Kalkulus 2

Andai Attila*

2018. április 29.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\stackrel{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \stackrel{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Véges dimenziós terek topológiája

1.1. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren az alábbi műveleteket értelmezzük.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n & ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \mapsto (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n & (\lambda,(x_1,\ldots,x_n)) \mapsto (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) \end{array}$$

1.2. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad (x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

műveletet *skaláris szorzásnak* nevezzük.

1.3. Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *vektorok által bezárt szög*

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}}.$$

1.4. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.
- $\forall x \in \mathbb{K}^n: \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}^n: \ \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér*, ha $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ téren.

1.5. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in \mathbb{K}^n$ pontra a

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K}^n |\ \|x-y\| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, a normát nem írjuk ki, tehát csak a $B_r(x)$ szimbólumot fogjuk használni.

1.6. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *zárt*, ha $\mathbb{K}^n \setminus X$ nyílt.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}^n$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

1.7. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+: \ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+: \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (\mathbb{K}^n \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+: \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+: \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

1.8. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

1.9. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K}^n |\ \exists r \in \mathbb{R}^+: \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K}^n |\ \forall r \in \mathbb{R}^+: \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

1.10. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X, Y \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = \mathbb{K}^n$.

1.11. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{K}^n$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

1.12. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

1.13. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

1.14. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \ \big((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon\big).$$

1.15. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér *teljes*, ha $\mathbb{K}^n$ teljes halmaz.

1.16. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

1.17. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az $\mathbb{K}^n$ térnek.

1.18. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}^m$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

1.19. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ jelöli.

1.20. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az f *függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

1.21. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

1.22. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $V \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$. Az $f : U \to V$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy az *U és U részhalmazok homeomorfak*, ha létezik $f : U \to V$ homeomorfizmus.

1.23. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \exists \delta \in \mathbb{R}^{+} \forall x, y \in A : \quad \big(d(x,y) < \delta \ \to \ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

1.24. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren értelmezett $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ *normák ekvivalensek egymással*, ha ugyanazok a nyílt halmazok a térben, azaz, ha minden $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint és minden $\|\cdot\|'$ szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

1.25. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges sorozat.

– Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
– Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

1.26. Definíció. A

$$A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto A(x)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *lineáris*, ha minden $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ számra

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

teljesül. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezések halmazára a $\operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelölést használjuk.
A $\operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ teret a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortér duálisának* nevezzük, jele $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^*$.
A $\operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazra a $\operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ jelölést fogjuk használni.

1.27. Definíció. Adott $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ leképezés esetén az $(A_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,\mathfrak{m}\} \\ j\in\{1,\dots,\mathfrak{n}\}}}$ rendszert nevezzük az *A lineáris leképezés mátrixának*, ahol minden $j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ indexre $A_{ij} = A(e_j)_i$. A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az A leképezés mátrixának az elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \dots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}$$

módon szokás felírni.

1.28. Definíció. A $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált terek esetén a

$$\|\cdot\| : \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|'$$

leképezést *operátornormának* nevezzük.

1.29. Definíció. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$A : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{K}^{\mathtt{m}} \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto A(x_1, \ldots, x_k)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *k-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $(x_i)_{i=1,\ldots,k}, (y_i)_{i=1,\ldots,k} \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ vektorrendszere, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre és minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexre

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \lambda A(x_1, \ldots, x_k) + \mu A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

teljesül.

A k-lineáris $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}^k \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \mathbb{K}^{\mathtt{m}} \right)$ vagy a $\mathrm{Lin}^k \left((\mathbb{K}^{\mathtt{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathtt{m}} \right)$ jelölést használjuk.

1.30. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy az $A : (\mathbb{K}^{\mathtt{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ függvény *szimmetrikus leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ permutációra és minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ elemre

$$A(x_1, \ldots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

teljesül. A $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin}_{\mathrm{s}}^k((\mathbb{K}^{\mathtt{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathtt{m}})$ jelöli a továbbiakban.

1.31. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k \left((\mathbb{K}^{\mathtt{n}})^k, \mathbb{R} \right)$.

- Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) > 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) < 0$.
- Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ melyre $A(x, \ldots, x) > 0$ és $A(y, \ldots, y) < 0$.

1.32. Definíció. Egy $f : \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ függvény *kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[\, \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f : \quad \Big(d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

1.33. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$. Ekkor az A *halmaztól való távolság függvénye*

$$\mathrm{dist}_A : \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z, x).$$

1.34. Definíció. Az $A, B \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ *halmazok távolsága* a $\|\cdot\|$ norma szerint

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf \{ \|x - y\| \mid x \in A,\ y \in B \}.$$

1.35. Definíció. A $K \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ halmaz *konvex*, ha minden $x, y \in K$ pontra és $t \in [0, 1]$ paraméterre $(1 - t)x + ty \in K$ teljesül.

2. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

2.1. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, $A \subseteq M$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t) \ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha létezik olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \to \ \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens* ha minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

2.2. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.

- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t) \right)$$

  képlettel definiáljuk.
- A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \ .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a M halmazon pontonként abszolút konvergens.

2.3. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz és $f : M \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az *f függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ korlátos halmaz. Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, akkor az $M \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ folytonos korlátos függvények halmazát $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ jelöli.

2.4. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén a

$$\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$$

halmazt *szakasznak* nevezzük. Az $\mathfrak{n} > 1$ esetben $[a, b]$ fogja jelölni a fenti halmazt, az $\mathfrak{n} = 1$ esetben, pedig $\lfloor a, b \rfloor$.

2.5. Definíció. (*Hatványsorok.*)

- Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

  A P_a függvényt *a együtthatójú 0 középpontú hatványsornak* nevezzük.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

  Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

2.6. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

3. Differenciálszámítás véges dimenzióban

3.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right\}$$

  függvényt.
- Az *f differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
- Az *f folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ jelöli.

3.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$. Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\to 0}} \frac{f(a+te)-f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az f *függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

3.3. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $a = (a_1, \dots, a_k) \in \operatorname{Dom} f$, valamint $i \in \{1, \dots, k\}$ tetszőleges index.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény parciálisan deriválható a i-edik változója szerint az a pontban*, ha az

  $$f \circ \mathrm{in}_{a,i} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_k)$$

  függvény differenciálható az a_i pontban és ekkor a

  $$(\partial_i f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i)$$

  jelölést használjuk.
- Az f függvény *i-edik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a

  $$\partial_i f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \circ \mathrm{in}_{a,i} \text{ differenciálható az } a_i \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i) \end{array} \right\}$$

  függvényt.
- Az *f függvény parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha $\operatorname{Dom} \partial_i f = \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény parciálisan folytonosan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint és $\partial_i f$ folytonos.

3.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ lineáris leképezés mátrixát az *f függvény a pontbeli Jacobi-mátrixának* nevezzük. Az Jacobi-mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}$$

Az $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ esetben ezen mátrix determinánsát nevezzük *Jacobi-determinánsnak*.

3.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban, akkor a $((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a)) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektort az *f függvény a pontbeli gradiensének* nevezzük és a $(\operatorname{grad} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény gradiensének* nevezzük a

  $$\operatorname{grad} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \qquad a \mapsto ((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a))$$

  függvényt.

Bevezetjük a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{grad} f$ jelölést, ahol a ∇ szimbólumot *nabla-operátornak* nevezzük.

3.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban, akkor a $\operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$ számot az *f függvény a pontbeli divergenciájának* nevezzük és a $(\operatorname{div} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény divergenciájának* nevezzük a

  $$\operatorname{div} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$$

  függvényt.

A divergenciára használjuk még a $\nabla f \triangleq \operatorname{div} f$ jelölést.

3.7. Definíció. Minden $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ függvényhez bevezetjük a

$$\Delta f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\operatorname{grad} f)) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto (\operatorname{div}\operatorname{grad} f)(a)$$

jelölést és a Δ szimbólumot *Laplace-operátornak* nevezzük. Tehát formálisan $\Delta = \nabla^2$.

3.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^3$ pontban, akkor a

$$((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \in \mathbb{R}^3$$

  vektort az *f függvény a pontbeli rotációjának* nevezzük és a $(\operatorname{rot} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény rotációjának* nevezzük a

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f : &\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^3 \\ &a \mapsto ((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \end{aligned}$$

  függvényt.

A rotációra használjuk még a $\nabla \times f \triangleq \operatorname{rot} f$ jelölést.

3.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ függvény és $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Az *f függvény k-szor differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^{\mathrm{n}})^{k-1}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}}))$, ennek a kompozícióját a

$$\begin{aligned} \rho_{k-1} : \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^{\mathrm{n}})^{k-1}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})) &\to \operatorname{Lin}^{k}((\mathbb{R}^{\mathrm{n}})^{k}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})) \\ A &\mapsto \Big((x_1, \ldots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_n)\Big) \end{aligned}$$

  izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$. Az f függvény *k-adik deriváltjának* nevezzük a

$$\mathrm{D}^{(k)} f : \operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f) \to \operatorname{Lin}^{k}((\mathbb{R}^{\mathrm{n}})^{k}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}}) \qquad a \mapsto \rho_{k-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a)$$

  függvényt.
- Az *f függvény k-szor differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom}\mathrm{D}^{(k)} f$.
- Az *f függvény k-szor folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ értékű, k-szor folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^k(A, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$ jelöli.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható. Az $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$ jelöli.

3.10. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^{(k)} f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli k-ad fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{k,a} : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x) \mapsto T^f_{k,a}(x) \triangleq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!}((\mathrm{D}^{(l)} f)(a))(x - a)^{[l]}$$

polinomot, amit az

$$T^f_{k,a}(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{\mathrm{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} f)(a))\,(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_l} - a_{i_l}).$$

alakban is felírhatunk. Ha f végetelenszer differenciálható az $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R} \qquad T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x - a)^{[k]}$$

hatványsort.

3.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az f *függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
– Az f *függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
– Az f *függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
– Az f *függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
– Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
– Az f *függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

3.12. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Ha az f függvény kétszer differenciálható az a pontban, $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(2)}f)(a)$ indefinit leképezés, akkor azt mondjuk, hogy *a nyeregpontja az f függvénynek.*

3.13. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ konvex halmaz.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

teljesül.
– Azt mondjuk, hogy az *f függvény szigorúan konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in \,]0, 1[$ esetén

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

– Az *f függvény konkáv az A halmazon*, ha $-f$ konvex az A halmazon.
– Az *f függvény szigorún konkáv az A halmazon*, ha $-f$ szigorúan konvex az A halmazon.
– Az *f függvény (szigorúan) konvex/konkáv*, ha f (szigorúan) konvex/konkáv a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

4. Fourier-sorok

4.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

- $\forall x \in V : \ \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V : \ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y, z \in V : \ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$;
- $\forall x, y \in V : \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

4.2. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in V$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer

– *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ teljesül;
– *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ teljesül;
– *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
– *teljes rendszer*, ha

$$\forall x \in V \Big((\forall i \in I : \langle e_i, x \rangle = 0) \to x = 0 \Big)$$

teljesül.

4.3. Definíció. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények

$$\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \triangleq \left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0,\dots,n\} : a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

részhalmazát *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.

4.4. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

számokat. Az *f függvény $x \in \mathbb{R}$ pontbeli Fourier-sorának* nevezzük a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor *$n-$edik részletösszeg-függvényének* nevezzük az

$$S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

függvényt.