-a\|^n = \frac{1}{n!} Q(x-a)^{[n]} \geq \frac{K}{n!} \|x-a\|^n,$$

vagyis

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^n \left(\varphi(x) + \frac{K}{n!}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, ezért létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \frac{K}{2n!}$. Ekkor minden ilyen x vektorra

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^n \left(\varphi(x) + \frac{K}{n!}\right) > \|x-a\|^n \left(-\frac{K}{2n!} + \frac{K}{n!}\right) \geq 0$$

teljesül, vagyis az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.
4. Ha $(\mathrm{D}^n f)(a)$ szigorúan negatív, akkor $(\mathrm{D}^n(-f))(a)$ szigorúan pozitív és a 3. pontban igazolt eredmény alapján ekkor a $-f$ függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban, tehát az f függvénynek szigorú lokális maximuma van ott.
5. Tegyük fel, hogy a Q leképezés indefinit. Legyen $v_1, v_2 \in U$ olyan vektor, melyre $Q(v_1)^{[n]} > 0$ és $Q(v_2)^{[n]} < 0$. Ha $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ $(i = 1, 2)$, akkor a multilinearitás miatt $Q(u_1)^{[n]} > 0$ és $Q(u_2)^{[n]} < 0$ teljesül. Legyen $\alpha_1 = Q(u_1)^{[n]}$ és $\alpha_2 = -Q(u_2)^{[n]}$. Ekkor minden $t \in [0, r[$ esetén ha $x_1 = a + tu_1$ és $x_2 = a + tu_2$, akkor $x_1, x_2 \in B_r(a)$, vagyis a (17.10) egyenlet alapján

$$f(x_1) - f(a) = t^n \left(\varphi(x_1) + \frac{\alpha_1}{n!}\right)$$
$$f(x_2) - f(a) = t^n \left(\varphi(x_2) - \frac{\alpha_2}{n!}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1, \delta_2 \in]0, r[$, hogy minden $x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \frac{\alpha_1}{2n!}$ és minden $x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \frac{\alpha_2}{2n!}$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor minden $t \in]0, \delta[$ esetén ha $x_1 = a + tu_1$ és $x_2 = a + tu_2$

$$f(x_1) - f(a) = t^n \left(\varphi(x_1) + \frac{\alpha_1}{n!}\right) > \frac{t^n \alpha_1}{2n!} > 0$$

$$f(x_2) - f(a) = t^n \left(\varphi(x_2) - \frac{\alpha_2}{n!}\right) < -\frac{t^n \alpha_2}{2n!} < 0.$$

Tehát az a pont bármely kis sugarú környezetében található olyan x_1 és x_2 vektor melyre $f(x_2) < f(a) < f(x_1)$ teljesül, ezért az f függvénynek nem lehet lokális szélsőértéke az a pontban.
6. Az 1. és a 2. pontból adódik.

17.13. Konvexitás differenciális jellemzése

17.47. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ konvex halmaz.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in [0, 1]$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$
teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvény szigorúan konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in]0, 1[$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$
- Az *f függvény konkáv az A halmazon*, ha $-f$ konvex az A halmazon.
- Az *f függvény szigorún konkáv az A halmazon*, ha $-f$ szigorúan konvex az A halmazon.
- Az *f függvény (szigorúan) konvex/konkáv*, ha f (szigorúan) konvex/konkáv a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

17.48. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Az f függvény konvex.*
2. *Minden $x, y \in \Omega$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) \leq f(y).$$
3. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.
$1 \Rightarrow 2$ Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Ekkor a konvexitás definíciója alapján minden $t \in]0, 1]$ esetén

$$f(x + t(y - x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)),$$

amiből

$$\frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x) \tag{17.11}$$

adódik. Mivel f differenciálható az x pontban, ezért ebben a pontban létezik az $e = y - x$ iránymenti deriváltja és a 12.12 tétel alapján $(\mathrm{D}_e f)(x) = ((\mathrm{D}f)(x))(e)$ teljesül. Az iránymenti derivált definíciója és a (17.11) képlet alapján ekkor

$$(\mathrm{D}_e f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

Ez pedig éppen az

$$((\mathrm{D}f)(x))(y - x) \leq f(y) - f(x)$$

egyenlőtlenséget jelenti.
$2 \Rightarrow 1$ Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, $t \in]0, 1[$ és definiáljuk a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor a feltételezés szerint

$$f(x) \geq f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(x - z)$$
$$f(y) \geq f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(y - z)$$

Az első egyenletet megszorozva t-vel, a másodikat $(1-t)$-vel és összeadva

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(z) + t((\mathrm{D}f)(z))(x - z) + (1-t)((\mathrm{D}f)(z))(y - z) =$$

$$= f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(tx + (1-t)y - z) = f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(0) = f(z) =$$
$$= f(tx + (1-t)y)$$

adódik.
$1 \Rightarrow 3$ Legyen $x \in \Omega$ és $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_R(x) \subseteq \Omega$ és legyen $r = \dfrac{R}{\|v\|}$. Tekintsük a

$$\alpha : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(x + tv)$$

függvényt. Az α függvény konvex, ugyanis ha $t_1, t_2 \in B_r(0)$ és $\lambda \in [0,1]$, akkor

$$\alpha(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(x + t_1 v) + (1-\lambda)(x + t_2 v)) \leq$$
$$\leq \lambda f(x + t_1 v) + (1-\lambda) f(x + t_2 v)) = \lambda\alpha(t_1) + (1-\lambda)\alpha(t_2).$$

Az α függvény kétszer deriválható és a deriválási szabályokból

$$\alpha'(t) = ((\mathrm{D}f)(x + tv))(v) \qquad \alpha''(t) = ((\mathrm{D}^{(2)}f)(x + tv))(v, v)$$

adódik. Az egyváltozós, kétszer differenciálható konvex függvények második deriváltja nem negatív, ezért

$$0 \leq \alpha''(0) = ((\mathrm{D}^{(2)}f)(x))(v, v).$$

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. A skalárértékű függvényekre vonatkozó Taylor-formula (a 12.48 tétel) alapján létezik olyan $z \in [x, y]$ pont, melyre

$$f(y) = f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y - x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y - x, y - x)$$

teljesül. Felhasználva $(\mathrm{D}^{(2)}f)(z)$ pozitivitását, ebből

$$f(y) - f(x) - (\mathrm{D}f)(x)(y - x) = \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y - x, y - x) \geq 0$$

következik, vagyis

$$f(y) \geq f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y - x).$$

17.49. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor szigorúan konvex, ha minden $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén*

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) < f(y)$$

2. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív definit, akkor f szigorúan konvex.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.
1. Tegyük fel, hogy f szigorúan konvex és $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Mivel f konvex, ezért a 17.48 tétel alapján

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) \leq f(y).$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy $f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) = f(y)$ teljesül. Az

$$\alpha : \{t \in \mathbb{R} |\ x + t(y - x \in \Omega)\} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(x + tv)$$

függvény konvex és kétszer differenciálható. Konvexitása miatt a deriváltja monoton növő, tehát

$$0 \leq \alpha' - \alpha'(0)$$
$$0 \leq \int_0^1 \alpha'(t) - \alpha'(0) = \alpha(1) - \alpha(0) - ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) = f(y) - f(x) - ((\mathrm{D}f)(x))(y - x).$$

A nem negatív $t \mapsto \alpha'(t) - \alpha(0)$ folytonos függvény integrálja csak akkor lehet nulla, ha minden pontban nulla a függvény. Ekkor viszont minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\int_0^t \alpha'(0) = \int_0^t \alpha' \tag{17.12}$$

$$t((\mathrm{D}f)(x))(y-x) = f(x + t(y-x)) - f(x). \tag{17.13}$$

A $t = \dfrac{1}{2}$ esetben ebből

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}f)(x))(y-x)$$

adódik, az f szigorú konvexitásából viszont az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = f(x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}f)(x))(y-x)$$

ellentmodás.
Most tegyük fel, hogy minden $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) < f(y).$$

Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, $t \in]0,1[$ és definiáljuk a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor a feltételezés szerint

$$\begin{aligned} f(x) &> f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(x-z) \\ f(y) &> f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(y-z) \end{aligned}$$

Az első egyenletet megszorozva t-vel, a másodikat $(1-t)$-vel és összeadva

$$\begin{aligned} tf(x) + (1-t)f(y) &> f(z) + t((\mathrm{D}f)(z))(x-z) + (1-t)((\mathrm{D}f)(z))(y-z) = \\ &= f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(tx + (1-t)y - z) = f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(0) = f(z) = \\ &= f(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

adódik.
2. Tegyük fel, hogy minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív definit. Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. A skalárértékű függvényekre vonatkozó Taylor-formula (a 12.48 tétel) alapján létezik olyan $z \in [x, y]$ pont, melyre

$$f(y) = f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x)$$

teljesül. Felhasználva $(\mathrm{D}^{(2)}f)(z)$ pozitív definitségét, ebből

$$f(y) - f(x) - (\mathrm{D}f)(x)(y-x) = \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x) > 0$$

következik, vagyis

$$f(y) > f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x).$$

Viszont ebből az 1. pont alapján következik, hogy f szigorúan konvex.

18. Fourier-sorok

18.1. Trigonometrikus polinomok

Jelölés. A jelen fejezetben különösen sokat fogjuk használni a

$$C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \triangleq \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{K}) |\ \forall x \in \mathbb{R}:\ f(x) = f(x+2\pi)\}$$

jelölést.

18.1. Definíció. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények

$$\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \triangleq \left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \ \middle|\ n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0,\dots,n\} : a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

részhalmazát *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.

18.2. Tétel. *(A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságai.)*

1. *A pontonkénti műveletekkel $\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ algebrát alkot.*
2. *Minden $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom esetén $P \circ \cos \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
3. *Minden $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén a $t \mapsto f(t+x)$ függvény is trigonometrikus polinom.*

Bizonyítás.
1. A trigonometrikus polinomok halmaza az összeadásra és a számmal való szorzásra nyilván zárt, a szorzásra pedig a minden $k, l \in \mathbb{N}$ és $t \in \mathbb{R}$ számra érvényes

$$\begin{aligned}
\sin(kt)\sin(lt) &= \frac{1}{2}\cos((k-l)t) - \frac{1}{2}\cos((k+l)t) \\
\sin(kt)\cos(lt) &= \frac{1}{2}\sin((k-l)t) + \frac{1}{2}\sin((k+l)t) \\
\cos(kt)\cos(lt) &= \frac{1}{2}\cos((k-l)t) + \frac{1}{2}\cos((k+l)t)
\end{aligned}$$

addíciós formulák miatt zárt.
2. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\cos^n$ trigonometrikus polinom. Az $n = 0$ és $n = 1$ esetekben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\cos^n$ trigonometrikus polinom. Ekkor a $\cos^n$ trigonometrikus polinomot megszorozva a cos trigonometrikus polinommal, az 1. pont értelmében megint trigonometrikus polinomot kapunk, tehát $\cos^{n+1}$ is trigonometrikus polinom. Ebből az 1. pont alkalmazásával adódik, hogy minden P polinomra $P \circ \cos$ trigonometrikus polinom.
3. A minden $t, x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számra fennálló

$$\begin{aligned}
\sin(k(t+x)) &= \cos(kx)\sin(kt) + \sin(kx)\cos(kt) \\
\cos(k(t+x)) &= \cos(kx)\cos(kt) - \sin(kx)\sin(kt)
\end{aligned}$$

azonosságokból következik az állítás.

18.3. Tétel. *(Weierstrass approximációs tétele.) Minden $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ függvényhez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, melyre $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ teljesül.*

Bizonyítás. Több lépésben bizonyítjuk a tételt.
1. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ páros függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f \circ \arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és a 11.27 tétel szerint létezik olyan $p : [-1,1] \to \mathbb{R}$ polinom, hogy

$$\sup_{t \in [-1,1]} |f(\arccos(t)) - p(t)| < \varepsilon$$

teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a $\varphi = p \circ \cos$ függvény trigonometrikus polinom. Mivel az f és a φ függvény 2π szerint periodikus, ezért

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)| = \sup_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x) - \varphi(x)|,$$

valamint mivel az f és a φ függvény páros, ezért

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)-\varphi(x)| = \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)-\varphi(x)|\,.$$

Minden $x\in[0,\pi]$ esetén $\arccos\cos x = x$ és minden $t\in[-1,1]$ esetén $\cos\arccos t = t$, ezért

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)-\varphi(x)| &= \sup_{x\in[0,\pi]} |(f\circ\arccos)(\cos x) - ((p\circ\cos)\circ\arccos)(\cos x)| = \\ &= \sup_{t\in[-1,1]} |(f\circ\arccos)(t) - p(t)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

vagyis $\|f-\varphi\|_\infty < \varepsilon$.
2. Legyen $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Most megmutatjuk, hogy létezik olyan $\varphi\in\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, melyre $\left\|f\sin^2-\varphi\right\|_\infty<\varepsilon$ teljesül. Legyen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}\\ f_2 &: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x.\end{aligned}$$

Ekkor $f\sin^2 = f_1\sin^2+f_2\sin$, valamint $f_1,f_2\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ páros 2π szerint periodikus függvények, vagyis az 1. pont alapján létezik olyan φ_1,φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|f_1-\varphi_1\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$ és $\|f_2-\varphi_2\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a $\varphi=\varphi_1\sin^2+\varphi_2\sin$ függvény trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\begin{aligned}\left\|f\sin^2-\varphi\right\|_\infty &= \left\|f_1\sin^2+f_2\sin-(\varphi_1\sin^2+\varphi_2\sin)\right\|_\infty \le\\ &\le \left\|f_1\sin^2-\varphi_1\sin^2\right\|_\infty + \|f_2\sin-\varphi_2\sin\|_\infty \le\\ &\le \|f_1-\varphi_1\|_\infty+\|f_2-\varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

teljesül.
3. Legyen $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan φ trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f\cos^2-\varphi\right\|_\infty<\varepsilon$ teljesül. Legyen

$$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad x\mapsto f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Ekkor $f_1\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, vagyis az 2. pont alapján létezik olyan φ_1 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f_1\sin^2-\varphi_1\right\|_\infty<\varepsilon$ teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad x\mapsto\varphi_1\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

függvény trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\begin{aligned}\left\|f\cos^2-\varphi\right\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)\cos^2x-\varphi(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| =\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_1(x)\sin^2(x)-\varphi_1\right| = \left\|f_1\sin^2-\varphi_1\right\|_\infty<\varepsilon\end{aligned}$$

teljesül.
4. Legyen $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 2. pont alapján létezik olyan φ_1 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f\sin^2-\varphi_1\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$; a 3. pont alapján létezik olyan φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f\cos^2-\varphi_2\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$. Ekkor

$$\|f-\varphi\|_\infty = \left\|f\sin^2+f\cos^2-\varphi_1-\varphi_2\right\|_\infty \le \left\|f\sin^2-\varphi_1\right\|_\infty+\left\|f\cos^2-\varphi_2\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

5. Végül legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 4. pont alapján létezik olyan φ_1 és φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|\operatorname{Re} f - \varphi_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|\operatorname{Im} f - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $\varphi = \varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2$. Ekkor

$$\|f - \varphi\|_\infty = \|(\operatorname{Re} f - \varphi_1) + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f - \varphi_2)\|_\infty < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} < \varepsilon.$$

18.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer

18.4. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$.
1. Ekkor kihasználva, hogy a sin függvény 2π szerint periodikus

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_a^{a+2\pi} = \frac{\sin(ka) - \sin(ka + k2\pi)}{k} = 0$$

adódik. Hasonlóan igazolható, hogy $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$.
2. A minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ számra érvényes $\cos(2kx) = \cos^2(kx) - \sin^2(kx)$ és $\sin^2(kx) + \cos^2(kx) = 1$ formulából az 1. pont eredményének a felhasználásával

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} 1 + \cos(2kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} 1 - \cos(2kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

adódik.
3. A trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós tételek és az 1. pont alapján

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \cos((k+l)x) + \cos((k-l)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \cos((m-l)x) - \cos((l+m)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \sin((m+k)x) + \sin((k-m)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

adódik.

18.5. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az*

$$S_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \,\mathrm{d}\, t, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \,\mathrm{d}\, t$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az $S_n(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $[0, 2\pi]$ intervallumon az f határfüggvényhez, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0$$

teljesül. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t)\sin(kt) - f(t)\sin(kt)| &\le \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)|\,|\sin(kt)| \le \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0, \\
\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t)\cos(kt) - f(t)\cos(kt)| &\le \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)|\,|\cos(kt)| \le \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0,
\end{aligned}$$

vagyis a $t \mapsto S_n(t)\sin(kt)$ és a $t \mapsto S_n(t)\cos(kt)$ függvénysorozat is egyenletesen konvergál a $t \mapsto f(t)\sin(kt)$ és a $t \mapsto f(t)\cos(kt)$) függvényhez. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $S_n(t)\sin(kt)$ illetve az $S_n(t)\cos(kt)$ függvény folytonos, ezért a 11.17 tétel értelmében

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt) \;\,\mathrm{d}\, t &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\cos(kt) \;\,\mathrm{d}\, t \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt) \;\,\mathrm{d}\, t &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\sin(kt) \;\,\mathrm{d}\, t,
\end{aligned}$$

továbbá a trigonometrikus függvények integráljáról szóló 18.4 tétel miatt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\cos(kt) \;\,\mathrm{d}\, t &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{lll} 0, & \text{ha} & n < k; \\ \pi a_k & \text{ha} & n \ge k; \end{array} \right\} = \pi a_k \\
\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\sin(kt) \;\,\mathrm{d}\, t &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{lll} 0, & \text{ha} & n < k; \\ \pi b_k & \text{ha} & n \ge k; \end{array} \right\} = \pi b_k
\end{aligned}$$

amiből következik az állítás.

18.6. Tétel. *A $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vektortéren tekintsük a*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \times C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \to \mathbb{R} \qquad (f, g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g$$

leképezést.

1. *A fent definiált művelet skaláris szorzás.*
2. *A*

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

vektorrendszer ortonormált és teljes.

3. A

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

vektorrendszer ortonormált és teljes.

Bizonyítás. 1. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a definiált művelet teljesíti a skaláris szorzás kritériumait.
2. Legyen $k, l \in \mathbb{Z}$. Ha $k \neq l$, akkor a 18.4 tétel alapján

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,lx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kx) - \mathrm{i}\sin(kx))(\cos(lx) + \mathrm{i}\sin(lx))\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx) + \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx) - \sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

ami mutatja, hogy a függvényrendszer ortogonális. A minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén fennálló

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\,x = 1$$

egyenlet pedig mutatja, hogy a függvényrendszer normált.
3. Legyen $k, l \in \mathbb{N}^+$. Ha $k \neq l$, akkor a 18.4 tétel alapján

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \right\rangle = 0$$

ami mutatja, hogy a 2. pontban megadott függvényrendszer ortogonális. Szintén a 18.4 tétel alapján a

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = 1$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \right\rangle = 1$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \right\rangle = 1$$

összefüggések pedig azt mutatják, hogy a megadott függvényrendszer normált.
4. Most igazoljuk, hogy az 1. illetve a 2. pontban megadott függvényrendszer teljessége ekvivalens. Ehhez először tegyük fel, hogy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \right\rangle = 0$$

teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0\cdot x} \right\rangle = 0$$
$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nx} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nx}\right\rangle = 0$$

teljesül. Tehát ha f merőleges a

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

vektorhalmaz minden elemére, akkor merőleges az összes

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

vektorra is.
Fordítva, tegyük fel, hogy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy merőleges a

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

vektorhalmaz összes elemére. Ekkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\rangle + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\rangle = 0, & \text{ha,} \quad n > 0; \\ 0, & \text{ha,} \quad n = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\rangle = 0, & \text{ha,} \quad n < 0 \end{cases}$$

teljesül, tehát f merőleges minden

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

vektorra.
5. Most megmutatjuk, hogy a megadott függvényrendszer teljes. Ehhez tegyük fel, hogy létezik olyan nem azonosan nulla $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\langle f(x), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\rangle = 0$ teljesül. Mivel f nem azonosan nulla, ezért $0 < \int_0^{2\pi} |f|^2$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A 18.3 Weierstrass approximációs tétele szerint létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, hogy minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Ekkor viszont a 15.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 = \int_0^{2\pi} (\overline{f} - \overline{\varphi})f = \langle f - \varphi, f\rangle \le \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f|^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f - \varphi|^2\right)} < \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f|^2\right)} \cdot \sqrt{2\pi}\varepsilon,$$

adódik, amiből viszont

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2} < \sqrt{2\pi}\varepsilon$$

következik. Mivel ez minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül, ezért ebből a $\int_0^{2\pi} |f|^2 = 0$ ellentmondás adódik.

18.3. Függvény Fourier-sora

18.7. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

számokat. Az f *függvény* $x \in \mathbb{R}$ *pontbeli Fourier-sorának* nevezzük a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor $n-$ *edik részletösszeg-függvényének* nevezzük az

$$S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

függvényt.

18.8. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \\ b_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

teljesül. Továbbá a $D_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^{(k)} \right|$ jelölés mellett minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_n| \leq \frac{D_k}{n^k} \qquad |b_n| \leq \frac{D_k}{n^k}.$$

Bizonyítás. A $k = 0$ esetben a Fourier-együtthatók definíciója alapján teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, és legyen $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a parciális integrálás felhasználásával

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t = \\ =& \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \left(\left[f^{(k)}(t) \frac{1}{n} \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \right) = \\ =& \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \cos\left(nt - (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

adódik, ami mutatja, hogy a $k+1$ számra is igaz az állítás. A b_n együtthatókra teljesen hasonlóan igazolható az állítás. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \right| \leq \frac{1}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^{(k)}(t) \right| \cdot \left| \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \right| \mathrm{d}\, t \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^{(k)}(t) \right| \mathrm{d}\, t = \frac{D_k}{n^k} \end{aligned}$$

teljesül. A b_n együtthatókra teljesen hasonlóan igazolható az egyenlőtlenség.

18.9. Tétel. *Minden $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ekkor f'' és $|f''|$ is folytonos függvény, tehát integrálható. Tekintsük a

$$D = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''|$$

számot. A 18.8 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra

$$|a_n| \leq \frac{D}{n^2} \qquad |b_n| \leq \frac{D}{n^2}$$

teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Ekkor a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \le |a_n| + |b_n| \le \frac{2D}{n^2}$$

becslés alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \le 2D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

adódik, vagyis a $\sum_n f_n$ függvénysorra alkalmazható a 16.17 Weierstrass-tétel, ezért a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen is konvergens. Mivel minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

ezért az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergens, továbbá a $g = \lim_{n\to\infty} S_n$ határfüggvény folytonos is. Az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergenciája miatt a 18.5 tétel alapján a g függvény Fourier-együtthatóira minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) \,\mathrm{d}\, x, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx) \,\mathrm{d}\, x$$

adódik, vagyis a $h = f - g$ folytonos függvény összes Fourier-együtthatója nulla. Ebből a trigonometrikus rendszer teljességéről szóló 18.6 tétel alapján $h = 0$ adódik.

18.4. Riemann–Lebesgue-lemma

18.10. Tétel. *(Riemann–Lebesgue-lemma.) Minden $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ függvényre*

$$\lim_{a\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(at) \,\mathrm{d}\, t = \lim_{a\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(at) \,\mathrm{d}\, t = 0.$$

Bizonyítás. A bizonyítást két lépésben végezzük.
1. Legyen $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$, $\alpha < \beta$ és $a \in \mathbb{R}^+$. Ekkor

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin(at) \,\mathrm{d}\, t \right| = \left| \frac{\cos(a\alpha) - \cos(a\beta)}{a} \right| \le \frac{2}{a}$$

Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ a $[-\pi, \pi]$ intervallum felosztása és minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén legyen $c_i \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Tekintsük a

$$g = \sum_{k=0}^{n-2} c_k \chi_{[x_k, x_{k+1}[} + c_{n-1} \chi_{[x_{n-1}, x_n]}$$

függvényt, azaz

$$g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \begin{cases} c_k, & \text{ha} \quad t \in [x_k, x_{k+1}[\,; \\ c_{n-1}, & \text{ha} \quad t \in [x_{n-1}, x_n]\,, \end{cases}$$

és legyen $c = \max\{|c_i| \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$. Ekkor

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(at) \,\mathrm{d}\, t \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k \sin(at) \,\mathrm{d}\, t \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \cdot \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin(at) \,\mathrm{d}\, t \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} c \cdot \frac{2}{a} = \frac{2nc}{a}$$

teljesül.
2. Legyen $f \in \mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Az f függvény integrálható lévén korlátos, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [-\pi,\pi]$ számra $|f(t)| < K$ teljesül. Az integrálhatóság definíciója alapján ekkor létezik a $[-\pi,\pi]$ intervallumnak olyan $I = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ felosztása, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} f - s_I(f) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Minden $k \in \{0,\dots,n-1\}$ esetén legyen $c_k = \inf\limits_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)$ és tekintsük a

$$g = \sum_{k=0}^{n-2} c_k \chi_{[x_k,x_{k+1}[} + c_{n-1}\chi_{[x_{n-1},x_n]}$$

függvényt. Ekkor a $[-\pi,\pi]$ intervallumon $g \le f$ teljesül, valamint az $\int_{-\pi}^{\pi} g = s_I(f)$ összefüggés miatt a $\int_{-\pi}^{\pi} f - s_I(f) < \frac{\varepsilon}{2}$ egyenlőtlenséget a $\int_{-\pi}^{\pi} (f-g) < \frac{\varepsilon}{2}$ alakban is fel lehet írni. Továbbá minden $k \in \{0,\dots,n-1\}$ esetén $|c_k| \le K$. Az 1. pont eredményét felhasználva az alábbi becsléseket végezhetjük.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-g(t)+g(t))\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \\
&\le \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-g(t))\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} |(f(t)-g(t))\sin(at)|\,\mathrm{d}\,t + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} f(t)-g(t)\,\mathrm{d}\,t + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nK}{a}.
\end{aligned}$$

Ezek alapján minden $a \in \left]\frac{4nK}{\varepsilon},\infty\right[$ számra

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

Az $a \to -\infty$ határátmenetet tekintve a sin függvény páratlansága miatt nem változik az eredmény. Továbbá a sin függvény helyett a cos függvényből kiindulva teljesen hasonlóan igazolható a

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(at)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

határérték is.

18.5. Dirichlet-féle magfüggvény

18.11. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & ha \quad \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1+2n, & ha \quad \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$. Ha létezik olyan $m \in \mathbb{Z}$, melyre $x = m2\pi$, akkor minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\cos(kx) = \cos(km \cdot 2\pi) = 1$, vagyis

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 2n.$$

Legyen most $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Ekkor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \neq 0$ és a következő átalakítások bizonyítják a tételt.

$$\begin{aligned}
1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = 1 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^k = 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right) = \\
&= 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\right) = 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\right) = \\
&= 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\right) = 1 - \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \mathrm{i}\right) = \\
&= 1 + \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}\right) = \\
&= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

18.12. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1 + 2n, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

A $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényeket *Dirichlet-féle magfüggvényeknek* nevezzük.

18.13. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a D_n függvény folytonos, valamint $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 2\pi$.*

Bizonyítás. A D_0 függvényre nyilván teljesül az állítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, ekkor a minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennálló

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

azonosság miatt a D_n függvény folytonos, valamint

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = 2\pi.$$

18.14. Tétel. *(Konvolúció a Dirichlet-féle magfüggvénnyel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x - y)\,\mathrm{d}\,y. \tag{18.1}$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, valamint legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges pont. Az $n = 0$ esetben a (18.1) képlet a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,\mathrm{d}\,y$$

alakú lesz az S_0 illetve D_0 definíciója alapján, ami a_0 definíciója miatt nyilván igaz.
Most legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az alábbi átalakítások igazolják az állítást.

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,\mathrm{d}\,y + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)\,\mathrm{d}\,y\right)\cos(kx) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)\,\mathrm{d}\,y\right)\sin(kx) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(ky)\cos(kx) + \sin(ky)\sin(kx)\right)\mathrm{d}\,y = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-y))\right)\mathrm{d}\,y = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x-y)\,\mathrm{d}\,y
\end{aligned}$$

18.6. Dirichlet-féle lokalizációs tétel

18.15. Tétel. *(Dirichlet-féle lokalizációs tétel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül, továbbá legyen $x_0, A \in \mathbb{R}$ olyan paraméter, melyre a*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2A}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens a x_0 pontban és a sor összege A; azaz

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = A.$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, továbbá legyen $x_0, A \in \mathbb{R}$ olyan paraméter, melyre a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2A}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor a 18.14 tétel alapján

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x_0-y)\,\mathrm{d}\,y.$$

Az integrálnál kihasználva, hogy a D_n függvény páros, az f és a D_n függvény 2π szerint periodikus, valamint bevezetve a $v = y - x_0$ és az $u = x_0 - y$ változókat

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x_0-y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(v+x_0)D_n(v)\,\mathrm{d}\,v = \int_{-\pi}^{\pi} f(v+x_0)D_n(v)\,\mathrm{d}\,v$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x_0-y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_0+\pi}^{x_0-\pi} -f(x_0-u)D_n(u)\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-u)D_n(u)\,\mathrm{d}\,u$$

adódik. Mivel $A = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} AD_n(v)\,\mathrm{d}\,v$, ezért

$$S_n(x_0) - A = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+v)D_n(v)\,\mathrm{d}\,v + \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-v)D_n(v)\,\mathrm{d}\,v - 2\int_{-\pi}^{\pi} AD_n(v)\,\mathrm{d}\,v\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x_0+v)+f(x_0-v)-2A\right) D_n(v)\,\mathrm{d}\,v = \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+v)+f(x_0-v)-2A}{v}\cdot v\cdot \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)v\right)}{\sin\frac{v}{2}}\,\mathrm{d}\,v = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(v)\cdot\frac{\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}\cdot\sin\left(\frac{2n+1}{2}v\right)\mathrm{d}\,v.
\end{aligned}
$$

Mivel a

$$
\rho:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R} \qquad v\mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}, & \text{ha} \quad v\neq 0; \\ 1, & \text{ha} \quad v=0 \end{cases}
$$

függvény folytonos, ezért integrálható is, továbbá a tétel feltétele miatt a φ függvény is integrálható, ezért szorzatuk is integrálható. Erre a szorzatra alkalmazva a 18.10 Riemann–Lebesgue-lemmát, adódik a bizonyítandó

$$
\lim_{n\to\infty}\left(S_n(x_0)-A\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\varphi(v)\cdot\frac{\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}\right)\cdot\sin\left(\frac{2n+1}{2}v\right)\mathrm{d}\,v = 0
$$

határérték.

18.16. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 1. következménye.) Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]}\in\mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$, és legyen $x_0\in\mathbb{R}$ olyan pont, hogy f differenciálható az x_0 pontban. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens a x_0 pontban és a sor összege $f(x_0)$; azaz*

$$
a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx_0)+b_k\sin(kx_0) = f(x_0).
$$

Bizonyítás. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]}\in\mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, valamint legyen $x_0\in\mathbb{R}$ olyan pont, hogy ott f differenciálható. Legyen

$$
\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2f(x_0)}{x}, & \text{ha} \quad x\neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x=0. \end{cases}
$$

Megmutatjuk, hogy a φ függvény integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon és ebből már következik az állítás a 18.15 Dirichlet-féle lokalizációs tétel alapján. Mivel φ páratlan, ezért elég azt igazolni, hogy φ integrálható a $[0,\pi]$ intervallumon, hiszen ekkor a $[-\pi,0]$ intervallumon is integrálható lesz, és ekkor a 9.22 tétel alapján integrálható lesz a $[-\pi,\pi]$ intervallumon is.
A φ függvény $[0,\pi]$ intervallumon való integrálhatóságát úgy igazoljuk, hogy megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $I=(x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztása a $[0,\pi]$ intervallumnak, hogy a hozzá tartozó $\Omega_I(\varphi)$ oszcillációs összeg kisebb mint ε. Legyen tehát $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a 7.4 tétel szerint

$$
\forall\varepsilon^*\in\mathbb{R}^+\exists\delta^*\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}: \quad \left(|x|<\delta^* \;\to\; |f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x|<\varepsilon^*\cdot|x|\right).
$$

Az $\varepsilon^*=\dfrac{\varepsilon}{4}$ számhoz tehát létezik olyan $\delta^*\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ számra $|x|<\delta^*$ esetben

$$
|f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot|x|
$$

teljesül. Legyen $\delta=\dfrac{\min\{1,\delta^*\}}{2}$. Ha $x\in\,]0,\delta]$, akkor

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x)| &= \left|\frac{(f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x)+(f(x_0-x)-f(x_0)-f'(x_0)(-x))}{x}\right| \leq \\
&\leq \frac{|f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x|+|f(x_0-x)-f(x_0)-f'(x_0)(-x)|}{|x|} \leq
\end{aligned}
$$

$$< \frac{\frac{\varepsilon}{4}|x| + \frac{\varepsilon}{4}|x|}{|x|} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $\varphi(0) = 0$, ezért minden $x \in [0, \delta]$ számra $|\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha a $[0, \delta]$ intervallumot csak egy részre osztjuk fel, azaz $I_1 = (x_0, x_1) = (0, \delta)$, akkor a hozzá tartozó oszcillációs összegre

$$\Omega_{I_1}(\varphi) = (\sup_{t\in[0,\delta]} \varphi(t) - \inf_{t\in[0,\delta]} \varphi(t)) \cdot (\delta - 0) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. A $[\delta, \pi]$ intervallumon az $x \mapsto f(x_0+x)$, az $x \mapsto f(x_0-x)$ és az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény integrálható, tehát összegük és szorzatuk is integrálható, ezért itt a φ függvény is integrálható. Vagyis létezik olyan I_2 felosztása a $[\delta, \pi]$ intervallumnak, hogy a hozzá tartozó $\Omega_{I_2}(\varphi)$ oszcillációs összeg kisebb mint $\frac{\varepsilon}{2}$. Legyen I a $[0, \pi]$ azon felosztása mely tartalmazza a végpontokat és az I_2 felosztás osztópontjait. Ekkor

$$\Omega_I(\varphi) = \Omega_{I_1}(\varphi) + \Omega_{I_2}(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\varphi \in \mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$ teljesül.

18.17. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 2. következménye.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, differenciálható függvény. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ pontban, és ott a sor összege $f(x)$; azaz*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = f(x).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, differenciálható függvény. Ekkor f folytonos, tehát integrálható, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ pont esetén alkalmazható rá a 18.16 tétel.

18.18. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 3. következménye.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül, valamint legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, melyre létezik a $\lim\limits_{x_0\pm} f$ határérték. Ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a*

$$\varphi_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x}, & ha \quad x \neq 0; \\ 0, & ha \quad x = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_- : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x}, & ha \quad x \neq 0; \\ 0, & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény integrálható a $[0, r]$ intervallumon, akkor az f függvény Fourier-sora konvergens az x_0 pontban és a sor összege $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x_0+} f + \lim\limits_{x_0-} f\right)$; azaz

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x_0+} f + \lim_{x_0-} f\right).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, valamint legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, melyre létezik a $\lim\limits_{x_0\pm} f$ határérték. Tekintsük a

$$\varphi_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_- : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvényeket és tegyük fel, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi_+, \varphi_- \in \mathcal{R}([0, r], \mathbb{R})$ teljesül. Legyen

$$A = \frac{1}{2}\left(\lim_{x_0+} f + \lim_{x_0-} f\right)$$

és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2A}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Ekkor minden $x \in [0, \pi]$ számra

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x)$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy a φ függvény integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon és ebből már következik az állítás a 18.15 Dirichlet-féle lokalizációs tétel alapján.

Az $[r, \pi]$ intervallumon az $x \mapsto f(x_0 + x)$, az $x \mapsto f(x_0 - x)$ és az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény integrálható, tehát összegük és szorzatuk is integrálható, ezért itt a φ_+ és a φ_- függvény is integrálható. Tehát az összegük φ is integrálható itt. A feltétel szerint φ_+ és φ_- integrálható a $[0, r]$ intervallumon, ezért φ is integrálható itt. A 9.22 tétel alapján tehát φ integrálható a $[0, \pi]$ intervallumon is. Továbbá mivel φ páratlan, ezért a $[-\pi, 0]$ intervallumon is integrálható, vagyis megint a 9.22 tételre hivatkozva azt kapjuk, hogy φ integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

18.19. Tétel. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Bizonyítás. Legyen f olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, melyre minden $x \in [-\pi, \pi[$ esetén $f(x) = (x + \pi)^2$ teljesül és legyen $x_0 = -\pi$. Ekkor $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, mert csak egy pontban (nulla mértékű halmazon) nem folytonos, valamint

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = 4\pi^2.$$

Tekintsük a

$$\varphi_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_- : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvényeket. Ekkor minden $x \in [0, \pi]$ esetén

$$\varphi_+(x) = \frac{f(x_0 + x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x} = \frac{x^2 - 0}{x} = x$$

$$\varphi_-(x) = \frac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x} = \frac{f(-\pi - x) - 4\pi^2}{x} = \frac{f(\pi - x) - 4\pi^2}{x} = x - 4\pi$$

teljesül, vagyis a φ_+ és a φ_- függvény integrálható a $[0,\pi]$ intervallumon, ezért a 18.18 Dirichlet-tétel 3. következménye alapján az f függvény Fourier-sora konvergens az x_0 pontban és a sor összege

$$A = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0+} f(x) + \lim_{x\to x_0-} f(x)\right) = 2\pi^2.$$

Az f függvény Fourier-együtthatóira kétszeres parciális integrálás után

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{4\pi^2}{3}\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{4(-1)^k}{k^2} \qquad k\in\mathbb{N}^+\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{4\pi(-1)^{k+1}}{k} \qquad k\in\mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

adódik. Mivel minden $k\in\mathbb{N}^+$ esetén $\sin(kx_0)=0$ és $\cos(kx_0)=(-1)^k$, ezért az f függvény Fourier-sorára az x_0 pontban

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cdot(-1)^k = 2\pi^2$$

teljesül az eddigiek alapján, amiből rögtön adódik a bizonyítandó egyenlőség.

18.7. Fejér-féle magfüggvény

18.20. Tétel. *Minden $n\in\mathbb{N}$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\cdot x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi}\notin\mathbb{Z};\\ 1+n, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi}\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az $n=0$ esetben nyilván igaz az állítás. Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és $x\in\mathbb{R}$. Ha $\dfrac{x}{2\pi}\in\mathbb{Z}$, akkor minden $k\in\{0,\dots,n\}$ esetén $D_k(x)=1+2k$, vagyis

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(1+2k) = \frac{1}{n+1}\left(n+1+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1+n.$$

Ha $\dfrac{x}{2\pi}\notin\mathbb{Z}$, akkor minden $k\in\{0,\dots,n\}$ esetén

$$D_k(x) = \frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

vagyis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k+\frac{1}{2}\right)x} =\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^k\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-1}\right) =\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\right) =\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\right)\cdot\mathrm{i}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\operatorname{Re}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \left(1 - \cos((n+1)x)\right).$$

Legyen $a = (n+1)x$. Ekkor az

$$1 - \cos a = 1 - \cos\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

átalakítások után

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} \cdot x\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

adódik.

18.21. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right) x}{\sin^2 \frac{x}{2}}, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1+n, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényeket *Fejér-féle magfüggvényeknek* nevezzük. indexFejér-féle magfüggvény

18.22. Tétel. *(A Fejér-féle magfüggvény tulajdonságai.)*

1. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n = 1$.*
2. *Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén $F_n(x) \geq 0$.*
3. *Minden $\delta \in]0, \pi[$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) \,\mathrm{d}\, x = 0.$$

Bizonyítás. 1. Az $n = 0$ esetben nyilván igaz az állítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Felhasználva, hogy minden $j \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \,\mathrm{d}\, x = 0$$

teljesül az alábbi átalakítások igazolják az állítást.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) \,\mathrm{d}\, x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx) \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 2\pi = 1$$

2. A Fejér-féle magfüggvény definíciójából rögtön adódik.
3. Mivel a Fejér-féle magfüggvény a definíció alapján nyilván páros, így elég megmutatni, hogy minden $\delta \in]0, \pi[$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} F_n(x) \,\mathrm{d}\, x = 0$$

teljesül. Ehhez rögzítsünk egy $\delta \in]0, \pi[$ számot. Az F_n függvények definíciója alapján ha $x \in [\delta, \pi]$, akkor

$$F_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Ha tudnánk, hogy a

$$K = \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\, x$$

integrál véges, vagyis $K < \infty$, akkor készen lennénk a bizonyítással a

$$\begin{aligned} 0 \leq & \quad F_n(x) & \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ 0 = \int_\delta^\pi 0 \,\mathrm{d}\, x \leq & \quad \int_\delta^\pi F_n(x) \,\mathrm{d}\, x & \leq \frac{1}{n+1} \cdot \int_\delta^\pi \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{n+1} \cdot K \\ 0 \leq & \quad \lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi F_n(x) \,\mathrm{d}\, x & \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot K = 0 \end{aligned}$$

átalakítások miatt. A $\sin^2 \frac{x}{2}$ függvény monoton növő a $[\delta, \pi]$ intervallumon, vagyis minden $x \in [\delta, \pi]$ esetén

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} \leq \sin^2 \frac{x}{2},$$

amiből

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

következik, vagyis

$$K = \int_\delta^\pi \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\, x \leq \int_\delta^\pi \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi - \delta}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} < \infty.$$

18.23. Tétel. *(Konvolúció a Fejér-féle magfüggvénnyel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \tag{18.2}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x).$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Az $n = 0$ esetben a (18.2) egyenlet az

$$S_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_0(y) \,\mathrm{d}\, y$$

alakban írható, ami az $S_0(x) = a_0$ és $F_0(y) = 1$ formulák felhasználásával éppen az a_0 Fourier-együttható definíciójára vezet.
Most legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor a 18.14 és a 18.20 tétel felhasználásával az alábbi átalakításokkal igazolható az állítás.

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_k(x-y) \,\mathrm{d}\, y = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} D_k(x-y) \right) \mathrm{d}\, y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) \,\mathrm{d}\, y \end{aligned}$$

18.8. Fejér tétele a Fourier-sor konvergenciájáról

18.24. Tétel. *(A Fejér-tétel.) Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_n(x).$$

Ekkor a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \sigma_n(x)| = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_n(x).$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a 18.23 tétel alapján

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y,$$

továbbá $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n = 1$ miatt

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) - f(x) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y,$$

tehát az $F_n \geq 0$ miatt

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y.$$

Ahhoz, hogy megmutassuk: a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az f függvényhez egyenletesen konvergál válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paramétert. Mivel az f függvény folytonos a $[-\pi, \pi]$ kompakt halmazon, így Heine tétele miatt egyenletesen is folytonos, vagyis létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]$ számra $|x_1 - x_2| < \delta$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [-\pi, \pi]$ számra

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{y\in[-\delta,\delta]} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta\leq|y|\leq\pi} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y. \tag{18.3}$$

Az egyenletes folytonosság miatt az első integrálra

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{y\in[-\delta,\delta]} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{y\in[-\delta,\delta]} \frac{\varepsilon}{2} \cdot F_n(y) \,\mathrm{d}\, y = \\ &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) \,\mathrm{d}\, y = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

érvényes. Mivel az f függvény folytonos, ezért korlátos, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [-\pi, \pi]$ számra $|f(t)| < K$. Ekkor a (18.3) képletben szereplő második integrálra

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta\leq|y|\leq\pi} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta\leq|y|\leq\pi} 2K F_n(y) \,\mathrm{d}\, y = \frac{K}{\pi} \int_{\delta\leq|y|\leq\pi} F_n(y) \,\mathrm{d}\, y$$

adódik. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\delta\leq|x|\leq\pi} F_n(x) \,\mathrm{d}\, x = 0,$$

ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\int\limits_{\delta \le |x| \le \pi} F_n(x)\,\mathrm{d}\,x < \frac{\varepsilon\pi}{2K}$$

teljesül. Vagyis minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta \le |y| \le \pi} |f(x-y) - f(x)|\,F_n(y)\,\mathrm{d}\,y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel az egyenletes folytonosságnál használt δ, a korlátosságot jellemző K és a hozzá tartozó N küszöbindex megválasztása független volt az x számtól, ezért azt kaptuk, hogy az adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $x \in [-\pi, \pi]$ és $N < n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezért minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\|\sigma_n - f\|_{\sup} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_n(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$

ami bizonyítja az egyenletes konvergenciát.

Kiegészítés. Megemlítjük, hogy van olyan folytonos függvény, melynek a Fourier-sora nem konvergens egy pontban. Erre a legegyeszerűbb példát Fejér Lipót adta.

18.25. Tétel. *(Fejér-példája.) Minden $\mu, m \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen*

$$Q_{\mu,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\cos(\mu x + kx)}{m-k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos(\mu x + mx + kx)}{k}.$$

Ha $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+$ és $\mu, m : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ olyan sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $\lim_{k\to\infty} a_k \log m_k \neq 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mu_{k+1} > \mu_k + 2m_k$ teljesül, akkor az

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Q_{\mu,m_k}$$

függvény folytonos, valamint a Fourier-sora a 0 pontban divergens.

18.26. Tétel. *Ha minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_k = \frac{1}{k^2}$, $\mu_k = 2^{k^3}$ és $m_k = 2^{k^2}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$, $\lim_{k\to\infty} a_k \log m_k = \log 2$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mu_{k+1} > \mu_k + 2m_k$ teljesül.*

◊

19. Komplex függvénytan

19.1. Komplex differenciálhatóság

19.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény komplex differenciálható*, vagy *holomorf az a pontban* ha létezik a
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
határérték. Ekkor a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ komplex számot az f *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük az
$$f' = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\wedge\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A \right\}$$
függvényt.
- Azt mondjuk, hogy az f függvény *reguláris az $a \in \mathbb{C}$ pontban*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f'$ teljesül, vagyis, ha f $\mathbb{C}$-differenciálható az a pont egy környezetében.
- Az f függvény *holomorf* vagy *reguláris* vagy $\mathbb{C}$-*differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Azt mondjuk, hogy f *egész függvény*, ha $\operatorname{Dom} f = \mathbb{C}$ és f holomorf.

19.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tekintsük az f által meghatározott*
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\twoheadrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}\,y) \\ v : \mathbb{R}^2 &\twoheadrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}\,y) \end{aligned}$$
függvényeket. Azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra $x + \mathrm{i}\,y \in \operatorname{Dom} f$ esetén
$$f(x+\mathrm{i}\,y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$$
teljesül. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. *Az f függvény holomorf az a pontban.*
2. *Létezik olyan $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés, melyre*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|} = 0.$$
3. *Az u és a v függvény differenciálható az a pontban, valamint*
$$\begin{aligned} (\partial_1 u)(a) &= (\partial_2 v)(a) \\ (\partial_2 u)(a) &= -(\partial_1 v)(a) \end{aligned}$$
teljesül. Ezen utóbbi két egyenletet nevezzük Cauchy–Riemann-egyenleteknek.

Ha az f függvény holomorf az a pontban, akkor
$$f'(a) = A(1) = (\partial_1 u)(a) + \mathrm{i}(\partial_1 v)(a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során az állítás jelöléseit használjuk.
$1 \Rightarrow 2$ Tegyük fel, hogy f holomorf az a pontban, és legyen $c = f'(a)$. Tekintsük az $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $Az = cz$ lineáris leképezést. Ekkor a
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$$
határértékből
$$\lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{x-a} \right| = 0$$

következik, amiből peidg

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|}\right|=0$$

ez viszont éppen a bizonyítandó

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|}=0$$

egynlőséget jelenti.
$2\Rightarrow 3$ A 2. pontban tekintett A lineáris leképezés értéke az 1 számon legyen $p+\mathrm{i}\,q=A1$, ahol $p,q\in\mathbb{R}$, valamint az a pont algebrai alakban legyen $a=a_1+\mathrm{i}\,a_2$ $(a_1,a_2\in\mathbb{R})$ A 2. pontban feltételezett határérték szerint

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{u(x_1,x_2)+\mathrm{i}\,v(x_1,x_2)-u(a_1,a_2)-\mathrm{i}\,v(a_1,a_2)-(p+\mathrm{i}\,q)((x_1-a_1)+\mathrm{i}(x_2-a_2))}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0,$$

aminek külön kiírva a valós és képzetes részét, az alábbi egyenletek adódnak.

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{u(x_1,x_2)-u(a_1,a_2)-p(x_1-a_1)+q(x_2-a_2)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$
$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{v(x_1,x_2)-v(a_1,a_2)-p(x_2-a_2)-q(x_1-a_1)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$

Az első egyenlet szerint az u függvény differenciálható az a pontban és

$$(\mathrm{D}u)(a)=\big((\partial_1u)(a)\quad(\partial_1u)(a)\big)=\big(p\quad -q\big),$$

a második egyenlet szerint pedig a v függvény differenciálható az a pontban és

$$(\mathrm{D}v)(a)=\big((\partial_1v)(a)\quad(\partial_1v)(a)\big)=\big(q\quad p\big).$$

A deriváltakból pedig leolvasható, hogy ezekre teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek.
$3\Rightarrow 1$ A Cauchy–Riemann-egyenletek alapján léteznek olyan $a,b\in\mathbb{R}$ számok, hogy

$$(\mathrm{D}u)(a)=\big((\partial_1u)(a)\quad(\partial_1u)(a)\big)=\big(p\quad -q\big)\quad\text{és}\quad(\mathrm{D}v)(a)=\big((\partial_1v)(a)\quad(\partial_1v)(a)\big)=\big(q\quad p\big)$$

teljesül. Ezek alapján

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{u(x_1,x_2)-u(a_1,a_2)-p(x_1-a_1)+q(x_2-a_2)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$
$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{v(x_1,x_2)-v(a_1,a_2)-p(x_2-a_2)-q(x_1-a_1)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$

teljesül. Az első egyenlethez hozzáadva a második i-szeresét

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{u(x_1,x_2)+\mathrm{i}\,v(x_1,x_2)-u(a_1,a_2)-\mathrm{i}\,v(a_1,a_2)-(p+\mathrm{i}\,q)((x_1-a_1)+\mathrm{i}(x_2-a_2))}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$

adódik, ami szerint

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-(p+\mathrm{i}\,q)(x-a)}{|x-a|}=0.$$

Ebből

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-(p+\mathrm{i}\,q)(x-a)}{|x-a|}\right|=0$$

következik, ahol elhagyhatjuk a nevezőből az egyik abszolútérték jelet, vagyis

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-(p+\mathrm{i}\,q)(x-a)}{x-a}\right|=0.$$

Ez pedig éppen a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=p+\mathrm{i}\,q.$$

bizonyítandó határérték létezését jelenti.

19.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{C}$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor az $|f'(a)|$ számot az *f függvény a pontbeli nyújtási együtthatójának* nevezzük. Azt a jól meghatározott $\varphi \in]-\pi, \pi]$ számot pedig, melyre $f'(a) = |f'(a)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ teljesül az *f függvény a pontbeli forgatási együtthatójának* nevezzük.

19.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

19.4. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{C}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;*
3. *fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
4. *ha $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

19.3. Hatványsor differenciálhatósága

19.5. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy a $P_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a, a P_a hatványsor holomorf a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

19.4. Görbe menti integrál

19.6. Definíció. Görbék főbb típusai.

– A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe *elemi*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos, differenciálható az $]a, b[$ halmazon, létezik a $\lim_{t\to a+0} \dot\gamma(t)$ és a $\lim_{t\to b-0} \dot\gamma(t)$ határérték, valamint a

$$\acute\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{t\to a+0} \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad t = a; \\ \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad a < t < b; \\ \lim\limits_{t\to b-0} \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad t = b. \end{cases}$$

függvény folytonos. Minden γ elemi görbéhez definiáljuk a még a

$$\gamma^\circ : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} (t-a) \lim\limits_{t\to a+0} \dot\gamma(t) + \gamma(a), & \text{ha} \quad t \leq a; \\ \gamma(t), & \text{ha} \quad a < t < b; \\ (t-b) \lim\limits_{t\to b-0} \dot\gamma(t) + \gamma(b), & \text{ha} \quad t \geq b. \end{cases}$$

függvényt. Az elemi görbék halmazára a Γ^e jelölést használjuk.

– A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe *szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbe*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos és létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ véges pontrendszer, melyre a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. A szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbék halmazára a Γ jelölést használjuk.

– A $\gamma \in \Gamma$ görbéről az mondjuk, hogy *zárt*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, ahol $a = \inf \operatorname{Dom} \gamma$ és $b = \sup \operatorname{Dom} \gamma$. A zárt görbék halmazát a Γ_0 szimbólummal jelöljük, valamint használjuk még a $\Gamma_0^e = \Gamma_0 \cap \Gamma^e$ jelölést is.

19.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos függvény.

– Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor a

$$\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

mennyiséget az *f függvény γ görbe menti integráljának* nevezzük és a $\int_\gamma f$, vagy a kicsit pongyola, de természetes $\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$ szimbólummal jelöljük.

– Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül és legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ olyan, hogy a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. Ekkor a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}} f$$

mennyiséget az *f függvény γ görbe menti integráljának* nevezzük és szintén a $\int_\gamma f$ vagy a $\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$ szimbólummal jelöljük. Továbbá a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\dot{\gamma}|_{[t_i,t_{i+1}]}(t)\right| \mathrm{d}\,t$$

mennyiséget a *γ görbe hosszának* nevezzük és az $L(\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

– Amennyiben a γ görbe zárt, a vonalmenti integrálra még a $\oint_\gamma f$ szimbólumot is használjuk.

19.8. Tétel. *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre* $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$. *Ekkor*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma^\circ(t))\dot{\gamma}^\circ(t)\,\mathrm{d}\,t$$

teljesül.

Bizonyítás. A görbe menti integrál és a γ° függvény definíciójának közvetlen következménye.

19.9. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|\,.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\alpha \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\int_a^b f = \left|\int_a^b f\right| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ teljesül. Legyen $u = \operatorname{Re} f$ és $v = \operatorname{Im} f$. Ekkor

$$\left|\int_a^b f\right| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}\int_a^b f = \int_a^b (\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)) \cdot (u(t) + \mathrm{i}\,v(t))\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \cos(\alpha)u(t) + \sin(\alpha)v(t)\,\mathrm{d}\,t \le$$
$$\le \int_a^b \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b |f|$$

teljesül, ahol az egyenlőtlenségnél a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget használtuk.

19.10. Tétel. *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f, g : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre* $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ *és* $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} g$ *teljesül.*

1. $\displaystyle\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \quad \displaystyle\int_\gamma (\lambda f) = \lambda \int_\gamma f$
3. *Legyen* $\delta : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\delta(t) = \gamma(b+a-t)$, *ekkor* $\displaystyle\int_\delta f = -\int_\gamma f$.
4. $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \le L(\gamma) \sup_{x \in \operatorname{Ran}\gamma} |f(x)|$

Bizonyítás. Az első és a második tulajdonság a Riemann-integrál linearitásán múlik. Ha $\gamma \in \Gamma^e$, akkor

$$\int_\delta f = \int_a^b f(\delta(t))\acute{\delta}(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(a+b-t)\acute{\gamma}(a+b-t)(-1)\,\mathrm{d}\,t = \overset{x=a+b-t}{=} \int_b^a f(x)\acute{\gamma}(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_\gamma f$$

és

$$\left|\int_\gamma f\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\acute{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))\acute{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}\,t \le$$
$$\le \int_a^b \sup_{x\in\operatorname{Ran}\gamma} |f(x)| \cdot |\acute{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}\,t = L(\gamma) \sup_{x\in\operatorname{Ran}\gamma} |f(x)|$$

teljesül. Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor véges sok Γ^e beli részre osztva a γ görbét a fenti egyenletek igazolják az állítás 3. és 4. pontját.

Jelölés. Adott $a, b \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje $[a,b]$ az *a és b pontokat összekötő szakaszt*, vagyis

$$[a,b] = \{a + t(b-a) \in \mathbb{C} |\ t \in [0,1]\}.$$

19.11. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a,b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az f függvény $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(b-a)$ görbe menti integrálját a $\int_{[a,b]} f$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$\int_{[a,b]} f = (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))\,\mathrm{d}\,t.$$

19.12. Tétel. *Legyen* $a, b \in \mathbb{C} \in \Gamma$ *és* $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ *olyan folytonos függvény, melyre* $[a,b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} f = -\int_{[b,a]} f$.
2. $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \le |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
3. *Minden* $c \in [a,b]$ *pontra* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Bizonyítás. Az 1. és a 2. pont a 19.10 tétel alapján teljesül. A 3. pont pedig Riemann-integrálás egyik alaptulajdonsága.

19.13. Definíció. Legyen $f, F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a F *az* f *primitív függvénye*, ha F differenciálható és $F' \subseteq f$ teljesül, valamint F *az* f *globális primitív függvénye*, ha $F' = f$ teljesül.

19.14. Tétel. *Legyen* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ *és* $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ *folytonos függvény. Ha* $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ *az* f *primitív függvénye és* $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ *teljesül, akkor*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Bizonyítás. Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f, F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvények, melyekre $F' = f$ és $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül. Ekkor

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b F'(\gamma^\circ(t))\dot{\gamma^\circ}(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b (F\circ\gamma^\circ)'(t)\,\mathrm{d}\,t = [F\circ\gamma^\circ]_a^b = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor véges sok Γ^e beli részre osztva a γ görbét a fenti egyenletet alkalmazva minden Γ^e beli részre kapjuk az állítást.

19.15. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha létezik olyan $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye az f függvénynek, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

Bizonyítás. A 19.14 tétel közvetlen következménye.

19.5. A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma

Jelölés. Adott $a, b, c \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje

$$T(a,b,c) \triangleq \left\{\alpha a + \beta b + \gamma c \in \mathbb{C} \,\middle|\, (\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \ \wedge\ \alpha+\beta+\gamma = 1\right\}$$

az a, b, c csúcspontú háromszöget.

Jelölés. Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a,b], [b,c], [c,a] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az a, b, c háromszög oldalain való integrálást a megfelelő irányítással az alábbi módon fogjuk jelölni.

$$\int_{[a,b,c]} f \triangleq \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$$

19.16. Definíció. Az $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazról azt mondjuk, hogy *csillaghalmaz*, ha létezik olyan $x \in U$ pont, melyre minden $u \in U$ esetén $[x,u] \subseteq U$ teljesül. Ekkor az x pontot *csillagcentrumnak* hívjuk.

19.17. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f-nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a, b, c \in U$ pontra, $T(a,b,c) \subseteq U$ esetén $\int_{[a,b,c]} f = 0$. Továbbá, ha teljesül ez a feltétel és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az*

$$F : U \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \int_{[c,z]} f$$

függvény primitív függvénye az f függvénynek az U halmazon.

19.18. Tétel. *(Goursat-lemma.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $T(a,b,c) \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén $\int_{[a,b,c]} f = 0$.*

19.19. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $F : B_r(a) \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $F' \subseteq f$ teljesül, azaz F a f primitív függvény az a halmaz egy környezetén.*

19.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve, és legyen $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Ekkor létezik az f fügvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

19.6. Az indexfüggvény

19.21. Tétel. *Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvényt és a $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbét. Ekkor*

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n \neq -1; \\ 2\pi\,\mathrm{i}\,m, & \text{ha} \quad n = -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvény és $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ pedig a $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbe. Ekkor a görbementi integrál definíciója alapján

$$\int_\gamma f = \int_0^1 r^n w^n\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,nmt}\,rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}\,2\pi\,\mathrm{i}\,m\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\,\mathrm{i}\,mr^{n+1}w^{n+1}\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}(n+1)mt}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= 2\pi\,\mathrm{i}\,mr^{n+1}w^{n+1}\int_0^1 \cos((n+1)mt) + \mathrm{i}\sin((n+1)mt)\,\mathrm{d}\,t.$$

Amiből adódik, hogy $n \neq -1$ esetén az integrál nulla, $n = -1$ esetén pedig

$$\int_\gamma f = 2\pi\,\mathrm{i}\,m.$$

19.22. Definíció. A $\gamma \in \Gamma$ *görbe indexfüggvényének* nevezzük az alábbi függvényt.

$$\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{\mathrm{id}_\mathbb{C} - z}$$

19.23. Tétel. *Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük a $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbét. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = r\}$ esetén*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |z| > r; \\ m, & \text{ha} \quad |z| < r. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ a $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbe. Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| < r$, akkor minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\left|\frac{z}{\gamma(t)}\right| = \frac{|z|}{r} < 1$$

miatt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\gamma(t)}} = 2\pi\,\mathrm{i}\,m\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\gamma(t)^n} = 2\pi\,\mathrm{i}\,m\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{r^n w^n}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,mnt}.$$

Továbbá a fenti függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ halmazon, ugyanis az

$$\sum_{n=0}^\infty \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{z^n}{r^n w^n}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,mnt}\right| = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{|z|}{r}\right)^n < \infty$$

egyenlőtlenség a Weierstrass-tétel alapján garantálja az egyenletes konvergenciát. Ekkor az összegzés és az integrálás felcserélhető, tehát

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^1 2\pi\,\mathrm{i}\,m\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{r^n w^n}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,mnt}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= m\sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{z^n}{r^n w^n}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,mnt}\,\mathrm{d}\,t = m$$

adódik.
Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| > r$, akkor minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\left|\frac{\gamma(t)}{z}\right| = \frac{r}{|z|} < 1$$

miatt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} = \frac{-\gamma'(t)}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{\gamma(t)}{z}} = \frac{-\gamma'(t)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(t)^n}{z^n} = -2\pi\,\mathrm{i}\,m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}w^{n+1}}{z^{n+1}}\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,m(n+1)t}\,.$$

Továbbá a fenti függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ halmazon, ugyanis az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{r^{n+1}w^{n+1}}{z^{n+1}}\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,m(n+1)t}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z|}\right)^{n+1} < \infty$$

egyenlőtlenség a Weierstrass-tétel alapján garantálja az egyenletes konvergenciát. Ekkor az összegzés és az integrálás felcserélhető, tehát

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma(z) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^1 -2\pi\,\mathrm{i}\,m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}w^{n+1}}{z^{n+1}}\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,m(n+1)t}\,\mathrm{d}\,t = \\ &= -m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{rw}{z}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,m(n+1)t}\,\mathrm{d}\,t = 0\end{aligned}$$

adódik.

19.24. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\mathrm{Ran}\,\mathrm{Ind}_\gamma \subseteq \mathbb{Z}$
2. *Az* Ind_γ *függvény folytonos.*
3. *Ha valamely $z \in \mathbb{C}$ számra $\mathrm{Ran}\,\gamma \subseteq B_{|z|}(0)$ teljesül, akkor $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.*

19.7. Cauchy integráltételei

19.25. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér, $U \subseteq M$ és $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zárt folytonos görbe. Azt mondjuk, hogy a *γ_0 és γ_1 kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban*, ha létezik olyan $H : [0,1]^2 \to U$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma_0(t)$ és $H(1,t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = H(p,1)$.

19.26. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $U \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az *$U \subseteq M$ halmaz egyszeresen összefüggő*, ha U ívszerűen összefüggő és minden U halmazban haladó zárt folytonos görbe kontúrhomotóp az U halmazban egy konstansfüggvénnyel. Az *(M,d) metrikus tér egyszeresen összefüggő*, ha az M halmaz egyszeresen összefüggő.

19.27. Tétel. *(Cauchy intergáltétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\mathrm{Dom}\,f$ nyílt halmaz és minden $z \in \mathrm{Dom}\,f$ esetén van a z pontban értelmezett primitív függvénye az f függvénynek. Ha $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_0$ olyan görbék, melyek kontúrhomotópok a $\mathrm{Dom}\,f$ halmazban, akkor*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

19.28. Tétel. *(Cauchy első integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\mathrm{Dom}\,f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyre $\mathrm{Ran}\,\gamma \subseteq U \subseteq \mathrm{Dom}\,f$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

19.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre a $\operatorname{Dom} f$ halmaz egyszeresen összefüggő. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén*

$$\oint_\gamma f = 0$$

teljesül.

19.30. Tétel. *(Cauchy második integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ teljesül. Ekkor minden $z \in U \setminus \operatorname{Ran}\gamma$ pontra*

$$f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f}{\mathrm{id} - z}.$$

Jelölés. Adott $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$\gamma_{r,a} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto a + r\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,t}$$
$$S_r(a) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - a| = r\}.$$

19.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_{\gamma_{r,a}} \frac{f}{\mathrm{id} - z}\ .$$

19.8. Cauchy transzformáció

19.32. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az *f függvény γ görbe szerinti Cauchy-transzformáltja*

$$C_{f,\gamma} : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - z}.$$

19.33. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. *A $C_{f,\gamma}$ függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a $\operatorname{dist}(a, \operatorname{Ran}\gamma)$ számnál.*
3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvénnyel a $B_{\operatorname{dist}(a,\operatorname{Ran}\gamma)}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$C_{f,\gamma}^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}\ .$$

19.34. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény.*

1. *Az f függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a*
$$r_a = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f\right\}$$
számnál.
3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik az f függvénnyel a $B_{r_a}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$, $r \in]0, r_a[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\gamma_{a,r}} \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}\ .$$

19.9. Holomorf függvény analitikusságának elemi következményei

19.35. Tétel. *(Megszüntethető szingularitások tétele.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Létezik olyan $\tilde{f} : B_r(a) \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, mely f kiterjesztése.*
- *Létezik a $\lim\limits_a f$ határérték.*
- *Létezik olyan $\rho \in]0, r[$, hogy az $f(B_\rho(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.*
- $\lim\limits_{z \to a} f(z)(z-a) = 0$

19.36. Tétel. *Ha $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

19.37. Tétel. *(Morera tétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Az f függvény holomorf.*
- *Minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra és $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq U$ esetén $\int_\gamma f = 0$ teljesül.*
- *Minden $a, b, c \in \operatorname{Dom} f$ esetén, ha $T(a, b, c) \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor $\int_{[a,b,c]} f = 0$.*

19.10. Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele

19.38. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(a)$ számra*

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)^{n+1}} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

19.39. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

19.40. Tétel. *(Liouville-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Ha létezik olyan $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-ed fokú polinom és $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ számra $|f(z)| \leq |P(z)|$ teljesül, akkor f is legfeljebb n-ed fokú polinom.*

19.41. Tétel. *(Liouville-tétel.) Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett, korlátos holomorf függvény, akkor f állandó.*

19.42. Tétel. *(Algebra alaptétele.) Legyen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinom. Ekkor létezik a P polinomnak zérushelye.*

19.11. Holomorf függvények gyökei

19.43. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény és $N_f = \{z \in \operatorname{Dom} f \mid f(z) = 0\}$.*

1. *Az N_f halmaz minden pontja izolált pont.*

2. *Minden $a \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $g : \operatorname{Dom} f \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g(a) \neq 0$ és minden $z \in \operatorname{Dom} f$ számra $f(z) = (z-a)^n g(z)$ teljesül. Ezt az n számot nevezzük az a gyök multiplicitásának.*
3. *Az N_f halmaz megszámlálható.*

Jelölés. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény esetén vezessük be az

$$N_f = \{z \in \operatorname{Dom} f |\ f(z) = 0\}$$

jelölést a zérushelyekre és minden $a \in N_f$ esetén az a gyök multiplicitását jelölje $m_f(a)$.

19.44. Tétel. *(Unicitás tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha a $T = \{x \in U |\ f(x) = g(x)\}$ halmaznak van U halmazbeli torlódási pontja, akkor $T = U$.*

19.12. Laurent-sorfejtés

Jelölés. Ha $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ olyan sorozat, melyre a $\sum_k a_{-k}$ és a $\sum_k a_k$ sor is konvergens, akkor vezessük be a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

jelölést.

19.45. Definíció. Ha $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $R \in]r, \infty]$, akkor a

$$C_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} |\ r < |z-a| < R\}$$

halmazt az *a középpontú r belső és R külső sugarú nyílt körgyűrűnek* nevezzük.

19.46. Tétel. *(Laurent-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint $a \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olyan, hogy $r < R$ és $C_{r,R}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ függvény, hogy minden $r', R' \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $r < r' < R' < R$, akkor a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \text{és} \qquad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r',R'}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{r,R}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

Továbbá ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq C_{r,R}(a)$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} \ .$$

19.47. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $C_{0,\rho}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor a Laurent-tétel alapján egyértelműen léteznek olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ együtthatók, hogy minden $r, R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < r < R < \rho$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \text{és} \qquad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,R}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{0,\rho}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

– Ekkor a
$$C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$$
függvénysort az *f függvény a pontbeli Laurent-sorfejtésének* nevezzük.
– Az *f függvény reguláris része a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*
$$f_r : C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(z-a)^n$$
és az *f függvény főrésze a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*
$$f_p : C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(z-a)^n.$$
– Az *f függvénynek az a pontban pólusa* van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ |\ c_{-m} \neq 0\}$ halmaz véges, de nem üres és az
$$r_f(a) = \max\left\{m \in \mathbb{N}^+ |\ c_{-m} \neq 0\right\}$$
szám a *pólus rendje.*
– *Az f függvénynek az a pontban lényeges szingularitása* van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ |\ c_{-m} \neq 0\}$ halmaz végtelen.
– A c_{-1} számot az *f függvény a pontbeli reziduumának* nevezzük és a $\operatorname{Res}_f(a)$ szimbólummal jelöljük.

19.48. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek m-ed rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) pólusa van az a pontban. Ekkor*
$$\operatorname{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\, z^{m-1}} \left((z-a)^m f(z)\right) \right) .$$

19.13. Reziduum-tétel, argumentum-elv és Rouché tétele

19.49. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény *meromorf*, ha létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $A \subseteq U$ diszkrét zárt halmaz, hogy $\operatorname{Dom} f = \Omega \setminus A$ és az f függvénynek a D halmaz minden pontjában pólusa van.

19.50. Tétel. *(Reziduum-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*
$$\int_\gamma f = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}_f(a) .$$

19.51. Tétel. *(Argumentum-elv.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*
$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{a\in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) - \sum_{a\in P_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) r_f(a) .$$

19.52. Tétel. *(Rouché-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $f, g : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény és $\gamma \in \Gamma_0$ görbe a $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ tulajdonsággal. Ha minden $z \in \operatorname{Ran}\gamma$ esetén $|g(z)| < |f(z)|$ teljesül, akkor*
$$\sum_{a\in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) = \sum_{a\in N_{f+g}} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_{f+g}(a) .$$

19.14. Nyílt leképezés tétele, lokális maximum elve és a Schwarz-lemma

19.53. Tétel. *(Nyílt leképezés tétele.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem konstans holomorf függvény. Ekkor az $f(U)$ halmaz is egyszeresen összefüggő és nyílt.*

19.54. Tétel. *(Lokális maximum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén, az $|f|$ függvénynek nincs lokális maximuma az a pontban.*

19.55. Tétel. *(Lokális minimum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén az $|f|$ függvénynek nincs lokális minimuma az a pontban.*

19.56. Tétel. *Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ korlátos nyílt halmaz és $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely holomorf az U halmazon. Ekkor*

$$\sup_{x \in \overline{U}} |f(x)| = \max_{x \in \operatorname{Fr} U} |f(x)|,$$

ahol $\operatorname{Fr} U = \overline{U} \setminus U$, az U halmaz határa.

19.57. Tétel. *(Schwarz-lemma.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(a)$ esetén $|f(z) - f(a)| \leq C$. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$|f(z) - f(a)| \leq C \frac{|z-a|}{r}$$

teljesül, valamint $|f'(a)| \leq \dfrac{C}{r}$.

19.15. Casorati–Weierstrass-tétel és a Hurwitz-tétel

19.58. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f$. Legyen $r(a) = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f\right\}$ és az f függvény a pont körüli Laurent-sorfejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$.*

1. *Ekkor minden $r \in]0, r(a)[$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén $|c_n| \leq \dfrac{1}{r^n} \cdot \sup_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van reguláris kiterjesztése az a pontban, ha létezik olyan $r \in]0, r(a)[$, melyre az $f(B_r(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.*
3. *Az f függvénynek pontosan akkor van m-ed rendű pólusa az a pontban, ha létezik olyan $r \in]0, r(a)[$ és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ esetén $\dfrac{C_1}{|z-a|^m} \leq |f(z)| \leq \dfrac{C_2}{|z-a|^m}$.*
4. *Az f függvénynek pontosan akkor van lényeges szingularitása az a pontban, ha minden $k \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $r \in]0, r(a)[$ esetén $\dfrac{C_k}{r^k} \leq \sup_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.*

19.59. Tétel. *(Casorati–Weierstrass-tétel.) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek lényeges szingularitása van az a pontban. Ekkor minden $\rho \in]0, r[$ esetén $\overline{f\left(B_\rho(a) \setminus \{a\}\right)} = \mathbb{C}$.*

19.60. Tétel. *(Holomorf függvények lokálisan egyenletesen sorozatának határértéke.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor az $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ határfüggvény szintén holomorf; minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon és $f^{(k)} = \lim_{n \to \infty} f_n^{(k)}$.*

19.61. Tétel. *(Hurwitz-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az U halmazon értelmezett komplex értékű holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata az $f : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla határfüggvénnyel. Ekkor egy $z \in U$ elem pontosan akkor gyöke az f függvénynek, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \le n$ számra az f_n függvénynek van gyöke a $B_\varepsilon(z)$ halmazban.*

19.16. Pár valós integrál kiszámítása reziduum tétellel

19.62. Tétel. *Legyen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, hogy a q polinomnak nincs valós gyöke és $\deg q \ge 2 + \deg p$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \,\mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, a\right)$$

$$\forall \alpha \in \,]0, 2\pi[\,: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\alpha x) \,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\alpha x) \,\mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}, a\right)$$

$$\forall \alpha \in \,]-1, 1[\,: \int_{0}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha \,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right) \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} z^\alpha, a\right)$$

19.17. A Cauchy-integrálformula és a reziduum-tétel néhány következménye

19.63. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és $f, g : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ olyan holomorf fggvény, hogy*

1. *az $f - g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke;*
2. $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z) - g(z)| < \infty$;
3. $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z) - g(z)| = 0$,

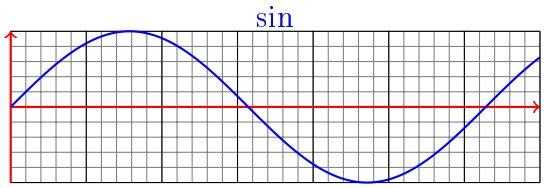
akkor $f = g$.

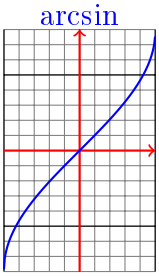
19.64. Tétel.

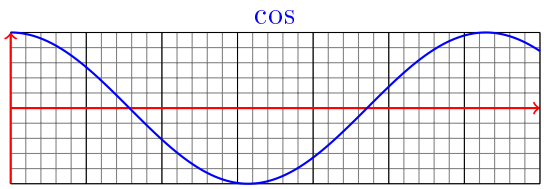
1. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$: $$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)$: $$\frac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z + k - \frac{1}{2}\right)^2}$$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$: $$\operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}$$
4. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)$: $$\operatorname{tg}(\pi z) = \frac{2z}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2}$$

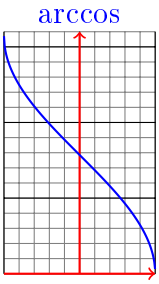
20. Függelék

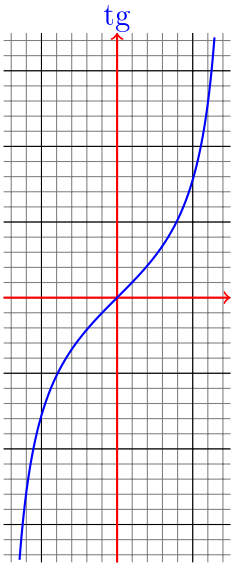
20.1. Az elemi függvények grafikonjai

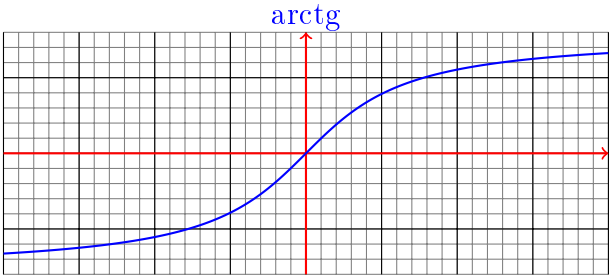




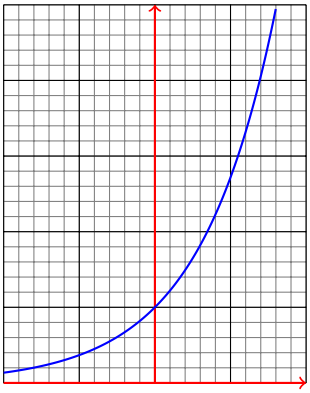




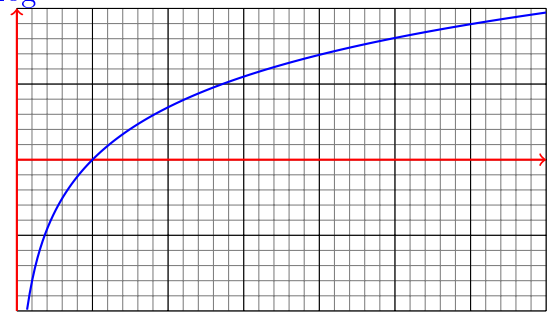




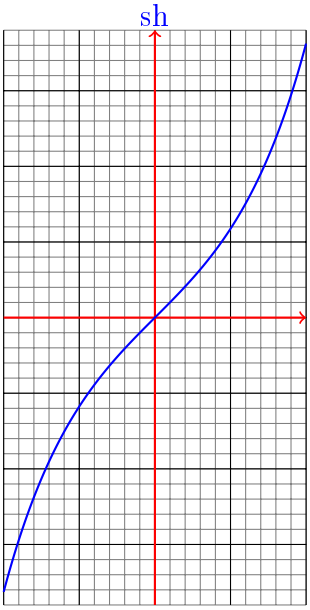
exp



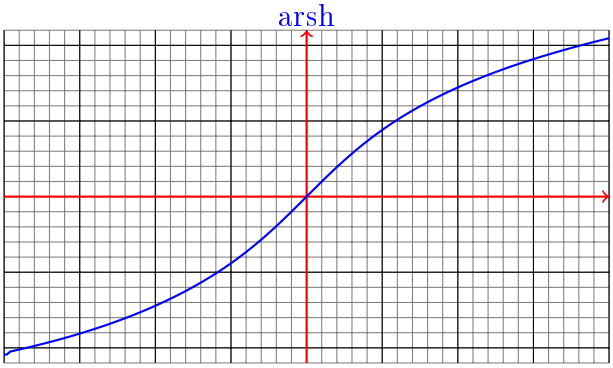
log

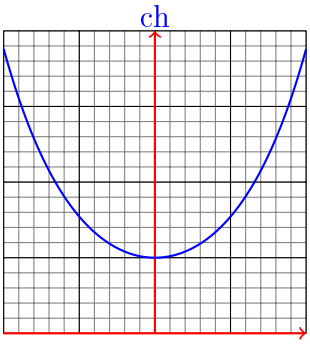


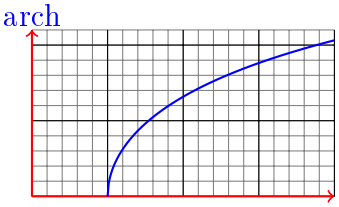
sh

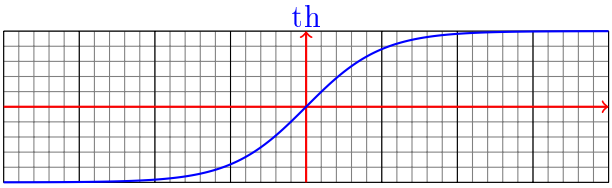


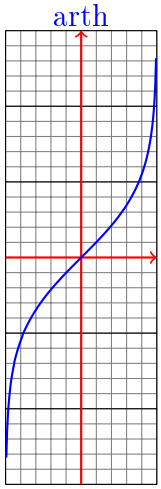
arsh











20.2. Tizedestörtek

Magyarázat. Megszoktuk, hogy a valós számokat (esetleg végtelen) tizedestört alakban lehet felírni, most ennek adjuk meg a precíz matematikai bizonyítását.

20.1. Tétel. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Értelmezzük az*

$$a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - \left[N^{n-1}x\right] \cdot N, & \text{ha} \quad n > 0; \\ [x], & \text{ha} \quad n = 0 \end{cases}$$

sorozatot. Ekkor

1. *minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a(x)_n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$;*
2. *a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sor konvergens;*
3. *minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a(x)_k}{N^k} = \frac{[N^n x]}{N^n}$;*
4. *$\displaystyle x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ teljesül;*
5. *végtelen sok n természetes számra $a(x)_n < N-1$;*
6. *legyen $b : \mathbb{N} \to \{0, 1, \dots, N-1\}$ tetszőleges sorozat; pontosan akkor teljesül az*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

egyenlőség, ha $a(x) = b$ vagy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, valamint minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N - 1$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
1. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges és legyen $y = N^{n-1}x$. Ekkor

$$[N^n x] - \left[N^{n-1}x\right] \cdot N = [N([y] + \{y\})] - [[y] + \{y\}] \cdot N = N\,[y] + [N\,\{y\}] - [y]\,N = [N\,\{y\}]\,,$$

vagyis $a(x)_n$ egész szám, továbbá $a(x)_n \leq N-1$, hiszen ellenkező esetben $\{y\} \geq 1$ teljesülne.
2. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sort majorálja a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n}$ sor, mely konvergens.
3. Az $a(x)$ sorozat definíciója alapján n szerinti teljes indukcióval egyszerűen adódik.
4. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a(x)_k}{N^k}$. Felhasználva, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$N^n x = [N^n x] + \{N^n x\}$$

és az előző pont eredményét

$$\alpha_n = \frac{N^n x - \{N^n x\}}{N^n} = x - \frac{\{N^n x\}}{N^n}$$

adódik, amiből pedig

$$|x - \alpha_n| < \frac{1}{N^n}$$

következik. Vagyis $\lim \alpha = x$.
5. Tegyük fel, hogy csak véges sok n természetes számra teljesül az $a(x)_n < N-1$ egyenlőtlenség. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ természetes számra $a(x)_n = N-1$. Tehát az

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{N}} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

egyenlőség miatt

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

teljesül, ami ellentmond a 4. bizonyításában szereplő

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| < \frac{1}{N^{n^0}}$$

egyenlőtlenségnek.
6. Legyen $b : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$ olyan sorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

teljesül, és tegyük fel, hogy $a(x) \neq b$. Legyen $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} |\ a(x)_n \neq b_n\}$. Ekkor

$$\frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

melynek átrendezéséből

$$\left| \frac{a(x)_{n_0} - b_{n_0}}{N^{n_0}} \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n - b_n}{N^n} \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|a(x)_n - b_n|}{N^n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

adódik, vagyis $|a(x)_{n_0} - b_{n_0}| = 1$. Ha $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, akkor a fenti egyenlőtlenségben csak úgy lehet egyenlőség, ha minden $n > n_0$ esetén

$$|a(x)_n - b_n| = N-1.$$

Továbbá a két sor összege csak akkor egyezhet meg, ha $b_n \geq a(x)_n$. Tekintettel arra, hogy $b_n, a(x)_n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ ezért csak az $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$ megoldása van a fenti egyenlőtlenségnek. A $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ esetben a fentihez hasonló érveléssel azt kapnánk, hogy minden $n > n_0$ számra $a(x)_n = N-1$ és $b_N = 0$. Ekkor viszont

$$x = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0}+1}{N^{n_0}}$$

adódik, vagyis az $a(x)$ sorozat definíciója alapján $a_{n_0} + 1 = a_{n_0}$, ami ellentmondás, tehát a $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ eset nem valósulhat meg.
Fordítva, ha $a(x) = b$, akkor a két sor összege nyilván megegyezik. Ha létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$ és minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}+1}{N^{n_0}}$$

és

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{N}} = \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \frac{1}{N^{n_0}}\end{aligned}$$

vagyis a két sor összege megegyezik.

20.2. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, és tekintsük az

$$a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - \left[N^{n-1} x\right] \cdot N, & \text{ha} \quad n > 0; \\ [x], & \text{ha} \quad n > 0 \end{cases}$$

sorozatot. Ekkor legyen

$$a(x)_0, a(x)_1 a(x)_2 \ldots \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

melyet az *x szám N alapú számrendszer vett felírásának* nevezünk.

Magyarázat. A mindennapi életben az $N = 10$ választással elünk és ekkor az $x \in \mathbb{R}$ szám *tizedesjegyeiről* beszélünk. Továbbá a fenti állításból következik például az

$$1,9999 \cdots = 2$$

egyenlőség, vagyis a több olyan tizedesjegy-sorozat létezhet, mely ugyan azt a valós számot határozza meg.

20.3. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Bizonyítás. Mivel a valós számok a racionális számok bizonyos részhalmazai (Dedekind-szeletei), ezért létezik $j : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ injektív leképezés, vagyis $|\mathbb{R}| \leq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Mivel $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, ezért $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Most a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |\mathbb{R}|$ formulát igazoljuk. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \qquad E \mapsto s(E) := \left(n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \notin E; \\ 1, & \text{ha} \quad x \in E. \end{cases}\right)$$

$$\rho : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \to \mathbb{R} \qquad s \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{10^k}$$

Rövid számolással igazolható, hogy a φ függvény bijekció, valamint a ρ függvény a 20.1 állítás alapján injektív. Tehát $\rho \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ injektív leképezés, vagyis $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.
Tehát $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, vagyis az 1.95 Schröder–Bernstein-tétel alapján $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

20.3. Kategóriák

Magyarázat. Láttuk, hogy halmazok halmaza nem létezik, hasonló módon igazolható, hogy a vektorterek, metrikus terek, stb. sem alkotnak halmazt. Azonban természetes az igény, hogy ezeket az objektumokat is össze tudjuk rendezni egy matematikai struktúrába. Ez a struktúra a kategória.

20.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy adott egy $\mathcal{K}$ *kategória*, ha

1. adottak *objektumai*, melynek jele $\mathcal{OB}$;
2. bármely két (esetleg azonos) $A, B \in \mathcal{OB}$ esetén adott az A *objektumból* B *objektumba képező morfizmusok* $\mathcal{MOR}(A, B)$ *halmaza*;
3. bármely három $A, B, C \in \mathcal{OB}$ esetén adott egy

$$\mathcal{MOR}(A, B) \times \mathcal{MOR}(B, C) \to \mathcal{MOR}(A, C) \qquad (f, g) \mapsto g \circ f$$

függvény, a *morfizmusok kompozíciója*.

Továbbá megköveteljük, hogy bármely négy $A, B, C, D \in \mathcal{OB}$ objektum és $f \in \mathcal{MOR}(A, B)$, $g \in \mathcal{MOR}(B, C)$, $h \in \mathcal{MOR}(C, D)$ morfizmus esetén

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

teljesüljön, valamint minden $A \in \mathcal{OB}$ esetén létezzen egy kitüntetett eleme a $\mathcal{MOR}(A, A)$ halmaznak, melyet *egységmorfizmusnak* nevezünk, és az id_A szimbólummal jelölünk, azzal a tulajdonsággal, hogy minden $B, C \in \mathcal{OB}$ objektumra és $f \in \mathcal{MOR}(A, B)$, $g \in \mathcal{MOR}(C, A)$ morfizmusra

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_A \circ g = g$$

teljesül.

Jelölés. Ha nem okoz félreértést, akkor a $\mathcal{K}$ kategóriát röviden a $\mathcal{K} = (\mathcal{OB}, \mathcal{MOR})$ alakban írjuk fel.

20.5. Definíció. (*Példák kategóriákra.*)

- Legyen $\mathcal{SET}$ az a kategória, melynek az objektumai a halmazok, és bármely két A, B halmaz esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq \mathcal{F}(A, B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{SET}$ kategóriát a *halmazok kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{VECT}$ az a kategória, melynek az objektumai a valós számtest feletti vektorterek, és tetszőleges A, B vektortér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq \mathrm{Lin}(A, B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{VECT}$ kategóriát a *valós számtest feletti vektorterek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{MET}$ az a kategória, melynek az objektumai a metrikus terek, és tetszőleges A, B metrikus tér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq C(A, B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{MET}$ kategóriát a *metrikus terek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{TOP}$ az a kategória, melynek az objektumai a topologikus terek, és tetszőleges A, B topologikus tér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq C(A, B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{TOP}$ kategóriát a *topologikus terek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{GROUP}$ az a kategória, melynek az objektumai a csoportok, és tetszőleges A, B csoport esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq \{f : A \to B | f \text{ homomorfizmus}\}$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{GROUP}$ kategóriát a *csoportok kategóriájának* nevezzük.

Magyarázat. A fentihez hasonló módon definiálható még számtalan matematikai struktúra kategóriája.

20.4. Vektorterek

20.6. Definíció. A $(V, +, \cdot)$ hármast *vektortérnek* nevezzük a $\mathbb{K}$ számtest felett, ha V halmaz, $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ olyan függvény mely teljesíti a következőket.

1. A $(V, +)$ pár kommutatív csoport.
2. Minden $a, b \in \mathbb{K}$ és $x, y \in V$ esetén

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot x) &= (ab) \cdot x \\ (a + b) \cdot x &= a \cdot x + b \cdot x \\ a \cdot (x + y) &= a \cdot x + a \cdot y \\ 1 \cdot x &= x. \end{aligned}$$

A továbbiakban a $\cdot$ műveletet nem írjuk ki.

20.7. Tétel. *A valós együtthatójú polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett, hasonlóan a komplex együtthatójú polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{C}$ felett.*

Bizonyítás. Elemi számolással igazolhatók a vektortérre megkövetelt tulajdonságok.

20.8. Definíció. A $(V, +, \cdot, \times)$ négyest *algebrának* nevezzük a $\mathbb{K}$ test felett, ha

- $(V, +, \cdot)$ hármas vektortér a $\mathbb{K}$ test felett,
- $\times : V \times V \to V$ pedig olyan művelet, melyre minden $x, y, z \in V$ és $c \in \mathbb{K}$ esetén az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{aligned} (x \times y) \times z &= x \times (y \times z) \\ x \times (y + z) &= x \times y + x \times z \\ (y + z) \times x &= y \times x + z \times x \\ c \cdot (x \times y) &= (c \cdot x) \times y = x \times (c \cdot y) \end{aligned}$$

Azt mondjuk, hogy $(V, +, \cdot, \times)$ *egységelemes algebra*, ha létezik olyan $e \in V$, hogy minden $x \in V$ elemre $e \times x = x \times e = x$.
Ha nem okoz félreértést, a $\cdot$ és $\times$ műveletet nem írjuk ki.

20.9. Tétel.

1. *Tetszőleges A halmaz mellett $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \times)$ algebra $\mathbb{K}$ felett.*
2. *A polinomok halmaza algebrát alkot.*

Bizonyítás. Elemi számolással igazolhatók a vektortérre megkövetelt tulajdonságok.

20.10. Definíció. Legyen V vektortér és legyen $(e_i)_{i \in I}$ vektorok egy rendszere, azaz minden $i \in I$ esetén legyen $e_i \in V$.

- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $e_i \neq 0$ és ha minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k = 0 \quad \to \quad a_1 = \dots = a_n = 0$$

  teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha minden véges $J \subseteq I$ halmazra az $(e_i)_{i \in J}$ vektorrendszer lineárisan független.
- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer *algebrai bázis*, ha lineárisan független vektorrendszer, és nem valódi részhalmaza egyetlen lineárisan független vektorrendszernek sem.

20.11. Tétel. *Legyen V vektortér és legyen $(e_i)_{i \in I}$ lineárisan független vektorrendszer. Ekkor létezik olyen B bázis a V vektortérben, melyre minden $i \in I$ esetén $e_i \in B$ teljesül. (Vagyis lineárisan független vektorok rendszere kiegészíthető bázissá.)*

Bizonyítás. Legyen V vektortér és legyen $(e_i)_{i\in I}$ lineárisan független vektorrendszer.

$$H = \{S \in \mathcal{P}(V) |\ S \text{ elemei lineárisan független vektorrendszert alkotnak, } \forall i \in I : e_i \in S\}$$

halmazt, és értelmezzük rajta a $\leq$ reláció, mint a halmazelméleti tartalmazást, azaz $f, g \in H$ elemekre $f \leq g$ pontosan akkor teljesül, ha $f \subseteq g$.
Rövid számolással igazolható, hogy $(H, \leq)$ induktívan rendezett halmaz, ezért létezik maximális eleme, legyen ez f. Ha az f vektorrendszer elemei nem alkotnának bázist, akkor létezne olyan f' lineárisan független vektorrendszer, melyre $f \subsetneq f'$ teljesül, vagyis az $f < f'$ reláció miatt f nem lenne maximális. Tehát az f elemei bázist alkotnak.

20.12. Tétel. *Minden vektortérben létezik bázis.*

Bizonyítás. Legyen V vektortér és $K = \{\}$. Ekkor a K halmaz (nem létező) elemei lineárisan függetlenek, vagyis az előző tétel alapján létezik olyan B bázis a V vektortérben mely tartalmazza a K halmazt.

20.13. Tétel. *Ha $(e_i)_{i\in I}$ bázis a V vektortérben, akkor minden $x \in V$ vektorhoz egyértelműen létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz és a $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ halmaz elemeiből álló $(a_j)_{j\in J}$ számrendszer, melyre*

$$x = \sum_{j\in J} a_j e_j$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(e_i)_{i\in I}$ bázis a V vektortérben és $x \in V$ tetszőleges vektor. Ha $x = 0$, akkor $J = \emptyset$ választással teljesül az állítás, tehát feltehető, hogy $x \neq 0$.
Ha nem létezne olyan $J \subseteq I$ véges halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz elemeiből álló $(a_j)_{j\in J}$ számrendszer, melyre

$$x = \sum_{j\in J} a_j e_j$$

teljesül, akkor az $\{e_i | i \in I\} \cup \{x\}$ halmazrendszer is lineárisan független lenne, vagyis $(e_i)_{i\in I}$ nem lenne bázis.
Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy $J_1, J_2 \subseteq I$ olyan véges halmaz és $(a_j)_{j\in J_1}$, $(b_j)_{j\in J_2}$ olyan nem nulla számok, melyekre

$$x = \sum_{j\in J_1} a_j e_j = \sum_{j\in J_2} b_j e_j$$

teljesül. Legyen $J = J_1 \cup J_2$ és minden $j \in J$ esetén legyen

$$c_j = \begin{cases} a_j, & \text{ha} \quad j \in J_1 \setminus J_2; \\ -b_j, & \text{ha} \quad j \in J_2 \setminus J_1; \\ a_j - b_j, & \text{ha} \quad j \in J_1 \cap J_2. \end{cases}$$

Ekkor a

$$0 = \sum_{j\in J} c_j e_j$$

egyenlőségből a bázisvektorok lineáris függetlensége miatt az adódik, hogy minden $j \in J$ esetén $c_j = 0$.
Tehát
– minden $j \in J_1 \setminus J_2$ indexre $c_j = 0$ miatt $a_j = 0$, és mivel $a_j \neq 0$, ezért $J_1 \setminus J_2 = \emptyset$;
– minden $j \in J_2 \setminus J_1$ indexre $c_j = 0$ miatt $b_j = 0$, és mivel $b_j \neq 0$, ezért $J_2 \setminus J_1 = \emptyset$;
– minden $j \in J_1 \cap J_2$ indexre $c_j = 0$ miatt $a_j = b_j$ teljesül.
Ezért $J_1 = J_2$ és minden $j \in J_1$ esetén $a_j = b_j$.

20.14. Tétel. *Ha $(e_i)_{i\in I}$ bázis a V vektortérben, akkor*

$$V = \left\{ \sum_{i\in I} \alpha_i e_i |\ \forall i \in I:\ \alpha_i \in \mathbb{K}\ \wedge\ az\ \{i \in I | \alpha_i \neq 0\}\ halmaz\ véges \right\}$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha V_0 jelöli a jobb oldalon álló halmazt, akkor a 20.13 tétel alapján $V \subseteq V_0$ teljesül. Mivel vektorok lineáris kombinációja is eleme a vektortérnek, ezért $V_0 \subseteq V$, vagyis $V = V_0$.

20.15. Tétel. *(Kicserélési lemma.) Legyen V vektortér, $n, k \in \mathbb{N}$, valamint legyen $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ és $(b_j)_{j=1,\dots,n}$ bázis. Ekkor minden $l \in \{1,\dots,k\}$ esetén létezik olyan $b_{j(l)}$ vektor, hogy az*

$$\{a_i | i \in \{1,\dots,k\} \setminus \{l\}\} \cup \{b_{j(l)}\}$$

vektorrendszer bázis.

Bizonyítás. Legyen V vektortér, $n, k \in \mathbb{N}$, valamint legyen $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ és $(b_j)_{j=1,\dots,n}$ bázis. Először indirekt módon azt tegyük fel, hogy van olyan $l \in \{1,\dots,k\}$ index, hogy minden $j \in \{1,\dots,n\}$ esetén az

$$\{a_i | i \in \{1,\dots,k\} \setminus \{l\}\} \cup \{b_j\}$$

vektorrendszer nem lineárisan független.
A jelölések egyszerűsítése végett legyen $I = \{1,\dots,k\} \setminus \{l\}$.
Ekkor minden $j \in \{1,\dots,n\}$ esetén vannak olyan $(\alpha_i^{(j)})_{i\in I}$ és β_j nem csupa nullából álló számok, hogy

$$\beta_j b_j + \sum_{i\in I} \alpha_i^{(j)} a_i = 0$$

teljesül. Ha $\beta_j = 0$, akkor az $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ rendszer lineáris függetlensége miatt minden $i \in I$ indexre $\alpha_i^{(j)} = 0$ teljesülne, ami ennentmond annak, hogy a fenti lineáris kombinációban nem minden együttható nulla. Tehát $\beta_j \neq 0$, vagyis minden $j \in \{1,\dots,n\}$ esetén

$$b_j = \sum_{i\in I} -\frac{\alpha_i^{(j)}}{\beta_j} a_i \subseteq \left\{ \sum_{i\in I} \gamma_i a_i |\ \forall i \in i \in I:\ \gamma_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Mivel lineáris kombinációk lineáris kombinációja is lineáris kombináció, ezért

$$V = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \delta_j b_j | \delta_1,\dots,\delta_n \in \mathbb{K} \right\} \subseteq \left\{ \sum_{i\in I} \gamma_i a_i |\ \forall i \in I:\ \gamma_i \in \mathbb{K} \right\},$$

amiből az $a_l \notin V$ ellentmondás adódik.
Eddig tehát ott tartunk a bizonyításban, hogy minden $l \in \{1,\dots,k\}$ esetén létezik olyan $b_{j(l)}$ vektor, hogy az

$$\{a_i | i \in \{1,\dots,k\} \setminus \{l\}\} \cup \{b_{j(l)}\}$$

vektorrendszer lineárisan független. Most igazoljuk, hogy ez a vektorrendszer bázis is. Ehhez legyen $l \in \{1,\dots,k\}$ tetszőleges és legyen olyan $b_{j(l)}$ olyan vektor, hogy az

$$\{a_i | i \in \{1,\dots,k\} \setminus \{l\}\} \cup \{b_{j(l)}\}$$

vektorrendszer lineárisan független. A továbbiakban is az $I = \{1,\dots,k\} \setminus \{l\}$ jelöléssel fogunk élni.
Indirekt módon tegyük fel, hogy a fenti vektorrendszer nem bázis. Legyen $x \in V$ olyan vektor, hogy a

$$\{a_i | i \in I\} \cup \{b_{j(l)}\} \cup \{x\}$$

vektorrendszer is lineárisan független. Mivel az $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ vektorrendszer bázis, ezért léteznek olyan $(\alpha_i)_{i=1,\dots,k}$ és $(\beta_i)_{i=1,\dots,k}$ számok, hogy

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i a_i + \alpha_l a_l$$

$$b_{j(l)} = \sum_{i \in I} \beta_i a_i + \beta_l a_l.$$

Mivel $\{a_i | i \in I\} \cup \{x\}$ lineárisan független, ezért $\alpha_l \neq 0$, valamint $\{a_i | i \in I\} \cup \{b_{j(l)}\}$ lineáris függetlensége miatt $\beta_l \neq 0$. Ekkor viszont

$$\sum_{i \in I} (\beta_l \alpha_i - \alpha_l \beta_i) a_i + \alpha_l b_{j(l)} - \beta_l x = 0$$

teljesül, ami ellentmond a

$$\{a_i | i \in I\} \cup \{b_{j(l)}\} \cup \{x\}$$

vektorrendszer is lineárisan függetlenségének.

20.16. Tétel. *Ha valamely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén az $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ és az $(f_j)_{j=1,\dots,m}$ vektorrendszer is bázis, akkor $n = m$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén az $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ és az $(f_j)_{j=1,\dots,m}$ vektorrendszer is bázis. Ha $n = 0$, akkor $V = \{0\}$, tehát a V vektortérben az egyetlen bázis a $\emptyset$, ezért $m = 0$.
Ha $n = 1$, akkor $V = \mathbb{K} \cdot e_1$. Az f_1 vektor felírható az e_1 bázisban, tehát létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, melyre $f_1 = \lambda e_1$. Viszont ekkor $V = \mathbb{K} \cdot f_1$ is teljesül, vagyis f_1 is bázis, ezért $m = 1$.
Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Mivel $(f_j)_{j=1,\dots,m}$ bázis, ezért az előző (20.15) állítás alapján az e_1 vektorhoz létezik olyan $f_{j(1)}$ bázisvektor, hogy a $\{e_i | i \in \{2, \dots, n\}\} \cup \{f_{j(1)}\}$ vektorrendszer bázis. Megint a 20.15 állítást használva a $\{e_i | i \in \{2, \dots, n\}\} \cup \{f_{j(1)}\}$ bázis e_2 elemére, azt kapjuk, hogy létezik olyan $f_{j(2)}$ bázisvektor, hogy a $\{e_i | i \in \{3, \dots, n\}\} \cup \{f_{j(1)}, f_{j(2)}\}$ vektorrendszer bázis. Ezt az eljárást n-szer alkalmazva azt kapjuk, hogy az $\{f_{j(i)} | i = 1, \dots, n\}$ halmazrendszer bázis. Mivel bázis nem lehet valódi részhalmaza bázisnak, ezért $m = n$.

20.17. Tétel. *A V vektortérben legyen $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ és $(f_j)_{j \in J}$ bázis. Ekkor $|J| = n$.*

Bizonyítás. A V vektortérben legyen $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ és $(f_j)_{j \in J}$ bázis. A 20.13 állítás alapján

$$V = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k e_k | \ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Mivel minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az e_i vektorhoz egyértelműen létezik olyan $J_i \subseteq J$ véges halmaz és a $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ halmaz elemeiből álló $(a_{ij})_{j \in J_i}$ számrendszer, melyre

$$e_i = \sum_{j \in J_i} a_{ij} f_j$$

teljesül, ezért a $J_0 = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ jelölés bevezetésével $(f_j)_{j \in J_0}$ is bázis. Mivel bázis nem lehet valódi részhalmaza bázisnak, ezért $J = J_0$, valamint J_0 véges sok véges halmaz uniója, ezért J_0 is véges. Legyen $|J_0| = m$.
Ekkor a 20.16 tétel alapján $n = m = |J_0| = |J|$ teljesül.

Megjegyzés. Hasonló módon igazolható, hogy ha $(e_i)_{i \in I}$ és $(f_j)_{j \in J}$ bázis a V vektortérben, akkor $|I| = |J|$.

◊

20.18. Definíció. Legyen V vektortér. Azt mondjuk, hogy a V vektortér
- *n-dimenziós* ($n \in \mathbb{N}$), ha létezik benne n elemszámú bázis;
- *véges dimenziós* ha n dimenziós valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén;
- *végtelen dimenziós*, ha nem véges dimenziós.

Megjegyzés. Általánosabban a vektortér dimenziója a bázis számossága.

◊

20.19. Definíció. Legyen V_1 és V_2 vektortér ugyanazon $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy az $A : V_1 \to V_2$ *leképezés lineáris*, ha
- $\forall x, y \in V_1 : \ A(x+y) = A(x) + A(y)$;
- $\forall x \in V_1 \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

A továbbiakban, ha nem okoz félreértést, az $A(x)$ vektort Ax alakban írjuk fel.

20.20. Tétel. *Ha V_1 és V_2 vektortér, akkor a*

$$\mathrm{Lin}(V_1, V_2) \triangleq \{A : V_1 \to V_2 |\ A \text{ lineáris}\}$$

halmaz vektorér a pontonkénti műveletekkel.

Bizonyítás. Legyen V_1 és V_2 vektortér, valamint legyen $A, B \in \mathrm{Lin}(V_1, V_2)$ és $c, c' \in \mathbb{K}$. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra

$$\begin{aligned}(A+B)(x+y) &= A(x+y) + B(x+y) = Ax + Ay + Bx + By = (A+B)(x) + (A+B)(y)\\ (A+B)(c'x) &= A(c'x) + B(c'x) = c'Ax + c'Bx = c'Ax + c'Bx = c'(A+B)x\end{aligned}$$

teljesül, tehát $A + B \in \mathrm{Lin}(V_1, V_2)$, valamint az

$$\begin{aligned}(cA)(x+y) &= cA(x+y) = cA(x) + cAy = (cA)x + (cA)y\\ (cA)(c'x) &= cA(c'x) = cc'Ax = c'(cA)x\end{aligned}$$

egyenletek miatt $cA \in \mathrm{Lin}(V_1, V_2)$. Az összeadás és a számmal való szorzás megkövetelt tulajdonságai egyszerűen ellenőrizhetők.

20.21. Definíció. Ha V vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor a $\mathrm{Lin}(V, \mathbb{K})$ halmazt a V *vektortér duálisának* nevezzük, és a továbbiakban a V^* szimbólummal jelöljük.

20.5. Valós számok szögfüggvényei

20.22. Tétel. *A* sin *és* cos *függvény* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. A sin és cos függvény 2π szerinti periodicitása miatt az

$$x' = x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi}\right]$$

számra $\sin x = \sin x'$ és $\cos x = \cos x'$ teljesül, valamint $0 \le x' < 2\pi$. Ekkor az 5.49 addíciós formulák és a 6.45 nevezetes szögek szögfüggvényei alapján

$$\sin x = \begin{cases} \sin x', & \text{ha} \quad 0 \le x' < \frac{\pi}{2};\\ \cos\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x' < \pi;\\ -\sin\left(x' - \pi\right), & \text{ha} \quad \pi \le x' < \frac{3\pi}{2};\\ -\cos\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{3\pi}{2} \le x' < 2\pi,\end{cases}$$

valamint

$$\cos x = \begin{cases} \cos x', & \text{ha} \quad 0 \le x' < \frac{\pi}{2};\\ -\sin\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x' < \pi;\\ -\cos\left(x' - \pi\right), & \text{ha} \quad \pi \le x' < \frac{3\pi}{2};\\ \sin\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{3\pi}{2} \le x' < 2\pi\end{cases}$$

adódik.

20.23. Tétel. *A* cos *függvény* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.*

Bizonyítás. Minden $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\frac{\pi}{2} - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, továbbá az addíciós tétel alapján

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Ezért ha ismerjük a koszinusz függvényt a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ halmazon, akkor itt a szinusz függvény értékeit is ismerjük, vagyis a 20.22 tétel alapján minden valós szám szögfüggvényét ismerjük.

20.24. Tétel. *Ha* $x \in [0, \pi]$, *akkor*

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \text{és} \quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in [0, \pi]$, akkor a cos függvényre vonatkozó 5.49 addíciós formula alapján

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \begin{cases} 2\left(\cos^2\frac{x}{2}\right) - 1; \\ 1 - 2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right). \end{cases}$$

Mivel $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és ekkor $\sin x, \cos x \geq 0$, ezért a fenti egyenletek átrendezéséből adódik az állítás.

20.25. Tétel. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $\qquad$ $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Bizonyítás. Elég a $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ formulát igazolni, hiszen $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}$. Megmutatjuk, hogy $2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ugyanis ebből már a félszögek szöggfüggvényeiről szóló 20.24 tétel alapján már adódik az állítás.
Legyen $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ és $q = 2\cos\frac{2\pi}{5}$. Ekkor az 5.41 Euler-tétel alapján

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = q,$$

valamint $x^5 = 1$, vagyis

$$0 = x^5 - 1 = \frac{x^5-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Tehát elég az $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ egyenletet kell megoldani az $q = x + \frac{1}{x}$ változóra nézve. Ez viszont egyszerű a

$$0 = x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2\right) = x^2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right) = x^2\left(q^2 + q - 1\right)$$

átalakítások, valamint a $q > 0$ feltétel miatt,

$$q = \frac{-1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

20.26. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ szám *fokban* kifejezett értéke $x\frac{180}{\pi}$ és a fokra utaló $^\circ$ szimbólumot írjuk mellé. (Pl. $x = \frac{\pi}{6}$ esetén $x = 30\,^\circ$.)

20.27. Tétel.

$$\sin 3^\circ = \left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{16} - \left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$$
$$\cos 3^\circ = \left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{16}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \frac{\pi}{5}$ és $\beta = \frac{\pi}{6}$. Ekkor $\alpha = 36^\circ$ és $\beta = 30^\circ$. Az α és a β szögfüggvényeit ismerjük a 20.25 és a 6.45 tételből. Az 5.49 addíciós formula alapján

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}.$$

A félszögekre vonatkozó 20.24 tétel segítségével az $\frac{\alpha-\beta}{2} = 3^\circ$ szinusza és koszinusza éppen a tételben leírt értéket adja.

Kiegészítés. Ennek alapján meghatározható a $k \cdot 3^\circ$ alakú számok szinusza és koszinusza, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (Sőt, a szögfelezésre vonatkozó tétel felhasználásával tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\frac{k}{2^n}\cdot 3^\circ$ szögfüggvényei is kiszámolhatók explicit alakban.) Az alábbiakban a kifejezések szimmetriája szerinti elrendezésben szerepelnek a szögek koszinuszai.

$$\left\{\cos 0^\circ = 1 \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 90^\circ = 0\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \cos 15^\circ = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} & \cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ \cos 75^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \cos 72^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} & \cos 54^\circ = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos 9^\circ = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} & \cos 27^\circ = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} + \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \\ \cos 63^\circ = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} & \cos 81^\circ = -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos 12^\circ = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \dfrac{-1+\sqrt{5}}{8} & \cos 24^\circ = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{8} \\ \cos 48^\circ = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{8} & \cos 84^\circ = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \dfrac{-1-\sqrt{5}}{8} \\ \cos 42^\circ = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{8} & \cos 6^\circ = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\dfrac{1+\sqrt{5}}{8} \\ \cos 78^\circ = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\dfrac{1-\sqrt{5}}{8} & \cos 66^\circ = -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\dfrac{1+\sqrt{5}}{8} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos 3^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 21^\circ = \frac{(-1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 33^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 39^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 57^\circ = \frac{(-1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 51^\circ = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 87^\circ = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 69^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

◊

20.28. Tétel.

$$\cos\frac{\pi}{17}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{17}+15+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-2\left(3+\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}$$

Bizonyítás. Elég $2\cos\frac{2\pi}{17}$ értékét meghatározni, ugyanis ebből már a félszögek szögfüggvényeiről szóló 20.24 tétel alapján már adódik az állítás.
Legyen $x=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{17}\right)$ és $q=2\cos\frac{2\pi}{17}$. Ekkor az 5.41 Euler-tétel alapján

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{2\pi}{17}=q,$$

valamint $x^{17}=1$, vagyis

$$0=x^{17}-1=\frac{x^{17}-1}{x-1}=\sum_{k=0}^{16}x^k.$$

Tehát az

$$\sum_{k=0}^{16}x^k=x^8\cdot\sum_{k=-8}^{8}x^k=0$$

átalakítás miatt elég az

$$\alpha_0=\sum_{k=-8}^{8}x^k=0$$

egyenletet megoldani az $q=x+\frac{1}{x}$ változóra nézve.
A 17 Fermat-prím, ugyanis $n=2$ esetén $17=2^{(2^n)}+1$. Legyen $p=17$ és válasszunk egy olyan $g\in\mathbb{N}$ számot, melyre

$$g^{\frac{p-1}{2}}\equiv-1 \mod p$$

teljesül. A továbbiakban a $g=3$ választással élünk. Az $i\in\{1,2,3\}$ esetben definiáljuk az alábbi polinomot.

$$\alpha_i=\sum_{k=0}^{2^{(2^n-i)-1}}x^{\left(g^{k\left(2^i\right)}\right)}$$

Az $x^{17}=1$ felhasználásával az alábbi polinomokat kapjuk.

$$\begin{aligned}\alpha_1&=x^{-8}+x^{-4}+x^{-2}+x^{-1}+x+x^2+x^4+x^8\\ \alpha_2&=x^{-4}+x^{-1}+x+x^4\\ \alpha_3&=x^{-1}+x\end{aligned}$$

A háttérben meghúzódó mélyebb okok részletezése nélkül megemlítjük, léteznek olyan β_1,β_2,β_3 polinomok és $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$ paraméterek, melyekre

$$\begin{aligned}\alpha_0&=a_1\alpha_1^2+b_1\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_0&=a_2\alpha_2^2+b_2\alpha_1\alpha_2+\beta_2\\ \alpha_0&=a_3\alpha_3^2+b_2\alpha_2\alpha_3+\beta_3\end{aligned}$$

teljesül, ahol $\beta_1\in\mathbb{R}$, β_2 kifejezhető az α_1 polinommal és β_3 kifejezhető az α_1,α_2 polinommal. Valóban, számolással ellenőrizhető, hogy

$$\alpha_0=\frac{1}{4}\alpha_1^2+\frac{1}{4}\alpha_1-1$$

$$\alpha_0 = -\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 + 1$$
$$\alpha_0 = 2\alpha_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_2 - 3).$$

Tehát az $\alpha_0 = 0$ miatt az első egyenlet alapján

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

Ekkor a második

$$\alpha_2^2 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}\alpha_2 - 1 = 0$$

egyenlet miatt

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}.$$

Ezek után a harmadik egyenlet megoldható az α_3 változóra nézve, ami a keresett q érték.

Megjegyzés. A fenti bizonyításban bemutatott módon lehet meghatározni $\cos\frac{\pi}{257}$ és $\cos\frac{\pi}{65537}$ értékét.

◊

20.6. Szummázások

Magyarázat. Többféle módszerrel lehet divergens számsorokhoz egyfajta általánosított határértéket rendelni. Most Cesáro módszerét tekintjük át.

20.29. Definíció. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatból képzett $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sort, amit az s szimbólummal fogunk jelölni. Vagyis

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto s_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} a_k$$

a részletösszeg sorozat. Minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a $\sigma^{(i)}$ sorozatot az alábbi módon. Az $i = 1$ esetben legyen

$$\sigma^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(1)} \triangleq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k,$$

az $i > 1$ esetben pedig

$$\sigma^{(i)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(i)} \triangleq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{(i-1)}.$$

Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ *sor* C_i *(Cesáro-) összegezhető*, ha létezik véges határértéke a $\sigma^{(i)}$ sorozatnak. Ebben az esetben a

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_i} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(i)}$$

jelölést használjuk.

Megjegyzés. Például ha a $\sum a$ sor C_1 összegezhető, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty}{}^{C_1} a_k = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)a_k$$

teljesül.

◊

20.30. Tétel. *Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sor konvergens, akkor C_1 összegezhető, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} a_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ olyan sorozat, melyhez rendelt $\sum a$ sor konvergens és vezessük be a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ jelölést. Definiáljuk a

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto s_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} a_k$$

részletösszeg sorozatot, illetve a

$$\sigma^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(1)} \triangleq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k,$$

sorozatot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ miatt $\lim_{n\to\infty} s_n = A$ teljesül. Azt kell igazolni, hogy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)} = A$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $\lim_{n\to\infty} s_n = A$ határérték miatt választhatunk olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, melyre minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $|s_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ számra

$$\begin{aligned}
\left|\sigma_n^{(1)} - A\right| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(s_k - A)\right| = \left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{N_1}(s_k - A) + \sum_{k=N_1+1}^{n}(s_k - A)\right)\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{N_1}|s_k - A| + \sum_{k=N_1+1}^{n}|s_k - A|\right) < \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1}|s_k - A| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1}|s_k - A| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

A becslésben az első tag kisebb lesz mint $\frac{\varepsilon}{2}$, ha az $n \in \mathbb{N}$ számra $N_2 < n$ teljesül, ahol

$$N_2 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \cdot \sum_{k=0}^{N_1}|s_k - A|\right].$$

Tehát az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $\left|\sigma_n^{(1)} - A\right| < \varepsilon$ teljesül.

20.31. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozathoz rendelt $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sor C_k összegezhető, akkor minden $m \in \mathbb{N}$, $k < m$ elemre C_m összegezhető, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_m} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_k} a_n.$$

Bizonyítás. Az előző (20.30) tétel $m - k$ alkalommal való alkalmazásával adódik.

20.32. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $|q| \leq 1$ és $q \neq 1$ teljesül. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Továbbá

1. *a* $\sum_n (-1)^{1+n}$ *sor* C_1 *összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} (-1)^n = \frac{1}{2};$$

2. *a* $\sum_n \sin(nx)$ *sor minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* C_1 *összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} \sin(nx) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \in \{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}; \\ \dfrac{1}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} & ha \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}; \end{cases}$$

3. *a* $\sum_n \cos(nx)$ *sor minden* $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$ *esetén* C_1 *összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} \cos(nx) = \frac{1}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $|q| \leq 1$ és $q \neq 1$ teljesül. Definiáljuk

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto s_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} q^k$$

részletösszeg sorozatot, illetve a

$$\sigma^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(1)} \triangleq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k,$$

sorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $s_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ és

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k+1}-1}{q-1} = \frac{1}{(n+1)(q-1)} \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} - 1 = \\ &= \frac{1}{(n+1)(q-1)} \left(q \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - (n+1) \right) = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{q(q^{n+1}-1)}{(q-1)^2} + \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

teljesül, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} q^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{q(q^{n+1}-1)}{(q-1)^2} + \frac{1}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q}.$$

Az 1. pont a $q = -1$ helyettesítéssel adódik.
A 2. és a 3. pont $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$ esetén a $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ helyettesítéssel igazolható, ugyanis ekkor $q \neq 1$ és

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} \cos(nx) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} \sin(nx) &= \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} (\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)) = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-1} = \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}} = \frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{2\,\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{2\,\mathrm{i}}\right)} = \frac{-\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\mathrm{i}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

teljesül.

20.7. Jensen-tétel következményei

20.33. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in [a, b]$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. A 6.2 Jensen-egyenlőtlenség alkalmazása az $x_1, \dots, x_n$ pontokra és a $S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ jelölés mellett az $\frac{\omega_1}{S}, \dots, \frac{\omega_n}{S}$ súlyokra.

20.34. Tétel. *(Súlyozott hatványközép.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, és minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméterre*

$$\alpha(r) \triangleq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^r}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ekkor az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad r \mapsto \begin{cases} \alpha(r) & ha \quad r \neq 0, \\ \lim_{r \to 0} \alpha(r) & ha \quad r = 0, \end{cases}$$

függvény monoton növő.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint minden $i = 1, \dots, n$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az $S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ jelölés mellett vezessük be minden $i = 1, \dots, n$ esetén az $a_i = \frac{\omega_i}{S}$ paramétereket, valamint minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$\alpha(r) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ekkor nyilván $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

A L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk meg a $\lim_{r \to 0} \alpha(r)$ határértéket.

$$\lim_{r \to 0} \alpha(r) = \lim_{r \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \to 0} \exp\left(\frac{1}{r} \cdot \log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r\right)\right) = \exp \lim_{r \to 0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, r} \log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r\right)\right) =$$

$$= \exp \lim_{r \to 0} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \log x_i = \exp\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i \log x_i\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \log x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

Vagyis a súlyozott hatványközép határértéke a 0 pontban a súlyozott geometriai közép.
Legyen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olyan melyre $0 < r_1 < r_2$ teljesül és tekintsük az

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto x^{\frac{r_2}{r_1}}$$

függvényt. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$f''(x) = \frac{r_2}{r_1} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right) x^{\frac{r_2}{r_1}-2} > 0$$

teljesül, vagyis f konvex függvény. A Jensen-egyenlőtlenség alapján ekkor

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1}\right) &\leq \sum_{i=1}^n a_i f\left(x_i^{r_1}\right) \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}} &\leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}} \\ \alpha(r_1) &\leq \alpha(r_2). \end{aligned}$$

Az $r_1 < r_2 < 0$ esetben az f függvény konkavitását kihasználva hasonló számolással adódik az $\alpha(r_1) \leq \alpha(r_2)$ egyenlőtlenség.
Azt kell még igazolni, hogy minden $r_1 < 0$ és $r_2 > 0$ esetén

$$\alpha(r_1) \leq \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \leq \alpha(r_2).$$

Ehhez elég felírni a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $(x_i^{r_2})_{i=1,\dots,n}$ számokra

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \left(x_i^{r_2}\right)^{a_i} &\leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \\ \left(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}\right)^{r_2} &\leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \\ \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} &\leq \alpha(r_2), \end{aligned}$$

illetve hasonló módon az $(x_i^{r_1})_{i=1,\dots,n}$ számokra.

Megjegyzés. Az előző tételt az $\omega_i = 1$, $1 \leq i \leq n$ paraméterekre alkalmazva az $f(-1) \leq f(0) \leq f(1)$ összefüggés adja a harmonikus-számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$\diamondsuit$

20.8. Wallis- és Stirling-formula

20.35. Tétel. *(Wallis-formula.)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{\pi}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}\, x$$

sorozatot. Ekkor elemi számolás alapján $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$ és $a_1 = 1$ nyilván teljesül, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a parciális integrálás szabályát felhasználva

$$a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n+1} x \,\mathrm{d}\, x = \left[-\cos x \cdot \sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^n x \,\mathrm{d}\, x =$$
$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^n x \,\mathrm{d}\, x = (n+1)(a_n - a_{n+2})$$

adódik, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$. Ennek a segítségével teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad a_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

teljesül. Szintén teljes indukcióval adódik az állításban szereplő formulára a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{\pi}{2a_{2n}}$$

felírás, tehát a bizonyítandó formula ekvivalens a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{n} a_{2n}} = \sqrt{\pi}$$

határértékkel, amihez elég megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} 4n a_{2n}^2 = \pi$$

teljesül.
Mivel miden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n} a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2},$$

továbbá az a sorozat monoton fogyó, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = a_{2n} a_{2n+1} \le a_{2n}^2 \le a_{2(n-1)} a_{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

teljesül, amiből az

$$\frac{4n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \le 4n a_{2n}^2 \le \frac{4n}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{n\to\infty} 4n a_{2n}^2 = \pi$$

adódik, amivel igazoltuk az állítással ekvivalens a 676 határértéket.

20.36. Tétel. *(Stirling-formula.)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Valamint $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ esetén a faktoriálisra érvényes a

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right)$$

becslés.

Bizonyítás. Definiáljuk az alábbi függvényt.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$\mathrm{A} :]-1,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(1+x)$ függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-közelítése alapján minden $x \in [0,1]$ esetén létezik olyan $c \in [0,x]$ paraméter, melyre

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{6}{(1+c)^4} \cdot \frac{1}{4!}x^4$$

teljesül, vagyis

$$g(x) = -\frac{6}{(1+c)^4} \cdot \frac{1}{4!}x^4,$$

amiből következik, hogy minden $x \in [0,1]$ esetén

$$0 \ge g(x) \ge -\frac{x^4}{4}.$$

Tekintsük a

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \log\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}\right)$$

sorozatot, amit $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \log k + \frac{1}{2}\log n - n(\log n - 1)$$

alakban is felírhatunk. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(b_{k+1} - b_k) = (n-1)b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = b_n - b_1,$$

ezt alkalmazva a $b_k = \log k$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) = (n-1)\log n - \sum_{k=1}^{n-1} \log k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n-1}(\log(k+1) - \log k) = \log n$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \log k + \frac{1}{2}\log n - n(\log n - 1) = \\ &= (n-1)\log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + \frac{1}{2}\log n - n\log n + n = \\ &= -\frac{1}{2}\log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + n = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(\log(k+1)-\log k) - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1)-\log k) + n =$$
$$= n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Az a sorozat ezen alakját kifejezhetjük a g függvény segítségével.

$$a_n = n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(g\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}\right) =$$
$$= n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)+1+\frac{1}{12k^2}+\frac{1}{6k^3}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)$$

Az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$ és az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3}$ sorozatnak létezik határértéke. A $\sum_k \left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)$ sor abszolút konvergens, ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} < \infty$$

teljesül, ezért konvergens is. Vagyis az a sorozat konvergens. Legyen $A = \lim a$. Mivel a sorozat minden részsorozata konvergens ugyan azzal a határértékkel ezért $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$ is teljesül, és ezek alapján

$$\mathrm{e}^A = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{2a_n}}{\mathrm{e}^{a_{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}}{\frac{(2n)!}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{4^n(n!)^2}{(2n!)} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1} = \sqrt{2\pi},$$

ahol felhasználtuk a Wallis-formulát. Tehát $A = \frac{1}{2}\log(2\pi)$, amiből

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

következik. Továbbá

$$n! = \mathrm{e}^{a_n}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e}^{a_n - A}\cdot\mathrm{e}^A\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n =$$
$$= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right) - \right.$$
$$\left. - \lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) =$$
$$= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \sum_{k=n}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

teljesül. A

$$\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le \int_{n-1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^3} \le \int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$$

$$-\frac{1}{4}\int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^4}\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{k=n}^\infty -\frac{1}{4k^4}\left(k+\frac{1}{2}\right) \le \sum_{k=n}^\infty \left(k+\frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \le \sum_{k=n}^\infty \left(k+\frac{1}{2}\right) 0 = 0$$

becslések alapján

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n}+\frac{1}{12n^2}-\frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right)$$

teljesül.

20.37. Tétel. *Legyen*

$$a:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R} \qquad n\mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\log n.$$

Ekkor az a sorozat monoton fogyó, minden $n\in\mathbb{N}^+$ elemre

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\le a_n \le 1$$

teljesül, valamint az a sorozat konvergens.

Bizonyítás. Ahhoz hogy az

$$a:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R} \qquad n\mapsto a_n \triangleq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\log n.$$

sorozat monoton csökkenéség igazoljuk, azt kell megmutatnunk, hogy minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén $a_n \ge a_{n+1}$. Ezt ekvivalens lépésekkel átalakítva

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\log n &\ge \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\log(n+1)\\
-\log n &\ge \frac{1}{n+1}-\log(n+1)\\
\log\left(\frac{n+1}{n}\right) &\ge \frac{1}{n+1}\\
(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &\ge 1\\
\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &\ge 1\\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &\ge \mathrm{e}\\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &\ge \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m
\end{aligned}$$

adódik. Tehát elég azt igazolni, hogy minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ehhez tekintsük az $a_1=\dots=a_m=1+\dfrac{1}{m}$ és a $b_1=\dots=b_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}$ számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\sqrt[n+m+1]{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}} \le \frac{m\left(1+\frac{1}{m}\right)+(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}{m+n+1} = \frac{m+1+n}{m+n+1}=1$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} \leq 1$$
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Mivel $a_1 = 1$ és a monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq 1$.
Az alsó becsléshez minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ esetén tekintük az

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

átalakítást. Mivel az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény konvex, ezért minden $k \in \{1,\dots,n-1\}$ esetén minden $x \in [k,k+1]$ számra a $t = k+1-x \in [0,1]$ paraméter mellett

$$f(tk+(1-t)(k+1)) \leq tf(k)+(1-t)f(k+1)$$
$$f(x) \leq \frac{k+1-x}{k} + \frac{x-k}{k+1}$$
$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x)$$

teljesül, vagyis

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right).$$

Ezek alapján minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ számra

$$\log n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

ezért

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

20.38. Definíció. A

$$\gamma \triangleq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

számot *Euler–Mascheroni-féle állandónak* nevezzük.

Kiegészítés. Még nem ismert, hogy γ racionális szám-e.

◊

20.9. A gamma függvény

20.39. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az*

$$\int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

improprius integrál konvergens.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$.
Az $x = 1$ esetben egyszerű számolással igazolható az improprius integrál konvergenciája.
Ha $x \in]0,1[$, akkor megmutatjuk, hogy az

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \qquad \text{és} \qquad \int_1^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

improprius integrál konvergens, tehát ezek összege is konvergens.
Tekintsük az

$$I :]0,1] \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_a^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton csökkenő és a minden $a \in]0,1]$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_a^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \le \int_1^a t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} \le \frac{1}{x}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$ határérték, vagyis az első integrál is konvergens.
Tekintsük az

$$I : [1,\infty[\to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_1^a t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növő és a minden $a \in [1,\infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_1^a t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \le \int_1^a \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-a} \le \mathrm{e}^{-1}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$ határérték, vagyis a második integrál is konvergens.
Ha $x \in]1,\infty[$, akkor az $a = x - 1$ paraméter pozitív. Legyen $n = [a] + 1$. A L'Hospital-szabályt n-szer alkalmazva kapjuk a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} = 0$$

határértéket, ami alapján létezik olyan $t_0 \in]1,\infty[$, hogy minden $t \in]t_0,\infty[$ számra

$$\frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} < 1.$$

Ekkor minden $t_0 < t$ paraméterre

$$0 \le t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \le t^n\,\mathrm{e}^{-t} \le \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

teljesül. Tekintsük az

$$I : [t_0,\infty[\to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_{t_0}^a t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növő és a minden $a \in [t_0,\infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) \le \int_{t_0}^a \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,t = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}} \le 2$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$ határérték. Vagyis az

$$\int_0^{t_0} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

összeg létezik, ami nem más mint $\int\limits_0^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$.

20.40. Definíció. A

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

függvényt *Euler-féle gamma-függvénynek* nevezzük.

20.41. Tétel. *(Az Euler-féle gamma-függvény és a faktoriális kapcsolata.)*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. *Minden* $x \in \mathbb{R}^+$ *esetén* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $n! = \Gamma(n+1)$ *teljesül.*

Bizonyítás. 1. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \lim\limits_{a\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a = \lim\limits_{a\to\infty} -\mathrm{e}^{-a} + 1 = 1.$

2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén parciális integrállással számolva

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{\infty} 1\cdot t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[t\cdot t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a - \int_0^{\infty} t\left((x-1)t^{x-2}\,\mathrm{e}^{-t} - t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}\,t = \\ &= -(x-1)\int_0^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\infty} t^{x}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

adódik, vagyis

$$\Gamma(x) = -(x-1)\Gamma(x) + \Gamma(x+1).$$

3. Az első két állítás segítségével n szerinti teljes indukcióval igazolható.

20.10. Az analitikus számelmélet pár tétele

20.42. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$ *és*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n.$$

1. *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $x \in]0,1[$ *esetén* $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!}$.
2. *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük az

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$$

függvényt. Ha $x \in]0,1[$, akkor

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$$

nyilván teljesül.
Legyen $m, k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor a k paraméter szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy a $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m(x) = x^m$) függvényre

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m)^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-k)!}x^{m-k}, & \text{ha} \quad k \le m \\ 0, & \text{ha} \quad k > m \end{cases}$$

teljesül. Ezért

$$f_n^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n \binom{n}{i}(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})^i\right)^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n+i}\right)^{(k)}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(n-i)!i!}\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(n+i)!}{(n+i-k)!}x^{n+i-k}, & \text{ha} & k \le n+i \\ 0, & \text{ha} & k > n+i \end{array}\right\},$$

vagyis
– ha $0 \le k < n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(n-i)!i!}\cdot\frac{(n+i)!}{(n+i-k)!}x^{n+i-k},$$

tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$;
– ha $n \le k \le 2n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k-n}^{n}\frac{(-1)^i}{(n-i)!i!}\cdot\frac{(n+i)!}{(n+i-k)!}x^{n+i-k},$$

tehát

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-n}}{(n-(k-n))!(k-n)!}\cdot\frac{(n+k-n)!}{(n+k-n-k)!} = \frac{(-1)^{k-n}k!}{(2n-k)!(k-n)!} = (-1)^{k-n}\binom{k}{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!},$$

amiből $\binom{k}{k-n}, \dfrac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{Z}$ miatt $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ következik;
– ha $2n < k$, akkor $f_n^{(k)}(x) = 0$, tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Tehát minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f_n(x) = f_n(1-x)$ érvényes, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

20.43. Tétel. *A π^2 szám irracionális.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $a, b \in \mathbb{N}^+$ pár melyre $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f_n^{(2k)}(x)$$

függvényt. A 20.42 állítás alapján $F_n(0), F_n(1) \in \mathbb{Z}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_n''(x) + \pi^2 F_n(x) = b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f_n^{(2k+2)}(x) + b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k+2}f_n^{(2k)}(x) =$$

$$= b^n \sum_{k=1}^{n+1} -(-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) + b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) =$$
$$= b^n (-1)^{n+2} \pi^0 f_n^{(2n+2)}(x) + b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = a^n \pi^2 f_n(x)$$

teljesül, ugyanis f_n egy $2n$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(2n+2)} = 0$.
Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x).$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n''(x)\sin(\pi x) + \pi F_n'(x)\cos(\pi x) - \pi F_n'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x)\sin(\pi x) = a^n \pi^2 f_n(x)\sin(\pi x),$$

ezért

$$a^n \pi \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\left(\varphi_n(1) - \varphi_n(0)\right) = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$

Valamint a 20.42 állításban szereplő becslés alapján

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\ \mathrm{d}\,x < \frac{\pi a^n}{n!}$$

teljesül. Mivel a 4.44 állítás miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi a^n}{n!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left|\frac{\pi a^n}{n!}\right| < \frac{1}{2}.$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a^n \pi \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\ \mathrm{d}\,x$ olyan egész szám lenne, mely a $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ intervallumban helyezkedik el, ezzel ellentmondást kaptunk.

20.44. Tétel. *Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \dfrac{a}{b}$ és*

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n}\left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

1. *Minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ szám esetén $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$.*
2. *Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.*
3. *Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \dfrac{a}{b}$ és

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n}\left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

A binomiális kifejtési tétel alapján a g_n függvény a

$$g_n(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} (x-\alpha)^{2l}$$

alakban is felírható. Tehát a 20.42 tétel bizonyításában részletezett deriválási szabály alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_n^{(k)}(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{(2l)!}{(2l-k)!}(x-\alpha)^{2l-k}, & \text{ha} & k \le 2l; \\ 0, & \text{ha} & k > 2l. \end{array} \right\}$$

1. A fenti felírásból rögtön adódik, hogy minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ számra $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$ teljesül.
2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel $k = 2m$ alakban.
Ha $m > 2n-1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, vagyis $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $m \leq 2n-1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \frac{(2l)!}{(2l-2m)!} 0^{2l-2m}.$$

Tehát ha $m < n$, akkor $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $n \leq m \leq 2n-1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!(2n-1-m)!} a^{4n-2m-2} b^{2m+1-n} \frac{(2m)!}{1} \cdot 1.$$

Mivel $0 \leq 4n-2m-2$ és $0 \leq 2m+1-n$, ezért $a^{4n-2m-2}, b^{2m+1-n} \in \mathbb{N}$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $\dfrac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} \in \mathbb{Z}$. Ez viszont a

$$\frac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} = \binom{2n-1}{m} \cdot \frac{(2m)!}{(2n-1)} \cdot \frac{m!}{(m-n)!}$$

felbontásból látszik, hiszen $\dbinom{2n-1}{m}, \dfrac{(2m)!}{(2n-1)}, \dfrac{m!}{(m-n)!} \in \mathbb{N}^+$.
3. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel a $k = 2m$ alakban. A g_n függvény a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}(a-bx)^{2n}(2a-bx)^n}{(n-1)!}$$

alakjából világos, hogy egy $4n-2$ fokszámú polinom, amit fel lehet írni a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^l = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^{n-1+l}$$

formában, ahol $c_0, \ldots, c_{3n-1} \in \mathbb{Z}$. Ebből

$$g_n^{(2m)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(n-1+l)!}{(n-1+l-2m)!} x^{n-1+l-2m}, & \text{ha} \quad 2m \leq n-1+l; \\ 0, & \text{ha} \quad 2m > n-1+l \end{array} \right\}$$

adódik.
Vagyis ha $m > 2n-1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, ezért $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $m < \dfrac{n-1}{2}$, akkor $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ szintén teljesül.
Ha $\dfrac{n-1}{2} \leq m \leq 2n-1$, akkor

$$g_n^{(2m)}(0) = \frac{1}{(n-1)!} c_{2m-n+1} \frac{(n-1+2m-n+1)!}{1} \cdot 1 = c_{2m-n+1} \frac{(2m)!}{(n-1)!}$$

ami a $n-1 \leq 2m$ egyenlőtlenség miatt egész szám.

20.45. Tétel. *Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, akkor e^x irracionális.*

Bizonyítás. A minden $x \in \mathbb{R}$ számra érvényes $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ összefüggés miatt elég minden $\mathbb{Q} \cap]0, \infty[$ számra igazolni az állítást.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\alpha = \dfrac{a}{b}$ és $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{c}{d}$ teljesül, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$.
Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} \left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x)$$

függvényt. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_n(x) - F_n''(x) + = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=1}^{2n} f_n^{(2k)}(x) =$$
$$= f_n(x) - f_n^{(4n)}(x) = f_n(x)$$

teljesül, ugyanis f_n egy $4n-2$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(4n)} = 0$.
Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto F_n(x)\operatorname{ch}(x) - F_n'(x)\operatorname{sh}(x).$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n'(x)\operatorname{ch}(x) + F_n(x)\operatorname{sh}(x) - F_n''(x)\operatorname{sh}(x) - F_n'(x)\operatorname{ch}(x) = f_n(x)\operatorname{sh}(x),$$

ezért

$$\int_0^\alpha f_n(x)\operatorname{sh}(x)\ \mathrm{d}\,x = \varphi_n(\alpha) - \varphi_n(0) = F_n(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha) - F_n'(\alpha)\operatorname{sh}(\alpha) - F_n(0).$$

A 20.44 alapján $F_n'(\alpha) = 0$ és $F_n(\alpha), F_n(0) \in \mathbb{Z}$. Továbbá az $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{c}{d}$ feltevés miatt $\operatorname{ch}\alpha = \dfrac{p}{q}$ alakú, ahol $p = c^2 + d^2$, $q = 2cd$, vagyis $p, q \in \mathbb{N}^+$. Ezért

$$Z_n = q\int_0^\alpha f_n(x)\operatorname{sh}(x)\ \mathrm{d}\,x \in \mathbb{Z}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel minden $0 < x < \alpha$ számra $0 < f_n(x), \operatorname{sh}(x)$, ezért $0 < Z_n$, valamint minden $0 < x < \alpha$ számra

$$f_n(x)\operatorname{sh}(x) \le b^{3n-1}\frac{\alpha^{2n}(\alpha^2)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sh}\alpha = a^2\operatorname{sh}(\alpha)\frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!},$$

ezért

$$Z_n \le a^2\alpha\operatorname{sh}(\alpha)\frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Mivel a 4.44 állítás miatt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left|a^2\alpha\operatorname{sh}(\alpha)\frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!}\right| < \frac{1}{2}.$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén Z_n olyan egész szám lenne, melyre $0 < Z_n < \dfrac{1}{2}$ teljesülne.

20.46. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén elölje $\mathcal{P}_n$ az n számnál kisebb prímszámok halmazát. Ekkor*

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\frac{1}{p} \ge \log\log n - 2.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n}$$

teljesül, ebből viszont

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

adódik.
Ha $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, akkor a 7.42 tétel alapján

$$\log \frac{1}{1-x} = -\log \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

teljesül, aminél felhasználva, hogy $x \leq \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{k+3} \leq x + \frac{x^2}{2} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{2} =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x + x^2$$

adódik, vagyis minden $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ esetén

$$\log \frac{1}{1-x} \leq x + x^2.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ekkor az $f, g : [1, n+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$g = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1[} + \frac{1}{n} \chi_{[k,k+1[}$$

függvényekre minden $x \in [1, n+1]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, ezért

$$\int_1^{n+1} f \leq \int_1^{n+1} g.$$

Mivel

$$\int_1^{n+1} f = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \qquad \text{és} \qquad \int_1^{n+1} g = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

és a log függvény monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra

$$\log n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

teljesül.
Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq 3$. Minden p prímszám esetén legyen $\mu_p(n)$ az az egyértelműen meghatározott egész szám, melyre

$$p^{\mu_p(n)-1} \leq x < p^{\mu_p(n)}$$

teljesül. Definiáljuk az

$$A(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\mu_p(n)} \frac{1}{p^k}$$

számot. A számelmélet alaptétele szerint minden pozitív természetes szám egyértelműen felbontható prímszámok szorzatára. Ezért az

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_1^{\mu_{p_1}(n)}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_2^{\mu_{p_2}(n)}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k} + \cdots + \frac{1}{p_k^{\mu_{p_k}(n)}}\right)$$

szorzatban minden $\frac{1}{k}$ alakú szám előfordul $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ezért

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} > A(n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log n,$$

aminek a logaritmusát véve

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} + \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p^2} > \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \geq \log \log x.$$

Ebből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

20.47. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ számot *algebrai számnak* nevezünk, ha létezik olyan egész együtthatós, nem nulladfokú polinom, melynek x gyöke. A nem algebrai számokat *transzcendens* számoknak nevezzük.

Megjegyzés.

20.48. Tétel. *(Az algebrai számok alaptulajdonságai.)*

1. *Az algebrai számok rendezett testet alkotnak.*
2. *Ha egy polinom együtthatói algebrai számok, akkor a polinom gyökei is algebrai számok.*
3. *Az algebrai számok halmaza megszámlálható.*
4. *Az algebrai számok halmaza nulla mértékű.*

◊

20.49. Tétel. *Az* e *szám transzcendens.*

Bizonyítás. Minden $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinom esetén legyen $\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \, x^i$ és

$$I_p : [0, \infty[\to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \int_0^t \mathrm{e}^{t-x} \, p(x) \, \mathrm{d}\, x.$$

Parciális integrálással

$$I_p(t) = \mathrm{e}^t \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(0) - \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(t)$$

adódik, valamint egyszerűen becsülhető $|I_p(t)|$

$$|I_p(t)| \leq |t| \cdot \left(\sup_{x \in [0,t]} \left| \mathrm{e}^{t-x} \right| \right) \cdot \left(\sup_{x \in [0,t]} |p(x)| \right) \leq t \, \mathrm{e}^t \, \tilde{p}(t).$$

Tegyük fel, hogy e gyöke a

$$p(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$$

polinomnak, ahol minden $i = 0, \dots, r$ esetén $a_i \in \mathbb{Z}$, valamint $a_0, a_r \neq 0$. Legyen p olyan prímszám, melyre $p > \max\{r, |a_0|\}$ teljesül. Legyen $f(x) = x^{p-1} \prod_{i=1}^{r} (x-i)^p$ és tekintsük a $J = \sum_{i=0}^{r} a_i I_f(i)$ számot, melynek definíciójából adódik, hogy $J \in \mathbb{Z}$. Mivel $p(\mathrm{e}) = 0$, ezért $J = -\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{(r+1)p-1} a_i f^{(j)}(i)$, amit átírhatunk a

$$J = -\sum_{j=p-1}^{(r+1)p-1} a_0 f^{(j)}(0) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=p}^{(r+1)p-1} a_i f^{(j)}(i)$$

alakba. Itt a jobb oldalon minden tagnak osztója a $p!$ kivéve az $a_0 f^{(p-1)}(0) = a_0(p-1)!(-1)^{rp}(r!)^p$ tagot. Mivel $p > |a_0|$ ezért $|J|$ olyan egész, melynek nem oszthatója a $p!$, de $(p-1)!$ már igen, ezért $(p-1)! \leq |J|$. Valamint minden $k = 0, \ldots, r$ szám esetén

$$|I_f(k)| \leq k\,\mathrm{e}^k\,\tilde{f}(k) = k\,\mathrm{e}^k\,k^{p-1}\prod_{i=1}^{r}(k+i)^p \leq \mathrm{e}^k(2r)^{(r+1)p}.$$

Vagyis

$$|J| \leq \sum_{k=0}^{r}|a_k|\,|I_f(k)| \leq \sum_{k=0}^{r}|a_k|\,\mathrm{e}^k(2r)^{(r+1)p} \leq \alpha\beta^p,$$

ahol $\alpha = \sum_{k=0}^{r}|a_k|\,\mathrm{e}^k$ és $\beta = (2r)^{r+1}$. Tehát az alábbi becslésünk adódik

$$1 \leq \frac{|J|}{(p-1)!} \leq \frac{\alpha\beta^p}{(p-1)!},$$

ami ellentmondáshoz vezet, hiszen $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\alpha\beta^n}{(n-1)!} = 0$.

Kiegészítés. Ismeretlen, hogy többek között az $\mathrm{e}\pm\pi$, az $\mathrm{e}\,\pi$ és a $\zeta(3)$ számok algebrai számok-e. ◊

Tárgymutató

arccos, 101, 113
arcsin, 101, 113
cos, 101, 113
exp, 113
ln, 75
log, 75, 113
arch, 104, 113
arctg, 101, 113
arsh, 104, 113
arth, 104, 113
ch, 104, 113
e, 73, 75
sh, 104, 113
tg, 101, 113
th, 104, 113
π, 97
sin, 101, 113
l^p-tér, 296

Abel-átrendezés, 72
Abel-féle konvergenciakritérium, 72
Abel-tétel, 208, 342
abszolút érték, 31
    improprius ∼, 31
abszolút konvergens sor, 61, 180, 285
algebra
    Banach-∼, 292
    normált ∼, 292
algebra alaptétele, 196
algebrai bázis, 435
alsó integrál, 140
alsó közelítő összeg, 139
alsó korlát, 10
altér
    metrikus tér ∼e, 248
analitikus függvény, 123
Apery-tétel, 63
approximáció Bernstein-polinomokkal, 209, 347, 352
area
    koszinusz hiperbolikus, 104, 113
    szinusz hiperbolikus, 104, 113
    tangens hiperbolikus, 104, 113
argumentum-elv, 426
arkhimédészi módon rendezett test, 20
arkusz
    koszinusz, 101, 113
    szinusz, 101, 113
    tangens, 101, 113
aszimptota, 108
axióma
    üreshalmaz ∼, 2
    általánosított kontinuum hipotézis ∼ja, 27
    egyesítési ∼, 3
    hatványhalmaz ∼, 3
    helyettesítési ∼séma, 4
    kiválasztási ∼, 8
    kontinuum hipotézis ∼ja, 26
    meghatározottsági ∼, 2
    pár∼, 2
    részhalmaz ∼séma, 3
    regularitási ∼, 3
    végtelenségi ∼, 3
általánosított
    Bernstein-polinom, 352
    kontinuum hipotézis, 27
    sorozat, 57
átmérő, 271
átrendezés, 67
átviteli elv
    folytonosságra, 89, 170, 263
    határértékre, 84, 168, 262

bázis
    algebrai, 435
Baire-féle kategóriatétel, 281
bal oldali határérték, 85
Banach
    ∼-algebra, 292
    ∼-féle fixponttétel, 190, 270
    ∼-tér, 164, 285
befedés, 41
belső pont, 38, 159, 247
belseje egy halmaznak, 38, 159, 247
Bernoulli-egyenlőtlenség, 29
Bernstein-polinom, 209, 347
    általánosított ∼, 352
    approximáció ∼okkal, 209, 347, 352
bijekció, 6
binomiális tétel, 31
binomiális-sorfejtés, 124
Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétele, 48
Bolzano–Weierstrass-tétel, 48, 166, 178, 257
Bolzano-tétel, 91
Borel–Lebesgue-tétel, 41
Bunyakovszkij–Cauchy-egyenlőtlenség, 153
Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, 155, 325

Cantor
    ∼-féle közösrész tétel, 41, 165, 254
    ∼-tétel, 7
    -halmaz, 137
Carl Neumann-féle sor, 184, 290, 292
Casorati–Weierstrass-tétel, 427

Cauchy
∼–Hadamard-tétel, 73, 206, 341
∼–Schwarz-egyenlőtlenség, 153
∼-egyenlőtlenség, 155, 325
∼-féle gyökkritérium, 64
∼-féle maradéktag, 119
∼-kritérium, 51, 59
∼-kritérium határértékre, 85
∼-sorozat, 50, 163, 253
∼-szorzat, 70
∼-tétel, 109
Cauchy első integrálformulája, 422
Cauchy intergáltétele, 422
Cauchy második integrálformulája, 423
Cauchy-egyenlőtlenség, 424
Cauchy-transzformált, 423
Clairaut-tétel, 235
Csebisev-tétel, 132
csoport, 7
Abel-∼, 7
kommutatív ∼, 7

D'Alembert-féle hányadoskritérium, 65
Dedekind-szelet, 17
Descartes-szorzat, 5
halmazrendszer ∼a, 8
diffeomorf
függvény, 105
diffeomorfizmus, 105
differenciálható
n-szer ∼ függvény, 116, 234, 382
n-szer folytonosan ∼ függvény, 116, 234, 382
függvény, 105, 213, 356
komplex függvény, 415
végtelenszer ∼ függvény, 116, 234, 382
dimenzió, 438
Dini-tétel, 339
Dirichlet-féle
konvergenciakritérium, 72
lokalizációs tétel, 405
magfüggvény, 404
divergencia, 223
függvény, 223
divergens
imprius integrál, 154
sor, 59, 180, 285
sorozat, 43, 51, 160, 251

e, 75
egész függvény, 415
egész számok, 15
egyenlőtlenség
Hölder-∼, 117
Jensen-∼, 79
Minkowski-∼, 118
számtani-mértani ∼, 33, 117
egyenletes konvergencia, 197, 333
egyenletesen folytonos függvény, 92, 174, 267
egyszerű rekurzió tétele, 12
egyszeresen összefüggő halmaz, 422
ekvipotens, 22
ekvivalenciaosztály, 11
ekvivalenciareláció, 11
ekvivalens metrikák, 250
ekvivalens normák, 176
előrendezés, 57
előrendezett halmaz, 57
elemi függvények deriváltja, 109
elemi függvények inverze, 113
elnyelő halmaz, 312
első kategóriájú halmaz, 280
elsőfajú szakadás, 90
Euler képlet, 99
Euler-tétel, 74
exponenciális függvény, 73
érintési pont, 38, 159, 247
érintő, 119

függvény, 6
∼ek érintkezése, 120
∼háló, 349
∼sor, 197, 333
∼sor egyenletes konvergenciája, 197, 333
∼sorozat, 197, 333
∼sorozat egyenletes konvergenciája, 197, 333
n-szer differenciálható ∼, 116, 234, 382
n-szer folytonosan differenciálható ∼, 116, 234, 382
érintője, 119
alsó integrálja, 140
analitikus ∼, 123
aszimptotája, 108
bal inverze, 7
bal oldali határértéke, 85
bijektív ∼, 6
Cauchy-transzformáltja, 423
differenciálható ∼, 105, 213, 356
divergenciája, 223
egész ∼, 415
egyenletesen folytonos ∼, 92, 174, 267
elsőfajú szakadása, 90
exponenciális ∼, 73
felső integrálja, 140
folytonos ∼, 86, 170, 263
folytonosan differenciálható ∼, 105, 213, 356
görbe menti integrálja, 418
gradiense, 222
gyöke, 79
határértéke, 80, 167, 261

határozatlan integrálja, 127
határozott integrálja, 140
holomorf ∼, 415
improprius integrálja, 154
injektív ∼, 6
inklúzió ∼, 9
integrálja, 140
inverze, 6
jobb inverze, 7
jobb oldali határértéke, 85
kompakt tartójú ∼, 337
konkáv ∼, 79, 392
konvex ∼, 79, 392
korlátos ∼, 200, 336
koszinusz ∼, 73
koszinusz hiperbolikus ∼, 73
kotangens ∼, 73
kotangens hiperbolikus ∼, 73
Kronecker-∼, 345
Laurent-sorfejtése, 426
Lipschitz-folytonos ∼, 270
lokális maximuma, 121, 240, 389
lokális minimuma, 121, 240, 389
lokális szélsőértéke, 121, 240, 389
másodfajú szakadása, 90
megszüntethető szakadása, 90
meromorf ∼, 426
monoton ∼, 79
monoton fogyó ∼, 79
monoton növő ∼, 79
nyílt ∼, 173, 266
nyeregpontja, 242
oszcillációja, 141
páratlan ∼, 79
páros ∼, 79
pólusa, 426
periódusa, 79
periodikus ∼, 79
pontonkénti határ∼, 197, 333
primitív ∼, 127, 419
projekció ∼, 9
racionális ∼, 132
refuláris ∼, 415
reziduuma, 426
Riemann-féle zéta-∼, 63
Riemann-integrálja, 140
rotációja, 223
sűrűn értelmezett ∼, 269
szürjektív ∼, 6
szétválasztó ∼halmaz, 349
szakadása, 90
szigorú lokális maximuma, 121, 240, 389
szigorú lokális minimuma, 121, 240, 389
szigorú lokális szélsőérték, 121
szigorúan konkáv ∼, 392
szigorúan konvex ∼, 392
szigorúan monoton ∼, 79
szigorúan monoton fogyó ∼, 79
szigorúan monoton növő ∼, 79
szinusz ∼, 73
szinusz hiperbolikus ∼, 73
tangens ∼, 73
tangens hiperbolikus ∼, 73
tartója, 337
végtelenben eltűnő ∼, 337
végtelenszer differenciálható ∼, 116, 234, 382
zérushelye, 79
függvényháló, 349
függvénysor, 197, 333
egyenletes konvergenciája, 197, 333
pontonként abszolút konvergens ∼, 197, 333
pontonkénti összegfüggvénye, 197, 333
tagonkénti differenciálhatósága, 205, 229, 377
tagonkénti integrálása, 205
függvénysorozat, 197, 333
egyenletes konvergenciája, 197, 333
pontonkénti határfüggvénye, 197, 333
tagonkénti differenciálhatósága, 204, 228, 375
tagonkénti integrálása, 205
félcsoport, 7
kommutatív ∼, 7
félnormált tér, 313
félnorma, 313
faktoriális, 31
Fejér-tétel, 412
felfelé irányított rendezés, 57
felosztás, 138
alsó közelítő összege, 139
felső közelítő összege, 139
felosztások egyesítése, 138
felső integrál, 140
felső közelítő összeg, 139
felső korlát, 10
feltételes szélsőérték, 242
feltételesen konvergens sor, 67
feltétlen konvergens sor, 67
finomabb felosztás, 138
folytonos
∼an differenciálható függvény, 105, 116, 213, 234, 382
egyenletesen ∼ függvény, 92, 174, 267
függvény, 86, 170, 263
folytonosan differenciálható
komplex függvény, 415
folytonosan differenciálható függvény, 356
folytonosság topologikus jellemzése, 89, 90, 172, 265, 266
formula, 1

∼k ekvivalenciája, 2
Fourier-együttható, 401
Fourier-sor, 401
Frehcet-derivált, 213, 356
funkcionál, 288

görbe indexfüggvénye, 421
Goursat-lemma, 420
gradiens, 222
függvény, 222
gyök, 79
n-edik ∼, 30
gyökkritérium, 64
sorozatokra, 53

Hölder-egyenlőtlenség, 117
hányadoskritérium, 65
sorozatokra, 53
halmaz, 1
∼ok Descartes-szorzata, 5
∼ok egyesítése, 3
∼ok különbsége, 4
∼ok metszete, 3
∼ok távolsága, 191
∼ok uniója, 3
összefüggő ∼, 275
átmérője, 271
ívszerűen összefüggő ∼, 275
alulról korlátos ∼, 10
befedése, 41
belső pontja, 38, 159, 247
belseje, 38, 159, 247
Cantor-∼, 137
egyszeresen összefüggő ∼, 422
ekvipontens ∼ok, 22
előrendezett ∼, 57
elemének lenni, 1
elnyelő ∼, 312
első kategóriájú ∼, 280
felülről korlátos ∼, 10
határ pontja, 38, 159, 247
határa, 38, 159, 247
hatvány∼, 3
induktív ∼, 3
infimuma, 10
izolált pontja, 38, 159, 247
kompakt ∼, 41, 164, 254
kontinuum számosságú ∼, 23
konvex ∼, 191, 312
korlátos ∼, 10, 37, 157, 245, 283
Lebesgue nulla mértékű ∼, 135
lezártja, 38, 159, 247
lokálisan kompakt ∼, 255
második kategóriájú ∼, 280
megszámlálható ∼, 23
megszámlálhatóan végtelen ∼, 23
monoton ∼, 3
nulla mértékű ∼, 135
nyílt ∼, 37, 157, 245, 283
rákövetkezője, 3
részbefedése, 41
relatív kompakt ∼, 255
rendezett ∼, 9
sűrű ∼, 40, 160, 248
sehol sem sűrű ∼, 280
szétválasztó ∼, 349
szimmetrikus ∼, 312
szukcesszora, 3
szuprémuma, 10
teljes ∼, 163, 253
teljesen korlátos ∼, 258, 259
torlódási pontja, 38, 81, 159, 247
véges ∼, 23
végtelen ∼, 23
zárt ∼, 37, 157, 245, 283
halmazrendszer, 8
Descartes-szorzata, 8
metszete, 3, 8
uniója, 8
határ pont, 38, 159, 247
határérték, 82
függvény ∼e, 80, 167, 261, 262
függvény bal oldali ∼e, 85
függvény jobb oldali ∼e, 85
kettős indexű sorozat ∼e, 51
sor ∼e, 59, 180, 285
sorozat ∼e, 43, 160, 251
végtelen ∼, 43
határfüggvény, 197, 333
határozatlan integrál, 127
elemi ∼, 127
határozott integrál, 140
hatványhalmaz, 3
hatványozás, 75
hatványsor, 73, 206, 341
deriválása, 108, 417
konvergenciasugara, 73, 206, 341
Hausdorff-tétel, 261
Heine–Borel-tétel, 166, 177
Heine-tétel, 92, 174, 268
helyettesítéses integrál, 128
hibatag, 66
Hilbert-tér, 326
pre∼, 326
Hirschmann–Widder–Gelfond-tétel, 352
holomorf függvény, 415
homeomorfizmus, 173, 267
homotóp görbék, 422
Hurwitz-tétel, 428

identitásreláció, 5
implicitfüggvény tétel, 233, 380

improprius abszolút érték, 31
indefinit multilineáris leképezés, 189
indexfüggvény, 421
indexhalmaz, 8
indexsorozat, 44, 161, 251
induktív halmaz, 3
induktívan rendezett halmaz, 10
infimum, 10
injekció, 6
inklúzió függvény, 9
integrál, 140
    divergens improprius ∼, 154
    elemi határozatlan ∼, 127
    függvény alsó ∼ja, 140
    függvény felső ∼ja, 140
    határozatlan ∼, 127
    helyettesítéses ∼, 128
    improprius ∼, 154
    konvergens improprius ∼, 154
    parciális ∼ás, 128
integrálszámítás középértéktételei, 151
intervallum, 10, 20
    felosztása, 138
    hossza, 135
inverz
    elemi függvények ∼e, 113
    függvény ∼e, 6
inverzfüggvény tétel, 230, 377
iránymenti derivált, 218, 360
izolált pont, 38, 159, 247
izometria, 269
ívszerűen összefüggő halmaz, 275
ívszerűen összefüggő metrikus tér, 275

jólrendezett halmaz, 10
Jacobi-determináns, 222
Jacobi-mátrix, 222
Jensen-egyenlőtlenség, 79
jobb oldali határérték, 85

környezet, 38, 159, 247
középértéktétel
    deriválásra vonatkozó ∼, 109, 110
    integrálszámítás ∼ei, 151
közelítő összeg
    felosztás alsó ∼e, 139
    felosztás felső ∼e, 139
kettős indexű sorozat, 51
    határértéke, 51
kiválasztási axióma, 8
kompakt
    halmaz, 41, 164, 254
    lokálisan ∼, 255
    relatív ∼, 255
    tartójú függvény, 337
komplex függvény
    differenciálható ∼, 415
    folytonosan differenciálható ∼, 415
komplex számok, 21
kondenzációs kritérium, 62
konkáv függvény, 79, 392
kontúrhomotóp görbék, 422
kontinuum hipotézis, 26
    általánosított ∼, 27
kontinuum számosságú halmaz, 23
kontrakció, 189, 270
konvergenciasugár, 73, 206, 341
konvergens
    abszolút ∼ sor, 61
    improprius integrál, 154
    pontonként abszolút ∼, 197, 333
    sor, 59, 180, 285
    sorozat, 43, 51, 160, 251
konvex
    függvény, 79, 392
    halmaz, 191, 312
konvolúció, 70
korlátos
    függvény, 200, 336
    halmaz, 37, 157, 245, 283
    sorozat, 44, 161, 251
korlátos részletösszegű sorozat, 72
korlátos változású sorozat, 72
koszinusz, 73, 101, 113
koszinusz hiperbolikus, 73, 104, 113
kotangens, 73
kotangens hiperbolikus, 73
Kronecker-függvény, 345
Kuratowski–Zorn-lemma, 10

L'Hospital szabály, 114
láncszabály, 107, 217, 359
Lagrange multiplikátor, 244
Lagrange-féle maradéktag, 119
Lagrange-tétel, 110
Laplace-operátor, 223
Laurent-sorfejtés, 426
Laurent-tétel, 425
Lebesgue
    ∼-lemma, 256
    ∼-tétel, 148
    nulla mértékű halmaz, 135
legkisebb elem, 10
legnagyobb elem, 10
Leibniz-sor, 66
leképezés
    multilineáris ∼, 186
    szimmetrikus ∼, 188
lezártja egy halmaznak, 38, 159, 247
lim, 43, 82, 167, 261, 262
limesz, 43, 82, 161, 251
    inferior, 49

szuperior, 49
lim inf, 49
lim sup, 49
lineáris függetlenség, 435
lineáris leképezés, 181
mátrixa, 182
lineárisan rendezett halmaz, 10
Liouville-tétel, 424
Lipschitz-folytonos függvény, 270
lokális
maximum, 121, 240, 389
minimum, 121, 240, 389
szélsőérték, 121, 240, 389
lokális maximum elve, 427
lokális minimum elve, 427
lokálisan kompakt
halmaz, 255
tér, 255
Ludolf-féle szám, 97

Müntz–Szász-tétel, 352
másodfajú szakadás, 90
második kategóriájú halmaz, 280
mátrix, 182
művelet, 7
asszociatív ∼, 7
disztributív ∼, 7
egységelemes ∼, 7
kommutatív ∼, 7
magfüggvény
Dirichlet-féle ∼, 404
Fejér-féle ∼, 410
majdnem mindenütt, 138
majoráns kritérium, 60
maximális elem, 10
megszüntethető szakadás, 90
Megszüntethető szingularitások tétele, 424
megszámlálható
∼an végtelen halmaz, 23
halmaz, 23
meromorf függvény, 426
Mertens-tétel, 70
metrika, 245
∼k ekvivalenciája, 250
metrikus tér, 245
∼ben korlátos halmaz, 245
∼ben nyílt halmaz, 245
∼ben zárt halmaz, 245
∼ek szorzata, 278
összefüggő ∼, 275
ívszerűen összefüggő ∼, 275
altere, 248
homeomorf ∼ek, 267
kompakt ∼, 254
lokálisan kompakt ∼, 255
teljes ∼, 163, 253
teljesen korlátos ∼, 258
minimális elem, 10
Minkowski-egyenlőtlenség, 118
minoráns kritérium, 60
monoton
függvény, 79
fogyó függvény, 79
fogyó sorozat, 44
halmaz, 3
növő függvény, 79
növő sorozat, 44
szigorúan ∼ függvény, 79
szigorúan ∼ fogyó függvény, 79
szigorúan ∼ növő függvény, 79
Morera tétele, 424
multilineáris leképezés, 186, 303
indefinit ∼, 189
negatív ∼, 189
negatív definit ∼, 189
pozitív ∼, 189
pozitív definit ∼, 189

nabla operátor, 222, 223
negatív
definit multilineáris leképezés, 189
multilineáris leképezés, 189
Newton–Leibniz-tétel, 146, 420
normált algebra, 292
normált tér, 156, 283
∼ben korlátos halmaz, 283
∼ben nyílt halmaz, 283
∼ben zárt halmaz, 283
reflexív ∼, 317
normált vektorrendszer, 326
norma, 156, 283
∼k ekvivalenciája, 176
sup-∼, 156, 284
p-∼, 156, 284
összehasonlítható ∼k, 321
fél∼, 313
operátor∼, 183
szubmultiplikatív ∼, 292
nulla mértékű halmaz, 135
nyílt
függvény, 173, 266
halmaz, 37, 157, 245, 283
nyílt leképezés tétele, 320, 427
nyeregpont, 242

operátornorma, 183
ortogonális vektorrendszer, 326
ortonormált vektorrendszer, 326
oszcillációs összeg, 141
Osztrovszkij-tétel, 32
összefüggő
halmaz, 275

metrikus tér, 275
összehasonlítható normák, 321

p-norma, 156, 284
páratlan függvény, 79
páros függvény, 79
pólus, 426
parciális
derivált, 221, 367
integrál, 128
törtekre bontás, 132
periódus, 79
periodikus függvény, 79
Pi, 97
polarizációs formula, 310
polinom, 35
pont körüli r sugarú nyílt gömb, 37, 157, 245
pontonként
∼i összegfüggvény, 197, 333
∼i határfüggvény, 197, 333
abszolút konvergens, 197, 333
pozitív
definit multilineáris leképezés, 189
homogén leképezés, 313
multilineáris leképezés, 189
prehilbert-tér, 326
primitív függvény, 127, 419
projekció függvény, 9

részbefedés, 41
részhalmaz, 3
részletösszeg, 66
∼-függvény, 401
részsorozat, 44, 161, 251
racionális
függvény, 132
számok, 16
reflexív tér, 317
reguláris függvény, 415
rekurzió tétele, 14
reláció, 5
∼k kompozíciója , 5
értékkészlete, 5
értelmezési tartománya, 5
antiszimmetrikus ∼, 9
ekvivalencia∼, 11
függvényszerű ∼, 6
homogén ∼, 9
identitás∼, 5
inverze, 5
megszorítása, 5
reflexív ∼, 9
rendezés ∼, 9
szimmetrikus ∼, 9
relatív kompakt halmaz, 255
rendezés, 9
elő∼, 57
felfelé irányított ∼, 57
rendezett
arkhimédészi módon ∼ test, 20
elő∼ halmaz, 57
halmaz, 9
induktívan ∼ halmaz, 10
jól∼ halmaz, 10
lineárisan ∼ halmaz, 10
pár, 5
teljesen ∼ test, 17
test, 17
reziduum, 426
reziduum-tétel, 426
Riemann
∼–Lebesgue-lemma, 402
∼-féle zéta-függvény, 63
∼-integrál, 140
∼-tétel, 68
Rolle-tétel, 109
rotáció, 223
Rouché-tétel, 426

sűrű halmaz, 40, 160, 248
sűrűn értelmezett függvény, 269
Schauder-bázis, 326
Schröder–Bernstein-tétel, 22
Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, 153
Schwarz-egyenlőtlenség, 155, 325
Schwarz-lemma, 427
Schwarz-tétel, 235
sehol sem sűrű halmaz, 280
skaláris szorzás, 155
sor, 59, 180, 285
∼ok Cauchy-szorzata, 70
∼ok konvolúciója, 70
átrendezése, 67
abszolút konvergens ∼, 61, 180, 285
divergens ∼, 59, 180, 285
függvény∼, 197, 333
függvény∼ egyenletes konvergenciája, 197, 333
feltételesen konvergens ∼, 67
feltétlen konvergens ∼, 67
hatvány∼, 73
hatvány∼ konvergenciasugara, 73
hibatagja, 66
konvergens ∼, 59, 180, 285
Leibniz-∼, 66
részletösszege, 66
Taylor-∼, 119
sorozat, 43
∼hoz rendelt sor, 59, 180, 285
általánosított ∼, 57
Cauchy-∼, 50, 163, 253
divergens ∼, 43, 51, 160, 251

- függvény∼, 197, 333
- függvény∼ egyenletes konvergenciája, 197, 333
- határértéke, 43, 160, 161, 251
- index∼, 44, 161, 251
- kettős indexű ∼, 51
- konvergens ∼, 43, 51, 160, 251
- korlátos ∼, 44, 161, 251
- korlátos részletösszegű ∼, 72
- korlátos változású ∼, 72
- monoton fogyó ∼, 44
- monoton növő ∼, 44
- rész∼, 44, 161, 251
- zérus∼, 44

Stone–Weierstrass-tétel, 350–353
Stone-tétel, 349, 352
sup-norma, 156, 284
supp, 337
szürjekció, 6
számok
- bővített valós ∼, 20
- egész ∼, 15
- komplex ∼, 21
- racionális ∼, 16
- természetes ∼, 11
- valós ∼, 17

számosság, 22
- azonos ∼ú, 22
- kisebb ∼ú, 22
- kisebb egyenlő ∼ú, 22

számtani-mértani egyenlőtlenség, 33, 117
szélsőérték
- feltételes ∼, 242

szakadás, 90
- függvény elsőfajú ∼a, 90
- függvény másodfajú ∼a, 90
- függvény megszüntethető ∼a, 90

szigorú
- lokális maximum, 121, 240, 389
- lokális minimum, 121, 240, 389
- lokális szélsőérték, 121

szigorúan
- konkáv függvény, 392
- konvex függvény, 392

szigorúan monoton
- függvény, 79
- fogyó függvény, 79
- növő függvény, 79

szimmetrikus
- halmaz, 312
- leképezés, 188

szinusz, 73, 101, 113
szinusz hiperbolikus, 73, 104, 113
szubadditív leképezés, 313
szublineáris leképezés, 313
szubmultiplikatív, 292
szuprémum, 10

távolság függvény, 190, 245, 271
tangens, 73, 101, 113
tangens hiperbolikus, 73, 104, 113
Taylor
- ∼-formula, 118, 238
- ∼-polinom, 119, 237, 385
- ∼-sor, 119, 237, 385
- ∼-sorfejtés, 237, 385
- infinitezimális ∼-formula, 239, 388

teljes
- burok, 275, 301
- halmaz, 163, 253
- indukció, 12
- metrikus tér, 163, 253

teljesen korlátos
- halmaz, 258, 259
- metrikus tér, 258

teljesen rendezett test, 17
teljessé tevés, 273, 300, 302
természetes
- alapú logaritmus, 75
- számok, 11

test, 17
- arkhimédészi módon rendezett ∼, 20
- rendezett ∼, 17
- teljesen rendezett ∼, 17

topologikus duális, 288
torlódási pont, 38, 81, 159, 247
trigonometrikus polinomok, 395

véges halmaz, 23
véges növekmények formulája, 110, 224, 370
végtelen, 20
- ∼ben eltűnő függvény, 337
- ∼szer differenciálható függvény, 116, 234, 382
- halmaz, 23

valós számok, 17
vektortér
- ∼ dimenziója, 438

Weierstrass
- ∼-tétel, 91, 174, 201, 267, 339, 350–352
- approximációs tétele, 395

zárt
- halmaz, 37, 157, 245, 283
- lineáris leképezés, 322

zérushely, 79
zérussorozat, 44
zéta-függvény, 63