

Analízis 1

Andai Attila*

2016. szeptember 24.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

1. Metrikus terek.....	1
2. Normált terek.....	6
3. Hilbert-terek.....	9
4. Függvénysorozatok, függvénysorok.....	11
5. Differenciálszámítás.....	13
6. Komplex függvénytan.....	15

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Szabó Barnabásnak*, aki felhívta figyelmem a korábbi verzióban szereplő elírásokra.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\triangleq$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

Ez a dokumentum elektronikus és nyomtatott formában szabadon használható, de csak saját célokra, nem-kereskedelmi jellegű alkalmazásokhoz, tevékenységekhez. A dokumentum internetre való feltöltése és mások által elérhetővé tétele csak a szerző engedélyével lehetséges. Minden más terjesztési és felhasználási forma esetében is a szerző engedélyét kell kérni.
Copyright, 2023 ©Andai Attila

1. Metrikus terek

1.1. Tétel. Tetszőleges M nem üres halmaz esetén

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{ha } x \neq y, \\ 0 & \text{ha } x = y \end{cases}$$

metrika, tehát minden nem üres halmazon létezik egy kitüntetett metrika.

1.2. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - d(x, y)[$ számra

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

1.3. Tétel. Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.

1.4. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $x \in M$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.

1.5. Tétel. (Nyílt halmazok rendszere.) Legyen (M, d) metrikus tér.

1. Az üres halmaz és M nyílt.
2. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
3. Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.

1.6. Tétel. (Zárt halmazok rendszere.) Legyen (M, d) metrikus tér.

1. Az üres halmaz és M zárt.
2. Véges sok zárt halmaz uniója zárt.
3. Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.

1.7. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $Z, U \subseteq M$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.

1.8. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén

1. $\text{Int } X$ halmaz nyílt;
2. $\text{Int } X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;
3. $\overline{X}$ halmaz zárt;
4. $\overline{X}$ az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X -et.

1.9. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén

1. az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \text{Int } X$;
2. az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.

1.10. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.

1.11. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Ekkor

$$\begin{aligned} \text{Int } X &= M \setminus \overline{M \setminus X}, \\ \overline{X} &= M \setminus \text{Int}(M \setminus X). \end{aligned}$$

1.12. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor $(A, d|_{A \times A})$ is metrikus tér.

1.13. Tétel. (Nyílt és zárt halmazok metrikus altérben.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $B \subseteq A$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. A B halmaz pontosan akkor nyílt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül.

2. A B halmaz pontosan akkor zárt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $Z \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $B = A \cap Z$ teljesül.

1.14. Tétel. (Halmaz lezártja metrikus altérben.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\bar{B}$ a B halmaz lezártját az (M, d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A, d') metrikus térben. Ekkor minden $B \subseteq A$ halmazra

$$\tilde{B} = \bar{B} \cap A$$

teljesül.

1.15. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$.

1. A

$$d_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto d_p(x, y) \triangleq \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) \triangleq \max \{|x_k - y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\}$$

leképezés metrika.

2. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a d_p és a d_∞ metrikák ekvivalensek.

1.16. Tétel. Metrikus térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

1.17. Tétel. Minden konvergens sorozat korlátos.

1.18. Tétel. Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.

1.19. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $x \in M$.

1. Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.
2. Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatra $\lim a \in A$.

1.20. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty \cup \{\infty\}]$, és $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^n$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{K}^n, d_p)$ térben, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az $a_i = \text{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$\text{pr}_i(\lim a) = \lim(\text{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

1.21. Tétel. Minden Cauchy-sorozat korlátos.

1.22. Tétel. Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

1.23. Tétel. Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.

1.24. Tétel. Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $X \subseteq M$ zárt halmaz. Ekkor az $(X, d|_{X \times X})$ metrikus altér is teljes.

1.25. Tétel. Metrikus térben

1. minden véges halmaz kompakt;
2. véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.

1.26. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.

1. Ekkor X korlátos és zárt.
2. Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.

1.27. Tétel. (Cantor-féle közszerésztétel.) Legyen (M, d) metrikus tér és $(K_i)_{i \in I}$ az M kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

1.28. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha $\overline{A}$ kompakt halmaz.

1.29. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme a K halmaznak.

1.30. Tétel. (Lebesgue-lemma.) Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor a K halmaz bármely $(U_i)_{i \in I}$ nyílt befedéséhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in K$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül.

1.31. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x)$ teljesül.

1.32. Tétel. (Bolzano–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.

1.33. Tétel. Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes.

1.34. Tétel. Egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható sűrű halmaz.

1.35. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. Az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ terek szeparábilisek.

1.36. Tétel. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ függvény, az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in M'$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.

1.37. Tétel. (Átviteli elv határértékre.) Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{a\}$ sorozatra, mely a ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.

1.38. Tétel. (Átviteli elv folytonosságra.) Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$ és $a \in \text{Dom } f$. A f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$ sorozatra, mely a ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(a)$ elemmel.

1.39. Tétel. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \rightarrow M'$, és az $a \in \text{Dom } f$ pont a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f$ létezik és $\lim_a f = f(a)$.

1.40. Tétel. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér, $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos függvény és $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Ekkor

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)).$$

1.41. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér, valamint $a, b : \mathbb{N} \rightarrow M$ konvergens sorozat. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = d(\lim a, \lim b)$$

teljesül.

1.42. Tétel. (Függvénykompozíció határértéke.) Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) és (M_3, d_3) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$, $g : M_2 \rightarrow M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\text{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a

1. $b \notin \text{Dom } g$;
2. $b \in \text{Dom } g$ és g folytonos a b pontban;

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.

1.43. Tétel. (A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.
2. Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = U \cap \text{Dom } f$ teljesül.
3. Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = Z \cap \text{Dom } f$ teljesül.

1.44. Tétel. (A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \rightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.
2. Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra $f^{-1}(A)$ nyílt.
3. Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra $f^{-1}(A)$ zárt.

1.45. Tétel. (Egyenlőség folytatásának az elve.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f, g : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos függvény. Ha valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül, akkor $f|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$ is teljesül.

1.46. Tétel. Metrikus terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.

1.47. Tétel. Legyen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.

1.48. Tétel. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow M_2$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.

1.49. Tétel. (Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

1.50. Tétel. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow M_2$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény is folytonos.

1.51. Tétel. Ha (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor minden $f : M_1 \rightarrow M_2$ folytonos bijekció homeomorfizmus.

1.52. Tétel. Metrikus terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.

1.53. Tétel. (Heine-tétel.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow M_2$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.

1.54. Tétel. (Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Tegyük fel, hogy (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : \overline{\text{Dom } f} \rightarrow M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.

1.55. Tétel. (Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) tetszőleges metrikus tér, (M_2, d_2) pedig teljes metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ sűrűn értelmezett, egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : M_1 \rightarrow M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.

1.56. Tétel. Minden izometria egyenletesen folytonos.

1.57. Tétel. (Izometria kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \rightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. Ekkor az f függvény folytonos $g : M_1 \rightarrow M_2$ kiterjesztése is izometria.

1.58. Tétel. Minden Lipschitz-folytonos függvény egyenletesen folytonos.

1.59. Tétel. Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor az $f : M_1 \rightarrow M_2$ függvények tulajdonságai között az alábbi reláció teljesül.

$$\text{kontrakció} \Rightarrow \text{Lipschitz-folytonos} \Rightarrow \text{egyenletesen folytonos} \Rightarrow \text{folytonos}$$

1.60. Tétel. (Banach-féle fixponttétel.) Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $f : M \rightarrow M$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in M$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.

1.61. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor korlátos, ha $\text{diam}(A) < \infty$.

1.62. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz. Ekkor

1. minden $x, y \in M$ esetén

$$|\text{dist}_A(x) - \text{dist}_A(y)| \leq d(x, y)$$

teljesül;

2. a dist_A függvény egyenletesen folytonos;

3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \text{dist}_A(z) = 0\}$.

1.63. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.

1. Létezik olyan $f : M \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $f(x) = 0$ és minden $y \in Y$ esetén $f(y) = 1$.

2. Létezik $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, hogy $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$.

1.64. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér.

1. Létezik olyan (M', d') teljes metrikus tér és $j : M \rightarrow M'$ izometria, melyre $\overline{\text{Ran } j} = M'$ teljesül.

2. Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) teljes metrikus tér, valamint $j_1 : M \rightarrow M_1$ és $j_2 : M \rightarrow M_2$ olyan izometria, melyre $\overline{\text{Ran } j_1} = M_1$ és $\overline{\text{Ran } j_2} = M_2$, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.

1.65. Tétel. Minden metrikus térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.

1.66. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

1. Az A halmaz pontosan akkor összefüggő, ha az $(A, d|_{A \times A})$ altér összefüggő.

2. Az A halmaz pontosan akkor ívszerűen összefüggő, ha az $(A, d|_{A \times A})$ altér ívszerűen összefüggő.

1.67. Tétel. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.

1.68. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.

1. Az M halmaz összefüggő.

2. Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$.

3. Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ és $M = X \cup Y$.

1.69. Tétel. (Metrikus altér összefüggősége.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.

1. Az A halmaz összefüggő az (M, d) térben.

2. Az (A, d') metrikus altér összefüggő.

3. Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$.
4. Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \cap A \neq \emptyset$, $Y \cap A \neq \emptyset$, $X \cap Y \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq X \cup Y$.

1.70. Tétel. Legyen (M, d) összefüggő metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Ekkor $A = \emptyset$ vagy $A = M$ teljesül.

1.71. Tétel. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint legyen $A \subseteq M_1$ és $f : A \rightarrow M_2$ folytonos függvény.

1. Ha A összefüggő, akkor $f(A)$ is összefüggő.
2. Ha A ívszerűen összefüggő, akkor $f(A)$ is ívszerűen összefüggő.

2. Normált terek

2.1. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x, y \in V$ esetén

$$|||x| - |y||| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

2.2. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezés metrika, így $(V, d_{\|\cdot\|})$ metrikus tér.

2.3. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.

1. Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Az x középpontú r sugarú nyílt gömb

$$B_r(x) = \{y \in V \mid \|x - y\| < r\}.$$

2. Az $X \subseteq V$ halmaz nyílt, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
3. Az $X \subseteq V$ halmaz zárt, ha $V \setminus X$ nyílt.
4. Az $X \subseteq V$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in V$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

2.4. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A $\mathbb{K}^n$ téren a

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ & x &\mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ & x &\mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

leképezések normák (melyet p -normának, illetve sup-normának vagy maximum-normának nevezünk).

2.5. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \rightarrow V$ és $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ konvergens sorozat.

1. Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. A ca sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.
3. A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.
4. Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.

2.6. Tétel. (A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.

2.7. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens.

1. Ha V Banach-tér, akkor a $\sum a$ sor konvergens.
2. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|.$$

2.8. Tétel. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq V$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.
2. Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.
3. Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$.

2.9. Tétel. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.

2.10. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az A leképezés folytonos.
2. Az A leképezés folytonos a 0 pontban.
3. $\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$
4. Az A leképezés egyenletesen folytonos.

2.11. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. Az $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ tér vektortér, melyen a

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(V_1, V_2) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad A \mapsto \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$$

leképezés norma.

2.12. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$. Ekkor

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1.$$

2.13. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Ekkor $BA \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$, továbbá

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

2.14. Tétel. Minden $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén az

$$\begin{aligned} M_c : V &\rightarrow V & x &\mapsto cx, \\ L_z : V &\rightarrow V & x &\mapsto z + x \end{aligned}$$

leképezés homeomorfizmus.

2.15. Tétel. Ha $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér, akkor $(\mathcal{L}(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ is Banach-tér.

2.16. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és legyen $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés. Ha $\dim V_1 < \infty$, akkor A folytonos. Azaz minden véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezés folytonos.

2.17. Tétel. (Carl Neumann-féle sor.) Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható, inverze folytonos lineáris leképezés és

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol 1 jelöli a $V \rightarrow V$ identitásfüggvényt.

2.18. Tétel. Legyen U és V Banach-tér és legyen

$$G(\mathcal{L}(U, V)) \triangleq \{a \in \mathcal{L}(U, V) \mid \exists a' \in \mathcal{L}(V, U) : aa' = \text{id}_V, a'a = \text{id}_U\}.$$

(Vagyis $G(\mathcal{L}(U, V))$ jelöli a azon invertálható lineáris leképezések halmazát, melyek inverze is folytonos.) Ekkor

1. minden $a \in G(\mathcal{L}(U, V))$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G(\mathcal{L}(U, V))$;
2. a $G(\mathcal{L}(V, V))$ halmaz nyílt;
3. az $i : G(\mathcal{L}(U, V)) \rightarrow G(\mathcal{L}(V, U))$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.

2.19. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér a $\mathbb{K}$ számtest felett és legyen $(e_k)_{k=1, \dots, n}$ ennek egy bázisa. Tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow V \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

leképezést.

1. A φ lineáris homeomorfizmus a $(V, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ terek között.
2. Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt.
3. Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos.

2.20. Tétel. Minden V véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.

2.21. Tétel. Legyen V véges dimenziós vektortér és legyen $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetszőleges norma. Ekkor

1. a V tér teljes;
2. a V egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

2.22. Tétel. Minden normált tér minden véges dimenziós altere zárt.

2.23. Tétel. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén $l_{\mathbb{K}}^p$ vektortér, a

$$\|\cdot\|_p : l_{\mathbb{K}}^p \rightarrow \mathbb{R} \quad s \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés pedig norma az $l_{\mathbb{K}}^p$ téren. Tehát minden $p \in [1, \infty[$ valós számra $(l_{\mathbb{K}}^p, \|\cdot\|_p)$ normált-tér.

2.24. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.

1. Ha $x_0, x_1 \in V$, akkor a

$$\gamma_{x_0, x_1} : [0, 1] \rightarrow V \quad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0)$$

függvény folytonos.

2. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \dots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$, akkor a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow V \quad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\}(x_{[nt]+1} - x_{[nt]})$$

függvény folytonos, továbbá minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén minden $t \in [0, 1]$ számra

$$\gamma_{x_k, x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right)$$

teljesül.

2.25. Tétel. Normált térben minden konvex halmaz ívszerűen összefüggő.

2.26. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. A V halmaz ívszerűen összefüggő.
2. A V halmaz összefüggő.

3. Ha $A \subseteq V$ olyan halmaz mely nyílt és zárt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = V$ teljesül.

2.27. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Ha $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül, akkor $B = A$.

2.28. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.

1. Az A halmaz összefüggő.
2. Minden $x, y \in A$ ponthoz létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \dots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$.
3. Az A halmaz ívszerűen összefüggő.

2.29. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér, és legyen $p \in [1, \infty[$. A $V = \prod_{k=1}^n V_k$ halmazon értelmezzük a

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : V &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ & (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \max \{ \|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\} \} \\ \|\cdot\|_p : V &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ & (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

függvényeket. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. A $\|\cdot\|_\infty$ függvény norma.
2. Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ függvény norma.
3. Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek egymással.

2.30. Tétel. Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor létezik olyan $(V', \|\cdot\|')$ Banach-tér és $j : V \rightarrow V'$ lineáris izometria, melyre $\overline{\text{Ran } j} = V'$ teljesül.

2.31. Tétel. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \rightarrow V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\|_X)$ normált téren. Ekkor létezik egyetlen olyan $A' : U \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezés, mely az A kiterjesztése, vagyis $A'|_{\text{Dom } A} = A$, valamint $\|A'\| = \|A\|$.

2.32. Tétel. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j) . Minden $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-térhez és $A : U \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezéshez létezik egyetlen olyan $A' : U' \rightarrow V$ folytonos lineáris leképezés, melyre $A' \circ j = A$ teljesül, továbbá $\|A'\| = \|A\|$.

2.33. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka. Ekkor létezik egyetlen olyan $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.

2.34. Tétel. Minden normált térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.

3. Hilbert-terek

3.1. Tétel. Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y, z \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

teljesül.

3.2. Tétel. (Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

3.3. Tétel. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a V vektortéren. Ekkor

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

norma.

3.4. Tétel. (Parallelogramma-egyenlőség.) Ha V skalárszorozatos vektortér, akkor minden $x, y \in V$ vektorra

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

3.5. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor a

$$\begin{aligned} \langle \cdot, z \rangle : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{K} & x &\mapsto \langle x, z \rangle \\ \langle z, \cdot \rangle : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{K} & x &\mapsto \langle z, x \rangle \end{aligned}$$

leképezések folytonosak.

3.6. Tétel. Legyen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. (Bessel-egyenlőtlenség.) Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra és $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra

$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

2. Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n.$$

3. (Parseval-egyenlőség.) Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2.$$

3.7. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathcal{H}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in W$, melyre

$$\text{dist}_W(x) = \inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - y\|$$

teljesül.

3.8. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathcal{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor x_W az egyetlen olyan vektora a W lineáris altérnek, melyre $x - x_W$ ortogonális a W altérre.

3.9. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér.

1. Minden nem üres $L \subseteq \mathcal{H}$ esetén $L^\perp$ zárt lineáris altér.
2. Minden nem üres $L \subseteq K \subseteq \mathcal{H}$ esetén $K^\perp \subseteq L^\perp$.
3. Minden nem üres $L \subseteq \mathcal{H}$ esetén $L \subseteq L^{\perp\perp}$.

3.10. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér. Ekkor W és $W^\perp$ zárt ortogonális kiegészítő alterek, vagyis $W \cap W^\perp = \{0\}$ és $W + W^\perp = \mathcal{H}$ teljesül.

3.11. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér, akkor $W = W^{\perp\perp}$.

3.12. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathcal{H}$ lineáris altér, akkor $\overline{L} = L^{\perp\perp}$.

3.13. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér, tekintsük a

$$P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad x \mapsto x_W$$

leképezést.

1. A P leképezés lineáris.
2. A P leképezésre $\text{Ran } P = W$ és $\text{Ker } P = W^\perp$.
3. $P^2 = P$
4. Ha $W \neq \{0\}$, akkor $\|P\| = 1$.

3.14. Tétel. (Riesz-féle reprezentációs tétel.) Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $\varphi \in \mathcal{H}'$, azaz $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, akkor létezik egyetlen olyan $z \in \mathcal{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ esetén

$$\varphi(x) = \langle z, x \rangle$$

teljesül.

4. Függvénysorozatok, függvénysorok

4.1. Tétel. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : (N < n, m \rightarrow d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

4.2. Tétel. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határfüggvény, $\text{Dom } f = M$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, M')$.

4.3. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény, $\text{Dom } f = M$ és a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, V)$.

4.4. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. A

$$\|\cdot\|_{\text{sup}} : C^b(M, V) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \sup_{t \in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma az $C^b(M, V)$ vektortéren, így $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált tér.

4.5. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C^b(M, V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^b(M, V)$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált térben.

4.6. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, valamint (M, d) metrikus tér. Ekkor $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ Banach-tér.

4.7. Tétel. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.

4.8. Tétel. (Weierstrass-tétel.) Legyen T egy nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénytípus. Ha a $\sum_n f_n$ függvényssorra

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in T} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor egyenletesen is konvergens.

4.9. Tétel. (Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.

1. Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.
2. Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.
3. Ha $r \in [0, R_a[$, akkor

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty.$$

4. Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.
5. Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.

4.10. Tétel. Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor minden $A \in \mathcal{L}(V, V)$, elemre $\|A\| < R_a$ esetén a

$$\sum_n a_n A^n$$

sor konvergens.

4.11. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel.

1. Ha A diagonalizálható, azaz létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) = Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij}f(\lambda_i)$.

2. Ha az A mátrix Jordan-felbontása egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis létezik olyan invertálható S mátrix és J mátrix, melyre $A = SJS^{-1}$, ahol

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

akkor $f(A) = Sf(J)S^{-1}$, ahol

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Vagyis

$$ha \quad J_{ij} = \begin{cases} 0, & ha \quad i > j \text{ vagy } j - i > 1; \\ \lambda, & ha \quad i = j; \\ 1, & ha \quad j - i = 1, \end{cases} \quad akkor \quad f(J_{ij}) = \begin{cases} 0, & ha \quad i > j; \\ \frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}, & ha \quad i \leq j. \end{cases}$$

3. Ha A tetszőleges mátrix, melynek Jordan-felbontása $A = SPS^{-1}$ alakú, ahol S invertálható mátrix és P blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában a $(J_i)_{i=1,\dots,k}$ Jordan-blokkok állnak, akkor $f(A) = Sf(P)S^{-1}$, ahol $f(P)$ az a blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában az $(f(J_i))_{i=1,\dots,k}$ blokkok állnak.

4.12. Tétel. (Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow V$ folytonos függvény. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [a, b]} \|B_n^f(t) - f(t)\| \right) = 0.$$

4.13. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. A $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben a polinomok sűrű halmazt alkotnak.

4.14. Tétel. Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ függvényháló. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, ha $f_1, \dots, f_n \in A$, akkor

$$\sup \{f_1, \dots, f_n\}, \inf \{f_1, \dots, f_n\} \in A$$

teljesül.

4.15. Tétel. (Stone-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan lineáris függvényháló, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.

4.16. Tétel. (Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus-tér és $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.

4.17. Tétel. (Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f \in A$ elemre $\bar{f} \in A$. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.

4.18. Tétel. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor a $C(K, \mathbb{R})$ halmazban a polinomok sűrű részhalmazt alkotnak.

5. Differenciálszámítás

5.1. Tétel. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \mathcal{L}(U, V)$, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

5.2. Tétel. (A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény, valamint $a \in \text{Int Dom } f$. Az $A \in \mathcal{L}(U, V)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \left(\|x-a\| < \delta \rightarrow \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x-a\| \right)$$

teljesül.

5.3. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$. Pontosan akkor létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(Df)(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - ((Df)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(Df)(a)(1) = f'(a).$$

5.4. Tétel. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény, valamint $a \in \text{Int Dom } f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.

5.5. Tétel. Legyen U és V normált tér, $f, g : U \rightarrow V$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } \varphi)$ halmaznak és legyen f , g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor

1. $f + g$ differenciálható az a pontban és $(D(f + g))(a) = (Df)(a) + (Dg)(a)$;
2. minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(D(cf))(a) = c(Df)(a)$;
3. φf differenciálható az a pontban és $(D(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (D\varphi)(a) + \varphi(a)(Df)(a)$;
4. ha $\varphi(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{\varphi}$ differenciálható az a pontban és

$$\left(D \left(\frac{f}{\varphi} \right) \right) (a) = \frac{\varphi(a)(Df)(a) - f(a)(D\varphi)(a)}{\varphi^2(a)}.$$

5.6. Tétel. Legyen U és V normált tér és legyen $A \subseteq U$ nyílt halmaz. Ekkor $C^1(A, V)$ vektortér.

5.7. Tétel. (Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen U , V és W normált tér, $g : U \rightarrow V$, $f : V \rightarrow W$ és $a \in \text{Int Dom } f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható az $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és

$$(D(f \circ g))(a) = (Df)(g(a)) \circ (Dg)(a).$$

5.8. Tétel. Legyen U és V normált tér, $f : U \rightarrow V$ függvény, valamint $a \in \text{Int Dom } f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(D_e f)(a) = ((Df)(a))(e)$ teljesül.

5.9. Tétel. Legyen U , V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \rightarrow W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban. Ekkor $\text{Ran}((Df)(a)) \subseteq W$, vagyis a $(Df)(a)$ derivált $U \rightarrow W$ lineáris leképezésnek is tekinthető.

5.10. Tétel. Legyen U normált tér, $c \in U$ és

$$L_c : U \rightarrow U \quad x \mapsto x - c.$$

Ekkor L_c minden pontban differenciálható és

$$DL_c : U \rightarrow \mathcal{L}(U, U) \quad a \mapsto \text{id}_U$$

teljesül.

5.11. Tétel. Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(U, V)$. Ekkor A minden pontban differenciálható és

$$DA : U \rightarrow \mathcal{L}(U, V) \quad a \mapsto A$$

teljesül.

5.12. Tétel. Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathcal{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n -lineáris leképezés. A

$$\rho : U \rightarrow V \quad x \mapsto A(x, \dots, x),$$

függvény deriváltjára

$$D\rho : U \rightarrow \mathcal{L}(U, V) \quad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a, \dots, a))$$

teljesül.

5.13. Tétel. Legyen V Banach-tér, $A = \mathcal{L}(V, V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \rightarrow A$, $f(a) = a^n$. Ekkor

$$Df : A \rightarrow \mathcal{L}(A, A) \quad a \mapsto \left(b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k} \right)$$

teljesül.

5.14. Tétel. Legyen V Banach-tér, $A = \mathcal{L}(V, V)$ és

$$G(A) = \{a \in \mathcal{L}(V, V) \mid \exists a^{-1}, a^{-1} \in \mathcal{L}(V, V)\}.$$

Az inverzképzés $i : G(A) \rightarrow G(A)$, $i(a) = a^{-1}$ függvényére ekkor

$$Di : G(A) \rightarrow \mathcal{L}(A, A) \quad a \mapsto (b \mapsto -a^{-1}ba^{-1})$$

teljesül.

6. Komplex függvénytan

6.1. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$. Tekintsük az f által meghatározott

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \text{Re } f(x + iy)$$

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \text{Im } f(x + iy)$$

függvényeket. Azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra $x + iy \in \text{Dom } f$ esetén

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

teljesül. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az f függvény holomorf az a pontban.
2. Létezik olyan $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ -lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

3. Az u és v függvény differenciálható az a pontban, valamint

$$(\partial_1 u)(a) = (\partial_2 v)(a)$$

$$(\partial_2 u)(a) = -(\partial_1 v)(a)$$

teljesül. Ezen utóbbi két egyenletet nevezzük Cauchy–Riemann-egyenleteknek.

Ha az f függvény holomorf az a pontban, akkor

$$f'(a) = A(1) = (\partial_1 u)(a) + i(\partial_1 v)(a).$$

6.2. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor

1. $f + g$ differenciálható az a pontban és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

2. minden $c \in \mathbb{C}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;
3. fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
4. ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

6.3. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy a $P_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen

$$a' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a , a P_a hatványsor holomorf a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

6.4. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma^\circ(t)) \dot{\gamma}^\circ(t) dt$$

teljesül.

6.5. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ekkor

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

6.6. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ és $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } g$ teljesül.

1. $\int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \int_{\gamma} (\lambda f) = \lambda \int_{\gamma} f$
3. Legyen $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta(t) = \gamma(b + a - t)$, ekkor $\int_{\delta} f = - \int_{\gamma} f$.
4. $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq L(\gamma) \sup_{x \in \text{Ran } \gamma} |f(x)|$

6.7. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{C} \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Dom } f$ teljesül.

1. $\int_{[a, b]} f = - \int_{[b, a]} f$.
2. $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq |b - a| \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$
3. Minden $c \in [a, b]$ pontra $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$.

6.8. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ az f primitív függvénye és $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } F$ teljesül, akkor

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

6.9. Tétel. Legyen $\gamma \in \Gamma_0$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha létezik olyan $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye az f függvénynek, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } F$ teljesül, akkor

$$\oint_{\gamma} f = 0.$$

6.10. Tétel. (Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $U \subseteq \text{Dom } f$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f -nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a, b, c \in U$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq U$ esetén $\int_{[a, b, c]} f = 0$. Továbbá, ha teljesül ez a feltétel és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az

$$F : U \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \int_{[c, z]} f$$

függvény primitív függvénye az f függvénynek az U halmazon.

6.11. Tétel. (Goursat-lemma.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq \text{Dom } f$ esetén $\int_{[a, b, c]} f = 0$.

6.12. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a \in \text{Int } \text{Dom } f$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $F : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, melyre $F' \subseteq f$ teljesül, azaz F a f primitív függvény az a halmaz egy környezetén.

6.13. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve, és legyen $U \subseteq \text{Dom } f$ nyílt csillaghalmaz. Ekkor létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.

6.14. Tétel. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvényt és a $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rwe^{2\pi i mt}$ görbét. Ekkor

$$\int_{\gamma} f = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1; \\ 2\pi i m, & \text{ha } n = -1. \end{cases}$$

6.15. Tétel. Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük a $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rwe^{2\pi i mt}$ görbét. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ esetén

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |z| > r; \\ m, & \text{ha } |z| < r. \end{cases}$$

6.16. Tétel. Legyen $\gamma \in \Gamma_0$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. $\text{Ran } \text{Ind}_{\gamma} \subseteq \mathbb{Z}$
2. Az Ind_{γ} függvény folytonos.
3. Ha valamely $z \in \mathbb{C}$ számra $\text{Ran } \gamma \subseteq B_{|z|}(0)$ teljesül, akkor $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$.

6.17. Tétel. (Cauchy intergáltétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Dom } f$ nyílt halmaz és minden $z \in \text{Dom } f$ esetén van a z pontban értelmezett primitív függvénye az f függvénynek. Ha $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_0$ olyan görbék, melyek kontúrhomotópok a $\text{Dom } f$ halmazban, akkor

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

6.18. Tétel. (Cauchy első integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \subseteq \text{Dom } f$ teljesül, akkor

$$\oint_{\gamma} f = 0.$$

6.19. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre a $\text{Dom } f$ halmaz egyszeresen összefüggő. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ esetén

$$\oint_{\gamma} f = 0$$

teljesül.

6.20. Tétel. (Cauchy második integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ teljesül. Ekkor minden $z \in U \setminus \text{Ran } \gamma$ pontra

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f}{\text{id} - z}.$$

6.21. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{r,a}} \frac{f}{\text{id} - z}.$$

6.22. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül.

1. A $C_{f,\gamma}$ függvény $\mathbb{C}$ -analitikus.
2. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ esetén a $C_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugarára nem kisebb a $\text{dist}(a, \text{Ran } \gamma)$ számnál.
3. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ esetén a $C_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik a $C_{f,\gamma}$ függvénnyel a $B_{\text{dist}(a, \text{Ran } \gamma)}(a)$ halmazon.
4. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_{f,\gamma}^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{(\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}.$$

6.23. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény.

1. Az f függvény $\mathbb{C}$ -analitikus.
2. Minden $a \in \text{Dom } f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugarára nem kisebb a

$$r_a = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \overline{B_r(a)} \subseteq \text{Dom } f \right\}$$

számnál.

3. Minden $a \in \text{Dom } f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik az f függvénnyel a $B_{r_a}(a)$ halmazon.
4. Minden $a \in \text{Dom } f$, $r \in]0, r_a[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f}{(\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}.$$

6.24. Tétel. (Megszüntethető szingularitások tétele.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- Létezik olyan $\tilde{f} : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény, mely f kiterjesztése.
- Létezik a $\lim_{z \rightarrow a} f$ határérték.
- Létezik olyan $\rho \in]0, r[$, hogy az $f(B_{\rho}(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.
- $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a) = 0$

6.25. Tétel. Ha $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.

6.26. Tétel. (Morera tétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- Az f függvény holomorf.
- Minden $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra és $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ esetén $\int_{\gamma} f = 0$ teljesül.
- Minden $a, b, c \in \text{Dom } f$ esetén, ha $T(a, b, c) \subseteq \text{Dom } f$, akkor $\int_{[a, b, c]} f = 0$.

6.27. Tétel. (Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(a)$ számra

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)^{n+1}} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

6.28. Tétel. (Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

6.29. Tétel. (Liouville-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Ha létezik olyan $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ n -ed fokú polinom és $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ számra $|f(z)| \leq |P(z)|$ teljesül, akkor f is legfeljebb n -ed fokú polinom.

6.30. Tétel. (Liouville-tétel.) Ha $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett, korlátos holomorf függvény, akkor f állandó.

6.31. Tétel. (Algebra alaptétele.) Legyen $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinom. Ekkor létezik a P polinomnak zérushelye.

6.32. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény és $N_f = \{z \in \text{Dom } f \mid f(z) = 0\}$.

1. Az N_f halmaz minden pontja izolált pont.
2. Minden $a \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $g : \text{Dom } f \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g(a) \neq 0$ és minden $z \in \text{Dom } f$ számra $f(z) = (z - a)^n g(z)$ teljesül. Ezt az n számot nevezzük az a gyök multiplicitásának.
3. Az N_f halmaz megszámlálható.

6.33. Tétel. (Unicitás tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha a $T = \{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ halmaznak van U halmazbeli torlódási pontja, akkor $T = U$.

6.34. Tétel. (Laurent-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint $a \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olyan, hogy $r < R$ és $C_{r,R}(a) \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, hogy minden $r', R' \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $r < r' < R' < R$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \quad \text{és} \quad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénytörök normálisan konvergensek a $\overline{C_{r',R'}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{r,R}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Továbbá ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq C_{r,R}(a)$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\text{Ind}_\gamma(a)c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f}{(\text{id}_\mathbb{C} - a)^{n+1}} .$$

6.35. Tétel. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek m -ed rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) pólusa van az a pontban. Ekkor

$$\text{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)) \right) .$$

6.36. Tétel. (Reziduum-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Ind}_\gamma(a) \text{Res}_f(a) .$$

6.37. Tétel. (Argumentum-elv.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{a \in N_f} \text{Ind}_\gamma(a) m_f(a) - \sum_{a \in P_f} \text{Ind}_\gamma(a) r_f(a) .$$

6.38. Tétel. (Rouché-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény és $\gamma \in \Gamma_0$ görbe a $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ tulajdonsággal. Ha minden $z \in \text{Ran } \gamma$ esetén $|g(z)| < |f(z)|$ teljesül, akkor

$$\sum_{a \in N_f} \text{Ind}_\gamma(a) m_f(a) = \sum_{a \in N_{f+g}} \text{Ind}_\gamma(a) m_{f+g}(a) .$$

6.39. Tétel. (Nyílt leképezés tétele.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem konstans holomorf függvény. Ekkor az $f(U)$ halmaz is egyszeresen összefüggő és nyílt.

6.40. Tétel. (Lokális maximum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén, az $|f|$ függvénynek nincs lokális maximuma az a pontban.

6.41. Tétel. (Lokális minimum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén az $|f|$ függvénynek nincs lokális minimuma az a pontban.

6.42. Tétel. Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ korlátos nyílt halmaz és $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely holomorf az U halmazon. Ekkor

$$\sup_{x \in \overline{U}} |f(x)| = \max_{x \in \text{Fr } U} |f(x)| ,$$

ahol $\text{Fr } U = \overline{U} \setminus U$, az U halmaz határa.

6.43. Tétel. (Schwarz-lemma.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(a)$ esetén $|f(z) - f(a)| \leq C$. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra

$$|f(z) - f(a)| \leq C \frac{|z - a|}{r}$$

teljesül, valamint $|f'(a)| \leq \frac{C}{r}$.

6.44. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \text{Dom } f$. Legyen $r(a) = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \subseteq \text{Dom } f \right\}$ és az f függvény a

pont körüli Laurent-sorfejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

1. Ekkor minden $r \in]0, r(a)[$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén $|c_n| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \sup_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.
2. Az f függvénynek pontosan akkor van reguláris kiterjesztése az a pontban, ha létezik olyan $r \in]0, r(a)[$, melyre az $f(B_r(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.
3. Az f függvénynek pontosan akkor van m -ed rendű pólusa az a pontban, ha létezik olyan $r \in]0, r(a)[$ és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ esetén $\frac{C_1}{|z-a|^m} \leq |f(z)| \leq \frac{C_2}{|z-a|^m}$.
4. Az f függvénynek pontosan akkor van lényeges szingularitása az a pontban, ha minden $k \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $r \in]0, r(a)[$ esetén $\frac{C_k}{r^k} \leq \sup_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.

6.45. Tétel. (Casorati–Weierstrass-tétel.) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek lényeges szingularitása van az a pontban. Ekkor minden $\rho \in]0, r[$ esetén $f(B_\rho(a) \setminus \{a\}) = \mathbb{C}$.

6.46. Tétel. (Holomorf függvények lokálisan egyenletesen sorozatának határértéke.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határfüggvény szintén holomorf; minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon és $f^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}$.

6.47. Tétel. (Hurwitz-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az U halmazon értelmezett komplex értékű holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata az $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem azonosan nulla határfüggvénnyel. Ekkor egy $z \in U$ elem pontosan akkor gyöke az f függvénynek, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$ számra az f_n függvénynek van gyöke a $B_\varepsilon(z)$ halmazban.

6.48. Tétel. Legyen $p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, hogy a q polinomnak nincs valós gyöke és $\deg q \geq 2 + \deg p$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}: q(a)=0, \\ \text{Im } a > 0}} \text{Res} \left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, a \right)$$

$$\forall \alpha \in]0, 2\pi[: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\alpha x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\alpha x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}: q(a)=0, \\ \text{Im } a > 0}} \text{Res} \left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, a \right)$$

$$\forall \alpha \in]-1, 1[: \int_0^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha dx = \frac{\pi i}{\cos \frac{\pi \alpha}{2}} \cdot \exp \left(-i \frac{\pi \alpha}{2} \right) \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}: q(a)=0, \\ \text{Im } a > 0}} \text{Res} \left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} z^\alpha, a \right)$$

6.49. Tétel. Ha $D \subseteq \mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és $f, g : \mathbb{C} \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy

1. az $f - g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke;
2. $\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus D} |f(z) - g(z)| < \infty$;
3. $\inf_{z \in \mathbb{C} \setminus D} |f(z) - g(z)| = 0$,

akkor $f = g$.

6.50. Tétel.

$$\begin{aligned}
1. \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} : \quad & \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2} \\
2. \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right) : \quad & \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z+k-\frac{1}{2}\right)^2} \\
3. \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} : \quad & \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2} \\
4. \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right) : \quad & \operatorname{tg}(\pi z) = \frac{2z}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$