Kalkulus 2

Andai Attila*

2018. április 29.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\stackrel{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \stackrel{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Véges dimenziós terek topológiája

1.1. Tétel. *A $\mathbb{K}^n$ tér a fenti műveletekkel vektortér.*

1.2. Tétel. *A $\mathbb{K}^n$ téren a skaláris szorzásra az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in \mathbb{K}^n : \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$
2. $\forall x \in \mathbb{K}^n : \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$
5. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

1.3. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ vektorra*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

1.4. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\mathbb{K}^n$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának vagy sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

1.5. Tétel. *A $\mathbb{K}^n$ téren minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ teljesül.*

1.6. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\langle x, y \rangle = \|x\|_2 \|y\|_2 \cos \alpha$$

teljesül, ahol α a vektorok által bezárt szög.

1.7. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

1.8. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - \|x - y\|[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

1.9. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezésre az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.10. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

1.11. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x \in \mathbb{K}^n$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

1.12. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. *Az üres halmaz és* $\mathbb{K}^n$ *nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

1.13. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. *Az üres halmaz és* $\mathbb{K}^n$ *zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

1.14. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $Z, U \subseteq \mathbb{K}^n$. *Ha* Z *zárt halmaz és* U *nyílt halmaz, akkor* $Z \setminus U$ *zárt halmaz és* $U \setminus Z$ *nyílt halmaz.*

1.15. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Tetszőleges* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz esetén*

1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet* X *tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza* X*-et.*

1.16. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Tetszőleges* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz esetén*

1. *az* X *halmaz pontosan akkor nyílt, ha* $X = \operatorname{Int} X$*;*
2. *az* X *halmaz pontosan akkor zárt, ha* $X = \overline{X}$.

1.17. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Az* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

1.18. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $X \subseteq \mathbb{K}^n$. *Ekkor*

$$\begin{aligned}\operatorname{Int} X &= \mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus X},\\ \overline{X} &= \mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X).\end{aligned}$$

1.19. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

1.20. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

1.21. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

1.22. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $A \subseteq \mathbb{K}^n$ *és* $x \in \mathbb{K}^n$.

1. *Az* A *halmaznak* x *pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan* $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ *sorozat, melyre* $\lim a = x$.
2. *Az* A *halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens* $a : \mathbb{N} \to A$ *sorozatra* $\lim a \in A$.

1.23. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ *és* $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *konvergens sorozat.*

1. *Az* $a + b$ *sorozat konvergens és* $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. *A* ca *sorozat konvergens és* $\lim(ca) = c(\lim a)$.
3. *A* λa *sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.
4. *Az* $\|a\|$ *sorozat konvergens és* $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.

1.24. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, *és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ *sorozat. Az* a *sorozat pontosan akkor konvergens a* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ *térben, ha minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *esetén az* $a_i = \operatorname{pr}_i \circ a$ *sorozat konvergens és ekkor minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *indexre*

$$\operatorname{pr}_i(\lim a) = \lim(\operatorname{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

1.25. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

1.26. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

1.27. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

1.28. Tétel. *A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes, továbbá minden $A \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz teljes.*

1.29. Tétel. *A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér Banach-tér.*

1.30. Tétel. *A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben*
1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

1.31. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz.*
1. *Ekkor X korlátos és zárt.*
2. *Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

1.32. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $(K_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}^n$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset.$$

1.33. Tétel. *Minden $R \in \mathbb{R}^+$ esetén a $[-R, R]^n$ halmaz kompakt az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben.*

1.34. Tétel. *(Heine–Borel-tétel végtelen normára.) Az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

1.35. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel euklidészi terekben végtelen normára.) Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

1.36. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény, az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in \mathbb{K}^m$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

1.37. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és a $z \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

1.38. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}^n$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_a g$ és $\lim\limits_a \varphi$. Akkor az a pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(f+g)$, a $\operatorname{Dom}(\lambda f)$, a $\operatorname{Dom}(\varphi f)$ és a $\operatorname{Dom}(\|f\|)$ halmaznak, valamint*
1. $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$;
2. $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda(\lim\limits_a f)$;
3. $\lim\limits_a (\varphi f) = (\lim\limits_a \varphi)(\lim\limits_a f)$;
4. $\lim\limits_a \|f\| = \left\|\lim\limits_a f\right\|$.

1.39. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

1.40. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, *és az* $a \in \operatorname{Dom} f$ *pont a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha* $\lim\limits_a f$ *létezik és* $\lim\limits_a f = f(a)$.

1.41. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. *Tegyük fel, f, g és* φ *folytonos az a pontban. Ekkor az a pontban*

1. $f + g$;
2. λf;
3. φf;
4. $\|f\|$

folytonos.

1.42. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $\lambda \in \mathbb{K}$, *valamint* $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *és* $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *folytonos függvény. Ekkor* $f + g$, λf, φf *és* $\|f\|$ *is folytonos.*

1.43. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.)* *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$. *Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *nyílt halmazra létezik olyan* $U \subseteq \mathbb{K}^n$ *nyílt halmaz, melyre* $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*
3. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *zárt halmazra létezik olyan* $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ *zárt halmaz, melyre* $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*

1.44. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.)* *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. *Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *nyílt halmazra* $\overset{-1}{f}(A)$ *nyílt.*
3. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *zárt halmazra* $\overset{-1}{f}(A)$ *zárt.*

1.45. Tétel. *Véges dimenziós normált terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

1.46. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér és* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha* f^{-1} *folytonos.*

1.47. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos függvény. Ekkor az* $f(K)$ *halmaz is kompakt.*

1.48. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Ekkor létezik* $x, y \in K$, *melyekre* $f(x) = \inf f(K)$ *és* $f(y) = \sup f(K)$ *teljesül.*

1.49. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos injektív függvény. Ekkor az* f^{-1} *függvény is folytonos.*

1.50. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz,* $V \subseteq \mathbb{K}^m$ *és* $f : K \to V$ *folytonos bijekció. Ekkor f homeomorfizmus.*

1.51. Tétel. *Normált terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

1.52. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

1.53. Tétel. *Legyen* $\|\cdot\|'$ *és* $\|\cdot\|$ *norma a* $\mathbb{K}^n$ *vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden* $\|\cdot\|$ *norma szerinti* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *nyílt halmaz nyílt a* $\|\cdot\|'$ *norma szerint is.*
2. *Minden* $x \in \mathbb{K}^n$ *és* $r \in \mathbb{R}^+$ *paraméterekhez létezik olyan* $R \in \mathbb{R}^+$, *melyre* $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.

3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$.*

1.54. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.*

1.55. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$ esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek a $\mathbb{K}^n$ téren.*

1.56. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbb{K}^n$ vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

1.57. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyíltsága, zártsága, korlátossága és kompaktsága független attól, hogy a $\mathbb{K}^n$ tér milyen normával van ellátva.*

1.58. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat és $A \in \mathbb{K}^n$. Az a sorozat határértéke pontosan akkor A, ha minden olyan $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmazra, melyre $A \in \Omega$ teljesül létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $N < n$ esetén $a_n \in \Omega$ teljesül.*

1.59. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat konvergenciája és határértéke független a $\mathbb{K}^n$ téren választott normától.*

1.60. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \mathbb{K}^n$ olyan pont, mely torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak. Az f függvény a pontbeli határértéke független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*

1.61. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$.*

1. *Az f függvény a pontbeli folytonossága független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*
2. *Az f függvény folytonossága független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*

1.62. Tétel. *(Heine–Borel-tétel.) Az $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

1.63. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel véges dimenziós normált terekben.) Legyen a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

1.64. Tétel. *Az $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér Banach-tér, továbbá minden zárt részhalmaza teljes.*

1.65. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^n$ lineáris altér, akkor L teljes.*

1.66. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $i \in \{1, \ldots, n\}$, akkor a*

$$\operatorname{pr}_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

függvény folytonos.

1.67. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \mathbb{K}^n$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak. Pontosan akkor létezik a $\lim\limits_a f$ határérték, ha minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_i$ határérték és ekkor minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ indexre*

$$\left(\lim_a f\right)_i = \lim_a f_i$$

teljesül.

1.68. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ esetén az f_i függvény folytonos az a pontban.*

1.69. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.*

1.70. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ sor konvergens és*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| .$$

1.71. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

teljesül.

1.72. Tétel. *Ha $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény lineáris.

1.73. Tétel. *Legyen $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ és minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji} = (Ae_i)_j$. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

1.74. Tétel. *(Riesz-féle reprezentációs tétel véges dimenzióban.) Minden $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle$$

teljesül.

1.75. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*

$$X = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x\| \leq 1 \right\}$$

jelölés mellett $\sup\limits_{x \in X} \|Ax\|' < \infty$ teljesül;

2. *minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$\|Ax\|' \leq \|x\| \cdot \sup_{x \in X} \|Ax\|' ;$$

3. *A folytonos.*

1.76. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|'$$

leképezés norma.

1.77. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ és $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Ekkor*

$$\|Ax\|' \leq \|A\| \cdot \|x\| .$$

1.78. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ normált tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2})$ és $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_3})$. Ekkor*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

1.79. Tétel. *A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *tér Banach-tér.*

1.80. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Ha az* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ *leképezésre* $\|A\| < 1$ *teljesül, akkor a* $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ *sor konvergens, az* $1 - A$ *elem invertálható és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol id *jelöli a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *identitásfüggvényt.*

1.81. Tétel. *Legyen*

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \triangleq \left\{a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \middle| \ \exists a^{-1}\right\}.$$

(Vagyis $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *jelöli az invertálható lineáris leképezések halmazát.) Ekkor*

1. *minden* $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *elemre* $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*;*
2. *a* $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *halmaz nyílt;*
3. *az* $i : \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*,* $i(a) = a^{-1}$ *leképezés folytonos.*

1.82. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*, valamint* $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$*. Minden* $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *és* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén legyen* $A_{ji_1\ldots i_k} = A(e_{i_1} \ldots e_{i_k})_j$*. Ekkor minden* $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektor és* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *index esetén*

$$A(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})_j = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\mathfrak{n}} A_{ji_1,\ldots,i_k} x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(k)}_{i_k} \tag{1.1}$$

teljesül.

1.83. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér és* $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *multilineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \ \middle| \ \|x_i\| \le 1\right\}$$

jelölés mellett $\sup_{x \in X} \|A(x)\|' < \infty$ *teljesül;*

2. *minden* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra*

$$\|A(x_1, \ldots, x_k)\|' \le \|x_1\| \cdot \cdots \cdot \|x_k\| \cdot \sup_{x \in X} \|A(x)\|';$$

3. *A folytonos.*

1.84. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér. Ekkor a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right) \to \mathbb{R}^+_0 \qquad A \mapsto \sup\left\{\|Ax\|' \in \mathbb{R}^+_0 \ \middle| \ x \in \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} | \ \|x_i\| \le 1\}\right\}$$

leképezés norma.

1.85. Tétel. *Ha* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér, akkor* $\left(\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right), \|\cdot\|\right)$ *Banach-tér.*

1.86. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér. A*

$$\rho : \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right) \to \mathrm{Lin}^{k+1}\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^{k+1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$$

$$A \mapsto \Big((x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_{k+1})\Big)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \operatorname{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathtt{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathtt{m}}\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

1.87. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathtt{n}})^k, \mathbb{R}\right)$. Ha A leképezés pozitív definit, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ esetén $A(v^{[k]}) \geq K\|v\|^k$; illetve ha A negatív definit, akkor létezik olyan $K' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ esetén $A(v^{[k]}) \leq -K'\|v\|^k$.*

1.88. Tétel. *Minden kontrakció folytonos.*

1.89. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel euklidészi terekben.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in \Omega$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

1.90. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ esetén*
$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x, y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos és folytonos;*
3. *$\overline{A} = \{z \in M |\ \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$.*

1.91. Tétel. *(Zárt konvex és kompakt konvex halmazok szétválasztása.) Tegyük fel, hogy $K, Z \subseteq \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt.*

1. *Létezik olyan $a \in K$ és $b \in Z$, melyre $d(a, b) = \operatorname{dist}(K, Z)$ teljesül.*
2. *Létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

1.92. Tétel. *(Zárt konvex halmaz és pont szétválasztása.) Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ zárt konvex halmaz és $p \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \setminus Z$ Ekkor létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\langle z, p\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

1.93. Tétel. *Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ zárt konvex halmaz és*

$$H = \{(z, c) \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \times \mathbb{R} |\ \forall x \in Z :\ \langle z, x\rangle < c\}.$$

Ekkor

$$Z = \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}} |\ \langle z, y\rangle < c\}$$

teljesül.

1.94. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre*

$$\begin{aligned} &\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{C} :\ r < |x| \ \rightarrow\ C < |f(x)| \\ &\forall x \in \mathbb{C} :\ f(x) \neq 0 \ \rightarrow\ \exists y \in \mathbb{C} :\ |f(y)| < |f(x)| \end{aligned}$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$.

1.95. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $C \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ esetén $C < |p(z)|$ teljesül.*

1.96. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $x \in \mathbb{C}$ esetén, ha $p(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|p(y)| < |p(x)|$ teljesül.*

1.97. Tétel. *(Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomnak létezik gyöke.*

2. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

2.1. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \ (N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül.

2.2. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\mathrm{Dom}\, f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^m)$.*

2.3. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény, $\mathrm{Dom}\, f = M$ és a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^m)$.*

2.4. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\mathrm{Dom}\, f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

2.5. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^b(M, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t\in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma a $C^b(M, \mathbb{K}^m)$ vektortéren, azaz

1. *$\forall f \in C^b(M, \mathbb{K}^m) : \ \|f\|_{\sup} = 0 \ \leftrightarrow \ f = 0$;*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall f \in C^b(M, \mathbb{K}^m) : \ \|\lambda f\|_{\sup} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\sup}$;*
3. *$\forall f, g \in C^b(M, \mathbb{K}^m) : \ \|f + g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$.*

2.6. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^b(M, \mathbb{K}^m)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in C^b(M, \mathbb{K}^m)$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha konvergens a $(C^b(M, \mathbb{K}^m), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben, azaz, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ \Big(N < n \ \rightarrow \ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\Big)$$

teljesül.

2.7. Tétel. *Ha $M \subseteq \mathbb{K}^n$, akkor $(C^b(M, \mathbb{K}^m), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér, azaz minden olyan $C^b(M, \mathbb{K}^m)$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz, melyre*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \ \big(N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon\big),$$

teljesül, létezik olyan $f \in C^b(M, \mathbb{K}^m)$, melyre

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ \big(N < n \ \rightarrow \ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\big).$$

2.8. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

2.9. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in M} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysor konvergens és egyenletesen is konvergens.

2.10. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

2.11. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

2.12. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum\limits_n f_n'$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sor, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sor;*
2. *az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén*
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

2.13. Tétel. *(Függvénysorozat határfüggvényének integrálhatósága.) A $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a függvénysorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$
teljesül.

2.14. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének integrálhatósága.) Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$
teljesül.

2.15. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r \in [0, R_a[$, akkor a $B_r(0)$ halmazon a P_a hatványsorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty$$

   teljesül.
4. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

2.16. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R_a$ esetén a hatványsor tagonként differenciálható az x pontban, azaz*

$$P_a'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}.$$

2.17. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ esetén a hatványsor tagonként integrálható az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, azaz*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \mathrm{d}\,x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta a_k x^k \,\mathrm{d}\,x.$$

2.18. Tétel. *Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = 0.$$

2.19. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül. Ha a P_a hatványsor konvergens az $x_0 \in \{R_a, -R_a\}$ pontban, akkor egyenletesen konvergens a $\lfloor 0, x_0 \rfloor$ szakaszon és a $P_a|_{\lfloor 0, x_0 \rfloor}$ függvény folytonos.*

2.20. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \left| B_n^f(t) - f(t) \right| \right) = 0.$$

2.21. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinom, hogy minden $x \in [a, b]$ számra*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

3. Differenciálszámítás véges dimenzióban

3.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

3.2. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \exists \delta \in \mathbb{R}^{+} \forall x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} : \Big(\|x-a\| < \delta \ \to \ \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \le \varepsilon \cdot \|x-a\| \Big)$$

teljesül.

3.3. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága és $(\mathrm{D}f)(a)$ értéke független az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ és $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ tereken választott normától.*

3.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

3.5. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

3.6. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \operatorname{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül, amit a mátrixok nyelvén úgy is kifejezhetünk, hogy ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{i\mathfrak{n}} \end{pmatrix},$$

akkor

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}.$$

3.7. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $\varphi : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$.*

3.8. Tétel. *Minden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz esetén $C^1(\Omega, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ vektortér.*

3.9. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_3}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f \circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a).$$

3.10. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

3.11. Tétel. *Az* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}, \mathbb{R}^{\mathsf{m}})$ *lineáris leképezés minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}, \mathbb{R}^{\mathsf{m}}) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

3.12. Tétel. *Ha* $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathsf{n}_i}$, *és* $j \in \{1, \ldots, k\}$, *akkor az*

$$\mathrm{in}_{u,j} : \mathbb{R}^{\mathsf{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathsf{n}_i} \qquad x \mapsto (u_1, \ldots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \ldots, u_k)$$

inklúzió függvény deriváltjára minden $a \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}_j}$ *pontban*

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) = \mathrm{in}_{0,j}$$

teljesül, azaz

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) : \mathbb{R}^{\mathsf{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathsf{n}_i} \qquad x \mapsto (0, \ldots, 0, \underbrace{x}_{j.\ \textit{hely}}, 0, \ldots, 0).$$

3.13. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $f : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$, $f(a) = a^k$. *Ekkor minden* $a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *esetén*

$$(\mathrm{D}f)(a) : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

teljesül.

3.14. Tétel. *Ha*

$$\mathrm{GL}_{\mathsf{n}}(\mathbb{R}) = \left\{ a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \mid \exists a^{-1} \right\},$$

akkor az invertálás $i : \mathrm{GL}_{\mathsf{n}}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_{\mathsf{n}}(\mathbb{R})$, $i(a) = a^{-1}$ *függvényére minden* $a \in \mathrm{GL}_{\mathsf{n}}(\mathbb{R})$ *pontban*

$$(\mathrm{D}i)(a) : \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \qquad b \mapsto -a^{-1} b a^{-1}$$

teljesül.

3.15. Tétel. *Ha az* $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathsf{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathsf{m}}$ *függvény differenciálható az* $a \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\, f$ *pontban, akkor minden* $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathsf{n}_i}$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{k} ((\partial_i f)(a))(x_i)$$

teljesül.

3.16. Tétel. *Ha az* $f : \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $a \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\, f$ *pontban, akkor minden* $x \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{\mathsf{n}} ((\partial_i f)(a)) x_i$$

teljesül, vagyis a mátrixok nyelvén

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) & \ldots & (\partial_{\mathsf{n}} f)(a) \end{pmatrix}.$$

3.17. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^\mathfrak{n}, \mathbb{R}^\mathfrak{m})$ lineáris leképezés mátrixa*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_\mathfrak{n} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_\mathfrak{n} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_\mathfrak{m})(a) & (\partial_2 f_\mathfrak{m})(a) & \cdots & (\partial_\mathfrak{n} f_\mathfrak{m})(a) \end{pmatrix}.$$

3.18. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$, $a \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\, f$ és legyen $k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ tetszőleges index. Ekkor az f függvénynek pontosan akkor létezik a k-adik változó szerinti parciális deriváltja az a pontban, ha létezik az e_k iránymenti deriváltja az a pontban és ebben az esetben $(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}_{e_k} f)(a)$ teljesül.*

3.19. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ pontban. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ vektor esetén*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \langle (\mathrm{grad}\, f)(a), x \rangle$$

teljesül.

3.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és legyen $a, e \in \mathbb{R}^n$. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor létezik az f függvény a pontbeli e iránymenti deriváltja és*

$$(\mathrm{D}_e f)(a) = \langle (\mathrm{grad}\, f)(a), e \rangle .$$

3.21. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ differenciálható az $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ pontban, akkor*

$$(\mathrm{div}\, f)(a) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f_i)(a).$$

3.22. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor minden $a \in \mathrm{Dom}(\Delta f)$ elemre*

$$(\Delta f)(a) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k^2 f)(a)$$

teljesül.

3.23. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ekkor létezik olyan $c \in \,]a, b[$, hogy*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \le \|(\mathrm{D}f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

3.24. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Ha $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \le \left(\sup_{c \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(c)\| \right) \cdot \|b - a\|_2 ,$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

3.25. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{D}f = 0$ teljesül. Ekkor f állandó.*

3.26. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

3.27. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

3.28. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim_n f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x).$$

3.29. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

3.30. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ összeg;*
2. *az $\sum_n (f_n)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

3.31. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges függvény és $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$. Ha $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban és $\det(\mathrm{D}f)(a) \neq 0$, akkor létezik olyan $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. *$f|_\Omega$ injektív;*
2. *$f(\Omega)$ nyílt halmaz;*
3. *$f|_\Omega$ homeomorfizmus Ω és $f(\Omega)$ között;*
4. *az $(f|_\Omega)^{-1}$ függvény differenciálható;*
5. *minden $x \in \Omega$ pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban.*

3.32. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ tetszőleges függvény. Ha $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az (a_1, a_2) pontban és $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$, akkor létezik olyan Ω_1, Ω_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre*

1. $\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \mathrm{Dom}(Df)$;

2. létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *differenciálható függvény, melyre* $\varphi(a_1) = a_2$*, minden* $x \in \Omega_1$ *esetén*

$$f(x,\varphi(x)) = f(a_1,a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x,\varphi(x))\right)^{-1}(\partial_1 f)(x,\varphi(x))$$

teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ *folytonos az* a_1 *pontban.*

3.33. Tétel. *Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *nyílt halmaz,* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k*-szor differenciálható függvény. Ekkor minden* $a \in \Omega$ *és* $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *esetén*

$$((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(a)) \cdot x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \ldots x^{(k)}_{i_k}.$$

3.34. Tétel. *(Schwarz-tétel vagy Clairaut tétele a vegyes parciális deriváltakról.) Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, hogy minden* $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *index esetén a* $\partial_i \partial_j f$ *függvény folytonos az* Ω *halmazon. Ekkor minden* $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *indexre* $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ *teljesül az* Ω *halmazon.*

3.35. Tétel. *Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *nyílt halmaz,* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, hogy minden* $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *index esetén a* $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f$ *függvény folytonos az* Ω *halmazon. Ekkor* f k*-szor folytonosan differenciálható és minden* $a \in \Omega$ *pontban* $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ *szimmetrikus* k*-lineáris leképezés.*

3.36. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $a, b \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *és* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *olyan függvény melyre* $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$*. Tegyük fel, hogy az* f *függvény* k*-szor folytonosan differenciálható az* $[a, b]$ *halmazon és* $(k+1)$*-szer differenciálható az* $]a, b[$ *nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan* $\xi \in \,]a, b[$*, melyre*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}((\mathrm{D}^{(i)} f)(a))(b-a)^{[i]} + \frac{1}{(k+1)!}(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}.$$

3.37. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $a, b \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *és* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *olyan függvény melyre* $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$*. Tegyük fel, hogy az* f *függvény* k*-szor folytonosan differenciálható az* $[a, b]$ *halmazon és* $(k+1)$*-szer differenciálható az* $]a, b[$ *nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left| f(b) - T^f_{k,a}(b) \right| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(k+1)} f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

3.38. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$*, melyhez létezik olyan* $r \in \mathbb{R}^+$*, hogy az* f *függvény* k*-szor differenciálható a* $B_r(a)$ *halmazon és* $\mathrm{D}^{(k)} f$ *folytonos az* a *pontban. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

3.39. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *tetszőleges függvény és* $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$*. Ha az* f *függvénynek lokális szélsőértéke van az* a *pontban, akkor* $(\mathrm{D}f)(a) = 0$*.*

3.40. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$*,* $1 < k \in \mathbb{N}$ *és* $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$*, melyhez létezik olyan* $r \in \mathbb{R}^+$*, hogy az* f *függvény* k*-szor differenciálható a* $B_r(a)$ *halmazon és* $\mathrm{D}^{(k)} f$ *folytonos az* a *pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden* $i \in \mathbb{N}$*,* $1 \leq i < k$ *esetén* $(\mathrm{D}^{(i)} f)(a) = 0$ *és* $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a) \neq 0$*.*

1. Ha az f *függvénynek lokális maximuma van az* a *pontban, akkor* k *páros és a* $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ *multilineáris leképezés negatív.*

2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha k páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

3.41. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén legyen $g_i : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Tekintsük a $H = \bigcap_{i=1}^{k} \overset{-1}{g_i}(0)$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a \in H \cap \mathrm{Dom}\, f$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ rendszer lineárisan független. Ekkor, ha az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor egyértelműen léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ paraméterek, melyekre*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i((\mathrm{D}g_i)(a))$$

teljesül.

3.42. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*
1. *Az f függvény konvex.*
2. *Minden $x, y \in \Omega$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) \leq f(y).$$
3. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív.*

3.43. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*
1. *Az f függvény pontosan akkor szigorúan konvex, ha minden $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) < f(y)$$
2. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív definit, akkor f szigorúan konvex.*

4. Fourier-sorok

4.1. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.)* *Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

teljesül.

4.2. Tétel. *(A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságai.)*
1. *A pontonkénti műveletekkel $\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ algebrát alkot.*
2. *Minden $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom esetén $P \circ \cos \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*
3. *Minden $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén a $t \mapsto f(t + x)$ függvény is trigonometrikus polinom.*

4.3. Tétel. *(Weierstrass approximációs tétele.)* *Minden $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvényhez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, melyre $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ teljesül.*

4.4. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$
$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$
$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$
$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

4.5. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az*

$$S_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t$$

teljesül.

4.6. Tétel. *A $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vektortéren tekintsük a*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \times C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \to \mathbb{R} \qquad (f, g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g$$

leképezést.

1. *A fent definiált művelet skaláris szorzás.*
2. *A*
$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$
vektorrendszer ortonormált és teljes.
3. *A*
$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+\right\}$$
vektorrendszer ortonormált és teljes.

4.7. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t)\cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\,t \\ b_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t)\sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

teljesül. Továbbá a $D_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(k)}\right|$ jelölés mellett minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_n| \leq \frac{D_k}{n^k} \qquad |b_n| \leq \frac{D_k}{n^k}.$$

4.8. Tétel. *Minden $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez.*