

Analízis 1

Andai Attila*

2016. szeptember 24.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

1. Metrikus terek	1
1.1. Metrikus terek topológiája	1
1.2. Metrikus alterek	4
1.3. Ekvivalens metrikák	6
1.4. Sorozatok metrikus terekben	7
1.5. Cauchy-sorozatok	9
1.6. Kompakt halmazok metrikus terekben	9
1.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal	11
1.8. Szeparábilis metrikus terek	13
1.9. Függvények metrikus terek között	14
1.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények	19
1.11. Egyenletesen folytonos függvények	20
1.12. Kontrakciók és Lipschitz-folytonos függvények	23
1.13. Halmazok szétválasztása	24
1.14. Metrikus tér teljessé tétele	26
1.15. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok	28
1.16. Összefüggő és ívszerűen összefüggő metrikus alterek	30
2. Normált terek	33
2.1. Normált terek topológiája	33
2.2. Sorok és sorozatok normált terekben	34
2.3. Normák ekvivalenciája	36
2.4. Folytonos lineáris leképezések	36
2.5. Folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai	38
2.6. Véges dimenziós normált terek	41
2.7. Elpé terek	43
2.8. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok normált terekben	44
2.9. Normált terek szorzata	47
2.10. Normált terek teljes burka	48
3. Hilbert-terek	51
3.1. Skaláris szorzással ellátott terek	51
3.2. Vektor ortogonális projekciója zárt altérre	54
3.3. Zárt altér ortogonális kiegészítő altere	56
3.4. Ortogonális projekciók	57
3.5. Riesz-féle reprezentációs tétel	57
4. Függvénysorozatok, függvénysorok	59
4.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia	59
4.2. Korlátos folytonos függvények tere	61
4.3. Hatványsorok	62
4.4. Lineáris leképezés függvénye	63
4.5. Approximáció Bernstein-polinommal	66
4.6. Stone-féle sűrűségi tétel	68
4.7. Stone–Weierstrass-féle sűrűségi tétel	69
5. Differenciálszámítás	73
5.1. Differenciálhatóság	73
5.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai	75
5.3. Iránymenti derivált	78
5.4. Néhány speciális függvény deriváltja	79
6. Komplex függvénytan	83
6.1. Komplex differenciálhatóság	83

6.2.	Differenciálás műveleti tulajdonságai	85
6.3.	Hatványsor differenciálhatósága	85
6.4.	Görbe menti integrál	85
6.5.	A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma	88
6.6.	Az indexfüggvény	89
6.7.	Cauchy integráltételei	90
6.8.	Cauchy transzformáció	91
6.9.	Holomorf függvény analitikusságának elemi következményei	92
6.10.	Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele	92
6.11.	Holomorf függvények gyökei	92
6.12.	Laurent-sorfejtés	93
6.13.	Reziduum-tétel, argumentum-elv és Rouché tétele	94
6.14.	Nyílt leképezés tétele, lokális maximum elve és a Schwarz-lemma	95
6.15.	Casorati–Weierstrass-tétel és a Hurwitz-tétel	95
6.16.	Pár valós integrál kiszámítása reziduum tétellel	96
6.17.	A Cauchy-integrálformula és a reziduum-tétel néhány következménye	96

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Szabó Barnabásnak*, aki felhívta figyelmem a korábbi verzióban szereplő elírásokra.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\triangleq$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

Ez a dokumentum elektronikus és nyomtatott formában szabadon használható, de csak saját célokra, nem-kereskedelmi jellegű alkalmazásokhoz, tevékenységekhez. A dokumentum internetre való feltöltése és mások által elérhetővé tétele csak a szerző engedélyével lehetséges. Minden más terjesztési és felhasználási forma esetében is a szerző engedélyét kell kérni.
Copyright, 2023 ©Andai Attila

1. Metrikus terek

1.1. Metrikus terek topológiája

1.1. Definíció. Az M halmazon értelmezett *metrikának* vagy *távolságfüggvénynek* nevezünk minden olyan

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

függvényt, melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x, y \in M : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Az (M, d) párt *metrikus térnek* nevezzük, ha M halmaz és d metrika az M halmazon.

1.2. Tétel. *Tetszőleges M nem üres halmaz esetén*

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{ha } x \neq y, \\ 0 & \text{ha } x = y \end{cases}$$

metrika, tehát minden nem üres halmazon létezik egy kitüntetett metrika.

Bizonyítás. A metrika definíciójából rögtön adódik az állítás.

1.3. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in M$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$$

halmazt az x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek nevezzük.

1.4. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - d(x, y)[$ számra

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $x \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$, $y \in B_r(x)$ és $\rho \in]0, r - d(x, y)[$. Ha $z \in B_\rho(y)$, akkor $d(y, z) < \rho$, amiből

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \rho < r$$

következik, azaz $z \in B_r(x)$. Tehát $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$.

1.5. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $M \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in M$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

1.6. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció alapján nyilvánvaló. A második állításhoz vegyük az (M, d) metrikus tér $A_1, \dots, A_n$ korlátos részhalmazait, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1, \dots, n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \dots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén legyen $R_i = r_i + d(x_i, x_1)$. Ekkor minden i számra $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül a metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt. Tehát az $R = \max \{R_i \mid i = 1, \dots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq B_R(x_1)$.

1.7. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $x \in M$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R = r - d(x, y)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z \in B_R(y)$, akkor $d(z, y) < R = r - d(x, y)$, vagyis $d(x, y) + d(y, z) < r$, amiből pedig $d(x, z) < r$ adódik, vagyis $z \in B_r(x)$.

1.8. Tétel. (Nyílt halmazok rendszere.) Legyen (M, d) metrikus tér.

1. Az üres halmaz és M nyílt.
2. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
3. Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ nyílt halmazok tetszőleges véges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Ekkor minden $i = 1, \dots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min \{r_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

1.9. Tétel. (Zárt halmazok rendszere.) Legyen (M, d) metrikus tér.

1. Az üres halmaz és M zárt.
2. Véges sok zárt halmaz uniója zárt.
3. Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(Z_i)_{i=1, \dots, n}$ zárt halmazok tetszőleges véges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $M \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$M \setminus \bigcup_{i=1}^n Z_i = \bigcap_{i=1}^n (M \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ halmaz zárt.

3. Legyen $(Z_i)_{i \in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $M \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$M \setminus \bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} (M \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcap_{i \in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i \in I} Z_i$ halmaz zárt.

1.10. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $Z, U \subseteq M$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.

Bizonyítás. Az (M, d) metrikus térben legyen $Z \subseteq M$ zárt halmaz és $U \subseteq M$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (M \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (M \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

1.11. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in M$. Azt mondjuk, hogy x

- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X = \{x\}$.

1.12. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

1.13. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\text{Int } X = \{x \in M \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in M \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\text{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \text{Int } X$$

halmazt.

1.14. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén

1. $\text{Int } X$ halmaz nyílt;
2. $\text{Int } X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;
3. $\overline{X}$ halmaz zárt;
4. $\overline{X}$ az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X -et.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \text{Int } X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \text{Int } X$ teljesül.

2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\text{Int } X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(z) \subseteq X$ adódik, vagyis $z \in \text{Int } X$. Tehát az $U \subseteq \text{Int } X$ tartalmazás is fennáll.

3. Legyen $z \in M \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq M \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - d(y, z) > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárt definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.

4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárt értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

1.15. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén

1. az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \text{Int } X$;
2. az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

1.16. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq M$ zárt halmaz és legyen $x \in M$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq M$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

1.17. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Ekkor

$$\begin{aligned} \text{Int } X &= M \setminus \overline{M \setminus X}, \\ \overline{X} &= M \setminus \text{Int}(M \setminus X). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Legyen $x \in \text{Int } X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül. Vagyis $(M \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $x \notin \overline{M \setminus X}$ következik. Fordítva, ha $x \notin \overline{M \setminus X}$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $(M \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $B_r(x) \subseteq X$ következik, vagyis $x \in \text{Int } X$. A második egyenlőség következik az elsőből, hiszen

$$M \setminus \text{Int}(M \setminus X) = M \setminus \left(M \setminus \overline{M \setminus (M \setminus X)} \right) = \overline{M \setminus (M \setminus X)} = \overline{X}.$$

1.18. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

- sűrű az Y halmazban, ha $\overline{X} = Y$;
- sűrű, ha $\overline{X} = M$.

1.2. Metrikus alterek

1.19. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor $(A, d|_{A \times A})$ is metrikus tér.

Bizonyítás. A metrika tulajdonságai öröklődnek az M halmazról az A részhalmazára.

1.20. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $(A, d|_{A \times A})$ párt az (M, d) metrikus tér *alterének* nevezzük.

1.21. Tétel. (Nyílt és zárt halmazok metrikus altérben.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $B \subseteq A$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. A B halmaz pontosan akkor nyílt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül.
2. A B halmaz pontosan akkor zárt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $Z \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $B = A \cap Z$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és legyen $B \subseteq A$. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$B_r^d(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$$

$$B_r^{d'}(x) = \{y \in A \mid d(x, y) < r\}$$

Ekkor nyilván $B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A$.

1. Tegyük fel, hogy B nyílt az (A, d) térben. Ekkor minden $x \in B$ esetén létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r(x)}^{d'}(x) \subseteq B$ teljesül. Legyen

$$U = \bigcup_{x \in B} B_{r(x)}^d(x).$$

Az U halmaz nyílt az (M, d) térben, hiszen nyílt halmazok uniója. Megmutatjuk, hogy $B = A \cap U$ teljesül. Az U definíciója és $B \subseteq A$ alapján a $B \subseteq A \cap U$ tartalmazás nyilvánvaló. Legyen $z \in A \cap U$. Ekkor $z \in A$ és $z \in \bigcup_{x \in B} B_{r(x)}^d(x)$. Vagyis létezik olyan $y \in B$, melyre $z \in B_{r(y)}^d(y)$ teljesül. Mivel $z \in A$, ezért

$$z \in B_{r(y)}^d(y) \cap A = B_{r(y)}^{d'}(y) \subseteq B.$$

Tehát $A \cap U \subseteq B$ is teljesül.

Most tegyük fel, hogy létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül és legyen $x \in B$ tetszőleges. Ha $x \in U$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^d(x) \subseteq U$ teljesül. Ekkor

$$B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A \subseteq U \cap A = B$$

teljesül, vagyis x belső pontja a B halmaznak az (A, d') térben.

2. Az alábbi ekvivalens lépések igazolják az állítást.

$$\begin{aligned} B \text{ zárt az } (A, d') \text{ térben} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \setminus B \text{ nyílt az } (A, d') \text{ térben} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } A \setminus B = (A \setminus B) \cap U \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } B = A \setminus ((A \setminus B) \cap U) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } B = A \cap (M \setminus U) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists Z \subseteq M \text{ zárt halmaz, melyre } B = A \cap Z \end{aligned}$$

1.22. Tétel. (Halmaz lezártja metrikus altérben.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M, d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A, d') metrikus térben. Ekkor minden $B \subseteq A$ halmazra

$$\tilde{B} = \overline{B} \cap A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M, d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A, d') metrikus térben. Továbbá minden $x \in A$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$\begin{aligned} B_r^d(x) &= \{y \in M \mid d(x, y) < r\} \\ B_r^{d'}(x) &= \{y \in A \mid d(x, y) < r\}. \end{aligned}$$

Ekkor nyilván $B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A$.

Ha $x \in \tilde{B}$, akkor $x \in A$, valamint minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{d'}(x) \cap B \neq \emptyset$, amiből $B_r^{d'}(x) \subseteq B_r^d(x)$ miatt $B_r^d(x) \cap B \neq \emptyset$ következik, vagyis $x \in \overline{B}$. Vagyis igazoltuk a $\tilde{B} \subseteq \overline{B} \cap A$ tartalmazást.

Fordítva, legyen $x \in \overline{B} \cap A$. Ekkor $x \in A$ és minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^d(x) \cap B \neq \emptyset$. Ha $x \notin \tilde{B}$ teljesülne, akkor létezne olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^d(x) \cap B = \emptyset$ teljesülne. Ekkor

$$\emptyset = B_R^{d'}(x) \cap B \subseteq B_R^d(x) \cap B \neq \emptyset.$$

Vagyis létezne $z \in B_R^d(x) \cap B$, $z \notin B_R^{d'}(x) \cap B$ elem. Erre az elemre $z \in B \subseteq A$, $d(x, z) = d'(x, z) < R$ teljesülne, amiből a $z \in B_R^{d'}(x) \cap B$ ellentmondás adódna. Tehát $x \in \tilde{B}$, amivel igazoltuk a $\overline{B} \cap A \subseteq \tilde{B}$ tartalmazást.

1.3. Ekvivalens metrikák

1.23. Definíció. Legyen d_1 és d_2 metrika az M halmazon. Azt mondjuk, hogy a d_1 és d_2 metrikák ekvivalensek, ha minden d_1 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_2 metrika szerint is, valamint minden d_2 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_1 metrika szerint is.

1.24. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$.

1. A

$$d_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto d_p(x, y) \triangleq \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) \triangleq \max \{|x_k - y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\}$$

leképezés metrika.

2. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a d_p és a d_∞ metrikák ekvivalensek.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A d_p és a d_∞ függvények nyilván szimmetrikusak, és minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$d_p(x, y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y$$

$$d_\infty(x, y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y.$$

Legyen $x, y, z \in \mathbb{K}^n$. Ekkor a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$d_p(x, z) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k + y_k - z_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k - z_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d_p(x, y) + d_p(y, z),$$

valamint

$$d_\infty(x, z) = \max \{|x_k - y_k + y_k - z_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \leq$$

$$\leq \max \{|x_k - y_k| + |y_k - z_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \leq$$

$$\leq \max \{|x_k - y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} + \max \{|y_k - z_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} =$$

$$= d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z).$$

Megmutatjuk, hogy bármely $p \in [1, \infty[$ esetén a d_p és a d_∞ metrikák ekvivalensek.

Legyen $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz a d_∞ metrika szerint és legyen $x \in U$. Ekkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{d_\infty}(x) \subseteq U$. Ha $z \in B_r^{d_p}(x)$, akkor minden $k \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$|z_k - x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < r$$

teljesül, vagyis $d_\infty(z, x) < r$, amiből $z \in B_r^{d_\infty}(x)$ következik. Tehát a

$$B_r^{d_p}(x) \subseteq B_r^{d_\infty}(x) \subseteq U$$

tartalmazás miatt az x pont belső pontja az U halmaznak a d_p metrika szerint. Ezért az U halmaz a d_p metrika szerint is nyílt.

Legyen $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz a d_p metrika szerint és legyen $x \in U$. Ekkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{d_p}(x) \subseteq U$. Legyen $R = \frac{r}{\sqrt[n]{n}}$ és $z \in B_R^{d_\infty}(x)$. Ekkor

$$d_p(x, z) = \left(\sum_{k=1}^n |z_k - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{r}{\sqrt[n]{n}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = r$$

teljesül, vagyis $d_p(z, x) < r$, amiből $z \in B_r^{d_p}(x)$ következik. Tehát a

$$B_R^{d_\infty}(x) \subseteq B_r^{d_p}(x) \subseteq U$$

tartalmazás miatt az x pont belső pontja az U halmaznak a d_∞ metrika szerint. Ezért az U halmaz a d_∞ metrika szerint is nyílt.

1.4. Sorozatok metrikus terekben

1.25. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen (M, d) metrikus tér.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in M$ az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \rightarrow a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

1.26. Tétel. *Metrikus térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozatnak legyen $x, y \in M$ a határértéke. Tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $d(a_n, x) < \frac{d(x, y)}{2}$ és $d(a_n, y) < \frac{d(x, y)}{2}$. Amiből az

$$d(x, y) \leq d(x, a_n) + d(a_n, y) < d(x, y)$$

ellentmondás adódik.

1.27. Definíció. (*A lim művelet.*) Legyen (M, d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ jelöli.

1.28. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozat *korlátos*, ha $\text{Ran } a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozatot az a sorozat *részsorozatának* nevezzük.

1.29. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\text{Ran } a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup_{n=0}^N \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, ezért a $\text{Ran } a$ halmaz is korlátos.

1.30. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $|a_{\sigma(n)} - \lim a| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

1.31. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $x \in M$.*

1. Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.
2. Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatra $\lim a \in A$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $x \in M$.

1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

A kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, x) < \frac{1}{n+1}$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq M$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Mivel α eleme a nyílt $M \setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha) \subseteq (M \setminus A)$, amiből $B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a_n \in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1} \in B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ ellentmondás adódik.

Legyen $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárt definíciója alapján α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

1.32. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty \cup \{\infty\}]$, és $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^n$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens $(\mathbb{K}^n, d_p)$ térben, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az $a_i = \text{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$\text{pr}_i(\lim a) = \lim(\text{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty \cup \{\infty\}]$, és $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^n$ sorozat.

Ha az a sorozat konvergens, akkor legyen $x = \lim a$, $i \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d_p(a_n, x) < \varepsilon$. Ekkor $|\text{pr}_i(a_n) - \text{pr}_i(x)| < \varepsilon$, vagyis $\lim(\text{pr}_i \circ a) = \text{pr}_i(\lim a)$. Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\text{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (\lim(\text{pr}_1 \circ a), \dots, \lim(\text{pr}_n \circ a)) \in \mathbb{K}^n$. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i < n$ természetes számra $|\text{pr}_i(a_n) - x_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. Legyen $N = \max\{N_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra a $p \neq \infty$ esetben

$$d_p(a_n, x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\text{pr}_i(a_n) - x_i|^p} < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^p} \leq \varepsilon \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n^p}} \leq n,$$

a $p = \infty$ esetben pedig

$$d_\infty(a_n, x) = \max\{|\text{pr}_i(a_n) - x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\} < \frac{\varepsilon}{n} \leq n$$

teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az a sorozat konvergens.

1.5. Cauchy-sorozatok

1.33. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} ((N < n \wedge N < m) \rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon).$$

1.34. Tétel. Minden Cauchy-sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < 1$ teljesül, vagyis minden $N < n$ természetes szám esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\text{Ran } a$ véges sok korlátos halmaz uniója, ezért korlátos.

1.35. Tétel. Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ konvergens sorozat, melynek határértéke $A \in M$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $N < n, m$ természetes szám esetén

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, A) + d(a_m, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

1.36. Tétel. Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_1 < n, m$ esetén $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$ és $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d(a_n, A) \leq d(a_n, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

1.37. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *teljes*, ha M teljes halmaz.

1.38. Tétel. Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $X \subseteq M$ zárt halmaz. Ekkor az $(X, d|_{X \times X})$ metrikus altér is teljes.

Bizonyítás. Legyen (M, d) teljes metrikus tér, $X \subseteq M$ zárt halmaz, és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ Cauchy-sorozat. Mivel M teljes, ezért létezik $\lim a$ és mivel X zárt, ezért $\lim a \in X$. Vagyis minden $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke eleme az X halmaznak.

1.6. Kompakt halmazok metrikus terekben

1.39. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér.

- Az $X \subseteq M$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az M térnek.
- Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *kompakt*, ha M kompakt halmaz.

1.40. Tétel. Metrikus térben

1. minden véges halmaz kompakt;
2. véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.

Bizonyítás. A kompaktság definíciójának közvetlen következménye.

1.41. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.

1. Ekkor X korlátos és zárt.
2. Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.

1. Megmutatjuk, hogy X korlátos. Legyen $p \in M$ tetszőleges pont. Mivel $X \subseteq M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} B_n(p)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $X \subseteq \bigcup_{n \in I} B_n(p)$. Ekkor az $r = \max\{I\}$ számra $X \subseteq B_r(p)$ teljesül.
Most igazoljuk, hogy X zárt. Ehhez legyen $p \in M \setminus X$ tetszőleges pont. Minden $x \in X$ pont esetén ha $r(x) = \frac{d(x, p)}{2}$, akkor $B_{r(x)}(x) \cap B_{r(x)}(p) = \emptyset$. Mivel

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} B_{r(x)}(x)$$

az X kompakt halmaz nyílt fedése, ezért létezik olyan $H \subseteq X$ véges halmaz, melyre

$$X \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{r(x)}(x)$$

teljesül. Legyen $r = \min\{r(x) \mid x \in H\}$. Ekkor minden $x \in H$ esetén $B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) = \emptyset$, vagyis

$$X \cap B_r(p) \subseteq \left(\bigcup_{x \in H} B_{r(x)}(x) \right) \cap B_r(p) = \bigcup_{x \in H} (B_{r(x)}(x) \cap B_r(p)) = \emptyset.$$

Ez azt mutatja, hogy $B_r(p) \subseteq M \setminus X$. Tehát $M \setminus X$ halmaz minden pontja belső pont, ezért $M \setminus X$ nyílt halmaz, vagyis X zárt.

2. Legyen $Y \subseteq X$ zárt halmaz és legyen $(U_i)_{i \in I}$ az Y halmaz nyílt fedése és legyen $V = M \setminus Y$. Ekkor $V, (U_i)_{i \in I}$ az X halmaz nyílt fedése ($X \subseteq V \cup \bigcup_{i \in I} U_i$), ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$X \subseteq V \cup \bigcup_{i \in I'} U_i$. A V halmaz definíciójából adódik, hogy ekkor $Y \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i$ is teljesül, vagyis az Y halmaz kompakt. Ha $Y \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor az első pont alapján zárt.

1.42. Tétel. (Cantor-féle közsérész-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér és $(K_i)_{i \in I}$ az M kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $(K_i)_{i \in I}$ az M kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül, valamint rögzítsünk egy $i_0 \in I$ indexet. Minden $i \in I$ esetén legyen $U_i = M \setminus (K_i \cap K_{i_0})$, mely nyílt halmaz. A bizonyítandó állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Ekkor

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} M \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = M \setminus \left(\bigcap_{i \in I} (K_i \cap K_{i_0}) \right) = M,$$

vagyis $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Mivel K_{i_0} kompakt, ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i$.

Ebből

$$K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i = \bigcup_{i \in I'} M \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = M \setminus \left(\bigcap_{i \in I'} (K_i \cap K_{i_0}) \right)$$

adódik. A feltevés miatt véges sok K_i kompakt halmaz metszete sem üres, tehát létezik $j \in I$, melyre $K_j \subseteq \bigcap_{i \in I'} (K_i \cap K_{i_0})$. Erre a halmazra a fenti tartalmazás alapján

$$K_j \subseteq K_{i_0} \subseteq M \setminus \left(\bigcap_{i \in I'} (K_i \cap K_{i_0}) \right) \subseteq M \setminus K_j$$

következik, ami a nyilvánvaló $K_j \subseteq M \setminus K_j$ ellentmondásra vezet.

1.43. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *lokálisan kompakt*, ha minden pontjának létezik kompakt környezete.

1.44. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *relatív kompakt*, ha létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A \subseteq K$ teljesül.

1.45. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha $\overline{A}$ kompakt halmaz.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

Ha A relatív kompakt, akkor létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A \subseteq K$ teljesül. Mivel ekkor K zárt, ezért $\overline{A} \subseteq K$ is teljesül. Mivel kompakt halmaz zárt részhalmaza is kompakt, ezért $\overline{A}$ kompakt.

Ha $\overline{A}$ kompakt, akkor $A \subseteq \overline{A}$ miatt A relatív kompakt.

1.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

1.46. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme a K halmaznak.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ sorozat. Ekkor K korlátos és zárt halmaz. Defináljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A_n = \{a_k \mid k \geq n\}$ halmazt. Az $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-tétel feltételei, ezért létezik $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Ekkor minden

$n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ teljesül. Ebből a lezárt definíciója alapján következik, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Defináljuk a $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

– Legyen $\sigma(0) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.

– Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \wedge a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x) \right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x . Ekkor $\lim(a \circ \sigma) \in \overline{K}$, vagyis a K halmaz zártsága miatt $\lim(a \circ \sigma) \in K$.

1.47. Tétel. (Lebesgue-lemma.) Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor a K halmaz bármely $(U_i)_{i \in I}$ nyílt befedéséhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in K$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. A bizonyítandó állítás szerint

$$\forall (U_i)_{i \in I} \text{ nyílt befedéséhez: } \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in K \exists i \in I : B_r(x) \subseteq U_i.$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$\exists (U_i)_{i \in I} \text{ nyílt befedés: } \forall r \in \mathbb{R}^+ \exists x \in K \forall i \in I : B_r(x) \setminus U_i \neq \emptyset.$$

Legyen $(U_i)_{i \in I}$ a fenti tulajdonságokkal bíró nyílt befedése a K halmaznak. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in K \mid \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus U_i \neq \emptyset \right\} \neq \emptyset,$$

vagyis a kiválasztási axióma miatt

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in K \mid \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus U_i \neq \emptyset \right\} \neq \emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak. Ekkor a egy olyan $\mathbb{N} \rightarrow K$ sorozat, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(a_n) \not\subseteq U_i.$$

Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow K$ olyan konvergens részsorozat, melyre $\lim(a \circ \sigma) = x \in K$ teljesül. Mivel $x \in K$ ezért létezik olyan $i_0 \in I$, hogy $x \in U_{i_0}$, valamint az U_{i_0} halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U_{i_0}$. Ekkor az $\frac{r}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra $d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2}$. Megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $n > N$ és $\frac{1}{n+1} < \frac{r}{2}$ teljesül, akkor a $B_{\frac{1}{\sigma(n)+1}}(a_{\sigma(n)}) \subseteq U_{i_0}$ ellentmondást kapjuk. Legyen ugyanis $z \in B_{\frac{1}{\sigma(n)+1}}(a_{\sigma(n)})$ tetszőleges. Ekkor

$$d(z, a_{\sigma(n)}) < \frac{1}{\sigma(n)+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{r}{2},$$

a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$d(z, x) \leq d(z, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

vagyis $z \in B_r(x) \subseteq U_{i_0}$.

1.48. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x)$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. A bizonyítandó állítás szerint

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \exists H \subseteq K : |H| < \infty \wedge K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x).$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ \forall H \subseteq K : |H| < \infty \rightarrow K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x) \neq \emptyset.$$

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ egy olyan szám, melyre igaz, hogy minden $H \subseteq K$ véges részhalmaz esetén

$$K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x) \neq \emptyset.$$

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén $d(a_n, a_m) \geq r$ teljesül. A K halmaz nem üres, tehát létezik eleme, legyen $a_0 \in K$. Ekkor a $H = \{a_0\}$ halmaz véges, vagyis $K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x) \neq \emptyset$, legyen $a_1 \in K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x)$. Ekkor a $H = \{a_0, a_1\}$ halmaz

nem üres és az előző gondolatmenet alapján tudunk $a_2 \in K \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x)$ elemet választani. Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió segítségével lehet egy $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ sorozatot konstruálni. Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow K$ olyan konvergens részsorozat, melyre $\lim(a \circ \sigma) = x \in K$ teljesül. Ekkor az $\frac{r}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2}$. Vagyis bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $N < n, m$, $m \neq n$ esetén az

$$r \leq d(a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(n)}) \leq d(a_{\sigma(m)}, x) + d(x, a_{\sigma(n)}) < r$$

ellentmondást kapjuk.

1.49. Tétel. (Bolzano–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az 1.46 tétel alapján ha $A \subseteq M$ kompakt halmaz, akkor minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.

Most tegyük fel, hogy A olyan halmaz, hogy minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak és legyen $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ az A halmaz egy nyílt fedése. Ekkor az 1.47 Lebesgue-lemma alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in A$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül. Az előző állítás alapján ehhez az r számhoz létezik olyan $H \subseteq A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x)$ teljesül. Ekkor minden $x \in H \subseteq A$ ponthoz van olyan $i(x) \in I$ index, amelyre $B_r(x) \subseteq U_{i(x)}$ teljesül. Tehát az eddigiek alapján

$$A \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x) \subseteq \bigcup_{x \in H} U_{i(x)},$$

ami az A halmaz véges nyílt fedése.

1.50. Tétel. Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ Cauchy-sorozat. A Bolzano–Weierstrass-tétel alapján ekkor létezik az a sorozatnak olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme a K halmaznak. Viszont egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata ((1.36) tétel). Tehát az a Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke a K halmazban van, vagyis a K halmaz teljes.

1.8. Szeparábilis metrikus terek

1.51. Definíció. Az (M, d) metrikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha létezik olyan $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup_{n \in I} U_n$ teljesül.

1.52. Tétel. Egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható sűrű halmaz.

Bizonyítás. Legyen (M, d) szeparábilis metrikus tér és legyen $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup_{n \in I} U_n$ teljesül. Nyilván feltehető, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \neq \emptyset$. Ekkor $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$, legyen $a \in \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Ekkor $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \in U_n$ teljesül.

Legyen $D = \text{Ran } a$. A D halmaz nyilván megszámlálható, most igazoljuk, hogy sűrű, azaz $\overline{D} = M$. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Igazoljuk, hogy $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$. Legyen $I \subseteq \mathbb{N}$ olyan, hogy $B_r(x) = \bigcup_{n \in I} U_n$ teljesül. Ekkor minden $i \in I$ esetén $a_i \in U_i \subseteq B_r(x)$,

valamint $a_i \in D$, tehát $a_i \in B_r(x) \cap D$, ezért $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$, azaz $x \in \overline{D}$.

Most tegyük fel, hogy (M, d) metrikus tér és $D \subseteq M$ megszámlálható sűrű halmaz. Legyen $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow D$ szűrjekció, valamint $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ és $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijekció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$U_n = B_{\beta(\gamma(n)_1)}(\alpha(\gamma(n)_2)).$$

Az $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer nyilván olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz. Legyen $\Omega \subseteq M$ tetszőleges nyílt halmaz. Ehhez definiáljuk az $I = \{n \in \mathbb{N} \mid U_n \subseteq \Omega\}$ indexhalmazt. Megmutatjuk, hogy $\Omega = \bigcup_{n \in I} U_n$ teljesül. Mivel $\bigcup_{n \in I} U_n \subseteq \Omega$, ezért csak az $\Omega \subseteq \bigcup_{n \in I} U_n$ tartalmazást kell igazolnunk. Ehhez legyen $x \in \Omega$ tetszőleges pont. Mivel Ω nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(x) \subseteq \Omega$. Legyen $r \in]0, \frac{\rho}{2}[\cap \mathbb{Q}^+$. Mivel D sűrű, ezért $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$, most legyen $z \in B_r(x) \cap D$ és tekintsük az

$$i = \beta^{-1}(r), \quad j = \min \alpha^{-1}(z) \quad \text{és} \quad n = \gamma^{-1}(i, j)$$

számokat. Ekkor $U_n = B_r(z)$. Tehát ha $y \in U_n$, akkor $y \in B_r(z)$, valamint $d(y, z) < r$ és $d(z, x) < r$ miatt $d(x, y) < 2r < \rho$, azaz $y \in B_\rho(x) \subseteq \Omega$. Ez azt jelenti, hogy $U_n \subseteq \Omega$, vagyis $n \in I$. Mivel $x \in B_r(z) = U_n$, ezért $x \in \bigcup_{n \in I} U_n$. Ezzel igazoltuk a $\Omega \subseteq \bigcup_{n \in I} U_n$ tartalmazást.

1.53. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. Az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ terek szeparábilisek.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $D = \mathbb{Q}^n$. Ekkor D nyilván megszámlálható halmaz, ezért ha sűrű lenne, akkor az előző tétel értelmében a tér szeparábilis volna. Megmutatjuk, hogy a D halmaz sűrű. Legyen $p \in [1, \infty[$ és tekintsük az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ teret. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $a_i \in]x_i, x_i + \frac{r}{\sqrt[p]{n}}[\cap \mathbb{Q}$ és tekintsük az $a = (a_1, \dots, a_n)$ elemet. Ekkor

$$d(a, x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (a_i - x_i)^p} < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \frac{r^p}{n}} = \sqrt[p]{r^p} = r,$$

vagyis $a \in B_r(x)$, valamint $a \in D$, ezért $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$ minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy D sűrű a $(\mathbb{R}^n, d_p)$ térben.

Az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ térben legyen $x \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $a_i \in]x_i, x_i + r[\cap \mathbb{Q}$ és tekintsük az $a = (a_1, \dots, a_n)$ elemet. Ekkor

$$d(a, x) = \max \{|a_i - x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\} < r$$

vagyis $a \in B_r(x)$, valamint $a \in D$, ezért $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$ minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy D sűrű a $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ térben.

1.9. Függvények metrikus terek között

1.54. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban $A \in M'$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \right).$$

1.55. Tétel. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ függvény, az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in M'$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$, $a \in M$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in M'$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ esetén

$$\begin{aligned} 0 < d(x, a) < \delta_A &\rightarrow d'(f(x), A) < \frac{d'(A, B)}{2} \\ 0 < d(x, a) < \delta_B &\rightarrow d'(f(x), B) < \frac{d'(A, B)}{2} \end{aligned}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\text{Dom } f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre

$$d'(A, B) \leq d'(A, f(x)) + d'(f(x), B) < d'(A, B)$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

1.56. Definíció. (*A lim művelet.*) Legyen (M, d) és (M', d') topologikus tér, $f : M \rightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim_a f$ vagy $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ jelöli.

1.57. Tétel. (*Átviteli elv határértékre.*) Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim_a f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{a\}$ sorozatra, mely a a ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ és $a \in M$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_a f = F \in M'$ határérték. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{a\}$, a ponthoz konvergáló sorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : 0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), F) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, a) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), F) < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = F$.

Most tegyük fel, hogy $\lim_a f$ létezik minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{a\}$, a ponthoz konvergáló sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{a\}$ két olyan tetszőleges sorozat, mely a a ponthoz konvergál, valamint legyen

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{a\} \quad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in M'$ pont, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{a\}$, a ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_a f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim_a f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \text{Dom } f \setminus \{a\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(a) \setminus \{a\}, d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \text{Dom } f \setminus \{a\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(a) \setminus \{a\}, d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{a\}$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, a) < \frac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = a$. Ekkor $\lim_a f \neq A$ nem

teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), A) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), A) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

1.58. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ és $a \in \text{Dom } f$.

– Az f függvény folytonos az a pontban, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \right).$$

– Az f függvény folytonos, ha minden $a \in \text{Dom } f$ pontban folytonos.

A $C(M, M')$ szimbólum jelöli az $M \rightarrow M'$ folytonos függvények halmazát.

1.59. Tétel. (Átviteli elv folytonosságra.) Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ és $z \in \text{Dom } f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$, és $z \in \text{Dom } f$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos a z pontban és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Az f függvény z pontbeli folytonossága miatt tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez, létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : d(x, z) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(z)$.

Tegyük fel, hogy minden olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel, azonban az f függvény mégsem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \text{Dom } f \cap B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \text{Dom } f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \text{Dom } f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \frac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$

nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

1.60. Tétel. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$, és az $a \in \text{Dom } f$ pont a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f$ létezik és $\lim_a f = f(a)$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$, és az $a \in \text{Dom } f$ pont a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja.

Egymás alá írva a $\lim_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : & \quad 0 < d(x, a) < \delta \rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : & \quad d(x, a) < \delta \rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \text{Dom } f$ esetben a két formula ekvivalens.

1.61. Tétel. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér, $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos függvény és $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Ekkor

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)).$$

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér, $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos függvény és $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra az

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

egyenletből

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)) \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

adódik, amiből az $x \leftrightarrow a_n$ és $y \leftrightarrow b_n$ szerepcserével

$$|d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))| \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

következik. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))| = 0,$$

vagyis

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))$$

teljesül.

1.62. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér, valamint $a, b : \mathbb{N} \rightarrow M$ konvergens sorozat. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = d(\lim a, \lim b)$$

teljesül.

Bizonyítás. Ehhez elég az 1.61 tételt használni az $(M_1, d_1) = (M_2, d_2) = (M, d)$ és a $\varphi = \text{id}_M$ szereposztással.

1.63. Tétel. (Függvénykompozíció határértéke.) Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) és (M_3, d_3) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$, $g : M_2 \rightarrow M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\text{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a

1. $b \notin \text{Dom } g$;
2. $b \in \text{Dom } g$ és g folytonos a b pontban;

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) és (M_3, d_3) metrikus tér, $f : M_1 \rightarrow M_2$, $g : M_2 \rightarrow M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\text{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.

Először tegyük fel, hogy $b \notin \text{Dom } g$. A $\lim_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek és $g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) = g(B_{\delta'}(b))$ miatt

$$(g \circ f)(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim_a(g \circ f) = c$.

Most tegyük fel, hogy $b \in \text{Dom } g$ és g folytonos a b pontban. A g függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim_a(g \circ f) = c$.

1.64. Tétel. (*A folytonosság topologikus jellemzése.*) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.
2. Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = U \cap \text{Dom } f$ teljesül.
3. Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = Z \cap \text{Dom } f$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér, $f : M_1 \rightarrow M_2$ és $K = \text{Dom } f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \rightarrow M_2$ folytonos függvény és $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in f^{-1}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_\delta(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_\delta(z) \subseteq f^{-1}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup_{z \in f^{-1}(A)} B_\delta(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = f^{-1}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \rightarrow M_2$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq M_2$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq M_2$ zárt halmaz. Ekkor $M_2 \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, hogy $f^{-1}(M_2 \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$f^{-1}(A) = K \cap \left(M_1 \setminus f^{-1}(M_2 \setminus A) \right) = K \cap (M_1 \setminus (U \cap K)) = K \cap (M_1 \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq M_2$ halmazra $f^{-1}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = M_1 \setminus U$ halmaz zárt és $f^{-1}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz. Ekkor $M_2 \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, hogy $f^{-1}(M_2 \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$f^{-1}(A) = K \cap \left(M_1 \setminus f^{-1}(M_2 \setminus A) \right) = K \cap (M_1 \setminus (Z \cap K)) = K \cap (M_1 \setminus Z)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq M_2$ halmazra $f^{-1}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = M_1 \setminus Z$ halmaz nyílt és $f^{-1}(A) = U \cap K$.

1.65. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra $f^{-1}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra $f^{-1}(A)$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

1.66. Tétel. *(Egyenlőség folytatásának az elve.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f, g : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos függvény. Ha valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül, akkor $f|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$ is teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér és $f, g : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül és legyen $x \in \overline{U} \setminus U$ tetszőleges pont. Ekkor x torlódási pontja az U halmaznak, tehát létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow U$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(x).$$

1.67. Tétel. *Metrikus terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen (M_i, d_i) metrikus tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, $f : M_1 \rightarrow M_2$, $g : M_2 \rightarrow M_3$ folytonos függvény, és $a \in \text{Dom } f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \text{Dom } g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \text{Dom } g : d_2(y, f(a)) < \delta_g \Rightarrow d_3(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \text{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) = d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

1.68. Definíció. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

1.69. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ bijekció. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az f^{-1} függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $(f^{-1})^{-1}(U) \subseteq M_2$ nyílt halmaz, azaz $f(U) \subseteq M_2$ nyílt halmaz, vagyis amikor f nyílt.

1.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

1.70. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow M_2$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \rightarrow M_2$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a folytonosság topologikus jellemzése ((1.64) tétel) alapján minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i,$$

ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(V_i) = \bigcup_{i \in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

1.71. Tétel. (Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 1.70 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprénuma, valamint az $f(K)$ halmaz zárttsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

1.72. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \rightarrow M'$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy a (M, d) és (M', d') metrikus terek *homeomorfak*, ha létezik $f : M \rightarrow M'$ homeomorfizmus.

1.73. Tétel. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow M_2$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény is folytonos.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \rightarrow M_2$ folytonos injektív függvény és legyen $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz. Ekkor $Z \cap K$ a K kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt. Felhasználva, hogy kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt, valamint az

$$(f^{-1})(Z) = f(Z) = f(Z \cap K)$$

egyenlőséget, az adódik, hogy minden Z zárt halmazra a $(f^{-1})(Z)$ halmaz zárt, tehát az 1.64 tétel alapján f^{-1} folytonos függvény.

1.74. Tétel. Ha (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor minden $f : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos bijekció homeomorfizmus.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, (M_2, d_2) metrikus tér és legyen $f : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos bijekció. Ekkor az 1.70 tétel alapján M_2 kompakt tér, és az 1.73 állítás alapján az f^{-1} függvény is folytonos.

1.11. Egyenletesen folytonos függvények

1.75. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \text{Dom } f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : (d_1(x, y) < \delta \rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\text{Dom } f$ halmazon.

1.76. Tétel. *Metrikus terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $f : M_1 \rightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \text{Dom } f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \text{Dom } f : (d_1(x, y) < \delta \rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \text{Dom } f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

1.77. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow M_2$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \rightarrow M_2$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f(B_{\delta(x)}(x)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min \left\{ \frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H \right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $d_1(x, y) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in K$ olyan, melyre $d_1(x, y) < \delta$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d_1(y, p) \leq d_1(y, x) + d_1(x, p) < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \leq \delta(p),$$

vagyis

$$\begin{aligned} d_1(x, p) < \delta(p) &\rightarrow d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d_1(y, p) < \delta(p) &\rightarrow d_2(f(y), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ezekből viszont a bizonyítandó

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(p)) + d_2(f(p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

egyenlőtlenség következik.

1.78. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Tegyük fel, hogy (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : \overline{\text{Dom } f} \rightarrow M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. A jelölések egyszerűsítése végett legyen $X = \text{Dom } f$.

1. Ha $g_1, g_2 : \overline{X} \rightarrow M_2$ olyan folytonos függvény, melyre $g_1|_X = g_2|_X$ teljesül, akkor az egyenlőség folytatásának az elve alapján ((1.66) tétel) $g_1|_{\overline{X}} = g_2|_{\overline{X}}$, azaz $g_1 = g_2$.

2. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor az $f \circ a$ sorozat konvergens. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y_1, y_2 \in X$

pontra $d_1(y_1, y_2) < \delta$ esetén $d_2(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon$ teljesül. Mivel az a sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat is, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n, m$ természetes számra $d_1(a_n, a_m) < \delta$. Ekkor viszont minden $N < n, m$ természetes számra $d_2(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$. Mivel az (M_2, d_2) tér teljes, ezért az $f \circ a$ Cauchy-sorozat konvergens.

3. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont és $a, b : \mathbb{N} \rightarrow X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = \lim b = x$ teljesül. Fésüljük össze az a és b sorozatot az alábbi módon.

$$c : \mathbb{N} \rightarrow X \quad n \mapsto \begin{cases} a_{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_{\frac{n-1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor nyilván $\lim c = x$, továbbá az előző pont miatt létezik a $\lim f \circ c$ határérték. Mivel $f \circ a$ és $f \circ b$ részsorozata az $f \circ b$ sorozatnak, ezért $\lim f \circ c = \lim f \circ b = \lim f \circ a$ teljesül.

4. Ezek után definiálhatjuk úgy a g függvényt, hogy minden $x \in \overline{X}$ esetén vegyünk egy olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ sorozatot, melyre $\lim a = x$ teljesül és legyen $g(x) = \lim(f \circ a)$. Vagy másképp leírva

$$g = \{(x, y) \in \overline{X} \times M_2 \mid \exists a : \mathbb{N} \rightarrow X : \lim a = x \wedge y = \lim(f \circ a)\}.$$

Ekkor nyilván $f \subseteq g$.

5. Végül igazoljuk, hogy g egyenletesen folytonos. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x_1, x_2 \in X$ pontra $d_1(x_1, x_2) < \delta$ esetén $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x_1, x_2 \in \overline{X}$ olyan, hogy $d_1(x_1, x_2) < \delta$. Most legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x_1$ és $\lim b = x_2$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$d_1(a_n, x_1) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} \quad \text{és} \quad d_1(b_n, x_2) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén

$$d_1(a_n, b_n) \leq d_1(a_n, x_1) + d_1(x_1, x_2) + d_1(x_2, b_n) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} + d_1(x_1, x_2) + \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} = \delta.$$

Tehát minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$, amiből az $n \rightarrow \infty$ határátmenet után az 1.61 tétel alapján

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$$

adódik.

1.79. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és X halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : M \rightarrow X$ függvény *sűrűn értelmezett*, ha $\overline{\text{Dom } f} = M$.

1.80. Tétel. (Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) tetszőleges metrikus tér, (M_2, d_2) pedig teljes metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ sűrűn értelmezett, egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : M_1 \rightarrow M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Az 1.78 tétel alapján nyilvánvaló.

1.81. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \rightarrow M'$ függvény *izometria*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ esetén $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ teljesül. Az (M, d) és (M', d') metrikus tér *izometrikusan homeomorf*, ha létezik $f : M \rightarrow M'$ izometrikus homeomorfizmus.

1.82. Tétel. Minden izometria egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Az izometria definíciója alapján nyilvánvaló.

1.83. Tétel. (Izometria kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. Ekkor az f függvény folytonos $g : M_1 \rightarrow M_2$ kiterjesztése is izometria.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. Az 1.80 tétel alapján az f függvénynek létezik $g : M_1 \rightarrow M_2$ egyenletesen folytonos kiterjesztése. Legyen $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$ sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Az 1.61 tétel alapján

$$d_2(g(x), g(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(g(a_n), g(b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(f(a_n), f(b_n)).$$

Mivel f izometria, ezért

$$d_2(g(x), g(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(a_n, b_n),$$

amiből az 1.62 tétel akapján

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y)$$

következik.

1.12. Kontrakciók és Lipschitz-folytonos függvények

1.84. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *Lipschitz-folytonos függvény*, ha

$$\exists C \in \mathbb{R}_0^+ \forall x, y \in \text{Dom } f : \left(d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y) \right).$$

1.85. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[\forall x, y \in \text{Dom } f : \left(d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y) \right).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

1.86. Tétel. Minden Lipschitz-folytonos függvény egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ Lipschitz-folytonos a $C \in \mathbb{R}_0^+$ együtthatóval. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $\delta = \frac{\varepsilon}{1+C}$. Ha $x, y \in M_1$ olyan pontok, hogy $d_1(x, y) < \delta$, akkor

$$d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y) \leq C \delta = \varepsilon \cdot \frac{C}{1+C} < \varepsilon,$$

ami viszont éppen az f függvény egyenletes folytonosságát jelenti.

1.87. Tétel. Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor az $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvények tulajdonságai között az alábbi reláció teljesül.

$$\text{kontrakció} \Rightarrow \text{Lipschitz-folytonos} \Rightarrow \text{egyenletesen folytonos} \Rightarrow \text{folytonos}$$

Bizonyítás. Az első implikáció a definíció közvetlen következménye. A második következtetést az 1.86 tétel és a harmadikat pedig az 1.76 tétel garantálja.

1.88. Tétel. (Banach-féle fixponttétel.) Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $f : M \rightarrow M$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in M$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) teljes metrikus tér, $f : M \rightarrow M$ kontrakció a $C \in]0, 1[$ kontrakciós együtthatóval és a tetszőleges pont. (Feltehető, hogy $C > 0$ teljesül, hiszen ha C_1 a kontrakciós együtthatója a függvénynek, akkor bármely $C \in [C_1, 1[$ szám is kontrakciós együtthatója.) Vegyük azt az $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ sorozatot, melyre $x_0 = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = f(x_n)$ teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq C d(x_{n+1}, x_n)$$

teljesül, ezért teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0).$$

Ennek felhasználásával az adódik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $m > n$ számra

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} C^i d(x_1, x_0) = C^n \frac{1 - C^{m-n}}{1 - C} d(x_1, x_0) < C^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$$

teljesül. Mivel az $n \mapsto C^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$ sorozat határértéke nulla, ezért x Cauchy-sorozat. Legyen $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ekkor az f folytonossága alapján

$$f(y) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = y,$$

vagyis y fixpontja az f függvénynek.

Tegyük fel, hogy $y_1, y_2 \in M$ az f függvény két különböző fixpontja. Ekkor a

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \leq C d(y_1, y_2)$$

egyenlőtlenségből az $1 \leq C$ ellentmondás adódik.

1.13. Halmazok szétválasztása

1.89. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz *átmérője*

$$\text{diam}(A) \triangleq \begin{cases} \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}, & \text{ha } A \neq \emptyset; \\ 0, & \text{ha } A = \emptyset. \end{cases}$$

1.90. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor korlátos, ha $\text{diam}(A) < \infty$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

Ha A korlátos, akkor létezik olyan $z \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $A \subseteq B_r(z)$ teljesül. Ekkor minden $x, y \in A$ esetén

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r,$$

vagyis

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) \leq 2r < \infty.$$

Most tegyük fel, hogy $\text{diam}(A) = R < \infty$ és legyen $z \in A$ tetszőleges pont. Ha $x \in A$, akkor az $d(x, z) \leq \text{diam}(A) = R < R + 1$ egyenlőtlenség alapján $x \in B_{R+1}(z)$. Ezzel megmutattuk, hogy $A \subseteq B_{R+1}(z)$ teljesül, vagyis az A halmaz korlátos.

1.91. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor az A halmaztól való távolság függvénye

$$\text{dist}_A : M \rightarrow \mathbb{R} \quad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z, x).$$

1.92. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz. Ekkor

1. minden $x, y \in M$ esetén

$$|\text{dist}_A(x) - \text{dist}_A(y)| \leq d(x, y)$$

teljesül;

2. a dist_A függvény egyenletesen folytonos;

3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \text{dist}_A(z) = 0\}$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz.

1. Legyen $x, y \in M$ és $z \in A$ tetszőleges elem. Ekkor

$$\text{dist}_A(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

vagyis

$$\text{dist}_A(x) - d(x, y) \leq d(y, z).$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $z \in A$ elemre fennáll, ezért

$$\text{dist}_A(x) - d(x, y) \leq \inf_{z \in A} d(y, z) = \text{dist}_A(y),$$

amiből átrendezéssel

$$\text{dist}_A(x) - \text{dist}_A(y) \leq d(x, y)$$

adódik. Ebből az x és az y pontok cseréjével

$$\text{dist}_A(y) - \text{dist}_A(x) \leq d(x, y)$$

adódik, vagyis

$$|\text{dist}_A(x) - \text{dist}_A(y)| \leq d(x, y).$$

2. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ha $\delta = \varepsilon$, akkor minden $x, y \in M$ pontra $d(x, z) < \delta$ esetén

$$|\text{dist}_A(x) - \text{dist}_A(y)| \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon$$

teljesül, ami az egyenletes folytonosságot jelenti.

3. Mivel a dist_A függvény folytonos, ezért a $B = \{z \in M \mid \text{dist}_A(z) = 0\}$ halmaz zárt, hiszen a zárt $\{0\}$ halmaz folytonos függvény általi ösképe ($B = \text{dist}_A^{-1}(\{0\})$), továbbá a dist_A definíciója alapján $A \subseteq B$ nyilván teljesül, ezért $\bar{A} \subseteq B$. Tehát azt kell még megmutatni, hogy $B \subseteq \bar{A}$, vagy ami ezzel ekvivalens $M \setminus \bar{A} \subseteq M \setminus B$. Ennek igazolásához legyen $x \in M \setminus \bar{A}$. Mivel $M \setminus \bar{A}$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq M \setminus \bar{A}$, vagyis $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Tehát minden $z \in A$ esetén $d(x, z) \geq r$, ezért

$$\text{dist}_A(x) = \inf_{z \in A} d(x, z) \geq r,$$

vagyis $\text{dist}_A(x) \neq 0$, ebből pedig $x \notin B$ és $x \in M \setminus B$ következik.

1.93. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.

1. Létezik olyan $f : M \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $f(x) = 0$ és minden $y \in Y$ esetén $f(y) = 1$.
2. Létezik $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, hogy $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.

1. A $\text{dist}_X + \text{dist}_Y : M \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá ha valamilyen $z \in M$ pontra

$$(\text{dist}_X + \text{dist}_Y)(z) = 0$$

teljesülne, akkor abból $\text{dist}_X(z) = \text{dist}_Y(z) = 0$ következne, amiből az 1.92 tétel alapján $z \in \bar{X}$ és $z \in \bar{Y}$ adódna; az X és Y halmaz zártasága miatt ez azt jelentené, hogy $z \in X \cap Y$, vagyis az $X \cap Y \neq \emptyset$ ellentmondás adódna. Ezért $\text{dist}_X + \text{dist}_Y : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Legyen $f = \frac{\text{dist}_X}{\text{dist}_X + \text{dist}_Y}$.

Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy az f függvény eleget tesz a feltételeknek.

2. Legyen f olyan függvény melynek létezését bizonyítottuk az 1. pontban, továbbá legyen

$$U = f^{-1}\left(\left[-\infty, \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{és} \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \infty\right)\right).$$

Az f függvény folytonossága és a folytonosság topologikus jellemzése miatt U és V nyílt halmaz, valamint a konstrukció folytán nyilvánvaló, hogy eleget tesz az $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$ követelményeknek.

1.14. Metrikus tér teljessé tétele

1.94. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér.

1. Létezik olyan (M', d') teljes metrikus tér és $j : M \rightarrow M'$ izometria, melyre $\overline{\text{Ran } j} = M'$ teljesül.
2. Ha (M_1, d_1)   s (M_2, d_2) teljes metrikus tér, valamint $j_1 : M \rightarrow M_1$ és $j_2 : M \rightarrow M_2$ olyan izometria, melyre $\overline{\text{Ran } j_1} = M_1$ és $\overline{\text{Ran } j_2} = M_2$, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér.

1. Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathbb{N} \rightarrow M$ Cauchy-sorozatok halmaza, azaz

$$\mathcal{M} = \{a : \mathbb{N} \rightarrow M \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (N < n, m \rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon)\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $a, b \in \mathcal{M}$ esetén létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n)$ határérték. Válaszunk $a, b \in \mathcal{M}$ tetszőleges elemet és tekintsük az

$$\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto d(a_n, b_n)$$

sorozatot, melyről elég megmutatni, hogy Cauchy-sorozat, hiszen a valós s  z  mok halmazában minden Cauchy-sorozat konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ természetes s  z  mra $N < m, n$ esetén

$$d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad d(b_n, b_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $m, n \in \mathbb{N}$   s $N < m, n$, akkor

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a_m) + d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n),$$

aminek átrendezéséből

$$d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m) \leq d(a_n, a_m) + d(b_m, b_n) < \varepsilon,$$

adódik, valamint az m és n bet  k cseréje után

$$|\eta_n - \eta_m| = |d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m)| \leq d(a_n, a_m) + d(b_m, b_n) < \varepsilon$$

következik, ami igazolja, hogy η valóban Cauchy-sorozat.

2. Defin  aljuk az $\sim$ relációt az $\mathcal{M}$ halmazon az alábbi módon.

$$\sim = \{(a, b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0\}$$

Vagyis $a, b \in \mathcal{M}$ esetén $a \sim b$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0.$$

A $\sim$ reláció nyilván reflexív és szimmetrikus, a tranzitivitása pedig a minden $a, b, c \in \mathcal{M}$ elemre és a minden $n \in \mathbb{N}$ s  z  mra érvényes

$$0 \leq d(a_n, c_n) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, c_n)$$

egyenlőtlenségből következik. Vagyis $\sim$ ekvivalenciareláció.

3. Most megmutatjuk, hogy ha $a, b, c, d \in \mathcal{M}$ olyanok, hogy $a \sim b$ és $c \sim d$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, d_n). \quad (1.1)$$

Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $a \sim b$ és $c \sim d$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ s  z  mra $d(a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $d(c_n, d_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén az

$$d(a_n, c_n) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, d_n) + d(d_n, c_n)$$

egyenlőtlenség átrendezéséből

$$d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n) \leq d(a_n, b_n) + d(d_n, b_n)$$

adódik, amiből a, b és c, d felcserélésével

$$|d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n)| \leq d(a_n, b_n) + d(d_n, b_n) < \varepsilon$$

következik. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} |d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n)| = 0$, amiből már adódik az (1.1) egyenlet.

. Legyen $M' = \mathcal{M} / \sim$. A 3. pont alapján értelmezhető a $d' : M' \times M' \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvény úgy, hogy minden $a', b' \in M'$ esetén válasszunk $a \in a', b \in b'$ elemet és legyen $d'(a', b') = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n)$. Vagy másképp

$$d' : M' \times M' \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad (a', b') \mapsto \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) \mid a \in a', b \in b' \right\},$$

ahol a sup műveletre azért van szükség, hogy az egyetlen számot tartalmazó halmazból számot képezzen. A d' függvényről egyszerűen megmutatható, hogy metrika, tehát (M', d') metrikus tér.

5. Minden $x \in M$ esetén jelölje $\tilde{x}$ a konstans x sorozatot (mely nyilván Cauchy-sorozat), és legyen $x' = \tilde{x} / \sim$, valamint

$$j : M \rightarrow M' \quad x \mapsto x'.$$

Minden $x, y \in M$ esetén $\tilde{x} \in x'$ és $\tilde{y} \in y'$, ezért

$$d'(x', y') = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y),$$

vagyis j izometria.

6. Legyen $x \in M'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $a \in x$ tetszőleges Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen y a konstans a_{N+1} sorozat ekvivalenciaosztálya, azaz $y = \widetilde{a_{N+1}} / \sim$. Ekkor nyilván $y \in \text{Ran } j$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $d(a_n, a_{N+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$d'(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a_{N+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $B_\varepsilon(x) \cap \text{Ran } j \neq \emptyset$, tehát $\overline{\text{Ran } j} = M'$.

7. Most igazoljuk, hogy az (M', d') metrikus tér teljes. Legyen $x : \mathbb{N} \rightarrow M'$ tetszőleges Cauchy-sorozat. Az előző pont alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\text{Ran } j) \cap B_{\frac{1}{n+1}}^{d'}(x_n) \neq \emptyset$, ezért $j^{-1} \left(B_{\frac{1}{n+1}}^{d'}(x_n) \right) \neq \emptyset$, amiből

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} j^{-1} \left(B_{\frac{1}{n+1}}^{d'}(x_n) \right) \neq \emptyset$$

következik. Legyen $a \in \prod_{n \in \mathbb{N}} j^{-1} \left(B_{\frac{1}{n+1}}^{d'}(x_n) \right)$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \in M$ olyan elem, melyre $d'(j(a_n), x_n) < \frac{1}{n+1}$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}$, valamint $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_2 < n, m$ esetén $d'(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Képezzük az $N = \max \{N_1, N_2\}$ számot. Ekkor minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ esetén

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &= d'(j(a_n), j(a_m)) \leq d'(j(a_n), x_n) + d'(x_n, x_m) + d'(x_m, j(a_m)) < \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

vagyis a Cauchy-sorozat. Legyen $z = a / \sim$, vagyis z az a elem által meghatározott ekvivalenciaosztály, tehát $z \in M'$.

Megmutatjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ teljesül. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a

Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < n, m$ természetes számra $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ számra $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tekintsük az $N = \max\{N_1, N_2\}$ számot. Ha $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d'(x_n, z) \leq d'(x_n, j(a_n)) + d'(j(a_n), z) < \frac{1}{n+1} + \lim_{m \rightarrow \infty} d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} d'(x_n, z) = 0$.

8. Most legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) olyan teljes metrikus tér, melyekhez létezik olyan $j_1 : M \rightarrow M_1$, $j_2 : M \rightarrow M_2$ izometria, melyre $\overline{\text{Ran } j_1} = M_1$ és $\overline{\text{Ran } j_2} = M_2$. Legyen $f : \text{Ran } j_1 \rightarrow M_2$, $f = j_2 \circ j_1^{-1}$. Ekkor $f : M_1 \rightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria, ezért az 1.83 tétel alapján létezik egyetlen folytonos $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ kiterjesztése, mely szintén izometria. Mivel $f \circ j_1 = j_2$, ezért $\varphi \circ j_1 = j_2$. Megcserélve az (M_1, j_1) és (M_2, j_2) szerepét az adódik, hogy létezik olyan folytonos $\varphi' : M_2 \rightarrow M_1$ izometria, mely az $f' : \text{Ran } j_2 \rightarrow M_1$, $f' = j_1 \circ j_2^{-1}$ kiterjesztése és melyre $\varphi' \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi \circ j_1 \circ j_2^{-1} &= j_2 \circ j_2^{-1} = \text{id}_{\text{Ran } j_2} \\ (\varphi \circ \varphi')|_{\text{Ran } j_2} &= \text{id}_{M_2}|_{\text{Ran } j_2} \end{aligned}$$

miatt az egyenlőség folytatásának az elve (1.66 tétel) alapján $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_{M_2}$. Szerepcserével pedig $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_{M_1}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy φ bijekció, valamint $\varphi^{-1} = \varphi'$ miatt φ^{-1} is folytonos. Tehát olyan φ izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.

9. Az előbbi jelölések mellett tegyük fel, hogy $\varphi_1, \varphi_2 : M_1 \rightarrow M_2$ olyan izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_1$ teljesül. Ekkor $\varphi_1|_{\text{Ran } j_1} = \varphi_2|_{\text{Ran } j_1}$, amiből az egyenlőség folytatásának az elve alapján $\varphi_1 = \varphi_2$ következik.

1.95. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden (M', d') teljes metrikus teret és $j : M \rightarrow M'$ izometriát, melyre $\overline{\text{Ran } j} = M'$ teljesül, az (M, d) metrikus tér teljes burkának nevezzük.

1.96. Tétel. Minden metrikus térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.

Bizonyítás. Az 1.94 tétel alapján nyilvánvaló.

1.15. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok

1.97. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

- Az A halmaz összefüggő, ha nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül.
- Az M metrikus tér összefüggő, ha az M halmaz összefüggő.
- Az A halmaz ívszerűen összefüggő, ha minden $x, y \in A$ esetén létezik olyan $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
- Az M metrikus tér ívszerűen összefüggő, ha az M halmaz ívszerűen összefüggő.

1.98. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

1. Az A halmaz pontosan akkor összefüggő, ha az $(A, d|_{A \times A})$ altér összefüggő.
2. Az A halmaz pontosan akkor ívszerűen összefüggő, ha az $(A, d|_{A \times A})$ altér ívszerűen összefüggő.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

1. Legyen $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M, d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A, d') metrikus térben.

Legyen az A halmaz összefüggő az (M, d) térben és indirekt módon tegyük fel, hogy az (A, d') tér nem összefüggő. Ekkor létezik olyan $U, V \subseteq A$ halmaz, melyekre

$$U \neq \emptyset \quad V \neq \emptyset \quad \tilde{U} \cap V = U \cap \tilde{V} = \emptyset \quad U \cup V = A$$

teljesül. Ekkor az 1.22 tétel alapján $\tilde{U} = \bar{U} \cap A$ és $\tilde{V} = \bar{V} \cap A$, továbbá $U \subseteq A$, $V \subseteq A$ miatt $U \cap A = U$, $A \cap V = V$, vagyis

$$\begin{aligned}\bar{U} \cap V &= \bar{U} \cap (A \cap V) = (\bar{U} \cap A) \cap V = \tilde{U} \cap V = \emptyset \\ U \cap \bar{V} &= (U \cap A) \cap \bar{V} = U \cap (A \cap \bar{V}) = U \cap \tilde{V} = \emptyset.\end{aligned}$$

Ebből azt az ellentmondást kaptuk, hogy az A halmaz nem összefüggő az (M, d) térben, vagyis az (A, d') tér összefüggő.

Legyen az (A, d') tér összefüggő és tegyük fel, hogy az A halmaz nem összefüggő az (M, d) térben. Ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyekre

$$U \neq \emptyset \quad V \neq \emptyset \quad \bar{U} \cap V = U \cap \bar{V} = \emptyset \quad U \cup V = A$$

teljesül. Ekkor ismét az 1.22 tétel alapján $\tilde{U} = \bar{U} \cap A$ és $\tilde{V} = \bar{V} \cap A$, $\tilde{U} \subseteq \bar{U}$ és $\tilde{V} \subseteq \bar{V}$ vagyis

$$\begin{aligned}\tilde{U} \cap V &\subseteq \bar{U} \cap V = \emptyset \\ U \cap \tilde{V} &\subseteq U \cap \bar{V} = \emptyset.\end{aligned}$$

Ebből azt az ellentmondást kaptuk, hogy az (A, d') tér nem összefüggő, vagyis az A halmaz összefüggő az (M, d) térben.

2. Legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont és legyen $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ olyan függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül. Csak azt kell meggondolni, hogy γ pontosan akkor folytonos az (M, d) téren, ha folytonos az (A, d') téren. Ez azonban a folytonosság definíciójából és a $\text{Ran } \gamma \subseteq A \subseteq M$ tartalmazásból rögtön adódik.

1.99. Tétel. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ ívszerűen összefüggő halmaz. Ha $A = \emptyset$, akkor A összefüggő, ezért feltehetjük, hogy $A \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy A nem összefüggő és legyen $U, V \subseteq M$ olyan, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\bar{U} \cap V = U \cap \bar{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül. Legyen $x \in U$ és $y \in V$ tetszőleges és legyen $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ egy olyan folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül. Legyen

$$t_0 = \sup \{t \in [0, 1] \mid \forall x \in [0, t] : \gamma(x) \in U\},$$

valamint legyen $z = \gamma(t_0)$. Mivel $z \in A$, ezért $z \in U$ vagy $z \in V$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $z \in V$. Ekkor $z \notin \bar{U}$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap U = \emptyset$. A γ függvény t_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(t_0)$ esetén $\gamma(t) \in B_r(z)$ teljesül, azaz $\gamma(t) \notin U$. Ez viszont ellentmondásban van t_0 definíciójával, hiszen minden $x \in \left[0, t_0 - \frac{\delta}{2}\right]$ számra a $\gamma(x) \in U$ tartalmazásnak kellenne teljesülnie, ez viszont az $x = t_0 - \frac{3\delta}{4}$ számra biztosan nem teljesül.

Most tegyük fel, hogy $z \in U$. Ekkor $z \notin \bar{V}$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap V = \emptyset$. A γ függvény t_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(t_0)$ esetén $\gamma(t) \in B_r(z)$ teljesül, azaz $\gamma(t) \notin V$. Ez viszont ellentmondásban van a t_0 definíciójával, hiszen minden $x \in \left[0, t_0 + \frac{\delta}{2}\right]$ számra is $\gamma(x) \in U$ teljesül.

1.100. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.

1. Az M halmaz összefüggő.
2. Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$.
3. Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ és $M = X \cup Y$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér.

1 $\Rightarrow$ 2 Legyen M összefüggő és tegyük fel, hogy létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $\bar{U} \cap V = \emptyset$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \bar{U} \cap V$ elem. Ekkor a V halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq V$ teljesül. Mivel $U \cap V = \emptyset$, ezért $B_r(x) \cap U = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $x \in \bar{U}$.

Hasonlóan igazolható, hogy $U \cap \overline{V} = \emptyset$. Vagyis azt az ellentmondást kaptuk, hogy M nem összefüggő. Tehát nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Ezt úgy mutatjuk meg, hogy igazoljuk a $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$ következtetést. Tehát legyen M nem összefüggő halmaz. Ekkor létezik olyan $A, B \subseteq M$ halmaz, hogy $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ és $A \cup B = M$ teljesül.

Legyen $U = M \setminus \overline{A}$ és $V = M \setminus \overline{B}$. Nyilván U és V nyílt halmaz. Megmutatjuk, hogy $U \cup V = M$. Ha nem így lenne, akkor létezne olyan $x \in M$ elem, melyre $x \notin U$ és $x \notin V$ teljesülne. Az U és V definíciója alapján ebből $x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B}$ következik.

Mivel $x \in M = A \cup B$, ezért $x \in A$ vagy $x \in B$.

Ha $x \in A$, akkor $x \in \overline{B}$ miatt az $x \in A \cap \overline{B} = \emptyset$ ellentmondás adódik.

Ha $x \in B$, akkor $x \in \overline{A}$ miatt az $x \in \overline{A} \cap B = \emptyset$ ellentmondás adódik.

Tehát $U \cup V = M$ teljesül.

A és V halmaz metszetére vonatkozó követelmény is teljesül az alábbiak szerint.

$$U \cap V = (M \setminus \overline{A}) \cap (M \setminus \overline{B}) = M \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) \subseteq M \setminus (A \cup B) = M \setminus M = \emptyset$$

Már csak azt kell igazolni, hogy $U \neq \emptyset$ és $V \neq \emptyset$. Ha $U = \emptyset$, akkor $\overline{A} = M$, amiből az

$$\emptyset = \overline{A} \cap B = M \cap B = B = \emptyset$$

ellentmondás adódik, tehát $U \neq \emptyset$. Hasonlóan megmutatható, hogy $V \neq \emptyset$.

$2 \Leftrightarrow 3$ Az alábbi ekvivalens lépések igazolják az állítást.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \exists U, V \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } U \neq \emptyset, V \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset, M = U \cup V \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \exists U, V \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } \left\{ \begin{array}{l} (M \setminus U) \neq \emptyset, (M \setminus V) \neq \emptyset, \\ (M \setminus U) \cap (M \setminus V) = \emptyset, M = (M \setminus U) \cup (M \setminus V) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \exists X, Y \subseteq M \text{ zárt halmaz, melyre } X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset, X \cap Y = \emptyset, M = X \cup Y \end{aligned}$$

1.16. Összefüggő és ívszerűen összefüggő metrikus alterek

1.101. Tétel. (Metrikus altér összefüggősége.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.

1. Az A halmaz összefüggő az (M, d) térben.
2. Az (A, d') metrikus altér összefüggő.
3. Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$.
4. Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \cap A \neq \emptyset$, $Y \cap A \neq \emptyset$, $X \cap Y \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq X \cup Y$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A \times A}$.

$1 \Leftrightarrow 2$. Az 1.98 tétel épp ezt az ekvivalenciát mondja ki.

$2 \Rightarrow 3$. Igazoljuk a $\neg 3 \Rightarrow \neg 2$ következtetést. Legyen $U, V \subseteq M$ olyan nyílt halmaz, melyre $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$ teljesül. Ekkor az 1.21 tétel alapján az $U' = U \cap A$ és $V' = V \cap A$ halmazok nyíltak az (A, d') metrikus térben és ezen nyílt halmazokra $U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, $U' \cap V' = \emptyset$ és $A = U' \cup V'$ teljesül. Az 1.100 tétel alapján ezért az (A, d') tér nem összefüggő.

$3 \Rightarrow 2$. Igazoljuk a $\neg 2 \Rightarrow \neg 3$ következtetést. Ha (A, d') nem összefüggő, akkor az 1.100 tétel alapján létezik olyan $U', V' \subseteq A$ nyílt halmaz az (A, d') metrikus térben, melyre $U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, $U' \cap V' = \emptyset$ és $A = U' \cup V'$ teljesül. Az 1.21 tétel alapján ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz az (M, d) metrikus térben, melyre $U' = U \cap A$ és $V' = V \cap A$. Ekkor $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$.

$3 \Leftrightarrow 4$. A $2 \Rightarrow 3$. illetve a $3 \Rightarrow 2$. bizonyításában a *nyílt* szót kicserélve a *zárt* szóra kapjuk a bizonyítást.

1.102. Tétel. Legyen (M, d) összefüggő metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Ekkor $A = \emptyset$ vagy $A = M$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) összefüggő metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$ és $A \neq M$. Legyen $U = A$ és $V = M \setminus A$. Ebből azt az ellentmondást kapjuk, hogy az M tér nem összefüggő. Ugyanis ekkor $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, valamint $\overline{U} = U$ és $\overline{V} = V$ miatt $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ teljesül, valamint $U \cup V = M$.

1.103. Tétel. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint legyen $A \subseteq M_1$ és $f : A \rightarrow M_2$ folytonos függvény.

1. Ha A összefüggő, akkor $f(A)$ is összefüggő.
2. Ha A ívszerűen összefüggő, akkor $f(A)$ is ívszerűen összefüggő.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint legyen $A \subseteq M_1$ és $f : A \rightarrow M_2$ folytonos függvény.

1. Tegyük fel, hogy A összefüggő és $B = f(A)$ nem összefüggő. Ekkor az 1.101 tétel alapján létezik olyan $U', V' \subseteq M_2$ nyílt halmaz, melyre $U' \cap B \neq \emptyset$, $V' \cap B \neq \emptyset$, $U' \cap V' \cap B = \emptyset$ és $B \subseteq U' \cup V'$ teljesül. A folytonosság topologikus jellemzéséről szóló 1.64 tétel alapján ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(U') = U \cap A$ és $f^{-1}(V') = V \cap A$. Ekkor $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$ teljesül, vagyis az 1.101 tétel alapján azt az ellentmondást kaptuk, hogy A nem összefüggő.

2. Tegyük fel, hogy A ívszerűen összefüggő és legyen $x', y' \in f(A)$ két tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $x, y \in A$, melyre $f(x) = x'$ és $f(y) = y'$. Mivel A ívszerűen összefüggő, ezért létezik olyan $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$. Legyen $\gamma' = f \circ \gamma$. Ekkor $\gamma' : [0, 1] \rightarrow f(A)$ olyan folytonos függvény, melyre $\gamma'(0) = x'$ és $\gamma'(1) = y'$ teljesül.

2. Normált terek

2.1. Normált terek topológiája

2.1. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in V : \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Az $(V, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

2.2. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x, y \in V$ esetén

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in V$ tetszőleges. A norma tulajdonsága alapján

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

az x és y szerepét felcserélve és kihasználva, hogy $\|x - y\| = \|y - x\|$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

adódik. Vagyis

$$\pm (\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|,$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

2.3. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezés metrika, így $(V, d_{\|\cdot\|})$ metrikus tér.

Bizonyítás. A norma definíciójából rögtön adódnak a metrikára megkövetelt tulajdonságok.

2.4. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.

1. Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Az x középpontú r sugarú nyílt gömb

$$B_r(x) = \{y \in V \mid \|x - y\| < r\}.$$

2. Az $X \subseteq V$ halmaz nyílt, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
3. Az $X \subseteq V$ halmaz zárt, ha $V \setminus X$ nyílt.
4. Az $X \subseteq V$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in V$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

Bizonyítás. A normált téren bevezetett metrika definíciója alapján nyilvánvaló.

2.5. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A $\mathbb{K}^n$ téren a

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ & x &\mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ & x &\mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

leképezések normák (melyet p -normának, illetve sup-normának vagy maximum-normának nevezünk).

Bizonyítás. Egyedül a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség nem adódik rögtön a definícióból. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges. Adott $p \in [1, \infty[$ esetén

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

a Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Mivel az x, y vektor minden $k \in \{1, \dots, n\}$ komponensére $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ teljesül, ezért

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max \{|x_k + y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \leq \max \{|x_k| + |y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \leq \\ &\leq \max \{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} + \max \{|y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

2.2. Sorok és sorozatok normált terekben

2.6. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \rightarrow V$ és $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ konvergens sorozat.

1. Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. A ca sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.
3. A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.
4. Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b : \mathbb{N} \rightarrow V$ és $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ konvergens sorozat az $A = \lim a$, $B = \lim b$ és $\Lambda = \lim \lambda$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.

1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n > N_b$ számra $\|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|(a_n + b_n) - (A + B)\| \leq \|a_n - A\| + \|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $c = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ekkor minden $n > N_a$ számra

$$\|ca_n - cA\| = |c| \cdot \|a_n - A\| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

3. Mivel a λ sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\lambda_n| < K$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ és legyen $N_\lambda \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_\lambda$ esetén $|\lambda_n - \Lambda| < \frac{\varepsilon}{2\|A\|}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\begin{aligned} \|\lambda_n a_n - \Lambda A\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda_n A + \lambda_n A - \Lambda A\| \leq |\lambda_n| \cdot \|a_n - A\| + \|A\| \cdot |\lambda_n - \Lambda| < \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|A\|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ha $A = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$\|\lambda_n a_n - 0\| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \varepsilon$, akkor minden $n > N_a$ számra

$$\| \|a_n\| - \|A\| \| \leq \|a_n - A\| < \varepsilon.$$

2.7. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

2.8. Definíció. (Sorok.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \rightarrow V$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^n a_i$ definiál, az a sorozathoz rendelt sornak vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

2.9. Tétel. (*A konvergencia szükséges feltétele.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Ekkor az $n \mapsto \alpha_n$ és az $n \mapsto \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensnek és határértékük A . Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

2.10. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens.

1. Ha V Banach-tér, akkor a $\sum a$ sor konvergens.
2. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|.$$

Bizonyítás. 1. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Mivel a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n > N$ természetes számra $m > n$ mellett

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|a_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik $A = \lim \alpha$, vagyis létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ határérték.

2. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|,$$

amiből az $n \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

2.3. Normák ekvivalenciája

2.11. Tétel. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq V$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.
2. Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.
3. Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$.

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

$1 \Rightarrow 2$ Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a $\|\cdot\|'$ norma szerint is nyílt. Mivel x belső pontja a $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint, ezért létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 3$ Az $x = 0$ vektorhoz és az $r = 1$ számhoz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|}(0)$. Vagyis minden $y \in V$ vektor esetén ha $\|y\|' < R$, akkor $\|y\| < 1$. Legyen $z \in V$ tetszőleges vektor. Ha $z \neq 0$, akkor $Z = \frac{R}{2\|z\|'} \cdot z$ olyan vektor, melyre $\|Z\|' = \frac{R}{2} < R$, vagyis $\|Z\| = \frac{R}{2\|z\|'} \cdot \|z\| < 1$, amiből $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ adódik. Ha $z = 0$, akkor is teljesül a $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ egyenlőtlenség. Vagyis a $K = \frac{2}{R}$ jelöléssel az adódik, hogy minden $x \in V$ esetén $\|x\| \leq K \|x\|'$.

$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$ teljesül és legyen $X \subseteq V$ a $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz. Ha $z \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|}(z) \subseteq X$. Megmutatjuk, hogy $R = \frac{r}{K}$ esetén $B_R^{\|\cdot\|'}(z) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(z)$ teljesül, vagyis z belső pontja az X halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint is. Ha $y \in B_R^{\|\cdot\|'}(z)$, akkor nyilván $\|y - z\|' < R$ és azt kell igazolni, hogy $\|y - z\| < r$ teljesül. Ez rögtön adódik a

$$\|y - z\| \leq K \cdot \|y - z\|' < K \cdot R = K \cdot \frac{r}{K} = r$$

egyenlőtlenségből.

2.12. Tétel. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

2.4. Folytonos lineáris leképezések

2.13. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az A leképezés folytonos.
2. Az A leképezés folytonos a 0 pontban.
3. $\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$
4. Az A leképezés egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés.

$1 \Rightarrow 2$ Ha A folytonos, akkor minden pontban folytonos.

$2 \Rightarrow 3$ Ha A folytonos a 0 pontban, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x - 0\|_1 < \delta$ esetén $\|Ax - A0\|_2 < 1$. Mivel A lineáris, ezért $A0 = 0$. Ha $x \in V_1$ olyan vektor, melyre $\|x\|_1 \leq 1$ teljesül, akkor $\left\| \frac{\delta}{2} \cdot x \right\|_1 < \delta$, ezért $\left\| A \left(\frac{\delta}{2} \cdot x \right) \right\|_2 < 1$, vagyis $\|Ax\|_2 < \frac{2}{\delta}$. Tehát minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|Ax\|_2 < \frac{2}{\delta}$, ezért

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

3 $\Rightarrow$ 4 Legyen $K = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$, valamint legyen $z \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméterek.

Megmutatjuk, hogy ha $\delta = \frac{\varepsilon}{K+1}$ és a $z \in V$ vektorra $\|y - z\|_1 < \delta$ teljesül, akkor $\|Ay - Az\|_2 < \varepsilon$. Ez az alábbiakból következik $y \neq z$ esetén.

$$\|Ay - Az\|_2 = \|A(y - z)\|_2 = \|y - z\|_1 \cdot \left\| A \left(\frac{y - z}{\|y - z\|_1} \right) \right\|_2 \leq \|y - z\|_1 \cdot K \leq \delta \cdot K = \varepsilon \cdot \frac{K}{K+1} < \varepsilon$$

Ezek alapján az A leképezés egyenletesen folytonos.

4 $\Rightarrow$ 1 Minden egyenletesen folytonos leképezés folytonos.

Jelölés. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. A $V_1 \rightarrow V_2$ folytonos lineáris leképezések halmazára a továbbiakban a $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ jelölést fogjuk használni.

2.14. Definíció. Adott $(V, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a folytonos lineáris $V \rightarrow \mathbb{K}$ leképezéseket *folytonos lineáris funkcionáloknak*, vagy röviden csak *funkcionáloknak* nevezzük. Bevezetjük még a $V' \triangleq \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ jelölést a funkcionálok halmazára. A V' teret a V normált tér topologikus duálisának nevezzük.

2.15. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. Az $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ tér vektortér, melyen a

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(V_1, V_2) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad A \mapsto \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A, B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Mivel A és B folytonos, ezért a 2.13 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|(A + B)x\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax + Bx\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2) \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 + \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Bx\|_2 = \|A\| + \|B\|; \\ \|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\lambda Ax\|_2 = |\lambda| \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = |\lambda| \cdot \|A\| \end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\|A + B\|, \|\lambda A\| < \infty$, ezért a 2.13 tétel alapján $A + B, \lambda A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, vagyis $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ vektortér. Továbbá a fenti egyenletek igazolják az $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ és a $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ egyenleteket.

Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in V_1$ vektorra $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|Ax\|_2 = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \frac{x}{\|x\|_1}$

vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $Ax' = \frac{1}{\|x\|_1} Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

2.16. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$. Ekkor

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1.$$

Bizonyítás. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \frac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $\|Ax'\|_2 \leq \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

2.17. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Ekkor $BA \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$, továbbá

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Mivel minden $x \in V_1$ vektor esetén

$$\|BAx\|_3 \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_2 \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1,$$

ezért

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|BAx\|_3 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1) = \|B\| \cdot \|A\|.$$

Mivel $\|BA\| < \infty$, ezért BA folytonos lineáris leképezés.

2.18. Tétel. Minden $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén az

$$\begin{aligned} M_c : V &\rightarrow V & x &\mapsto cx, \\ L_z : V &\rightarrow V & x &\mapsto z + x \end{aligned}$$

leképezés homeomorfizmus.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az $M_c : V \rightarrow V$, $M_c(x) = cx$ leképezés lineáris bijekció, melyre

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|M_c x\| \leq |c| \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| = |c|$$

és hasonlóan

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|M_{c^{-1}} x\| \leq |c|^{-1}$$

teljesül, ezért a 2.13 tétel alapján M_c és M_c^{-1} is folytonos.

Tekintsük az $L_z : V \rightarrow V$, $L_z(x) = z + x$ leképezést, mely nyilván bijekció. Elég megmutatni, hogy minden $z \in V$ esetén L_z folytonos, ugyanis minden $z \in V$ elemre $L_z^{-1} = L_{-z}$ teljesül. Az L_z leképezés folytonos bármely $x_0 \in V$ pontban, hiszen

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x \in V : \quad \|x - x_0\| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \|L_z(x) - L_z(x_0)\| = \|x - x_0\| < \varepsilon$$

teljesül.

2.5. Folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai

2.19. Tétel. Ha $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér, akkor $(\mathcal{L}(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ is Banach-tér.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2)$ Cauchy-sorozat. Legyen $x \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, vagyis az

$$\|a_n(x) - a_m(x)\| \leq \|x\| \cdot \|a_n - a_m\| < \|x\| \cdot \varepsilon$$

egyenlőtlenség alapján $n \mapsto a_n(x)$ Cauchy-sorozat a V_2 teljes térben, ezért létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$ határérték minden $x \in V_1$ esetén. Ennek a segítségével definiáljuk a

$$A : V_1 \rightarrow V_2 \quad x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$$

függvényt.

Megmutatjuk, hogy A lineáris leképezés. Legyen $x, y \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Ekkor az

$$\begin{aligned} A(x+y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n(x) + a_n(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(y) = Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n(x)) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \lambda \cdot Ax \end{aligned}$$

egyenlőségek igazolják A linearitását.

Megmutatjuk, hogy A folytonos lineáris leképezés. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért korlátos is, vagyis

létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|a_n\| < K$. Ekkor minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \leq 1$ vektorra

$$\|a_n x\|_2 \leq \|a_n\|_1 \cdot \|x\| < K$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \right\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n(x)\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n(x)\|_2 \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| \|x\|_1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| \leq K \end{aligned}$$

következik, ami a 2.13 tétel alapján azt jelenti, hogy A folytonos lineáris leképezés. Vagyis $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

Azt kell még igazolni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ teljesül a $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ normált térben. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|a_n x - a_m x\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|a_n - a_m\| \cdot \|x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenségen végrehajtva az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet

$$\|A - a_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik. Így minden $m > N$ számra $\|A - a_m\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

2.20. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és legyen $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés. Ha $\dim V_1 < \infty$, akkor A folytonos. Azaz minden véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezés folytonos.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint tegyük fel, hogy V_1 véges dimenziós. Legyen $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ egy bázisa a V_1 vektortérnek és a V_1 téren tekintsük a

$$\|\cdot\|'_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\|'_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

normát. Legyen továbbá $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés. Definíáljuk a $K = \max \{\|Ae_i\|_2 \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in V_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot Ae_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Ae_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot K = K \cdot \|x\|'_1,$$

vagyis

$$\|A\| = \sup_{\|x\|'_1 \leq 1} \|Ax\|_2 \leq \sup_{\|x\|'_1 \leq 1} (K \cdot \|x\|'_1) = K < \infty,$$

ezért A folytonos a $(V_1, \|\cdot\|'_1)$ téren. Mivel V_1 véges dimenziós, ezért a 2.24 tétel alapján a $\|\cdot\|_1$ és a $\|\cdot\|'_1$ normák ekvivalensek egymással ezért A a $(V_1, \|\cdot\|_1)$ téren is folytonos.

2.21. Tétel. (Carl Neumann-féle sor.) Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható, inverze folytonos lineáris leképezés és

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol 1 jelöli a $V \rightarrow V$ identitásfüggvényt.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathcal{L}(V, V)$ olyan, hogy $\|A\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Ebből $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\| = 0$ adódik, melynek következménye, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$. Továbbá a $\sum_n A^n$ sor abszolút konvergens, mert $\sum_n \|A^n\| \leq \sum_n \|A\|^n < \infty$, hiszen $\|A\| < 1$. A minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényes

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^n A^k = \left(\sum_{k=0}^n A^k \right) \cdot (1 - A) = 1 - A^{n+1}$$

képletnél az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet véve az eddigi megállapítások alapján

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \right) \cdot (1 - A) = 1$$

adódik, vagyis $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ az $1 - A$ elem inverze.

2.22. Tétel. Legyen U és V Banach-tér és legyen

$$G(\mathcal{L}(U, V)) \triangleq \{a \in \mathcal{L}(U, V) \mid \exists a' \in \mathcal{L}(V, U) : aa' = \text{id}_V, a'a = \text{id}_U\}.$$

(Vagyis $G(\mathcal{L}(U, V))$ jelöli a azon invertálható lineáris leképezések halmazát, melyek inverze is folytonos.) Ekkor

1. minden $a \in G(\mathcal{L}(U, V))$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G(\mathcal{L}(U, V))$;
2. a $G(\mathcal{L}(V, V))$ halmaz nyílt;
3. az $i : G(\mathcal{L}(U, V)) \rightarrow G(\mathcal{L}(V, U))$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.

Bizonyítás. Legyen U és V Banach-tér és legyen

$$G(\mathcal{L}(U, V)) \triangleq \{a \in \mathcal{L}(U, V) \mid \exists a' \in \mathcal{L}(V, U) : aa' = \text{id}_V, a'a = \text{id}_U\}.$$

1. Legyen $a \in G(\mathcal{L}(U, V))$ és legyen $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ tetszőleges elem. Ekkor $\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, vagyis $\|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt

$$\|\text{id}_V - ba^{-1}\| = \|(a - b)a^{-1}\| \leq \|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1,$$

ami a Carl Neumann-féle sorfejtés miatt azt jelenti, hogy az $\text{id}_V - (ba^{-1})$ elem invertálható és az inverze is folytonos lineáris leképezés, vagyis $ba^{-1} \in G(\mathcal{L}(V, V))$. Legyen $b' = a^{-1}(ba^{-1})^{-1}$. Ekkor $bb' = 1$ nyilván teljesül, valamint ha a

$$(ba^{-1})^{-1}(ba^{-1}) = 1$$

egyenletet megszorozzuk jobbról az a , balról az a^{-1} mennyiségekkel, akkor $b'b = 1$ adódik. Tehát b' a b inverze, vagyis $b \in G(\mathcal{L}(U, V))$.

2. Mivel a $G(\mathcal{L}(U, V))$ halmaz minden pontja belső pont, ezért nyílt halmaz.
3. Legyen $a \in G(\mathcal{L}(U, V))$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathcal{L}(U, V)$ elemre

$$\|a - x\| < \delta \rightarrow x \in G(\mathcal{L}(U, V)) \wedge \|a^{-1} - x^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az i leképezés folytonos az a pontban. Legyen $\delta_1 = \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$ és $x \in B_{\delta_1}(a)$. Ekkor az 1. pont alapján $x \in G(\mathcal{L}(U, V))$. Tekintsük a következő átalakításokat.

$$((x^{-1} - a^{-1}) + a^{-1}) \cdot ((x - a) + a) = \text{id}_U$$

$$\begin{aligned}
(x^{-1} - a^{-1})(x - a) + (x^{-1} - a^{-1})a + a^{-1}(x - a) &= 0 \\
(x^{-1} - a^{-1})a &= -a^{-1}(x - a) - (x^{-1} - a^{-1})(x - a) \\
x^{-1} - a^{-1} &= -a^{-1}(x - a)a^{-1} - (x^{-1} - a^{-1})(x - a)a^{-1} \\
\|x^{-1} - a^{-1}\| &\leq \|a^{-1}\|^2 \cdot \|x - a\| + \|x^{-1} - a^{-1}\| \cdot \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\| \\
\|x^{-1} - a^{-1}\| (1 - \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\|) &\leq \|a^{-1}\|^2 \cdot \|x - a\| \\
\|x^{-1} - a^{-1}\| &\leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\|} \cdot \|x - a\| < \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \|x - a\|
\end{aligned}$$

Itt az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\|x - a\| < \delta_1 \quad \rightarrow \quad \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\| < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget. Vagyis ha $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2\|a^{-1}\|^2}$ és $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor minden $x \in B_\delta(a)$ elemre

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül.

2.6. Véges dimenziós normált terek

2.23. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér a $\mathbb{K}$ számtest felett és legyen $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ ennek egy bázisa. Tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow V \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

leképezést.

1. A φ lineáris homeomorfizmus a $(V, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ terek között.
2. Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt.
3. Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér és legyen $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ ennek egy bázisa. Ekkor a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow V \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

leképezés nyilvánvalóan lineáris bijekció és az inverze is lineáris.

1. Mivel

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

norma a $\mathbb{K}^n$ téren, ahol bármely két norma ekvivalens, ezért léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\|' = \|\varphi(x)\| \leq \alpha \|x\|_\infty \quad \text{és} \quad \|x\|_\infty \leq \beta \|x\|' = \beta \|\varphi(x)\|. \quad (2.1)$$

Az első egyenlőtlenségből

$$\sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|\varphi(x)\| \leq \alpha < \infty$$

adódik, vagyis φ folytonos. A második egyenletbe minden $y \in V$ esetén az $x = \varphi^{-1}(y)$ elemet írva

$$\|\varphi^{-1}(y)\|_\infty \leq \beta \|y\|$$

adódik, vagyis

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \|\varphi^{-1}(y)\|_\infty \leq \beta < \infty$$

teljesül, tehát φ^{-1} is folytonos.

2. Legyen $U \subseteq V$. Ha U nyílt, akkor a φ leképezés folytonossága miatt a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ha az $U' \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt, akkor a φ^{-1} leképezés folytonossága miatt a $(\varphi^{-1})^{-1}(U') = \varphi(U') \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ezt alkalmazva az $U' = \varphi^{-1}(U)$ halmazra azt kapjuk, hogy ha $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt, akkor $U \subseteq V$ is nyílt.

3. Ha $U \subseteq V$ korlátos halmaz, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi^{-1}(U)$, akkor $\|\varphi(x)\| < r$ és a (2.1) egyenlet alapján

$$\|x\|_\infty \leq \beta \|\varphi(x)\| < \beta r,$$

vagyis az $R = \beta r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.

Ha az $U \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi(U)$, akkor $\|\varphi^{-1}(x)\|_\infty < r$ és a (2.1) egyenlet alapján

$$\|x\| = \|\varphi(\varphi^{-1}(x))\| \leq \alpha \|\varphi^{-1}(x)\|_\infty < \alpha r,$$

vagyis az $R = \alpha r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.

2.24. Tétel. Minden V véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.

Bizonyítás. Legyen V véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a V egy bázisa és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow V \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

leképezést, mely a 2.23 tétel értelmében homeomorfizmus, a V téren értelmezett normától függetlenül. Tegyük fel, hogy $U \subseteq V$ nyílt halmaz a $\|\cdot\|$ norma szerint. Mivel φ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|)$ terek között, ezért $\varphi^{-1}(U)$ nyílt a $\mathbb{K}^n$ térben. Továbbá φ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|')$ terek között is, ezért $\varphi(\varphi^{-1}(U)) = U$ nyílt a $(V, \|\cdot\|')$ térben.

Ezután a $\|\cdot\|'$ és a $\|\cdot\|$ norma felcserélésével kapjuk az állítást.

2.25. Tétel. Legyen V véges dimenziós vektortér és legyen $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetszőleges norma. Ekkor

1. a V tér teljes;
2. a V egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Bizonyítás. Legyen V véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a V egy bázisa és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow V \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

leképezést, mely a 2.23 tétel értelmében homeomorfizmus.

1. A

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

leképezés norma a $\mathbb{K}^n$ téren. A véges dimenziós $\mathbb{K}^n$ téren $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalens normák, ezért a 2.12 tétel alapján létezik olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\alpha \|x\|' \leq \|x\|_\infty \leq \beta \|x\|'.$$

teljesül. Tehát minden $z \in V$ esetén a fenti egyenlőtlenséget alkalmazva az $x = \varphi^{-1}(z)$ vektorra

$$\alpha \|z\| \leq \|\varphi^{-1}(z)\|_\infty \leq \beta \|z\|$$

adódik. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ Cauchy-sorozat. Mivel minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\varphi^{-1}(a_n) - \varphi^{-1}(a_m)\|_\infty = \|\varphi^{-1}(a_n - a_m)\|_\infty \leq \beta \|a_n - a_m\|,$$

ezért az $n \mapsto b_n = \varphi^{-1}(a_n)$ sorozat Cauchy-sorozat a teljes $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, tehát a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Legyen $A' = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ és $A = \varphi(A')$. A minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő

$$\|a_n - A\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\varphi^{-1}(a_n - A)\|_\infty = \frac{1}{\alpha} \|b_n - A'\|_\infty$$

egyenlőtlenség alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

2. Legyen $K \subseteq V$ korlátos és zárt halmaz. Ekkor a 2.23 tétel alapján a $\varphi^{-1}(K)$ halmaz korlátos és zárt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, vagyis a Heine–Borel-tétel alapján $\varphi^{-1}(K)$ kompakt. Azonban a $\varphi^{-1}(K)$ kompakt halmaznak az f folytonos függvény általi képe kompakt, ezért $\varphi(\varphi^{-1}(K)) = K$ kompakt halmaz.

Ha $K \subseteq V$ kompakt halmaz, akkor az 1.41 tétel alapján korlátos, és zárt.

2.26. Tétel. Minden normált tér minden véges dimenziós altere zárt.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $L \subseteq V$ ennek véges dimenziós altere. Ekkor $(L, \|\cdot\|_L)$ véges dimenziós normált tér, tehát az előző 2.25 tétel alapján teljes.

2.7. Elpé terek

2.27. Definíció. Minden $p \in [1, \infty[$ paraméter mellett az

$$l_{\mathbb{K}}^p \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p < \infty \right\}$$

halmazt, valamint $p = \infty$ esetén az

$$l_{\mathbb{K}}^p \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n| < \infty \right\}$$

halmazt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén *valós-* illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén *komplex l^p* (ejtsd: *elpé*) *térnek* nevezzük.

2.28. Tétel. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén $l_{\mathbb{K}}^p$ vektortér, a

$$\|\cdot\|_p : l_{\mathbb{K}}^p \rightarrow \mathbb{R} \quad s \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés pedig norma az $l_{\mathbb{K}}^p$ téren. Tehát minden $p \in [1, \infty[$ valós számra $(l_{\mathbb{K}}^p, \|\cdot\|_p)$ normált-tér.

Bizonyítás. Legyen $p \in [1, \infty[$, $x, y \in l_{\mathbb{K}}^p$ és $c \in \mathbb{K}$. Megmutatjuk, hogy $x + y \in l_{\mathbb{K}}^p$ és $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. A Minkowski-egyenlőtlenség alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt[p]{\sum_{n=0}^N |x_n + y_n|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{n=0}^N |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^N |y_n|^p},$$

ezért

$$\sum_{n=0}^N |x_n + y_n|^p \leq \left(\sqrt[p]{\sum_{n=0}^N |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^N |y_n|^p} \right)^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p < \infty.$$

Tehát a $\sum_n |x_n + y_n|^p$ sor konvergens, amiből $x + y \in l_{\mathbb{K}}^p$ következik, továbbá $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

is teljesül. Minden $c \in \mathbb{K}$ és $x \in l_{\mathbb{K}}^p$ esetén $\|cx\|_p = |c| \cdot \|x\|_p$ nyilvánvalóan teljesül, ezért $cx \in l_{\mathbb{K}}^p$, tehát $l_{\mathbb{K}}^p$ vektortér. A normára vonatkozó

$$\|x\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

követelmény szintén a definíció közvetlen következménye.

2.8. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok normált terekben

2.29. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.

1. Ha $x_0, x_1 \in V$, akkor a

$$\gamma_{x_0, x_1} : [0, 1] \rightarrow V \quad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0)$$

függvény folytonos.

2. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \dots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$, akkor a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow V \quad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\}(x_{[nt]+1} - x_{[nt]})$$

függvény folytonos, továbbá minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén minden $t \in [0, 1]$ számra

$$\gamma_{x_k, x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.

1. Legyen $x_0, x_1 \in V$ olyan, hogy $x_0 \neq x_1$ és legyen

$$\gamma_{x_0, x_1} : [0, 1] \rightarrow V \quad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0).$$

Legyen $t_0 \in [0, 1]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ehhez definiáljuk a $\delta = \frac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|}$ paramétert. Ha $t \in [0, 1]$ olyan, melyre $|t - t_0| < \delta$ teljesül, akkor

$$\|\gamma_{x_0, x_1}(t) - \gamma_{x_0, x_1}(t_0)\| = \|(t - t_0)(x_1 - x_0)\| = |t - t_0| \cdot \|x_1 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|} \cdot \|x_1 - x_0\| = \varepsilon.$$

Vagyis γ folytonos a t_0 pontban és így minden pontban is folytonos. Ha $x_0 = x_1$, akkor a γ függvény nyilván folytonos.

2. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \dots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$ és tekintsük a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow V \quad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\}(x_{[nt]+1} - x_{[nt]})$$

függvényt. Legyen $k \in \{0, \dots, n-1\}$ és $t \in [0, 1[$ tetszőleges. Ekkor

$$\gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) = x_{[k+t]} + \{k+t\}(x_{[k+t]+1} - x_{[k+t]}) = x_k + t(x_{k+1} - x_k) = \gamma_{x_k, x_{k+1}}(t).$$

Ha $k \in \{0, \dots, n-1\}$ és $t = 1$, akkor

$$\gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) = x_{[k+1]} + \{k+1\}(x_{[k+1]+1} - x_{[k+1]}) = x_{k+1} = \gamma_{x_k, x_{k+1}}(1).$$

Tehát minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ és $t \in [0, 1]$ számra

$$\gamma_{x_k, x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right)$$

teljesül.

Megmutatjuk, hogy a γ függvény folytonos. Legyen $t_0 \in [0, 1]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és ehhez definiáljuk a

$$\delta_1 = \frac{1}{n} \cdot \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\|x_{k+1} - x_k\|} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

számot.

Ha $nt_0 \notin \mathbb{N}$, akkor legyen

$$\delta_2 = \min \left\{ \left| t_0 - \frac{k}{n} \right| \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

és legyen $\delta = \frac{1}{2} \cdot \min \{\delta_1, \delta_2\}$, valamint $k_1 = [nt_0]$ és $k_2 = k_1 + 1$. Ekkor nyilván $k_1, k_2 \in \{0, \dots, n\}$. Ha $t \in [0, 1]$ olyan, hogy $|t - t_0| < \delta$, akkor az

$$\frac{k_1}{n} = t_0 - \left| t_0 - \frac{k_1}{n} \right| \leq t_0 - \frac{\delta_2}{2} < t < t_0 + \frac{\delta_2}{2} \leq t_0 + \left| t_0 - \frac{k_2}{n} \right| = \frac{k_2}{n}$$

egyenlőtlenség alapján

$$k_1 < nt < k_2,$$

vagyis $[nt] = [nt_0] = k_1$, továbbá az

$$\begin{aligned} nt &= [nt] + \{nt\} \\ nt_0 &= [nt_0] + \{nt_0\} \end{aligned}$$

egyenlőségekből

$$\{nt\} - \{nt_0\} = n(t - t_0)$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| &= \|x_{[nt]} + \{nt\} (x_{[nt]+1} - x_{[nt]}) - x_{[nt_0]} - \{nt_0\} (x_{[nt_0]+1} - x_{[nt_0]})\| = \\ &= \|\{nt\} (x_{k_2} - x_{k_1}) - \{nt_0\} (x_{k_2} - x_{k_1})\| = \\ &= |\{nt\} - \{nt_0\}| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = \\ &= |n(t - t_0)| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = n \cdot |t - t_0| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| < \\ &< n \cdot \delta_1 \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| \leq n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\|x_{k_2} - x_{k_1}\|} \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = \varepsilon, \end{aligned}$$

ami mutatja a γ függvény t_0 pontbeli folytonosságát.

Ha $nt_0 \in \mathbb{N}$, akkor legyen $\delta_2 = \frac{1}{n}$ és $\delta = \frac{1}{2} \cdot \min \{\delta_1, \delta_2\}$, valamint $k_1 = nt_0$, $k_2 = k_1 + 1$ és $k_0 = k_1 - 1$.

Ha $t \in]t_0, t_0 + \delta[\cap [0, 1]$, akkor

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| &= \|x_{[nt]} + \{nt\} (x_{[nt]+1} - x_{[nt]}) - x_{[nt_0]} - \{nt_0\} (x_{[nt_0]+1} - x_{[nt_0]})\| = \\ &= \|x_{k_1} + \{nt\} (x_{k_2} - x_{k_1}) - x_{k_1}\| = \\ &= |\{nt\}| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = \\ &= |n(t - t_0)| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| < \\ &< n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\|x_{k_2} - x_{k_1}\|} \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ha $t \in]t_0 - \delta, t_0[\cap [0, 1]$, akkor az $nt = [nt] + \{nt\} = k_1 - 1 + \{nt\}$ egyenletből

$$1 - \{nt\} = k_1 - nt = nt_0 - nt$$

adódik, amit alapján

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| &= \|x_{[nt]} + \{nt\} (x_{[nt]+1} - x_{[nt]}) - x_{[nt_0]} - \{nt_0\} (x_{[nt_0]+1} - x_{[nt_0]})\| = \\ &= \|x_{k_0} + \{nt\} (x_{k_1} - x_{k_0}) - x_{k_1}\| = \\ &= |1 - \{nt\}| \cdot \|x_{k_0} - x_{k_1}\| = \\ &= |n(t - t_0)| \cdot \|x_{k_0} - x_{k_1}\| < \\ &< n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\|x_{k_0} - x_{k_1}\|} \cdot \|x_{k_0} - x_{k_1}\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát minden $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap [0, 1]$ esetén

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis a γ függvény folytonos a t_0 pontban.

2.30. Tétel. Normált térben minden konvex halmaz ívszerűen összefüggő.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subseteq V$ konvex halmaz és legyen $x, y \in A$ tetszőleges két pont. Ha $x = y$, akkor a $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$, $\gamma(t) = x$ függvény nyilván folytonos. Ha $x \neq y$, akkor az előző 2.29 tétel alapján a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow A \quad t \mapsto x + t(y - x)$$

függvény folytonos és nyilvánvaló módon teljesül rá $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$, vagyis γ összeköti az x és az y pontot.

2.31. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. $A \subseteq V$ halmaz ívszerűen összefüggő.
2. $A \subseteq V$ halmaz összefüggő.
3. Ha $A \subseteq V$ olyan halmaz mely nyílt és zárt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = V$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.

1. Mivel V konvex halmaz, ezért a 2.30 tétel alapján ívszerűen összefüggő.
2. Mivel V ívszerűen összefüggő, ezért az 1.99 tétel alapján összefüggő.
3. Az 1.102 tétel következménye.

2.32. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Ha $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül, akkor $B = A$.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Legyen $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül. Tegyük fel, hogy $A \setminus B \neq \emptyset$. Defináljuk az $U = B$ és $V = A \setminus B$ halmazokat. Ekkor $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cup V = A$ és

$$\overline{U} \cap V = \overline{B} \cap (A \setminus B) = \overline{B} \cap (A \setminus (\overline{B} \cap A)) = \overline{B} \cap (A \setminus \overline{B}) = \emptyset$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$, legyen $z \in U \cap \overline{V}$. Ekkor $z \in U = B$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \subseteq B$. Továbbá $z \in \overline{V} = \overline{A \setminus B}$ miatt létezik olyan $x \in A \setminus B$, melyre $\|x - z\| < r$ teljesül. Ebben az esetben $x \in A$, $x \notin B$, azonban $x \in B_r(z)$ miatt $x \in B$. Tehát téves volt az $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$ feltételezés, vagyis $U \cap \overline{V} = \emptyset$.

Ebből az az ellentmondás adódik, hogy az A halmaz nem összefüggő, vagyis az $A \setminus B \neq \emptyset$ feltételezés nem tartható, így $A \setminus B = \emptyset$, amiből $B \subseteq A$ miatt $B = A$ adódik.

2.33. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.

1. Az A halmaz összefüggő.
2. Minden $x, y \in A$ ponthoz létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \dots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$.
3. Az A halmaz ívszerűen összefüggő.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz.

1 $\Rightarrow$ 2 Legyen $c \in A$ egy rögzített pont. Legyen

$$A_c = \left\{ y \in A \mid \begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N}^+, \exists z_0, \dots, z_n \in A : z_0 = c, z_n = y, \\ \forall k \in \{0, \dots, n-1\} : z_k \neq z_{k+1}, [z_k, z_{k+1}] \subseteq A \end{array} \right\}.$$

Megmutatjuk, hogy az A_c halmaz nyílt. Ha $x \in A_c$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\exists z_0, \dots, z_n \in A : z_0 = c, z_n = x, \forall k \in \{0, \dots, n-1\} : z_k \neq z_{k+1}, [z_k, z_{k+1}] \subseteq A.$$

Továbbá $x \in A$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq A$. Ha $y \in B_r(x) \setminus \{x\}$, akkor $[x, y] \subseteq B_r(x) \subseteq A$, vagyis ha $z_{n+1} = y$, akkor

$$z_0 = c, z_{n+1} = y, \forall k \in \{0, \dots, n\} : z_k \neq z_{k+1}, [z_k, z_{k+1}] \subseteq A$$

teljesül, vagyis $y \in A_c$. Tehát $B_r(x) \subseteq A_c$ is teljesül, vagyis A_c nyílt halmaz.

Most igazoljuk, hogy $\overline{A_c} \cap A = A_c$. Mivel $A_c \subseteq \overline{A_c} \cap A$ nyilvánvalóan teljesül, ezért csak azt kell

igazolni, hogy $\overline{A_c} \cap A \subseteq A_c$. Legyen $x \in \overline{A_c} \cap A$. Ekkor $x \in A$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq A$ teljesül. Mivel $x \in \overline{A_c}$, ezért létezik olyan $y \in A_c$, melyre $\|x - y\| < \frac{r}{2}$ teljesül. Ekkor $y \in B_r(x)$, vagyis $[y, x] \subseteq B_r(x) \subseteq A$, valamint $y \in A_c$, miatt létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\exists z_0, \dots, z_n \in A : z_0 = c, z_n = y, \forall k \in \{0, \dots, n-1\} : z_k \neq z_{k+1}, [z_k, z_{k+1}] \in A.$$

Ha $z_{n+1} = x$, akkor

$$z_0 = c, z_{n+1} = x, \forall k \in \{0, \dots, n\} : z_k \neq z_{k+1}, [z_k, z_{k+1}] \in A$$

teljesül, vagyis $x \in A_c$.

Ezek alapján $A_c \subseteq A$ olyan nyílt részhalmaza az A összefüggő halmaznak, melyre $\overline{A_c} \cap A = A_c$ teljesül, vagyis az előző 2.32 tétel alapján $A_c = A$.

Most legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont. Ekkor $x, y \in A_c$, vagyis

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{N}^+ \exists z_0, \dots, z_n \in A : z_0 = c, z_n = x, \forall k \in \{0, \dots, n-1\} : z_k \neq z_{k+1}, [z_k, z_{k+1}] \in A \\ \exists m \in \mathbb{N}^+ \exists v_0, \dots, v_m \in A : v_0 = c, v_m = y, \forall k \in \{0, \dots, m-1\} : v_k \neq v_{k+1}, [v_k, v_{k+1}] \in A. \end{aligned}$$

Legyen $l = n + m$ és minden $k \in \{0, \dots, l\}$ esetén legyen

$$u_k = \begin{cases} z_{n-k}, & \text{ha } k \leq n; \\ v_{k-n}, & \text{ha } k > n. \end{cases}$$

Ekkor

$$u_0 = x, u_l = y, \forall k \in \{0, \dots, l-1\} : u_k \neq u_{k+1}, [u_k, u_{k+1}] \in A.$$

2 $\Rightarrow$ 3 Legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont. Ehhez létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \dots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x, z_n = y$ és minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $z_k \neq z_{k+1}$ és $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$. A 2.29 tétel alapján ekkor létezik olyan folytonos $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ görbe, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.

3 $\Rightarrow$ 1 Ha A ívszerűen összefüggő, akkor az 1.99 tétel alapján összefüggő.

2.9. Normált terek szorzata

2.34. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér, és legyen

$p \in [1, \infty[$. A $V = \prod_{k=1}^n V_k$ halmazon értelmezzük a

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \\ \|\cdot\|_p : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

függvényeket. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. $\|\cdot\|_\infty$ függvény norma.
2. Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ függvény norma.
3. Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek egymással.

Bizonyítás. A bizonyítása teljesen analóg a 2.28 tétel bizonyításával.

2.35. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér és legyen

$$\|\cdot\| : \prod_{k=1}^n V_k \rightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

A $\left(\prod_{k=1}^n V_k, \|\cdot\| \right)$ normált teret nevezzük a $(V_k, \|\cdot\|_k)_{k=1, \dots, n}$ normált terek szorzatának.

2.10. Normált terek teljes burka

2.36. Tétel. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor létezik olyan $(V', \|\cdot\|')$ Banach-tér és $j : V \rightarrow V'$ lineáris izometria, melyre $\overline{\text{Ran } j} = V'$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $\mathcal{V}$ az $\mathbb{N} \rightarrow V$ Cauchy-sorozatok halmaza, azaz

$$\mathcal{V} = \{a : \mathbb{N} \rightarrow V \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (N < n, m \rightarrow \|a_n - a_m\| < \varepsilon)\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $a \in \mathcal{V}$ esetén létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|$ határérték. Válaszunk $a \in \mathcal{M}$ tetszőleges elemet. Mivel minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\|a_n\| - \|a_m\|| \leq \|a_n - a_m\|$$

teljesül, ezért az $(\|a_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Defináljuk az $\sim$ relációt az $\mathcal{V}$ halmazon az alábbi módon.

$$\sim = \{(a, b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\|\}$$

A $\sim$ reláció nyilván ekvivalenciareláció.

Legyen $V' = \mathcal{V} / \sim$ és

$$\|\cdot\|' : V' \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad (a') \mapsto \sup_{a \in a'} \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|$$

ahol a $\sup$ műveletre azért van szükség, hogy az egyetlen számot tartalmazó halmazból számot képezzünk.

Ha $a^{(1)}, a^{(2)}, b^{(1)}, b^{(2)} \in \mathcal{V}$ olyan elemek, hogy $a^{(1)} \sim a^{(2)}$ és $b^{(1)} \sim b^{(2)}$, akkor mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \left(a_n^{(1)} + b_n^{(1)} \right) - \left(a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \right) \right\| \leq \left\| a_n^{(1)} - a_n^{(2)} \right\| + \left\| b_n^{(1)} - b_n^{(2)} \right\|$$

teljesül, ezért $a^{(1)} + b^{(1)} \sim a^{(2)} + b^{(2)}$. Vagyis értelmezhető az összeadás művelet az ekvivalencia osztályokon is, melyet szintén a $+$ szimbólummal fogunk jelölni.

Továbbá, ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a^{(1)}, a^{(2)} \in \mathcal{V}$ olyan elemek, hogy $a^{(1)} \sim a^{(2)}$, akkor mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \lambda a_n^{(1)} - \lambda a_n^{(2)} \right\| \leq |\lambda| \cdot \left\| a_n^{(1)} - a_n^{(2)} \right\|$$

teljesül, ezért $\lambda a^{(1)} \sim \lambda a^{(2)}$. Vagyis értelmezhető a számmal való szorzás művelet az ekvivalencia osztályokon, melyet szintén nem írunk ki. Ezek alapján egyszerűen megmutatható, hogy $(V', \|\cdot\|')$ normált tér.

Minden $x \in V$ esetén jelölje $\tilde{x}$ a konstans x sorozatot (mely nyilván Cauchy-sorozat), és legyen $x' = \tilde{x} / \sim$, valamint

$$j : V \rightarrow V' \quad x \mapsto x'.$$

Ekkor j lineáris izometria. A $\overline{\text{Ran } j} = V'$ egyenlőség és a $(V', \|\cdot\|')$ normált tér teljessége a metrikus tér teljes burkának konstrukciójából (1.94 tétel) adódik.

2.37. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $(V', \|\cdot\|')$ Banach-teret és $j : V \rightarrow V'$ lineáris izometriát, melyre $\overline{\text{Ran } j} = V'$ teljesül, az $(V, \|\cdot\|)$ normált tér teljes burkának nevezzük.

2.38. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \rightarrow V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\|_X)$ normált téren. Ekkor létezik egyetlen olyan $A' : U \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezés, mely az A kiterjesztése, vagyis $A'|_{\text{Dom } A} = A$, valamint $\|A'\| = \|A\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \rightarrow V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\|_X)$ normált téren.

1. Ha $A'_1, A'_2 : U \rightarrow V$ olyan folytonos függvény, melyre $A'_1|_X = A'_2|_X$ teljesül, akkor az egyenlőség folytatásának az elve alapján (1.66 tétel) $A'_1 = A'_2$. Tehát, ha létezik folytonos kiterjesztése az A operátornak, akkor az egyértelmű.

2. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ sorozat, melyre $\lim a = x$

teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor az $(Aa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel A egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y_1, y_2 \in X$ pontra $\|y_1 - y_2\| < \delta$ esetén $\|Ay_1 - Ay_2\|_V < \varepsilon$ teljesül. Mivel az a sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat is, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n, m$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \delta$. Ekkor viszont minden $N < n, m$ természetes számra $\|Aa_n - Aa_m\|_V < \varepsilon$. Mivel a $(V, \|\cdot\|_V)$ tér teljes, ezért az $(Aa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat konvergens.

3. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont és $a, b : \mathbb{N} \rightarrow X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = \lim b = x$ teljesül. Fésüljük össze az a és b sorozatot az alábbi módon.

$$c : \mathbb{N} \rightarrow X \quad n \mapsto \begin{cases} a_{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_{\frac{n-1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor nyilván $\lim c = x$, továbbá az előző pont miatt létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} Ac_n$ határérték. Mivel $(Aa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(Ab_n)_{n \in \mathbb{N}}$ részsorozata az $(Ac_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatnak, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ac_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ab_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Aa_n.$$

4. Ezek után definiálhatjuk úgy az A' függvényt, hogy minden $x \in \overline{X}$ esetén vegyünk egy olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ sorozatot, melyre $\lim a = x$ teljesül és legyen $A'x = \lim_{n \rightarrow \infty} Aa_n$. Vagy másképp leírva

$$A' = \left\{ (x, y) \in \overline{X} \times V \mid \exists a : \mathbb{N} \rightarrow X : \lim a = x \wedge y = \lim_{n \rightarrow \infty} Aa_n \right\}.$$

Ekkor nyilván $A \subseteq A'$. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in \overline{X}$, valamint $a, b : \mathbb{N} \rightarrow X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Ekkor az

$$\begin{aligned} A'(x + y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A(a_n + b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Aa_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (Ab_n) = A'x + A'y \\ A'(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} Aa_n = \lambda A'x \end{aligned}$$

egyenletek alapján A' lineáris.

5. Legyen $x \in \overline{X}$, $\|x\| \leq 1$ tetszőleges vektor és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Ekkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $\|a_n - x\| < \varepsilon$, vagyis $\|a_n\| < \|x\| + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$. Valamit $A'x = \lim_{n \rightarrow \infty} Aa_n$ miatt létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $\|A'a_n - Aa_n\| < \varepsilon$, vagyis $\|A'x\| < \|Aa_n\| + \varepsilon$. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\max\{N_1, N_2\} < n$, akkor

$$\|A'x\| < \|Aa_n\| + \varepsilon \leq \|A\| \cdot \|a_n\| + \varepsilon \leq (1 + \varepsilon) \|A\| + \varepsilon$$

adódik. Mivel ez minden pozitív ε paraméterre teljesül, ezért $\|A'x\| \leq \|A\|$, amiből pedig

$$\|A'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A'x\| \leq \|A\|$$

következik. A nyilvánvaló

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|A'x\| \leq \sup_{\substack{x \in \overline{X} \\ \|x\| \leq 1}} \|A'x\| = \|A'\|$$

egyenlőtlenség miatt $\|A\| = \|A'\|$.

2.39. Tétel. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j) . Minden $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-térhez és $A : U \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezéshez létezik egyetlen olyan $A' : U' \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezés, melyre $A' \circ j = A$ teljesül, továbbá $\|A'\| = \|A\|$.

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j) , $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezés. Vezessük be az $X = \text{Ran } j$ jelölést. Ekkor X sűrű lineáris altér az U' Banach-térben. Legyen $\tilde{A} : X \rightarrow V$, $\tilde{A}x = A(j^{-1}(x))$. Az $\tilde{A}$ leképezés nyilván lineáris, továbbá

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|\tilde{A}x\|_V = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|A(j^{-1}(x))\|_V = \sup_{\substack{y \in U \\ \|y\| \leq 1}} \|Ay\|_V = \|A\|.$$

A 2.38 tétel alapján létezik egyetlen olyan $A' : U' \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezés, mely az $\tilde{A}$ kiterjesztése és amelyre $\|A'\| = \|\tilde{A}\| = \|A\|$ teljesül. Továbbá, minden $y \in U$ esetén

$$(A' \circ j)(x) = A'(j(x)) = \tilde{A}(j(x)) = A(j^{-1}(j(x))) = Ax,$$

vagyis $A' \circ j = A$.

2.40. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka. Ekkor létezik egyetlen olyan $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka. Legyen $f : \text{Ran } j_1 \rightarrow V_2$, $f = j_2 \circ j_1^{-1}$. Ekkor $f : V_1 \rightarrow V_2$ sűrűn értelmezett lineáris izometria, ezért a 2.39 tétel alapján létezik egyetlen folytonos lineáris $A : V_1 \rightarrow V_2$ kiterjesztése, mely szintén izometria. Mivel $f \circ j_1 = j_2$, ezért $A \circ j_1 = j_2$. Megcserélve a (V_1, j_1) és (V_2, j_2) szerepét az adódik, hogy létezik olyan folytonos lineáris $A' : V_2 \rightarrow V_1$ izometria, mely az $f' : \text{Ran } j_2 \rightarrow V_1$, $A' = j_1 \circ j_2^{-1}$ kiterjesztése és melyre $A' \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} A \circ j_1 \circ j_2^{-1} &= j_2 \circ j_2^{-1} = \text{id}_{\text{Ran } j_2} \\ (A \circ A')|_{\text{Ran } j_2} &= \text{id}_{V_2}|_{\text{Ran } j_2} \end{aligned}$$

miatt az egyenlőség folytatásának az elve (1.66 tétel) alapján $A \circ A' = \text{id}_{V_2}$. Szerepcserével pedig $A' \circ A = \text{id}_{V_1}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy A izometrikus bijekció, tehát A^{-1} is folytonos. Vagyis A izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.

Az előbbi jelölések mellett tegyük fel, hogy $A_1, A_2 : V_1 \rightarrow V_2$ olyan folytonos lineáris leképezések, melyekre $j_2 = A_1 \circ j_1 = A_2 \circ j_1$ teljesül. Ekkor $A_1|_{\text{Ran } j_1} = A_2|_{\text{Ran } j_1}$, amiből az egyenlőség folytatásának az elve alapján $A_1 = A_2$ következik.

2.41. Tétel. Minden normált térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.

Bizonyítás. A 2.36 és a 2.40 tétel alapján nyilvánvaló.

3. Hilbert-terek

3.1. Skaláris szorzással ellátott terek

3.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y, z \in V : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$;
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Azt mondjuk, hogy V *skalárszorozatos vektortér*, ha a V vektortéren adott egy skaláris szorzás.

3.2. Tétel. Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y, z \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x, y, z \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle x, y + z \rangle &= \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \lambda \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

3.3. Tétel. (Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett és legyen $x, y \in V$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \leq \langle z, z \rangle = \langle x - ty, x - ty \rangle = \langle x, x \rangle - \bar{t} \langle y, x \rangle - t \langle x, y \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle.$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$ értéket

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle \langle y, y \rangle} \langle y, y \rangle = \\ &= \frac{1}{\langle y, y \rangle} \left(\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \right) \end{aligned}$$

adódik.

3.4. Tétel. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a V vektortéren. Ekkor

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

norma.

Bizonyítás. A skaláris szorzás definíciója alapján minden $x \in V$ vektorra és $c \in \mathbb{K}$ számra

$$\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx \rangle} = \sqrt{\overline{c} \langle x, cx \rangle} = \sqrt{\overline{c} (\langle cx, x \rangle)} = \sqrt{\overline{c} (\overline{c} \langle x, x \rangle)} = \sqrt{\overline{c} c \langle x, x \rangle} = |c| \cdot \|x\|$$

teljesül.

Ha $x = 0$, akkor $\|x\| = \sqrt{0} = 0$. Ha valamilyen $x \in V$ vektorra $\|x\| = 0$, akkor $\langle x, x \rangle = 0$, vagyis $x = 0$.

Legyen $x, y \in V$ tetszőleges. Azt kell igazolni, hogy

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

teljesül. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség minden tagja pozitív, ezért elég az egyenlőtlenség négyzetét igazolni, vagyis, hogy

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &\leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle &\leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ \operatorname{Re} \langle x, y \rangle &\leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

teljesül. Ez viszont rögtön adódik a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből és a komplex számokra vonatkozó $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle|$ egyenlőtlenségből.

3.5. Tétel. (Parallelogramma-egyenlőség.) Ha V skalárszorozatos vektortér, akkor minden $x, y \in V$ vektorra

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorozatos vektortér és $x, y \in V$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

3.6. Definíció. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a V téren.

- Ekkor a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *prehilbert-térnek* nevezzük.
- A $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *Hilbert-térnek* nevezzük, ha a skaláris szorzásból származtatott normára nézve teljes normált tér.

Jelölés. A (pre-) Hilbert-tereket a továbbiakban csak az alaphalmaz szimbólumával jelöljük és a térhez tartozó skaláris szorzást csak akkor írjuk ki, ha annak elhagyása félrevezető lenne. Továbbá adott $\mathcal{H}$ Hilbert-tér esetén a $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ térre a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vagy a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jelölést fogjuk használni.

3.7. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in \mathcal{H}$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer

- *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha

$$\forall x \in \mathcal{H} \left((\forall i \in I : \langle e_i, x \rangle = 0) \rightarrow x = 0 \right)$$

teljesül;

- *Schauder-bázis*, ha teljes lineárisan független vektorrendszer.

3.8. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor a

$$\begin{aligned} \langle \cdot, z \rangle : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{K} & x &\mapsto \langle x, z \rangle \\ \langle z, \cdot \rangle : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{K} & x &\mapsto \langle z, x \rangle \end{aligned}$$

leképezések folytonosak.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor. Mivel a $\langle z, \cdot \rangle$ leképezés a skaláris szorzás definíciója alapján lineáris és a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\|\langle z, \cdot \rangle\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle z, x \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \cdot \|z\| \leq \|z\| < \infty,$$

ezért a lineáris leképezések folytonosságára vonatkozó 2.13 tétel alapján $\langle z, \cdot \rangle$ folytonos lineáris leképezés.

Mivel a konjugálás művelete folytonos és $\langle \cdot, z \rangle = \overline{\langle z, \cdot \rangle}$, ezért $\langle \cdot, z \rangle$ két folytonos leképezés kompozíciója, így folytonos.

3.9. Tétel. Legyen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. (Bessel-egyenlőtlenség.) Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra és $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra

$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

2. Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n.$$

3. (Parseval-egyenlőség.) Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2.$$

Bizonyítás. Legyen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben és legyen $x \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor.

1. Mivel minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{i=0}^N \langle e_i, x \rangle e_i, x - \sum_{j=0}^N \langle e_j, x \rangle e_j \right\rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=0}^N \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_i, x \rangle - \sum_{j=0}^N \langle e_j, x \rangle \langle x, e_j \rangle + \sum_{i,j=0}^N \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_j, x \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=0}^N |\langle e_i, x \rangle|^2 + \sum_{i=0}^N \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_i, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=0}^N |\langle e_i, x \rangle|^2 \end{aligned}$$

teljesül, ezért minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=0}^N |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Tehát

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

is teljesül, valamint ha az összegzés csak egy $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra végezzük el, azzal csak csökkenteni tudjuk a bal oldalon álló kifejezés értékét, vagyis minden $J \subseteq \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k$. Minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ számra

$$\|\alpha_m - \alpha_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \langle e_k, x \rangle e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=n+1}^m \langle e_i, x \rangle e_i, \sum_{j=n+1}^m \langle e_j, x \rangle e_j \right\rangle = \quad (3.1)$$

$$= \sum_{i,j=n+1}^m \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_j, x \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=n+1}^m |\langle e_i, x \rangle|^2.$$

Az 1. pont alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 < \infty$, tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

teljesül, vagyis a (3.1) egyenlőtlenség alapján minden $n, m \in \mathbb{N}$ számra $N < n, m$ esetén

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért konvergens is, vagyis létezik a Hilbert-térben a $z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n$ vektor.

Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. A skaláris szorzás folytonossága miatt

$$\begin{aligned} \left\langle e_k, x - \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n \right\rangle &= \langle e_k, x \rangle - \left\langle e_k, \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right\rangle = \\ &= \langle e_k, x \rangle - \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle e_k, \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right\rangle = \langle e_k, x \rangle - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle \langle e_k, e_n \rangle = \\ &= \langle e_k, x \rangle - \langle e_k, x \rangle = 0 \end{aligned}$$

teljesül. Mivel az $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vektorrendszer teljes, ezért

$$x - \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n = 0.$$

3. A 2. pontban bizonyított egyenlőséget skalárisan szorozva az x vektorral

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \left\langle x, \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n \right\rangle \\ \|x\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle \langle x, e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 \end{aligned}$$

adódik.

3.2. Vektor ortogonális projekciója zárt altérre

3.10. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathcal{H}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in W$, melyre

$$\text{dist}_W(x) = \inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathcal{H}$. Vezessük be a $d = \text{dist}_W(x)$ jelölést. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $w_n \in W$ vektor, melyre

$$\|w_n - x\| < d + \frac{1}{n+1}$$

teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d \leq \|w_n - x\|$ ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - x\| = d$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - x\|^2 = d^2$ határérték miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ természetes számra $\|w_n - x\|^2 < d^2 + \frac{\varepsilon}{4}$. Ha $n, m \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $N < n, m$, akkor W konvexitása miatt $\frac{w_n + w_m}{2} \in W$ és parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned} \|w_n - w_m\|^2 &= \|(w_n - x) - (w_m - x)\|^2 = 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - \|(w_n - x) + (w_m - x)\|^2 = \\ &= 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{w_n + w_m}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4d^2 = 2\left(\|w_n - x\|^2 - d^2\right) + 2\left(\|w_m - x\|^2 - d^2\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát a $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat. Mivel $\mathcal{H}$ teljes, ezért létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = y$ határérték, valamint W zártsága miatt $y \in W$. Erre az y vektorra

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - w_n\| = d$$

teljesül.

Az y vektor egyértelműségének a bizonyításához tegyük fel, hogy léteznek olyan $y_1, y_2 \in W$, melyekre $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$. Ekkor a parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \|(y_1 - x) - (y_2 - x)\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - \|(y_1 - x) + (y_2 - x)\|^2 \leq \\ &= 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0, \end{aligned}$$

tehát $\|y_1 - y_2\| = 0$ miatt $y_1 = y_2$.

3.11. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér.

- Az $x, y \in V$ vektorok *ortogonálisak* vagy *merőlegesek egymásra*, ha $\langle x, y \rangle = 0$.
- Az $x \in V$ vektor *ortogonális* vagy *merőleges a* $W \subseteq V$ *halmazra*, ha minden $y \in W$ esetén $\langle x, y \rangle = 0$.
- Az $L, W \subseteq V$ *halmazok ortogonálisak*, ha minden $x \in L$ és $y \in W$ esetén $\langle x, y \rangle = 0$.

3.12. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathcal{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor x_W az egyetlen olyan vektora a W lineáris altérnek, melyre $x - x_W$ ortogonális a W altérre.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér, $x \in \mathcal{H}$ és $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Legyen $z \in W$ tetszőleges vektor és $t \in \mathbb{K}$ paraméter. Mivel W lineáris altér, ezért $x_W + tz \in W$. Ebben az esetben viszont

$$\|x - x_W\|^2 \leq \|x - x_W - tz\|^2 = \|x - x_W\|^2 + |t|^2 \|z\|^2 - 2 \operatorname{Re}(t \langle x - x_W, z \rangle)$$

alapján

$$0 \leq |t|^2 \|z\|^2 - 2 \operatorname{Re}(t \langle x - x_W, z \rangle).$$

Tehát minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $t = \lambda$ választással élve $0 \leq \lambda^2 \|z\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(\langle x - x_W, z \rangle)$, amiből $\operatorname{Re}(\langle x - x_W, z \rangle) = 0$ következik. Továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $t = i\lambda$ választással élve $0 \leq \lambda^2 \|z\|^2 + 2i\lambda \operatorname{Im}(\langle x - x_W, z \rangle)$, amiből $\operatorname{Im}(\langle x - x_W, z \rangle) = 0$ következik. Vagyis $\langle x - x_W, z \rangle = 0$ teljesül minden $z \in W$ vektorra, tehát $x - x_W$ ortogonális a W altérre.

Tegyük fel, hogy $y \in W$ olyan vektor, hogy $x - y$ ortogonális a W altérre, tehát minden $z \in W$ esetén $\langle z, x - y \rangle = 0$. Mivel $x_W - y \in W$, ezért $\langle x_W - y, x - y \rangle = 0$, amiből pedig

$$\begin{aligned} \|x_W - y\|^2 &= \langle x_W - y, x_W - y \rangle = \langle x_W - y, (x_W - x) + (x - y) \rangle = \\ &= \langle x_W - y, x_W - x \rangle + \langle x_W - y, x - y \rangle = 0 \end{aligned}$$

következik, tehát $y = x_W$.

3.13. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathcal{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor az x_W vektort az x vektor W altérre való ortogonális vetületének vagy projekciójának nevezzük.

3.3. Zárt altér ortogonális kiegészítő altere

3.14. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathcal{H}$ nem üres halmaz. Ekkor a

$$L^\perp \triangleq \{z \in \mathcal{H} \mid \forall x \in L : \langle x, z \rangle = 0\}$$

halmazt L ortogonálisának nevezzük.

3.15. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér.

1. Minden nem üres $L \subseteq \mathcal{H}$ esetén $L^\perp$ zárt lineáris altér.
2. Minden nem üres $L \subseteq K \subseteq \mathcal{H}$ esetén $K^\perp \subseteq L^\perp$.
3. Minden nem üres $L \subseteq \mathcal{H}$ esetén $L \subseteq L^{\perp\perp}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér.

1. Tegyük fel, hogy $L \subseteq \mathcal{H}$ nem üres halmaz. Ekkor minden $x, y \in L^\perp$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén mivel minden $z \in L$ vektorra

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0 \quad \langle \lambda x, z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, z \rangle = 0$$

teljesül, ezért $x + y, \lambda x \in L^\perp$. Tehát $L^\perp$ lineáris altér. Az $L^\perp$ zártságának igazolásához legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow L^\perp$ tetszőleges konvergens sorozat a $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határértékkel. Tetszőleges $z \in L$ esetén a skaláris szorzás folytonossága (3.8 tétel) miatt

$$\langle z, c \rangle = \left\langle z, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z, a_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

vagyis $c \in L^\perp$. Mivel minden $L^\perp$ halmazban haladó konvergens sorozat határértéke a halmazban van, ezért $L^\perp$ zárt halmaz.

2. Tegyük fel, hogy $L \subseteq K \subseteq \mathcal{H}$ nem üres halmazok és $x \in K^\perp$. Ekkor minden $z \in K$ esetén $\langle x, z \rangle = 0$. Mivel $L \subseteq K$, ezért minden $z \in L$ esetén is $\langle x, z \rangle = 0$, vagyis $x \in L^\perp$.
3. Legyen $L \subseteq \mathcal{H}$ nem üres halmaz és $x \in L$. Ekkor minden $z \in L^\perp$ esetén $\langle z, x \rangle = 0$, vagyis $x \in L^{\perp\perp}$.

3.16. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér. Ekkor W és $W^\perp$ zárt ortogonális kiegészítő alterek, vagyis $W \cap W^\perp = \{0\}$ és $W + W^\perp = \mathcal{H}$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér. Ha $z \in W \cap W^\perp$, akkor $\langle z, z \rangle = 0$, vagyis $z = 0$. Legyen $x \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor $x_W \in W$ és $x - x_W \in W^\perp$, tehát az

$$x = x_W + (x - x_W)$$

egyenlőség miatt $W + W^\perp = \mathcal{H}$.

3.17. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér, akkor $W = W^{\perp\perp}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér. A 3.16 tételt alkalmazva a $W^\perp$ zárt altérre $W^{\perp\perp} + W^\perp = \mathcal{H}$ adódik, ugyanakkor $W + W^\perp = \mathcal{H}$ és nyilván $W \subseteq W^{\perp\perp}$. Ezek alapján $W = W^{\perp\perp}$, ugyanis ha $0 \neq x \in W^{\perp\perp}$, akkor $x \notin W^\perp$, tehát $W + W^\perp = \mathcal{H}$ miatt $x \in W$.

3.18. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathcal{H}$ lineáris altér, akkor $\bar{L} = L^{\perp\perp}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathcal{H}$ lineáris altér. Mivel $L \subseteq \bar{L}$, ezért a 3.15 tétel alapján $\bar{L}^\perp \subseteq L^\perp$, amiből viszont $L^{\perp\perp} \subseteq \bar{L}^{\perp\perp}$ adódik. A 3.17 tételt alkalmazva az $\bar{L}$ lineáris altérre azt kapjuk, hogy $\bar{L} = \bar{L}^{\perp\perp}$. Ezek alapján $L^{\perp\perp} \subseteq \bar{L}$. Az $\bar{L} \subseteq L^{\perp\perp}$ tartalmazás pedig a 3.15 tétel alapján nyilvánvaló.

3.4. Ortogonális projekciók

3.19. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér, tekintsük a

$$P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad x \mapsto x_W$$

leképezést.

1. A P leképezés lineáris.
2. A P leképezésre $\text{Ran } P = W$ és $\text{Ker } P = W^\perp$.
3. $P^2 = P$
4. Ha $W \neq \{0\}$, akkor $\|P\| = 1$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér és $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $Px = x_W$.

1. Legyen $x, y \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár. A 3.12 tétel alapján ekkor minden $z \in W$ esetén $\langle x - Px, z \rangle = \langle y - Py, z \rangle = 0$. Tehát minden $z \in W$ esetén

$$\langle x + y - (Px + Py), z \rangle = 0 \quad \text{és} \quad \langle \lambda x - \lambda Px, z \rangle = 0$$

amiből megint a 3.12 tétel alapján $P(x + y) = Px + Py$ és $P(\lambda x) = \lambda Px$ adódik.

2. A P leképezés definíciója alapján $\text{Ran } P \subseteq W$ és ugyancsak a definíció alapján minden $x \in W$ vektorra $Px = x$ teljesül, tehát $W \subseteq \text{Ran } P$. Ha $x \in \text{Ker } P$, akkor $Px = 0$, a 3.12 tétel alapján pedig ekkor $x - Px = x$ merőleges a W altérre, tehát $x \in W^\perp$. Ha $x \in W^\perp$, akkor $x - Px$ is merőleges a W altérre, ami $Px = 0$ mellett következik be, tehát $x \in \text{Ker } P$.

3. Minden $x \in \mathcal{H}$ esetén $Px \in W$ és minden $z \in W$ esetén definíció szerint $Pz = z$, ezért $P^2x = P(Px) = Px$.

4. Mivel $W \neq \{0\}$, ezért létezik olyan $z \in W$, hogy $\|z\| = 1$ és ekkor az operátornomára

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Px\| \geq \|Pz\| = \|z\| = 1$$

teljesül, vagyis $1 \leq \|P\|$.

3.5. Riesz-féle reprezentációs tétel

3.20. Tétel. (Riesz-féle reprezentációs tétel.) Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $\varphi \in \mathcal{H}'$, azaz $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, akkor létezik egyetlen olyan $z \in \mathcal{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ esetén

$$\varphi(x) = \langle z, x \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. Ha $\varphi = 0$, akkor $z = 0$ olyan vektor, melyre

$$\forall x \in \mathcal{H} : \quad \varphi(x) = \langle z, x \rangle.$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\varphi \neq 0$. Ekkor létezik olyan $y \in \mathcal{H}$, melyre $\varphi(y) \neq 0$. A $W = \text{Ker } \varphi$ lineáris altér zárt φ folytonossága miatt, így erre az altérre lehet ortogonálisan vetíteni. Legyen P a W altérre való ortogonális vetítés operátora és tekintsük az $y' = y - Py$ vektort, melyről a 3.12 tétel alapján tudjuk, hogy ortogonális a W altérre, azaz $y' \in W^\perp$. Ekkor $y' \neq 0$, hiszen

$$0 \neq \varphi(y) = \varphi(Py) + \varphi(y') = \varphi(y').$$

Ekkor bármely $x \in \mathcal{H}$ vektor esetén

$$\varphi(y')x - \varphi(x)y' \in \text{Ker } \varphi = W$$

amiből $y' \in W^\perp$ miatt

$$\langle y', \varphi(y')x - \varphi(x)y' \rangle = 0$$

adódik. Vagyis minden $x \in \mathcal{H}$ esetén

$$\langle y', \varphi(y')x \rangle = \langle y', \varphi(x)y' \rangle \Rightarrow \varphi(y') \langle y', x \rangle = \varphi(x) \|y'\|^2 \Rightarrow \left\langle \frac{\overline{\varphi(y')}}{\|y'\|^2} y', x \right\rangle = \varphi(x).$$

Tehát a $z = \frac{\overline{\varphi(y')}}{\|y'\|^2} y'$ vektorra minden $x \in \mathcal{H}$ esetén $\varphi(x) = \langle z, x \rangle$ teljesül.

A z vektor egyértelműségét úgy igazoljuk, hogy tegyük fel létezik olyan $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ esetén

$$\varphi(x) = \langle z_1, x \rangle = \langle z_2, x \rangle.$$

Ebből az $x = z_1 - z_2$ választással $\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = 0$ adódik, vagyis $z_1 = z_2$.

4. Függvénysorozatok, függvénysorok

4.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

4.1. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $A \subseteq T$, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$.

Ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } f_n \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right\} \rightarrow M \quad t \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ jelölést használjuk.

Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \text{Dom } f$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : (N < n \rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon)$$

teljesül;

- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha létezik olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens*, ha a T halmazon adott egy d_T metrika és minden $t \in \text{Dom } f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

4.2. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$.

- Az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozathoz *rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(T, V) \quad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^k f_j(t) \right)$$

képlettel definiáljuk.

- A $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összefüggvénye*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } f_n \mid \exists \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) \right\} \rightarrow V \quad t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor az A halmazon *pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \text{Dom } \sum_n f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a T halmazon pontonként abszolút konvergens.

4.3. Tétel. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : (N < n, m \rightarrow d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez. Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : d(f_n(t), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : d(f_n(t), f_m(t)) \leq d(f_n(t), f(t)) + d(f(t), f_m(t)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja az egyik irányú következtetést.

Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : (N < n, m \rightarrow d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a feltevés miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$$

teljesül, amiből a d metrika folytonossága miatt

$$\forall t \in T : \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_n(t), f_m(t)) = d\left(f_n(t), \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t)\right) = d(f_n(t), f(t)) \leq \varepsilon$$

adódik.

4.4. Tétel. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határfüggvény, $\text{Dom } f = M$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, M')$.

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy az f függvény minden $x \in M$ pontban folytonos. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{3}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t \in M} d'(f_n(t), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel az f_{N+1} függvény folytonos az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(x)$ pontra $f_{N+1}(t) \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_{N+1}(x))$ teljesül. Ekkor

$$t \in B_\delta(x) \Rightarrow d'(f(t), f(x)) \leq d'(f(t), f_{N+1}(t)) + d'(f_{N+1}(t), f_{N+1}(x)) + d'(f_{N+1}(x), f(x)) < \varepsilon,$$

vagyis az f függvény folytonos az x pontban.

4.5. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény, $\text{Dom } f = M$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénytör egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, V)$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra definiáljuk a $g_n = \sum_{k=0}^n f_k$ függvényt. Ekkor a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 4.4 tételt adódik az állítás.

4.2. Korlátos folytonos függvények tere

4.6. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér és $f : T \rightarrow M$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény korlátos, ha $\text{Ran } f \subseteq M$ korlátos halmaz. A $T \rightarrow M$ korlátos függvények halmazát jelölje $\mathcal{F}^b(T, M)$. Ha (T, d_T) metrikus tér, akkor a $T \rightarrow M$ folytonos korlátos függvények halmazát pedig jelölje $C^b(T, M)$.

4.7. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. A

$$\|\cdot\|_{\text{sup}} : C^b(M, V) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \sup_{t \in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma az $C^b(M, V)$ vektortéren, így $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált tér.

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ függvény nyilvánvaló módon teljesíti a norma tulajdonságait.

4.8. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C^b(M, V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvényt sorozat, melyre $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^b(M, V)$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvényt sorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált térben.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C^b(M, V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvényt sorozat, melyre $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^b(M, V)$ teljesül.

Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvényt sorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : (N < n \rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon),$$

vagyis minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Tehát az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált térben.

Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált térben és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\text{sup}} < \varepsilon,$$

vagyis

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : (N < n \rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon),$$

tehát az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvényt sorozat egyenletesen konvergens.

4.9. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, valamint (M, d) metrikus tér. Ekkor $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ Banach-tér.

4.10. Tétel. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvényt sorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvényt sor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.

Bizonyítás. Legyen T halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvényt sorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvényt sor pontonként abszolút konvergens. Ekkor minden $t \in T$ esetén a $\sum_n f_n(t)$ sor abszolút konvergens a V Banach-térben, ezért konvergens is. Tehát a függvényt sor minden pontban konvergens.

4.11. Tétel. (Weierstrass-tétel.) Legyen T egy nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénytípus. Ha a $\sum_n f_n$ függvényssorra

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in T} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor egyenletesen is konvergens.

Bizonyítás. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénytípus. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvényssorra

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in T} \|f_n(t)\| < \infty.$$

Ekkor a $\sum_n f_n$ függvényssor pontonként abszolút konvergens, tehát konvergens is. Legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Defináljuk az

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad n \mapsto \sup_{t \in T} \|f_n(t)\|$$

sorozatot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$,

hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $N < n$ természetes számra és $t \in T$ pontra

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy a $\sum_n f_n$ függvényssor egyenletesen konvergens.

4.3. Hatványsorok

4.12. Definíció. (Hatványsorok.)

- Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \rightarrow V \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt a *együtthatójú 0 középpontú hatványsornak* nevezzük.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}, & \text{ha } 0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < \infty; \\ 0, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

4.13. Tétel. (Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.

1. Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.
2. Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.
3. Ha $r \in [0, R_a[$, akkor

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty.$$

4. Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.
5. Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat, továbbá legyen R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara.

3. Legyen $r \in [0, R_a[$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in B_r(0)} \|a_n x^n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot \sup_{x \in B_r(0)} |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot r^n < \infty,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél az elemi Cauchy–Hadamard-tételt használtuk.

1. Ha $x \in V$ és $|x| < R_a$, akkor legyen $r \in]|x|, R_a[$ tetszőleges paraméter. A 3. pont alapján a hatványsor nomálisan konvergens a $B_r(0)$ halmazon, ezért ott abszolút konvergens is.

2. Legyen $|x| > R_a$ és tegyük fel, hogy a $\sum_n a_n x^n$ sor konvergens. Ekkor a 2.9 tétel alapján

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = 0$ teljesül. Tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < k \in \mathbb{N}$ számra $\|a_k x^k\| < 1$, azaz

$$\sqrt[k]{\|a_k\|} < \frac{1}{|x|}.$$

Vagyis

$$\frac{1}{R_a} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup \left\{ \sqrt[k]{\|a_k\|} \mid k \geq n \right\} \leq \sup \left\{ \sqrt[k]{\|a_k\|} \mid k \geq N+1 \right\} \leq \frac{1}{|x|},$$

amiből az $|x| \leq R_a$ ellentmondás adódik.

4. Legyen $x \in B_{R_a}(0)$ tetszőleges pont. Válasszunk egy $r \in]|x|, R_a[$ paramétert. A 3. pont alapján a hatványsorra a $B_r(0)$ halmazon alkalmazható a 4.11 Weierstrass-tétel, tehát itt egyenletesen is konvergens a hatványsor. Vagyis az x pontnak a $B_r(0)$ halmaz olyan környezete ahol a hatványsor egyenletesen konvergens.

5. Mivel a függványsor bármely véges összege folytonos függvény és a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletes a konvergencia, ezért a 4.4 tétel alapján az összegfüggvény is folytonos.

4.4. Lineáris leképezés függvénye

4.14. Tétel. Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor minden $A \in \mathcal{L}(V, V)$, elemre $\|A\| < R_a$ esetén a

$$\sum_n a_n A^n$$

sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Legyen $A \in \mathcal{L}(V, V)$ olyan elem, melyre $\|A\| < R_a$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\sum_{k=0}^n \|a_k A^k\| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \cdot \|A\|^k.$$

A $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k$ sor konvergens a Cauchy–Hadamard-tétel miatt, hiszen a $k \mapsto |a_k|$ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara is R_a , továbbá az $\|A\|$ számra $\|A\| < R_a$ teljesül. Ez

azt mutatja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^n \|a_k A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k,$$

vagyis a $\sum_n a_n A^n$ sor abszolút konvergens a $\mathcal{L}(V, V)$ Banach-térben, ezért konvergens is.

4.15. Definíció. Legyen V Banach-tér és legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

teljesül. Ekkor minden $A \in \mathcal{L}(V, V)$ elemre legyen

$$f(A) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

4.16. Definíció. Legyen T tetszőleges nem üres halmaz. A

$$\delta : T \times T \rightarrow \{0, 1\} \quad (i, j) \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j; \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

függvény a *Kronecker-féle delta-függvény*.

4.17. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel.

1. Ha A diagonalizálható, azaz létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) = Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

2. Ha az A mátrix Jordan-felbontása egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis létezik olyan invertálható S mátrix és J mátrix, melyre $A = SJS^{-1}$, ahol

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

akkor $f(A) = Sf(J)S^{-1}$, ahol

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Vagyis

$$\text{ha } J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i > j \text{ vagy } j - i > 1; \\ \lambda, & \text{ha } i = j; \\ 1, & \text{ha } j - i = 1, \end{cases} \quad \text{akkor } f(J_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i > j; \\ \frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}, & \text{ha } i \leq j. \end{cases}$$

3. Ha A tetszőleges mátrix, melynek Jordan-felbontása $A = SPS^{-1}$ alakú, ahol S invertálható mátrix és P blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában a $(J_i)_{i=1,\dots,k}$ Jordan-blokkok állnak, akkor $f(A) = Sf(P)S^{-1}$, ahol $f(P)$ az a blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában az $(f(J_i))_{i=1,\dots,k}$ blokkok állnak.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan analitikus függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel. Ekkor az $m \mapsto a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ olyan sorozat, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

teljesül, továbbá az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara végtelen. A 4.14 tétel alapján minden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ leképezésre az

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m A^m$$

sor konvergens.

Mivel az f függvény mindenhol konvergens hatványsorral van meghatározva, ezért az f függvény minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k -szor deriválható és minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\prod_{i=0}^{k-1} (m-i) \right) x^{m-k} = \sum_{m=k}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$$

teljesül.

Legyen S invertálható mátrix és legyen $B = S^{-1}AS$. Ekkor $A = SBS^{-1}$ teljesül, valamint minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^m a_k A^k = \sum_{k=0}^m a_k S B^k S^{-1} = S \left(\sum_{k=0}^m a_k B^k \right) S^{-1}.$$

Mivel a mátrixszal való szorzás folytonos művelet, ezért

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(S \left(\sum_{k=0}^m a_k B^k \right) S^{-1} \right) = S \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k B^k \right) \right) S^{-1} = \\ &= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k \right) S^{-1} = Sf(B)S^{-1}. \end{aligned}$$

1. Ha B diagonális mátrix, akkor hatványaira teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ kitevőre és $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$B_{ij}^m = \begin{cases} B_{ii}^m, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

teljesül, amiből adódik az állítás.

2–3. Tegyük fel, hogy B olyan mátrix, mely egyetlen Jordan-blokból áll, vagyis (4.1) alakú. Ekkor teljes indukcióval igazolható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ kitevőre és $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$B_{ij}^m = \begin{cases} 0, & \text{ha } j - i < 0; \\ \lambda^m, & \text{ha } j - i = 0; \\ \binom{m}{j-i} \lambda^{k-j+i}, & \text{ha } 0 < j - i \leq m; \\ 0, & \text{ha } j - i > m \end{cases}$$

teljesül. Ekkor az $f(B)$ mátrix $i, j \in \{1, \dots, n\}$ elemeire

$j < i$ esetén $f(B)_{ij} = 0$;

$j = i$ esetén $f(B)_{ii} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m = f(\lambda)$;

$j > i$ esetén

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \binom{m}{j-i} \lambda^{k-j+i} = \frac{1}{(j-i)!} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-(j-i))!} \lambda^{k-(j-i)} = \frac{1}{(j-i)!} f^{(j-i)}(\lambda)$$

teljesül.

4.18. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsünk egy $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, legyen $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ az A lineáris leképezés sajátértékeinek a halmaza és $f : \text{Sp}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Ha létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) \triangleq Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

4.5. Approximáció Bernstein-polinommal

4.19. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow V$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az f függvény n -edik Bernstein-polinomjának nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \rightarrow V \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

4.20. Tétel. (Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow V$ folytonos függvény. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [a, b]} \|B_n^f(t) - f(t)\| \right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow V$ folytonos függvény, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $[a, b]$ kompakt halmaz és f folytonos, ezért: f korlátos, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [a, b]$ pontra $\|f(t)\| < C$; valamint a Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos, vagyis a később rögzítendő $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| < \delta$ esetén $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon'$ teljesül. Legyen $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$\|B_n^f(t) - f(t)\| = \left\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right) \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} \right\|. \quad (4.2)$$

Tekintsük az

$$I_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| < \delta \right\}$$

$$J_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta \right\}$$

halmazokat. Ekkor $I_n \cap J_n = \emptyset$ és $I_n \cup J_n = \{0, \dots, n\}$, vagyis a (4.2) egyenlet alapján

$$\begin{aligned}
 \|B_n^f(t) - f(t)\| &\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \\
 &+ \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
 &\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \cdot \varepsilon' \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \cdot 2C \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
 &\leq \varepsilon' \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} = \\
 &= \varepsilon' + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

Ha $k \in J_n$, akkor definíció szerint

$$\left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta,$$

amiből

$$\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \cdot \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n \right)^2 \geq 1$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} &\leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n \right)^2 \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
 &\leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k},
 \end{aligned}$$

ahol $x = \frac{t-a}{b-a}$. Minden $y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$(y+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k z^{n-k},$$

melynek y szerinti első és második deriváltjából

$$\begin{aligned}
 ny(y+z)^{n-1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k y^k z^{n-k} \\
 n(n-1)y^2(y+z)^{n-2} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) y^k z^{n-k}
 \end{aligned}$$

adódik. Ha $z = 1 - y$, akkor ezekből

$$\begin{aligned}
 ny &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k y^k (1-y)^{n-k} \\
 n(n-1)y^2 + ny &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 y^k (1-y)^{n-k}
 \end{aligned}$$

következik, vagyis

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Figyelembe véve, hogy $|x|, |1-x| \leq 1$

$$\|B_n^f(t) - f(t)\| \leq \varepsilon' + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n}$$

adódik. Vagyis ha $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, melyre $N > \frac{4C(b-a)^2}{\delta^2 \varepsilon}$ teljesül, akkor minden $n > N$ és $t \in [a, b]$ esetén

$$\|B_n^f(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n} \leq \varepsilon,$$

ezért

$$\sup_{t \in [a, b]} \|B_n^f(t) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

4.21. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. A $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben a polinomok sűrű halmazt alkotnak.

Bizonyítás. Az előző, 4.20 tétel következménye.

4.6. Stone-féle sűrűségi tétel

4.22. Definíció. Legyen T tetszőleges, nem üres halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$.

- Azt mondjuk, hogy az A halmaz *szétválasztó* T felett, vagy röviden *szétválasztó*, ha minden $x, y \in T$ elemre $x \neq y$ esetén van olyan $f \in A$, melyre $f(x) \neq f(y)$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az A halmaz *lineáris függvényháló*, ha lineáris altere az $\mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ térnek, valamint minden $f \in A$ esetén $|f| \in A$.

4.23. Tétel. Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ függvényháló. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, ha $f_1, \dots, f_n \in A$, akkor

$$\sup\{f_1, \dots, f_n\}, \inf\{f_1, \dots, f_n\} \in A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ lineáris függvényháló, valamint legyen $f, g \in A$. Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sup(x, y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \quad \inf(x, y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}$$

teljesül, ezért

$$\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},$$

vagyis $\sup(f, g), \inf(f, g) \in A$. Ebből következik, hogy véges sok A halmazban lévő függvény infimuma és szuprimuma is eleme az A halmaznak.

4.24. Tétel. (Stone-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan lineáris függvényháló, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.

1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan szétválasztó függvényháló, amely tartalmazza a konstans függvényeket. Legyen továbbá $f \in C(M, \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy létezik $u \in A$, melyre $\|f - u\|_{\sup} < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in M$ tetszőleges, ha $x \neq y$, akkor létezik olyan $h_{x,y} \in A$, melyre $h_{x,y}(x) \neq h_{x,y}(y)$, ekkor legyen $u_{x,y} : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{x,y}(t) = \frac{h_{x,y}(t) - h_{x,y}(x)}{h_{x,y}(y) - h_{x,y}(x)} \cdot (f(y) - f(x)) + f(x);$$

ha $x = y$, akkor legyen $u_{x,y} : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{x,y}(t) = f(x).$$

Mivel A lineáris altér, ezért minden $x, y \in M$ esetén $u_{x,y} \in A$, valamint $u_{x,y}(x) = f(x)$ és $u_{x,y}(y) = f(y)$. Minden $x, y \in M$ esetén legyen

$$U_{x,y} = \{t \in M \mid u_{x,y}(t) > f(t) - \varepsilon\}.$$

Ekkor $U_{x,y} \subseteq M$ nyílt halmaz, hiszen az $U_{x,y} = (u_{x,y} - f)(\cdot)(-1, \varepsilon)$ azonosság miatt $U_{x,y}$ nyílt halmaz folytonos függvény általi ősképe. Az $U_{x,y}$ konstrukciója folytán

$$M = \bigcup_{y \in M} U_{x,y},$$

amiből M kompaktsága miatt következik, hogy létezik véges sok $y_1, \dots, y_n$, melyre

$$M = \bigcup_{i=1}^n U_{x,y_i}.$$

Minden $x \in M$ esetén legyen $u_x : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_x = \sup \{u_{x,y_i} \mid i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Mivel A lineáris függvényháló, ezért a 4.23 tétel alapján $u_x \in A$, valamint minden $t \in M$ pont esetén $u_x(t) > f(t) - \varepsilon$. Most minden $x \in M$ esetén legyen

$$U_x = \{t \in M \mid u_x(t) < f(t) + \varepsilon\}.$$

Ekkor $U_x \subseteq M$ nyílt halmaz, hiszen az $U_x = (u_x - f)(\cdot)(-1, \varepsilon)$ azonosság miatt U_x nyílt halmaz folytonos függvény általi ősképe. Az U_x konstrukciója folytán

$$M = \bigcup_{x \in M} U_x,$$

amiből M kompaktsága miatt következik, hogy létezik véges sok $x_1, \dots, x_m$, melyre

$$M = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}.$$

Ekkor legyen $u : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$u = \inf \{u_{x_i} \mid i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Mivel A lineáris függvényháló ezért a 4.23 tétel alapján $u \in A$, valamint minden $t \in M$ esetén

$$f(t) - \varepsilon < u(t) < f(t) + \varepsilon.$$

Tehát $\|f - u\|_{\sup} < \varepsilon$, ezért $\overline{A} = C(M, \mathbb{R})$.

4.7. Stone–Weierstrass-féle sűrűségi tétel

4.25. Tétel. (Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus-tér és $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.

1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Megmutatjuk, hogy $\overline{A}$ olyan szétválasztó lineáris függvényháló, mely tartalmazza a konstans függvényeket, ekkor ugyanis a Stone-tétel miatt $\overline{A} = C(M, \mathbb{R})$ teljesül. Az nyilvánvaló, hogy $\overline{A}$ lineáris

altér, szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, egyedül az szorul igazolásra, hogy minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$.

Először megmutatjuk, hogy minden $f \in A$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Ehhez legyen $f \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel f kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért az értékkészlete is kompakt halmaz, vagyis létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $\text{Ran } f \subseteq [-c, c]$. A $\sqrt{\cdot} : [0, c^2] \rightarrow [0, c]$ függvény kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért létezik olyan $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinom, melyre

$$\sup_{x \in [0, c^2]} |p(x) - \sqrt{x}| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\sup_{t \in M} ||f(t)| - (p \circ f^2)(t)| \leq \sup_{y \in [-c, c]} ||y| - p(y^2)| = \sup_{x \in [0, c^2]} |\sqrt{x} - p(x)| < \varepsilon.$$

Mivel A algebra, ezért $\tilde{f} = p \circ f^2 \in A$ olyan elem, melyre $||f| - \tilde{f}|_{\sup} < \varepsilon$, vagyis $|f| \in \overline{A}$.

Most megmutatjuk, hogy minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Ehhez legyen $f \in \overline{A}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $f_A \in A$, melyre $\|f - f_A\|_{\sup} < \varepsilon$. Ekkor $|f_A| \in \overline{A}$, valamint

$$||f| - |f_A||_{\sup} \leq \|f - f_A\|_{\sup} < \varepsilon$$

miatt $|f| \in \overline{A} = \overline{A}$.

4.26. Tétel. (Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f \in A$ elemre $\bar{f} \in A$. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.

1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó, tartalmazza a konstans függvényeket és zárt a konjugálásra nézve. Megmutatjuk, hogy

$$A' = \{\text{Re } u \mid u \in A\}$$

olyan függvényalgebra, mely szétválasztó, tartalmazza a konstans függvényeket és melyre melyre $A' \subseteq A$ teljesül. Mivel A zárt a konjugálásra, ezért ha $a \in A'$ és $u \in A$ olyan, hogy $a = \text{Re } u$, akkor az

$$a = \frac{u + \bar{u}}{2}$$

egyenlet alapján $a \in A$. Vagyis $A' \subseteq A$. Ha $a_1, a_2 \in A'$, akkor létezik olyan $u_1, u_2 \in A$, melyre $a_1 = \text{Re } u_1$ és $a_2 = \text{Re } u_2$ teljesül. Mivel A algebra és zárt a konjugálásra, ezért az

$$a_1 a_2 = \text{Re}(u_1) \cdot \text{Re}(u_2) = \frac{u_1 + \bar{u}_1}{2} \cdot \frac{u_2 + \bar{u}_2}{2}$$

egyenlet alapján az $u = \frac{u_1 + \bar{u}_1}{2} \cdot \frac{u_2 + \bar{u}_2}{2}$ elemre $u \in A$ és $a_1 a_2 = \text{Re } u$ teljesül, tehát $a_1 a_2 \in A'$.

Az $u = \frac{u_1 + \bar{u}_1}{2} + \frac{u_2 + \bar{u}_2}{2}$ elemre $u \in A$ és $a_1 + a_2 = \text{Re } u$ teljesül, tehát $a_1 + a_2 \in A'$. Hasonlóan igazolható, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda a_1 \in A'$. Tehát A' olyan függvényalgebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket. Ha $x, y \in M$ olyan, hogy $x \neq y$, akkor létezik olyan $u \in A$, melyre $u(x) \neq u(y)$. Ha $\text{Re}(u(x)) \neq \text{Re}(u(y))$, akkor az $a = \text{Re}(u) \in A'$ olyan elem, melyre $a(x) \neq a(y)$; valamint, ha $\text{Im}(u(x)) \neq \text{Im}(u(y))$, akkor az $a = \text{Re}(i \cdot u) \in A'$ olyan elem, melyre $a(x) \neq a(y)$, tehát A' szétválasztó.

2. Legyen $f \in C(M, \mathbb{C})$ tetszőleges elem és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f_1 = \frac{f + \bar{f}}{2}$

és $f_2 = \frac{f - \bar{f}}{2i}$ függvényekre $f = f_1 + i f_2$ és $f_1, f_2 \in C(M, \mathbb{R})$ teljesül. Ezért a 4.25 Stone–Weierstrass-tétel értelmében létezik olyan $g_1, g_2 \in A' \subseteq A$ függvény, melyre $\|f_1 - g_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|f_2 - g_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $g = g_1 + i g_2$. Ekkor $g \in A$, valamint

$$\|f - g\|_{\sup} = \|(f_1 - g_1) + i(f_2 - g_2)\|_{\sup} \leq \|f_1 - g_1\|_{\sup} + \|f_2 - g_2\|_{\sup} < \varepsilon$$

teljesül.

4.27. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor a $C(K, \mathbb{R})$ halmazban a polinomok sűrű részhalmazt alkotnak.*

5. Differenciálszámítás

5.1. Differenciálhatóság

Jelölés. A jelen fejezetben követjük azt a matematika irodalomban elterjedt konvenciót, hogy normált térre pusztán az alaphalmaz kiírásával hivatkozunk és a normát nem említjük amennyiben ez nem okoz félreértést. Továbbá U, V normált terek és $A : U \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezés esetén $\|A\|$ az operátornormát jelenti, vagyis

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|.$$

Valamint a jelen fejezetben csak $\mathbb{R}$ feletti normált terekkel foglalkozunk.

5.1. Tétel. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \mathcal{L}(U, V)$, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény, $a \in \text{Int Dom } f$ és legyen $u, v \in \mathcal{L}(U, V)$ olyan, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy $A = u - v \neq 0$. Ekkor létezik olyan $0 \neq e \in U$ vektor, hogy $Ae \neq 0$. Legyen $\varepsilon = \frac{\|Ae\|}{\|e\|} \in \mathbb{R}^+$. A fenti két határérték különbségeként

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

adódik, a határérték definíciója alapján pedig létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| < \varepsilon.$$

Az $x = a + \frac{\delta}{2\|e\|} \cdot e \in E$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, azonban a fenti egyenlőtlenségből az

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| = \left\| \frac{Ae}{\|e\|} \right\| = \varepsilon < \varepsilon$$

ellentmondás adódik.

5.2. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény és $a \in \text{Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható, vagy (Fréchet-) deriválható az a pontban ha létezik olyan $A \in \mathcal{L}(U, V)$, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ezt az A leképezést az f függvény a pontbeli differenciáljának vagy deriváltjának nevezzük és a továbbiakban a $(Df)(a)$ szimbólummal jelöljük.

- Az $f : U \rightarrow V$ függvény deriváltjának vagy derivált függvényének nevezzük a

$$Df = \left\{ (a, A) \in (\text{Dom } f) \times \mathcal{L}(U, V) \mid \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right\}$$

függvényt.

- Az f differenciálható, ha $\text{Dom } f = \text{Dom } Df$.
- Az f folytonosan differenciálható, ha differenciálható és Df folytonos. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, V)$ jelöli.

5.3. Tétel. (*A differenciálhatóság jellemzése.*) Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény, valamint $a \in \text{Int Dom } f$. Az $A \in \mathcal{L}(U, V)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \left(\|x - a\| < \delta \rightarrow \|f(x) - f(a) - A(x - a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\| \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. A derivált és a határérték definíciójából következik.

5.4. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$. Pontosán akkor létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(Df)(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - ((Df)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(Df)(a)(1) = f'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$.

Ha f differenciálható az a pontban és létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, akkor legyen A olyan $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Ax = f'(a)x$$

teljesül. Ekkor

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a},$$

tehát

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} \right|,$$

vagyis

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $(Df)(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - ((Df)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül és legyen $c = ((Df)(a))(1)$. Ekkor

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - ((Df)(a))(x - a)}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|},$$

vagyis

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right|$$

ezért

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right),$$

tehát létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$$

határérték és $c = f'(a)$.

5.5. Tétel. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény, valamint $a \in \text{Int Dom } f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény, valamint $a \in \text{Int Dom } f$. A differenciálhatóság jellemzéséről szóló 5.3 tétel alapján ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ vektorra a $\|x - a\| < \delta$ esetben

$$\|f(x) - f(a) - (Df)(a)(x - a)\| \leq \|x - a\|$$

teljesül, aminek az átrendezéséből

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|x - a\| \cdot (1 + \|(Df)(a)\|)$$

adódik. Ezért $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| = 0$, vagyis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, amiből következik az f függvény a pontbeli folytonossága.

5.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

5.6. Tétel. Legyen U és V normált tér, $f, g : U \rightarrow V$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a ($\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } \varphi$) halmaznak és legyen f , g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor

1. $f + g$ differenciálható az a pontban és $(D(f + g))(a) = (Df)(a) + (Dg)(a)$;
2. minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(D(cf))(a) = c(Df)(a)$;
3. φf differenciálható az a pontban és $(D(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (D\varphi)(a) + \varphi(a)(Df)(a)$;
4. ha $\varphi(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{\varphi}$ differenciálható az a pontban és

$$\left(D \left(\frac{f}{\varphi} \right) \right) (a) = \frac{\varphi(a)(Df)(a) - f(a)(D\varphi)(a)}{\varphi^2(a)}.$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f, g : U \rightarrow V$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \text{Int}(\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } \varphi)$ olyan, hogy f , g és φ differenciálható az a pontban. Legyen továbbá $F = (Df)(a)$, $G = (Dg)(a)$ és $\Phi = (D\varphi)(a)$. Mivel $a \in \text{Int}(\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } \varphi)$, ezért vehetünk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Int}(\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } \varphi)$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - F(x - a)}{\|x - a\|} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a) - G(x - a)}{\|x - a\|} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x - a)}{\|x - a\|} &= 0. \end{aligned}$$

1. Az

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a) - (F + G)(x - a)}{\|x - a\|} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - F(x - a)}{\|x - a\|} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a) - G(x - a)}{\|x - a\|} = 0 \end{aligned}$$

egyenlőség igazolja, hogy $f + g$ is differenciálható az a pontban és $(D(f + g))(a) = F + G$.

2. Az

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a) - (cF)(x - a)}{\|x - a\|} = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - F(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

egyenlőség igazolja, hogy cf is differenciálható az a pontban és $(D(cf))(a) = cF$.

3. A minden $x \in B_r(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned} & \|(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)\| = \\ & = \left\| \left(\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a) \right) f(x) + \varphi(a) \left(f(x) - f(a) - F(x-a) \right) + (f(x) - f(a))\Phi(x-a) \right\| \leq \\ & \leq \|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x) - f(a) - F(x-a)\| + \\ & \quad + \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x-a\| \end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \left\| \frac{(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \leq \\ & \leq \lim_{x \rightarrow a} \left\| \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left\| \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|} \right\| + \\ & \quad + \lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| = \\ & = 0 \cdot \|f(a)\| + |\varphi(a)| \cdot 0 + 0 \cdot \|\Phi\| = 0 \end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

következik, vagyis a φf függvény is differenciálható az a pontban és $D(\varphi f) = f(a)\Phi + \varphi(a)F$.

4. Tegyük fel, hogy $\varphi(a) \neq 0$. Mivel a φ függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is. A folytonosság miatt azonban létezik olyan $\delta \in]0, r[$ paraméter, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $\varphi(x) \neq 0$.

Először megmutatjuk, hogy

$$\left(D \left(\frac{1}{\varphi} \right) \right) (a) = -\frac{1}{\varphi^2(a)} \Phi$$

teljesül. A minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)} \Phi(x-a) \right\| = \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left\| \varphi(a) - \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \Phi(x-a) \right\| = \\ & = \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left\| \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \Phi(x-a) \right\| = \\ & = \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left\| \varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a) + \left(1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \right) \Phi(x-a) \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left(\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| + \left| 1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \right| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x-a\| \right) \end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \left\| \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)} \Phi(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \leq \\ & \leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|} \left(\frac{\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\|}{\|x-a\|} + \left| 1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \right| \cdot \|\Phi\| \right) = \\ & = \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(a)|} \left(0 + \left| 1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(a)} \right| \cdot \|\Phi\| \right) = 0 \end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)} \Phi(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

következik, vagyis az $\frac{1}{\varphi}$ függvény is differenciálható az a pontban és $\left(D\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) = -\frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi$ teljesül.

A 3. pont alapján ekkor

$$\begin{aligned} \left(D\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right)(a) &= \left(D\left(\frac{1}{\varphi} \cdot f\right)\right)(a) = f(a) \cdot \left(D\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) + \frac{1}{\varphi}(a) \cdot (Df)(a) = \\ &= -\frac{f(a)}{\varphi^2(a)}\Phi + \frac{1}{\varphi(a)}F = \frac{\varphi(a)F - f(a)\Phi}{\varphi^2(a)} \end{aligned}$$

teljesül.

5.7. Tétel. Legyen U és V normált tér és legyen $A \subseteq U$ nyílt halmaz. Ekkor $C^1(A, V)$ vektortér.

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

5.8. Tétel. (Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen U, V és W normált tér, $g : U \rightarrow V$, $f : V \rightarrow W$ és $a \in \text{Int Dom } f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és

$$(D(f \circ g))(a) = (Df)(g(a)) \circ (Dg)(a).$$

Bizonyítás. Legyen U, V és W normált tér, $g : U \rightarrow V$, $f : V \rightarrow W$, $a \in \text{Int Dom } f \circ g$ olyan, hogy g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a) \in \text{Int Dom } f$, tehát

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \forall y \in V : \\ \|y - g(a)\| < \delta_1 \rightarrow \|f(y) - f(g(a)) - (Df)(g(a))(y - g(a))\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|y - g(a)\|. \end{aligned}$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontban, ezért $a \in \text{Int Dom } g$, tehát

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \\ \|x - a\| < \delta_2 \rightarrow \|g(x) - g(a) - (Dg)(a)(x - a)\| \leq \varepsilon_2 \cdot \|x - a\|. \end{aligned}$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \quad \|x - a\| < \delta_3 \rightarrow \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ esetén

$$\|x - a\| < \delta_3 \rightarrow \|f(g(x)) - f(g(a)) - (Df)(g(a))(g(x) - g(a))\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|g(x) - g(a)\|.$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ esetén

$$\|x - a\| < \delta_2 \rightarrow \|g(x) - g(a) - (Dg)(a)(x - a)\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|x - a\|.$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in U$ vektorra, ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} \|f(g(x)) - f(g(a)) - (Df)(g(a))(g(x) - g(a))\| &\leq \varepsilon_1 \cdot \|g(x) - g(a)\| \\ \|g(x) - g(a) - (Dg)(a)(x - a)\| &\leq \varepsilon_1 \cdot \|x - a\| \end{aligned}$$

teljesül, valamint az utolsó egyenlőtlenség alapján ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\|g(x) - g(a)\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|x - a\| + \|(Dg)(a)\| \cdot \|x - a\|.$$

Ezek alapján, ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned}
& \|f(g(x)) - f(g(a)) - ((Df)(g(a)) \circ (Dg)(a))(x - a)\| = \\
& = \|f(g(x)) - f(g(a)) - (Df)(g(a))(g(x) - g(a)) + \\
& \quad + (Df)(g(a))(g(x) - g(a)) - ((Df)(g(a)) \circ (Dg)(a))(x - a)\| \leq \\
& \leq \|f(g(x)) - f(g(a)) - (Df)(g(a))(g(x) - g(a))\| + \\
& \quad + \|(Df)(g(a))\| \cdot \|g(x) - g(a) - (Dg)(a)(x - a)\| \leq \\
& \leq \varepsilon_1 \|g(x) - g(a)\| + \|(Df)(g(a))\| \varepsilon_1 \|x - a\| \leq \\
& \leq \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \|x - a\| + \|(Dg)(a)\| \|x - a\|) + \|(Df)(g(a))\| \varepsilon_1 \|x - a\| = \\
& = \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \|(Dg)(a)\| + \|(Df)(g(a))\|) \|x - a\|
\end{aligned}$$

Vagyis bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \|(Dg)(a)\| + \|(Df)(g(a))\|) < \varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x - a\| < \delta'$ esetén

$$\|f(g(x)) - f(g(a)) - ((Df)(g(a)) \circ (Dg)(a))(g(x) - g(a))\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\|,$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $(Df)(g(a)) \circ (Dg)(a)$.

5.3. Iránymenti derivált

5.9. Definíció. Legyen U vektortér és V normált tér. Legyen továbbá $f : U \rightarrow V$ függvény, $a \in \text{Dom } f$ és $e \in U$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(D_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az f függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának nevezünk.

5.10. Tétel. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény, valamint $a \in \text{Int Dom } f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(D_e f)(a) = ((Df)(a))(e)$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \text{Int Dom } f$ pontban, valamint legyen $A = (Df)(a)$ és $e \in U$ tetszőleges vektor. Az $e = 0$ esetben nyilván teljesül az állítás, így feltehető, hogy $e \neq 0$. A

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t} = Ae$$

egyenlőtlenség igazolásához válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paramétert. A függvény a pontbeli differenciálhatósága alapján az $\frac{\varepsilon}{\|e\|}$ számhoz létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ melyre

$$\forall x \in B_{\delta'}(a) : \|f(x) - f(a) - A(x - a)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|e\|} \cdot \|x - a\|$$

teljesül. Ha $\delta = \frac{\delta'}{\|e\|}$ és $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$, akkor $a + te \in B_{\delta'}(a)$, vagyis

$$\|f(a + te) - f(a) - A(te)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|e\|} \cdot |t| \|e\| = \varepsilon |t|.$$

Amiből $\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{f(a + te) - f(a) - tA(e)}{t} \right\| = 0$ következik.

5.11. Tétel. Legyen U, V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \rightarrow W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban. Ekkor $\text{Ran}((Df)(a)) \subseteq W$, vagyis a $(Df)(a)$ derivált $U \rightarrow W$ lineáris leképezésnek is tekinthető.

Bizonyítás. Legyen U, V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \rightarrow W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban és vezessük be az $A = (Df)(a)$ jelölést. Ha $v \in U$, akkor az

$$Av = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

egyenlőség és a minden $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számra $a + tv \in \text{Dom } f$ esetén teljesülő $\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in W$ tartalmazás miatt $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \overline{W} = W$.

5.4. Néhány speciális függvény deriváltja

5.12. Tétel. Legyen U normált tér, $c \in U$ és

$$L_c : U \rightarrow U \quad x \mapsto x - c.$$

Ekkor L_c minden pontban differenciálható és

$$DL_c : U \rightarrow \mathcal{L}(U, U) \quad a \mapsto \text{id}_U$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U normált tér és $c \in U$. Legyen $a \in U$ tetszőleges pont. Mivel minden $x \in U$ esetén

$$L_c x - L_c a = x - a$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{L_c x - L_c a - \text{id}_U(x - a)}{\|x - a\|} = 0,$$

amiből $(DL_c)(a) = \text{id}_U$ következik.

5.13. Tétel. Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(U, V)$. Ekkor A minden pontban differenciálható és

$$DA : U \rightarrow \mathcal{L}(U, V) \quad a \mapsto A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(U, V)$. Legyen $a \in U$ tetszőleges pont. Mivel az A linearitása miatt minden $x \in U$ esetén

$$Ax - Aa - A(x - a) = 0$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Ax - Aa - A(x - a)}{\|x - a\|} = 0,$$

amiből $(DA)(a) = A$ következik.

5.14. Tétel. Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathcal{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n -lineáris leképezés. A

$$\rho : U \rightarrow V \quad x \mapsto A(x, \dots, x),$$

függvény deriváltjára

$$D\rho : U \rightarrow \mathcal{L}(U, V) \quad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a, \dots, a))$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathcal{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n -lineáris leképezés. Legyen

$$B : U \rightarrow V \quad x \mapsto nA(x, a, \dots, a).$$

Megmutatjuk, hogy $(D\rho)(a) = B$.

Az n szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $x, y \in U$ esetén

$$\rho(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A(x^{[k]}, y^{[n-k]}),$$

vagyis

$$\begin{aligned} \rho(x) - \rho(a) &= \rho(a + (x - a)) - \rho(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A((x - a)^{[k]}, a^{[n-k]}) - \rho(a) = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A((x - a)^{[k]}, a^{[n-k]}) \end{aligned}$$

teljesül. Ebből az $\|x - a\| < 1$ esetben

$$\begin{aligned} \|\rho(x) - \rho(a) - B(x - a)\| &= \left\| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} A((x - a)^{[k]}, a^{[n-k]}) \right\| \leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \|A\| \|x - a\|^k \|a\|^{n-k} \leq \\ &\leq \|x - a\|^2 \|A\| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \|x - a\|^{k-2} \|a\|^{n-k} \leq \|x - a\|^2 \|A\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|a\|^{n-k} = \\ &= \|x - a\|^2 \|A\| (1 + \|a\|)^n \end{aligned}$$

adódik. Vagyis ha $0 < \|x - a\| < 1$, akkor

$$\left\| \frac{\rho(x) - \rho(a) - B(x - a)}{\|x - a\|} \right\| \leq \|x - a\| \|A\| (1 + \|a\|)^n,$$

amiből

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\rho(x) - \rho(a) - B(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

következik.

5.15. Tétel. Legyen V Banach-tér, $A = \mathcal{L}(V, V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \rightarrow A$, $f(a) = a^n$. Ekkor

$$Df : A \rightarrow \mathcal{L}(A, A) \quad a \mapsto \left(b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k} \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $A = \mathcal{L}(V, V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \rightarrow A$, $f(a) = a^n$. Ekkor A olyan Banach-tér, melyen a norma szubmultiplikatív. Legyen $a \in A$ tetszőleges pont és $\tau \in \mathcal{L}(A, A)$,

$\tau(b) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k}$. A minden $h \in A \setminus \{0\}$, $\|h\| \leq 1$ esetén érvényes

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(a + h) - f(a) - \tau(h)}{\|h\|} \right\| &= \frac{1}{\|h\|} \left\| (a + h)^n - a^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k h a^{n-1-k} \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\|h\|} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \|h\|^k \cdot \|a\|^{n-k} \leq \|h\| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \|h\|^{k-2} \cdot \|a\|^{n-k} \leq \\ &\leq \|h\| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot \|a\|^{n-k} \leq \|h\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \|a\|^{n-k} = \|h\| \cdot (1 + \|a\|)^n \end{aligned}$$

becslésből következik, hogy $(Df)(a) = \tau$.

5.16. Tétel. Legyen V Banach-tér, $A = \mathcal{L}(V, V)$ és

$$G(A) = \{a \in \mathcal{L}(V, V) \mid \exists a^{-1}, a^{-1} \in \mathcal{L}(V, V)\}.$$

Az inverzképzés $i : G(A) \rightarrow G(A)$, $i(a) = a^{-1}$ függvényére ekkor

$$Di : G(A) \rightarrow \mathcal{L}(A, A) \quad a \mapsto (b \mapsto -a^{-1}ba^{-1})$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $A = \mathcal{L}(V, V)$ és

$$G(A) = \{a \in \mathcal{L}(V, V) \mid \exists a^{-1}, a^{-1} \in \mathcal{L}(V, V)\}.$$

Legyen $a \in G(A)$ tetszőleges pont, $\tau \in \mathcal{L}(A, A)$, $\tau(b) = -a^{-1}ba^{-1}$ és jelölje 1 az A egységelemét, vagyis az id_V leképezést. Ha $0 \neq h \in A$ és $\|h\| \leq \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$, akkor a $-a^{-1}h$ elemre alkalmazható a Carl Neumann-féle sorfejtés, vagyis ebben az esetben érvényes a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{i(a+h) - i(a) - \tau(h)}{\|h\|} \right\| &= \frac{1}{\|h\|} \cdot \|(a+h)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ha^{-1}\| = \\ &= \frac{1}{\|h\|} \cdot \|((1+a^{-1}h)^{-1} - 1 + a^{-1}h)a^{-1}\| \leq \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (-a^{-1}h)^k \right\| \cdot \|a^{-1}\| \leq \\ &\leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \|a^{-1}h\|^k \leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (\|a^{-1}\| \cdot \|h\|)^k = \\ &= \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \frac{\|a^{-1}\|^2 \cdot \|h\|^2}{1 - \|a^{-1}\| \cdot \|h\|} \leq \|h\| \cdot 2\|a^{-1}\|^3 \end{aligned}$$

becslés, amiből következik az állítás.

6. Komplex függvénytan

6.1. Komplex differenciálhatóság

6.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény *komplex differenciálható*, vagy *holomorf* az a pontban ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték. Ekkor a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ komplex számot az f függvény a pontbeli differenciáljának vagy deriváltjának nevezzük és a továbbiakban az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

- Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük az

$$f' = \left\{ (a, A) \in (\text{Int Dom } f) \times \mathbb{C} \mid \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \wedge \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \right\}$$

függvényt.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény *reguláris* az $a \in \mathbb{C}$ pontban, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f'$ teljesül, vagyis, ha f $\mathbb{C}$ -differenciálható az a pont egy környezetében.
- Az f függvény *holomorf* vagy *reguláris* vagy $\mathbb{C}$ -*differenciálható*, ha $\text{Dom } f = \text{Dom } f'$.
- Azt mondjuk, hogy f *egész függvény*, ha $\text{Dom } f = \mathbb{C}$ és f holomorf.

6.2. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$. Tekintsük az f által meghatározott

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & (x, y) &\mapsto \text{Re } f(x + iy) \\ v : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & (x, y) &\mapsto \text{Im } f(x + iy) \end{aligned}$$

függvényeket. Azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra $x + iy \in \text{Dom } f$ esetén

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

teljesül. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az f függvény holomorf az a pontban.
2. Létezik olyan $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ -lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

3. Az u és a v függvény differenciálható az a pontban, valamint

$$\begin{aligned} (\partial_1 u)(a) &= (\partial_2 v)(a) \\ (\partial_2 u)(a) &= -(\partial_1 v)(a) \end{aligned}$$

teljesül. Ezen utóbbi két egyenletet nevezzük *Cauchy–Riemann-egyenleteknek*.

Ha az f függvény holomorf az a pontban, akkor

$$f'(a) = A(1) = (\partial_1 u)(a) + i(\partial_1 v)(a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során az állítás jelöléseit használjuk.

$1 \Rightarrow 2$ Tegyük fel, hogy f holomorf az a pontban, és legyen $c = f'(a)$. Tekintsük az $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $Az = cz$ lineáris leképezést. Ekkor a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$$

határértékből

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a} \right| = 0$$

következik, amiből pedig

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} \right| = 0$$

ez viszont éppen a bizonyítandó

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0$$

egyenlőséget jelenti.

$2 \Rightarrow 3$ A 2. pontban tekintett A lineáris leképezés értéke az 1 számon legyen $p + iq = A1$, ahol $p, q \in \mathbb{R}$, valamint az a pont algebrai alakban legyen $a = a_1 + ia_2$ ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) A 2. pontban feltételezett határérték szerint

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) - iv(a_1, a_2) - (p + iq)((x_1 - a_1) + i(x_2 - a_2))}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} = 0,$$

aminek külön kiírva a valós és képzetes részét, az alábbi egyenletek adódnak.

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) - p(x_1 - a_1) + q(x_2 - a_2)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} &= 0 \\ \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{v(x_1, x_2) - v(a_1, a_2) - p(x_2 - a_2) - q(x_1 - a_1)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenlet szerint az u függvény differenciálható az a pontban és

$$(Du)(a) = ((\partial_1 u)(a) \quad (\partial_2 u)(a)) = (p \quad -q),$$

a második egyenlet szerint pedig a v függvény differenciálható az a pontban és

$$(Dv)(a) = ((\partial_1 v)(a) \quad (\partial_2 v)(a)) = (q \quad p).$$

A deriváltakból pedig leolvasható, hogy ezekre teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek.

$3 \Rightarrow 1$ A Cauchy–Riemann-egyenletek alapján léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy

$$(Du)(a) = ((\partial_1 u)(a) \quad (\partial_2 u)(a)) = (p \quad -q) \quad \text{és} \quad (Dv)(a) = ((\partial_1 v)(a) \quad (\partial_2 v)(a)) = (q \quad p)$$

teljesül. Ezek alapján

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) - p(x_1 - a_1) + q(x_2 - a_2)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} &= 0 \\ \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{v(x_1, x_2) - v(a_1, a_2) - p(x_2 - a_2) - q(x_1 - a_1)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} &= 0 \end{aligned}$$

teljesül. Az első egyenlethez hozzáadva a második i -szeresét

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) - iv(a_1, a_2) - (p + iq)((x_1 - a_1) + i(x_2 - a_2))}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} = 0$$

adódik, ami szerint

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - (p + iq)(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Ebből

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - (p + iq)(x - a)}{|x - a|} \right| = 0$$

következik, ahol elhagyhatjuk a nevezőből az egyik abszolútérték jelet, vagyis

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - (p + iq)(x - a)}{x - a} \right| = 0.$$

Ez pedig éppen a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p + iq.$$

bizonyítandó határérték létezését jelenti.

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{C}$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor az $|f'(a)|$ számot az f függvény a pontbeli nyújtási együtthatójának nevezzük. Azt a jól meghatározott $\varphi \in]-\pi, \pi]$ számot pedig, melyre $f'(a) = |f'(a)| e^{i\varphi}$ teljesül az f függvény a pontbeli forgatási együtthatójának nevezzük.

6.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

6.4. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor

1. $f + g$ differenciálható az a pontban és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. minden $c \in \mathbb{C}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;
3. fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
4. ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

6.3. Hatványsor differenciálhatósága

6.5. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy a $P_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen

$$a' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a , a P_a hatványsor holomorf a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

6.4. Görbe menti integrál

6.6. Definíció. Görbék főbb típusai.

- A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbe *elemi*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos, differenciálható az $]a, b[$ halmazon, létezik a $\lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t)$ és a $\lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t)$ határérték, valamint a

$$\dot{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} \lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha } t = a; \\ \dot{\gamma}(t), & \text{ha } a < t < b; \\ \lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha } t = b. \end{cases}$$

függvény folytonos. Minden γ elemi görbéhez definiáljuk a még a

$$\gamma^\circ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} (t-a) \lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(a), & \text{ha } t \leq a; \\ \gamma(t), & \text{ha } a < t < b; \\ (t-b) \lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(b), & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$

függvényt. Az elemi görbék halmazára a Γ^e jelölést használjuk.

- A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbe *szakaszonként C^1 -osztályú folytonos görbe*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos és létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ véges pontrendszer, melyre a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. A szakaszonként C^1 -osztályú folytonos görbék halmazára a Γ jelölést használjuk.
- A $\gamma \in \Gamma$ görbéről az mondjuk, hogy *zárt*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, ahol $a = \inf \text{Dom } \gamma$ és $b = \sup \text{Dom } \gamma$. A zárt görbék halmazát a Γ_0 szimbólummal jelöljük, valamint használjuk még a $\Gamma_0^e = \Gamma_0 \cap \Gamma^e$ jelölést is.

6.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény.

- Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor a

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

mennyiséget az f függvény γ görbe menti integráljának nevezzük és a $\int_{\gamma} f$, vagy a kicsit pongyola, de természetes $\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$ szimbólummal jelöljük.

- Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül és legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ olyan, hogy $a = t_0$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. Ekkor a

$$\sum_{i=0}^n \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} f$$

mennyiséget az f függvény γ görbe menti integráljának nevezzük és szintén a $\int_{\gamma} f$ vagy a $\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$ szimbólummal jelöljük. Továbbá a

$$\sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}(t) dt$$

mennyiséget a γ görbe hosszának nevezzük és az $L(\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

- Amennyiben a γ görbe zárt, a vonalmenti integrálra még a $\oint_{\gamma} f$ szimbólumot is használjuk.

6.8. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma^\circ(t)) \dot{\gamma}^\circ(t) dt$$

teljesül.

Bizonyítás. A görbe menti integrál és a γ° függvény definíciójának közvetlen következménye.

6.9. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ekkor

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\alpha \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\int_a^b f = \left| \int_a^b f \right| \cdot e^{i\alpha}$ teljesül. Legyen $u = \text{Re } f$ és $v = \text{Im } f$. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &= e^{-i\alpha} \int_a^b f = \int_a^b (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)) \cdot (u(t) + i v(t)) dt = \int_a^b \cos(\alpha) u(t) + \sin(\alpha) v(t) dt \leq \\ &\leq \int_a^b \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2} dt = \int_a^b |f| \end{aligned}$$

teljesül, ahol az egyenlőtlenségnél a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget használtuk.

6.10. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ és $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } g$ teljesül.

1. $\int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \int_{\gamma} (\lambda f) = \lambda \int_{\gamma} f$
3. Legyen $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta(t) = \gamma(b + a - t)$, ekkor $\int_{\delta} f = - \int_{\gamma} f$.
4. $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq L(\gamma) \sup_{x \in \text{Ran } \gamma} |f(x)|$

Bizonyítás. Az első és a második tulajdonság a Riemann-integrál linearitásán múlik. Ha $\gamma \in \Gamma^e$, akkor

$$\begin{aligned} \int_{\delta} f &= \int_a^b f(\delta(t)) \delta'(t) dt = \int_a^b f(a + b - t) \gamma'(a + b - t) (-1) dt = \\ &\stackrel{x=a+b-t}{=} \int_b^a f(x) \gamma'(x) dx = - \int_{\gamma} f \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq \int_a^b \sup_{x \in \text{Ran } \gamma} |f(x)| \cdot |\gamma'(t)| dt = L(\gamma) \sup_{x \in \text{Ran } \gamma} |f(x)| \end{aligned}$$

teljesül. Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor véges sok Γ^e belüli részre osztva a γ görbét a fenti egyenletek igazolják az állítás 3. és 4. pontját.

Jelölés. Adott $a, b \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje $[a, b]$ az a és b pontokat összekötő szakaszt, vagyis

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \in \mathbb{C} \mid t \in [0, 1]\}.$$

6.11. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor az f függvény $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(b - a)$ görbe menti integrálját a $\int_{[a, b]} f$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$\int_{[a, b]} f = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a)) dt.$$

6.12. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{C} \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Dom } f$ teljesül.

1. $\int_{[a, b]} f = - \int_{[b, a]} f$.
2. $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq |b - a| \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$
3. Minden $c \in [a, b]$ pontra $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$.

Bizonyítás. Az 1. és a 2. pont a 6.10 tétel alapján teljesül. A 3. pont pedig Riemann-integrálás egyik alaptulajdonsága.

6.13. Definíció. Legyen $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a F az f primitív függvénye, ha F differenciálható és $F' \subseteq f$ teljesül, valamint F az f globális primitív függvénye, ha $F' = f$ teljesül.

6.14. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ az f primitív függvénye és $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } F$ teljesül, akkor

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Bizonyítás. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvények, melyekre $F' = f$ és $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } F$ teljesül. Ekkor

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = [F \circ \gamma]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor véges sok Γ^e beli részre osztva a γ görbét a fenti egyenletet alkalmazva minden Γ^e beli részre kapjuk az állítást.

6.15. Tétel. Legyen $\gamma \in \Gamma_0$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha létezik olyan $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye az f függvénynek, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } F$ teljesül, akkor

$$\oint_{\gamma} f = 0.$$

Bizonyítás. A 6.14 tétel közvetlen következménye.

6.5. A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma

Jelölés. Adott $a, b, c \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje

$$T(a, b, c) \triangleq \left\{ \alpha a + \beta b + \gamma c \in \mathbb{C} \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1]^3 \wedge \alpha + \beta + \gamma = 1 \right\}$$

az a, b, c csúcspontú háromszöget.

Jelölés. Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b], [b, c], [c, a] \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor az a, b, c háromszög oldalain való integrálást a megfelelő irányítással az alábbi módon fogjuk jelölni.

$$\int_{[a,b,c]} f \triangleq \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$$

6.16. Definíció. Az $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazról azt mondjuk, hogy *csillaghalmaz*, ha létezik olyan $x \in U$ pont, melyre minden $u \in U$ esetén $[x, u] \subseteq U$ teljesül. Ekkor az x pontot *csillagcentrumnak* hívjuk.

6.17. Tétel. (Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $U \subseteq \text{Dom } f$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f -nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a, b, c \in U$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq U$ esetén $\int_{[a,b,c]} f = 0$. Továbbá, ha teljesül ez a feltétel és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az

$$F : U \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \int_{[c,z]} f$$

függvény primitív függvénye az f függvénynek az U halmazon.

6.18. Tétel. (Goursat-lemma.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq \text{Dom } f$ esetén $\int_{[a,b,c]} f = 0$.

6.19. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a \in \text{Int } \text{Dom } f$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $F : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, melyre $F' = f$ teljesül, azaz F a f primitív függvény az a halmaz egy környezetén.

6.20. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve, és legyen $U \subseteq \text{Dom } f$ nyílt csillaghalmaz. Ekkor létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.

6.6. Az indexfüggvény

6.21. Tétel. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvényt és a $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw e^{2\pi i m t}$ görbét. Ekkor

$$\int_{\gamma} f = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1; \\ 2\pi i m, & \text{ha } n = -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvény és $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ pedig a $\gamma(t) = rw e^{2\pi i m t}$ görbe. Ekkor a görbementi integrál definíciója alapján

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_0^1 r^n w^n e^{2\pi i n m t} r w e^{2\pi i m t} 2\pi i m \, dt = 2\pi i m r^{n+1} w^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i (n+1) m t} \, dt = \\ &= 2\pi i m r^{n+1} w^{n+1} \int_0^1 \cos((n+1)mt) + i \sin((n+1)mt) \, dt. \end{aligned}$$

Amiből adódik, hogy $n \neq -1$ esetén az integrál nulla, $n = -1$ esetén pedig

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i m.$$

6.22. Definíció. A $\gamma \in \Gamma$ görbe indexfüggvényének nevezzük az alábbi függvényt.

$$\text{Ind}_{\gamma} : \mathbb{C} \setminus \text{Ran } \gamma \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\text{id}_{\mathbb{C}} - z}$$

6.23. Tétel. Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük a $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw e^{2\pi i m t}$ görbét. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ esetén

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |z| > r; \\ m, & \text{ha } |z| < r. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\gamma(t) = rw e^{2\pi i m t}$ görbe. Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| < r$, akkor minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$\left| \frac{z}{\gamma(t)} \right| = \frac{|z|}{r} < 1$$

miatt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\gamma(t)}} = 2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\gamma(t)^n} = 2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n w^n} e^{-2\pi i m n t}.$$

Továbbá a fenti függvényt sor egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ halmazon, ugyanis az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{z^n}{r^n w^n} e^{-2\pi i m n t} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n < \infty$$

egyenlőtlenség a Weierstrass-tétel alapján garantálja az egyenletes konvergenciát. Ekkor az összegzés és az integrálás felcserélhető, tehát

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\gamma}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n w^n} e^{-2\pi i m n t} \, dt = \\ &= m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{z^n}{r^n w^n} e^{-2\pi i m n t} \, dt = m \end{aligned}$$

adódik.

Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| > r$, akkor minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$\left| \frac{\gamma(t)}{z} \right| = \frac{r}{|z|} < 1$$

miatt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{-\gamma'(t)}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma(t)}{z}} = \frac{-\gamma'(t)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(t)^n}{z^n} = -2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} e^{2\pi i m(n+1)t}.$$

Továbbá a fenti függvénysor egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ halmazon, ugyanis az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} e^{2\pi i m(n+1)t} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z|} \right)^{n+1} < \infty$$

egyenlőtlenség a Weierstrass-tétel alapján garantálja az egyenletes konvergenciát. Ekkor az összegzés és az integrálás felcserélhető, tehát

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\gamma}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 -2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} e^{2\pi i m(n+1)t} dt = \\ &= -m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{rw}{z} \right)^{n+1} e^{-2\pi i m(n+1)t} dt = 0 \end{aligned}$$

adódik.

6.24. Tétel. Legyen $\gamma \in \Gamma_0$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. $\text{Ran Ind}_{\gamma} \subseteq \mathbb{Z}$
2. Az Ind_{γ} függvény folytonos.
3. Ha valamely $z \in \mathbb{C}$ számra $\text{Ran } \gamma \subseteq B_{|z|}(0)$ teljesül, akkor $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$.

6.7. Cauchy integráltételei

6.25. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $U \subseteq M$ és $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ zárt folytonos görbe. Azt mondjuk, hogy a γ_0 és γ_1 *kontúrhomotópok* az $U \subseteq M$ halmazban, ha létezik olyan $H : [0, 1]^2 \rightarrow U$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0, 1]$ esetén $H(0, t) = \gamma_0(t)$ és $H(1, t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0, 1]$ esetén $H(p, 0) = H(p, 1)$.

6.26. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $U \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $U \subseteq M$ halmaz *egyszeresen összefüggő*, ha U ívszerűen összefüggő és minden U halmazban haladó zárt folytonos görbe kontúrhomotóp az U halmazban egy konstansfüggvénnyel. Az (M, d) metrikus tér *egyszeresen összefüggő*, ha az M halmaz egyszeresen összefüggő.

6.27. Tétel. (Cauchy intergáltétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Dom } f$ nyílt halmaz és minden $z \in \text{Dom } f$ esetén van a z pontban értelmezett primitív függvénye az f függvénynek. Ha $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_0$ olyan görbék, melyek kontúrhomotópok a $\text{Dom } f$ halmazban, akkor

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

6.28. Tétel. (Cauchy első integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \subseteq \text{Dom } f$ teljesül, akkor

$$\oint_{\gamma} f = 0.$$

6.29. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre a $\text{Dom } f$ halmaz egyszeresen összefüggő. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ esetén

$$\oint_{\gamma} f = 0$$

teljesül.

6.30. Tétel. (Cauchy második integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ teljesül. Ekkor minden $z \in U \setminus \text{Ran } \gamma$ pontra

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f}{\text{id} - z}.$$

Jelölés. Adott $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \gamma_{r,a} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} & t &\mapsto a + r e^{2\pi i t} \\ S_r(a) &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}. \end{aligned}$$

6.31. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{r,a}} \frac{f}{\text{id} - z}.$$

6.8. Cauchy transzformáció

6.32. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor az f függvény γ görbe szerinti Cauchy-transzformáltja

$$C_{f,\gamma} : \mathbb{C} \setminus \text{Ran } \gamma \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{\text{id}_{\mathbb{C}} - z}.$$

6.33. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül.

1. A $C_{f,\gamma}$ függvény $\mathbb{C}$ -analitikus.
2. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ esetén a $C_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a $\text{dist}(a, \text{Ran } \gamma)$ számnál.
3. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ esetén a $C_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik a $C_{f,\gamma}$ függvénnyel a $B_{\text{dist}(a, \text{Ran } \gamma)}(a)$ halmazon.
4. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_{f,\gamma}^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{(\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}.$$

6.34. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény.

1. Az f függvény $\mathbb{C}$ -analitikus.
2. Minden $a \in \text{Dom } f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a

$$r_a = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \overline{B_r(a)} \subseteq \text{Dom } f \right\}$$

számnál.

3. Minden $a \in \text{Dom } f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik az f függvénnyel a $B_{r_a}(a)$ halmazon.
4. Minden $a \in \text{Dom } f$, $r \in]0, r_a[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f}{(\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}.$$

6.9. Holomorf függvény analitikusságának elemi következményei

6.35. Tétel. (Megszüntethető szingularitások tétele.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- Létezik olyan $\tilde{f} : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény, mely f kiterjesztése.
- Létezik a $\lim_{z \rightarrow a} f$ határérték.
- Létezik olyan $\rho \in]0, r[$, hogy az $f(B_\rho(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.
- $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a) = 0$

6.36. Tétel. Ha $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.

6.37. Tétel. (Morera tétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- Az f függvény holomorf.
- Minden $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra és $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ esetén $\int_\gamma f = 0$ teljesül.
- Minden $a, b, c \in \text{Dom } f$ esetén, ha $T(a, b, c) \subseteq \text{Dom } f$, akkor $\int_{[a, b, c]} f = 0$.

6.10. Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele

6.38. Tétel. (Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(a)$ számra

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)^{n+1}} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

6.39. Tétel. (Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

6.40. Tétel. (Liouville-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Ha létezik olyan $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ n -ed fokú polinom és $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ számra $|f(z)| \leq |P(z)|$ teljesül, akkor f is legfeljebb n -ed fokú polinom.

6.41. Tétel. (Liouville-tétel.) Ha $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett, korlátos holomorf függvény, akkor f állandó.

6.42. Tétel. (Algebra alaptétele.) Legyen $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinom. Ekkor létezik a P polinomnak zérushelye.

6.11. Holomorf függvények gyökei

6.43. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény és $N_f = \{z \in \text{Dom } f \mid f(z) = 0\}$.

1. Az N_f halmaz minden pontja izolált pont.

2. Minden $a \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $g : \text{Dom } f \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g(a) \neq 0$ és minden $z \in \text{Dom } f$ számra $f(z) = (z - a)^n g(z)$ teljesül. Ezt az n számot nevezzük az a gyök multiplicitásának.

3. Az N_f halmaz megszámlálható.

Jelölés. Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény esetén vezessük be az

$$N_f = \{z \in \text{Dom } f \mid f(z) = 0\}$$

jelölést a zérushelyekre és minden $a \in N_f$ esetén az a gyök multiplicitását jelölje $m_f(a)$.

6.44. Tétel. (Unicitás tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha $T = \{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ halmaznak van U halmazbeli torlódási pontja, akkor $T = U$.

6.12. Laurent-sorfejtés

Jelölés. Ha $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan sorozat, melyre a $\sum_k a_{-k}$ és a $\sum_k a_k$ sor is konvergens, akkor vezessük be a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

jelölést.

6.45. Definíció. Ha $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $R \in]r, \infty]$, akkor a

$$C_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$

halmazt az a középpontú r belső és R külső sugarú nyílt körgyűrűnek nevezzük.

6.46. Tétel. (Laurent-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint $a \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olyan, hogy $r < R$ és $C_{r,R}(a) \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, hogy minden $r', R' \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $r < r' < R' < R$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \quad \text{és} \quad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r',R'}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{r,R}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n .$$

Továbbá ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq C_{r,R}(a)$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\text{Ind}_{\gamma}(a) c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{(\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} .$$

6.47. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $C_{0,\rho}(a) \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor a Laurent-tétel alapján egyértelműen léteznek olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ együtthatók, hogy minden $r, R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < r < R < \rho$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \quad \text{és} \quad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,R}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{0,\rho}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n .$$

- Ekkor a

$$C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$$

függvénysort az f függvény a pontbeli Laurent-sorfejtésének nevezzük.

- Az f függvény reguláris része a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon

$$f_r : C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - a)^n$$

és az f függvény főrésze a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon

$$f_p : C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - a)^n.$$

- Az f függvénynek az a pontban pólusa van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$ halmaz véges, de nem üres és az

$$r_f(a) = \max \{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$$

szám a pólus rendje.

- Az f függvénynek az a pontban lényeges szingularitása van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$ halmaz végtelen.
- A c_{-1} számot az f függvény a pontbeli reziduumának nevezzük és a $\text{Res}_f(a)$ szimbólummal jelöljük.

6.48. Tétel. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek m -ed rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) pólusa van az a pontban. Ekkor

$$\text{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)) \right).$$

6.13. Reziduum-tétel, argumentum-elv és Rouché tétele

6.49. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény meromorf, ha létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $A \subseteq U$ diszkrét zárt halmaz, hogy $\text{Dom } f = \Omega \setminus A$ és az f függvénynek a D halmaz minden pontjában pólusa van.

6.50. Tétel. (Reziduum-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Ind}_{\gamma}(a) \text{Res}_f(a).$$

6.51. Tétel. (Argumentum-elv.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{a \in N_f} \text{Ind}_{\gamma}(a) m_f(a) - \sum_{a \in P_f} \text{Ind}_{\gamma}(a) r_f(a).$$

6.52. Tétel. (Rouché-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény és $\gamma \in \Gamma_0$ görbe a $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ tulajdonsággal. Ha minden $z \in \text{Ran } \gamma$ esetén $|g(z)| < |f(z)|$ teljesül, akkor

$$\sum_{a \in N_f} \text{Ind}_{\gamma}(a) m_f(a) = \sum_{a \in N_{f+g}} \text{Ind}_{\gamma}(a) m_{f+g}(a).$$

6.14. Nyílt leképezés tétele, lokális maximum elve és a Schwarz-lemma

6.53. Tétel. (Nyílt leképezés tétele.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem konstans holomorf függvény. Ekkor az $f(U)$ halmaz is egyszeresen összefüggő és nyílt.

6.54. Tétel. (Lokális maximum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén, az $|f|$ függvénynek nincs lokális maximuma az a pontban.

6.55. Tétel. (Lokális minimum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén az $|f|$ függvénynek nincs lokális minimuma az a pontban.

6.56. Tétel. Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ korlátos nyílt halmaz és $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely holomorf az U halmazon. Ekkor

$$\sup_{x \in \bar{U}} |f(x)| = \max_{x \in \text{Fr } U} |f(x)|,$$

ahol $\text{Fr } U = \bar{U} \setminus U$, az U halmaz határa.

6.57. Tétel. (Schwarz-lemma.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(a)$ esetén $|f(z) - f(a)| \leq C$. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra

$$|f(z) - f(a)| \leq C \frac{|z - a|}{r}$$

teljesül, valamint $|f'(a)| \leq \frac{C}{r}$.

6.15. Casorati–Weierstrass-tétel és a Hurwitz-tétel

6.58. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \text{Dom } f$. Legyen $r(a) = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \subseteq \text{Dom } f \right\}$ és az f függvény a

pont körüli Laurent-sorfejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

1. Ekkor minden $r \in]0, r(a)[$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén $|c_n| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \sup_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.
2. Az f függvénynek pontosan akkor van reguláris kiterjesztése az a pontban, ha létezik olyan $r \in]0, r(a)[$, melyre az $f(B_r(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.
3. Az f függvénynek pontosan akkor van m -ed rendű pólusa az a pontban, ha létezik olyan $r \in]0, r(a)[$ és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ esetén $\frac{C_1}{|z-a|^m} \leq |f(z)| \leq \frac{C_2}{|z-a|^m}$.
4. Az f függvénynek pontosan akkor van lényeges szingularitása az a pontban, ha minden $k \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $r \in]0, r(a)[$ esetén $\frac{C_k}{r^k} \leq \sup_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.

6.59. Tétel. (Casorati–Weierstrass-tétel.) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek lényeges szingularitása van az a pontban. Ekkor minden $\rho \in]0, r[$ esetén $f(B_\rho(a) \setminus \{a\}) = \mathbb{C}$.

6.60. Tétel. (Holomorf függvények lokálisan egyenletesen sorozatának határértéke.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határfüggvény szintén holomorf; minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon és $f^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}$.

6.61. Tétel. (Hurwitz-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az U halmazon értelmezett komplex értékű holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata az $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem azonosan nulla határfüggvénnyel. Ekkor egy $z \in U$ elem pontosan akkor gyöke az f függvénynek, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$ számra az f_n függvénynek van gyöke a $B_\varepsilon(z)$ halmazban.

6.16. Pár valós integrál kiszámítása reziduum tétellel

6.62. Tétel. Legyen $p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, hogy a q polinomnak nincs valós gyöke és $\deg q \geq 2 + \deg p$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx &= 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}: q(a)=0, \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res} \left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, a \right) \\ \forall \alpha \in]0, 2\pi[: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\alpha x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\alpha x) dx &= 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}: q(a)=0, \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res} \left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, a \right) \\ \forall \alpha \in]-1, 1[: \int_0^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha dx &= \frac{\pi i}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \exp \left(-i \frac{\pi\alpha}{2} \right) \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}: q(a)=0, \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res} \left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} z^\alpha, a \right) \end{aligned}$$

6.17. A Cauchy-integrálformula és a reziduum-tétel néhány következménye

6.63. Tétel. Ha $D \subseteq \mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és $f, g : \mathbb{C} \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy

1. az $f - g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke;
2. $\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus D} |f(z) - g(z)| < \infty$;
3. $\inf_{z \in \mathbb{C} \setminus D} |f(z) - g(z)| = 0$,

akkor $f = g$.

6.64. Tétel.

$$\begin{aligned} 1. \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} : \quad & \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2} \\ 2. \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) : \quad & \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z + k - \frac{1}{2} \right)^2} \\ 3. \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} : \quad & \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2} \\ 4. \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) : \quad & \operatorname{tg}(\pi z) = \frac{2z}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(k + \frac{1}{2} \right)^2} \end{aligned}$$