

Analízis 1

Andai Attila*

2016. szeptember 24.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

1. Metrikus terek.....	1
2. Normált terek.....	4
3. Hilbert-terek.....	5
4. Függvénysorozatok, függvénysorok.....	5
5. Differenciálszámítás.....	8
6. Komplex függvénytan.....	8

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Szabó Barnabásnak*, aki felhívta figyelmem a korábbi verzióban szereplő elírásokra.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\triangleq$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

Ez a dokumentum elektronikus és nyomtatott formában szabadon használható, de csak saját célokra, nem-kereskedelmi jellegű alkalmazásokhoz, tevékenységekhez. A dokumentum internetre való feltöltése és mások által elérhetővé tétele csak a szerző engedélyével lehetséges. Minden más terjesztési és felhasználási forma esetében is a szerző engedélyét kell kérni.
Copyright, 2023 ©Andai Attila

1. Metrikus terek

1.1. Definíció. Az M halmazon értelmezett *metrikának* vagy *távolságfüggvénynek* nevezünk minden olyan

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

függvényt, melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x, y \in M : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Az (M, d) párt *metrikus térnek* nevezzük, ha M halmaz és d metrika az M halmazon.

1.2. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in M$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$$

halmazt az x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek nevezzük.

1.3. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $M \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in M$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

1.4. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in M$. Azt mondjuk, hogy x

- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X = \{x\}$.

1.5. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

1.6. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\text{Int } X = \{x \in M \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in M \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\text{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \text{Int } X$$

halmazt.

1.7. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = M$.

1.8. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $(A, d|_{A \times A})$ párt az (M, d) *metrikus tér alterének* nevezzük.

1.9. Definíció. Legyen d_1 és d_2 metrika az M halmazon. Azt mondjuk, hogy a d_1 és d_2 *metrikák ekvivalensek*, ha minden d_1 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_2 metrika szerint is, valamint minden d_2 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_1 metrika szerint is.

1.10. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen (M, d) metrikus tér.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.

- Azt mondjuk, hogy $x \in M$ az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \rightarrow a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

1.11. Definíció. (*A lim művelet.*) Legyen (M, d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ jelöli.

1.12. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozat *korlátos*, ha $\text{Ran } a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozatot az a sorozat *részsorozatának* nevezzük.

1.13. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} ((N < n \wedge N < m) \rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon).$$

1.14. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *teljes*, ha M teljes halmaz.

1.15. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér.

- Az $X \subseteq M$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az M térnek.
- Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *kompakt*, ha M kompakt halmaz.

1.16. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *lokálisan kompakt*, ha minden pontjának létezik kompakt környezete.

1.17. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *relatív kompakt*, ha létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A \subseteq K$ teljesül.

1.18. Definíció. Az (M, d) metrikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha létezik olyan $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup_{n \in I} U_n$ teljesül.

1.19. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény *határértéke az a pontban* $A \in M'$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)).$$

1.20. Definíció. (*A lim művelet.*) Legyen (M, d) és (M', d') topologikus tér, $f : M \rightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim_a f$ vagy $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ jelöli.

1.21. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ és $a \in \text{Dom } f$.

- Az f függvény folytonos az a pontban, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \right).$$

- Az f függvény folytonos, ha minden $a \in \text{Dom } f$ pontban folytonos.

A $C(M, M')$ szimbólum jelöli az $M \rightarrow M'$ folytonos függvények halmazát.

1.22. Definíció. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

1.23. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \rightarrow M'$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy a (M, d) és (M', d') metrikus terek *homeomorfak*, ha létezik $f : M \rightarrow M'$ homeomorfizmus.

1.24. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \text{Dom } f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad (d_1(x, y) < \delta \rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\text{Dom } f$ halmazon.

1.25. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és X halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : M \rightarrow X$ függvény *sűrűn értelmezett*, ha $\overline{\text{Dom } f} = M$.

1.26. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \rightarrow M'$ függvény *izometria*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ esetén $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ teljesül. Az (M, d) és (M', d') metrikus tér *izometrikusan homeomorf*, ha létezik $f : M \rightarrow M'$ izometrikus homeomorfizmus.

1.27. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *Lipschitz-folytonos függvény*, ha

$$\exists C \in \mathbb{R}_0^+ \forall x, y \in \text{Dom } f : \quad (d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y)).$$

1.28. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[\forall x, y \in \text{Dom } f : \quad (d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y)).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

1.29. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz *átmérője*

$$\text{diam}(A) \triangleq \begin{cases} \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}, & \text{ha } A \neq \emptyset; \\ 0, & \text{ha } A = \emptyset. \end{cases}$$

1.30. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor az A *halmaztól való távolság függvénye*

$$\text{dist}_A : M \rightarrow \mathbb{R} \quad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z, x).$$

1.31. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden (M', d') teljes metrikus teret és $j : M \rightarrow M'$ izometriát, melyre $\overline{\text{Ran } j} = M'$ teljesül, az (M, d) *metrikus tér teljes burkának* nevezzük.

1.32. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

- Az A halmaz *összefüggő*, ha nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül.
- Az M metrikus tér *összefüggő*, ha az M halmaz összefüggő.
- Az A halmaz *ívszerűen összefüggő*, ha minden $x, y \in A$ esetén létezik olyan $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
- Az M metrikus tér *ívszerűen összefüggő*, ha az M halmaz ívszerűen összefüggő.

2. Normált terek

2.1. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in V : \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Az $(V, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

2.2. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

2.3. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \rightarrow V$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^n a_i$ definiál, az a sorozathoz *rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

2.4. Definíció. Adott $(V, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a folytonos lineáris $V \rightarrow \mathbb{K}$ leképezéseket *folytonos lineáris funkcionáloknak*, vagy röviden csak *funkcionáloknak* nevezzük. Bevezetjük még a $V' \triangleq \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ jelölést a funkcionálok halmazára. A V' teret a V normált tér *topologikus duálisának* nevezzük.

2.5. Definíció. Minden $p \in [1, \infty[$ paraméter mellett az

$$l_{\mathbb{K}}^p \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p < \infty \right\}$$

halmazt, valamint $p = \infty$ esetén az

$$l_{\mathbb{K}}^p \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n| < \infty \right\}$$

halmazt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén *valós-* illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén *komplex l^p* (ejtsd: *elpé*) *térnek* nevezzük.

2.6. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér és legyen

$$\|\cdot\| : \prod_{k=1}^n V_k \rightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \{ \|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\} \}.$$

A $\left(\prod_{k=1}^n V_k, \|\cdot\| \right)$ normált teret nevezzük a $(V_k, \|\cdot\|_k)_{k=1, \dots, n}$ normált terek *szorzatának*.

2.7. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $(V', \|\cdot\|')$ Banach-teret és $j : V \rightarrow V'$ lineáris izometriát, melyre $\text{Ran } j = V'$ teljesül, az $(V, \|\cdot\|)$ normált tér *teljes burkának* nevezzük.

3. Hilbert-terek

3.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y, z \in V : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$;
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Azt mondjuk, hogy V *skalárszorozatos vektortér*, ha a V vektortéren adott egy skaláris szorzás.

3.2. Definíció. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a V téren.

- Ekkor a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *prehilbert-térnek* nevezzük.
- A $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *Hilbert-térnek* nevezzük, ha a skaláris szorzásból származtatott normára nézve teljes normált tér.

3.3. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in \mathcal{H}$.

Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer

- *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha

$$\forall x \in \mathcal{H} \left((\forall i \in I : \langle e_i, x \rangle = 0) \rightarrow x = 0 \right)$$

teljesül;

- *Schauder-bázis*, ha teljes lineárisan független vektorrendszer.

3.4. Definíció. Legyen V skalárszorozatos vektortér.

- Az $x, y \in V$ vektorok *ortogonálisak* vagy *merőlegesek egymásra*, ha $\langle x, y \rangle = 0$.
- Az $x \in V$ vektor *ortogonális* vagy *merőleges a* $W \subseteq V$ *halmazra*, ha minden $y \in W$ esetén $\langle x, y \rangle = 0$.
- Az $L, W \subseteq V$ *halmazok ortogonálisak*, ha minden $x \in L$ és $y \in W$ esetén $\langle x, y \rangle = 0$.

3.5. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathcal{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor az x_W vektort az x vektor W altérre való *ortogonális vetületének* vagy *projekciójának* nevezzük.

3.6. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathcal{H}$ nem üres halmaz. Ekkor a

$$L^\perp \triangleq \{z \in \mathcal{H} \mid \forall x \in L : \langle x, z \rangle = 0\}$$

halmazt L *ortogonálisának* nevezzük.

4. Függvénysorozatok, függvénysorok

4.1. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $A \subseteq T$, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$.

Ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } f_n \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right\} \rightarrow M \quad t \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t).$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ jelölést használjuk.

Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \text{Dom } f$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : (N < n \rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon)$$

teljesül;

- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha létezik olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens*, ha a T halmazon adott egy d_T metrika és minden $t \in \text{Dom } f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

4.2. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$.

- Az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozathoz rendelt függvénysort a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(T, V) \quad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^k f_j(t) \right)$$

képlettel definiáljuk.

- A $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összefüggvénye*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } f_n \mid \exists \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) \right\} \rightarrow V \quad t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t).$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor az A halmazon *pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \text{Dom } \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a T halmazon pontonként abszolút konvergens.

4.3. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér és $f : T \rightarrow M$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény korlátos*, ha $\text{Ran } f \subseteq M$ korlátos halmaz. A $T \rightarrow M$ korlátos függvények halmazát jelölje $\mathcal{F}^b(T, M)$. Ha (T, d_T) metrikus tér, akkor a $T \rightarrow M$ folytonos korlátos függvények halmazát pedig jelölje $C^b(T, M)$.

4.4. Definíció. (*Hatványsorok.*)

- Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \rightarrow V \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt a *együtthatójú 0 középpontú hatványsornak* nevezzük.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}, & \text{ha } 0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < \infty; \\ 0, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

4.5. Definíció. Legyen V Banach-tér és legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

teljesül. Ekkor minden $A \in \mathcal{L}(V, V)$ elemre legyen

$$f(A) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

4.6. Definíció. Legyen T tetszőleges nem üres halmaz. A

$$\delta : T \times T \rightarrow \{0, 1\} \quad (i, j) \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j; \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

függvény a *Kronecker-féle delta-függvény*.

4.7. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsünk egy $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, legyen $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ az A lineáris leképezés sajátértékeinek a halmaza és $f : \text{Sp}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Ha létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) \triangleq Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

4.8. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow V$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az f függvény n -edik Bernstein-polinomjának nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \rightarrow V \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

4.9. Definíció. Legyen T tetszőleges, nem üres halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$.

- Azt mondjuk, hogy az A halmaz *szétválasztó* T felett, vagy röviden *szétválasztó*, ha minden $x, y \in T$ elemre $x \neq y$ esetén van olyan $f \in A$, melyre $f(x) \neq f(y)$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az A halmaz *lineáris függvényháló*, ha lineáris altere az $\mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ térnek, valamint minden $f \in A$ esetén $|f| \in A$.

5. Differenciálszámítás

5.1. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény és $a \in \text{Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható, vagy (Fréchet-) deriválható az a pontban ha létezik olyan $A \in \mathcal{L}(U, V)$, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

teljesül. Ezt az A leképezést az f függvény a pontbeli differenciáljának vagy deriváltjának nevezzük és a továbbiakban a $(Df)(a)$ szimbólummal jelöljük.

- Az $f : U \rightarrow V$ függvény deriváltjának vagy derivált függvényének nevezzük a

$$Df = \left\{ (a, A) \in (\text{Dom } f) \times \mathcal{L}(U, V) \mid \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{\|x - a\|} = 0 \right\}$$

függvényt.

- Az f differenciálható, ha $\text{Dom } f = \text{Dom } Df$.
- Az f folytonosan differenciálható, ha differenciálható és Df folytonos. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, V)$ jelöli.

5.2. Definíció. Legyen U vektortér és V normált tér. Legyen továbbá $f : U \rightarrow V$ függvény, $a \in \text{Dom } f$ és $e \in U$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(D_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az f függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának nevezzük.

6. Komplex függvénytan

6.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény komplex differenciálható, vagy holomorf az a pontban ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték. Ekkor a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ komplex számot az f függvény a pontbeli differenciáljának vagy deriváltjának nevezzük és a továbbiakban az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

- Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény deriváltjának vagy derivált függvényének nevezzük az

$$f' = \left\{ (a, A) \in (\text{Int Dom } f) \times \mathbb{C} \mid \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \wedge \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \right\}$$

függvényt.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény reguláris az $a \in \mathbb{C}$ pontban, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f'$ teljesül, vagyis, ha f $\mathbb{C}$ -differenciálható az a pont egy környezetében.
- Az f függvény holomorf vagy reguláris vagy $\mathbb{C}$ -differenciálható, ha $\text{Dom } f = \text{Dom } f'$.
- Azt mondjuk, hogy f egész függvény, ha $\text{Dom } f = \mathbb{C}$ és f holomorf.

6.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{C}$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor az $|f'(a)|$ számot az f függvény a pontbeli nyújtási együtthatójának nevezzük. Azt a jól meghatározott $\varphi \in]-\pi, \pi]$ számot pedig, melyre $f'(a) = |f'(a)| e^{i\varphi}$ teljesül az f függvény a pontbeli forgatási együtthatójának nevezzük.

6.3. Definíció. Görbék főbb típusai.

- A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbe *elemi*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos, differenciálható az $]a, b[$ halmazon, létezik a $\lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t)$ és a $\lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t)$ határérték, valamint a

$$\dot{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} \lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha } t = a; \\ \dot{\gamma}(t), & \text{ha } a < t < b; \\ \lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha } t = b. \end{cases}$$

függvény folytonos. Minden γ elemi görbéhez definiáljuk a még a

$$\gamma^\circ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} (t-a) \lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(a), & \text{ha } t \leq a; \\ \gamma(t), & \text{ha } a < t < b; \\ (t-b) \lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(b), & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$

függvényt. Az elemi görbék halmazára a Γ^e jelölést használjuk.

- A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbe *szakaszonként C^1 -osztályú folytonos görbe*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos és létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ véges pontrendszer, melyre $a = t_0$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. A szakaszonként C^1 -osztályú folytonos görbék halmazára a Γ jelölést használjuk.
- A $\gamma \in \Gamma$ görbéről az mondjuk, hogy *zárt*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, ahol $a = \inf \text{Dom } \gamma$ és $b = \sup \text{Dom } \gamma$. A zárt görbék halmazát a Γ_0 szimbólummal jelöljük, valamint használjuk még a $\Gamma_0^e = \Gamma_0 \cap \Gamma^e$ jelölést is.

6.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény.

- Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor a

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt$$

mennyiséget az f függvény γ görbe menti integráljának nevezzük és a $\int_\gamma f$, vagy a kicsit pongyola, de természetes $\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt$ szimbólummal jelöljük.

- Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül és legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ olyan, hogy $a = t_0$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. Ekkor a

$$\sum_{i=0}^n \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} f$$

mennyiséget az f függvény γ görbe menti integráljának nevezzük és szintén a $\int_\gamma f$ vagy a

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt$$
 szimbólummal jelöljük. Továbbá a

$$\sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \, dt$$

mennyiséget a γ görbe hosszának nevezzük és az $L(\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

- Amennyiben a γ görbe zárt, a vonalmenti integrálra még a $\oint_\gamma f$ szimbólumot is használjuk.

6.5. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor az f függvény $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(b-a)$ görbe menti integrálját a $\int_{[a, b]} f$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$\int_{[a, b]} f = (b-a) \int_0^1 f(a + t(b-a)) \, dt.$$

6.6. Definíció. Legyen $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a F az f *primitív függvénye*, ha F differenciálható és $F' \subseteq f$ teljesül, valamint F az f *globális primitív függvénye*, ha $F' = f$ teljesül.

6.7. Definíció. Az $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazról azt mondjuk, hogy *csillaghalmaz*, ha létezik olyan $x \in U$ pont, melyre minden $u \in U$ esetén $[x, u] \subseteq U$ teljesül. Ekkor az x pontot *csillagcentrumnak* hívjuk.

6.8. Definíció. A $\gamma \in \Gamma$ *görbe indexfüggvényének* nevezzük az alábbi függvényt.

$$\text{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \text{Ran } \gamma \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\text{id}_\mathbb{C} - z}$$

6.9. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $U \subseteq M$ és $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ zárt folytonos görbe. Azt mondjuk, hogy a γ_0 és γ_1 *kontúrhomotópok* az $U \subseteq M$ *halmazban*, ha létezik olyan $H : [0, 1]^2 \rightarrow U$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0, 1]$ esetén $H(0, t) = \gamma_0(t)$ és $H(1, t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0, 1]$ esetén $H(p, 0) = H(p, 1)$.

6.10. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $U \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $U \subseteq M$ *halmaz egyszerűen összefüggő*, ha U ívszerűen összefüggő és minden U halmazban haladó zárt folytonos görbe kontúrhomotóp az U halmazban egy konstansfüggvénnyel. Az (M, d) *metrikus tér egyszerűen összefüggő*, ha az M halmaz egyszerűen összefüggő.

6.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor az f *függvény γ görbe szerinti Cauchy-transzformáltja*

$$C_{f,\gamma} : \mathbb{C} \setminus \text{Ran } \gamma \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f}{\text{id}_\mathbb{C} - z}.$$

6.12. Definíció. Ha $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $R \in]r, \infty]$, akkor a

$$C_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$

halmazt az a *középpontú r belső és R külső sugarú nyílt körgyűrűnek* nevezzük.

6.13. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $C_{0,\rho}(a) \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor a Laurent-tétel alapján egyértelműen léteznek olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ együtthatók, hogy minden $r, R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < r < R < \rho$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\text{id}_\mathbb{C} - a)^n \quad \text{és} \quad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\text{id}_\mathbb{C} - a)^{-n}$$

függvénytörök normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,R}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{0,\rho}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

– Ekkor a

$$C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$$

függvénytör az f *függvény a pontbeli Laurent-sorfejtésének* nevezzük.

– Az f *függvény reguláris része a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*

$$f_r : C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - a)^n$$

és az f *függvény főrésze a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*

$$f_p : C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - a)^n.$$

-
- Az f függvénynek az a pontban pólusa van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$ halmaz véges, de nem üres és az

$$r_f(a) = \max \{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$$

szám a pólus rendje.

- Az f függvénynek az a pontban lényeges szingularitása van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$ halmaz végtelen.
- A c_{-1} számot az f függvény a pontbeli reziduumának nevezzük és a $\text{Res}_f(a)$ szimbólummal jelöljük.

6.14. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény *meromorf*, ha létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $A \subseteq U$ diszkrét zárt halmaz, hogy $\text{Dom } f = \Omega \setminus A$ és az f függvénynek a D halmaz minden pontjában pólusa van.