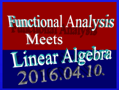
Robertson-féle határozatlansági reláció általánosítása és geometriai interpretációja

Andai Attila

BME, Analízis Tanszék

2016. április 10.

Közös munka Lovas Attilával.



Vázlat

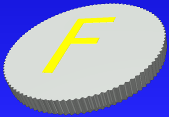
– Klasszikus és kvantummechanikai állapottér.

– Állapottér geometriája.

– Határozatlansági relációk rövid története.

– Újabb eredmények.

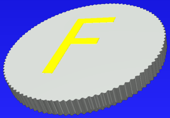
Állapottér



Az érme lehetséges állapotai, vagyis az állapottere:
$p \in]0,1[$.

Az elektron állapottere:
???

Állapottér



Az érme lehetséges állapotai, vagyis az állapottere:
$p \in]0,1[$.

Az elektron állapottere:
???

Véges halmazon értelmezett valószínűségi eloszlások tere

$$\Delta_{n-1} = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; p_k > 0,\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\}$$

$$\Delta_{n-1} \ni (p_1, \ldots, p_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\bigcap$$

$$\mathcal{M}_n \ni D \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_n$: Az $n \times n$-es önadjungált, pozitív definit, egységnyomú mátrixok halmaza. $\Longrightarrow$ *kvantummechanikai állapottér*

Véges halmazon értelmezett valószínűségi eloszlások tere

$$\Delta_{n-1} = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; p_k > 0,\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\}$$

$$\Delta_{n-1} \ni (p_1, \dots, p_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\bigcap$$

$$\mathcal{M}_n \ni D \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_n$: Az $n \times n$-es önadjungált, pozitív definit, egységnyomú mátrixok halmaza. $\Longrightarrow$ *kvantummechanikai állapottér*

Véges halmazon értelmezett valószínűségi eloszlások tere

$$\Delta_{n-1} = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; p_k > 0,\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\}$$

$$\Delta_{n-1} \ni (p_1, \dots, p_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\bigcap$$

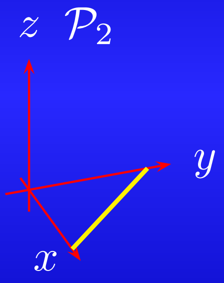
$$\mathcal{M}_n \ni D \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

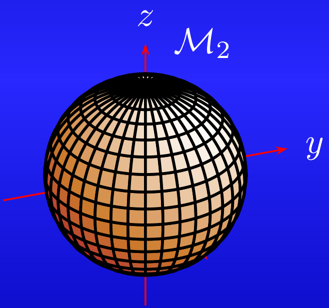
$\mathcal{M}_n$: Az $n \times n$-es önadjungált, pozitív definit, egységnyomú mátrixok halmaza. $\Longrightarrow$ *kvantummechanikai állapottér*

Az elektron állapottere (Qbit):

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-z & x+\mathrm{i}\,y \\ x-\mathrm{i}\,y & 1+z \end{pmatrix}$$

$$D \in \mathcal{M}_n \iff x^2+y^2+z^2 \le 1$$





Kvantummechanika
avagy nemkommutatív valószínűségszámítás:

$X = \{1, \ldots, n\}$ mértéktér	–
$p \in \Delta_{n-1}$ valószínűségi eloszlás	$D \in \mathcal{M}_n$ sűrűségi mátrix
$f : X \to \mathbb{C}$ valószínűségi változó	$X \in \mathcal{M}_{n,\mathrm{sa}}$ önadjungált mátrix
$T : \Delta_{n-1} \to \Delta_{n-1}$ sztochasztikus mátrix	$C : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ kvantum csatorna

(*Gleason*, *Mackey*, *Neumann*, *Wigner* többek között.)

Statisztikai alapmennyiségek

Ha $D \in \mathcal{M}_n$ állapot és $A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathrm{sa}}$ megfigyelhető mennyiség, akkor

– A várható értéke: $\mathrm{Tr}(DA)$;

– A varianciája: $\mathrm{Var}_D(A) = \mathrm{Tr}(DA^2) - (\mathrm{Tr}(DA))^2$;

– A és B kovarianciája:

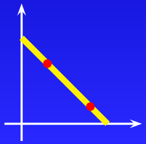
$$\mathrm{Cov}_D(A, B) = \frac{\mathrm{Tr}(DAB) + \mathrm{Tr}(DBA)}{2} - \mathrm{Tr}(DA)\,\mathrm{Tr}(DB).$$

Geometria

Mekkora két érme $(p_1, 1-p_1)$ és $(p_2, 1-p_2)$ távolsága?

Geometria

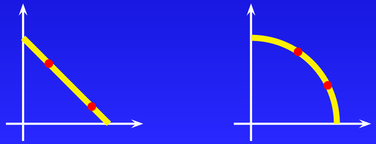
Mekkora két érme $(p_1, 1-p_1)$ és $(p_2, 1-p_2)$ távolsága?



– Az euklidészi metrikával ellátott állapottéren a távolságmérés önkényes.

Geometria

Mekkora két érme $(p_1, 1-p_1)$ és $(p_2, 1-p_2)$ távolsága?

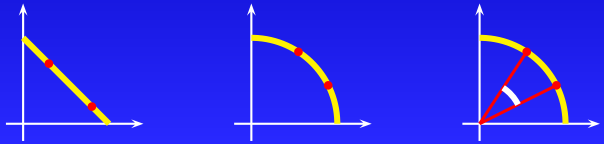


– Az euklidészi metrikával ellátott állapottéren a távolságmérés önkényes.

– Fisher [$\sim$ 1925] javasolta a $(\sqrt{p_1}, \sqrt{1-p_1})$, $(\sqrt{p_2}, \sqrt{1-p_2})$ valószínűségi amplitúdók használatát.

Geometria

Mekkora két érme $(p_1, 1 - p_1)$ és $(p_2, 1 - p_2)$ távolsága?



– Az euklidészi metrikával ellátott állapottéren a távolságmérés önkényes.

– Fisher [$\sim$ 1925] javasolta a $(\sqrt{p_1}, \sqrt{1 - p_1})$, $(\sqrt{p_2}, \sqrt{1 - p_2})$ valószínűségi amplitúdók használatát.

– A természetes távolság: a körív hossza!

Fisher-információ

Adott $\underline{p} \in \Delta_{n-1}$ esetén legyen

$$f_{\underline{p}} : \{1, \ldots, n\} \to \,]0, 1[\qquad k \mapsto p_k.$$

Minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén a Fisher-féle információs mátrix

$$g(\underline{p})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_{\underline{p}}(k)} \frac{\partial f_{\underline{p}}(k)}{\partial p_i} \frac{\partial f_{\underline{p}}(k)}{\partial p_j}.$$

A Fisher-információ Riemann-metrika. [Rao, 1945]

Fisher-információ(k)

Klasszikus esetben:

$$\Delta_{n-1} = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \;\middle|\; 0 < p_i < 1, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}.$$

Tétel. (*Čencov*) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (Δ_{n-1}, g_n) Riemann-sokaság. Ha minden $\kappa : X_n \times X_m \to \mathbb{R}$ átmenetvalószínűségre

$$g_{\tilde{\kappa}(p)}(\kappa^*(X), \kappa^*(X)) \leq g_p(X, X) \qquad \forall p \in \Delta_{n-1}, \forall X \in \mathrm{T}_p\Delta_{n-1}\,,$$

(*monotonitási tulajdonság*) teljesül, akkor a metrikák $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ családja egyértelmű pozitív számszorzó erejéig.

Fisher-információ(k)

Kvantumos esetben:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ D \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; D = D^*, D > 0, \mathrm{Tr}\, D = 1 \right\}.$$

Tétel. (*Čencov*) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (Δ_{n-1}, g_n) Riemann-sokaság. Ha minden $\kappa : X_n \times X_m \to \mathbb{R}$ átmenetvalószínűségre

$$g_{\tilde{\kappa}(p)}(\kappa^*(X), \kappa^*(X)) \le g_p(X, X) \qquad \forall p \in \Delta_{n-1}, \forall X \in \mathrm{T}_p\Delta_{n-1}\,,$$

(*monotonitási tulajdonság*) teljesül, akkor a metrikák $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ családja egyértelmű pozitív számszorzó erejéig.

Fisher-információ(k)

Kvantumos esetben:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ D \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; D = D^*, D > 0, \mathrm{Tr}\, D = 1 \right\}.$$

(*Petz*) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (Δ_{n-1}, g_n) Riemann-sokaság. Ha minden $\kappa : X_n \times X_m \to \mathbb{R}$ átmenetvalószínűségre

$$g_{\tilde{\kappa}(p)}(\kappa^*(X), \kappa^*(X)) \leq g_p(X, X) \qquad \forall p \in \Delta_{n-1}, \forall X \in \mathrm{T}_p\Delta_{n-1}\,,$$

(*monotonitási tulajdonság*) teljesül, akkor a metrikák $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ családja egyértelmű pozitív számszorzó erejéig.

Fisher-információ(k)

Kvantumos esetben:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ D \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; D = D^*, D > 0, \operatorname{Tr} D = 1 \right\}.$$

(*Petz*) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathcal{M}_n, g_n)$ Riemann-sokaság. Ha minden $\kappa : X_n \times X_m \to \mathbb{R}$ átmenetvalószínűségre

$$g_{\tilde{\kappa}(p)}(\kappa^*(X), \kappa^*(X)) \leq g_p(X, X) \qquad \forall p \in \Delta_{n-1}, \forall X \in \mathrm{T}_p\Delta_{n-1}\,,$$

(*monotonitási tulajdonság*) teljesül, akkor a metrikák $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ családja egyértelmű pozitív számszorzó erejéig.

Fisher-információ(k)

Kvantumos esetben:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ D \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; D = D^*, D > 0, \mathrm{Tr}\, D = 1 \right\}.$$

(*Petz*) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathcal{M}_n, g_n)$ Riemann-sokaság. Ha minden $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ sztochasztikus leképezésre

$$g_{\tilde{\kappa}(p)}(\kappa^*(X), \kappa^*(X)) \leq g_p(X, X) \qquad \forall p \in \Delta_{n-1}, \forall X \in \mathrm{T}_p\Delta_{n-1} ,$$

(*monotonitási tulajdonság*) teljesül, akkor a metrikák $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ családja egyértelmű pozitív számszorzó erejéig.

Fisher-információ(k)

Kvantumos esetben:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ D \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; D = D^*, D > 0, \operatorname{Tr} D = 1 \right\}.$$

(*Petz*) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathcal{M}_n, g_n)$ Riemann-sokaság. Ha minden $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ sztochasztikus leképezésre

$$g_{T(D)}(T(X), T(X)) \leq g_D(X, X) \; \forall D \in \mathcal{M}_n, \forall X \in \mathrm{T}_D \mathcal{M}_n$$

(*monotonitási tulajdonság*) teljesül, akkor a metrikák $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ családja egyértelmű pozitív számszorzó erejéig.

Fisher-információ(k)

Kvantumos esetben:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ D \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \,\middle|\, D = D^*, D > 0, \mathrm{Tr}\, D = 1 \right\}.$$

Tétel. (*Petz*) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathcal{M}_n, g_n)$ Riemann-sokaság. Ha minden $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ sztochasztikus leképezésre

$$g_{T(D)}(T(X), T(X)) \leq g_D(X, X)\ \forall D \in \mathcal{M}_n, \forall X \in \mathrm{T}_D\mathcal{M}_n$$

(*monotonitási tulajdonság*) teljesül, akkor a metrikák $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ családja a

$$g_D(X, Y) = \mathrm{Tr}\left(X \left(R_{n,D}^{\frac{1}{2}} f(L_{n,D} R_{n,D}^{-1}) R_{n,D}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (Y) \right)$$

képlettel adott, ahol $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ egy operátormonoton függvény a $f(x) = x f(x^{-1})$ tulajdonsággal.

Főbb indukált metrikák:

$$f(x) = \frac{x-1}{\log x}, \quad \frac{(1+\sqrt{x})^2}{4}, \quad \frac{1+x}{2}, \quad \frac{2x}{1+x}.$$

Főbb indukált metrikák:

$$f(x) = \frac{x-1}{\log x}, \quad \frac{(1+\sqrt{x})^2}{4}, \quad \frac{1+x}{2}, \quad \frac{2x}{1+x}.$$

Megjegyzések.

Főbb indukált metrikák:

$$f(x) = \frac{x-1}{\log x}, \quad \frac{(1+\sqrt{x})^2}{4}, \quad \frac{1+x}{2}, \quad \frac{2x}{1+x}.$$

Megjegyzések.

A diagonális mátrixok halmazán ezek a metrikák megegyeznek.

Főbb indukált metrikák:

$$f(x) = \frac{x-1}{\log x}, \quad \frac{(1+\sqrt{x})^2}{4}, \quad \frac{1+x}{2}, \quad \frac{2x}{1+x}.$$

Megjegyzések.

A diagonális mátrixok halmazán ezek a metrikák megegyeznek.

Tétel. (*Löwner*) Az f függvény pontosan akkor generál monoton metrikát, ha létezik olyan μ mérték a $[0,1]$ intervallumon, melyre

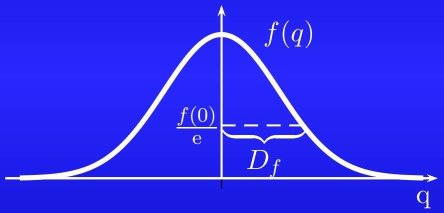
$$f(x) = \int_0^1 \frac{x}{(1-t)x+t} \, \mathrm{d}\,\mu(t) \qquad \forall x \in [0,1]$$

teljesül, valamint $\forall s \in [0,1]: \ \mu\left([0,s]\right) = \mu\left([1-s,1]\right)$.

A határozatlansági relációk rövid története

1927, Heisenberg: egyszerre nem mérhető a hely (q) és az impulzus (p). (Elv.)

Heiseberg Gauss eloszlásokat vizsgált ($f(q)$), melyek „határozatlansága” a szélessége D_f.



Ha $\mathcal{F}(f)$ az f Fourier-transzformáltja, akkor a határozatlansági reláció legelső alakja

$$D_f D_{\mathcal{F}(f)} = \text{constant}.$$

1927, Kennard: Ha az A, B megfigyelhető mennyiségre $[A, B] = -\mathrm{i}$ teljesül, akkor

$$\mathrm{Var}_D(A)\,\mathrm{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4},$$

ahol $\mathrm{Var}_D(A) = \mathrm{Tr}(DA^2) - (\mathrm{Tr}(DA))^2$.

1927, Kennard: Ha az A, B megfigyelhető mennyiségre $[A, B] = -\mathrm{i}$ teljesül, akkor

$$\mathrm{Var}_D(A)\,\mathrm{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4},$$

ahol $\mathrm{Var}_D(A) = \mathrm{Tr}(DA^2) - (\mathrm{Tr}(DA))^2$.

1929, Robertson: Minden A, B megfigyelhető mennyiségre

$$\mathrm{Var}_D(A)\,\mathrm{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4}\left|\mathrm{Tr}(D\,[A, B])\right|^2 .$$

1930, Schrödinger: Minden A, B megfigyelhető mennyiségre

$$\mathrm{Var}_D(A)\,\mathrm{Var}_D(B) - \mathrm{Cov}_D(A,B)^2 \geq \frac{1}{4}\left|\mathrm{Tr}(D\,[A,B])\right|^2,$$

ahol

$$\mathrm{Cov}_D(A,B) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}(DAB) + \mathrm{Tr}(DBA)\Big) - \mathrm{Tr}(DA)\,\mathrm{Tr}(DB).$$

1930, Schrödinger: Minden A, B megfigyelhető mennyiségre

$$\mathrm{Var}_D(A)\,\mathrm{Var}_D(B) - \mathrm{Cov}_D(A,B)^2 \geq \frac{1}{4}\left|\mathrm{Tr}(D\,[A,B])\right|^2,$$

ahol

$$\mathrm{Cov}_D(A,B) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}(DAB) + \mathrm{Tr}(DBA)\Big) - \mathrm{Tr}(DA)\,\mathrm{Tr}(DB).$$

Ugyanez másképp:

$$\det\begin{pmatrix}\mathrm{Cov}_D(A,A) & \mathrm{Cov}_D(A,B)\\ \mathrm{Cov}_D(B,A) & \mathrm{Cov}_D(B,B)\end{pmatrix} \geq$$

$$\geq \det\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{Tr}(D\,[A,A]) & \mathrm{Tr}(D\,[A,B])\\ \mathrm{Tr}(D\,[B,A]) & \mathrm{Tr}(D\,[B,B])\end{pmatrix}\right].$$

1934, Robertson: Az $(A_i)_{i\in I}$ (véges sok) megfigyelhető mennyiségre

$$\det\left(\left[\mathrm{Cov}_D(A_h,A_j)\right]_{h,j\in I}\right)\geq\det\left(\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{Tr}(D\,[A_h,A_j])\right]_{h,j\in I}\right).$$

1934, Robertson: Az $(A_i)_{i\in I}$ (véges sok) megfigyelhető mennyiségre

$$\det\left(\left[\mathrm{Cov}_D(A_h,A_j)\right]_{h,j\in I}\right)\geq\det\left(\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{Tr}(D\,[A_h,A_j])\right]_{h,j\in I}\right).$$

$\sim$2000–, Furuichi, Gibilisco, Hansen, Imparato, Isola, Kosaki, Kuriyama, Luo, Petz, Yanagi, Q. Zhang, Z. Zhang

Újabb eredmények

Kovarianciák

Adott A, B megfigyelhető mennyiségre, $D \in \mathcal{M}_n$ állapotra és f operátormonoton függvényre:

$$\mathrm{Cov}_D(A,B) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(DAB) + \mathrm{Tr}(DBA)\right) - \mathrm{Tr}(DA)\,\mathrm{Tr}(DB)$$

$$\mathrm{Cov}_D^f(A,B) = \langle A, B\rangle_{D,f} \qquad \text{(2002, Petz)}$$

$$\mathrm{qCov}_{D,f}^{as}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\left\langle \mathrm{i}\,[D,A]\,,\mathrm{i}\,[D,B]\right\rangle_{D,f}$$

$$\mathrm{qCov}_{D,f}^{s}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\left\langle \{D,A\}\,,\{D,B\}\right\rangle_{D,f}\,,$$

ahol $[.,.]$ a kommutátor és $\{.,.\}$ az antikommutátor.

Újabb eredmények
Kovarianciák

Adott A, B megfigyelhető mennyiségre, $D \in \mathcal{M}_n$ állapotra és f operátormonoton függvényre:

$$\mathrm{Cov}_D(A,B) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(DAB) + \mathrm{Tr}(DBA)\right) - \mathrm{Tr}(DA)\,\mathrm{Tr}(DB)$$

$$\mathrm{Cov}_D^f(A,B) = \langle A, B\rangle_{D,f} \qquad \text{(2002, Petz)}$$

$$\mathrm{qCov}_{D,f}^{as}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\left\langle \mathrm{i}\,[D,A]\,, \mathrm{i}\,[D,B]\right\rangle_{D,f}$$

$$\mathrm{qCov}_{D,f}^{s}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\left\langle \{D,A\}\,, \{D,B\}\right\rangle_{D,f}\,,$$

ahol $[.,.]$ a kommutátor és $\{.,.\}$ az antikommutátor.

Adott A megfigyelhető mennyiség és D állapot esetén legyen $A_0 = A - \mathrm{Tr}(DA)I$, ekkor $\mathrm{Tr}\,DA_0 = 0$.

Ha $(A^{(k)})_{k=1,\dots,N}$ megigyelhető mennyiségek, melyek várható értéke a D állapotban 0, akkor legyen

$$[\mathrm{Cov}_D]_{ij} = \mathrm{Cov}_D(A^{(i)}, A^{(j)})$$
$$\left[\mathrm{Cov}_D^f\right]_{ij} = \mathrm{Cov}_D^f(A^{(i)}, A^{(j)})$$
$$\left[\mathrm{qCov}_{D,f}^{as}\right]_{ij} = \mathrm{qCov}_{D,f}^{as}(A^{(i)}, A^{(j)})$$
$$\left[\mathrm{qCov}_{D,f}^{s}\right]_{ij} = \mathrm{qCov}_{D,f}^{s}(A^{(i)}, A^{(j)}).$$

Ha $(A^{(k)})_{k=1,\dots,N}$ megigyelhető mennyiségek, melyek várható értéke a D állapotban 0, akkor legyen

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Cov}_D]_{ij} &= \mathrm{Cov}_D(A^{(i)}, A^{(j)}) \\
\left[\mathrm{Cov}_D^f\right]_{ij} &= \mathrm{Cov}_D^f(A^{(i)}, A^{(j)}) \\
\left[\mathrm{qCov}_{D,f}^{as}\right]_{ij} &= \mathrm{qCov}_{D,f}^{as}(A^{(i)}, A^{(j)}) \\
\left[\mathrm{qCov}_{D,f}^{s}\right]_{ij} &= \mathrm{qCov}_{D,f}^{s}(A^{(i)}, A^{(j)}).
\end{aligned}$$

2006, Gibilsco: Sejtés: $\det(\mathrm{Cov}_D) \geq \det(\mathrm{qCov}_{D,f}^{as})$.

Ha $(A^{(k)})_{k=1,\ldots,N}$ megigyelhető mennyiségek, melyek várható értéke a D állapotban 0, akkor legyen

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Cov}_D]_{ij} &= \mathrm{Cov}_D(A^{(i)}, A^{(j)}) \\
\left[\mathrm{Cov}_D^f\right]_{ij} &= \mathrm{Cov}_D^f(A^{(i)}, A^{(j)}) \\
\left[\mathrm{qCov}_{D,f}^{as}\right]_{ij} &= \mathrm{qCov}_{D,f}^{as}(A^{(i)}, A^{(j)}) \\
\left[\mathrm{qCov}_{D,f}^{s}\right]_{ij} &= \mathrm{qCov}_{D,f}^{s}(A^{(i)}, A^{(j)}).
\end{aligned}$$

2006, Gibilsco: Sejtés: $\det(\mathrm{Cov}_D) \geq \det(\mathrm{qCov}_{D,f}^{as})$.

2008, Andai: A sejtés igaz.

Jelenkori eredmények

2015, Lovas, Andai:

$$\det(\mathrm{Cov}_D) \geq \det(\mathrm{qCov}^{s}_{D,f}) \geq \det(\mathrm{qCov}^{as}_{D,f}).$$

Jelenkori eredmények

2015, Lovas, Andai:

$$\det(\mathrm{Cov}_D) \geq \det(\mathrm{qCov}^{s}_{D,f}) \geq \det(\mathrm{qCov}^{as}_{D,f}).$$

$$\begin{aligned} 2f(0)\,\mathrm{Cov}_D^{f_{RLD}}(A_0,B_0) &\leq \\ &\leq \mathrm{qCov}^{s}_{D,f}(A_0,B_0) - \mathrm{qCov}^{as}_{D,f}(A_0,B_0) \leq \\ &\leq \mathrm{Cov}_D^{f_{RLD}}(A_0,B_0) \end{aligned}$$

$$\det(\mathrm{qCov}^{s}_{D,f}) - \det(\mathrm{qCov}^{as}_{D,f}) \geq (2f(0))^N \det(\mathrm{Cov}_D^{f_{RLD}})$$

Ha $f = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{2} + \frac{2x}{1+x}\right)$, akkor minden g függvényre

$$\det(\mathrm{qCov}^{s}_{D,f}) \geq \det(\mathrm{qCov}^{as}_{D,g}).$$

Ha $f = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{2} + \frac{2x}{1+x}\right)$, akkor minden g függvényre

$$\det(\mathrm{qCov}^{s}_{D,f}) \geq \det(\mathrm{qCov}^{as}_{D,g}).$$

2016, 2017 ???


Állapottér
Kvantum-csatornák
Kvantum statisztika
Állapotok mérőszámai
Algebrai struktúra
Geometriai struktúra
invariáns meny-nyiségek
határozat-lansági relációk
klasszikus geometria
mátrix közepek

Köszönöm a figyelmet!