Kalkulus 2

Andai Attila*

2018. április 29.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

1. Véges dimenziós terek topológiája **1**
1.1. Skaláris szorzás és norma 1
1.2. Topológiai alapfogalmak 3
1.3. Sorozatok 6
1.4. Cauchy-sorozatok 9
1.5. Kompakt halmazok 10
1.6. Heine–Borel-tétel 11
1.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal 12
1.8. Függvények határértéke 13
1.9. Függvények folytonossága 16
1.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények 19
1.11. Egyenletesen folytonos függvények 20
1.12. Normák ekvivalenciája 21
1.13. Normák ekvivalenciájának következményei 23
1.14. Sorok 26
1.15. Lineáris leképezések 27
1.16. Multilineáris leképezések 31
1.17. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel 35
1.18. Konvex halmazok szétválasztása 36
1.19. Az algebra alaptétele 39

2. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban **43**
2.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia 43
2.2. A korlátos folytonos függvények tere 45
2.3. Függvénysorozat és függvénysor deriválása és integrálása 48
2.4. Hatványsorok 51
2.5. Abel-tétel 53
2.6. Approximáció polinomokkal 55

3. Differenciálszámítás véges dimenzióban **59**
3.1. Differenciálhatóság 59
3.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai 62
3.3. Iránymenti derivált 64
3.4. Néhány speciális függvény deriváltja 65
3.5. Vektor-vektor függvény deriváltja 67
3.6. Gradiens, divergencia és rotáció 68
3.7. Folytonosan differenciálható függvények 70
3.8. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága 72
3.9. Inverzfüggvény tétel 75
3.10. Implicitfüggvény tétel 79
3.11. Többszörös deriváltak 80
3.12. Taylor-sorfejtés 83
3.13. Lokális szélsőérték jellemzése 85
3.14. Feltételes szélsőérték 88
3.15. Konvexitás differenciális jellemzése 89

4. Fourier-sorok **93**
4.1. Trigonometrikus polinomok 93
4.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer 95
4.3. Függvény Fourier-sora 99

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\stackrel{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \stackrel{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Véges dimenziós terek topológiája

Jelölés. A jelen fejezetben a véges dimenziós euklidészi tér elemi tulajdonságait tekintjük át. A fejezetben végig feltesszük az $\mathfrak{n}$ és az $\mathfrak{m}$ szimbólumról, hogy szigorúan pozitív természetes számot jelölnek. Ha nem teszünk rá kikötést, akkor $\mathfrak{n}$ és $\mathfrak{m}$ tetszőleges eleme az $\mathbb{N}^+$ halmaznak. Ugyanezekkel a feltételezésekkel élünk, ha $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k$ szimbólumokra vonatkozóan.

Jelölés. A fejezet elején emlékeztetünk a projekció függvényre, amit a fejezetben többször fogunk használni. A projekció függvény halmazok Descartes-szorzatán értelmezett az alábbi módon. Ha $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszer és $j \in I$, akkor

$$\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j \qquad x \mapsto x(j).$$

Speciálisan a $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i.$$

Az egyszerűség kedvéért $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ és $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén használjuk az $x_i = \mathrm{pr}_i(x)$ jelölést. Ezt a jelölést függvényekre is alkalmazzuk. Tehát ha valamely T halmaz esetén $f : T \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ függvény és $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, akkor $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$, azaz

$$f_i : T \to \mathbb{K} \qquad t \mapsto f(t)_i.$$

Jelölés. A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektortérben a továbbiakban e_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) fogja jelölni azt a vektort, melynek a k-adik komponense 1, a többi 0. Az $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ térben nyilván bázis a $(e_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ vektorrendszer.

1.1. Skaláris szorzás és norma

1.1. Definíció. A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren az alábbi műveleteket értelmezzük.

$$\begin{array}{rl} + : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \times \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n} & ((x_1, \ldots, x_\mathfrak{n}), (y_1, \ldots, y_\mathfrak{n})) \mapsto (x_1 + y_1, \ldots, x_\mathfrak{n} + y_\mathfrak{n}) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n} & (\lambda, (x_1, \ldots, x_\mathfrak{n})) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_\mathfrak{n}) \end{array}$$

1.2. Tétel. *A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ tér a fenti műveletekkel vektortér.*

Bizonyítás. A vektortér tulajdonságai nyilvánvaló módon teljesülnek a fenti műveletekre.

1.3. Definíció. A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \times \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \overline{x_k} y_k$$

műveletet *skaláris szorzásnak* nevezzük.

1.4. Tétel. *A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren a skaláris szorzásra az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} : \ \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$
2. $\forall x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} : \ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} : \ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
4. $\forall x, y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} \forall\lambda \in \mathbb{K} : \ \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$
5. $\forall x, y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} : \ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

Bizonyítás. A definíció nyilvánvaló következménye.

1.5. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden $x, y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \leq \langle z, z\rangle = \langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - \bar{t}\,\langle y, x\rangle - t\,\langle x, y\rangle + |t|^2\,\langle y, y\rangle\,.$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$ értéket

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle + \frac{\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle = \\ &= \frac{1}{\langle y, y\rangle}\left(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2\right) \end{aligned}$$

adódik.

1.6. Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ *vektorok által bezárt szög*

$$\alpha = \arccos\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y, y\rangle}}.$$

1.7. Definíció. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren értelmezett

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} :\ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}},\ \forall\lambda \in \mathbb{K} :\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} :\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér*, ha $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren.

1.8. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának vagy sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

Bizonyítás. Egyedül a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség nem adódik rögtön a definícióból. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges. Adott $p \in [1, \infty[$ esetén

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

a Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Mivel az x, y vektor minden $k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ komponensére $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ teljesül, ezért

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max\{|x_k + y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} \leq \max\{|x_k| + |y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} \leq \\ &\leq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} + \max\{|y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\,. \end{aligned}$$

1.9. Tétel. *A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ teljesül.*

Bizonyítás. A definíciók alapján nyilvánvaló.

1.10. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\langle x, y\rangle = \|x\|_2\,\|y\|_2\cos\alpha$$

teljesül, ahol α a vektorok által bezárt szög.

Bizonyítás. A vektorok által bezárt szög definíciója és a fenti tétel k alapján nyilvánvaló.

1.11. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Ekkor minden* $x, y \in \mathbb{K}^n$ *esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges. A norma tulajdonsága alapján

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \to \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\,,$$

az x és y szerepét felcserélve és kihasználva, hogy $\|x - y\| = \|y - x\|$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

adódik. Vagyis

$$\pm\,(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|\,,$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

1.2. Topológiai alapfogalmak

1.12. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in \mathbb{K}^n$ pontra a

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K}^n |\ \|x - y\| < r\}$$

halmazt az x *pont körüli* r *sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, a normát nem írjuk ki, tehát csak a $B_r(x)$ szimbólumot fogjuk használni.

1.13. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $x \in \mathbb{K}^n$ *és* $r \in \mathbb{R}^+$*. Ekkor minden* $y \in B_r(x)$ *pontra és* $\rho \in]0, r - \|x - y\|[$ *számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathbb{K}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$, $y \in B_r(x)$ és $\rho \in]0, r - \|x - y\|[$. Ha $z \in B_\rho(y)$, akkor $\|y - z\| < \rho$, amiből

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \|x - y\| + \rho < r$$

következik, azaz $z \in B_r(x)$. Tehát $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$.

1.14. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Ekkor a*

$$d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezésre az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n :\ d(x, y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n :\ d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n :\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Bizonyítás. A norma definíciója alapján mindegyik tulajdonság nyilvánvaló.

Jelölés. Adott $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in \mathbb{K}^n$ pontok esetén a továbbiakban a $d(x, y) = \|x - y\|$ jelölést használjuk.

1.15. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.

– Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
– Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *zárt*, ha $\mathbb{K}^n \setminus X$ nyílt.

– Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}^n$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

1.16. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció alapján nyilvánvaló. A második állításhoz vegyük a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér $A_1, \dots, A_n$ korlátos részhalmazait, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1,\dots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \dots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén legyen $R_i = r_i + \|x_i - x_1\|$. Ekkor minden i számra az 1.13 tétel miatt $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \dots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

1.17. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x \in \mathbb{K}^n$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R \in]0, r - \|x - y\|[$. Ekkor az 1.13 tétel miatt $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül.

1.18. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Az üres halmaz és $\mathbb{K}^n$ nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges véges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i = 1, \dots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min\{r_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

1.19. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Az üres halmaz és $\mathbb{K}^n$ zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ zárt halmazok tetszőleges véges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{K}^n \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$\mathbb{K}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{K}^n \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.
3. Legyen $(Z_i)_{i \in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{K}^n \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$\mathbb{K}^n \setminus \bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{K}^n \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcap_{i\in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i\in I} Z_i$ halmaz zárt.

1.20. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $Z, U \subseteq \mathbb{K}^n$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben legyen $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz és $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (\mathbb{K}^n \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (\mathbb{K}^n \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

1.21. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy x

- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge\ B_r(x) \cap (\mathbb{K}^n \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

1.22. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

1.23. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K}^n |\ \exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K}^n |\ \forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

1.24. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz esetén*

1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in \mathbb{K}^n \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq \mathbb{K}^n \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - \|y - z\| > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

1.25. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz esetén*
1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

1.26. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz és legyen $x \in \mathbb{K}^n$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

1.27. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$. Ekkor*

$$\operatorname{Int} X = \mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus X},$$
$$\overline{X} = \mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X).$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül. Vagyis $(\mathbb{K}^n \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $x \notin \overline{\mathbb{K}^n \setminus X}$ következik. Fordítva, ha $x \notin \overline{\mathbb{K}^n \setminus X}$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $(\mathbb{K}^n \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $B_r(x) \subseteq X$ következik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. A második egyenlőség következik az elsőből, hiszen

$$\mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X) = \mathbb{K}^n \setminus \left(\mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus (\mathbb{K}^n \setminus X)}\right) = \overline{\mathbb{K}^n \setminus (\mathbb{K}^n \setminus X)} = \overline{X}.$$

1.28. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X, Y \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = \mathbb{K}^n$.

1.3. Sorozatok

1.29. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{K}^n$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

1.30. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatnak legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ a határértéke. Tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $d(a_n, x) < \frac{d(x,y)}{2}$ és $d(a_n, y) < \frac{d(x,y)}{2}$. Amiből a

$$d(x, y) \leq d(x, a_n) + d(a_n, y) < d(x, y)$$

ellentmondás adódik.

1.31. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

1.32. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

1.33. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, ezért a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

1.34. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $\left|a_{\sigma(n)} - \lim a\right| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

1.35. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $A \subseteq \mathbb{K}^n$ *és* $x \in \mathbb{K}^n$*.*
1. *Az* A *halmaznak* x *pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan* $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ *sorozat, melyre* $\lim a = x$*.*
2. *Az* A *halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens* $a : \mathbb{N} \to A$ *sorozatra* $\lim a \in A$*.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$.
1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\} \right) \cap A \neq \emptyset.$$

A kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\} \right) \cap A \neq \emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, x) < \frac{1}{n+1}$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges

paraméter. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in \left(B_{\frac{1}{r}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Mivel α eleme a nyílt $\mathbb{K}^n \setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha) \subseteq (\mathbb{K}^n \setminus A)$, amiből $B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a_n \in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1} \in B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^n$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárt definíciója alapján α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

1.36. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat.*

1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A ca sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.*
3. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.*
4. *Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat az $A = \lim a$, a $B = \lim b$ és a $\Lambda = \lim \lambda$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.
1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n > N_b$ számra $\|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|(a_n + b_n) - (A + B)\| \le \|a_n - A\| + \|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $c = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ekkor minden $n > N_a$ számra

$$\|ca_n - cA\| = |c| \cdot \|a_n - A\| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

3. Mivel a λ sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\lambda_n| < K$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ és legyen $N_\lambda \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_\lambda$ esetén $|\lambda_n - \Lambda| < \frac{\varepsilon}{2\|A\|}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\begin{aligned}\|\lambda_n a_n - \Lambda A\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda_n A + \lambda_n A - \Lambda A\| \le |\lambda_n| \cdot \|a_n - A\| + \|A\| \cdot |\lambda_n - \Lambda| < \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|A\|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ha $A = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$\|\lambda_n a_n - 0\| \le K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \varepsilon$, akkor minden $n > N_a$ számra

$$|\|a_n\| - \|A\|| \le \|a_n - A\| < \varepsilon.$$

1.37. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_p)$ térben, ha minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén az $a_i = \mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ indexre*

$$\mathrm{pr}_i(\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat.
Ha az a sorozat konvergens, akkor legyen $x = \lim a$, $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d_p(a_n, x) < \varepsilon$. Ekkor $|\mathrm{pr}_i(a_n) - \mathrm{pr}_i(x)| < \varepsilon$, vagyis $\lim(\mathrm{pr}_i \circ a) = \mathrm{pr}_i(\lim a)$.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (\lim(\mathrm{pr}_1 \circ a), \dots, \lim(\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}} \circ a)) \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i < n$ természetes számra $|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i| < \dfrac{\varepsilon}{\mathfrak{n}}$.
Legyen $N = \max\{N_i \mid i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}\}$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra a $p \neq \infty$ esetben

$$d_p(a_n, x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i|^p} < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}}\right)^p} = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} 1} = \varepsilon \frac{\sqrt[p]{\mathfrak{n}}}{\mathfrak{n}} \leq \varepsilon,$$

a $p = \infty$ esetben pedig

$$d_\infty(a_n, x) = \max\{|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i| \mid i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}\} < \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} \leq \varepsilon$$

teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az a sorozat konvergens.

1.4. Cauchy-sorozatok

1.38. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \ \big((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon\big).$$

1.39. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < 1$ teljesül, vagyis minden $N < n$ természetes szám esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\mathrm{Ran}\, a$ véges sok korlátos halmaz uniója, ezért korlátos.

1.40. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ konvergens sorozat, melynek határértéke $A \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, A) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $N < n, m$ természetes szám esetén

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, A) + d(a_m, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

1.41. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_1 < n, m$ esetén $d(a_n, a_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $d(a_{\sigma(n)}, A) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$ és $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d(a_n, A) \leq d(a_n, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

1.42. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy a $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér *teljes*, ha $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ teljes halmaz.

1.43. Tétel. *A $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes, továbbá minden $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ zárt halmaz teljes.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ Cauchy-sorozat a $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Mivel minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $n, m \in \mathbb{N}$ index esetén

$$|\mathrm{pr}_i(a_n) - \mathrm{pr}_i(a_m)| \leq \|a_n - a_m\|_\infty ,$$

ezért $\mathrm{pr}_i \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat a $\mathbb{K}$ számtestben vagyis konvergens. Amiből az 1.37 tétel alapján adódik, hogy az a sorozat konvergens.
Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ zárt halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens a $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ térben, azonban zárt halmazban haladó konvergens sorozat határértéke is a halmazban van, ezért A teljes.

1.44. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

1.45. Tétel. *A $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér Banach-tér.*

1.5. Kompakt halmazok

1.46. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér.

- Az $X \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ térnek.

1.47. Tétel. *A $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

Bizonyítás. A kompaktság definíciójának közvetlen következménye.

1.48. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ kompakt halmaz.*

1. *Ekkor X korlátos és zárt.*
2. *Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ kompakt halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy X korlátos. Legyen $p \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ tetszőleges pont. Mivel $X \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_n(p)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $X \subseteq \bigcup_{n\in I} B_n(p)$. Ekkor az $r = \max\{I\}$ számra $X \subseteq B_r(p)$ teljesül.
Most igazoljuk, hogy X zárt. Ehhez legyen $p \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} \setminus X$ tetszőleges pont. Minden $x \in X$ pont esetén ha $r(x) = \dfrac{d(x,p)}{2}$, akkor $B_{r(x)}(x) \cap B_{r(x)}(p) = \emptyset$. Mivel

$$X \subseteq \bigcup_{x\in X} B_{r(x)}(x)$$

az X kompakt halmaz nyílt fedése, ezért létezik olyan $H \subseteq X$ véges halmaz, melyre

$$X \subseteq \bigcup_{x\in H} B_{r(x)}(x)$$

teljesül. Legyen $r = \min\{r(x) |\ x \in H\}$. Ekkor minden $x \in H$ esetén $B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) = \emptyset$, vagyis

$$X \cap B_r(p) \subseteq \left(\bigcup_{x\in H} B_{r(x)}(x)\right) \cap B_r(p) = \bigcup_{x\in H} \left(B_{r(x)}(x) \cap B_r(p)\right) = \emptyset.$$

Ez azt mutatja, hogy $B_r(p) \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus X$. Tehát $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus X$ halmaz minden pontja belső pont, ezért $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus X$ nyílt halmaz, vagyis X zárt.
2. Legyen $Y \subseteq X$ zárt halmaz és legyen $(U_i)_{i\in I}$ az Y halmaz nyílt fedése és legyen $V = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus Y$. Ekkor $V, (U_i)_{i\in I}$ az X halmaz nyílt fedése ($X \subseteq V \cup \bigcup_{i\in I} U_i$), ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, melyre $X \subseteq V \cup \bigcup_{i\in I'} U_i$. A V halmaz definíciójából adódik, hogy ekkor $Y \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i$ is teljesül, vagyis az Y halmaz kompakt. Ha $Y \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor az első pont alapján zárt.

1.49. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $(K_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor*
$$\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $(K_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül, valamint rögzítsünk egy $i_0 \in I$ indexet. Minden $i \in I$ esetén legyen $U_i = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0})$, mely nyílt halmaz. A bizonyítandó állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$. Ekkor
$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I} (K_i \cap K_{i_0})\right) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}},$$
vagyis $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Mivel K_{i_0} kompakt, ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i$. Ebből
$$K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i = \bigcup_{i\in I'} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})\right)$$
adódik. A feltevés miatt véges sok K_i kompakt halmaz metszete sem üres, tehát létezik $j \in I$, melyre $K_j \subseteq \bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})$. Erre a halmazra a fenti tartalmazás alapján
$$K_j \subseteq K_{i_0} \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})\right) \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus K_j$$
következik, ami a nyilvánvaló $K_j \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus K_j$ ellentmondásra vezet.

1.6. Heine–Borel-tétel

1.50. Tétel. *Minden $R \in \mathbb{R}^+$ esetén a $[-R, R]^n$ halmaz kompakt az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben.*

Bizonyítás. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és tekintsük a $T_0 = [-R, R]^n$ halmazt az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben. A T_0 halmaz nyilván korlátos, hiszen az $r_0 = 1 + 2R$ számra teljesül, hogy bármely $x \in T_0$ esetén $T_0 \subseteq B_{r_0}(x)$.
Most megmutatjuk, hogy zárt is. Ehhez legyen $c : \mathbb{N} \to T_0$ tetszőleges konvergens sorozat, a $\lim c = C$ határértékkel. Ekkor az 1.37 tétel alapján minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre $\lim \mathrm{pr}_i(c) = C_i$ teljesül. Mivel a $\mathrm{pr}_i(c)$ konvergens sorozat az $[a_i, b_i]$ zárt halmazban halad, ezért $C_i \in [a_i, b_i]$. Tehát $C \in T_0$.
Indirekt módon tegyük fel, hogy a T_0 halmaz nem kompakt. Ekkor létezik olyan $(U_k)_{k\in K}$ nyílt halmazokból álló lefedése a T_0 halmaznak, melynek nem létezik véges részbefedése. Vegyünk egy ilyen $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszert.
Most definiáljuk a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazokat az alábbi rekurzióval. A T_0 halmazt már fent definiáltuk. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén a T_n halmaz ismert és
i) ha $n \geq 1$, akkor $T_n \subseteq T_{n-1}$;

ii) az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek nem létezik olyan véges részhalmaza, mely lefedi a T_n halmazt;

iii) $T_n = \prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} [\alpha_i, \beta_i]$ alakú, ahol minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{n}\}$ esetén $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Ezek a feltételek teljesülnek a T_0 halmazra. Legyen $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ és definiáljuk a

$$A_j = \prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} \left[\alpha_i + j_i \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}, \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + j_i \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}\right]$$

halmazokat. Ekkor a

$$T_n = \bigcup_{j\in\{0,1\}^{\mathfrak{n}}} A_j$$

felbontás nem más mint a T_n halmaz $2^{\mathfrak{n}}$ darabra való felosztása az élek felezésével. Minden $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ esetén az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszer lefedi az A_j halmazt. Ha minden $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ esetén az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek létezne olyan véges részhalmaza, mely lefedi az A_j halmazt, akkor a T_n halmaznak is létezne véges részbefedése. Tehát létezik legalább egy olyan $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ index, melyre az teljesül, hogy a $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek egyetlen véges részhalmaza sem fedi be az A_j halmazt. Válasszunk egy ilyen j indexet és legyen $T_{n+1} = A_j$. Ekkor az így definiált T_{n+1} halmazra teljesülnek az i)–iii) tulajdonságok.

Tekintsük a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazokat. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $r_n = \frac{r_0}{2^n}$. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in T_n$ esetén $T_n \subseteq B_{r_n}(x)$ teljesül.

Minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{n}\}$ esetén a $(\mathrm{pr}_i(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-féle közösrész-tétel feltételei, ezért

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_i(T_n) \neq \emptyset.$$

Legyen $x_i \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_i(T_n)$ és $x = (x_1,\dots,x_{\mathfrak{n}})$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in T_n$. Mivel $x \in T_0$, ezért létezik olyan $k_0 \in K$ index, melyre $x \in U_{k_0}$ teljesül. Az U_{k_0} halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R(x) \subseteq U_{k_0}$. Mivel $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, ezért létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $r_n < R$ teljesül. Ekkor

$$x \in T_n \subseteq B_{r_n}(x) \subseteq B_R(x) \subseteq U_{k_0}$$

miatt azt kaptuk, hogy a T_n halmaz lefedhető véges sok, nevezetesen egyetlen U_{k_0} nyílt halmazzal, ellentmondva ezzel feltételezésünknek.

1.51. Tétel. *(Heine–Borel-tétel végtelen normára.) Az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Ha $K \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy kompakt részhalmaza, akkor K az 1.48 tétel alapján korlátos és zárt.

Most tegyük fel, hogy $K \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ korlátos és zárt halmaz. A K halmaz korlátossága miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy $K \subseteq B_R(0)$ teljesül. Ekkor a végtelen norma definíciója alapján $K \subseteq \prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} [-R, R]$. Az 1.50 tétel alapján $\prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} [-R, R]$ kompakt halmaz és K ennek zárt részhalmaza, tehát az 1.48 tétel alapján K kompakt.

1.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

1.52. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel euklidészi terekben végtelen normára.) Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$. Az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \to A$ tetszőleges sorozat. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ halmazt. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-tétel feltételei, ezért létezik $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ teljesül. Ebből a lezárt definíciója alapján következik, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge \ a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x. Ekkor $\lim(a \circ \sigma) \in \overline{K}$, vagyis a K halmaz zártsága miatt $\lim(a \circ \sigma) \in K$.
Most legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nem kompakt halmaz. Ekkor az 1.51 tétel alapján A vagy nem zárt vagy nem korlátos.
Ha A nem zárt, akkor létezik egy $x \in \overline{A} \setminus A$ pont és ehhez egy $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Ekkor az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melynek nincsen olyan konvergens részsorozata, mely határértéke az A halmazban lenne.
Ha A nem korlátos, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \not\subseteq B_{n+1}(0)$ teljesül. Legyen $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A \setminus B_{n+1}(0)$ tetszőleges. Ekkor az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \leq \|a_n\|$ teljesül. Tehát a egyetlen részsorozata sem korlátos, ezért konvergens sem lehet. Vagyis az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melynek nincsen konvergens részsorozata.

1.8. Függvények határértéke

1.53. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f *függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}^m$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

1.54. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény, az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in \mathbb{K}^m$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $a \in \mathbb{K}^n$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{K}^m$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$0 < d(x, a) < \delta_A \ \to \ d'(f(x), A) < \frac{d'(A, B)}{2}$$
$$0 < d(x, a) < \delta_B \ \to \ d'(f(x), B) < \frac{d'(A, B)}{2}$$

teljesül, ahol d' jelöli a $\|\cdot\|'$ norma szerinti távolságot, azaz $d'(A, B) = \|A - B\|'$. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre a

$$d'(A, B) \leq d'(A, f(x)) + d'(f(x), B) < d'(A, B)$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

1.55. Definíció. (A lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim_a f$ vagy $\lim_{x\to a} f(x)$ jelöli.

1.56. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és a $z \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in M$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_z f = F \in \mathbb{K}^m$ határérték. Legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \; 0 < d(x, z) < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), F) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), F) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = F$.
Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ két olyan tetszőleges sorozat, mely a z ponthoz konvergál, valamint legyen

$$a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in \mathbb{K}^m$ pont, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim\limits_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}\,,\; d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}\,,\; d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), A) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), A) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

1.57. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}^n$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_a g$ és $\lim\limits_a \varphi$. Akkor az a pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(f+g)$, a $\operatorname{Dom}(\lambda f)$, a $\operatorname{Dom}(\varphi f)$ és a $\operatorname{Dom}(\|f\|)$ halmaznak, valamint*

1. $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$;
2. $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda(\lim\limits_a f)$;
3. $\lim\limits_a (\varphi f) = (\lim\limits_a \varphi)(\lim\limits_a f)$;
4. $\lim\limits_a \|f\| = \left\|\lim\limits_a f\right\|$.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$,, $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}^n$ torlódási pontja a $H = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ halmaznak, legyen $F = \lim\limits_a f$, $G = \lim\limits_a g$, $\Phi = \lim\limits_a \varphi$,

valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
1. Az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta_g \ \Rightarrow \ \|g(x) - G\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|(f + g)(x) - (F + G)\| \leq \|f(x) - F\| + \|g(x) - G\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a (f + g) = F + G$.
2. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ számra, ha $0 < \|x - a\| < \delta$, akkor $\|f(x) - F\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ezek alapján ha $x \in H$, $0 < \|x - a\| < \delta$, akkor

$$\|\lambda f(x) - \lambda F\| = |\lambda| \cdot \|f(x) - F\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda F$.
3. Létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta_1 \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < 1,$$

vagyis, ha $x \in H$ olyan, hogy $\|x - a\| < \delta_1$, akkor

$$\|f(x)\| < \|F\| + 1.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_φ, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < \varepsilon',$$
$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta_\varphi \ \Rightarrow \ |\varphi(x) - \Phi| < \varepsilon'.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_\varphi, \delta_1\}$ számra, ha $x \in H$ olyan, hogy $0 < \|x - a\| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned} \|(\varphi f)(x) - \Phi F\| &= \|\varphi(x) f(x) - \Phi f(x) + \Phi f(x) - \Phi F\| \leq \\ &\leq \|f(x)\| \cdot |\varphi(x) - \Phi| + |\Phi| \cdot \|f(x) - F\| \leq \\ &\leq (\|F\| + 1) \cdot \varepsilon' + |\Phi| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (\|F\| + |\Phi| + 1) < \varepsilon, \end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{\|F\| + |\Phi| + 1}$.
Ezek alapján az ε, $\|F\|$ és $|\Phi|$ számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1 ,δ_f, δ_φ mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
4. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < \varepsilon.$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $0 < \|x - a\| < \delta$ esetén

$$|\|f(x)\| - \|F\|| \leq \|f(x) - F\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a \|f\| = \|F\|$.

1.9. Függvények folytonossága

1.58. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.
– Az f *függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az f *függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Jelölés. Adott $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált terek és $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$ részhalmazok esetén a

$$C(U, V) \triangleq \{ f : U \to V |\ f \text{ folytonos} \}$$

jelölést fogjuk használni.

1.59. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos a z pontban és legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Az f függvény z pontbeli folytonossága miatt tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez, létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f :\ d(x, z) < \delta \ \Rightarrow\ d'(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(z)$.
Tegyük fel, hogy f nem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \operatorname{Dom} f \cap B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Big\{ x \in \operatorname{Dom} f |\ x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \Big\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ x \in \operatorname{Dom} f |\ x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \Big\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

1.60. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{array}{lrcl}
\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : & 0 < d(x, a) < \delta & \to & d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \\
\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : & d(x, a) < \delta & \to & d'(f(x), f(a)) < \varepsilon
\end{array}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

1.61. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathtt{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f, g : \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$, $\varphi : \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. *Tegyük fel,* f, g *és* φ *folytonos az* a *pontban. Ekkor az* a *pontban*

1. $f + g$;
2. λf;
3. φf;
4. $\|f\|$

folytonos.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathtt{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$, $\varphi : \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in H$, ahol $H = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. Tegyük fel, f, g és φ folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
1. Az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\begin{aligned}
&\forall x \in H: \ \|x - a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \\
&\forall x \in H: \ \|x - a\| < \delta_g \ \Rightarrow \ \|g(x) - g(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in H: \ \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|(f+g)(x) - (f+g)(a)\| \le \|f(x) - f(a)\| + \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $f + g$ folytonos az a pontban.
2. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ számra, ha $\|x - a\| < \delta$, akkor $\|f(x) - f(a)\| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ezért ha $\|x - a\| < \delta$, akkor

$$\|\lambda f(x) - \lambda f(a)\| = |\lambda| \cdot \|f(x) - f(a)\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis λf folytonos az a pontban.
3. Létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H: \ \|x - a\| < \delta_1 \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < 1,$$

vagyis, ha $x \in H$ olyan, hogy $\|x - a\| < \delta_1$, akkor

$$\|f(x)\| < \|F\| + 1.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_φ, hogy

$$\begin{aligned}
&\forall x \in H: \ \|x - a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < \varepsilon' \\
&\forall x \in H: \ \|x - a\| < \delta_\varphi \ \Rightarrow \ |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_\varphi, \delta_1\}$ számra, ha $x \in H$ olyan, hogy $0 < \|x - a\| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned}
\|(\varphi f)(x) - \varphi(a) f(a)\| &= \|\varphi(x) f(x) - \varphi(a) f(x) + \varphi(a) f(x) - \varphi(a) f(a)\| \le \\
&\le \|f(x)\| \cdot |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x) - f(a)\| \le \\
&\le (\|f(a)\| + 1) \cdot \varepsilon' + |\varphi(a)| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (\|f(a)\| + |\varphi(a)| + 1) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{\|f(a)\| + |\varphi(a)| + 1}$. Tehát az ε, $\|f(a)\|$ és $|\varphi(a)|$ számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1, δ_f, δ_φ mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
4. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H: \ \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $\|x - a\| < \delta$ esetén

$$\big|\|f(x)\| - \|f(a)\|\big| \le \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\|f\|$ folytonos az a pontban.

1.62. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathrm{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathrm{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $\lambda \in \mathbb{K}$, valamint $f, g : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ és $\varphi : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor $f + g$, λf, φf és $\|f\|$ is folytonos.*

Bizonyítás. Az előző állítást kell alkalmazni minden $a \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ pontra.

1.63. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathrm{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathrm{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint $f : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathrm{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathrm{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ és $K = \operatorname{Dom} f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ folytonos függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_{\delta(z)}(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup\limits_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ zárt halmaz. Ekkor $\mathbb{K}^{\mathrm{m}} \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K}^{\mathrm{m}} \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K}^{\mathrm{m}} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus (U \cap K)) = K \cap (\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{K}^{\mathrm{m}} \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K}^{\mathrm{m}} \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K}^{\mathrm{m}} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus (Z \cap K)) = K \cap (\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus Z)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

1.64. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathrm{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathrm{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint $f : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

1.65. Tétel. *Véges dimenziós normált terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{n_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ normált tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, $f : \mathbb{K}^{n_1} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{n_2}$, $g : \mathbb{K}^{n_2} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{n_3}$ folytonos függvény, és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g: \quad d_2(y, f(a)) < \delta_g \;\Rightarrow\; d_3(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f: \quad d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) = d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

1.66. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

1.67. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér és $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér és $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijekció. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az f^{-1} függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $\overset{-1}{(f^{-1})}(U) \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz, azaz $f(U) \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz, vagyis amikor f nyílt.

1.68. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$. Az $f : U \to V$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy az U *és U részhalmazok homeomorfak*, ha létezik $f : U \to V$ homeomorfizmus.

1.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

1.69. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a folytonosság topologikus jellemzése ((1.63) tétel) alapján minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i,$$

ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(V_i) = \bigcup_{i \in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

1.70. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 1.69 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

1.71. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos injektív függvény és legyen $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz. Ekkor $Z \cap K$ a K kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt. Felhasználva, hogy kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt, valamint az

$$\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(Z) = f(Z) = f(Z \cap K)$$

egyenlőséget az adódik, hogy minden Z zárt halmazra a $\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(Z)$ halmaz zárt, tehát az 1.63 tétel alapján f^{-1} folytonos függvény.

1.72. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $V \subseteq \mathbb{K}^m$ és $f : K \to V$ folytonos bijekció. Ekkor f homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $V \subseteq \mathbb{K}^m$ és $f : K \to V$ folytonos bijekció. Ekkor az 1.69 tétel alapján V kompakt halmaz, és az 1.71 állítás alapján az f^{-1} függvény is folytonos.

1.11. Egyenletesen folytonos függvények

1.73. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d(x, y) < \delta \ \to \ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

1.74. Tétel. *Normált terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(d_1(x, y) < \delta \ \to \ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

1.75. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min \left\{ \frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H \right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $d_1(x,y) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in K$ olyan, melyre $d_1(x,y) < \delta$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d_1(y,p) \leq d_1(y,x) + d_1(x,p) < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \leq \delta(p),$$

vagyis

$$\begin{aligned} d_1(x,p) < \delta(p) \qquad &\to \qquad d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d_1(y,p) < \delta(p) \qquad &\to \qquad d_2(f(y), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ezekből viszont a bizonyítandó

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(p)) + d_2(f(p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

egyenlőtlenség következik.

1.12. Normák ekvivalenciája

1.76. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.*
2. *Minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.*
3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$.*

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren.
$1 \Rightarrow 2$ Minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a $\|\cdot\|'$ norma szerint is nyílt. Mivel x belső pontja a $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint, ezért létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$ teljesül.
$2 \Rightarrow 3$ Az $x = 0$ vektorhoz és az $r = 1$ számhoz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|}(0)$. Vagyis minden $y \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén ha $\|y\|' < R$, akkor $\|y\| < 1$. Legyen $z \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges vektor. Ha $z \neq 0$, akkor $Z = \frac{R}{2\|z\|'} \cdot z$ olyan vektor, melyre $\|Z\|' = \frac{R}{2} < R$, vagyis $\|Z\| = \frac{R}{2\|z\|'} \cdot \|z\| < 1$, amiből $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ adódik. Ha $z = 0$, akkor is teljesül a $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ egyenlőtlenség. Vagyis a $K = \frac{2}{R}$ jelöléssel az adódik, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\| \leq K \|x\|'$.
$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$ teljesül és legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ a $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz. Ha $z \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|}(z) \subseteq X$. Megmutatjuk, hogy $R = \frac{r}{K}$ esetén $B_R^{\|\cdot\|'}(z) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(z)$ teljesül, vagyis z belső pontja az X halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint is. Ha $y \in B_R^{\|\cdot\|'}(z)$, akkor nyilván $\|y - z\|' < R$ és azt kell igazolni, hogy $\|y - z\| < r$ teljesül. Ez rögtön adódik a

$$\|y - z\| \leq K \cdot \|y - z\|' < K \cdot R = K \cdot \frac{r}{K} = r$$

egyenlőtlenségből.

1.77. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ *normák ekvivalensek egymással*, ha ugyanazok a nyílt halmazok a térben, azaz, ha minden $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint és minden $\|\cdot\|'$ szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

1.78. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

1.79. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$ esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek a $\mathbb{K}^n$ téren.*

Bizonyítás. Egyszerűen igazolható, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \cdot \|x\|_\infty$$

teljesül, ezért az előző állítás alapján a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek.

1.80. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbb{K}^n$ vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\mathbb{K}^n$ téren a végtelen norma ekvivalens bármely más normával. Legyen $\|\cdot\|$ tetszőleges norma. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ a $\mathbb{K}^n$ tér kanonikus bázisa, azaz minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén e_i legyen az a vektor, melynek az i-edik komponense 1, minden más komponense 0. Definiáljuk még a $K_1 = \max\{\|e_i\| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot K_1 \leq K_1 n \cdot \|x\|_\infty .$$

Most megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Ehhez igazolni kell, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ elemekhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^n$ vektorra

$$\|x - y\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$$

teljesül. A $\delta = \dfrac{\varepsilon}{nK_1}$ választás jó lesz, ugyanis ebben az esetben ha $\|x - y\|_\infty < \delta$, akkor

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq K_1 n \|x - y\|_\infty < \varepsilon.$$

Most tekintsük az $S = \{x \in \mathbb{K}^n | \, \|x\|_\infty = 1\}$ halmazt. Mivel a $\|\cdot\|_\infty$ függvény nyilván folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint és $S = \overset{-1}{\|\cdot\|_\infty}(\{1\})$, ezért S egy zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe, tehát zárt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Továbbá S nyilván korlátos, ezért az 1.51 tétel alapján S kompakt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Mivel $\|\cdot\|$ folytonos függvény, ezért a Weierstrass-tétel miatt léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $x \in S$ vektorra

$$\alpha \leq \|x\| \leq \beta$$

teljesül. Ha $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor, akkor $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, ezért $\alpha \leq \left\| \dfrac{x}{\|x\|_\infty} \right\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$. Vagyis $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\|_\infty \leq \dfrac{1}{\alpha} \cdot \|x\|$ teljesül.
Mivel a normák ekvivalenciája tranzitív, ezért megmutattuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren bármely két norma ekvivalens.

1.13. Normák ekvivalenciájának következményei

1.81. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyíltsága, zártsága, korlátossága és kompaktsága független attól, hogy a $\mathbb{K}^n$ tér milyen normával van ellátva.*

Bizonyítás. Az 1.80 tétel alapján halmazok nyíltság független a norma megválasztásától. Tehát minden norma esetén ugyanazok a nyílt halmazok. Ezért a nyílt halmazok komplementerei, a zárt halmazok, szintén ugyanazok minden norma esetén. A kompaktság fogalma egyedül a nyíltságot használja a topológiai fogalmak közül, ezért a kompaktság szintén normafüggetlen tulajdonság a $\mathbb{K}^n$ téren. A korlátosság normafüggetlensége pedig a az 1.78 tétel következménye.

1.82. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat és $A \in \mathbb{K}^n$. Az a sorozat határértéke pontosan akkor A, ha minden olyan $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmazra, melyre $A \in \Omega$ teljesül létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $N < n$ esetén $a_n \in \Omega$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat és $A \in \mathbb{K}^n$.
Tegyük fel, hogy minden olyan $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmazra, melyre $A \in \Omega$ teljesül létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $N < n$ esetén $a_n \in \Omega$ teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $\Omega = B_\varepsilon(A)$ halmazra alkalmazva feltevésünket olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet kapunk, hogy minden $N < n$ természetes számra $\|a_n - A\| < \varepsilon$ teljesül. Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül.
Most tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ olyan nyílt halmaz, hogy $A \in \Omega$. Az Ω nyíltsága miatt létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\varepsilon(A) \subseteq \Omega$. A sorozat határértéke miatt, pedig ehhez az ε paraméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra $\|a_n - A\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $a_n \in B_\varepsilon(A) \subseteq \Omega$.

1.83. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat konvergenciája és határértéke független a $\mathbb{K}^n$ téren választott normától.*

Bizonyítás. Az 1.82 tétel szerint a sorozat határértékének definíciója nyílt halmazokkal is megfogalmazható. Mivel az 1.80 tétel szerint bármely két norma szerint ugyanazok a nyílt halmazok, ezért ugyanazok lesznek a kovergens sorozatok is.

1.84. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \mathbb{K}^n$ olyan pont, mely torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak. Az f függvény a pontbeli határértéke független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*

Bizonyítás. Az 1.56 határértékre vonatkozó átviteli elv alapján függvény pontbeli határértéke egyértelműen jellemezhető sorozatok határértékével. Mivel a sorozatok határértéke független a választott normától, ezért a függvény pontbeli határértéke is független a normától.

1.85. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$.*

1. *Az f függvény a pontbeli folytonossága független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*
2. *Az f függvény folytonossága független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*

Bizonyítás. Az 1.59 folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján függvény pontbeli folytonossága egyértelműen jellemezhető sorozatok határértékével. Mivel a sorozatok határértéke független a választott normától, ezért a függvény pontbeli folytonossága is független a normától. Minden pontra alkalmazva ezt a megállapítást adódik, hogy a függvény folytonossága is független a normától.

1.86. Tétel. *(Heine–Borel-tétel.) Az $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Ha $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben, akkor az 1.48 tétel alapján K korlátos és zárt.
Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben. Ekkor az 1.80 tétel alapján K korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben, vagyis az 1.51 tétel alapján K kompakt a

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben. Az 1.80 tétel alapján ekkor K kompakt az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben. Legyen $K \subseteq \mathbb{C}^n$ korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ normált térben. Tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n} \qquad (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$$

valós lineáris leképezést. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|$$

norma az $\mathbb{R}^{2n}$ téren, valamint minden $z \in \mathbb{C}^n$ esetén $\|z\| = \|\varphi(z)\|_*$ teljesül. Továbbá φ homeomorfizmus a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_*)$ tér között. Tehát $\varphi(K)$ korlátos és zárt halmaz az $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_*)$ térben. Ezért az előzőek alapján $\varphi(K)$ kompakt az $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_*)$ térben. Vagyis K kompakt a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ térben.

1.87. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel véges dimenziós normált terekben.) Legyen a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált teret és egy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt. Az 1.80 tétel alapján az A halmaz pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben, amikor kompakt a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Az 1.52 tétel alapján A pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme az A halmaznak. Az 1.80 tétel alapján egy sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, ha konvergens a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ térben.
Tekintsük az $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ normált teret és egy $A \subseteq \mathbb{C}^n$ halmazt. Legyen

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n} \qquad (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n).$$

Ekkor

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|$$

norma az $\mathbb{R}^{2n}$ téren, valamint minden $z \in \mathbb{C}^n$ esetén $\|z\| = \|\varphi(z)\|_*$ teljesül. Mivel φ homeomorfizmus a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_*)$ tér között, ezért A pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ térben, amikor $\varphi(A)$ kompakt a $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_*)$ térben. Az eddigiek alapján tudjuk, hogy $\varphi(A)$ pontosan akkor kompakt ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme a $\varphi(A)$ halmaznak. Mivel φ lineáris izometria, ezért pontosan akkor teljesül, hogy minden $\varphi(A)$ halmazban haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme a $\varphi(A)$ halmaznak, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme az A halmaznak.

1.88. Tétel. *Az $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér Banach-tér, továbbá minden zárt részhalmaza teljes.*

Bizonyítás. Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ Cauchy-sorozat, a $\|\cdot\|$ norma szerint, akkor az 1.80 tétel alapján Cauchy-sorozat, a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint is. Ekkor viszont konvergens az 1.43 tétel szerint. Ugyancsak az 1.80 tétel alapján a sorozat konvergens lesz a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

1.89. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^n$ lineáris altér, akkor L teljes.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^n$ lineáris altér. Ha $u_1, \ldots, u_m \in L$ bázis az L vektortérben, akkor tekintsük a

$$\varphi : L \to \mathbb{K}^m \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$$

bijekciót és a

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|$$

normát. Ha $a : \mathbb{N} \to L$ Cauchy-sorozat, akkor $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauhy-sorozat a $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_*)$ Banach-térben, ezért konvergens is. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(a_n) = x$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \varphi^{-1}(x) \in L$ teljesül.

1.90. Tétel. *Ha* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, *akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. Az 1.80 tétel alapján a pr_i függvény pontosan akkor folytonos bármely norma szerint, ha folytonos a végtelen norma szerint. Ha $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, akkor a $\delta = \varepsilon$ választással élve azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra, ha $\|x - a\|_\infty < \delta$, akkor

$$|\mathrm{pr}_i(x) - \mathrm{pr}_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_\infty < \varepsilon.$$

Vagyis pr_i folytonos minden tetszőlegesen választott pontban, ezért folytonos.

1.91. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *és* $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaznak. Pontosan akkor létezik a* $\lim\limits_a f$ *határérték, ha minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén létezik a* $\lim\limits_a f_i$ *határérték és ekkor minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *indexre*

$$\left(\lim_a f\right)_i = \lim_a f_i$$

teljesül.

Bizonyítás. Az 1.80 tétel alapján az állítás független a normák megválasztásától, tehát elég a végtelen normákat tekinteni. Ezért a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és a $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ téren a $\|\cdot\|_\infty$ normával dolgozunk. Legyen $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.
Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_a f$ határérték és legyen $F = \lim\limits_a f$. Legyen $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontra, ha $0 < \|x - a\|_\infty < \delta$, akkor $\|f(x) - F\|_\infty < \varepsilon$. Az

$$|f_i(x) - F_i| \leq \|f(x) - F\|_\infty$$

egyenlőtlenségből viszont következik már a $F_i = \lim\limits_a f_i$ határérték.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_i$ határérték és legyen

$$F = \left(\lim_a f_i, \ldots, \lim_a f_{\mathfrak{m}}\right).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre, ha $0 < \|x - a\|_\infty < \delta_i$, akkor $|f_i(x) - F_i| < \varepsilon$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{\mathfrak{m}}\}$. Ekkor

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ \|x - a\|_\infty < \delta \quad \to \quad \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon,$$

vagyis $F = \lim\limits_a f$.

1.92. Tétel. *Ha* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *és* $a \in \operatorname{Dom} f$. *Az* f *függvény pontosan akkor folytonos az* a *pontban, ha minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén az* f_i *függvény folytonos az* a *pontban.*

Bizonyítás. Legyen f folytonos az a pontban. Mivel minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén pr_i folytonos, ezért a kompozíciójuk, $\mathrm{pr}_i \circ f$, is folytonos lesz az a pontban.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén az f_i függvény folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre, ha $\|x - a\| < \delta_i$, akkor $\|f(x)_i - f(a)_i\| < \varepsilon$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{\mathfrak{m}}\}$. Ekkor

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ \|x - a\| < \delta \quad \to \quad \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon,$$

vagyis f folytonos az a pontban, ha a $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ téren a végtelen normát tekintjük. Azonban 1.80 tétel alapján ekkor $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ tér bármely normája szerint folytonos lesz f az a pontban.

1.14. Sorok

1.93. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

1.94. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor az $n \mapsto \alpha_n$ és az $n \mapsto \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük A. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

1.95. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ sor konvergens és*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| .$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Mivel a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n > N$ természetes számra $m > n$ mellett

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik $A = \lim \alpha$, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ határérték. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \right\| \le \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| ,$$

amiből az $n \to \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

1.96. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens és legyen $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor az $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ részletösszeg sorozatokra alkalmazva az 1.57 tételt adódik az állítás.

1.15. Lineáris leképezések

1.97. Definíció. A

$$A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto A(x)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *lineáris*, ha minden $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ számra

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

teljesül. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelölést használjuk.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ teret a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortér duálisának* nevezzük, jele $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^*$.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazra a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ jelölést fogjuk használni.

Jelölés. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazt elterjedt jelölése még az $\mathrm{L}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ vagy $\mathrm{L}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K})$.
Megemlítjük még az alábbi gyakran használt jelöléseket.

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K}) &= \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) = \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) = \left\{A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \mid \exists A^{-1}\right\} \\ \mathrm{SL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K}) &= \mathrm{SL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) = \mathrm{SL}(\mathbb{K}^n) = \{A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$

Továbbá, az irodalomban elterjedt konvenciót követve a lineáris leképezés argumentumát nem tesszük zárójelbe, vagyis ha A lineáris leképezés és $x \in \mathrm{Dom}\, A$ akkor $Ax \overset{\triangle}{=} A(x)$.

1.98. Tétel. *Ha $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \dots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény lineáris.

Bizonyítás. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren értelmezett összeadás és skalárral való szorzás definíciója alapján nyilvánvaló.

1.99. Tétel. *Legyen $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ és minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$, $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji} = (Ae_i)_j$. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$, $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$. Ekkor

$$(Ax)_j = \mathrm{pr}_j\, A\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i\, \mathrm{pr}_j(Ae_i) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i (Ae_i)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

1.100. Definíció. Adott $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ leképezés esetén az $(A_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,\mathfrak{m}\}\\ j\in\{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}}$ rendszert nevezzük az *A lineáris leképezés mátrixának*, ahol minden $j \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}$ és $i \in \{1,\ldots,\mathfrak{m}\}$ indexre $A_{ij} = A(e_j)_i$. A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az A leképezés mátrixának az elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}$$

módon szokás felírni.

1.101. Tétel. *(Riesz-féle reprezentációs tétel véges dimenzióban.) Minden $\varphi \in \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$\varphi(y) = \langle x, y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ és tekintsük az

$$x = \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \overline{\varphi(e_k)} e_k$$

vektort. Ekkor minden $y = (y_1, \ldots, y_{\mathfrak{n}}) \in \mathbb{K}$ vektorra

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \varphi(e_k) y_k = \varphi\left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} y_k e_k\right) = \varphi(y)$$

teljesül.
Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan, hogy minden $y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra

$$\varphi(y) = \langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle\,,$$

akkor ebből az $y = x_1 - x_2$ vektorra

$$0 = \langle x_1, y\rangle - \langle x_2, y\rangle = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = \|x_1 - x_2\|^2$$

adódik, vagyis $x_1 = x_2$.

1.102. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*

$$X = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x\| \le 1\right\}$$

jelölés mellett $\sup_{x\in X} \|Ax\|' < \infty$ teljesül;

2. *minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$\|Ax\|' \le \|x\| \cdot \sup_{x\in X} \|Ax\|'\,;$$

3. *A folytonos.*

Bizonyítás. Tekintsük a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_1)$ és a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tereket. Legyen

$$K = \max\left\{\|Ae_1\|', \ldots, \|Ae_{\mathfrak{n}}\|'\right\}.$$

A véges dimenziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással az 1.80 tétel szerint, ezért létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_1 \le C\|x\|$ teljesül. Ekkor minden $x = (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$\|Ax\|' = \left\|A \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} x_k e_k\right\|' = \left\|\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} x_k A e_k\right\|' \le \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \|x_k A e_k\|' \le \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} |x_k| K = \|x\|_1 K \le KC\|x\|\,.$$

Tehát
$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|' \leq \sup_{\|x\|\leq 1} KC\,\|x\| = KC < \infty.$$
Vezessük be a $c = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|'$ jelölést. Minden $x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus \{0\}$ vektor esetén ekkor
$$\|Ax\|' = \|x\| \cdot \left\| A\frac{x}{\|x\|}\right\|' \leq \|x\| \cdot c$$
teljesül. Az $x = 0$ esetben pedig nyilván $\|Ax\|' \leq \|x\| \cdot c$.
Legyen $a \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ tetszőleges paraméter. Ha a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c+1}$ választással élünk és valamely $x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus \{a\}$ pontra $\|x - a\| < \delta$ teljesül, akkor
$$\|Ax - Aa\|' = \|x-a\| \cdot \left\| A\frac{x-a}{\|x-a\|}\right\|' \leq \|x-a\|\, c < \delta \cdot c = \varepsilon \cdot \frac{c}{c+1} < \varepsilon$$
teljesül. Vagyis A folytonos a tetszőlegesen választott a pontban, ezért folytonos.

1.103. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathtt{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \mathbb{K}^{\mathtt{m}})$ tér vektortér, melyen a*
$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \mathbb{K}^{\mathtt{m}}) \to \mathbb{R}_0^{+} \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|'$$
leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathtt{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint legyen $A, B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \mathbb{K}^{\mathtt{m}})$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Az 1.102 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor
$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A+B)x\|' = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax + Bx\|' \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \left(\|Ax\|' + \|Bx\|'\right) \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|' + \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\|' = \|A\| + \|B\|\,; \\ \|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|\lambda Ax\|' = |\lambda| \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|' = |\lambda| \cdot \|A\|\end{aligned}$$
teljesül.
Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \mathbb{K}^{\mathtt{m}})$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ vektorra $\|x\| \leq 1$ esetén $\|Ax\|' = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ vektorra $\|x'\| \leq 1$, ezért $Ax' = \dfrac{1}{\|x\|}Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

1.104. Definíció. A $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathtt{m}}, \|\cdot\|')$ normált terek esetén a
$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \mathbb{K}^{\mathtt{m}}) \to \mathbb{R}_0^{+} \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|'$$
leképezést *operátornormának* nevezzük.

Jelölés. Ha lineáris leképezésnek a normáját vesszük, akkor mindig az operátornormát számoljuk, hacsak másképp nem nyilatkozunk.

1.105. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathtt{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \mathbb{K}^{\mathtt{m}})$ és $x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$. Ekkor*
$$\|Ax\|' \leq \|A\| \cdot \|x\|\,.$$

Bizonyítás. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ vektorra $\|x'\| \leq 1$, ezért $\|Ax'\|' \leq \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

1.106. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ *normált tér minden* $i = 1, 2, 3$ *esetén, legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2})$ *és* $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_3})$. *Ekkor*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ normált tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, valamint $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2})$ és $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_3})$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}$ vektor esetén

$$\|BAx\|_{(3)} \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_{(2)} \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_{(1)},$$

ezért

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|_{(1)} \leq 1} \|BAx\|_{(3)} \leq \sup_{\|x\|_{(1)} \leq 1} \left(\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_{(1)}\right) = \|B\| \cdot \|A\|.$$

1.107. Tétel. *A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *tér Banach-tér.*

Bizonyítás. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ tér véges dimenziós normált tér, ezért az 1.88 tétel alapján teljes.

Jelölés. Ha $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ tér elemeivel dolgozva a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tér identitás leképezését nem írjuk ki, ha ezzel nem okozunk félreértést, illetve az 1 fogja jelölni az alábbi konvenciónak megfelelően.

$$\forall A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \forall \lambda \in \mathbb{K} : \qquad \lambda \pm A \triangleq \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}} \pm A$$

1.108. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Ha az* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ *leképezésre* $\|A\| < 1$ *teljesül, akkor a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ *sor konvergens, az* $1 - A$ *elem invertálható és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol id *jelöli a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *identitásfüggvényt.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ olyan, hogy $\|A\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Ebből $\lim\limits_{n \to \infty} \|A^n\| = 0$ adódik, melynek következménye, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} A^n = 0$. Továbbá a $\sum\limits_n A^n$ sor abszolút konvergens, mert $\sum\limits_n \|A^n\| \leq \sum\limits_n \|A\|^n < \infty$, hiszen $\|A\| < 1$. A minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényes

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^{n} A^k = \left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \cdot (1 - A) = 1 - A^{n+1}$$

képletnél az $n \to \infty$ határátmenetet véve az eddigi megállapítások alapján

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right) \cdot (1 - A) = 1$$

adódik, vagyis $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ az $1 - A$ elem inverze.

1.109. Tétel. *Legyen*

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \triangleq \left\{a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \middle|\ \exists a^{-1}\right\}.$$

(Vagyis $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *jelöli az invertálható lineáris leképezések halmazát.) Ekkor*

1. *minden* $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *elemre* $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*;*
2. *a* $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *halmaz nyílt;*
3. *az* $i : \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$, $i(a) = a^{-1}$ *leképezés folytonos.*

Bizonyítás. 1. Legyen $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ és legyen $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ tetszőleges elem. Ekkor $\|a - b\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$, vagyis $\|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt

$$\|1 - ba^{-1}\| = \|(a - b)a^{-1}\| \leq \|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1,$$

ami a Carl Neumann-féle sorfejtés miatt azt jelenti, hogy az $1 - (1 - ba^{-1})$ elem invertálható és az inverze is folytonos lineáris leképezés, vagyis $ba^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$. Legyen $b' = a^{-1}(ba^{-1})^{-1}$. Ekkor $bb' = 1$ nyilván teljesül, valamint ha a

$$(ba^{-1})^{-1}(ba^{-1}) = 1$$

egyenletet megszorozzuk jobbról az a, balról az a^{-1} mennyiségekkel, akkor $b'b = 1$ adódik. Tehát b' a b inverze, vagyis $b \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$.
2. Mivel a $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ halmaz minden pontja belső pont, ezért nyílt halmaz.
3. Legyen $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ elemre

$$\|a - x\| < \delta \quad \rightarrow \quad x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \ \wedge \ \|a^{-1} - x^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az i leképezés folytonos az a pontban. Legyen $\delta_1 = \dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$ és $x \in B_{\delta_1}(a)$. Ekkor az 1. pont alapján $x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$. Tekintsük a következő átalakításokat.

$$\begin{aligned}
&\big((x^{-1} - a^{-1}) + a^{-1}\big) \cdot ((x - a) + a) = 1 \\
&(x^{-1} - a^{-1})(x - a) + (x^{-1} - a^{-1})a + a^{-1}(x - a) = 0 \\
&(x^{-1} - a^{-1})a = -a^{-1}(x - a) - (x^{-1} - a^{-1})(x - a) \\
&x^{-1} - a^{-1} = -a^{-1}(x - a)a^{-1} - (x^{-1} - a^{-1})(x - a)a^{-1} \\
&\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|^2 \cdot \|x - a\| + \|x^{-1} - a^{-1}\| \cdot \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\| \\
&\|x^{-1} - a^{-1}\| \left(1 - \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\|\right) \leq \|a^{-1}\|^2 \cdot \|x - a\| \\
&\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\|} \cdot \|x - a\| < \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \|x - a\|
\end{aligned}$$

Itt az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\|x - a\| < \delta_1 \quad \rightarrow \quad \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\| < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget. Vagyis ha $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2\|a^{-1}\|^2}$ és $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor minden $x \in B_\delta(a)$ elemre

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül.

1.16. Multilineáris leképezések

1.110. Definíció. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$A : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto A(x_1, \ldots, x_k)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *k-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $(x_i)_{i=1,\ldots,k}, (y_i)_{i=1,\ldots,k} \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorrendszere, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre és minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexre

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \lambda A(x_1, \ldots, x_k) + \mu A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

teljesül.

A k-lineáris $\prod_{i=1}^{k}\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ leképezések halmazára a $\operatorname{Lin}^k\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ vagy a $\operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ jelölést használjuk.

1.111. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, valamint $A \in \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$. Minden $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji_1\dots i_k} = A(e_{i_1} \dots e_{i_k})_j$. Ekkor minden $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektor és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(k)})_j = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k} \tag{1.1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $A \in \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$, $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} A(x^{(1)}, \dots, x^{(k)})_j &= A\left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} x^{(1)}_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} x^{(1)}_{i_1} e_{i_1}\right)_j = \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k} A(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})_j = \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} A_{j,i_1\dots i_k} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k} \end{aligned}$$

teljesül.

1.112. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ multilineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x_i\| \le 1\right\}$$

jelölés mellett $\sup_{x \in X} \|A(x)\|' < \infty$ teljesül;

2. *minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$\|A(x_1, \dots, x_k)\|' \le \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_k\| \cdot \sup_{x \in X} \|A(x)\|';$$

3. *A folytonos.*

Bizonyítás. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren tekintsük a

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} a_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |a_i|$$

normát. A véges dimenziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással az 1.80 tétel szerint, ezért létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_1 \le C\|x\|$ teljesül. Legyen

$$K = \max\left\{\|A(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})\|' \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} : i_j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}\right\}.$$

Legyen minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges vektor, melyet a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tér standard bázisában az

$$x_j = \sum_{i_j=1}^{\mathfrak{n}} a_{j,i_j} e_{i_j}$$

alakban írhatunk fel. Az A multilinearitásának a felhasználásával az

$$\begin{aligned}\|A(x_1,\dots,x_k)\|' &= \left\|A\left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} a_{1,i_1}e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}} a_{2,i_2}e_{i_2},\dots,\sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} a_{k,i_k}e_{i_k}\right)\right\|' \le \\ &\le \sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}}\sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}}\cdots\sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} |a_{1,i_1}|\,|a_{2,i_2}|\dots|a_{k,i_k}|\,\|A(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_k})\|' \le \\ &\le K\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}}\sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}}\cdots\sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} |a_{1,i_1}|\,|a_{2,i_2}|\dots|a_{k,i_k}| = \\ &= K\left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}_1}|a_{1,i_1}|\right)\left(\sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}_2}|a_{2,i_2}|\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}_k}|a_{k,i_k}|\right) = \\ &= K\,\|x_1\|_1\,\|x_2\|_1\cdot\ldots\cdot\|x_k\|_1 \le \\ &\le KC\cdot C\cdot\ldots\cdot C\,\|x_1\|\,\|x_2\|\cdot\ldots\cdot\|x_k\| \le \\ &\le KC^k\prod_{j=1}^{k}\|x_j\|\end{aligned}$$

egyenlőtlenség adódik. Tehát ha

$$X = \prod_{i=1}^{k}\left\{x_i\in\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x_i\|\le 1\right\},$$

akkor $\sup\limits_{x\in X}\|A(x)\|' \le KC^k < \infty$.
Vezessük be a $c = \sup\limits_{x\in X}\|Ax\|'$ jelölést. Minden $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}\setminus\{0\}$ vektor esetén ekkor

$$\|A(x_1,\dots,x_k)\|' = \|x_1\|\cdot\ldots\cdot\|x_k\|\left\|A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|},\dots,\frac{x_k}{\|x_k\|}\right)\right\|' \le \|x_1\|\cdot\ldots\cdot\|x_k\|\,c$$

teljesül.
Az (1.1) képlet alapján minden $j\in\{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ indexre $\mathrm{pr}_j\circ A$ nem más, mint egy olyan véges összeg, melynek tagjai véges sok projekció szorzatának számszorosai. Ezért minden $j\in\{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ indexre $\mathrm{pr}_j\circ A$ folytonos, tehát az 1.92 tétel alapján A folytonos.

1.113. Tétel. *Legyen $k\in\mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}},\|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}},\|\cdot\|')$ normált tér. Ekkor a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k,\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\to\mathbb{R}_0^+ \qquad A\mapsto \sup\left\{\|Ax\|'\in\mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x\in\prod_{i=1}^{k}\{x_i\in\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}|\ \|x_i\|\le 1\}\right\}$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $k\in\mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}},\|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}},\|\cdot\|')$ normált tér, valamint vezessük be az

$$X = \prod_{i=1}^{k}\left\{x_i\in\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x_i\|\le 1\right\}$$

jelölést. Legyen $A,B\in\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k,\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ és $\lambda\in\mathbb{K}$. Az 1.112 tétel alapján $\|A\|,\|B\|<\infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sup_{x\in X}\|(A+B)x\|' = \sup_{x\in X}\|Ax+Bx\|' \le \sup_{x\in X}\left(\|Ax\|'+\|Bx\|'\right) \le \\ &\le \sup_{x\in X}\|Ax\|' + \sup_{x\in X}\|Bx\|' = \|A\|+\|B\|;\\ \|\lambda A\| &= \sup_{x\in X}\|\lambda Ax\|' = |\lambda|\sup_{x\in X}\|Ax\|' = |\lambda|\cdot\|A\|.\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy egy $A \in \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektorrendszerre

$$A(x_1, \ldots, x_k) = \|x_1\| \ldots \|x_k\| \, A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_k}{\|x_k\|}\right) = 0$$

teljesül, vagyis $A = 0$. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

1.114. Tétel. *Ha $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, akkor $\left(\operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right), \|\cdot\|\right)$ Banach-tér.*

Bizonyítás. Mivel $\dim \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right) = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}^k < \infty$, ezért véges dimenziós normált tér, tehát az 1.88 tétel alapján teljes.

1.115. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy az $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ függvény *szimmetrikus leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ permutációra és minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ elemre

$$A(x_1, \ldots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

teljesül. A $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\operatorname{Lin}^k_{\mathrm{s}}((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelöli a továbbiakban.

1.116. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. A*

$$\begin{aligned} \rho : \operatorname{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right) &\to \operatorname{Lin}^{k+1}\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^{k+1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right) \\ A &\mapsto \Big((x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_{k+1})\Big) \end{aligned}$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \operatorname{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér $A, B \in \operatorname{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$, $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, $y \in (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \rho(A+B)(x,y) &= ((A+B)(x))(y) = (A(x)+B(x))(y) = (A(x))(y) + (B(x))(y) = \\ &= \rho(A)(x,y) + \rho(B)(x,y) = (\rho(A)+\rho(B))(x,y) \\ \rho(\lambda A)(x,y) &= ((\lambda A)(x))(y) = (\lambda \cdot A(x))(y) = \\ &= \lambda \cdot (A(x))(y) = \lambda \cdot \rho(A)(x,y) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ és $\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$, tehát ρ lineáris.
Most igazoljuk, hogy ρ injektív. Tegyük fel, hogy $A \in \operatorname{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$ olyan, hogy $\rho(A) = 0$. Legyen $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges. Ekkor minden $y \in (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k$ esetén

$$0 = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y),$$

vagyis $A(x) = 0$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ elemre $A(x) = 0$, ezért $A = 0$.
Mivel ρ lineáris injektív leképezés, ezért a képterének a dimenziója megegyezik az értelmezési tartományának a dimenziójával. Az

$$\dim \operatorname{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right) = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}^{k+1} = \dim \operatorname{Lin}^{k+1}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \times (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right),$$

egyenlőség alapján ρ szürjektív, tehát lineáris bijekció.
Használjuk a továbbiakban az

$$X = \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \mid \ \|x_i\| \le 1\}$$

jelölést. Ha $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathrm{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}\right)\right)$, akkor

$$\|\rho(A)\| = \sup_{\substack{y\in X \\ x\in\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \ \|x\|\le 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \\ \|x\|\le 1}} \sup_{y\in X} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^{\mathrm{n}} \\ \|x\|\le 1}} \|A(x)\| = \|A\|$$

teljesül.

1.117. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{R}\right)$.

- Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ vektorra $A(x,\dots,x) \ge 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ vektorra $A(x,\dots,x) \le 0$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$ vektorra $A(x,\dots,x) > 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$ vektorra $A(x,\dots,x) < 0$.
- Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ melyre $A(x,\dots,x) > 0$ és $A(y,\dots,y) < 0$.

1.118. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{R}\right)$. Ha A leképezés pozitív definit, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ esetén $A(v^{[k]}) \ge K\|v\|^k$; illetve ha A negatív definit, akkor létezik olyan $K' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ esetén $A(v^{[k]}) \le -K'\|v\|^k$.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{R}\right)$ pozitív definit leképezés. Tekintsük az $S = \{v \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid \ \|v\| = 1\}$ halmazt. Az S halmaz korlátos, zárt, tehát az 1.86 tétel alapján kompakt. Vagyis az A folytonos függvény korlátos ezen a kompakt halmazon és felveszi a minimumát is. Az A függvény minimumát jelölje $K \in \mathbb{R}_0^+$, vagyis minden $v \in S$ esetén $K \le A(v^{[n]})$. Ez a K szám szigorúan pozitív, ugyanis a $K = 0$ esetben a folytonos A függvény valamely $v_0 \in S$ pontban felvenné a minimumát, és arra $A(v_0^{[n]}) = 0$ teljesülne, ami ellentmondana A pozitív definitségének.
Megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ esetén $A(x^{[k]}) \ge K\|x\|^k$ teljesül. Ha $x = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Ha $x \ne 0$, akkor $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$, vagyis

$$K \le A\left(\frac{x}{\|x\|}, \dots, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

teljesül, amiből az A operátor multilinearitása miatt

$$A(x,\dots,x) \ge K \cdot \|x\|^k$$

adódik.
Ha A negatív definit, akkor $-A$ pozitív definit, amire alkalmazva az előző eredményt, kapjuk a bizonyítandó állítást ebben az esetben is.

1.17. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel

1.119. Definíció. Egy $f : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ függvény *kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0,1[\, \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f : \quad \Big(d(f(x), f(y)) \le C d(x,y)\Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

1.120. Tétel. *Minden kontrakció folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ kontrakció a $C \in [0,1[$ kontrakciós együtthatóval. Legyen $x \in \operatorname{Dom} f$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ha $y \in B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{Dom} f$, akkor

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x,y) < d(x,y) < \varepsilon,$$

vagyis $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, amiből $f(B_\varepsilon(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ következik. Ez viszont éppen az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti.

1.121. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel euklidészi terekben.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in \Omega$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció a $C \in]0,1[$ kontrakciós együtthatóval és a tetszőleges pont. (Feltehető, hogy $C > 0$ teljesül, hiszen ha C_1 a kontrakciós együtthatója a függvénynek, akkor bármely $C \in [C_1, 1[$ szám is kontrakciós együtthatója.) Vegyük azt az $x : \mathbb{N} \to M$ sorozatot, melyre $x_0 = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = f(x_n)$ teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq Cd(x_{n+1}, x_n)$$

teljesül, ezért teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0).$$

Ennek felhasználásával az adódik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $m > n$ számra

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} C^i d(x_1, x_0) = C^n \frac{1 - C^{m-n}}{1 - C} d(x_1, x_0) < C^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$$

teljesül. Mivel az $n \mapsto C^n \cdot \dfrac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$ sorozat határértéke nulla, ezért x Cauchy-sorozat. Legyen $y = \lim_{n\to\infty} x_n$. Ekkor az f folytonossága alapján

$$f(y) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y,$$

vagyis y fixpontja az f függvénynek.
Tegyük fel, hogy $y_1, y_2 \in \Omega$ az f függvény két különböző fixpontja. Ekkor az

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \leq Cd(y_1, y_2)$$

egyenlőtlenségből a $1 \leq C$ ellentmondás adódik.

1.18. Konvex halmazok szétválasztása

1.122. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Ekkor az *A halmaztól való távolság függvénye*

$$\operatorname{dist}_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z, x).$$

1.123. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén*
$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x,y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos és folytonos;*
3. *$\overline{A} = \{z \in M \mid \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz.
1. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ és $z \in A$ tetszőleges elem. Ekkor

$$\mathrm{dist}_A(x) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

vagyis

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x,y) \leq d(y,z).$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $z \in A$ elemre fennáll, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x,y) \leq \inf_{z\in A} d(y,z) = \mathrm{dist}_A(y),$$

amiből átrendezéssel

$$\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y) \leq d(x,y)$$

adódik. Ebből az x és az y pontok cseréjével

$$\mathrm{dist}_A(y) - \mathrm{dist}_A(x) \leq d(x,y)$$

adódik, vagyis

$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \leq d(x,y).$$

2. A fenti egyenlőtlenségből következik, hogy dist_A egyenletesen folytonos, amiből pedig a folytonossága következik.
3. Mivel a dist_A függvény folytonos, ezért a $B = \{z \in M |\ \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$ halmaz zárt, hiszen a zárt $\{0\}$ halmaz folytonos függvény általi ősképe ($B = \overset{-1}{\mathrm{dist}_A}(\{0\})$), továbbá a dist_A definíciója alapján $A \subseteq B$ nyilván teljesül, ezért $\overline{A} \subseteq B$. Tehát azt kell még megmutatni, hogy $B \subseteq \overline{A}$, vagy ami ezzel ekvivalens $M \setminus \overline{A} \subseteq M \setminus B$. Ennek igazolásához legyen $x \in M \setminus \overline{A}$. Mivel $M \setminus \overline{A}$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq M \setminus \overline{A}$, vagyis $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Tehát minden $z \in A$ esetén $d(x,z) \geq r$, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) = \inf_{z\in A} d(x,z) \geq r,$$

vagyis $\mathrm{dist}_A(x) \neq 0$, ebből pedig $x \notin B$ és $x \in M \setminus B$ következik.

1.124. Definíció. Az $A, B \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmazok távolsága* a $\|\cdot\|$ norma szerint

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf \{\|x-y\| \ |\ x \in A,\ y \in B\}.$$

1.125. Definíció. A $K \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *konvex*, ha minden $x, y \in K$ pontra és $t \in [0,1]$ paraméterre $(1-t)x + ty \in K$ teljesül.

1.126. Tétel. *(Zárt konvex és kompakt konvex halmazok szétválasztása.) Tegyük fel, hogy $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt.*

1. *Létezik olyan $a \in K$ és $b \in Z$, melyre $d(a,b) = \mathrm{dist}(K,Z)$ teljesül.*
2. *Létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált teret. Legyenek $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt. A jelölések egyszerűsítése végett legyen $r = \mathrm{dist}(K,Z)$. Vizsgáljuk az

$$\mathrm{dist}_Z : K \to \mathbb{R} \qquad y \mapsto \mathrm{dist}_Z(y)$$

függvényt. Az 1.123 tétel értelmében ez folytonos függvény, ezért a K kompakt halmazon felveszi minimumát. Tegyük fel, hogy az $a \in K$ pontban veszi fel a minimumát. Ekkor $\mathrm{dist}_Z(a) > 0$, ugyanis ha $\mathrm{dist}_Z(a) = 0$ teljesülne, abból az 1.123 tétel alapján $a \in \overline{Z} = Z$ teljesülne, amiből az $a \in K \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódna.

Igazoljuk, hogy $\mathrm{dist}_Z(a) = r$. Ha $\mathrm{dist}_Z(a) > r$ lenne, akkor minden $y \in K$ esetén $\mathrm{dist}_Z(y) \geq \mathrm{dist}_Z(a)$, vagyis minden $x \in Z$ esetén $d(x,y) \geq \mathrm{dist}_Z(a)$ adódna, ebből pedig az

$$r = \inf \{d(x,y) |\ x \in Z,\ y \in K\} \geq \mathrm{dist}_Z(a) > r$$

ellentmondást kapnánk. A $\mathrm{dist}_Z(a) < r$ egyenlőtlenség pedig $\mathrm{dist}(K,Z)$ definíciójának mondana ellent. Ezért $\mathrm{dist}_Z(a) = r$.
Megmutatjuk, hogy $\overline{B_{r+1}(a)} \cap Z \neq \emptyset$. Ha $\overline{B_{r+1}(a)} \cap Z = \emptyset$ teljesülne, akkor minden $x \in Z$ esetén $d(a,x) \geq r+1$ lenne, amiből $\mathrm{dist}_Z(a) \geq r+1$ adódna. Tekintsük a

$$d(a,\cdot) : \overline{B_{r+1}(a)} \cap Z \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto d(a,x)$$

kompakt halmazon értelmezett folytonos függvényt. Ennek legyen a minimuma a $b \in Z$ pontban.
Megmutatjuk, hogy ekkor $d(a,b) = \mathrm{dist}_Z(a)$ teljesül. A $\mathrm{dist}_Z(a)$ definíciója alapján

$$\mathrm{dist}_Z(a) = \inf \{d(a,x) |\ x \in Z\} \leq d(a,b).$$

Ha $\mathrm{dist}_Z(a) < d(a,b)$ lenne, akkor létezne olyan $b' \in Z$ melyre $\mathrm{dist}_Z(a) < d(a,b') < d(a,b)$ teljesülne. Ekkor $b' \in \overline{B_{r+1}(a)} \cap Z$ olyan pont lenne, ahol a $d(a,\cdot)$ függvény kisebb értéket venne fel, mint a minimumhelyén, a b pontban.
Ezzel igazoltuk, hogy az $a \in K$ és $b \in Z$ pontra $d(a,b) = r = \mathrm{dist}(K,Z)$.
A továbbiakban tekintsük az $\mathbb{R}^n$ teret a $\|\cdot\|_2$ normával és tegyük fel, hogy az előzőekben ezen norma mellett határoztuk meg az a, b pontokat. Legyen $z = a - b$, $c = \frac{1}{2}\left(\|a\|_2^2 - \|b\|_2^2\right)$ és $x \in K \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Tekintsük a

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \|t(x-a) + a - b\|_2^2$$

kvadratikus kifejezést, melyet az

$$\alpha(t) = t^2 \|x-a\|_2^2 + 2t \langle x-a, a-b\rangle + \|a-b\|_2^2$$

alakban is felírhatunk. Ennek a függvénynek a minimumhelye a $t_0 = -\dfrac{\langle x-a, a-b\rangle}{\|x-a\|_2^2}$ pontban van. Ha $0 < t_0$ teljesülne, akkor létezne olyan $t' \in]0,1[$ ahol $\alpha(0) > \alpha(t')$ lenne, vagyis a $p = t'(x-a)+a \in K$ pontra a $d(a,b) > d(p,b)$ teljesülne, ami ellentmonda annak, hogy a két halmaz távolsága éppen $d(a,b)$.
Tehát $t_0 \leq 0$, ami éppen az $\langle x-a, a-b\rangle \geq 0$ egyenlőtlenséget jelenti. Ebből

$$\langle x, a-b\rangle \geq \langle a, a-b\rangle$$
$$\langle x, z\rangle - c \geq \langle a, a-b\rangle - c = \frac{\|a-b\|_2^2}{2} > 0$$

következik. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $x = a$ esetben $\langle a, z\rangle - c = \dfrac{\|a-b\|_2^2}{2} > 0$. Vagyis minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$.
Legyen most $x \in Z \setminus \{b\}$ tetszőleges pont. Tekintsük a

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \|t(x-b) + b - a\|_2^2$$

kvadratikus kifejezést, melyet az

$$\beta(t) = t^2 \|x-b\|_2^2 + 2t \langle x-b, b-a\rangle + \|a-b\|_2^2$$

alakban is felírhatunk. Ennek a függvénynek a minimumhelye a $t_0 = -\dfrac{\langle x-b, b-a\rangle}{\|x-b\|_2^2}$ pontban van. Ha $0 < t_0$ teljesülne, akkor létezne olyan $t' \in]0,1[$ ahol $\beta(0) > \beta(t')$ lenne, vagyis a $p = t'(x-b)+b \in Z$ pontra a $d(a,b) > d(a,p)$ teljesülne, ami ellentmonda annak, hogy a két halmaz távolsága éppen $d(a,b)$. Tehát $t_0 \leq 0$, ami éppen az $\langle x-b, b-a\rangle \geq 0$ egyenlőtlenséget jelenti. Ebből

$$\langle x-b, a-b\rangle \leq 0$$

$$\langle x, z\rangle \leq \langle b, a-b\rangle$$
$$\langle x, z\rangle - c \leq \langle b, a-b\rangle - c = -\frac{\|a-b\|_2^2}{2} < 0$$

következik. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $x = b$ esetben $\langle b, z\rangle - c = -\frac{\|a-b\|_2^2}{2} < 0$. Vagyis minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.

1.127. Tétel. *(Zárt konvex halmaz és pont szétválasztása.) Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $p \in \mathbb{R}^n \setminus Z$ Ekkor létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\langle z, p\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

Bizonyítás. Az 1.126 tételt kell alkalmazni a $K = \{p\}$ kompakt konvex halmazra.

1.128. Tétel. *Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és*

$$H = \{(z, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \forall x \in Z : \ \langle z, x\rangle < c\}.$$

Ekkor

$$Z = \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z, y\rangle < c\}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és

$$H = \{(z, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \forall x \in Z : \ \langle z, x\rangle < c\}.$$

Ha $p \in Z$, akkor minden $(z, c) \in H$ esetén $\langle z, p\rangle < c$, tehát

$$p \in \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z, y\rangle < c\}$$

Ha $p \notin Z$, akkor létezik olyan $(z, c) \in H$, hogy $\langle z, p\rangle > c$, tehát

$$p \notin \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z, y\rangle < c\}.$$

1.19. Az algebra alaptétele

1.129. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre*

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{C} : \ r < |x| \ \to \ C < |f(x)|$$
$$\forall x \in \mathbb{C} : \ f(x) \neq 0 \ \to \ \exists y \in \mathbb{C} : \ |f(y)| < |f(x)|$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre teljesülnek az állítás feltételei. Legyen $\alpha = \inf_{x\in\mathbb{C}} |f(x)|$. Ekkor a $C = \alpha+1$ számhoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{C}$, $r < |x|$ esetén $C < |f(x)|$. A $\mathbb{C}$ normált térben $K = \overline{B_r(0)}$ korlátos és zárt halmaz, ezért kompakt. Az f függvény a K kompakt halmazon felveszi minimumát, vagyis létezik olyan $a \in K$, melyre $f(a) = \alpha$ teljesül. Ha $\alpha = 0$, akkor készen vagyunk a bizonyítással, hiszen létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$. Ha $\alpha > 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|f(y)| < |f(a)|$. Ekkor az $r < |y|$ esetben az

$$1 + \alpha \leq |f(y)| < |f(a)| = \alpha$$

ellentmondást kapjuk. Az $|y| \leq r$ esetén $y \in K$, ami pedig annak mond ellent, hogy a K kompakt halmazon az a pontban minimális az $|f|$ függvény. Tehát az $\alpha > 0$ feltevés esetén ellentmondást kapunk, így $\alpha = 0$.

1.130. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $C \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ esetén $C < |p(z)|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsük a

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

polinomot, ahol $a_n = 1$. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számra

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right|$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| = 0,$$

ezért létezik olyan r_k, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r_k < |z|$ esetén

$$\left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| < \frac{1}{2n}.$$

Legyen $R = \max\{r_0, \ldots, r_{n-1}\}$. Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$, $R < |z|$ számra

$$\left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \geq 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| > 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} = 1 - \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Tehát, ha $z \in \mathbb{C}$ és $R < |z|$, akkor

$$|p(z)| > \frac{|z|^n}{2},$$

ha még $1 < |z|$ is teljesül, akkor

$$|p(z)| > \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{|z|}{2}.$$

Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter esetén

$$r = \max\{R, 1, 2C\}.$$

Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ számra

$$|p(z)| > C$$

teljesül.

Ha $a_n \notin \{0, 1\}$ és adott egy $C \in \mathbb{R}^+$ paraméter, akkor az előzőek alapján a $\dfrac{C}{|a_n|}$ számhoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ számra

$$\left| \frac{p(z)}{|a_n|} \right| > \frac{C}{|a_n|},$$

vagyis $|p(z)| > C$.

1.131. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $x \in \mathbb{C}$ esetén, ha $p(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|p(y)| < |p(x)|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsük a

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

polinomot, ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $p(x) \neq 0$. Alakítsuk át a p polinomot az alábbiak szerint.

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k((z-x)+x)^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j}(z-x)^j x^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j}(z-x)^j x^{k-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n}(z-x)^j \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} x^{k-j}\right)$$

Minden $j \in \{0,\ldots,n\}$ esetén bevezetve a $b_j = \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} x^{k-j}$ jelölést

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k(z-x)^k$$

adódik. Mivel $p(x) \neq 0$, ezért $b_0 \neq 0$, valamint $b_n = a_n \neq 0$. Tekintsük a $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ polinomot. Ha van olyan $y' \in \mathbb{C}$, melyre $|q(y')| < |b_0|$ teljesül, akkor készen vagyunk a bizonyítással, hiszen az $y = y' + x$ számra

$$|p(y)| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k(y')^k\right| = |q(y')| < |b_0| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x)^k\right| = |p(x)|$$

teljesül.
Tehát azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan $y' \in \mathbb{C}$, melyre $|q(y')| < |b_0|$. Ehhez legyen

$$m = \min\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid b_k \neq 0\}.$$

Mivel $b_n = a_n \neq 0$, ezért $1 \leq m \leq n$. Ekkor

$$|q(z)| = \left|b_0 + b_m z^m + \sum_{k=m+1}^{n} b_k z^k\right| = |b_0| \cdot \left|1 + \frac{b_m}{b_0} z^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} z^k\right|.$$

Olyan $y' \in \mathbb{C}$ számot kell találnunk, melyre

$$\left|1 + \frac{b_m}{b_0}(y')^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}(y')^k\right| < 1.$$

Legyen $\omega \in \mathbb{C}$ egy olyan komplex szám, melyre $\omega^m = -\frac{b_0}{b_m}$ teljesül és keressük az y' értékét $t\omega$ alakban, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor olyan $t \in \mathbb{R}$ számot keresünk, melyre

$$\left|1 - t^m + t^m \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}\omega^k t^{k-m}\right| < 1.$$

Mivel $\lim_{t\to 0} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}\omega^k t^{k-m} = 0$, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in \mathbb{R}$, $|t| < r_1$ esetén

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}\omega^k t^{k-m}\right| < \frac{1}{2}.$$

Legyen $t \in]0, \min\{1, r\}[$ tetszőleges. Mivel ekkor $1 - t^m, t^m \in \mathbb{R}^+$, ezért

$$\left|1 - t^m + t^m \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}\omega^k t^{k-m}\right| \leq 1 - t^m + t^m \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}t^m < 1.$$

Tehát például $y' = \frac{\min\{1, r\}}{2}\omega$ olyan, melyre $|q(y')| < |b_0|$ teljesül.

1.132. Tétel. *(Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomnak létezik gyöke.*

Bizonyítás. Minden $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőkú polinom folytonos függvény, valamint az 1.130 és az 1.131 tétel miatt teljesülnek rá az 1.129 tétel feltételei, ezért az 1.129 tétel alapján létezik gyöke.

2. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

2.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

2.1. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, $A \subseteq M$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t) \ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha létezik olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \to \ \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens* ha minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

2.2. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.

- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t) \right)$$

  képlettel definiáljuk.
- A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \ .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a M halmazon pontonként abszolút konvergens.

2.3. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \ (N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ függvényhez.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \|f_n(t) - f(t)\| + \|f(t) - f_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja az egyik irányú következtetést.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \ (N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ tetszőleges paraméter. Ekkor a feltevés miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon$$

teljesül, amiből a $\|\cdot\|$ folytonossága miatt

$$\forall t \in M : \ \lim_{m\to\infty} \|f_n(t) - f_m(t)\| = \left\| f_n(t) - \lim_{m\to\infty} f_m(t) \right\| = \|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$$

adódik.

2.4. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Azt kell megmutatni, hogy az f függvény minden $x \in M$ pontban folytonos. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{3}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t\in M} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel az f_{N+1} függvény folytonos az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^{+}$, hogy minden $t \in B_\delta(x)$ pontra $f_{N+1}(t) \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_{N+1}(x))$ teljesül. Ekkor

$$t \in B_\delta(x) \quad \Rightarrow \quad \|f(t) - f(x)\| \leq \|f(t) - f_{N+1}(t)\| + \|f_{N+1}(t) - f_{N+1}(x)\| + \|f_{N+1}(x) - f(x)\| < \varepsilon,$$

vagyis az f függvény folytonos az x pontban.

2.5. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra definiáljuk a $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ függvényt. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 2.4 tételt adódik az állítás.

2.6. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Legyen továbbá $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
Ekkor a lokálisan egyenletes konvergencia miatt minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x)}(x)$ halmazon. A K halmaznak természetes módon adott a

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{r(x)}(x)$$

nyílt halmazokkal való befedése, amiből a K halmaz kompaktsága miatt az következik, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, \dots, x_n \in K$, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} B_{r(x_k)}(x_k)$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x_k)}(x_k)$ halmazon, ezért létezik olyan $m_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $m_k < l \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{z\in B_{r(x_k)}(x_k)} \|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$$

teljesül. Legyen $N = \max\{m_k |\ k \in \{0, \dots, n\}\}$, valamint legyen $N < l \in \mathbb{N}$ és $z \in K$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $k \in \{0, \dots, n\}$, hogy $z \in B_{r(x_k)}(x_k)$. Továbbá $m_k \leq N < l$ miatt

$$\|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$$

teljesül. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < l \in \mathbb{N}$ számra és $z \in K$ pontra $\|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$ teljesül, ami éppen a K halmazon való egyenletes konvergenciát jelenti.

2.2. A korlátos folytonos függvények tere

2.7. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz és $f : M \to \mathbb{K}^m$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq \mathbb{K}^m$ korlátos halmaz. Ha $M \subseteq \mathbb{K}^n$, akkor az $M \to \mathbb{K}^m$ folytonos korlátos függvények halmazát $C^b(M, \mathbb{K}^m)$ jelöli.

2.8. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^b(M, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t\in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma a $C^b(M, \mathbb{K}^m)$ vektortéren, azaz

1. $\forall f \in C^b(M, \mathbb{K}^m) :\ \|f\|_{\sup} = 0 \ \leftrightarrow\ f = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall f \in C^b(M, \mathbb{K}^m) :\ \|\lambda f\|_{\sup} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\sup}$;
3. $\forall f, g \in C^b(M, \mathbb{K}^m) :\ \|f + g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$.

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{\sup}$ függvény nyilvánvaló módon teljesíti a norma tulajdonságait.

2.9. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben, azaz, ha*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \Big(N < n \;\to\; \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\Big)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{n}})$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{n}})$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \; (N < n \;\to\; \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)\,,$$

vagyis minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} = \sup_{x\in M} \|f_n(x) - f(x)\| \le \varepsilon.$$

Tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{n}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{n}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon,$$

vagyis

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \; \big(N < n \;\to\; \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\big),$$

tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

2.10. Tétel. *Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, akkor $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér, azaz minden olyan $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz, melyre*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \; \big(N < n, m \;\to\; \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon\big),$$

teljesül, létezik olyan $f \in C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$, melyre

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \; \big(N < n \;\to\; \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\big).$$

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat, melyre

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \; \big(N < n, m \;\to\; \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon\big).$$

Ha $x \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\|_{\sup} = \sup_{t\in M} \|f_n(t) - f_m(t)\| \ge \|f_n(x) - f_m(x)\|$$

teljesül. Vagyis minden $x \in M$ pont esetén az $n \mapsto f_n(x)$ sorozat Cauchy-sorozat a $\mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ Banach-térben, ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.
Megmutatjuk, hogy az f függvény korlátos. Mivel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra $\|f_{N+1} - f_n\|_{\sup} < 1$ teljesül. Mivel f_{N+1} korlátos függvény, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in M$ pontra $\|f_{N+1}(x)\| < K$ teljesül. Ezek alapján minden $N < n$ természetes számra és $x \in M$ pontra

$$\|f_{N+1}(x) - f_n(x)\| \le \|f_{N+1} - f_n\|_{\sup} < 1,$$

vagyis
$$\|f_n(x)\| < 1 + \|f_{N+1}(x)\| < 1 + K$$
adódik, ebből pedig $\|f(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| < 1 + K$. Tehát az f függvény korlátos.
A 2.3 tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Mivel az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat elemei folytonos függvények, ezért az egyenletes konvergencia miatt az f függvény is folytonos, vagyis $f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
A 2.9 tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergenciája éppen a $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ térbeli $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ konvergenciát jelenti.

2.11. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens. Ekkor minden $t \in M$ esetén a $\sum_n f_n(t)$ sor abszolút konvergens a $\mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ Banach-térben, ezért konvergens is. Tehát a függvénysor minden pontban konvergens.

2.12. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in M} \|f_n(t)\| < \infty$$
teljesül, akkor a $\sum_n f_n$ függvénysor konvergens és egyenletesen is konvergens.

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó olyan függvénysorozat, melyre
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in M} \|f_n(t)\| < \infty.$$
Ekkor a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, tehát konvergens is. Legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Definiáljuk az
$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad n \mapsto \sup_{t\in T} \|f_n(t)\|$$
sorozatot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $N < n$ természetes számra és $t \in T$ pontra
$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(t)\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$
teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.

2.3. Függvénysorozat és függvénysor deriválása és integrálása

2.13. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén a

$$\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$$

halmazt *szakasznak* nevezzük. Az $\mathfrak{n} > 1$ esetben $[a,b]$ fogja jelölni a fenti halmazt, az $\mathfrak{n} = 1$ esetben, pedig $\lfloor a, b \rfloor$.

2.14. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Bizonyítás. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{n} f_n(a)$ határérték és az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $g : B_r(a) \to \mathbb{R}$ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$|f_n(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Mivel az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 2.3 tétel alapján létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} |f'_n(y) - f'_m(y)| < \frac{\varepsilon}{2r}$$

teljesül. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$.
Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az $f_n - f_m$ függvényre és az $\lfloor a, x \rfloor$ szakaszra alkamazva a véges növekmények formuláját

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| \le \left(\sup_{y\in]a,x[} |(f_n - f_m)'(y)| \right) \cdot |x - a|$$

adódik. Ekkor minden $N < n, m$ természetes számra

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(a) - f_m(a)| + \left(\sup_{y\in]a,x[} |(f_n - f_m)'(y)| \right) \cdot |x - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon.$$

Vagyis $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ valós Cauchy-sorozat, tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.
Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül, amiből a 2.3 tétel alapján adódik, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.
Legyen $t \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(t) - f'_n(t)(x-t)}{|x-t|}, & \text{ha} \quad x \ne t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t, \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(t) - g(t)(x-t)}{|x-t|}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t. \end{cases}$$

Az f_n függvény t pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 2.4 tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne a t pontban, és teljesülne a bizonyítandó

$$f'(t) = g(t)$$

egyenlőség.
Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 2.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} |f'_n(y) - f'_m(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - (f'_n(t) - f'_m(t))u$$

függvényre és az $\lfloor t, x \rfloor$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t)) - (f'_n(t)(x-t) - f'_m(t))(x-t)| \leq$$
$$\left(\sup_{y\in]t,x[} |(f_n - f_m)'(y) - (f'_n(t) - f'_m(t))| \right) \cdot |t-a|$$

adódik, vagyis ha $N < m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} &|f_n(x) - f_n(t) - f'_n(t)(x-t) - (f_m(x) - f_m(t) - f'_m(t))(x-t))| \leq \\ &\leq \left(\sup_{y\in]t,x[} (|(f_n - f_m)'(y)| + |f'_n(t) - f'_m(t)|) \right) \cdot |x-t| \leq \\ &\leq \left(\left(\sup_{y\in B_r(a)} |(f_n - f_m)'(y)| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |x-t| \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |x-t| = \varepsilon\, |x-t|\,. \end{aligned}$$

Ezek alapján minden $N < n, m$ természetes számra $x \neq t$ esetén

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \frac{\varepsilon \cdot |x-t|}{|x-t|} = \varepsilon,$$

valamint $x = t$ esetén is $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = 0 < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \ (N < n, m \ \to \ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon)$$

teljesül, amiből a 2.3 tétel értelmében következik, hogy a a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

2.15. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;

2. az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;

3. minden $x \in \Omega$ esetén

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték.
Definiáljuk az

$$\Omega' = \left\{x \in \Omega \middle| \ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy Ω' nyílt halmaz. Legyen $x \in \Omega'$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 2.14, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $B_r(x) \subseteq \Omega'$.
Tegyük fel, hogy $\Omega' \neq \Omega$. Vegyünk egy $x \in \Omega \setminus \Omega'$ elemet. Legyen

$$H = \{t \in [0,1] \,|\, \lfloor a, a + t(x-a)\rfloor \subseteq \Omega'\},$$

$c = \sup H$ és $p = a + c(x-a)$. Az a pontra és olyan $B_r(a)$ környezetére alkalmazva a 2.14 tételt, ahol az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, az adódik, hogy $c > 0$. Az Ω' halmaz nyíltsága miatt pedig $p \notin \Omega'$. Mivel $p \in \Omega$, ezért létezik olyan $r > 0$, hogy a $B_r(p)$ halmazon egyenletesen konvergens az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat.
A c szám konstrukciója folytán létezik olyan $t_0 \in H$, melyre $c - \dfrac{r}{4\,|x-a|} < t_0$, ezért a $q = a + t_0(x-a) \in \Omega'$ elemre

$$|p-q| = |a + c(x-a) - a - t_0(x-a)| = |c - t_0| \cdot |x-a| < \frac{r}{4}.$$

Ekkor viszont alkalmazható a 2.14 tétel a $B_{\frac{r}{2}}(q)$ halmazon, mely szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens ezen a halmazon, tehát a $p \in B_{\frac{r}{2}}(q)$ pontban is konvergens. Ez azonban ellentmond a $p \notin \Omega'$ feltevésnek. Tehát $\Omega' = \Omega$.
Legyen $x \in \Omega$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 2.14, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan egyenletesen konvergens.

2.16. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_n f_n'$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sor, akkor*

1. minden $x \in \Omega$ esetén konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sor;

2. az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál a $\sum_n f_n$ függvénysor;

3. minden $x \in \Omega$ esetén

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Legyen $a \in \Omega$ olyan pont, ahol konvergens a $\sum_{n\in\infty} f_n(a)$ sor, és tegyük fel, hogy az

$\sum_n f_n'$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 2.15 állítást adódik a tétel.

2.17. Tétel. *(Függvénysorozat határfüggvényének integrálhatósága.) A $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a függvénysorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat, mely egyenletesen konvergál az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor a 2.4 tétel miatt f folytonos függvény, tehát Riemann-integrálható. Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon'$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b (f - f_n)\right| \le \int_a^b |f - f_n| \le \int_a^b \varepsilon' = (b-a)\varepsilon'$$

teljesül. Vagyis minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a bizonyítandó

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

határértéket jelenti.

2.18. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének integrálhatósága.) Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 2.17 tételt adódik az állítás.

2.4. Hatványsorok

2.19. Definíció. (*Hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

2.20. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r \in [0, R_a[$, akkor a $B_r(0)$ halmazon a P_a hatványsorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty$$

teljesül.

4. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat, továbbá legyen R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara.
3. Legyen $r \in [0, R_a[$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in B_r(0)} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n < \infty,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél az elemi Cauchy–Hadamard-tételt használtuk.
1. Ha $x \in \mathbb{K}$ és $|x| < R_a$, akkor legyen $r \in]|x|, R_a[$ tetszőleges paraméter. A 3. pont alapján a hatványsor nomálisan konvergens a $B_r(0)$ halmazon, ezért ott abszolút konvergens is.
2. Legyen $|x| > R_a$ és tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n} a_n x^n$ sor konvergens. Ekkor az 1.94 tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n = 0$ teljesül. Tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < k \in \mathbb{N}$ számra $\left|a_k x^k\right| < 1$, azaz

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{|x|}.$$

Vagyis

$$\frac{1}{R_a} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \;\middle|\; k \geq n \right\} \leq \sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \;\middle|\; k \geq N+1 \right\} \leq \frac{1}{|x|},$$

amiből az $|x| \leq R_a$ ellentmondás adódik.
4. Legyen $x \in B_{R_a}(0)$ tetszőleges pont. Válasszunk egy $r \in]|x|, R_a[$ paramétert. A 3. pont alapján a hatványsorra a $B_r(0)$ halmazon alkalmazható a 2.12 Weierstrass-tétel, ezért ezen a halmazon egyenletesen konvergens a hatványsor. Vagyis az x pontnak a $B_r(0)$ halmaz olyan környezete ahol a hatványsor egyenletesen konvergens.
5. Mivel a függvénysor bármely véges összege folytonos függvény és a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletes a konvergencia, ezért a 2.4 tétel alapján az összegfüggvény is folytonos.

2.21. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R_a$ esetén a hatványsor tagonként differenciálható az x pontban, azaz*

$$P_a'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ a sorozat által meghatározott hatványsor R_a konvergenciasugárral. Tekintsük a

$$b : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad k \mapsto (k+1)a_{k+1}$$

sorozatot és az általa meghatározott P_b hatványsort. A P_b hatványsor konvergenciasugarára $R_b = R_a$ teljesül. Ekkor a Cauchy–Hadamard-tétel alapján a P_b hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens az $I =]-R_a, R_a[$ intervallumon, valamint $x_0 = 0$ olyan pont az I intervallumban, ahol a P_a hatványsor konvergens. Ezért a 2.16 tétel alapján a P_a hatványsort lehet tagonként deriválani az I intervallum minden pontjában.

2.22. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ esetén a hatványsor tagonként integrálható az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, azaz*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \mathrm{d}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta a_k x^k \,\mathrm{d}\, x.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ a sorozat által meghatározott hatványsor R_a konvergenciasugárral. Legyen továbbá $[\alpha, \beta]$ olyan korlátos intervallum, melyre $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ teljesül. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján a P_a hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ kompakt halmazon, azonban a 2.6 tétel miatt egyenletesen is itt. Figyelembe véve, hogy a hatványsor minden részletösszeg függvénye folytonos és egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ véges intervallumon, a 2.18 tétel alapján a hatványsor tagonként intergrálható.

2.5. Abel-tétel

2.23. Tétel. *Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum\limits_n a_n$ sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum\limits_n a_n$ sor konvergens. Vezessük be az $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést valamint, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum\limits_{k=n}^{n+m} a_k \right|$ és $\alpha_n = A - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} C_n &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n+m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| = \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} |(A - \alpha_{n+m}) - (A - \alpha_{n-1})| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}|. \end{aligned}$$

Mivel az $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\alpha_n| < K$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}| \le |\alpha_{n-1}| + \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n+m}| \le K + K < \infty.$$

Tegyük fel, hogy a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart a nullához. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \le C_n$. Vagyis minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varepsilon_0 \le C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}|$$

teljesül. Mivel $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < n \in \mathbb{N}$ számra $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, vagyis minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}| \le |\alpha_{n-1}| + \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n+m}| \le \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ezek alapján az $N_1 + 1$ számhoz létezik olyan $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \le C_n$, ugyanakkor minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra $C_n \le \frac{\varepsilon_0}{2}$, ami nyilvánvalóan ellentmondás, ezért $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$.

2.24. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül. Ha a P_a hatványsor konvergens az $x_0 \in \{R_a, -R_a\}$ pontban, akkor egyenletesen konvergens a $\lfloor 0, x_0 \rfloor$ szakaszon és a $P_a|_{\lfloor 0,x_0 \rfloor}$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $R_a = 1$ teljesül és a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Ha $x \in [0, 1[$, akkor a P_a hatványsor konvergens az x pontban és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right|$$

teljesül. Az $m \in \mathbb{N}^+$ változó szerinti teljes indukcióval igazolható az alábbi Abel-féle átrendezés.

$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k = \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(x^k - x^{k+1}\right) \left(\sum_{j=n}^{k} a_j \right) + x^{n+m} \sum_{j=n}^{n+m} a_j$$

Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ezért a 2.23 tétel alapján ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right|,$$

akkor $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$. Mivel $x \in [0, 1[$, ezért minden $m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right| &\le \sum_{k=n}^{n+m-1} \left|x^k - x^{k+1}\right| \left| \sum_{j=n}^{k} a_j \right| + |x|^{n+m} \left| \sum_{j=n}^{n+m} a_j \right| \le \\
&\le \sum_{k=n}^{n+m-1} \left|x^k - x^{k+1}\right| C_n + |x|^{n+m} C_n = \\
&= C_n \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} \left(x^k - x^{k+1}\right) + x^{n+m} \right) = \\
&= C_n \left(x^n - x^{n+m} + x^{n+m}\right) C_n = C_n x^n
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis

$$\left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right| \le \lim_{m\to\infty} C_n x^n = C_n x^n \le C_n.$$

Az $P_a(1)$ értékre

$$\left| P_a(1) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = C_n$$

teljesül. Tehát minden $x \in [0,1]$ esetén

$$\left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \leq C_n,$$

vagyis

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \leq C_n.$$

Mivel a 2.23 tétel alapján a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a nullához tart, ezért a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon.
Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül és a P_a hatványsor konvergens az R_a pontban. Definiáljuk a $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b_n = a_n R_a^n$ sorzatot. Ekkor $R_b = 1$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor konvergens. Az előzőek alapján a P_b hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ halmazon. Amiből az

$$\sup_{x\in[0,R_a]} \left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \sup_{t\in[0,1]} \left| P_a(tR_a) - \sum_{k=0}^{n} a_k \left(tR_a\right)^k \right| = \sup_{t\in[0,1]} \left| P_b(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \right|$$

azonosságok alapján következik, hogy a P_a hatványsor egyenletesen konvergens az $[0,R_a]$ halmazon.
Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül és a P_a hatványsor konvergens a $-R_a$ pontban. Definiáljuk a $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b_n = (-1)^n a_n$ sorzatot. Ekkor $R_b = R_a$ és a P_b hatványsor konvergens az R_b pontban. Az előzőek alapján a P_b hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,R_b]$ halmazon. Amiből a

$$\sup_{x\in[-R_a,0]} \left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \sup_{t\in[0,R_a]} \left| P_b(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \right|$$

azonosságok alapján következik, hogy a P_a hatványsor egyenletesen konvergens a $[-R_a,0]$ szakaszon.
A P_a hatványsor folytonossága a folytonos részletösszeg függvények egyenletes konvergenciájából következik.

2.6. Approximáció polinomokkal

2.25. Definíció. Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

2.26. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \left| B_n^f(t) - f(t) \right| \right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $[a,b]$ kompakt halmaz és f folytonos, ezért: f korlátos, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [a,b]$ pontra $\|f(t)\| < C$; valamint a Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos, vagyis a később rögzítendő $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t, t' \in [a,b]$, $|t - t'| < \delta$ esetén $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon'$ teljesül. Legyen $t \in [a,b]$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$\left| B_n^f(t) - f(t) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right) \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \right|. \tag{2.1}$$

Tekintsük az

$$I_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| < \delta \right\}$$
$$J_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta \right\}$$

halmazokat. Ekkor $I_n \cap J_n = \emptyset$ és $I_n \cup J_n = \{0, \dots, n\}$, vagyis a (2.1) egyenlet alapján

$$\begin{aligned}
\left|B_n^f(t) - f(t)\right| &\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \left| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \\
&+ \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \cdot \varepsilon' \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \cdot 2C \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \varepsilon' \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} = \\
&= \varepsilon' + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ha $k \in J_n$, akkor definíció szerint

$$\left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta,$$

amiből

$$\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \cdot \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \geq 1$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} &\leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k},
\end{aligned}$$

ahol $x = \dfrac{t-a}{b-a}$. Minden $y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$(y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k z^{n-k},$$

melynek y szerinti első és második deriváltjából

$$ny(y+z)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k y^k z^{n-k}$$
$$n(n-1)y^2(y+z)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) y^k z^{n-k}$$

adódik. Ha $z = 1 - y$, akkor ezekből

$$ny = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k y^k (1-y)^{n-k}$$

$$n(n-1)y^2 + ny = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 y^k (1-y)^{n-k}$$

következik, vagyis

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Figyelembe véve, hogy $|x|, |1-x| \le 1$

$$\left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \le \varepsilon' + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n}$$

adódik. Vagyis ha $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, melyre $N > \dfrac{4C(b-a)^2}{\delta^2 \varepsilon}$ teljesül, akkor minden $n > N$ és $t \in [a,b]$ esetén

$$\left| B_n^f(t) - f(t) \right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n} \le \varepsilon,$$

ezért

$$\sup_{t \in [a,b]} \left| B_n^f(t) - f(t) \right| \le \varepsilon.$$

2.27. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinom, hogy minden $x \in [a,b]$ számra*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. A 2.26 Bernstein-polinomokkal való approximációs tétel közvetlen következménye.

3. Differenciálszámítás véges dimenzióban

Jelölés. A továbbiakban követjük azt az irodalomban elterjedt gyakorlatot, hogy az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térre csak az alaphalmaz $\mathbb{R}^n$ jelölésével utalunk.

Jelölés. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, X tetszőleges halmaz és $a \in X$, akkor $a^{[n]}$ jelöli azt az X^n halmazbeli elemet, melynek minden komponense a, vagyis

$$a^{[n]} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{n\text{-szer}}).$$

Jelölés. Tetszőleges $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ halmazrendszer, $a \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ és $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\mathrm{in}_{a,k} : A_k \to \prod_{i=1}^{n} A_i \qquad x \mapsto (a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

a k. koordinátához és az a ponthoz tartozó inklúzió függvény.

3.1. Differenciálhatóság

3.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ olyan, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy $A = u - v \neq 0$. Ekkor létezik olyan $0 \neq e \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $Ae \neq 0$. Legyen $\varepsilon = \dfrac{\|Ae\|}{\|e\|} \in \mathbb{R}^+$. A fenti két határérték különbségeként

$$\lim_{x \to a} \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

adódik, a határérték definíciója alapján pedig létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| < \varepsilon.$$

Az $x = a + \dfrac{\delta}{2\,\|e\|} \cdot e \in E$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, azonban a fenti egyenlőtlenségből az

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| = \left\| \frac{Ae}{\|e\|} \right\| = \varepsilon < \varepsilon$$

ellentmondás adódik.

3.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre

  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az f *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right\}$$

függvényt.

– Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.

– Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.

3.3. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^n : \Big(\|x-a\| < \delta \;\to\; \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x-a\| \Big)$$

teljesül.

Bizonyítás. A derivált és a határérték definíciójából következik.

3.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága és $(\mathrm{D}f)(a)$ értéke független az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ tereken választott normától.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Legyen $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ norma az $\mathbb{R}^n$ téren és $\|\cdot\|_{(a)}$, $\|\cdot\|_{(b)}$ norma az $\mathbb{R}^m$ téren. Az 1.78 tétel alapján léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $c\,\|x\|_{(1)} \leq \|x\|_{(2)}$ és minden $y \in \mathbb{R}^m$ esetén $\|y\|_{(b)} \leq d\,\|y\|_{(a)}$.
Ha f differenciálható az a pontban a $\|\cdot\|_{(1)}$ és az $\|\cdot\|_{(a)}$ norma szerint, akkor az

$$\frac{\frac{1}{d}\,\|f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)\|_{(b)}}{\frac{1}{c}\,\|x-a\|_{(2)}} \leq \frac{\|f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)\|_{(a)}}{\|x-a\|_{(1)}}$$

egyenlőtlenség alapján a $\|\cdot\|_{(2)}$ és a $\|\cdot\|_{(b)}$ norma szerint is differenciálható, ugyanazzal a deriválttal.

3.5. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.
Ha f differenciálható az a pontban és létezik a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, akkor legyen A olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Ax = f'(a)x$$

teljesül. Ekkor

$$0 = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x - a},$$

tehát

$$0 = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{x-a}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|}\right|,$$

vagyis

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül és legyen $c = ((\mathrm{D}f)(a))(1)$. Ekkor

$$0 = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|},$$

vagyis

$$0 = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-c\right|$$

ezért

$$0 = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-c\right),$$

tehát létezik a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$$

határérték és $c = f'(a)$.

3.6. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. A differenciálhatóság jellemzéséről szóló 3.3 tétel alapján ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorra a $\|x-a\| < \delta$ esetben

$$\|f(x)-f(a)-(\mathrm{D}f)(a)(x-a)\| \leq \|x-a\|$$

teljesül, aminek az átrendezéséből

$$\|f(x)-f(a)\| \leq \|x-a\| \cdot (1+\|(\mathrm{D}f)(a)\|)$$

adódik. Ezért $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)-f(a)\| = 0$, vagyis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, amiből következik az f függvény a pontbeli folytonossága.

3.7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1,\ldots,\mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1,\ldots,\mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül, amit a mátrixok nyelvén úgy is kifejezhetünk, hogy ha minden $i \in \{1,\ldots,\mathfrak{m}\}$ esetén

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{i\mathfrak{n}} \end{pmatrix},$$

akkor

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.
Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az a pontban és jelölje $A = (\mathrm{D}f)(a)$ a deriváltat. A 3.4 tétel alapján megtehetjük, hogy a végtelen normát tekintjük a $\mathbb{R}^\mathfrak{m}$ téren. Legyen $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f függvény differenciálható az a pontban ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ elemre $0 < \|x - a\| < \delta$ esetén

$$\frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|_\infty}{\|x-a\|} < \delta$$

teljesül. A

$$\frac{|f_i(x) - f_i(a) - (A(x-a))_i|}{\|x-a\|} \leq \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|_\infty}{\|x-a\|}$$

egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy az $f_i : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban és $(Df_i)(a) = \mathrm{pr}_i \circ A$ teljesül.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban, és legyen $B_i = (\mathrm{D}f_i)(a)$. Tekintsük a

$$B : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m} \qquad x \mapsto (B_1 x, \dots, B_\mathfrak{m} x)$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy $(Df)(a) = B$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ esetén f_i differenciálható az a pontban, ezért

$$\exists \delta_i \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^\mathfrak{n} : \Big(\|x-a\| < \delta_i \;\to\; \|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x-a)\|_\infty \leq \varepsilon \cdot \|x-a\| \Big)$$

teljesül. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_\mathfrak{m}\}$. Ha $x \in B_\delta(a)$, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - f(a) - B(x-a)\|_\infty = \\
&\quad = \|(f_1(x) - f_1(a) - B_1(x-a), \dots, (f_n(x) - f_n(a) - B_n(x-a))\|_\infty = \\
&\quad = \max\{|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x-a)| \mid i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}\} \leq \varepsilon \cdot \|x-a\|
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis az f függvény differenciálható az a pontban, és $(\mathrm{D}f)(a) = B$ teljesül.

3.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

3.8. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$, $\varphi : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$, $\varphi : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Legyen továbbá $F = (\mathrm{D}f)(a)$, $G = (\mathrm{D}g)(a)$ és $\Phi = (\mathrm{D}\varphi)(a)$. Mivel $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$, ezért vehetünk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre $B_r(a) \subseteq a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a) - G(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \\
&\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)}{\|x-a\|} = 0.
\end{aligned}$$

1. Az

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a) - (F+G)(x-a)}{\|x-a\|} = \\
&\quad = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a) - G(x-a)}{\|x-a\|} = 0
\end{aligned}$$

egyenlőség igazolja, hogy $f+g$ is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = F+G$.
2. Az
$$\lim_{x\to a} \frac{(cf)(x)-(cf)(a)-(cF)(x-a)}{\|x-a\|} = c\cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$
egyenlőség igazolja, hogy cf is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = cF$.
3. A minden $x\in B_r(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned}
&\|(\varphi f)(x)-(\varphi f)(a)-f(a)\Phi(x-a)-\varphi(a)F(x-a)\| = \\
&= \Big\|\Big(\varphi(x)-\varphi(a)-\Phi(x-a)\Big)f(x)+\varphi(a)\Big(f(x)-f(a)-F(x-a)\Big)+(f(x)-f(a))\Phi(x-a)\Big\| \le \\
&\le \|\varphi(x)-\varphi(a)-\Phi(x-a)\|\cdot\|f(x)\| + |\varphi(a)|\cdot\|f(x)-f(a)-F(x-a)\| + \\
&\quad + \|f(x)-f(a)\|\cdot\|\Phi\|\cdot\|x-a\|
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\left\|\frac{(\varphi f)(x)-(\varphi f)(a)-f(a)\Phi(x-a)-\varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|}\right\| \le \\
&\le \lim_{x\to a}\left\|\frac{\varphi(x)-\varphi(a)-\Phi(x-a)}{\|x-a\|}\right\|\cdot\|f(x)\| + |\varphi(a)|\cdot\lim_{x\to a}\left\|\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|}\right\| + \\
&\quad + \lim_{x\to a}\|f(x)-f(a)\|\cdot\|\Phi\| = \\
&= 0\cdot\|f(a)\| + |\varphi(a)|\cdot 0 + 0\cdot\|\Phi\| = 0
\end{aligned}$$

adódik, amiből
$$\lim_{x\to a}\frac{(\varphi f)(x)-(\varphi f)(a)-f(a)\Phi(x-a)-\varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$
következik, vagyis a φf függvény is differenciálható az a pontban és $\mathrm{D}(\varphi f) = f(a)\Phi + \varphi(a)F$.

3.9. Tétel. *Minden $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz esetén $C^1(\Omega,\mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ vektortér.*

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a\in\Omega$ pontra alkalmazni.

3.10. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $g:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}$, $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_3}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f\circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f\circ g$ differenciálható az a pontban és*
$$(\mathrm{D}(f\circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a).$$

Bizonyítás. Legyen $g:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}$, $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_3}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f\circ g$. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$, tehát
$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+\exists\delta_1\in\mathbb{R}^+\forall y\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}: \\
&\qquad \|y-g(a)\|<\delta_1 \ \to\ \|f(y)-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(y-g(a))\| \le \varepsilon_1\cdot\|y-g(a)\|\,.
\end{aligned}$$
Mivel a g függvény differenciálható az a pontan, ezért $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$, tehát
$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon_2\in\mathbb{R}^+\exists\delta_2\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}: \\
&\qquad \|x-a\|<\delta_2 \ \to\ \|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\| \le \varepsilon_2\cdot\|x-a\|\,.
\end{aligned}$$
Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért
$$\forall\varepsilon_3\in\mathbb{R}^+\exists\delta_3\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}: \qquad \|x-a\|<\delta_3 \ \to\ \|g(x)-g(a)\|<\varepsilon_3.$$
Legyen $\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1}$ esetén
$$\|x-a\|<\delta_3 \ \to\ \|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\| \le \varepsilon_1\cdot\|g(x)-g(a)\|\,.$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ esetén

$$\|x-a\| < \delta_2 \;\rightarrow\; \|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\| \le \varepsilon_1 \cdot \|x-a\|\,.$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ vektorra, ha $\|x-a\| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned}\|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\| &\le \varepsilon_1 \cdot \|g(x)-g(a)\|\\ \|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\| &\le \varepsilon_1 \cdot \|x-a\|\end{aligned}$$

teljesül, valamint az utolsó egyenlőtlenség alapján ha $\|x-a\| < \delta'$, akkor

$$\|g(x)-g(a)\| \le \varepsilon_1 \cdot \|x-a\| + \|(\mathrm{D}g)(a)\| \cdot \|x-a\|\,.$$

Ezek alapján, ha $\|x-a\| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned}&\|f(g(x))-f(g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| =\\ &= \;\|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))+\\ &\qquad +(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| \le\\ &\le \|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\| +\\ &\qquad + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \cdot \|(g(x)-g(a))-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\| \le\\ &\le \varepsilon_1 \|g(x)-g(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\, \varepsilon_1 \|x-a\| \le\\ &\le \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 \|x-a\| + \|(\mathrm{D}g)(a)\|\, \|x-a\|\right) + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\, \varepsilon_1 \|x-a\| =\\ &= \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 + \|(\mathrm{D}g)(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\right) \|x-a\|\end{aligned}$$

Mivel bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 + \|(\mathrm{D}g)(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\right) < \varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x-a\| < \delta'$ esetén

$$\|f(g(x))-f(g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(g(x)-g(a))\| \le \varepsilon \cdot \|x-a\|\,,$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $(\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a)$.

3.3. Iránymenti derivált

3.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, $a \in \mathrm{Dom}\, f$ és $e \in \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\to 0}} \frac{f(a+te)-f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az f *függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

3.12. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, valamint $a \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\, f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\, f$ pontban, valamint legyen $A = (\mathrm{D}f)(a)$ és $e \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor. Az $e = 0$ esetben nyilván teljesül az állítás, így feltehető, hogy $e \neq 0$. A

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te)-f(a)}{t} = Ae$$

egyenlőtlenség igazolásához válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paramétert. A függvény a pontbeli differenciálhatósága alapján az $\dfrac{\varepsilon}{\|e\|}$ számhoz létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ melyre

$$\forall x \in B_{\delta'}(a): \ \ \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \le \frac{\varepsilon}{\|e\|} \cdot \|x-a\|$$

teljesül. Ha $\delta = \dfrac{\delta'}{\|e\|}$ és $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$, akkor $a + te \in B_{\delta'}(a)$, vagyis

$$\|f(a+te) - f(a) - A(te)\| \le \frac{\varepsilon}{\|e\|} \cdot |t| \, \|e\| = \varepsilon \, |t| \, .$$

Amiből $\lim\limits_{t\to 0} \left\| \dfrac{f(a+te) - f(a) - tA(e)}{t} \right\| = 0$ következik.

3.4. Néhány speciális függvény deriváltja

3.13. Tétel. *Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$ lineáris leképezés minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}}) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ tetszőleges pont. Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$ linearitása miatt minden $x \in U$ esetén

$$Ax - Aa - A(x-a) = 0$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x\to a} \frac{Ax - Aa - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

amiből $(\mathrm{D}A)(a) = A$ következik.

3.14. Tétel. *Ha $u = (u_1, \dots, u_k) \in \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i}$, és $j \in \{1, \dots, k\}$, akkor az*

$$\mathrm{in}_{u,j} : \mathbb{R}^{\mathrm{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i} \qquad x \mapsto (u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_k)$$

inklúzió függvény deriváltjára minden $a \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}_j}$ pontban

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) = \mathrm{in}_{0,j}$$

teljesül, azaz

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) : \mathbb{R}^{\mathrm{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i} \qquad x \mapsto (0, \dots, 0, \underbrace{x}_{j.\ \text{hely}}, 0, \dots, 0).$$

Bizonyítás. Az állítás jelölései mellett az

$$\mathrm{in}_{u,j}(x) - \mathrm{in}_{u,j}(a) = \mathrm{in}_{0,j}(x-a)$$

egyenlőség miatt

$$\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{in}_{u,j}(x) - \mathrm{in}_{u,j}(a) - \mathrm{in}_{0,j}(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

3.15. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $f : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$, $f(a) = a^k$. *Ekkor minden* $a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ *esetén*

$$(\mathrm{D}f)(a) : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$, $f(a) = a^k$, $a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ és tekintsük a

$$\tau : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

leképezést. Ekkor A olyan Banach-tér, melyen a norma szubmultiplikatív. A minden $h \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $\|h\| \leq 1$ esetén érvényes

$$\begin{aligned}\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - \tau(h)}{\|h\|} \right\| &= \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| (a+h)^n - a^n - \sum_{i=0}^{k-1} a^i h a^{k-1-i} \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} \|h\|^i \cdot \|a\|^{k-i} \leq \|h\| \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} \|h\|^{i-2} \cdot \|a\|^{k-i} \leq \\ &\leq \|h\| \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} \cdot \|a\|^{k-i} \leq \|h\| \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \|a\|^{k-i} = \|h\| \cdot (1 + \|a\|)^k\end{aligned}$$

becslésből következik, hogy $(\mathrm{D}f)(a) = \tau$.

3.16. Tétel. *Ha*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \left\{ a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n) |\ \exists a^{-1} \right\},$$

akkor az invertálás $i : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $i(a) = a^{-1}$ *függvényére minden* $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *pontban*

$$(\mathrm{D}i)(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad b \mapsto -a^{-1} b a^{-1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tetszőleges pont és tekintsük a $\tau \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$, $\tau(b) = -a^{-1} b a^{-1}$ leképezést. A jelölések egyszerűsítése végett most jelölje 1 az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ leképezést. Ha $0 \neq h \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ és $\|h\| \leq \dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$, akkor a $-a^{-1}h$ elemre alkalmazható a Carl Neumann-féle sorfejtés, vagyis ebben az esetben érvényes a

$$\begin{aligned}\left\| \frac{i(a+h) - i(a) - \tau(h)}{\|h\|} \right\| &= \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| (a+h)^{-1} - a^{-1} + a^1 h a^{-1} \right\| = \\ &= \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| ((1 + a^{-1}h)^{-1} - 1 + a^{-1}h) a^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (-a^{-1}h)^k \right\| \cdot \left\| a^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left\| a^{-1}h \right\|^k \leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\|a^{-1}\| \cdot \|h\| \right)^k = \\ &= \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \frac{\|a^{-1}\|^2 \cdot \|h\|^2}{1 - \|a^{-1}\| \cdot \|h\|} \leq \|h\| \cdot 2 \left\| a^{-1} \right\|^3\end{aligned}$$

becslés, amiből következik az állítás.

3.5. Vektor-vektor függvény deriváltja

3.17. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathtt{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathtt{m}}$, $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \operatorname{Dom} f$, valamint $i \in \{1, \ldots, k\}$ tetszőleges index.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény parciálisan deriválható a i-edik változója szerint az a pontban*, ha az
$$f \circ \mathrm{in}_{a,i} : \mathbb{R}^{\mathtt{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathtt{m}} \qquad x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$
függvény differenciálható az a_i pontban és ekkor a
$$(\partial_i f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i)$$
jelölést használjuk.
- Az f függvény *i-edik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a
$$\partial_i f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}_i}, \mathbb{R}^{\mathtt{m}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \circ \mathrm{in}_{a,i} \text{ differenciálható az } a_i \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i) \end{array} \right\}$$
függvényt.
- Az f *függvény parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha $\operatorname{Dom} \partial_i f = \operatorname{Dom} f$.
- Az f *függvény parciálisan folytonosan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint és $\partial_i f$ folytonos.

3.18. Tétel. *Ha az $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathtt{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathtt{m}}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ pontban, akkor minden $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathtt{n}_i}$ vektorra*
$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{k} ((\partial_i f)(a))(x_i)$$
teljesül.

Bizonyítás. Legyen az $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathtt{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathtt{m}}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ pontban és legyen $j \in \{1, \ldots, k\}$. Mivel f és az $\mathrm{in}_{a,j}$ függvény differenciálható, ezért a közvetett függvény deriválási szabálya alapján
$$(\partial_j f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,j}))(a_j) = ((\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,j}(a_j))) \circ (\mathrm{D}\, \mathrm{in}_{a,j})(a_j) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,j}\,.$$

Legyen $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathtt{n}_i}$ tetszőleges vektor. Mivel
$$x = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{in}_{0,i}(x_i)$$
és $(\mathrm{D}f)(a)$ lineáris leképezés, ezért
$$(\mathrm{D}f)(a)(x) = ((\mathrm{D}f)(a)) \sum_{i=1}^{k} \mathrm{in}_{0,i}(x_i) = \sum_{i=1}^{k} ((\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,i})(x_i) = \sum_{i=1}^{k} (\partial_i f)(a)(x_i)$$
teljesül.

3.19. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban, akkor minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{n}((\partial_i f)(a))x_i$$

teljesül, vagyis a mátrixok nyelvén

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix}(\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) & \dots & (\partial_n f)(a)\end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Az előző állítás következménye.

3.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés mátrixa*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix}(\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_n f_1)(a)\\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_n f_2)(a)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\partial_1 f_m)(a) & (\partial_2 f_m)(a) & \cdots & (\partial_n f_m)(a)\end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. A 3.7 és a 3.19 tétel egyszerű következménye.

3.21. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés mátrixát az *f függvény a pontbeli Jacobi-mátrixának* nevezzük. Az Jacobi-mátrix alakja

$$\begin{pmatrix}(\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_n f_1)(a)\\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_n f_2)(a)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\partial_1 f_m)(a) & (\partial_2 f_m)(a) & \cdots & (\partial_n f_m)(a)\end{pmatrix}$$

Az $n = m$ esetben ezen mátrix determinánsát nevezzük *Jacobi-determinánsnak*.

3.22. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $k \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index. Ekkor az f függvénynek pontosan akkor létezik a k-adik változó szerinti parciális deriváltja az a pontban, ha létezik az e_k iránymenti deriváltja az a pontban és ebben az esetben $(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}_{e_k} f)(a)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $k \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index. Válasszunk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.
Az alábbi ekvivalens átalakítások igazolják az állítást.

$$\begin{aligned}
\exists(\partial_k f)(a) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a_k} \frac{(f \circ \mathrm{in}_{a,k})(x) - (f \circ \mathrm{in}_{a,k})(a_k) - (\partial_k f)(a)(x - a_k)}{|x - a_k|} = 0 \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a_k} \left| \frac{f(a + (x - a_k)e_k) - f(a)}{x - a_k} - (\partial_k f)(a) \right| = 0 \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = (\partial_k f)(a) \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \exists(\mathrm{D}_{e_k} f)(a)
\end{aligned}$$

3.6. Gradiens, divergencia és rotáció

3.23. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a $((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_n f)(a)) \in \mathbb{R}^n$ vektort az *f függvény a pontbeli gradiensének* nevezzük és a $(\operatorname{grad} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény gradiensének* nevezzük a

$$\operatorname{grad} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^n \qquad a \mapsto ((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_n f)(a))$$

függvényt.

Bevezetjük a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{grad} f$ jelölést, ahol a ∇ szimbólumot *nabla-operátornak* nevezzük.

3.24. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \langle(\operatorname{grad} f)(a), x\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. A gradiens definíciójának közvetlen következménye.

3.25. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és legyen $a, e \in \mathbb{R}^n$. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor létezik az f függvény a pontbeli e iránymenti deriváltja és*

$$(\mathrm{D}_e f)(a) = \langle(\operatorname{grad} f)(a), e\rangle\,.$$

Bizonyítás. A 3.12 és a 3.24 tétel közvetlen következménye.

3.26. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a $\operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$ számot az *f függvény a pontbeli divergenciájának* nevezzük és a $(\operatorname{div} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény divergenciájának* nevezzük a

$$\operatorname{div} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$$

függvényt.

A divergenciára használjuk még a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{div} f$ jelölést.

3.27. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor*

$$(\operatorname{div} f)(a) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f_i)(a).$$

Bizonyítás. A 3.20 tételből és a nyom értelmezéséből rögtön adódik.

3.28. Definíció. Minden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényhez bevezetjük a

$$\Delta f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\operatorname{grad} f)) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto (\operatorname{div} \operatorname{grad} f)(a)$$

jelölést és a Δ szimbólumot *Laplace-operátornak* nevezzük. Tehát formálisan $\Delta = \nabla^2$.

3.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor minden $a \in \operatorname{Dom}(\Delta f)$ elemre*

$$(\Delta f)(a) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k^2 f)(a)$$

teljesül.

Bizonyítás. A gradiens definíciójából és a 3.27 tételből adódik.

3.30. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^3$ pontban, akkor a

$$((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \in \mathbb{R}^3$$

vektort az *f függvény a pontbeli rotációjának* nevezzük és a $(\operatorname{rot} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény rotációjának* nevezzük a

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^3 \\ &\qquad a \mapsto ((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \end{aligned}$$

függvényt.

A rotációra használjuk még a $\nabla \times f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{rot} f$ jelölést.

3.7. Folytonosan differenciálható függvények

3.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \|(\mathrm{D}f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ha $f(a) = f(b)$, akkor nyilván teljesül az állítás, ezért tegyük fel, hogy $f(b) - f(a) \neq 0$. Tekintsük a

$$\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \langle f(b) - f(a), f(a + t(b - a)) - f(a)\rangle$$

függvényt. A φ függvényre alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt, kapjuk, hogy létezik olyan $t_0 \in]0, 1[$, hogy

$$\varphi'(t_0) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0},$$

vagyis

$$\langle f(b) - f(a), (\mathrm{D}f)(a + t_0(b - a))(b - a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|_2^2 .$$

Legyen $c = a + t_0(b - a)$. Ekkor a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\|f(b) - f(a)\|_2^2 \leq \|f(b) - f(a)\|_2 \cdot \|(\mathrm{D}f)(c)(b - a)\|_2 \leq \|f(b) - f(a)\|_2 \cdot \|(\mathrm{D}f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2 .$$

Amit elosztva a $\|f(b) - f(a)\|_2$ számmal kiadja a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

3.32. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Ha $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \left(\sup_{c \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(c)\|\right) \cdot \|b - a\|_2 ,$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

Bizonyítás. Az előző állítás nyilvánvaló következménye.

3.33. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{D}f = 0$ teljesül. Ekkor f állandó.*

Bizonyítás. A véges növekmények formulájának következménye.

3.34. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.
Legyen $a \in \Omega$ és $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \Omega$ teljesül, valamint definiáljuk az

$$A : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i),$$

lineáris leképezést. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített szám és az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren használjuk a végtelen normát. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén

$$|f(x) - f(a) - A(x - a)| \leq \varepsilon \|x - a\|_\infty$$

teljesül, melyből következik, hogy f differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) = A$.
Mivel minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta \in]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ és $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesül.
Legyen $x \in B_\delta(a)$ tetszőleges pont. Definiáljuk a $z_0, z_1, \ldots, z_\mathfrak{n} \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ vektorokat az alábbi módon.

$$\begin{aligned}
z_0 &= (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
z_1 &= (a_1, x_2, x_3 \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
z_2 &= (a_1, a_2, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
z_i &= (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
z_\mathfrak{n} &= (a_1, a_2, \ldots, a_\mathfrak{n})
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) - A(a)(x-a) = f(z_0) - f(z_n) - A(z_0 - z_n) &= \\
= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - A(z_{i-1} - z_i) &= \\
= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - a_i)&
\end{aligned}$$

adódik. Minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén legyen

$$\gamma_i : [x_i, a_i] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (f \circ \mathrm{in}_{z_i,i})(t) - (A \circ \mathrm{in}_{z_i,i})(t),$$

vagy másképp írva

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= f(t, x_2, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) - A(t, x_2, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
\gamma_2(t) &= f(a_1, t, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) - A(a_1, t, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
\gamma_i(t) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}) - A(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
\gamma_\mathfrak{n}(t) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_{\mathfrak{n}-1}, t) - A(a_1, a_2, \ldots, a_{\mathfrak{n}-1}, t).
\end{aligned}$$

teljesül. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre

$$f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - a_i) = \gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i).$$

A parciális deriválás definíciójából, a közvetett függvény deriválási szabályából, a lineáris leképezés (3.13 tétel) és az inklúzió deriválási szabályából (3.14 tétel) adódik, hogy minden $w \in [x_i, a_i]$ esetén

$$(\mathrm{D}\gamma_i)(w) = (\partial_i f)(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, w, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}) - (\partial_i f)(a).$$

A γ_i függvényre és az $[x_i, a_i]$ szakaszra alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt, azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, a_i[$, hogy

$$|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| = |(\gamma_i')(c_i)| \cdot |x_i - a_i| .$$

Minden $c_i \in [x_i, a_i]$ esetén legyen $w_i = \mathrm{in}_{z_i,i}(c_i)$, azaz

$$w_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}).$$

Ekkor $w_i \in B_\delta(a)$ miatt

$$|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| = |(\partial_i f)(w_i) - (\partial_i f)(a)| \cdot |x_i - a_i| \leq \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} \cdot |x_i - a_i|\,.$$

Összerakva ezeket az eredményeket

$$|f(x) - f(a) - A(a)(x-a)| \leq \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} |x_i - a_i| \leq \varepsilon \|x - a\|_\infty$$

adódik. Ezzel igazoltuk, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in B_\delta(a) : \quad |f(x) - f(a) - A(x-a)| \leq \varepsilon \|x - a\|_\infty\,.$$

Tehát f differenciálható az Ω halmazon és minden $a \in \Omega$ pontban $(\mathrm{D}f)(a) = A$.
Legyen $a \in \Omega$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Mivel minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ és $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesül. Ezekből $x \in B_\delta(a)$ esetén az $(\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x)$ lineáris leképezés normájára

$$\|(\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x)\| = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |(\partial_i f)(a) - (\partial_i f)(x)| < \varepsilon$$

adódik, amivel igazoltuk a $\mathrm{D}f$ függvény folytonosságát.
Most tegyük fel, hogy az f függvény folytonosan differenciálható az Ω halmazon. A parciális derivált értelmezése, a közvetett függvény deriválási szabálya és az inklúziófüggvény deriváltja alapján minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ és $a \in \Omega$ esetén

$$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) = (\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,k}(a_k)) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,k})(a_k) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,k}$$

teljesül. Ezért a minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_k f$ függvény értelmezett az Ω halmazon, továbbá az $\mathrm{in}_{0,k}$ függvény és a $\mathrm{D}f$ függvény folytonossága miatt a $\partial_k f$ függvény is folytonos.

3.35. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz.
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor a 3.34 tétel alapján minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ mellett az f_j függvény folytonosan differenciálható. A 3.7 tétel alapján ebből $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ differenciálhatósága következik és az 1.92 tételből pedig $\mathrm{D}f$ folytonossága.
Most tegyük fel, hogy f folytonosan differenciálható az Ω halmazon. Ekkor a projekciófüggvény folytonos differenciálhatósága miatt minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre f_j függvény folytonosan differenciálható, a 3.34 tétel miatt pedig minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\partial_i f_j$ folytonos.

3.8. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága

3.36. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_n f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ határérték;*

2. az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;

3. minden $x \in B_r(a)$ esetén

$$(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}f_n)(x).$$

Bizonyítás. Mivel a tételben szereplő fogalmak függetlenek az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ téren választott normától, valamint a bizonyítás során használni szeretnénk a véges növekmények formuláját, ezért az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ téren tekintsük a $\|\cdot\|_2$ (euklidészi) normát.

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $g : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\|f_n(a) - f_m(a)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 2.3 tétel alapján létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} \|(\mathrm{D}f_n)(y) - (\mathrm{D}f_m)(y)\| < \frac{\varepsilon}{2r}$$

teljesül. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az $f_n - f_m$ függvényre és az $\lfloor a, x \rfloor$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\|_2 \le \left(\sup_{y\in]a,x[} \|(\mathrm{D}(f_n - f_m))(y)\|\right) \cdot \|x - a\|_2$$

adódik. Ekkor minden $N < n, m$ természetes számra

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_2 \le \|f_n(a) - f_m(a)\|_2 + \left(\sup_{y\in]a,x[} |(\mathrm{D}(f_n - f_m))(y)|\right) \cdot \|x - a\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon.$$

Vagyis $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.

Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_2 < \varepsilon$$

teljesül, amiből a 2.3 tétel alapján adódik, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

Legyen $t \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(t) - (\mathrm{D}f_n)(t)(x - t)}{\|x - t\|_2}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t, \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(t) - g(t)(x - t)}{\|x - t\|_2}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t. \end{cases}$$

Az f_n függvény t pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 2.4 tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne a t pontban, és teljesülne a bizonyítandó

$$(\mathrm{D}f)(t) = g(t)$$

egyenlőség.
Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 2.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} \|(\mathrm{D}f_n)(y) - (\mathrm{D}f_m)(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \to \mathbb{R}^m \qquad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - ((\mathrm{D}f_n)(t) - (\mathrm{D}f_m)(t))u$$

függvényre és az $[t, x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t)) - ((\mathrm{D}f_n)(t)(x-t) - (\mathrm{D}f_m)(t))(x-t)\|_2 \leq$$
$$\left(\sup_{y\in]t,x[} \|(D(f_n - f_m))(y) - ((\mathrm{D}f_n)(t) - (\mathrm{D}f_m)(t))\|\right) \cdot \|t-a\|_2$$

adódik, vagyis ha $N < m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f_n(x) - f_n(t) - (\mathrm{D}f_n)(t)(x-t) - (f_m(x) - f_m(t) - (\mathrm{D}f_m)(t))(x-t))\|_2 \leq \\
&\leq \left(\sup_{y\in]t,x[} (\|(D(f_n - f_m))(y)\| + \|(\mathrm{D}f_n)(t) - (\mathrm{D}f_m)(t)\|)\right) \cdot \|x-t\|_2 \leq \\
&\leq \left(\left(\sup_{y\in B_r(a)} \|(D(f_n - f_m))(y)\|\right) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \|x-t\|_2 \leq \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \|x-t\|_2 = \varepsilon \|x-t\|_2 .
\end{aligned}$$

Ezen egyenlőtlenség alapján minden $N < n, m$ természetes számra $x \neq t$ esetén

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|x-t\|_2}{\|x-t\|_2} = \varepsilon,$$

valamint $x = t$ esetén is $\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\|_2 = 0 < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \; (N < n, m \;\to\; \|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\|_2 \leq \varepsilon)$$

teljesül, amiből a 2.3 tétel értelmében következik, hogy a a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

3.37. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Ha az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték.
Definiáljuk az

$$\Omega' = \left\{ x \in \Omega \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy Ω' nyílt halmaz. Legyen $x \in \Omega'$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 3.36, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $B_r(x) \subseteq \Omega'$.
Tegyük fel, hogy $\Omega' \neq \Omega$. Vegyünk egy $x \in \Omega \setminus \Omega'$ elemet. Legyen

$$H = \{t \in [0,1] \mid \; [a, a + t(x-a)] \subseteq \Omega'\},$$

$c = \sup H$ és $p = a + c(x-a)$. Az a pontra és olyan $B_r(a)$ környezetére alkalmazva a 3.36 tételt, ahol az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, az adódik, hogy $c > 0$. Az Ω' halmaz nyíltsága miatt pedig $p \notin \Omega'$. Mivel $p \in \Omega$, ezért létezik olyan $r > 0$, hogy a $B_r(p)$ halmazon egyenletesen konvergens az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat.
A c szám konstrukciója folytán létezik olyan $t_0 \in H$, melyre $c - \dfrac{r}{4\,\|x-a\|} < t_0$, ezért a $q = a + t_0(x-a) \in \Omega'$ elemre

$$\|p - q\| = \|a + c(x-a) - a - t_0(x-a)\| = |c - t_0| \cdot \|x - a\| < \frac{r}{4}.$$

Ekkor viszont alkalmazható a 3.36 tétel a $B_{\frac{r}{2}}(q)$ halmazon, mely szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens ezen a halmazon, tehát a $p \in B_{\frac{r}{2}}(q)$ pontban is konvergens. Ez azonban ellentmond a $p \notin \Omega'$ feltevésnek. Tehát $\Omega' = \Omega$.
Legyen $x \in \Omega$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 3.36, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan egyenletesen konvergens.

3.38. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ összeg;*
2. *az $\sum_n (f_n)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ összeg. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n : \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_n(x).$$

Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 3.37 tételt adódik az állítás.

3.9. Inverzfüggvény tétel

3.39. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és $a \in \mathbb{R}^n$. Ha $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban és $\det(\mathrm{D}f)(a) \neq 0$, akkor létezik olyan $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. *$f|_\Omega$ injektív;*
2. *$f(\Omega)$ nyílt halmaz;*
3. *$f|_\Omega$ homeomorfizmus Ω és $f(\Omega)$ között;*
4. *az $(f|_\Omega)^{-1}$ függvény differenciálható;*
5. *minden $x \in \Omega$ pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban.*

Bizonyítás. Mivel a tételben szereplő fogalmak függetlenek az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ téren választott normától, valamint a bizonyítás során használni szeretnénk a véges növekmények formuláját, ezért az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ teret az euklidészi (kettes) normával látjuk el. (Azaz minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ és hasonlóan az $\mathbb{R}^m$ térben lévő vektorokra.)
Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ olyan pont, hogy $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban.
A bizonyítást több lépésben végezzük.
1. Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést és legyen $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ teljesül. A $\mathrm{D}f$ függvény a pontbeli $\mathrm{D}f$ folytonossága miatt létezik olyan $r \in \,]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_r(a)$ esetén
$$\|(\mathrm{D}f)(x) - A\| < \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|}.$$
Definiáljuk az $\Omega = B_r(a)$ halmazt. Lépésenként megmutatjuk, hogy erre az Ω halmazra teljesülnek a tételben felsorolt tulajdonságok. Előbb azonban megjegyezzük, hogy az 1.109 tétel miatt minden $x \in \Omega$ pont esetén a $(\mathrm{D}f)(x)$ leképezés invertálható.
2. A bizonyítás folyamán szükségünk lesz az alábbi függvényre. Minden $y \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen
$$\varphi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto x + A^{-1}(y - f(x)).$$
Vegyük észre, hogy egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont pontosan akkor fixpontja a φ_y függvénynek, ha $y = f(x)$ teljesül. A φ_y függvénynek pontosan akkor létezik fixpontja, ha $y \in \operatorname{Ran} f$, valamint pontosan akkor van egy darab fixpontja, ha az f függvény csak egyszer veszi fel az y értéket.
Mivel minden $y \in \mathbb{R}^n$ estén
$$\varphi_y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + (A^{-1}y) - A^{-1} \circ f,$$
ezért minden $x \in \Omega$ pontra
$$(\mathrm{D}\varphi_y)(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - A^{-1} \circ (\mathrm{D}f)(x) = A^{-1}(A - (\mathrm{D}f)(x))$$
teljesül, amiből
$$\|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|(A - (\mathrm{D}f)(x))\| < \|A^{-1}\| \cdot \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|} = \frac{1}{2}$$
következik. Vagyis minden $y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $x_1, x_2 \in \Omega$ pont esetén a véges növekmények formuláját felírva az $[x_1, x_2]$ szakaszra és a φ_y függvényre
$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| &\leq \left(\sup_{x \in]x_1, x_2[} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \leq \\ &\leq \left(\sup_{x \in \Omega} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}\end{aligned}$$
adódik. Tehát φ_y kontrakció és
$$\forall y \in \mathbb{R}^n \ \forall x_1, x_2 \in \Omega \qquad \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2} \tag{3.1}$$

teljesül.
3. Most megmutatjuk, hogy az $f|_\Omega$ függvény injektív. Ehhez tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \Omega$ olyan, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Ha $y = f(x_1)$, akkor $\varphi_y(x_1) = x_1$ és $\varphi_y(x_2) = x_2$, amiből a (3.1) egyenlet segítségével

$$\|x_1 - x_2\| = \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$

adódik, vagyis $x_1 = x_2$.
4. Most igazoljuk, hogy minden $X \subseteq \Omega$ nyílt halmaz esetén $f(X)$ nyílt halmaz. Legyen $y_0 \in f(X)$ tetszőleges pont. Ekkor $f|_\Omega$ injektivitása miatt létezik egyetlen olyan $x_0 \in X$ pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel X nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{2r}(x_0) \subseteq X$. Legyen $\rho \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $x \in \overline{B_r(x_0)}$, $y \in B_\rho(y_0)$ tetszőleges pontok. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y(x) - x_0\| &\leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \left\|A^{-1}(y - f(x_0))\right\| \leq \\
&\leq \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \leq \\
&\leq \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $\frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho = r$, azaz $\rho = \frac{r}{2\left\|A^{-1}\right\|}$, akkor minden $x \in \overline{B_r(x_0)}$ esetén

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r.$$

Mostantól legyen $\rho = \frac{r}{2\left\|A^{-1}\right\|}$. Ekkor az előző egyenlőtlenség alapján

$$\varphi_y\left(\overline{B_r(x_0)}\right) \subseteq \overline{B_r(x_0)}.$$

Mivel $\mathbb{R}^n$ teljes és $\overline{B_r(x_0)}$ zárt részhalmaza, ezért az 1.43 tétel alapján a $\overline{B_r(x_0)}$ halmaz is teljes. Ekkor az $M = \overline{B_r(x_0)}$ halmazra és a $\varphi_y|_M$ függvényre alkalmazva az 1.121 Banach-féle fixponttételt, az adódik, hogy létezik egyetlen olyan $x \in \overline{B_r(x_0)}$ pont, melyre

$$\varphi_y(x) = x$$

teljesül, ez pedig azzal ekvivalens, hogy $f(x) = y$. Tehát azt kaptuk, hogy minden $y \in B_\rho(y_0)$ ponthoz létezik olyan $x \in X$, melyre $f(x) = y$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy $B_\rho(y_0) \subseteq f(X)$. Ezzel igazoltuk, hogy $f(X)$ nyílt halmaz.
5. Az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük a $g = f|_\Omega$ és az $\Omega' = f(\Omega)$ jelöléseket. Most megmutatjuk, hogy g homeomorfizmus Ω és Ω' között. Mivel f differenciálható az Ω halmazon, ezért ott folytonos is, vagyis g folytonos. A folytonosság topologikus jellemzése alapján a g^{-1} függvény folytonossága azzal ekvivalens, hogy minden $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra létezik olyan $X' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{\left(g^{-1}\right)}(X) = X' \cap \operatorname{Dom} g^{-1}$ teljesül. Mivel g injektív, ezért azt kell igazolnunk, hogy minden $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazhoz létezik olyan $X' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre

$$g(X) = X' \cap \Omega'.$$

Ha $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, akkor $g(X) = g(\Omega \cap X)$ és mivel $\Omega \cap X$ nyílt halmaz, ezért a 4. pont alapján $g(\Omega \cap X)$ nyílt halmaz. A nyilvánvaló $g(\Omega \cap X) \subseteq \Omega'$ tartalmazás miatt

$$g(X) = g(\Omega \cap X) \cap \Omega',$$

vagyis az $X' = g(\Omega \cap X)$ nyílt halmazra teljesül a kívánt tartalmazás.
6. Most igazoljuk, hogy g^{-1} differenciálható és minden $x \in \Omega$ pontra

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$

teljesül. Ezzel ekvivalens, hogy minden minden $y \in \Omega'$ pontban g^{-1} differenciálható és

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(y) = ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y)))^{-1}$$

teljesül. Ennek igazolásához legyen $y_0 \in \Omega'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Azt kell bizonyítani, hogy

$$\begin{aligned}
&\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^n : \\
&\qquad \left(\|y - y_0\| < \delta \quad \to \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y - y_0)\right\| \le \varepsilon \|y - y_0\|\right)
\end{aligned}$$

teljesül. Mivel Ω' nyílt halmaz a 4. pont alapján, ezért létezik olyan $r_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, melyre $B_{r_1}(y_0) \subseteq \Omega'$. Legyen $x_0 = g^{-1}(y_0)$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenségben szereplő kifejezésen végezzük el a következő átalakításokat, ahol $y \in B_{r_1}(y_0)$ tetszőleges és $x = g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}
&\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y - y_0)\right\| = \\
&\quad = \left\|x - x_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}(y - y_0)\right\| = \\
&\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\left(((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0) - (y - y_0)\right)\right\| \le \\
&\quad \le \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0) - (y - y_0)\| = \\
&\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0)\| = \\
&\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\|
\end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ egy paraméter, melynek majd később rögzítjük az értékét. Mivel $x_0 \in \Omega$, Ω nyílt halmaz és a g függvény differenciálható az x_0 pontban, ezért létezik olyan $r_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{r_2}(x_0) \subseteq \Omega$ és

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \qquad (\|x - x_0\| < r_2 \quad \to \quad \|g(x) - g(x_0) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0)\| \le \varepsilon' \|x - x_0\|)\,.$$

Mivel a g^{-1} függvény folytonos az y_0 pontban, ezért létezik olyan $r_3 \in]0, r_1[$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \qquad \left(\|y - y_0\| < r_3 \quad \to \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| < r_2\right).$$

Ezekből

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0) : \ \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le \varepsilon' \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|$$

következik. Tetszőleges $y \in B_{r_3}(y_0)$ pont esetén

$$\begin{aligned}
&\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| = \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0) + A^{-1}(y - y_0)\right\| \le \\
&\quad \le \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0)\right\| + \left\|A^{-1}(y - y_0)\right\| \le \\
&\quad \le \left\|\varphi_{y_0}(g^{-1}(y)) - \varphi_{y_0}(g^{-1}(y_0))\right\| + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \le \\
&\quad \le \frac{\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\|
\end{aligned}$$

adódik, ahol az utolsó lépésnél felhasználtuk a (3.1) becslést és ennek az egyenlőtlenségnek az átrendezéséből

$$\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| \le 2\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\|$$

következik. Tehát az eddigiek alapján

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0) : \ \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le 2\varepsilon' \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\|\,.$$

Vagyis ha $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\| \cdot \|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\|}$, akkor minden $y \in B_{r_3}(y_0)$ pontra teljesül a bizonyítandó

$$\left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le \varepsilon \|y - y_0\|$$

egyenlőtlenség. Tehát a fent definiált ε' paraméterhez kell r_2 és r_3 számokat választani, és r_3 lesz a keresett δ.
7. Végül igazoljuk, hogy a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban. Már megmutattuk, hogy

$$\mathrm{D}(g^{-1}) = i \circ (\mathrm{D}g) \circ g^{-1},$$

ahol i jelöli az invertálást. A g^{-1} függvény folytonosságát igazoltuk, a $(\mathrm{D}g)$ függvény folytonosságát feltettük az a pontban és az 1.109 tétel alapján tudjuk, hogy i folytonos. Ezek alapján a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény is folytonos az $f(a)$ pontban.

3.10. Implicitfüggvény tétel

3.40. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ tetszőleges függvény. Ha $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az (a_1, a_2) pontban és $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$, akkor létezik olyan Ω_1, Ω_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre*

1. *$\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom}(Df)$;*
2. *létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ differenciálható függvény, melyre $\varphi(a_1) = a_2$, minden $x \in \Omega_1$ esetén*

$$f(x, \varphi(x)) = f(a_1, a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$

teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ folytonos az a_1 pontban.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$, $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(Df)$ olyan pont, melyben $\mathrm{D}f$ folytonos és $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$.
A $\operatorname{Dom} f$ halmazon értelmezzük az

$$\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, f(x_1, x_2))$$

függvényt. Ekkor ha $(b_1, b_2) \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, akkor

$$((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \qquad (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ (\partial_1 f)(b_1, b_2) & (\partial_2 f)(b_1, b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

teljesül. Ebből adódik, hogy $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}\eta)$, továbbá a $\mathrm{D}f$ függvény (a_1, a_2) pontbeli folytonossága miatt a $\mathrm{D}\eta$ függvény is folytonos az (a_1, a_2) pontban. Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$\det((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) = \det(\partial_2 f)(b_1, b_2),$$

vagyis $\det((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) \neq 0$, ezért alkalmazható az η függvényre az inverzfüggvény tétel. Az η függvényre és az (a_1, a_2) pontra alkalmazva a 3.39 inverzfüggvény tételt az adódik, hogy létezik olyan Ω'_1, Ω'_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre

1. $\eta|_{\Omega'_1 \times \Omega'_2}$ injektív;
2. az $\Omega = \eta\,(\Omega'_1 \times \Omega'_2) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ halmaz nyílt;
3. az $(\eta|_{\Omega'_1 \times \Omega'_2})^{-1}$ függvény differenciálható;
4. minden $x \in \Omega'_1 \times \Omega'_2$ pontra

$$(\mathrm{D}((\eta|_{\Omega'_1 \times \Omega'_2})^{-1}))(\eta(x)) = ((\mathrm{D}\eta)(x))^{-1}$$

teljesül;
5. a $\mathrm{D}(\eta|_{\Omega'_1 \times \Omega'_2})^{-1}$ függvény folytonos az $\eta(a_1, a_2)$ pontban.

Vezessük be a $\rho = (\eta|_{\Omega'_1 \times \Omega'_2})^{-1}$ jelölést, tehát $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény, melynek komponensei legyenek

$$\rho_1 : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_1(\rho(x, y))$$
$$\rho_2 : \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x, y)).$$

Ha $(x_1, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, akkor

$$(x_1, y) = \eta(\rho(x_1, y)) = \eta(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y)) = (\rho_1(x_1, y), f(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y))),$$

vagyis minden $(x_1, y) \in \Omega$ pont esetén

$$x_1 = \rho_1(x_1, y) \qquad \text{és} \qquad y = f(x_1, \rho_2(x_1, y)). \tag{3.2}$$

Legyen $c = f(a_1, a_2)$. Ekkor $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} f$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} \eta$ is teljesül és $\eta(a_1, a_2) = (a_1, c)$ miatt $(a_1, c) \in \Omega$, mivel Ω nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\Omega_1 \subseteq \Omega'_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre $\Omega_1 \times \{c\} \subseteq \Omega$.
Tekintsük a

$$\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2 \qquad x \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x, c))$$

függvényt, ahol $\Omega_2 = \Omega'_2$. Mivel ρ differenciálható és pr_2 lineáris leképezés, ezért φ is differenciálható függvény. A (3.2) egyenlet alapján minden $x \in \Omega_1$ pontra

$$c = f(x, \rho_2(x, c)) = f(x, \varphi(x))$$

teljesül, melyből a közvetett függvény deriválási szabálya alapján az adódik, hogy minden $x \in \Omega_1$ esetén

$$0 = (\partial_1 f)(x, \varphi(x)) + (\partial_2 f)(x, \varphi(x)) \circ (D\varphi)(x)$$

teljesül, aminek átrendezéséből

$$(D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$

adódik.
Az implicitfüggvény egyértelműségének igazolásához tegyük fel, hogy $\varphi_2 : \Omega_1 \to \Omega_2$ olyan függvény, hogy minden $x \in \Omega_1$ pontra $c = f(x, \varphi_2(x))$ teljesül. Ekkor minden $x \in \Omega_1$ esetén

$$\eta(x, \varphi(x)) = (x, f(x, \varphi(x))) = (x, c) = (x, f(x, \varphi_2(x))) = \eta(x, \varphi_2(x))$$

teljesül, amiből η injektivitása miatt $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ következik.

3.11. Többszörös deriváltak

3.41. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Az *f függvény k-szor differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^n)^{k-1}, \mathbb{R}^m))$, ennek a kompozícióját a

$$\rho_{k-1} : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^n)^{k-1}, \mathbb{R}^m)) \to \mathrm{Lin}^k((\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R}^m))$$
$$A \mapsto \Big((x_1, \ldots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_n)\Big)$$

  izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$. Az f függvény *k-adik deriváltjának* nevezzük a

$$\mathrm{D}^{(k)} f : \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f) \to \mathrm{Lin}^k((\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R}^m) \qquad a \mapsto \rho_{k-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a)$$

  függvényt.
- Az *f függvény k-szor differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(k)} f$.
- Az *f függvény k-szor folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, k-szor folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^k(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.

3.42. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^{+}$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-szor differenciálható függvény. Ekkor minden $a \in \Omega$ és $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén*

$$((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(a)) \cdot x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_k}^{(k)}.$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^{+}$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-szor differenciálható függvény. A $k = 1$ esetben az állítás a 3.19 tételből adódik. Tegyük fel, hogy valamilyen $p \in \mathbb{N}^{+}$, $p < k$ számra teljesül az állítás és legyen $g = \mathrm{D}^{(p)} f$. Megmutatjuk, hogy ekkor a $p + 1$ számra is igaz az állítás. Ekkor

$$g : \Omega \to \mathrm{Lin}^{p}\left((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^{p}, \mathbb{R}\right)$$

és minden $a \in \Omega$, valamint $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$(g(a))(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}) = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)) \cdot x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}.$$

A

$$\eta : \mathrm{Lin}^{p}\left((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^{p}, \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}^{(\mathfrak{n}^{p})} \qquad A \mapsto \big(A(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p})\big)_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$$

lineáris izomorfizmus segítségével elkészíthetjük a

$$\eta \circ g : \Omega \to \mathbb{R}^{(\mathfrak{n}^{p})} \qquad a \mapsto \big((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)\big)_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$$

függvényt, erre alkalmazva a 3.18 tételt azt kapjuk, hogy minden $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorra

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a))(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_0}(\eta \circ g))(a))(x_{i_0}^{(0)})$$

teljesül, ebből pedig

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a))(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \Big(x_{i_0}^{(0)} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)\Big)_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$$

adódik. Mivel

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a)) = (\mathrm{D}\eta)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a) = \eta \circ (\mathrm{D}g)(a),$$

ezért

$$\eta \circ (\mathrm{D}g)(a)(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \Big(x_{i_0}^{(0)} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)\Big)_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$(\mathrm{D}g)(a)(x^{(0)})(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} \Big(x_{i_0}^{(0)} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)\Big) x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}.$$

Ebből a $\mathrm{D}^{(p+1)} f = \rho_p \circ \mathrm{D}\left(\mathrm{D}^{(p)} f\right)$ definíció figyelembe vételével adódik, hogy minden $a \in \Omega$ és $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$((\mathrm{D}^{(p+1)} f)(a))(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}) = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_0} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)) \cdot x_{i_0}^{(0)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_p}^{(p)}.$$

3.43. Tétel. *(Schwarz-tétel vagy Clairaut tétele a vegyes parciális deriváltakról.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_i \partial_j f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor minden $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ teljesül az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren tekintsük a végtelen normát. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_i \partial_j f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Legyen $a = (a_1, \dots, a_{\mathfrak{n}}) \in \Omega$ és ehhez $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_r(a) \subseteq \Omega$ teljesül. Továbbá legyen $i, j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$, $i < j$ tetszőleges index. Minden $c \in \,]0, r[$ esetén definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\alpha : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(a + xe_i + ce_j) - f(a + xe_i)$$

$$\beta : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(a + xe_j + ce_i) - f(a + xe_j)$$

A Lagrange-féle középérték tételt alkalmazva az α függvényre az $[0, c]$ szakaszon az adódik, hogy létezik olyen $\vartheta_1 \in \,]0, 1[$ paraméter, hogy

$$\alpha(c) - \alpha(0) = ((\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + ce_j) - (\partial_i f)(a + \vartheta_1 e_i))\, c.$$

A

$$B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + te_j)$$

függvényre alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt a $[0, c]$ szakaszon, azt kapjuk, hogy létezik olyan $\vartheta_2 \in \,]0, 1[$, hogy

$$(\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + ce_j) - (\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i) = (\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j)c,$$

tehát

$$\alpha(c) - \alpha(0) = (\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j)c^2.$$

A Lagrange-féle középérték tételt alkalmazva az β függvényre az $[0, c]$ szakaszon az adódik, hogy létezik olyen $\vartheta_3 \in \,]0, 1[$ paraméter, hogy

$$\beta(c) - \beta(0) = ((\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + ce_i) - (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j))\, c.$$

A

$$B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + te_i)$$

függvényre alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt a $[0, c]$ szakaszon, azt kapjuk, hogy létezik olyan $\vartheta_4 \in \,]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + ce_i) - (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + \vartheta_4 ce_i)c,$$

tehát

$$\beta(c) - \beta(0) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j)c^2.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\alpha(c) - \alpha(0) = \beta(c) - \beta(0)$$

azt kapjuk, hogy minden $c \in \,]0, r[$ esetén létezik olyan $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \in \,]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a $(\partial_j \partial_i f)$ és a $(\partial_i \partial_j f)$ függvény folytonos az a pontban ezért létezik olyan $\delta \in \,]0, r[$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén

$$|(\partial_j \partial_i f)(x) - (\partial_j \partial_i f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad |(\partial_i \partial_j f)(x) - (\partial_i \partial_j f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezek alapján, ha $c \in \,]0, \delta[$ tetszőleges paraméter, akkor létezik olyan $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \in \,]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j),$$

továbbá

$$\|(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) - a\| < \delta, \|(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j) - a\| < \delta$$

miatt

$$|(\partial_j \partial_i f)(a) - (\partial_i \partial_j f)(a)| =$$

$$= |(\partial_j\partial_i f)(a) - (\partial_j\partial_i f)(a+\vartheta_1 c e_i + \vartheta_2 c e_j) + (\partial_i\partial_j f)(a+\vartheta_4 c e_i + \vartheta_3 c e_j) - (\partial_i\partial_j f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Amiből az $\varepsilon \to 0$ határértékkel a bizonyítandó

$$(\partial_j\partial_i f)(a) = (\partial_i\partial_j f)(a)$$

egyenlőséget kapjuk.

3.44. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor f k-szor folytonosan differenciálható és minden $a \in \Omega$ pontban $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ szimmetrikus k-lineáris leképezés.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f$ függvény folytonos az Ω halmazon.
A 3.42 tétel értelmében minden $a \in \Omega$ pontban a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés szimmetrikussága azon múlik, hogy a $((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(a))_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$ parciális deriválatak sorrendje invariáns a permutációkra.
Legyen $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $p \in \{1, \ldots, k-1\}$. Ekkor a

$$\partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f : \Omega \to \mathbb{R}$$

függvényre teljesülnek a 3.43 Schwarz-tétel feltételei, ezért

$$\partial_{i_{p+1}}\partial_{i_p}\partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f = \partial_{i_p}\partial_{i_{p+1}}\partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f$$

teljesül, amiből pedig

$$\partial_{i_k} \ldots \partial_{i_{p+2}}\partial_{i_{p+1}}\partial_{i_p}\partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f = \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_{p+1}}\partial_{i_p}\partial_{i_{p+1}}\partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f$$

következik. Tehát a parciális deriváltak invariánsak az egymás melletti elemek cseréjére. Mivel minden permutáció felírható véges sok egymás utáni elem cseréjének kompozíciójaként, ezért a parciális deriváltak invariánsak a permutációkra.

3.12. Taylor-sorfejtés

3.45. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(k)} f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli k-ad fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{k,a} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x) \mapsto T^f_{k,a}(x) \triangleq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!}((\mathrm{D}^{(l)} f)(a))(x-a)^{[l]}$$

polinomot, amit az

$$T^f_{k,a}(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} f)(a))\,(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_l} - a_{i_l}).$$

alakban is felírhatunk. Ha f végetelenszer differenciálható az $a \in \mathrm{Dom}\, f$ pontban, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

3.46. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ és $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a,b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in \,]a,b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}((\mathrm{D}^{(i)} f)(a))(b-a)^{[i]} + \frac{1}{(k+1)!}(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}.$$

Bizonyítás. $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon.
Tekintsük a

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad t \mapsto a + t(b - a)$$

függvényt és legyen $\tilde{f} = f \circ \gamma$. Mivel a γ függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, U) \qquad t \mapsto (b - a)$$

teljesül, vagyis $\mathrm{D}\gamma$ konstans függvény, ezért minden $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ esetén $\mathrm{D}^{(p)}\gamma = 0$, vagyis γ végtelenszer differenciálható az $\mathbb{R}$ halmazon. Ezért az $\tilde{f}$ függvény k-szer folytonosan differenciálható a $[0, 1]$ szakaszon, illetve $(k+1)$-szer differenciálható a $]0, 1[$ szakaszon. A Taylor sorfejtést alkalmazva az $\tilde{f}$ függvényre a $[0, 1]$ szakaszra a $p = 1$ választással az adódik, hogy létezik olyan $\tilde{\xi} \in]0, 1[$ paraméter, melyre

$$\tilde{f}(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \tilde{f}^{(i)}(0) \cdot (1 - 0)^i + \frac{1}{(k+1)!} \tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{\xi}) \cdot (1 - 0)^{k+1},$$

vagyis

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \tilde{f}^{(i)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} \tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{\xi}). \tag{3.3}$$

A közvetett függvény deriválási szabálya alapján minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(\gamma(\tilde{z}))\gamma'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(a + \tilde{z}(b - a))(b - a) = (\mathrm{D}f)(z)(b - a),$$

ahol $z = \gamma(\tilde{z})$. Tegyük fel, hogy valamilyen $p \in \mathbb{N}^+$ számra minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}^{(p)}(\tilde{z}) = ((\mathrm{D}^{(p)}f)(z))(b - a)^{[p]}$$

teljesül. Ha az f függvény $(p+1)$-szer differenciálható a $z_0 \in [a, b]$ pontban, akkor a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \to z_0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)}f)(x) - (\mathrm{D}^{(p)}f)(z_0) - (\mathrm{D}^{(p+1)}f)(z_0)(x - z_0)}{\|x - z_0\|} = 0,$$

ezért ha $x = z_0 + h(b - a)$, ahol $h \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)}f)(z_0 + h(b - a)) - (\mathrm{D}^{(p)}f)(z_0) - h(\mathrm{D}^{(p+1)}f)(z_0)(b - a)}{|h|} = 0.$$

A $\tilde{z}_0 = \gamma^{-1}(z_0)$ jelöléssel a fenti egyenletből

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)}f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h)) - (\mathrm{D}^{(p)}f)(\gamma(\tilde{z}_0)) - h(\mathrm{D}^{(p+1)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b - a)}{h} = 0$$

következik. Ezért

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)}f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h))(b - a)^{[k]} - (\mathrm{D}^{(k)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b - a)^{[k]} - h(\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b - a)^{[k+1]}}{h} = 0,$$

vagyis

$$\tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{z}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0 + h) - \tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0)}{h} = (\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b - a)^{[k+1]}.$$

Ezen eredményt beírva a (3.3) képletbe a $\xi = \gamma^{-1}(\tilde{\xi})$ helyettesítéssel a bizonyítandó

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (\mathrm{D}^{(k)}f)(a)(b - a)^{[k]} + \frac{1}{(k+1)!} (\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\xi)(b - a)^{[k+1]}$$

formula adódik.

3.47. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left|f(b) - T^f_{k,a}(b)\right| \le \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\|(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(x)\right\|\right) \cdot \frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Bizonyítás. A 3.46 tétel közvetlen következménye.

3.48. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban. Ekkor*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban.
Ha $x \in B_r(a)$, akkor a 3.46 tétel alapján létezik olyan $\xi \in [a, x]$, melyre

$$f(x) - T^f_{k-1,a}(x) = \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)} f)(\xi)(x-a)^{[k]},$$

amiből

$$f(x) - T^f_{k,a}(x) = \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)} f)(\xi)(x-a)^{[k]} - \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)(x-a)^{[k]}$$

következik. Tehát

$$\left|f(x) - T^f_{k,a}(x)\right| \le \frac{1}{k!}\left\|(\mathrm{D}^{(k)} f)(\xi) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(a)\right\| \cdot \|x-a\|^k.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A k-adik derivált a pontbeli folytonossága alapján létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $z \in B_\delta(a)$ esetén

$$\left\|(\mathrm{D}^{(k)} f)(z) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(a)\right\| < \varepsilon,$$

amiből következik, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\frac{\left|f(x) - T^f_{k,a}(x)\right|}{\|x-a\|^k} \le \frac{1}{k!} \sup_{z\in B_\delta(a)} \left\|(\mathrm{D}^{(k)} f)(z) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(a)\right\| \le \varepsilon.$$

Ez pedig éppen bizonyítandó határértéket jelenti.

3.13. Lokális szélsőérték jellemzése

3.49. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \ge f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \le f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.

– Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
– Az f *függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

3.50. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(a) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ és minden $x \in B_r(a)$ esetén $f(x) \le f(a)$. Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést. Tegyük fel, hogy létezik olyan $v \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre $Av \ne 0$ teljesül, és legyen $q = Av$.
A 3.12 tétel alapján ekkor

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = q.$$

Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $|t| \cdot \|v\| < r$, akkor az $a + tv \in B_r(a)$ tartalmazás miatt

$$f(a+tv) - f(a) \le 0.$$

Tehát $t \in \left]0, \frac{r}{\|v\|}\right[$ esetén

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \le 0,$$

illetve $t \in \left]-\frac{r}{\|v\|}, 0\right[$ esetén

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \ge 0.$$

Vagyis az

$$0 \le \lim_{t\to 0-} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \le 0$$

egyenlőtlenségekből a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t} = q = 0$ ellentmondást kaptuk. Tehát nem létezik olyan v vektor, amire $Av \ne 0$ teljesülne, tehát $A = 0$.
Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek ott lokális maximuma van, vagyis az előző gondolatmenet alapján $(\mathrm{D}(-f))(a) = 0$, amiből $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ adódik.

3.51. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \ne 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha k páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)} f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a) \neq 0$. Vezessük be a $Q = (\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ jelölést és az

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x-a\|^k}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a \end{cases}$$

függvényt. Az infinitezimális Taylor-formula alapján $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$, vagyis a φ függvény folytonos az a pontban, az a ponton kívül pedig nyilvánvalóan folytonos. A deriváltakra vonatkozó feltételezés alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)\,\|x-a\|^k + \frac{1}{k!} Q(x-a)^{[k]} \tag{3.4}$$

teljesül.
1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $\delta \in]0, r[$ olyan szám, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ teljesül. Ekkor a (3.4) egyenlet alapján minden $x \in B_\delta(a)$ pontra

$$\varphi(x)\,\|x-a\|^k + \frac{1}{k!} Q(x-a)^{[k]} \leq 0.$$

Legyen $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor. Ekkor minden $t \in \left[0, \dfrac{\delta}{\|v\|}\right[$ esetén az $x = a + tv$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, vagyis az előző egyenlet alapján

$$\varphi(a+tv)\,\|v\|^k\, t^k + \frac{t^k}{k!} Q(v)^{[k]} \leq 0,$$

azaz

$$k!\varphi(a+tv)\,\|v\|^k + Q(v)^{[k]} \leq 0.$$

Végrehajtva a $t \to 0$ határátmenetet

$$Q(v)^{[k]} \leq 0$$

adódik, vagyis Q negatív. A Young-tétel alapján Q szimmetrikus, ezért a $-v$ vektorra felírva a fenti egyenlőtlenséget

$$0 \geq Q(-v)^{[k]} = (-1)^k Q(v)^{[k]}$$

adódik, amiből pedig következik, hogy k páros.
2. Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek lokális maximuma van ott és az 1. pontban igazolt eredmény alapján ekkor Q pozitív leképezés lesz.
3. Tegyük fel, hogy a Q leképezés pozitív definit. Az 1.118 tétel alapján ekkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra $Q(v)^{[k]} \geq K\,\|v\|^k$ teljesül. Ekkor a (3.4) egyenlet alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) - \varphi(x)\,\|x-a\|^k = \frac{1}{k!} Q(x-a)^{[k]} \geq \frac{K}{k!}\,\|x-a\|^k,$$

vagyis

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^k \left(\varphi(x) + \frac{K}{k!}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, ezért létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{K}{2k!}$. Ekkor minden ilyen x vektorra

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^k \left(\varphi(x) + \frac{K}{k!}\right) > \|x-a\|^k \left(-\frac{K}{2k!} + \frac{K}{k!}\right) \geq 0$$

teljesül, vagyis az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.
4. Ha $(\mathrm{D}^k f)(a)$ negatív definit, akkor $(\mathrm{D}^k(-f))(a)$ pozitív definit és a 3. pontban igazolt eredmény alapján ekkor a $-f$ függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban, tehát az f függvénynek

szigorú lokális maximuma van ott.
5. Tegyük fel, hogy a Q leképezés indefinit. Legyen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, melyre $Q(v_1)^{[k]} > 0$ és $Q(v_2)^{[k]} < 0$. Ha $u_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$ $(i = 1, 2)$, akkor a multilinearitás miatt $Q(u_1)^{[k]} > 0$ és $Q(u_2)^{[k]} < 0$ teljesül. Legyen $\alpha_1 = Q(u_1)^{[k]}$ és $\alpha_2 = -Q(u_2)^{[k]}$. Ekkor minden $t \in [0, r[$ esetén ha $x_1 = a + tu_1$ és $x_2 = a + tu_2$, akkor $x_1, x_2 \in B_r(a)$, vagyis a (3.4) egyenlet alapján

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(a) &= t^k \left(\varphi(x_1) + \frac{\alpha_1}{k!}\right) \\ f(x_2) - f(a) &= t^k \left(\varphi(x_2) - \frac{\alpha_2}{k!}\right). \end{aligned}$$

Mivel $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1, \delta_2 \in]0, r[$, hogy minden $x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{\alpha_1}{2k!}$ és minden $x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{\alpha_2}{2k!}$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor minden $t \in]0, \delta[$ esetén ha $x_1 = a + tu_1$ és $x_2 = a + tu_2$

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(a) &= t^k \left(\varphi(x_1) + \frac{\alpha_1}{k!}\right) > \frac{t^k \alpha_1}{2k!} > 0 \\ f(x_2) - f(a) &= t^k \left(\varphi(x_2) - \frac{\alpha_2}{k!}\right) < -\frac{t^k \alpha_2}{2k!} < 0. \end{aligned}$$

Tehát az a pont bármely kis sugarú környezetében található olyan x_1 és x_2 vektor melyre $f(x_2) < f(a) < f(x_1)$ teljesül, ezért az f függvénynek nem lehet lokális szélsőértéke az a pontban.
6. Az 1. és a 2. pontból adódik.

3.52. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Ha az f függvény kétszer differenciálható az a pontban, $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(2)}f)(a)$ indefinit leképezés, akkor azt mondjuk, hogy *a nyeregpontja az f függvénynek.*

3.14. Feltételes szélsőérték

3.53. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén legyen $g_i : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Tekintsük a $H = \bigcap_{i=1}^{k} \overset{-1}{g_i}(0)$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a \in H \cap \operatorname{Dom} f$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ rendszer lineárisan független. Ekkor, ha az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor egyértelműen léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ paraméterek, melyekre*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i((\mathrm{D}g_i)(a))$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén legyen $g_i : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Definiáljuk a

$$G : \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Dom} g_i \to \mathbb{R}^k \qquad x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_k(x))$$

függvényt és a $H = \overset{-1}{G}(0) \cap \operatorname{Dom} f$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a \in H$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ rendszer lineárisan független és az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban. Ekkor a

$$(\mathrm{D}G)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 g_1)(a) & (\partial_2 g_1)(a) & \ldots & (\partial_n g_1)(a) \\ (\partial_1 g_2)(a) & (\partial_2 g_2)(a) & \ldots & (\partial_n g_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 g_k)(a) & (\partial_2 g_k)(a) & \ldots & (\partial_n g_k)(a) \end{pmatrix}$$

mátrixnak k lineárisan független sora van, vagyis a sorrangja k. Mivel a mátrix oszloprangja megegyezik a sorranggal, azért a fenti mátrixnak k darab lineárisan független oszlopa van. Az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren használt koordináták átszámozásával elérhető, hogy a $(\mathrm{D}G)(a)$ mátrix utolsó k oszlopa legyen lineárisan független. Legyen $d = \mathfrak{n} - k$ és tekintsük az

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \twoheadrightarrow \mathbb{R}^k \qquad (x_1, x_2) \mapsto G(x_1, x_2)$$

függvényt és az $a = (a_1, a_2)$ pontot. Ebben az esetben alkalmazható az implicitfüggvény tétel, tehát létezik az a_1, a_2 pontnak olyan nyílt Ω_1, Ω_2 környezete, hogy $\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom} G \cap \operatorname{Dom} f$, valamint létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ függvény, hogy minden $x_1 \in \Omega_1$ esetén

$$\mathcal{G}(x_1, \varphi(x_1)) = \mathcal{G}(a_1, a_2) = 0.$$

Ez alapján minden $x_1 \in \Omega_1$ esetén

$$(\partial_1 \mathcal{G})(x_1, \varphi(x_1)) + (\partial_2 \mathcal{G})(x_1, \varphi(x_1)) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(x_1) = 0. \tag{3.5}$$

Továbbá ha $x_1 \in \Omega_1$ és $x_2 \in \Omega_2$ olyan pont, hogy $G(x_1, x_2) = 0$, akkor $x_2 = \varphi(x_1)$. Tekintsük az

$$\mathfrak{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad x_1 \mapsto f(x_1, \varphi(x_1))$$

függvényt. Hogy az $f|_H$ függvénynek feltételes szélsőértéke van az (a_1, a_2) pontban, pontosan azt jelenti, hogy az $\mathfrak{f}$ függvénynek szélsőértéke van az a_1 pontban. Ez utóbbiból

$$(\mathrm{D}\mathfrak{f})(a_1) = (\partial_1 f)(a) + (\partial_2 f)(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a_1) = 0 \tag{3.6}$$

következik. A 3.5 egyenletet alkalmazva az a_1 pontra

$$(\mathrm{D}\varphi)(a_1) = ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_1 \mathcal{G})(a)$$

adódik ami a 3.6 egyenlet felhasználásával az alábbi egyenletre vezet.

$$(\partial_1 f)(a) = (\partial_2 f)(a) \, ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_1 \mathcal{G})(a)$$

Bevezetve a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdots \lambda_k \end{pmatrix} = (\partial_2 f)(a) \, ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1}$$

jelölést $(\partial_1 f)(a) = \Lambda(\partial_1 \mathcal{G})(a)$ adódik. Továbbá

$$(\partial_2 f)(a) = (\partial_2 f)(a) \, ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_2 \mathcal{G})(a) = \Lambda(\partial_2 \mathcal{G})(a)$$

miatt

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(\partial_1 \mathcal{G})(a) & \Lambda(\partial_2 \mathcal{G})(a) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} (\partial_1 \mathcal{G})(a) & (\partial_2 \mathcal{G})(a) \end{pmatrix} = \Lambda(\mathrm{D}\mathcal{G})(a).$$

Tehát tetszőleges $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén

$$((\mathrm{D}f)(a))_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, ((\mathrm{D}g_j)(a))_i$$

teljesül.

3.15. Konvexitás differenciális jellemzése

3.54. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ konvex halmaz.

– Azt mondjuk, hogy az f *függvény konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

teljesül.

– Azt mondjuk, hogy az f *függvény szigorúan konvex az* A *halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in]0,1[$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$
– Az f *függvény konkáv az* A *halmazon*, ha $-f$ konvex az A halmazon.
– Az f *függvény szigorún konkáv az* A *halmazon*, ha $-f$ szigorúan konvex az A halmazon.
– Az f *függvény (szigorúan) konvex/konkáv*, ha f (szigorúan) konvex/konkáv a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

3.55. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*
1. *Az f függvény konvex.*
2. *Minden $x, y \in \Omega$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) \leq f(y).$$
3. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.
$1 \Rightarrow 2$ Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Ekkor a konvexitás definíciója alapján minden $t \in]0,1]$ esetén
$$f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)),$$
amiből
$$\frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x) \tag{3.1}$$
adódik. Mivel f differenciálható az x pontban, ezért ebben a pontban létezik az $e = y - x$ iránymenti deriváltja és a 3.12 tétel alapján $(\mathrm{D}_e f)(x) = ((\mathrm{D}f)(x))(e)$ teljesül. Az iránymenti derivált definíciója és a (3.1) képlet alapján ekkor
$$(\mathrm{D}_e f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$
Ez pedig éppen az
$$((\mathrm{D}f)(x))(y - x) \leq f(y) - f(x)$$
egyenlőtlenséget jelenti.
$2 \Rightarrow 1$ Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, $t \in]0,1[$ és definiáljuk a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor a feltételezés szerint
$$f(x) \geq f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(x - z)$$
$$f(y) \geq f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(y - z)$$
Az első egyenletet megszorozva t-vel, a másodikat $(1-t)$-vel és összeadva
$$\begin{aligned} tf(x) + (1-t)f(y) &\geq f(z) + t((\mathrm{D}f)(z))(x-z) + (1-t)((\mathrm{D}f)(z))(y-z) = \\ &= f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(tx + (1-t)y - z) = f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(0) = f(z) = \\ &= f(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$
adódik.
$1 \Rightarrow 3$ Legyen $x \in \Omega$ és $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_R(x) \subseteq \Omega$ és legyen $r = \dfrac{R}{\|v\|}$. Tekintsük a
$$\alpha : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(x + tv)$$
függvényt. Az α függvény konvex, ugyanis ha $t_1, t_2 \in B_r(0)$ és $\lambda \in [0,1]$, akkor
$$\begin{aligned} \alpha(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(\lambda(x + t_1 v) + (1-\lambda)(x + t_2 v)) \leq \\ &\leq \lambda f(x + t_1 v) + (1-\lambda) f(x + t_2 v)) = \lambda\alpha(t_1) + (1-\lambda)\alpha(t_2). \end{aligned}$$
Az α függvény kétszer deriválható és a deriválási szabályokból
$$\alpha'(t) = ((\mathrm{D}f)(x + tv))(v) \qquad \alpha''(t) = ((\mathrm{D}^{(2)}f)(x + tv))(v, v)$$

adódik. Az egyváltozós, kétszer differenciálható konvex függvények második deriváltja nem negatív, ezért

$$0 \leq \alpha''(0) = ((\mathrm{D}^{(2)}f)(x))(v,v).$$

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. A skalárértékű függvényekre vonatkozó Taylor-formula (a 3.46 tétel) alapján létezik olyan $z \in [x,y]$ pont, melyre

$$f(y) = f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x)$$

teljesül. Felhasználva $(\mathrm{D}^{(2)}f)(z)$ pozitivitását, ebből

$$f(y) - f(x) - (\mathrm{D}f)(x)(y-x) = \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x) \geq 0$$

következik, vagyis

$$f(y) \geq f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x).$$

3.56. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. Az f függvény pontosan akkor szigorúan konvex, ha minden $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) < f(y)$$

2. Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív definit, akkor f szigorúan konvex.

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.
1. Tegyük fel, hogy f szigorúan konvex és $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Mivel f konvex, ezért a 3.55 tétel alapján

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) \leq f(y).$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy $f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) = f(y)$ teljesül. Az

$$\alpha : \{t \in \mathbb{R} |\ x + t(y - x \in \Omega)\} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(x+tv)$$

függvény konvex és kétszer differenciálható. Konvexitása miatt a deriváltja monoton növő, tehát

$$0 \leq \alpha' - \alpha'(0)$$
$$0 \leq \int_0^1 \alpha'(t) - \alpha'(0) = \alpha(1) - \alpha(0) - ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) = f(y) - f(x) - ((\mathrm{D}f)(x))(y-x).$$

A nem negatív $t \mapsto \alpha'(t) - \alpha(0)$ folytonos függvény integrálja csak akkor lehet nulla, ha minden pontban nulla a függvény. Ekkor viszont minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\int_0^t \alpha'(0) = \int_0^t \alpha' \tag{3.2}$$
$$t((\mathrm{D}f)(x))(y-x) = f(x + t(y-x)) - f(x). \tag{3.3}$$

A $t = \dfrac{1}{2}$ esetben ebből

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}f)(x))(y-x)$$

adódik, az f szigorú konvexitásából viszont az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = f(x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}f)(x))(y-x)$$

ellentmodás.
Most tegyük fel, hogy minden $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) < f(y).$$

Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, $t \in]0,1[$ és definiáljuk a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor a feltételezés szerint

$$\begin{aligned} f(x) &> f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(x-z) \\ f(y) &> f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(y-z) \end{aligned}$$

Az első egyenletet megszorozva t-vel, a másodikat $(1-t)$-vel és összeadva

$$\begin{aligned} tf(x) + (1-t)f(y) &> f(z) + t((\mathrm{D}f)(z))(x-z) + (1-t)((\mathrm{D}f)(z))(y-z) = \\ &= f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(tx + (1-t)y - z) = f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(0) = f(z) = \\ &= f(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

adódik.
2. Tegyük fel, hogy minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív definit. Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. A skalárértékű függvényekre vonatkozó Taylor-formula (a 3.46 tétel) alapján létezik olyan $z \in [x, y]$ pont, melyre

$$f(y) = f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x)$$

teljesül. Felhasználva $(\mathrm{D}^{(2)}f)(z)$ pozitív definitségét, ebből

$$f(y) - f(x) - (\mathrm{D}f)(x)(y-x) = \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x) > 0$$

következik, vagyis

$$f(y) > f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x).$$

Viszont ebből az 1. pont alapján következik, hogy f szigorúan konvex.

4. Fourier-sorok

4.1. Trigonometrikus polinomok

4.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

leképezés ***skaláris szorzás***, ha

- $\forall x \in V : \ \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V : \ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y, z \in V : \ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
- $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$;
- $\forall x, y \in V : \ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

4.2. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett és legyen $x, y \in V$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \leq \langle z, z\rangle = \langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{t} \langle y, x\rangle - t \langle x, y\rangle + |t|^2 \langle y, y\rangle .$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$ értéket

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle x, y\rangle + \frac{\langle y, x\rangle \langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle \langle y, y\rangle} \langle y, y\rangle = \\ &= \frac{1}{\langle y, y\rangle} \Big(\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \Big) \end{aligned}$$

adódik.

4.3. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in V$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer

- *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha

$$\forall x \in V \Big((\forall i \in I : \langle e_i, x\rangle = 0) \to x = 0 \Big)$$

  teljesül.

Jelölés. A jelen fejezetben különösen sokat fogjuk használni a

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \triangleq \{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{K}) | \ \forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) = f(x + 2\pi) \}$$

jelölést.

4.4. Definíció. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \triangleq \left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ \Big| \ n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\} : a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

részhalmazát *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.

4.5. Tétel. *(A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságai.)*

1. *A pontonkénti műveletekkel* $\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *algebrát alkot.*
2. *Minden* $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *polinom esetén* $P\circ\cos\in\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$*.*
3. *Minden* $f\in\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *és* $x\in\mathbb{R}$ *esetén a* $t\mapsto f(t+x)$ *függvény is trigonometrikus polinom.*

Bizonyítás.
1. A trigonometrikus polinomok halmaza az összeadásra és a számmal való szorzásra nyilván zárt, a szorzásra pedig a minden $k,l\in\mathbb{N}$ és $t\in\mathbb{R}$ számra érvényes

$$\begin{aligned}\sin(kt)\sin(lt)&=\frac{1}{2}\cos((k-l)t)-\frac{1}{2}\cos((k+l)t)\\ \sin(kt)\cos(lt)&=\frac{1}{2}\sin((k-l)t)+\frac{1}{2}\sin((k+l)t)\\ \cos(kt)\cos(lt)&=\frac{1}{2}\cos((k-l)t)+\frac{1}{2}\cos((k+l)t)\end{aligned}$$

addíciós formulák miatt zárt.
2. Megmutatjuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\cos^n$ trigonometrikus polinom. Az $n=0$ és $n=1$ esetekben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\cos^n$ trigonometrikus polinom. Ekkor a $\cos^n$ trigonometrikus polinomot megszorozva a cos trigonometrikus polinommal, az 1. pont értelmében megint trigonometrikus polinomot kapunk, tehát $\cos^{n+1}$ is trigonometrikus polinom. Ebből az 1. pont alkalmazásával adódik, hogy minden P polinomra $P\circ\cos$ trigonometrikus polinom.
3. A minden $t,x\in\mathbb{R}$ és $k\in\mathbb{N}$ számra fennálló

$$\begin{aligned}\sin(k(t+x))&=\cos(kx)\sin(kt)+\sin(kx)\cos(kt)\\ \cos(k(t+x))&=\cos(kx)\cos(kt)-\sin(kx)\sin(kt)\end{aligned}$$

azonosságokból következik az állítás.

4.6. Tétel. *(Weierstrass approximációs tétele.)* *Minden* $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *függvényhez és minden* $\varepsilon>0$ *számhoz létezik olyan* $\varphi\in\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$*, melyre* $\|f-\varphi\|_\infty<\varepsilon$ *teljesül.*

Bizonyítás. Több lépésben bizonyítjuk a tételt.
1. Legyen $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ páros függvény, és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f\circ\arccos:[-1,1]\to\mathbb{R}$ függvény folytonos és a 2.27 tétel szerint létezik olyan $p:[-1,1]\to\mathbb{R}$ polinom, hogy

$$\sup_{t\in[-1,1]}|f(\arccos(t))-p(t)|<\varepsilon$$

teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a $\varphi=p\circ\cos$ függvény trigonometrikus polinom. Mivel az f és a φ függvény 2π szerint periodikus, ezért

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-\varphi(x)|=\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)-\varphi(x)|\,,$$

valamint mivel az f és a φ függvény páros, ezért

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)-\varphi(x)|=\sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)-\varphi(x)|\,.$$

Minden $x\in[0,\pi]$ esetén $\arccos\cos x=x$ és minden $t\in[-1,1]$ esetén $\cos\arccos t=t$, ezért

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)-\varphi(x)|&=\sup_{x\in[0,\pi]}|(f\circ\arccos)(\cos x)-((p\circ\cos)\circ\arccos)(\cos x)|=\\ &=\sup_{t\in[-1,1]}|(f\circ\arccos)(t)-p(t)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

vagyis $\|f-\varphi\|_\infty<\varepsilon$.
2. Legyen $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Most megmutatjuk, hogy létezik olyan $\varphi\in\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, melyre $\left\|f\sin^2-\varphi\right\|_\infty<\varepsilon$ teljesül. Legyen

$$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad x\mapsto\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x.$$

Ekkor $f \sin^2 = f_1 \sin^2 + f_2 \sin$, valamint $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ páros 2π szerint periodikus függvények, vagyis az 1. pont alapján létezik olyan φ_1, φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|f_1 - \varphi_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|f_2 - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a $\varphi = \varphi_1 \sin^2 + \varphi_2 \sin$ függvény trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\begin{aligned}\left\|f \sin^2 - \varphi\right\|_\infty &= \left\|f_1 \sin^2 + f_2 \sin - (\varphi_1 \sin^2 + \varphi_2 \sin)\right\|_\infty \leq \\ &\leq \left\|f_1 \sin^2 - \varphi_1 \sin^2\right\|_\infty + \|f_2 \sin - \varphi_2 \sin\|_\infty \leq \\ &\leq \|f_1 - \varphi_1\|_\infty + \|f_2 - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

teljesül.
3. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan φ trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f \cos^2 - \varphi\right\|_\infty < \varepsilon$ teljesül. Legyen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ekkor $f_1 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, vagyis az 2. pont alapján létezik olyan φ_1 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f_1 \sin^2 - \varphi_1\right\|_\infty < \varepsilon$ teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \varphi_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

függvény trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\begin{aligned}\left\|f \cos^2 - \varphi\right\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f(x) \cos^2 x - \varphi(x)\right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f_1(x) \sin^2(x) - \varphi_1\right| = \left\|f_1 \sin^2 - \varphi_1\right\|_\infty < \varepsilon\end{aligned}$$

teljesül.
4. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 2. pont alapján létezik olyan φ_1 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f \sin^2 - \varphi_1\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$; a 3. pont alapján létezik olyan φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f \cos^2 - \varphi_2\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Ekkor

$$\|f - \varphi\|_\infty = \left\|f \sin^2 + f \cos^2 - \varphi_1 - \varphi_2\right\|_\infty \leq \left\|f \sin^2 - \varphi_1\right\|_\infty + \left\|f \cos^2 - \varphi_2\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

5. Végül legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 4. pont alapján létezik olyan φ_1 és φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|\mathrm{Re}\, f - \varphi_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|\mathrm{Im}\, f - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $\varphi = \varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2$. Ekkor

$$\|f - \varphi\|_\infty = \|(\mathrm{Re}\, f - \varphi_1) + \mathrm{i}(\mathrm{Im}\, f - \varphi_2)\|_\infty < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} < \varepsilon.$$

4.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer

4.7. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx) \,\mathrm{d}\, x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(kx) \,\mathrm{d}\, x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$.
1. Ekkor kihasználva, hogy a sin függvény 2π szerint periodikus

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_a^{a+2\pi} = \frac{\sin(ka) - \sin(ka + k2\pi)}{k} = 0$$

adódik. Hasonlóan igazolható, hogy $\int_a^{a+2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$.
2. A minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ számra érvényes $\cos(2kx) = \cos^2(kx) - \sin^2(kx)$ és $\sin^2(kx) + \cos^2(kx) = 1$ formulából az 1. pont eredményének a felhasználásával

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} 1 + \cos(2kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} 1 - \cos(2kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

adódik.
3. A trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós tételek és az 1. pont alapján

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int\limits_a^{a+2\pi} \cos((k+l)x) + \cos((k-l)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int\limits_a^{a+2\pi} \cos((m-l)x) - \cos((l+m)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int\limits_a^{a+2\pi} \sin((m+k)x) + \sin((k-m)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

adódik.

4.8. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az*

$$S_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az $S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $[0, 2\pi]$ intervallumon az f határfüggvényhez, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0$$

teljesül. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t)\sin(kt) - f(t)\sin(kt)| &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)|\,|\sin(kt)| \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t)\cos(kt) - f(t)\cos(kt)| &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)|\,|\cos(kt)| \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0,\end{aligned}$$

vagyis a $t \mapsto S_n(t)\sin(kt)$ és a $t \mapsto S_n(t)\cos(kt)$ függvénysorozat is egyenletesen konvergál a $t \mapsto f(t)\sin(kt)$ és a $t \mapsto f(t)\cos(kt)$) függvényhez. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $S_n(t)\sin(kt)$ illetve az $S_n(t)\cos(kt)$ függvény folytonos, ezért a függvénysorozat tagonkénti integrálhatóságáról szóló tétel értelmében

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}\,t &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}\,t \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\ \mathrm{d}\,t &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\sin(kt)\ \mathrm{d}\,t,\end{aligned}$$

továbbá a trigonometrikus függvények integráljáról szóló 4.7 tétel miatt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}\,t &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{lll} 0, & \text{ha} & n < k; \\ \pi a_k & \text{ha} & n \geq k; \end{array} \right\} = \pi a_k \\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\sin(kt)\ \mathrm{d}\,t &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{lll} 0, & \text{ha} & n < k; \\ \pi b_k & \text{ha} & n \geq k; \end{array} \right\} = \pi b_k\end{aligned}$$

amiből következik az állítás.

4.9. Tétel. *A $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vektortéren tekintsük a*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C_{2\pi}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \times C_{2\pi}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}g$$

leképezést.

1. *A fent definiált művelet skaláris szorzás.*
2. *A*
$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$
vektorrendszer ortonormált és teljes.
3. *A*
$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}^{+}\right\}$$
vektorrendszer ortonormált és teljes.

Bizonyítás. 1. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a definiált művelet teljesíti a skaláris szorzás kritériumait.
2. Legyen $k, l \in \mathbb{Z}$. Ha $k \neq l$, akkor a 4.7 tétel alapján

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,lx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kx) - \mathrm{i}\sin(kx))(\cos(lx) + \mathrm{i}\sin(lx))\,\mathrm{d}\,x = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx) + \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx) - \sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0\end{aligned}$$

ami mutatja, hogy a függvényrendszer ortogonális. A minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén fennálló

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\,x = 1$$

egyenlet pedig mutatja, hogy a függvényrendszer normált.
3. Legyen $k, l \in \mathbb{N}^+$. Ha $k \neq l$, akkor a 4.7 tétel alapján

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right\rangle = 0$$

ami mutatja, hogy a 2. pontban megadott függvényrendszer ortogonális. Szintén a 4.7 tétel alapján a

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = 1$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\rangle = 1$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right\rangle = 1$$

összefüggések pedig azt mutatják, hogy a megadott függvényrendszer normált.
4. Most igazoljuk, hogy az 1. illetve a 2. pontban megadott függvényrendszer teljessége ekvivalens. Ehhez először tegyük fel, hogy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \right\rangle = 0$$

teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0 \cdot x} \right\rangle = 0$$
$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, nx} \right\rangle = 0$$
$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, nx} \right\rangle = 0$$

teljesül. Tehát ha f merőleges a

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

vektorhalmaz minden elemére, akkor merőleges az összes

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

vektorra is.
Fordítva, tegyük fel, hogy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy merőleges a

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

vektorhalmaz összes elemére. Ekkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\rangle = 0, & \text{ha,} \quad n > 0; \\ 0, & \text{ha,} \quad n = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\rangle = 0, & \text{ha,} \quad n < 0 \end{cases}$$

teljesül, tehát f merőleges minden

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

vektorra.
5. Most megmutatjuk, hogy a megadott függvényrendszer teljes. Ehhez tegyük fel, hogy létezik olyan nem azonosan nulla $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\langle f(x), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx}\rangle = 0$ teljesül. Mivel f nem azonosan nulla, ezért $0 < \int_0^{2\pi} |f|^2$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A 4.6 Weierstrass approximációs tétele szerint létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, hogy minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Ekkor viszont a 4.2 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 = \int_0^{2\pi} (\overline{f} - \overline{\varphi}) f = \langle f - \varphi, f\rangle \le \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f|^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f - \varphi|^2\right)} < \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f|^2\right)} \cdot \sqrt{2\pi}\varepsilon,$$

adódik, amiből viszont

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2} < \sqrt{2\pi}\varepsilon$$

következik. Mivel ez minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül, ezért ebből a $\int_0^{2\pi} |f|^2 = 0$ ellentmondás adódik.

4.3. Függvény Fourier-sora

4.10. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, \mathrm{d}\, t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, \mathrm{d}\, t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

számokat. Az *f függvény $x \in \mathbb{R}$ pontbeli Fourier-sorának* nevezzük a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor *$n-$edik részletösszeg-függvényének* nevezzük az

$$S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

függvényt.

4.11. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \\ b_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

teljesül. Továbbá a $D_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(k)}\right|$ jelölés mellett minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_n| \le \frac{D_k}{n^k} \qquad |b_n| \le \frac{D_k}{n^k}.$$

Bizonyítás. A $k = 0$ esetben a Fourier-együtthatók definíciója alapján teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, és legyen $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a parciális integrálás felhasználásával

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t = \\ =& \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \left(\left[f^{(k)}(t) \frac{1}{n} \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \right) = \\ =& \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \cos\left(nt - (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

adódik, ami mutatja, hogy a $k+1$ számra is igaz az állítás. A b_n együtthatókra teljesen hasonlóan igazolható az állítás. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} |a_n| =& \left| \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \right| \le \frac{1}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^{(k)}(t) \right| \cdot \left| \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \right| \mathrm{d}\, t \le \\ \le& \frac{1}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^{(k)}(t) \right| \mathrm{d}\, t = \frac{D_k}{n^k} \end{aligned}$$

teljesül. A b_n együtthatókra teljesen hasonlóan igazolható az egyenlőtlenség.

4.12. Tétel. *Minden $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ekkor f'' és $|f''|$ is folytonos függvény, tehát integrálható. Tekintsük a

$$D = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''|$$

számot. A 4.11 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra

$$|a_n| \le \frac{D}{n^2} \qquad |b_n| \le \frac{D}{n^2}$$

teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Ekkor a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \le \sup_{x \in \mathbb{R}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \le |a_n| + |b_n| \le \frac{2D}{n^2}$$

becslés alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \le 2D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

adódik, vagyis a $\sum_n f_n$ függvénysorra alkalmazható a 2.12 Weierstrass-tétel, ezért a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen is konvergens. Mivel minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

ezért az $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergens, továbbá a $g = \lim_{n \to \infty} S_n$ határfüggvény folytonos is. Az $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergenciája miatt a 4.8 tétel alapján a g függvény Fourier-együtthatóira minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}\, x, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx)\, \mathrm{d}\, x$$

adódik, vagyis a $h = f - g$ folytonos függvény összes Fourier-együtthatója nulla. Ebből a trigonometrikus rendszer teljességéről szóló 4.9 tétel alapján $h = 0$ adódik.