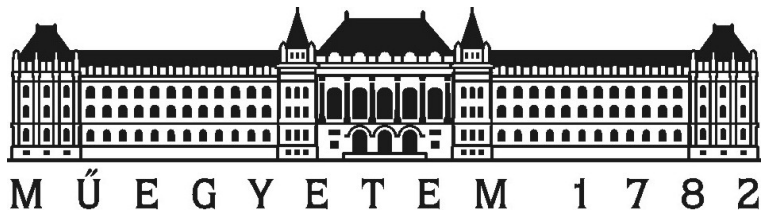


DIPLOMAMUNKA

Kvantumcsatornák
differenciálgeometriai vizsgálata

MOLNÁR András

Témavezető: ANDAI Attila
 Egyetemi docens
 BME Matematika Intézet
 Analízis Tanszék



BME
2012

Tartalomjegyzék

1. Kvantummechanika	2
1.1. A kvantummechanika axiómái	2
1.2. Kvantumcsatornák	3
1.3. Kvantumcsatornák Holevo-kapacitása	10
2. Affin terek geometriája	15
3. Az állapottér geometriája	22
3.1. Relatív entrópiák	23
3.2. Metrika a relatív entrópiából	26
3.3. Monoton metrika skalárgömbülete	29
3.3.1. A metrika első deriváltja	30
3.3.2. A metrika második deriváltja	32
3.3.3. A skalárgömbület	34
3.4. A Kubo-Mori metrika skalárgömbülete	34
4. Numerikus eredmények	36
4.1. A 2×2 -es valós sűrűségi mátrixok	36
4.2. A kvantumcsatornák	37
5. Összefoglalás	38
6. Köszönetnyilvánítás	38
7. Annex	39
7.1. Perron Froebenius tétel	39
7.2. A Kullback-Leiber divergencia	40
Hivatkozások	42

1. Kvantummechanika

Ebben a részben áttekintjük a kvantummechanika axiómáit, majd részletesebben beszélünk az időfejlődésről. Bevezetjük a kvantumcsatornák fogalmát illetve a Holevo-kapacitásukat. Végül kiszámoljuk a kapacitást egy jól kezelhető csatorna-családra.

1.1. A kvantummechanika axiómái

A kvantummechanika felépítésekor öt „axiómát” szokás használni. Ezek: az állapot, a fixikai mennyiségek, a mérés, az összetett rendszerek és a zárt rendszerek időfejlődésének leírása. Az alábbiakban ezeket ismertetjük.

Állapotok. Véges szabadsági fokú kvantumrendszert egy H véges dimenziós belső szorzatos téren írunk le. A rendszer állapotát *sűrűségi mátrixokkal* jellemezzük, ezek a

$$S(H) = \{\rho : H \rightarrow H \mid \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1\}$$

mátrixok halmaza.

1. Állítás. $S(H)$ konvex halmaz.

Bizonyítás. Legyen $\rho, \mu \in S(H)$, továbbá $\lambda \in [0, 1]$. Ekkor

$$\text{Tr } \{\lambda\rho + (1 - \lambda)\mu\} = \lambda \text{Tr } \rho + (1 - \lambda) \text{Tr } \mu = 1$$

Továbbá a konvex kombináció pozitivitás-őrző is:

$$\langle \varphi | (\lambda\rho + (1 - \lambda)\mu) \varphi \rangle = \lambda \langle \varphi | \rho \varphi \rangle + (1 - \lambda) \langle \varphi | \mu \varphi \rangle \geq 0$$

Hiszen ρ és μ is pozitív és $\lambda \in [0, 1]$. □

1. Példa. A két állapotú kvantumrendszereket két dimenziós $H \equiv \mathbb{C}^2$ Hilbert-téren írjuk le. A sűrűségi mátrixok egy szép ábrázolása készíthető el a Pauli mátrixok segítségével:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ugyanis ez bázisa a $B(H)$ -beli önadjungált mátrixoknak. Ekkor minden sűrűségi mátrix

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z & x - iy \\ x + iy & 1 - z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\sigma_0 + x \cdot \sigma_x + y \cdot \sigma_y + z \cdot \sigma_z)$$

alakú. Továbbá ρ pozitív, ha a determinánusa pozitív, hisz $\text{Tr } \rho = 1 > 0$). Kírva:

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$$

azaz $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Tehát a $B(H)$ -beli 1 nyomú, pozitív leképzéseknek megfeleltethető egy 1 sugarú gömb.

Fizikai mennyiségek. A H Hilbert-téren leírt fizikai rendszeren értelmezett fizikai mennyiségeknek $B(H)$ -beli önadjungált operátorokat feleltetünk meg. Legyen A spektrálfelbontása $\sum_i \lambda_i P_i$. Ekkor A a λ_i értékeket veheti fel, és a valószínűsége, hogy A értéke λ_i : $\text{Tr } \rho P_i$. Innen az A operátor várható értéke, ha a rendszer a ρ állapotban van: $\text{Tr } A\rho$.

Mérés. Legyenek a mérés során felvett értékek λ_i ($i \in I$). Ekkor az egyes eredmények kimeneteléhez tartozó valószínűségek $\text{Tr } \rho M_i$, ahol $B(H) \ni M_i > 0$ és $\sum_i M_i = \text{Id}_H$.

2. Állítás. Legyenek H, K véges dimenziós Hilbert-terek továbbá I, J tetszőleges véges halmazok. Legyenek $(A_i)_{i \in I}, (C_j)_{j \in J} \in B(H)$ és $(B_i)_{i \in I}, (D_j)_{j \in J} \in B(K)$. Ha $\sum_i A_i \otimes B_i = \sum_j C_j \otimes D_j$, akkor $\sum_i A_i \cdot \text{Tr } B_i = \sum_j C_j \cdot \text{Tr } D_j$

Bizonyítás. Átrendezés után elég belátni, hogy ha $\sum_i A_i \otimes B_i = 0$, akkor $\sum_i A_i \cdot \text{Tr } B_i = 0$. Ehhez legyen $\varphi \in H$ tetszőleges, $\psi_j \in K$ ($j = 1 \dots \dim K$) ortonormált bázis. Ekkor

$$0 = \sum_{ij} \langle \varphi | A_i \varphi \rangle \langle \psi_j | B_i \psi_j \rangle = \langle \varphi | \sum_i A_i \cdot \text{Tr } B_i \cdot \varphi \rangle$$

Amiből $\sum_i A_i \cdot \text{Tr } B_i = 0$, mert önadjungált (ami hasonlóan mutatható meg). \square

1. Definíció. Legyen $F \in B(H \otimes K)$, $(A_i)_{i \in I} \in B(H)$, $(B_i)_{i \in I} \in B(K)$. Legyen $F = \sum_i A_i \otimes B_i$. Ekkor F részleges nyoma a K rendszerre a következő $B(H)$ -beli elem:

$$\text{Tr}_K F = \sum_i A_i \cdot \text{Tr } B_i$$

A fenti állítás szerint a részleges nyom jól definiált.

Összetett rendszerek. Legyen két rendszerünk, amit a H és K Hilbert-tereken írunk le. Ekkor a két rendszerből összetett rendszert a $H \otimes K$ téren írjuk le. Ha a teljes rendszer állapota ρ , akkor a részrendszerek állapota rendre $\rho_H = \text{Tr}_K \rho$ és $\rho_K = \text{Tr}_H \rho$.

Zárt rendszer időfejlődése. Legyen $\rho_0 \in S(H)$ és $\rho_t \in S(H)$ egy zárt rendszer sűrűségi mátrixa 0 és t időben. Ekkor létezik $U_t : H \rightarrow H$ unitér, hogy $\rho_t = U_t \rho U_t^\dagger$.

1.2. Kvantumcsatornák

Az előző paragrafusban tárgyaltuk zárt rendszerek időfejlődését. Valós esetekben azonban a kvantumrendszerek ritkán tekinthetők zártaknak. Mit mondhatunk nyílt rendszer időfejlődéséről? Ha egy nyílt rendszerhez hozzávesszük a környezetét, akkor már zárt rendszert kapunk, amiről tudjuk, hogy unitéren időfejlődik. Ezzel az ötlettel az időfejlődések egy gyakorlatban jól használható családja kezelhető.

Éljünk a következő feltételezéssel: $t = 0$ időpontban preparáljuk a rendszert, ekkor szorzat állapotban van: $\rho = \rho_s \otimes \rho_{env}$. A teljes (immár zár) rendszer ezután unitéren időfejlődik:

$$\rho = \rho_s \otimes \rho_{env} \mapsto U \rho_s \otimes \rho_{env} U^\dagger$$

Végül pedig csak a rendszer állapotára vagyunk kíváncsiak (a környezet változása nem érdekes), ezért az időfejlőlesztett sűrűségi operátor:

$$\rho_s \mapsto \text{Tr}_{env} \left\{ U \rho_s \otimes \rho_{env} U^\dagger \right\}$$

Ez a típusú időfejlődés általában nem unitér, nem reverzibilis. Fizikai példa erre, ha a kvantummechanikai rendszert termikus elektromágneses térhez csatoljuk, így modellezzük a veszteségeket.

A fenti formában megadott időfejlődéseket néha célszerű máshogy is karakterizálni, erre szolgál a következő tétel (Kraus, [5])

1. Tétel (Kraus reprezentáció). Legyen $\rho \in B(H)$, $\mathcal{R} \in B(K)$ sűrűségi mátrixok, $U \in B(H) \otimes B(K)$ unitér. Ekkor az $\varepsilon : B(H) \rightarrow B(H)$, $\varepsilon : \rho \mapsto \text{Tr}_K U^\dagger(\rho \otimes \mathcal{R})U$ leképzés előáll

$$\varepsilon(\rho) = \sum V_i^\dagger \rho V_i$$

alakban, ahol $V_i : H \rightarrow H$ lineáris és $\sum V_i V_i^\dagger = \text{Id}_H$.

Bizonyítás. Legyen $U = \sum A_i \otimes B_i$. Ezzel

$$\text{Tr}_K U^\dagger \rho \otimes \mathcal{R} U = \text{Tr}_K \sum_{ij} A_i^\dagger \rho A_j \otimes B_i^\dagger \mathcal{R} B_j = \sum_{ij} A_i^\dagger \rho A_j \text{Tr} \left\{ B_i^\dagger \mathcal{R} B_j \right\}$$

Tekintsük \mathcal{R} spektrálfelbontását: $\mathcal{R} = \sum_i \lambda_i v_i v_i^\dagger$. Ekkor \mathcal{R} sajátbázisában:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{ijkl} \lambda_k A_i^\dagger \rho A_j \cdot v_l^\dagger B_i^\dagger v_k v_k^\dagger B_j v_l$$

Innen a Kraus operátorok értéke leolvasható:

$$V_{kl} = \sum_i \sqrt{\lambda_k} v_k^\dagger B_i v_l \cdot A_i$$

Amivel

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{kl} V_{kl}^\dagger \rho V_{kl}$$

Ugyanakkor nyilván

$$\sum_{kl} V_{kl} V_{kl}^\dagger = \sum_{ijkl} \lambda_k v_k^\dagger B_i v_l v_l^\dagger B_j^\dagger v_k \cdot A_i A_j^\dagger = \sum_{ij} A_i A_j^\dagger \text{Tr} \left\{ \mathcal{R} B_i B_j^\dagger \right\}$$

Ezt pedig visszírhatjuk részleges nyommá:

$$\sum_{kl} V_{kl} V_{kl}^\dagger = \text{Tr}_K (\text{Id} \otimes \mathcal{R}) U U^\dagger = \text{Id}_H$$

□

A tétel megfordítása is igaz: ha egy $B(H) \rightarrow B(H)$ lineáris leképzés a fenti alakú, akkor megfelelően választott unitér időfejlődés részleges nyomaként áll elő a leképzés:

2. Tétel. Legyen $\rho \in B(H)$, $V_i : H \rightarrow H$ lineáris ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$) és $\sum V_i V_i^\dagger = \text{Id}_H$, továbbá $\varepsilon : B(H) \rightarrow B(H)$ a következő leképzés:

$$\varepsilon(\rho) = \sum V_i^\dagger \rho V_i$$

Ekkor $\exists K$ környezet, $\rho_{env} \in B(K)$ sűrűség és $\exists U \in B(H) \otimes B(K)$ unitér, hogy

$$\varepsilon(\rho) = \text{Tr}_{env} U(\rho \otimes \rho_{env})U^\dagger$$

Bizonyítás. Legyen a K modell-környezet $m + 1$ dimenziós. Legyen e_i ($i = 0 \dots m$) egy ortonormált bázis K -n. Ekkor definiáljuk az $U : H \otimes K \rightarrow H \otimes K$ operátort a $H \otimes e_0$ altéren a következőképp: $U(v \otimes e_0) := \sum_k V_k^\dagger v \otimes e_k$. Ekkor

$$\langle Uw \otimes e_0 | Uv \otimes e_0 \rangle = \sum_{jk} \langle V_k^\dagger w | V_j v \rangle \langle e_k | e_j \rangle = \sum_k \langle w | V_k V_k^\dagger v \rangle = \langle w \otimes e_0 | v \otimes e_0 \rangle$$

ahol kihasználtuk a bázis ortonormáltságát illetve a Kraus operátorok teljességi relációját. U tehát skalárszorzat-tartó az adott altéren, tehát az egész $H \otimes K$ térre kiterjeszthető unitérként. Ezzel az U operátorral időfejllesztve a $\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|$ állapotot:

$$U\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|U^\dagger = \sum_j U|v_j\rangle\langle v_j| \otimes |e_0\rangle\langle e_0|U^\dagger$$

Ahol ρ pozitív-sága miatt írható $\rho = \sum |v_j\rangle\langle v_j|$. Igaz továbbá, hogy $|v_j\rangle\langle v_j| \otimes |e_0\rangle\langle e_0| = |v_j \otimes e_0\rangle\langle v_j \otimes e_0|$, mert a szorzat állapotokon ugyanúgy hatnak:

$$\left(|v_j\rangle\langle v_j| \otimes |e_0\rangle\langle e_0|\right)|a \otimes b\rangle = \langle v_j|a\rangle\langle e_0|b\rangle \cdot |v_j \otimes e_0\rangle = |v_j \otimes e_0\rangle\langle v_j \otimes e_0|a \otimes b\rangle$$

Ezért U és U^\dagger hatását kiírva:

$$\sum_j U|v_j \otimes e_0\rangle\langle v_j \otimes e_0|U^\dagger = \sum_{jkl} V_k^\dagger |v_j\rangle\langle v_j| V_l \otimes |e_k\rangle\langle e_l| = \sum_{kl} V_k^\dagger \rho V_l \otimes |e_k\rangle\langle e_l|$$

Innen a részleges nyom képzésre:

$$\text{Tr}_{env} U\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|U^\dagger = \sum_k V_k^\dagger \rho V_k$$

□

A Kraus-alakban előálló leképezések halmaza ennél bővebb, ha megengedünk tetszőleges $V : H \rightarrow K$ leképezéseket, ahol H, K Hilbert-terek. Ekkor ugyanis legyen

2. Definíció (Kvantumcsatorna). Legyen H és K véges dimenziós Hilbert-tér. $\varepsilon : S(H) \rightarrow S(K)$ kvantumcsatorna, ha vannak olyan $V_i : K \rightarrow H$ ($i = 1 \dots m$) leképezések, hogy $\sum_i V_i V_i^\dagger = \text{Id}_H$ és

$$\varepsilon(\rho) = \sum_i V_i^\dagger \rho V_i$$

2. Példa. A részleges nyom képzés előáll Kraus alakban. Legyen H és K véges dimenziós Hilbert-tér. Legyen $|i\rangle$ ($i \in I$) bázis H -n, $|j\rangle$ ($i \in J$) bázis K -n. Legyen $\rho \in B(H \otimes K)$. Ekkor $\rho = \sum_{ijkl} |i \otimes k\rangle\langle j \otimes l|$. Innen ρ részleges nyoma a K rendszerre:

$$\text{Tr}_K \rho = \sum_{ijk} \rho_{ijkk} |i\rangle\langle j| = \sum_{ijklm} \rho_{ijkl} |i\rangle\langle j| \langle m|k\rangle\langle l|m\rangle = \sum_m V_m^\dagger \rho V_m$$

Ahol $V_m : H \otimes K \rightarrow H$ a következőképp definiált:

$$V_m |i \otimes k\rangle = |i\rangle\langle m|k\rangle$$

A kvantumcsatornák egy másik jellemzését adja Choi tétele (3. tétel). Ehhez definiáljuk a következő fogalmakat.

3. Definíció (k -pozitivitás). $\varepsilon : B(H) \rightarrow B(K)$ lineáris leképzés k -pozitív, ha $\varepsilon \otimes \text{Id}_k : B(H) \otimes M_k(\mathbb{C}) \rightarrow B(K) \otimes M_k(\mathbb{C})$ leképzés pozitív.

Legyen $\rho \in B(H) \otimes M_k(\mathbb{C})$. Ekkor $\varepsilon \otimes \text{Id}_k$ pozitivitása azt jelenti, hogy $(\varepsilon \otimes \text{Id}_k)\rho \geq 0$. Ez nyilván elvárható minden fizikai ε leképzéstől, hisz ez azt jelenti, hogy a H rendszer transzformációja a környezettől független. Ezt minden környezetre megkövetelhető, innen a következő definíció.

4. Definíció (Teljes pozitívitas). $\varepsilon : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_m(\mathbb{C})$ lineáris leképzés teljesen pozitív, ha $\forall k \in \mathbb{N}$ -re k -pozitív.

3. Tétel (Choi). Legyen $\varepsilon : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_m(\mathbb{C})$ lineáris leképzés. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. ε teljesen pozitív.
2. ε n -pozitív.
3. $X = \sum_{ij} \varepsilon(E_{ij}) \otimes E_{ij}$ pozitív.
4. Létezik véges sok $V_i : M_m(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ lineáris leképzés, hogy $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ esetén $\varepsilon(A) = \sum_i V_i A V_i^\dagger$.

Bizonyítás. $1 \Rightarrow 2$: Ha ε teljesen pozitív, akkor nyilván n -pozitív is.

$2 \Rightarrow 3$ belátásához elég látni, hogy $\sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij}$ pozitív. Ez pedig nyilván önadjungált, továbbá

$$\sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij} \cdot \sum_{kl} E_{kl} \otimes E_{kl} = \sum_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \otimes E_{ij} E_{kl} = n \sum_{il} E_{il} \otimes E_{il}$$

tehát mivel egy önadjungált mátrix négyzete, $\sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij}$ tényleg pozitív.

$3 \Rightarrow 4$: Legyen $P_i = Q_i \otimes \text{Id}_m$, ahol $Q_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ a standard bázis i . elemével való szorzás: $Q_i \cdot v = \langle e_i | v \rangle$. Ekkor

$$Q_i \cdot E_{kl} \cdot Q_j^\dagger = Q_i |e_k\rangle \langle e_l| Q_j^\dagger = \langle e_i | e_k \rangle \langle e_l | e_j \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Innen a P_i operátorokat az X mátrixra hattatva kapjuk, hogy:

$$\varepsilon(A) = \sum_{ij} A_{ij} \varepsilon(E_{ij}) = \sum_{ijkl} A_{kl} Q_i E_{kl} Q_j^\dagger \otimes \varepsilon(E_{ij}) = \sum_{ij} A_{ij} P_i X P_j^\dagger$$

X pozitivitása miatt $X = \sum \lambda_i u_i u_i^\dagger = \sum_i v_i v_i^\dagger$, ahol $v_i = \sqrt{\lambda_i} u_i$. Legyen $(e_k)_{k=1..n} \mathbb{C}^n$ (már rögzített) standard bázisa, és definiáljuk a V_k operátorokat: $P_i v_k = V_k e_i$. (Ekkor V_k -k $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ típusú leképezések mátrixai.) Ezzel a definícióval

$$\varepsilon(A) = \sum_{ijk} A_{ij} V_k e_i e_j^\dagger V_k^\dagger = \sum_{ijk} V_k A_{ij} E_{ij} V_k = \sum_k V_k A V_k^\dagger$$

$4 \Rightarrow 1$: Erről az alakról látszik a teljes pozitívitas: ha $v \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^k$, továbbá $A \in M_n(\mathbb{C}) \otimes M_k(\mathbb{C})$ pozitív, akkor

$$v^\dagger (\varepsilon \otimes \text{Id}_k) A v = v^\dagger \sum_{ij} \varepsilon(A_{ij}) \otimes E_{ij} v = v^\dagger \sum_{ijl} V_l A_{ij} V_l^\dagger \otimes E_{ij} v = \sum_l u_l^\dagger A u_l \geq 0$$

ahol $u_l = (V_l^\dagger \otimes \text{Id}_k) v$, továbbá $A = \sum_{ij} A_{ij} \otimes E_{ij}$, ahol $A_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$. □

3. Példa. Az $M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ kvantumcsatornák a Bloch-gömb speciális affin leképezései. Ezek egyrészt pozitívak, tehát a gömböt önmagába viszik, másrészt a teljes pozitivitásnak kell teljesülnie. Erre példa a Bloch-reprezentációban következőképp megadott kvantumcsatornák halmaza:

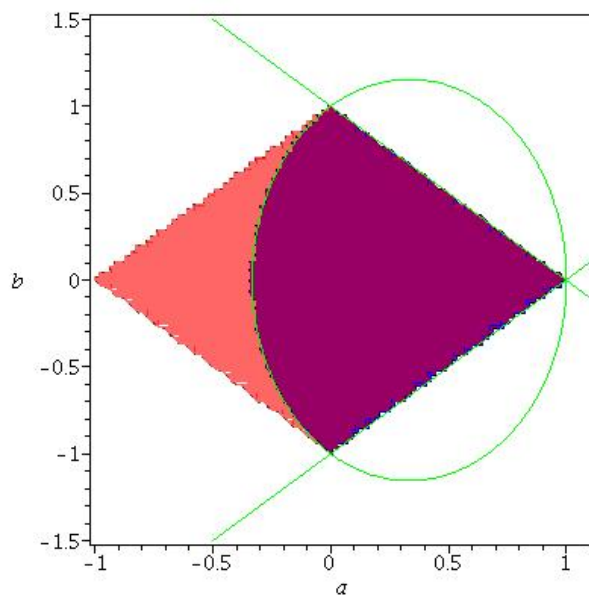
$$\varepsilon : \frac{1}{2}(\sigma_0 + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \mapsto \frac{1}{2}(\sigma_0 + ax\sigma_x + ay\sigma_y + (az + b)\sigma_z)$$

Ennek a csatornának a hatása a következő: összenyomja a Bloch-gömböt az a -szorosára, majd eltolja az északi pólus felé b -vel. Kérdés, hogy a és b mely értékeire lesz ez tényleg kvantumcsatorna. Ennek eldöntésére először is megkonstruáljuk a Choi-reprezentációt:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1+a+b}{2} & 0 & 0 & a \\ 0 & \frac{1-a+b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-a-b}{2} & 0 \\ a & 0 & 0 & \frac{1+a-b}{2} \end{pmatrix}$$

(Megjegyzés: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nem tartalmaz σ_0 komponenst, így a linearitás miatt nem is kell eltolni.)

X sajátértékei: $\frac{1-a+b}{2}$, $\frac{1-a-b}{2}$, $\frac{1+a+\sqrt{4a^2+b^2}}{2}$ és $\frac{1+a-\sqrt{4a^2+b^2}}{2}$. Ahhoz, hogy a leképzés teljesen pozitív legyen, X pozitivitása szükséges. Ehhez pedig a négy sajátérték pozitivitása kell.



1. ábra. A pozitív (piros) és CP tartomány (lila) a $\varepsilon : \frac{1}{2}(\sigma_0 + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \mapsto \frac{1}{2}(\sigma_0 + ax\sigma_x + ay\sigma_y + (az + b)\sigma_z)$ leképzés esetén. A zöld vonalak a Choi-mátrix sajátértékeinek zérus helyei.

A feltételeket 1. ábrán tüntettük fel. Az ábrán pirossal jelöltük azt a tartományt, ahol a leképzés pozitív, míg lilával azon tartományt, ahol a leképzés teljesen pozitív. A zöld vonalak a Choi-mátrix egyes sajátértékek előjelváltásának helyei.

Megjegyzés A bizonyításból látszik, hogy ha $k < \infty$, akkor az $\varepsilon : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_m(\mathbb{C})$, $\varepsilon : A \mapsto \sum_i^k V_i^\dagger A V_i$ leképezés előállítható maximum (és így pontosan) $n \cdot m$ darab operátor segítségével is.

Egy adott kvantumcsatornát különböző Kraus-operátorokkal is leírhatunk. Kérdés, hogy mi ezek között a leírások között a kapcsolat.[5]

4. Tétel (Kraus). *Legyen H és K véges dimenziós Hilbert-tér. Legyenek V_i és W_i ($i \in \{1 \dots k\}$) lineáris leképezések $K \rightarrow H$. Ekkor*

$$\varepsilon(A) \equiv \sum_{i=1}^k V_i^\dagger A V_i = \sum_{i=1}^k W_i^\dagger A W_i \quad \forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \iff \quad V_i = \sum_{j=1}^k U_{ij} W_j$$

ahol $U \in M_k(\mathbb{C})$ unitér.

Bizonyítás. Ha $V_i = \sum_j U_{ij} W_j$, akkor $U_{ij}^* = U_{ji}^\dagger$ miatt

$$\sum_i V_i^\dagger A V_i = \sum_{ijl} U_{ji}^\dagger W_j^\dagger A U_{il} W_l = \sum_{jl} \delta_{jl} W_j^\dagger A W_l = \sum_j W_j^\dagger A W_j$$

amit bizonyítani kellett.

A másik irányhoz legyen e_i ($i = 1 \dots n$) bázis H -n, $E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j|$. Legyen továbbá

$$X = \sum_{ij} E_{ij} \otimes \varepsilon(E_{ij}) = \sum_{ijl} E_{ij} \otimes V_l^\dagger E_{ij} V_l = \sum_l \left(\sum_i |e_i \otimes V_l^\dagger e_i\rangle \right) \left(\sum_i \langle e_i \otimes V_l^\dagger e_i| \right)$$

Legyen $v_l = \sum_i e_i \otimes V_l^\dagger e_i$ illetve $w_l = \sum_i e_i \otimes W_l^\dagger e_i$. Ezzel

$$X = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i| = \sum_i |w_i\rangle\langle w_i|$$

Legyen $|i\rangle$ $i \in \{1 \dots m\}$ X egy sajátbázisa $\langle i|i\rangle = \lambda_i$ sajátértékekre való normálással. Ekkor $w_i = \sum_j a_{ij} |j\rangle$. Innen

$$X = \sum_i |w_i\rangle\langle w_i| = \sum_{ijk} a_{ij} a_{ik}^* |j\rangle\langle k| = \sum_i |i\rangle\langle i|$$

Ahonnan

$$\delta_{jk} = \sum_i a_{ij} a_{ik}^* = (a a^\dagger)_{jk}$$

Tehát a unitér. Ez v -re is elmondható, így $v_k = \sum_l u_{kl} w_l$. Ezt kiírva:

$$\sum_i e_i \otimes V_k^\dagger e_i = \sum_{il} u_{kl} \cdot e_i \otimes W_l^\dagger e_i$$

e_i -k lineárisan függetlenek, így

$$V_k^\dagger e_i = \sum_l u_{kl} W_l^\dagger e_i$$

Ez minden e_i -re igaz, így a teljes térre is, azaz $U = u^\dagger$ jelöléssel

$$V_k = \sum_l U_{kl} W_l$$

□

Legyen \mathcal{N} kvantumcsatorna. Ez időfejlesztí a sűrűségi operátort (Schrödinger kép). Ezzel szemben a Heisenberg-képben a sűrűségi operátor állandó, a mérhető mennyiségeket reprezentáló operátorok időfüggetlenek. A két kép akkor ugyanaz, ha a mennyiségek várható értékei megegyeznek, ezért a fizikai mennyiségeket \mathcal{N}^\dagger időfejlesztí:

$$\langle \mathcal{N}(\rho) | A \rangle = \langle \rho | \mathcal{N}^\dagger(A) \rangle$$

\mathcal{N}^\dagger alapvető tulajdonságait az alábbi tételben foglaljuk össze:

5. Tétel. Legyen $\mathcal{N} : B(H) \rightarrow B(K)$ kvantumcsatorna, $\mathcal{N}(\rho) = \sum V_i^\dagger \rho V_i$, ahol $V_i : K \rightarrow H$ operátorok ($i = 1..k$), amikre $\sum V_i V_i^\dagger = \text{Id}_H$. Ekkor $\mathcal{N}^\dagger : B(K) \rightarrow B(H)$ -ra igaz:

- $\mathcal{N}^\dagger(\text{Id}_K) = \text{Id}_H$
- $\mathcal{N}^\dagger(A) = \sum V_i A V_i^\dagger$
- $\mathcal{N}^\dagger(AA) \leq \mathcal{N}^\dagger(A) \mathcal{N}^\dagger(A)$

Ahol $A \in B(K)$ önadjungált.

Bizonyítás.

$$\langle \mathcal{N}(\rho) | A \rangle = \sum \text{Tr } V_i^\dagger \rho V_i A = \text{Tr } \rho V_i A V_i^\dagger$$

Innen \mathcal{N}^\dagger hatása:

$$\mathcal{N}^\dagger(A) = \sum V_i A V_i^\dagger$$

Ekkor \mathcal{N}^\dagger nyilván egységtartó, hisz $\sum V_i V_i^\dagger = \text{Id}$.

A Schwartz-egyenlőtlenség bizonyításához kell, hogy

$$\sum_i V_i A A V_i^\dagger \geq \sum_{ij} V_i A V_i^\dagger V_j A V_j^\dagger$$

Legyen $\varphi \in H$ tetszőleges, $\varphi_i = A V_i^\dagger \varphi$ (azaz ekkor $\varphi_i \in K$), $|i\rangle$ ($i = 1 \dots k$) ortonormált bázis \mathbb{C}^k -n illetve $\phi = \sum_i |i\rangle \otimes \varphi_i$. Ekkor

$$\sum_i \langle \varphi | V_i A A V_i^\dagger \varphi \rangle = \sum_i \langle \varphi_i | \varphi_i \rangle = \sum_{ij} \langle i | j \rangle \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \langle \phi | \phi \rangle$$

A jobb oldal átalakításához legyenek az $U_k^\dagger : \mathbb{C}^k \otimes K \rightarrow H$ operátorok a következőképpen definiálva ($v_i \in K$):

$$U_k^\dagger \sum_i |i\rangle \otimes v_i = \sum_i \langle k | i \rangle \cdot V_k v_i = V_k v_k$$

Ekkor U_k^\dagger adjungáltja a következő $U_k : H \rightarrow \mathbb{C}^k \otimes K$ operátor:

$$U_k \cdot v = |k\rangle \otimes V_k^\dagger \cdot v$$

Hiszen

$$\langle U_k^\dagger \sum_i |i\rangle \otimes w_i | v \rangle = \langle V_k w_k | v \rangle = \langle w_k | V_k^\dagger v \rangle = \sum_l \langle l | k \rangle \langle w_l | V_k^\dagger v \rangle$$

Innen az egyenlőtlenség jobb oldala:

$$\sum_{ij} \langle \varphi | V_i A V_i^\dagger V_j A V_j^\dagger \varphi \rangle = \sum_{ij} \langle \varphi_i | V_i^\dagger V_j \varphi_j \rangle = \sum_{ijkl} \langle i \otimes \varphi_i | U_k U_l^\dagger \cdot j \otimes \varphi_j \rangle = \langle \phi | U U^\dagger \phi \rangle$$

Mert $U_k^\dagger \phi = V_k^\dagger \varphi_k$ illetve használtuk az $U = \sum_k U_k$ jelölést. Tehát elég, ha $\|UU^\dagger\| \leq 1$. Viszont $\|UU^\dagger\| = \|U^\dagger U\|$ és

$$\langle v|U^\dagger U.v \rangle = \sum_{ij} \langle U_i v|U_j v \rangle = \sum_{ij} \langle i|j \rangle \cdot \langle v|V_i V_j.v \rangle = \sum_i \langle v|V_i V_i^\dagger.v \rangle = \langle v|v \rangle$$

Tehát $\|UU^\dagger\| = 1$. □

1.3. Kvantumcsatornák Holevo-kapacitása

A kvantumkommunikáció legegyszerűbb esetében egy X véges halmazt kódolunk sűrűségi mátrixokkal. A kommunikációt kvantumcsatornával modellezzük, mert egy akkor preparált állapoton végzünk valamilyen fizikai operációt. A kommunikáció végén szeretnénk visszanyerni az információt (2. ábra). A kódolás jóságát az jellemzi, hogy mennyire tudjuk megkülönböztetni a kapott eredményeket.

Legyen p valószínűségi eloszlás X -en, ez jellemzi a kódszavak ($x \in X$) relatív gyakoriságát. Legyen $\varphi : X \rightarrow S(H)$, $x \mapsto \rho_x$ a kódolás. Modellezze \mathcal{N} kvantumcsatorna az információ-továbbítást.



2. ábra. Klasszikus kvantum információátviteli séma

Legyen $\rho = \sum_x p_x \rho_x$. Ekkor a Holevo mennyiség jellemzi a kódolás információ-tartalmát:

$$\chi(\mathcal{N}, p, \varphi) = S(\mathcal{N}(\rho)) - \sum_x p_x S(\mathcal{N}(\rho_x))$$

Ez a mennyiség átírható a következő alakba (legyen $\mathcal{N}(\rho) = \sigma$):

$$\chi = \sum_x -\text{Tr } p_x \sigma_x \ln \sigma + p_x \text{Tr } \sigma_x \ln \sigma_x = \sum_x p_x \text{Tr } \sigma_x (\ln \sigma_x - \ln \sigma) = \sum_x p_x H(\sigma_x || \sigma)$$

Ezen az alakon látszik, hogy az állapotok a Holevo-mennyiség az állapotok egy „átlagos” állapottól való megkülönböztethetőségét jelenti.

A Holevo-kapacitás a Holevo-mennyiség szuprémuma a lehetséges kódolásokra és eloszlásokra, ez kifejezi az adott csatornán klasszikus kódolással elérhető legjobb információ átvitelt.

$$C_{Ho}(\mathcal{N}, A) = \sup_{p, \varphi} \{ \chi(\mathcal{N}, p, \varphi) | \sum_x p_x \rho_x \in A \}$$

A Holevo-kapacitás számolásához alapvető tételeket tartalmazza [7]. Ennek alapján haladunk a következőkben.

Legyen D olyan sűrűség, amire $\forall x \in X$ esetén $H(\sigma_x, D) \leq R$. Ekkor a relatív entrópiára vonatkozó (10) Steiner-tétel alapján:

$$\chi = \sum_x p_x H(\sigma_x, \sigma) = \sum_x p_x H(\sigma_x, D) - H(\sigma, D) \leq \sum_x p_x H(\sigma_x, D) = R \quad (2)$$

Tehát ha van olyan D sűrűség, hogy $\forall x \in X$ esetén $H(\sigma_x, D) \leq R$, akkor a Holevo-kapacitás nem nagyobb, mint R . Ez a D sűrűség egy köréírt kör középpontjának felel meg, R a kör sugara. Innen a motiváció a következő definícióra:

5. Definíció. Legyen $A \subseteq S(H)$ és

$$R_A(O) = \sup_{x \in A} H(x, O)$$

$R_A(O)$ az A halmaz O -tól legtávolabbi pontjának O -tól vett távolsága.

3. Állítás. $R_A(O)$ konvex.

Bizonyítás. Írjuk be R_A definícióját!

$$\lambda R_A(O_1) + (1 - \lambda)R_A(O_2) = \lambda \sup_{x \in A} H(x, O_1) + (1 - \lambda) \sup_{y \in A} H(y, O_2) \quad (3)$$

A jobb oldal alulról becsülhető a két sup összegének becslésével:

$$\lambda \sup_{x \in A} H(x, O_1) + (1 - \lambda) \sup_{y \in A} H(y, O_2) \geq \sup_{x \in A} \left\{ \lambda H(x, O_1) + (1 - \lambda)H(x, O_2) \right\} \quad (4)$$

H konvex a második változójában (általánosabban: 17. állítás), ezért

$$\sup_{x \in A} \left\{ \lambda H(x, O_1) + (1 - \lambda)H(x, O_2) \right\} \geq \sup_{x \in A} H(x, \lambda O_1 + (1 - \lambda)O_2) \quad (5)$$

Végül visszaírva R_A definícióját kapjuk a bizonyítandó állítást,

$$\lambda R_A(O_1) + (1 - \lambda)R_A(O_2) \geq R_A(\lambda O_1 + (1 - \lambda)O_2)$$

□

A Holevo-kapacitás felső korlátjának vizsgálatakor azt a D sűrűséget érdemes vizsgálni, amihez tartozó $R(D)$ a lehető legkisebb. Ez a $\{\sigma_x | x \in X\}$ köréírt körének a sugara a következő értelemben:

6. Definíció. Egy $A \subseteq S(H)$ halmaz köréírt körének sugara:

$$R(A) = \inf_{O \in S(H)} \left\{ \sup_{D \in A} H(D, O) \right\} = \inf_{O \in S(H)} R_A(O)$$

Azaz R a legkisebb távolság, amire létezik olyan O pont, hogy A minden pontja nincs messzebb O -tól, mint R .

Az $A \subseteq S(H)$ halmaznak egyértelműen létezik a köréírt kör középpontja (ha $R(A) < \infty$), azaz $\exists! O$ $R_A(O) \leq R_A(D)$ minden D sűrűségre. Valóban, $R_A(O)$ konvex és alulról félig folytonos $S(H)$ belsejében.

4. Állítás. Legyen $B \subset S(H)$ véges halmaz, O a köréírt kör középpontja, R a köréírt kör sugara. Ekkor $\exists C \subseteq B$, $|C| > 1$ részhalmaz, hogy C köréírt kör középpontja O és $\forall x \in C$ -re

$$H(x, O) = R$$

Bizonyítás. Legyen C a következő nem üres halmaz:

$$C = \{x \in B | H(x, O) = R\}$$

$|B| \leq \infty$, ezért van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$H(x, O) < R - \varepsilon \quad \forall x \in B \setminus C$$

Legyen C köréírt körének középpontja P , sugara $r \leq R$. Legyen $Q = \lambda P + (1 - \lambda)O$. Megfelelően kis λ mellett H folytonosága miatt

$$H(x, Q) < R \quad \forall x \in B \setminus C$$

Illetve H konvexitása miatt minden $x \in C$ -re:

$$H(x, Q) = H(x, \lambda P + (1 - \lambda)O) \leq \lambda r + (1 - \lambda)R$$

Tehát $R = r$ és $O = Q = P$. Emiatt $|C| > 1$, hisz egy elemű halmaz köréírt körének sugara 0. \square

5. Állítás. *Véges B halmaz köréírt kör középpontja $\text{Hull}(B) = C$ konvex burkában van.*

Bizonyítás. Legyen a $O \notin C$ tetszőleges pont. H folytonos és konvex az első változójában, ezért $\exists X \in C$, hogy $H(X, O) \leq H(y, O)$ minden $y \in C$ -re. Ekkor elég kis $\varepsilon > 0$ -ra

$$H(y, \varepsilon X + (1 - \varepsilon)O) \leq H(y, O) \quad \forall y \in C$$

A konvexitást használva

$$H(y, \varepsilon X + (1 - \varepsilon)O) \leq \varepsilon H(y, X) + (1 - \varepsilon)H(y, O)$$

Tehát elég belátni, hogy $H(y, X) \leq H(y, O)$. A kulcs H deriváltja az első változóban.

$$\frac{d}{dt} H(X + t(y - X), O) = \text{Tr} \left\{ (1 + \ln X - \ln O)(y - X) \right\} = H(y, O) - H(X, O) - H(y, X)$$

Mivel X volt az O -hoz legközelebbi pont,

$$0 \leq H(y, O) - H(X, O) - H(y, X)$$

Ez $H(x, O) > 0$ miatt a kívánt egyenlőtlenséget adja, így a köréírt kör középpontja nem lehet a konvex burkon kívül. \square

A Holevo-mennyiségben sűrűségek véges halmazait vizsgáltuk, míg a kapacitás esetén bármilyen véges részhalmazt megengedtünk \mathcal{N} képéből. Ez motiválja a következő tételt:

6. Állítás. *Legyen $A \subseteq S(H)$ úgy, hogy $R_A < \infty$. Ekkor a köréírt kör sugara a véges részhalmazok sugarainak szuprémuma:*

$$\sup_{B \subseteq A, |B| < \infty} R_B = R_A$$

Bizonyítás. Nyilván $R_B \leq R_A$. Fordítva A sűrűn berácsozható véges sok ponttal, $\exists B \subseteq A$, $|B| < \infty$, hogy $\forall x \in A$ legyen olyan $y \in B$, hogy $\|x - y\| < \delta$, ahol $\delta > 0$ tetszőleges. Legyen $K > R_A$ és $h(x, y) = \min(H(x, y), K)$. h folytonos és korlátos, továbbá egyenletesen folytonos az első változóban, azaz $\forall \varepsilon > 0$ -ra van véges $B \subseteq M$, hogy $\forall O \in M$ -re legyen $y \in B$ úgy, hogy $|h(x, O) - h(y, O)| < \varepsilon$ globálisan. Erre a B részhalmazra nyilván

$$\inf_{O \in M} \max_{x \in B} h(x, O) \geq R_A - \varepsilon$$

Továbbá

$$\inf_{O \in M} \max_{x \in B} H(x, O) \geq \max_{x \in B} h(x, O)$$

Ezzel az állítást beláttuk. \square

6. Tétel. A Holevo-kapacitás az állapottér képeznek, $\mathcal{N}(S(H))$ -nak a köréírt körének sugarára:

$$C_{Ho} = R_{\mathcal{N}(S(H))}$$

Bizonyítás. A 2. egyenlet alapján a χ Holevo-mennyiség felülről becsülhető a köréírt kör sugarával, így a 6. állítás szerint a Holevo-kapacitás nem nagyobb, mint $\mathcal{N}(S(H))$ köréírt körének sugarára:

$$C_{Ho} \leq R_{\mathcal{N}(S(H))}$$

Fordítva legyen $r < R_{\mathcal{N}(S(H))}$, ekkor a 6. állítás szerint van olyan $B \subset \mathcal{N}(S(H))$ véges halmaz, hogy a köréírt körének sugarára $R_B > r$. A 4. állítás szerint feltehető, hogy $H(x, O) = R_B$ minden $x \in B$ -re, ha O a köréírt kör középpontja. Az 5. állítás szerint O a konvex burokban van, így van olyan p valószínűségi eloszlás B -n, hogy $O = \sum_{x \in B} p_x x$. Erre viszont

$$C_{Ho} \geq \chi = \sum_{x \in B} p_x H(x, O) = R_B > r$$

Tehát $C_{Ho} = R_{\mathcal{N}(S(H))}$ □

4. Példa. Tekintsük a 3. példában szereplő csatornákat,

$$\varepsilon : \frac{1}{2}(\sigma_0 + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \mapsto \frac{1}{2}(\sigma_0 + ax\sigma_x + ay\sigma_y + (az + b)\sigma_z)$$

Szimmetria okokból a köréírt kör középpontja $(0, 0, \xi)$ -ben van, ahol $\xi \in (b - a, b + a)$. Egy általános sűrűségi mátrix ε képezéből:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + az + b & ax - iay \\ ax + iay & 1 - az - b \end{pmatrix}$$

Ennek távolsága a középponttól:

$$H(\rho, O) = \text{Tr}\{\rho \ln \rho - \rho \ln O\} = \frac{1+r}{2} \ln \frac{1+r}{2} + \frac{1-r}{2} \ln \frac{1-r}{2} - \text{Tr} \rho \ln O$$

Ahol $r = \sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 + (az + b)^2}$. A második tagot is kiszámolva:

$$H(\rho, O) = \frac{1+r}{2} \ln \frac{1+r}{2} + \frac{1-r}{2} \ln \frac{1-r}{2} - \frac{1+az+b}{2} \ln \frac{1+\xi}{2} - \frac{1-az-b}{2} \ln \frac{1-\xi}{2}$$

Gömbi koordinátákban $az + b = r \cdot \cos \varphi$. Ezt behelyettesítve

$$H(\rho, O) = \frac{1+r}{2} \ln \frac{1+r}{2} + \frac{1-r}{2} \ln \frac{1-r}{2} - \frac{1+r \cos \varphi}{2} \ln \frac{1+\xi}{2} - \frac{1-r \cos \varphi}{2} \ln \frac{1-\xi}{2}$$

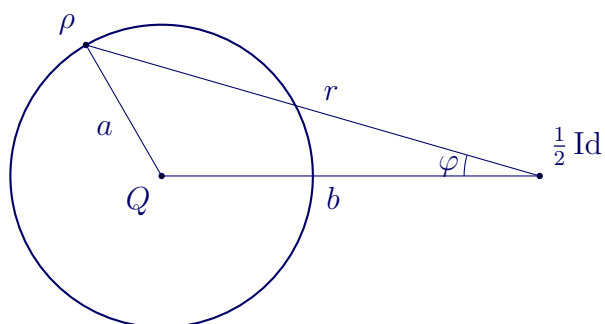
H konvex az első változójában, így elég csak a képtér szélén keresni a maximumot. Ez viszont az $r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi = a^2$ kényszert jelenti (3. ábra).

Ebből $\cos \varphi$ kifejezhető:

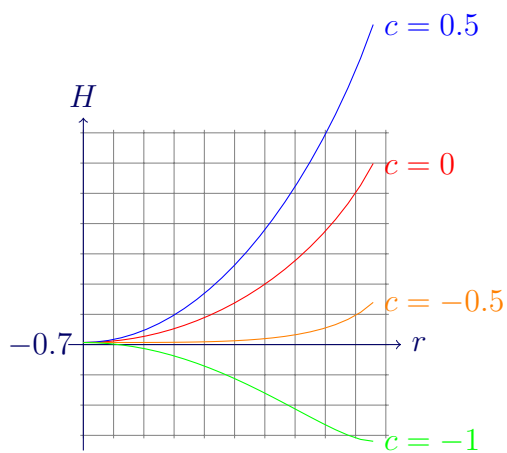
$$\cos \varphi = \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2rb}$$

Ezt visszaírva H kifejezésébe kapjuk:

$$H(\rho, O) = \frac{1+r}{2} \ln \frac{1+r}{2} + \frac{1-r}{2} \ln \frac{1-r}{2} + c \cdot r^2 + d$$



3. ábra. A vizsgált csatorna képe: $Q = \mathcal{N}(\frac{1}{2} \text{Id})$, ρ tetszőleges sűrűségi mátrix, $\frac{1}{2} \text{Id}$ a Bloch-gömb középpontja.



4. ábra. $H(\rho, O)$ értéke r függvényében különböző c értékekre

Ahol

$$c = \frac{1}{4b} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi}$$

$$d = \frac{b^2 - a^2}{4b} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\xi}{2}$$

A 4. ábrán feltüntettük $H(\rho, O) = f(r)$ értékeit r függvényében különböző c paraméterek mellett. Az ábrán látszik, hogy f kis r -re lehet konkáv, de akkor monoton csökken, míg nagy r -re konvex. Vizsgáljuk meg f deriváltját és második deriváltját!

$$\partial_r H(\rho, O) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2b} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi}$$

$$\partial_r^2 H(\rho, O) = \frac{1}{1-r^2} + \frac{1}{2b} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi}$$

Innen látszik, hogy ha $2c > -1$, akkor f végig konvex, monoton növekvő. Ha $2c \leq -1$, akkor f monoton csökken, majd konvexsége válik, végül monoton nő. Tehát H a maximumát az $(|a-b|, a+b)$ intervallumon a széleinél veszi fel. Ekkor viszont a köréírt kör középpontja úgy helyezkedik el, hogy $H(\rho_1, O) = H(\rho_2, O)$, ahol ρ_1 a kép északi pólusa, ρ_2 a déli pólus.

Tehát kell, hogy $H_1 = H_2$, ahol

$$H_1 = \frac{1+r_1}{2} \ln \frac{1+r_1}{2} + \frac{1-r_1}{2} \ln \frac{1-r_1}{2} - \frac{1+r_1}{2} \ln \frac{1+\xi}{2} - \frac{1-r_1}{2} \ln \frac{1-\xi}{2}$$

$$H_2 = \frac{1+r_2}{2} \ln \frac{1+r_2}{2} + \frac{1-r_2}{2} \ln \frac{1-r_2}{2} - \frac{1+r_2}{2} \ln \frac{1+\xi}{2} - \frac{1-r_2}{2} \ln \frac{1-\xi}{2}$$

és $r_1 = a+b$ illetve $r_2 = b-a$ a kép két átellenes pontja az észak-déli tengelyen. Innen átrendezéssel

$$-S(r_1) - \frac{r_1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} = -S(r_2) - \frac{r_2}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

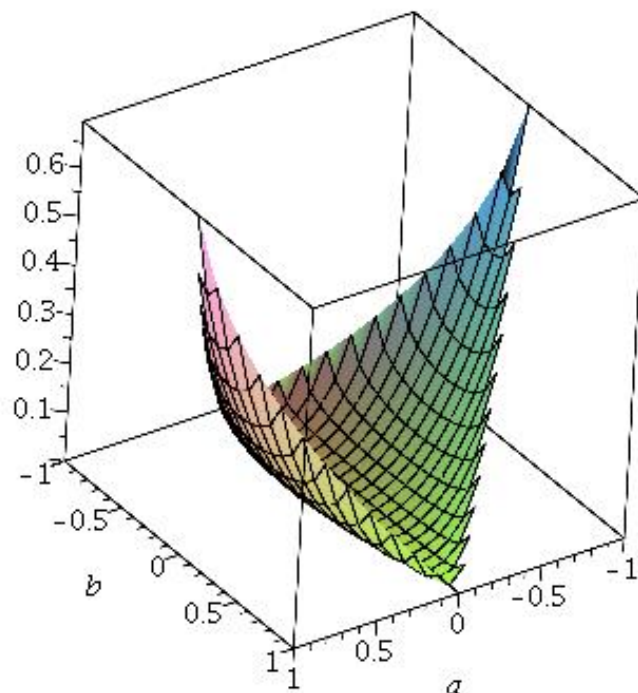
Ahol S az entrópia. Ezért ξ -re:

$$\ln \frac{1-\xi}{1+\xi} = 2 \cdot \frac{S(\rho_1) - S(\rho_2)}{r_1 - r_2}$$

Innen ξ kifejezhető, amiből már a kapacitás mértéke is adódik. Az eredményt az 5. ábrán tüntettem fel. Vegyük észre, hogy a kapott eredmény tükrözi az alapvető elvárásainkat: $a = 0$ esetben a kapacitás 0, hiszen mindent 1 pontba nyomunk össze. $b = 0$ esetben pedig a kapacitás $\log(2) - S(b)$ szerint változik.

2. Affin terek geometriája

A diplomamunka során vizsgált két objektum, az állapottér és a csatornák tere is véges dimenziós affin terek konvex, nyílt részalmazaként (illetve ilyenek lezártjaiként) áll elő. Ezek a terek léteznek egy természetes skalárszorzás, a Hilbert-Schmidt skalárszorzás.



5. ábra. A $\varepsilon : \frac{1}{2}(\sigma_0 + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \mapsto \frac{1}{2}(\sigma_0 + ax\sigma_x + ay\sigma_y + (az + b)\sigma_z)$ leképezés kapacitása. A számolt értéket a teljes pozitivitási tartományon kívül is feltüntettük.

Így a következőkben a véges dimenziós, belső szorzatos affin terek nyílt részhalmazainak geometriáját vizsgáljuk. A felépítésben a [3] jegyzetet követjük.

Legyen \mathbb{V} affin V valós vektortér felett, $\dim V < \infty$, ezért V irányítható. Legyen adott egy $\langle \cdot | \cdot \rangle$ skalárszorzás, amiből a származtatott norma $\|\cdot\|$. Legyen $M \subseteq \mathbb{V}$ konvex, nyílt, korlátos halmaz.

Jelölje \mathcal{F} az $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvények halmazát. Jelölje \mathcal{F}_a az $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in M$ -ben akárhányszor differenciálható függvények halmazát. Jelölje \mathfrak{X} az $M \rightarrow V$ sima leképezések (vektormezők) halmazát.

7. Definíció (Deriváció). $X_a : \mathcal{F}_a \rightarrow \mathbb{R}$ deriváció, ha

$$\begin{aligned} X_a.(\lambda f + \mu g) &= \lambda X_a.f + \mu X_a.g \\ X_a.(f \cdot g) &= X_a.f \cdot g(a) + f(a) \cdot X_a.g \end{aligned}$$

7. Állítás. \mathcal{F}_a derivációi ($a \in M$ rögzített) és V elemei közt 1-1 értelmű megfeleltetés van.

Bizonyítás. Legyen $x \in V$ és X_a a következőképp definiálva:

$$X_a.f := \left. \frac{d}{dt} f(a + t \cdot x) \right|_{t=0}$$

X_a nyilván deriváció, hisz lineáris és teljesíti a Leibniz-szabályt.

Fordítva: legyen X_a deriváció. Ekkor $X_a.1 = 0$, mert $X_a.1 = X_a.(1 \cdot 1) = X_a.1 \cdot 1 + X_a.1 \cdot 1$. Innen linearitás miatt minden c -re $X_a.c = 0$ igaz.

Legyen $f_z(y) = \langle z|y \rangle$. Ekkor $z \mapsto f_z$ lineáris, $z \mapsto X_a.f_z$ lineáris funkcionál. Ezért $\exists x \in V$, hogy $X_a.f_z = \langle z|x \rangle$. Lineáris függvényre tehát $X_a.f_z = \frac{d}{dt}f_z(a+tx)$ erre az x -re. Innen minden sima függvény közelíthető a következőképp:

$$f(a+h) = f(a) + \langle z|h \rangle + \langle h|C.h \rangle + g(h)$$

ahol $z \in V$ f gradiense, C lineáris transzformáció és $g(h)/\|h\|^2 \rightarrow 0$, ha $\|h\| \rightarrow 0$. Ekkor X_a hatása a második tagra komponensenként kiírva

$$X_a.\langle h|C.h \rangle = X_a.\sum C_{ij}\langle h|e_i \rangle \langle e_j|h \rangle = \sum C_{ij}(\langle e_i|x \rangle \langle e_j|h \rangle + \langle e_j|x \rangle \langle h|e_i \rangle)|_{h=0} = 0$$

Végül az utolsó tag deriváltja:

$$X_a.(\|h\|^2 \cdot g(h)/\|h\|^2) = X_a.\|h\|^2 \cdot 0 + 0 \cdot X_a.(g(h)/\|h\|^2)$$

A kapott eredményeket összegyűjtve adódik, hogy megfelelő $x \in V$ -re

$$X_a.f := \left. \frac{d}{dt}f(a+t \cdot x) \right|_{t=0}$$

□

Vektormező természetesen hat a sima függvényekre a következő konstrukción keresztül. Legyen $X \in \mathfrak{X}$ vektormező, $f \in \mathcal{F}$ sima függvény. Legyen $x = X(a)$ és X_a az x vektor által az a pontban meghatározott deriváció. Ekkor

$$(X.f)(a) := X_a.f$$

8. Állítás. Legyen $X \in \mathfrak{X}$ vektormező, $f, g \in \mathcal{F}$. Ekkor

$$X.(\lambda f + \mu g) = \lambda X.f + \mu X.g \quad (6)$$

$$X.(f \cdot g) = X.f \cdot g + f \cdot X.g \quad (7)$$

Továbbá minden fenti tulajdonságú $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ leképezésnek megfelel egy vektormező.

Bizonyítás. A vektormezőre definíció szerint teljesülnek a fenti tulajdonságok, továbbá a simaság miatt \mathcal{F} -be képez. Visszafelé, a fenti tulajdonságok miatt X minden pontban deriváció, ott megfelel neki egy vektor: $x(a)$. $X.f$ pedig csak akkor lehet sima, ha $x(a)$ is az. □

8. Definíció (Kommutátor). Legyen $X, Y \in \mathfrak{X}$ vektormező. Ezek kommutátora:

$$[X, Y].f := X.Y.f - Y.X.f$$

9. Állítás. Ekkor $[X, Y]$ szintén vektormező.

Bizonyítás. $[X, Y]$ lineáris, hisz X, Y lineáris. $[X, Y].f$ nyilván \mathcal{F} -beli, hisz f simasága a deriváltak simaságát is jelenti. Végül a Leibniz-szabály is teljesül:

$$[X, Y].(f \cdot g) = X.Y.(f \cdot g) - Y.X.(f \cdot g) = X.(f \cdot Y.g + g \cdot Y.f) - Y.(g \cdot X.f + f \cdot X.g)$$

A zárójelet felbontva marad:

$$[X, Y].(f \cdot g) = f \cdot X.Y.g + g \cdot X.Y.f - f \cdot Y.X.g - g \cdot Y.X.f$$

Ez pont a Leibniz-szabály teljesülése, így az előző tétel értelmében $[X, Y]$ vektormező. □

10. Állítás. Legyenek $X, Y \in \mathfrak{X}$ konstans vektormezők. Ekkor $[X, Y] = 0$.

Bizonyítás. Legyen $X(a) = x \forall a \in M, Y(a) = y \forall a \in M$. Ekkor a Young-tétel szerint

$$(X.Y.f)(a) = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} f(a + tx + sy) \Big|_{t=s=0} = (Y.X.f)(a)$$

□

Mint láttuk, minden vektormező meghatároz egy $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ deriválást, azaz létezik egy $\nabla : \mathfrak{X} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \nabla : (X, f) \mapsto \nabla_X f := X.f$ leképezés, ami a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\begin{aligned} \nabla_X(f + g) &= \nabla_X f + \nabla_X g \\ \nabla_X(fg) &= \nabla_X f \cdot g + f \cdot \nabla_X g \\ \nabla_{X+Y} f &= \nabla_X f + \nabla_Y f \\ \nabla_{fX} g &= f \cdot \nabla_X g \end{aligned}$$

Ezt szeretnénk kiterjeszteni a vektormezőkre is, azaz keresünk $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}, \nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ deriválást. Ezt nevezzük konnexiónak, és a fenti tulajdonságokon keresztül definiáljuk.

9. Definíció (Konnexió). Legyenek $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$ vektormezők M felett. Ekkor $\nabla : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}, \nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ konnexió, ha

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (8)$$

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y \quad (9)$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (10)$$

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \quad (11)$$

11. Állítás. Az affin téren van egy D természetes konnexió: ez a differenciálásból adódik.

Bizonyítás. Legyen $a \in M, X, Y \in \mathfrak{X}$ és $h \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a + hX(a) \in M$, ekkor:

$$Y(a + hX(a)) = Y(a) + h \cdot (D_X Y)(a) + o(\|h\|)$$

Ahol $X(a) \mapsto (D_X Y)(a)$ \mathcal{F} -lineáris leképezés. Ekkor D konnexió: $D_X Y \in \mathfrak{X}$, mert Y, s így $D_X Y$ is sima. D tényleg konnexió: (10) és (11) kielégül $X(a) \mapsto D_X Y(a)$ linearitása miatt, míg (8) a deriválás linearitása miatt teljesül. (9) ellenőrzéséhez szorzatot kell deriválni. Legyen $h \cdot X(a) = x$.

$$f(a + x)Y(a + x) = f(a)Y(a) + h(\nabla_X f)(a) \cdot Y(a) + hf(a) \cdot D_X Y(a) + o(\|h\|)$$

Ami pont (9)-t jelenti. □

Legyen ∇ konnexió, $\nabla - D = \Gamma$. Ekkor $\Gamma : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ és Γ mindkét változójában lineáris:

$$\Gamma(f \cdot X, Y) = f \cdot \Gamma(X, Y) \quad (12)$$

$$\Gamma(X + Y, Z) = \Gamma(X, Z) + \Gamma(Y, Z) \quad (13)$$

$$\Gamma(X, f \cdot Y) = f \cdot \Gamma(X, Y) \quad (14)$$

$$\Gamma(X, Y + Z) = \Gamma(X, Y) + \Gamma(X, Z) \quad (15)$$

Legyen továbbá $\Gamma_a : V \times V \rightarrow V$ lineáris leképezés a következőképp definiálva:

$$\Gamma_a(X(a), Y(a)) := \Gamma(X, Y)(a)$$

10. Definíció (Torzió). Egy konnexió torziója $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. A konnexió torziómentes, ha $T = 0$

12. Állítás. A D deriválás torziómentes.

Bizonyítás. Legyen $x = X_a$, $y = Y_a$.

$$Y.(X.f)|_a = \frac{d}{dt}(X.f|_{a+yt})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(X_{a+yt}.f|_{a+yt})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x.f|_{a+yt} + t(\nabla_Y X)_a.f|_a)|_{t=0}$$

Ahol $o(|t|)$ tagokat elhagyhatunk. Innen

$$Y.(X.f)|_a = y.x.f + (D_Y X)_a.f$$

Hasonlóan

$$X.(Y.f)|_a = x.y.f + (D_X Y)_a.f$$

Innen

$$[X, Y].f|_a = x.y.f + (D_X Y)_a.f - y.x.f - (D_Y X)_a.f = (D_X Y)_a.f - (D_Y X)_a.f$$

Tehát a D deriválás tényleg torziómentes. □

11. Definíció. g metrikus tenzor, ha $g : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{F}$

- bilineáris
- $\forall (p \in M) \ g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad g_p : (X(p), Y(p)) \mapsto g(X, Y)(p)$ pozitív definit

12. Definíció (Kompatibilitás). Egy g konnexió kompatibilis a ∇ metrikával, ha

$$\nabla_X g(Y, Z) := X.g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

7. Tétel (Riemann geometria alaptétele). Minden metrikához $\exists!$ torzió mentes kompatibilis metrika.

Bizonyítás. Írjuk ki a kompatibilitási feltételt, majd permutáljuk a három vektormezőt!

$$X.g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) = g(Y, \nabla_X Z) \tag{16}$$

$$Y.g(Z, X) - g(\nabla_Y Z, X) = g(Z, \nabla_Y X) \tag{17}$$

$$Z.g(X, Z) - g(\nabla_Z X, Y) = g(X, \nabla_Z Y) \tag{18}$$

Ekkor (18)-ból kivonva az első kettőt, továbbá a torziómentességet használva kapjuk:

$$2g(X, \nabla_Z Y) = Z.g(X, Y) + Y.g(Z, X) - X.g(Y, Z) - g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z) \tag{19}$$

Innen látszik $\nabla_Z Y$ egyértelműsége és létezése: $g(X, \nabla_Z Y)$ jól meghatározott, innen pedig a metrika nem elfajultságából $\nabla_Z Y$ jól meghatározott. Az így definiált ∇ teljesíti a konnexió (8)-(11). axiómáit. g lineáris, $X \mapsto X.f$ lineáris, $X \mapsto [X, Y]$ \mathcal{F} -lineáris. Ezért (8). és (10). teljesül. (9). ellenőrzése:

$$2g(X, \nabla_Z (fY)) = Z.fg(X, Y) + fY.g(Z, X) - X.fg(Y, Z) - fg([Z, X], Y) - g([fY, Z], X) + g([X, fY], Z)$$

Ebbe beírva a Leibniz-szabályt:

$$\begin{aligned}
 2g(X, \nabla_Z(fY)) = & f \cdot \left(Z.g(X, Y) + Y.g(Z, X) - X.g(Y, Z) \right) + \\
 & Z.f \cdot g(X, Y) - X.f \cdot g(Y, Z) - \\
 & f \cdot \left(g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z) \right) + \\
 & Z.f \cdot g(Y, X) + X.f \cdot g(Y, Z)
 \end{aligned}$$

A jobb oldal pedig nyilván

$$2g(X, f \cdot \nabla_Z Y) + 2g(X, Z.f \cdot Y)$$

Tehát (9). teljesül. Hasonlóan megy (11). ellenőrzése is. \square

A téren adott skalárszorzat segítségével egy g metrika a következőképp fejezhető ki:

$$g_a(X, Y) = \langle X_a | G_a(Y_a) \rangle = \langle X | G(Y) \rangle|_a$$

ahol $G_a : V \rightarrow V$ lineáris leképzés. A konnexió kifejezéséhez érdemes konstans vektormezőket választani, hisz ekkor a kommutátorok eltűnnek (10. állítás). Mivel a konnexiót szétszedtük: $\nabla = D + \Gamma$, ahol Γ már lineáris, ez elég is a konnexió jellemzéséhez.

Ekkor a Riemann-geometria alaptétele (7. tétel) alapján:

$$2g(X, \nabla_Z Y) = Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - Xg(Y, Z)$$

Ezt a fentiek segítségével átírhatjuk:

$$2\langle X | G(\Gamma(Z, Y)) \rangle = \langle X | D_Y G.Z \rangle + \langle X | D_Z G.Y \rangle - \langle Y | D_X G.Z \rangle \quad (20)$$

Legyen $F : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ az a bilineáris leképzés, amire

$$\langle Y | D_X G.Z \rangle = \langle X | F(Y, Z) \rangle$$

Ezzel a konnexióra a következő kifejezés adódik:

$$\Gamma(Z, Y) = \frac{1}{2} G^{-1} \left(D_Y G.Z + D_Z G.Y - F(Y, Z) \right) \quad (21)$$

Tehát affin terek esetén a metrikából könnyen tudjuk számolni a konnexiót.

Legyen e_i ($i \in I$) bázis V -n. Ekkor a konnexió jellemezhető a következő mátrixelemekkel (első- és másodfajú Christoffel-szimbólumok):

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ijk} &= \langle e_k | G.\Gamma(e_i, e_j) \rangle \\
 \Gamma_{ij}^k &= \langle e_k | \Gamma(e_i, e_j) \rangle
 \end{aligned}$$

Legyen továbbá

$$g_{ij,k} = \langle e_i | D_{e_k} G.e_j \rangle$$

Innen

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}) \quad (22)$$

Tehát konkrét számolásnál elég G első deriváltját meghatározni, onnan a konnexió számolható.

13. Definíció (Riemann tenzor). $R(X, Y)(Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$

13. Állítás. A Riemann-tenzor \mathcal{F} -lineáris.

Bizonyítás. Egyszerű számolással:

$$\nabla_X \nabla_Y (fZ) = \nabla_X ((Y.f)Z + f\nabla_Y Z) = (X.Y.f)Z + (Y.f)\nabla_X Z + X.f\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z$$

Hasonlóan:

$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) = (Y.X.f)Z + (X.f)\nabla_Y Z + Y.f\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z$$

Illetve:

$$\nabla_{[X, Y]} (fZ) = [X, Y].fZ + f\nabla_{[X, Y]} Z = X.Y.fZ - Y.X.fZ + f\nabla_{[X, Y]} Z$$

Innen

$$R(X, Y)(fZ) = f\nabla_X \nabla_Y Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X, Y]} Z = fR(X, Y)(Z)$$

□

A szokásos $\nabla = D + \Gamma$ szétválasztással, konstans vektormezőkre számolva:

$$R(X, Y)Z = (D_X + \Gamma_X)(D_Y + \Gamma_Y)Z - (D_Y + \Gamma_Y)(D_X + \Gamma_X)Z$$

A zárójeleket kibontva:

$$R(X, Y)Z = D_X \Gamma(Y, Z) + \Gamma(X, \Gamma(Y, Z)) - D_Y \Gamma(X, Z) - \Gamma(Y, \Gamma(X, Z))$$

Ezt a következő mátrixelemekkel lehet jellemezni:

$$R_{kij}^l = \langle e_l | R(e_j, e_i)e_k \rangle = \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{js}^l \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{is}^l \Gamma_{jk}^s$$

Legyen

$$R_{lkij} = g_{ls} R_{kij}^s$$

Ekkor

$$R_{lkij} = \partial_j \Gamma_{ikl} - \partial_j g_{ls} \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{jst} \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jkl} + \partial_i g_{ls} \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{isl} \Gamma_{jk}^s$$

Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned} \Gamma_{jls} &= \frac{1}{2}(\partial_j g_{ls} + \partial_l g_{js} - \partial_s g_{jl}) \\ \Gamma_{jst} &= \frac{1}{2}(\partial_j g_{st} + \partial_s g_{jt} - \partial_t g_{js}) \end{aligned}$$

Ezért

$$\partial_j g_{ls} = \Gamma_{jls} + \Gamma_{jst}$$

Ezt beírva a Riemann-tenzor kifejezésébe:

$$R_{lkij} = \partial_j \Gamma_{ikl} - \Gamma_{jls} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{jst} \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{jst} \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jkl} + \Gamma_{ils} \Gamma_{jk}^s + \Gamma_{isl} \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{isl} \Gamma_{jk}^s$$

A megfelelő tagok kiejtik egymást, így

$$R_{lkij} = \partial_j \Gamma_{ikl} - \Gamma_{jls} \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jkl} + \Gamma_{ils} \Gamma_{jk}^s$$

Ebbe beírva a Christoffel-szimbólumok kifejezését:

$$R_{lkij} = \frac{1}{2} \partial_j (\partial_k g_{is} + \partial_i g_{ks} - \partial_s g_{ik}) - \frac{1}{2} \partial_i (\partial_k g_{js} + \partial_j g_{ks} - \partial_s g_{jk}) + \Gamma_{jls} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ils} \Gamma_{jk}^s$$

Végül a zárójelet felbontva kapjuk, hogy

$$R_{lkij} = \frac{1}{2} (\partial_j \partial_k g_{is} - \partial_j \partial_s g_{ik} - \partial_i \partial_k g_{js} + \partial_i \partial_s g_{jk}) + \Gamma_{jls} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ils} \Gamma_{jk}^s \quad (23)$$

Tehát a Riemann-tenzor meghatározható a metrika második deriváltjából és a Christoffel-szimbólumokból.

14. Definíció (Ricci görbület).

$$Ricci(Y, Z) = \text{Tr} \left\{ X \mapsto R(X, Y)Z \right\}$$

Legyen $(x_i)_{i \in I} \in V$ ortonormált bázis. Legyen $(X_i)_{i \in I}$ konstans vektormező úgy, hogy $X_i = x_i$ mindenhol. Ekkor

$$Ricci(Y, Z) = \sum_{i \in I} \langle X_i | R(X_i, Y)Z \rangle$$

Koordinátákkal kiírva ez a következőt jelenti:

$$Ricci_{ij} = R_{ijl}^l$$

15. Definíció (Skalárgörbület). Legyen r a következő lineáris transzformáció:

$$Ricci(Y, Z) = g(Y, r(Z)) = \langle Y | G.r(Z) \rangle$$

Ekkor a skalárgörbület:

$$s = \text{Tr} \left\{ Z \mapsto r(Z) \right\}$$

Az előző definíciókkal

$$s = \sum_{i \in I} \langle X_i | r(X_i) \rangle = \sum_{i \in I} \langle G^{-1}.X_i | G.r(X_i) \rangle = \sum_{i \in I} Ricci(G^{-1}.X_i, X_i)$$

Koordinátákkal kiírva

$$s = Ricci_i^i = g^{ij} R_{ijl}^l = g^{ij} g^{kl} R_{lkij}$$

3. Az állapottér geometriája

A kvantumcsatornák terét sűrűségi mátrixok lineáris altereként képzeljük el. Érdeemes ezért megnézni, milyen geometrikát szokás bevezetni az állapottéren, majd a metrikát megszorítani a megfelelő altérre.

3.1. Relatív entrópiák

Az alábbiakban a Petz által bevezetett relatív entrópiákat vizsgáljuk. Legyen D és E két invertálható sűrűségi mátrix. Definiáljuk az L_D , R_D és Δ lineáris operátorokat a következőképp:

$$L_D \cdot \rho := D\rho \quad (24)$$

$$R_D \cdot \rho := \rho D \quad (25)$$

$$\Delta \cdot \rho := E\rho D^{-1} = L_E R_D^{-1} \cdot \rho \quad (26)$$

14. Állítás. *Teljesülnek a következő tulajdonságok:*

- $L_D \geq 0$
- $R_D \geq 0$
- $[L_D, R_E] = 0$
- $\Delta \geq 0$

Bizonyítás. L_D önadjungált, mert

$$\langle \mu | L_D \cdot \rho \rangle = \text{Tr} \{ \mu^\dagger D \rho \} = \text{Tr} \{ (D \mu)^\dagger \rho \} = \langle L_D \cdot \mu | \rho \rangle$$

R_D -re hasonlóan megy a bizonyítás. A pozitivitáshoz:

$$\langle \rho | L_D \cdot \rho \rangle = \text{Tr} \{ \rho^\dagger D \rho \} = \text{Tr} \{ (D^{1/2} \rho)^\dagger D^{1/2} \rho \} \geq 0$$

R_D -re hasonlóan megy a bizonyítás. Az $[L_D, R_E] = 0$ állítás triviális, innen pedig a $\Delta = L_E R_D^{-1}$ miatt következik, hogy $\Delta > 0$ \square

Legyen H az f operátorkonvex függvényhez ($f(1) = 0$) tartozó relatív entrópia [8]:

$$H(D, E) = \text{Tr} \{ D^{1/2} f(L_E R_D^{-1}) \cdot D^{1/2} \}$$

Ezt kiírhatjuk a Cauchy-tétel segítségével is (L és R operátorok kommutálnak). Ehhez jegyezzük meg, hogy:

$$(x \cdot \text{Id} - L_E)A = (x \cdot \text{Id} - E)A \implies (x \cdot \text{Id} - L_E)^{-1}A = (x \cdot \text{Id} - E)^{-1}A \quad (27)$$

$$(x \cdot \text{Id} - R_D)A = A(x \cdot \text{Id} - D) \implies (x \cdot \text{Id} - R_D)^{-1}A = A(x \cdot \text{Id} - D)^{-1} \quad (28)$$

Ezeket felhasználva az integrál értéke már egyszerűen kiírható. (Felhasználtuk, hogy a Tr alatt az operátorok ciklikusan permutálhatóak.)

$$H(D, E) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \text{Tr} \left\{ \oint \oint f\left(\frac{x}{y}\right) (x \cdot \text{Id} - E)^{-1} D^{1/2} (y \cdot \text{Id} - D)^{-1} D^{1/2} dx dy \right\}$$

$D^{1/2}$ és $(y \cdot \text{Id} - D)^{-1}$ kommutálnak, ezért

$$H(D, E) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \text{Tr} \left\{ \oint \oint f\left(\frac{x}{y}\right) (x \cdot \text{Id} - E)^{-1} (y \cdot \text{Id} - D)^{-1} D dx dy \right\} \quad (29)$$

Ezzel az alakkal hosszadalmas a számolás, így még egy kicsit alakítjuk:

$$(y \cdot \text{Id} - D)^{-1} D = -\text{Id} + (y \cdot \text{Id} - D)^{-1} (y \cdot \text{Id} - D + D) = -\text{Id} + y(y \cdot \text{Id} - D)^{-1}$$

Ezt visszaírva az integrálba az Id -t tartalmazó tagban az y -hoz tartozó körintegrál 0 lesz, hiszen f reguláris függvény. Innen az integrál értéke számolható:

$$H(D, E) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \text{Tr} \left\{ \oint \oint f\left(\frac{x}{y}\right) y \cdot (x \cdot \text{Id} - E)^{-1} (y \cdot \text{Id} - D)^{-1} dx dy \right\} \quad (30)$$

(30) alapján a relatív entrópia kiszámolható a spektrálfelbontást használva ($D = \sum_i \lambda_i P_i$, $E = \sum_i \mu_i Q_i$):

$$H(D, E) = \sum_{ij} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint f\left(\frac{x}{y}\right) y \frac{1}{x - \mu_j} \frac{1}{y - \lambda_i} dx dy \text{Tr} \{Q_j P_i\}$$

Elvégezve az integrálást kapjuk:

$$H(D, E) = \sum_{ij} f\left(\frac{\mu_j}{\lambda_i}\right) \lambda_i \text{Tr} \{Q_j P_i\} \quad (31)$$

15. Állítás. $H(D, E) \geq 0$

Bizonyítás. Ha f operátor-konkáv, akkor monoton csökken. Tehát feltehető ($c > 0$ konstans szorzással), hogy $f'(1) = -1$. Innen a konvexitás miatt $f(x) \geq 1 - x$. Tehát $E = \sum_j \mu_j |j\rangle\langle j|$ és $D = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ mellett

$$H(D, E) = \sum_{ij} f\left(\frac{\mu_j}{\lambda_i}\right) \lambda_i |\langle i|j\rangle|^2 \geq \sum_{ij} (\lambda_i - \mu_j) |\langle i|j\rangle|^2 = 0$$

Egyenlőség csak $D = E$ mellett teljesülhet. □

5. Példa. Legyen $f(x) = -\log(x)$, ez a Kullback-Leiber relatív entrópiát adja. Ennek kiszámolása (29). alak alapján:

$$H(D, E) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \text{Tr} \left\{ \oint \oint (-\log(x) + \log(y)) y (x \cdot \text{Id} - E)^{-1} (y \cdot \text{Id} - D)^{-1} D dx dy \right\}$$

Az integrál két tag összegére bomlik, mindkét integrál egyszerűen elvégezhető. Innen

$$H(D, E) = \text{Tr} \{-\log(E)D + \log(D)D\} = \text{Tr} \{D(\log D - \log E)\}$$

16. Állítás. *A relatív entrópia monoton csökken a kvantumcsatornák hatására [4].*

Bizonyítás. Legyen \mathcal{N} kvantumcsatorna. Kéne

$$H(\mathcal{N}(D), \mathcal{N}(E)) \leq H(D, E)$$

Definíció szerint $\Delta = L_E R_D^{-1}$ és

$$H(D, E) = \langle D^{1/2} | f(\Delta) \cdot D^{1/2} \rangle$$

Jelölje $\Delta_{\mathcal{N}} = L_{\mathcal{N}(E)} R_{\mathcal{N}(D)}^{-1}$. Legyen továbbá

$$V \cdot (x \mathcal{N}(D)^{1/2}) = \mathcal{N}^\dagger(x) D^{1/2}$$

V kontrakció, mert:

$$\|\mathcal{N}^\dagger(x) D^{1/2}\| = \langle \mathcal{N}^\dagger(x) | \mathcal{N}^\dagger(x) D \rangle \leq \langle x | x \mathcal{N}(D) \rangle = \|x \mathcal{N}^{1/2}\|$$

ahol az egyenlőségeknél kihasználtuk, hogy a Tr alatt ciklikusan permutálhatjuk az operátorokat, és mert

$$\langle \mathcal{N}^\dagger(x) \mathcal{N}^\dagger(x) | D \rangle \leq \langle \mathcal{N}^\dagger(x x) | D \rangle$$

mert

$$\mathcal{N}^\dagger(x) \mathcal{N}^\dagger(x) \leq \mathcal{N}^\dagger(x x)$$

a Schwartz-egyenlőtlenség (5. tétel)

Igaz továbbá, hogy

$$V^\dagger \Delta V \leq \Delta_{\mathcal{N}}$$

mert minden $x \mathcal{N}(D)^{1/2}$ -re

$$\langle x \mathcal{N}(D)^{1/2} | V^\dagger E V \cdot (x \mathcal{N}(D)^{1/2}) D^{-1} \rangle \leq \langle x \mathcal{N}(D)^{1/2} | \mathcal{N}(E) x \mathcal{N}(D)^{1/2} \mathcal{N}(D)^{-1} \rangle$$

mert V definícióját kihasználva

$$\langle \mathcal{N}^\dagger(x) D^{1/2} | E \mathcal{N}^\dagger(x) D^{-1/2} \rangle \leq \langle x \mathcal{N}(D)^{1/2} | \mathcal{N}(E) x \mathcal{N}(D)^{-1/2} \rangle$$

Mert a Tr alatt ciklikusan permutálva

$$\langle \mathcal{N}^\dagger(x) | E \mathcal{N}^\dagger(x) \rangle \leq \langle x | \mathcal{N}(E) x \rangle$$

Mert

$$\text{Tr} \left\{ \mathcal{N}^\dagger(x) \mathcal{N}^\dagger(x) E \right\} \leq \text{Tr} \left\{ \mathcal{N}^\dagger(x x) E \right\}$$

Ami megint a Schwarz-egyenlőtlenségből adódik.

Ezzel a jelöléssel amit bizonyítani kell ($\mathcal{N}^\dagger(\text{Id}) = \text{Id}$):

$$\langle \mathcal{N}(D)^{1/2} | f(\Delta_{\mathcal{N}}) \mathcal{N}(D)^{1/2} \rangle \leq \langle \mathcal{N}(D)^{1/2} | V^\dagger f(\Delta) V \mathcal{N}(D)^{1/2} \rangle$$

Mivel $\|V\| < 1$, a konvex függvényekre érvényes a következő egyenlőtlenség [9]:

$$V^\dagger f(\Delta) V \geq f(V^\dagger \Delta V)$$

Innen $V^\dagger \Delta V \leq \Delta_{\mathcal{N}}$ tulajdonságból f monoton csökkenésével (ez az operátor-konvexitásból következik, [9]):

$$f(\Delta_{\mathcal{N}}) \leq f(V^\dagger \Delta V) \leq V^\dagger f(\Delta) V$$

ami a kívánt egyenlőtlenséget adja. □

17. Állítás. *A relatív entrópia konvex, azaz*

$$tH(D_1, E_1) + (1 - t)H(D_2, E_2) \geq H(tD_1 + (1 - t)D_2, tE_1 + (1 - t)E_2)$$

Bizonyítás. [7] alapján legyen

$$X = \begin{pmatrix} tD_1 & 0 \\ 0 & (1 - t)D_2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} tE_1 & 0 \\ 0 & (1 - t)E_2 \end{pmatrix}$$

Ekkor $H(X, Y) = tH(D_1, E_1) + (1 - t)H(D_2, E_2)$, mert 31 alapján

$$H(X, Y) = \sum_{ij} f\left(\frac{\mu_j}{\lambda_i}\right) \lambda_i \text{Tr}\{Q_j P_i\}$$

ahol $X = \sum_i \lambda_i P_i$ és $Y = \sum_i \mu_i Q_i$ a két mátrix spektrálfelbontása. Vegyük észre, hogy a bal felső és jobb alsó sarok szétválik, így D_1 és E_1 illetve D_2 és E_2 sajátértékei és a megfelelő projekciók jelennek meg a kifejezésben.

Innen a részleges nyom teljes pozitivitása miatt

$$H(X, Y) \geq H(\text{Tr}_2 X, \text{Tr}_2 Y)$$

ami pont a kívánt állítást adja. □

3.2. Metrika a relatív entrópiából

Ebben a részben bevezetjük a monoton metrikákat a relatív entrópia második deriváltjaként.

18. Állítás. $\partial_1^2 H|_{A=B} = \partial_2^2 H|_{A=B} = -\partial_1 \partial_2 H|_{A=B} > 0$.

Bizonyítás. $H(A + X, A) \geq 0$, innen $\partial_1 H|_{A=B} = 0$, hasonlóan $\partial_2 H|_{A=B} = 0$. Ugyanakkor $H(A + X, A + Y) \geq 0$ és $H(A + X, A + X) = 0$. Innen

$$(\nabla \circ \nabla)H = \begin{pmatrix} E & F \\ F^T & G \end{pmatrix} \geq 0$$

Itt $E = E^T$ és $G = G^T$. A pozitivitási feltételt kiírva:

$$\langle X|EX \rangle + \langle X|FY \rangle + \langle Y|F^T X \rangle + \langle Y|GY \rangle \geq 0$$

Helyettesítsünk $Y = X + Z$ -t és használjuk ki, hogy $X = Y$, azaz $Z = 0$ esetén a kifejezés eltűnik. Ekkor

$$\langle X|(F + G)Z \rangle + \langle Z|(F^T + G)X \rangle + \langle Z|GZ \rangle \geq 0$$

Az első két tag nyilván megegyezik. Az egyenlőtlenség minden X és Z vektorra fennáll, ezért $G = -F$. Ugyanígy ($X = Y + Z$ -t helyettesítve) $E = -F$. Tehát $E = G = -F$. A pozitív definitéség abból adódik, hogy H szigorúan konvex mindkét változójában. □

A fentiek szerint minden fenti tulajdonságú kontraszt funkcionál metrikát határoz meg. A metrikából viszont nem következtethetünk a kontraszt funkcionál alakjára, hiszen csak a két argumentum egyenlősége mellett ismerjük a második deriváltat. Erre példa, hogy a

$$H \setminus(x, y) := H(y, x)$$

egyenlőséggel definiált kontraszt funkcionál nyilván ugyanazt a metrikát adja, mint H . Másik példa: $H_1(x, y) = |x - y|^2$ és $H_2(x, y) = |x - y|^2 + |x - y|^4$, amik szintén ugyanazt a metrikát adják.

Az entrópia második deriváltja Elkészíthetjük a relatív entrópiák második deriváltjait. Ehhez először $A \mapsto A^{-1}$ deriváltját kell kiszámolni. Induljunk ki $(1-x)^{-1}$ operátorokra is igaz sorfejtéséből!

$$(\text{Id} - X)^{-1} = \text{Id} + X + o(\|X\|)$$

Innen az $A \mapsto A^{-1}$ függvény deriváltja számolható:

$$(A - X)^{-1} = A^{-1}(\text{Id} - XA^{-1})^{-1} = A^{-1}(\text{Id} + XA^{-1} + o(\|X\|)) = A^{-1} + A^{-1}XA^{-1} + o(\|X\|)$$

Tekintsük most a $\partial_s \partial_t H(D + Xs, D + tY)|_{s=t=0}$ kifejezést. Ennek számolásához az entrópia (30). alakját használjuk. Továbbá $x \cdot \text{Id}$ helyett mindig x -et írunk, ha ez nem vezet félreértésre.

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_s H(D + Xs, D + tY)|_{s=t=0} = \\ \frac{1}{(2\pi i)^2} \text{Tr} \left\{ \oint \oint f\left(\frac{x}{y}\right) y(x-D)^{-1} Y(x-D)^{-1} (y-D)^{-1} X(y-D)^{-1} dx dy \right\} \end{aligned}$$

Hogy ezeket a kifejezéseket tovább tudjuk számolni, használjuk D spektrálfelbontását: $D = \sum_i \lambda_i P_i$, ahol $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ és $P_i^\dagger = P_i$ továbbá $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_s H(D + Xs, D + tY)|_{s=t=0} = \\ \sum_{ij} \frac{1}{(2\pi i)^2} \text{Tr} \left\{ \oint \oint f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{y}{(x-\lambda_i)(x-\lambda_j)(y-\lambda_j)(y-\lambda_i)} P_i Y P_j X dx dy \right\} \end{aligned}$$

Ezért a derivált:

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_s H(D + Xs, D + tY)|_{s=t=0} = \\ \sum_i \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{y}{(x-\lambda_i)^2 (y-\lambda_i)^2} \text{Tr} \{P_i Y P_i X\} dx dy + \\ \sum_{i \neq j} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{y}{(x-\lambda_i)(x-\lambda_j)(y-\lambda_j)(y-\lambda_i)} \text{Tr} \{P_i Y P_j X\} dx dy \end{aligned}$$

Itt először az x szerinti integrált végezzük el.

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_s H(D + Xs, D + tY)|_{s=t=0} = \\ \sum_i \frac{1}{(2\pi i)} \oint f'\left(\frac{\lambda_i}{y}\right) \frac{1}{(y-\lambda_i)^2} dy \text{Tr} \{P_i Y P_i X\} + \\ \sum_{i \neq j} \frac{1}{(2\pi i)} \oint f\left(\frac{\lambda_i}{y}\right) \frac{y}{(\lambda_i - \lambda_j)(y - \lambda_j)(y - \lambda_i)} dy \text{Tr} \{P_i Y P_j X\} + \\ \sum_{i \neq j} \frac{1}{(2\pi i)} \oint f\left(\frac{\lambda_j}{y}\right) \frac{y}{(\lambda_j - \lambda_i)(y - \lambda_j)(y - \lambda_i)} dy \text{Tr} \{P_i Y P_j X\} \end{aligned}$$

Most az y szerinti integrálás is elvégezhető.

$$\begin{aligned}
 \partial_t \partial_s H(D + Xs, D + tY)|_{s=t=0} &= \\
 & \sum_i -f''(1) \frac{1}{\lambda_i} \text{Tr} \{P_i Y P_i X\} + \\
 & \sum_{i \neq j} -f \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right) \frac{\lambda_j}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} \text{Tr} \{P_i Y P_j X\} + \\
 & \sum_{i \neq j} -f \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) \frac{\lambda_i}{(\lambda_j - \lambda_i)^2} \text{Tr} \{P_i Y P_j X\} = \\
 & = \sum_i -f''(1) \frac{1}{\lambda_i} \text{Tr} \{P_i Y P_i X\} + \\
 & \sum_{i \neq j} -\frac{f \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right) \lambda_j + f \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) \lambda_i}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} \text{Tr} \{P_i Y P_j X\}
 \end{aligned}$$

Itt megint kihasználtuk, hogy $f(1) = 0$, illetve az utolsó összegben indexcserét hajtottunk végre.

Konklúzió Összehasonlítva a kapott eredményeket a monoton metrikák során kiszámolt formulával (32. egyenlet) kapjuk, hogy:

$$\partial_s \partial_t H(D + sX + tY, D) = \partial_s \partial_t H(D, D + sX + tY) = -\partial_s \partial_t H(D + sX, D + tY) = K_D(X, Y)$$

ahol K_D a következő -operátormonoton- függvényhez tartozó monoton metrika:

$$g(x) = \begin{cases} f''(1) & \text{ha } x = 1 \\ \frac{(x-1)^2}{f(x) + xf(1/x)} & \text{ha } x \neq 1 \end{cases}$$

6. Példa. A Kullback-Leiber relatív entrópiát az $f(x) = -\log(x)$ függvény adta. Az ehhez tartozó metrika a Kubo-mori metrika, amire:

$$g(x) = \frac{x-1}{\log(x)}$$

7. Példa. A legkisebb metrikára:

$$g(x) = \frac{1+x}{2}$$

8. Példa. A legnagyobb metrikára:

$$g(x) = \frac{2x}{1+x}$$

3.3. Monoton metrika skalárgörbület

Legyen f operátormonoton függvény, amire $f(x) = xf(x^{-1})$. Ekkor a fenti metrika:

$$K_D(X, Y) = \text{Tr} \left\{ X \left[R_D^{1/2} f(L_D R_D^{-1}) R_D^{1/2} \right]^{-1} Y \right\}$$

Ezt a kifejezést komplex függvénytan segítségével számolhatjuk.

$$K_D(X, Y) = \text{Tr} \left\{ X \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x \cdot \text{Id} - L_D]^{-1} [y \cdot \text{Id} - R_D]^{-1} Y dx dy \right\}$$

A kifejezésben szereplő operátorok hatása kiírható (27) és (28) egyenlőségek alapján. (Az identitás jelölését elhagyjuk, ha nem vezet félreértésre.)

$$K_D(X, Y) = \text{Tr} \left\{ \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} X [x - D]^{-1} Y [y - D]^{-1} dx dy \right\}$$

A továbbiakban használjuk a $D = \sum \lambda_i P_i$ spektrálfelbontást. Ekkor az integrál értéke:

$$K_D(X, Y) = \sum_{ij} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} \frac{1}{(x - \lambda_i)(y - \lambda_j)} \text{Tr} \{ X P_i Y P_j \} dx dy$$

Ez már egyszerűen számolható.

$$K_D(X, Y) = \sum_{ij} \frac{1}{f\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \lambda_j} \text{Tr} \{ X P_i Y P_j \} \quad (32)$$

A számolások során ezt fogjuk használni. Innen is látszik, hogy a metrika nyilván unitér invariáns: $K_D(X, Y) = K_{UDU^*}(UXU^*, UYU^*)$. Ezért majd a görbület is unitér invariáns lesz.

Legyen $\langle . | . \rangle$ a Hilbert-Schmidt skalárszorzás. Ekkor $K_D(X, Y) = \langle X | G_D(Y) \rangle$, ahol

$$G_D.Y = P. [R_D f(L_D R_D^{-1})]^{-1} Y = P. \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} Y [y - D]^{-1} dx dy$$

Itt P a csatornák alterére vetítő projekció. Ez azért kell, mert a bal-és jobbszorítás műveletek kivisznek a csatornák alteréből (sőt, nem is Tr -tartóak.) G unitér kovariáns, azaz $UG_D.YU^* = G_{UDU^*}.UYU^*$. Nyilván

$$G_D.Y = P. \sum_{ij} \frac{1}{f\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \lambda_j} P_i Y P_j$$

Legyen $B_i \equiv |i\rangle$ ($i \in I$) teljes rendszer az érintőtéren. Ekkor

$$g_{ij} = \langle i | G.j \rangle = \sum_{kl} \frac{1}{f\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_l}\right) \lambda_l} \text{Tr} \{ B_i P_k B_j P_l \}$$

9. Példa. A legkisebb metrika esetén

$$\frac{1}{f\left(\frac{x}{y}\right)y} = \frac{2}{x + y}$$

10. Példa. A Kubo-Mori metrika esetén

$$\frac{1}{f\left(\frac{x}{y}\right)y} = \frac{1}{\frac{\frac{x}{y}-1}{\log(x)-\log(y)}y} = \frac{\log(x) - \log(y)}{x - y}$$

11. Példa. A legnagyobb metrika esetén

$$\frac{1}{f\left(\frac{x}{y}\right)y} = \frac{1}{\frac{2x/y}{1+x/y}y} = \frac{x + y}{2xy}$$

3.3.1. A metrika első deriváltja

A konnexiók számolásához a 22. egyenlet alapján elég a metrika első deriváltjait meghatározni. Ehhez az $\langle X | D_Z G.Y \rangle$ mennyiséget kell számolni.

A vizsgált altérre vetítő P projekció lineáris és nem függ a sűrűségi mátrixtól, így a deriválással felcserélhető. A metrika deriváltja az entrópia deriváltjához hasonlóan számolható.

$$\begin{aligned} D_X G_D.Y &= P \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} X [x - D]^{-1} Y [y - D]^{-1} dx dy + \\ &+ P \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} Y [y - D]^{-1} X [y - D]^{-1} dx dy \end{aligned}$$

Ebbe a $D = \sum_i \lambda_i P_i$ spektrálfelbontást beírva és a $\tau(x, y) = \frac{1}{f(x/y)y}$ jelölést használva:

$$\begin{aligned} D_X G.Y &= P \cdot \sum_{ijk} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dudv \cdot \tau(u, v) \frac{1}{(u - \lambda_i)(u - \lambda_j)(v - \lambda_k)} P_i X P_j Y P_k \\ &+ P \cdot \sum_{ijk} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dudv \cdot \tau(u, v) \frac{1}{(u - \lambda_i)(v - \lambda_j)(v - \lambda_k)} P_i Y P_j X P_k \end{aligned}$$

Ez az integrál már elvégezhető. Ha minden gyök különböző, akkor

$$\begin{aligned} D_X G.Y &= P \cdot \sum_{ijk} \frac{\tau(\lambda_i, \lambda_k) - \tau(\lambda_j, \lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_j} P_i X P_j Y P_k \\ &+ P \cdot \sum_{ijk} \frac{\tau(\lambda_i, \lambda_j) - \tau(\lambda_i, \lambda_k)}{\lambda_j - \lambda_k} P_i Y P_j X P_k \end{aligned}$$

Tehát

$$D_X G.Y = P \cdot \sum_{ijk} h(i, j, k) P_i X P_j Y P_k + h(j, k, i) P_i Y P_j X P_k \quad (33)$$

Ahol most már megengedve a $\lambda_i = \lambda_j$ esetet is, felhasználva a $\tau(x, y) = \tau(y, x)$ egyenlőséget:

$$h(i, j, k) = \begin{cases} \frac{\tau(\lambda_i, \lambda_k) - \tau(\lambda_j, \lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_j} & \lambda_i \neq \lambda_j \\ \partial_1 \tau(\lambda_i, \lambda_k) & \lambda_i = \lambda_j \end{cases}$$

Innen a derivált mátrixelemeire (B_i ($i \in I$) bázison):

$$g_{ij,k} = \sum_{lmn} h(l, m, n) \text{Tr} \{B_i P_l B_k P_m B_j P_n\} + h(m, n, l) \text{Tr} \{B_i P_l B_j P_m B_k P_n\} \quad (34)$$

Innen a konnexió a 22. egyenlet alapján:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \frac{1}{2}(g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) \\ \Gamma_{ij}^k &= g^{kl} \Gamma_{ijl} \end{aligned}$$

12. Példa. A legkiseb metrika esetén:

$$h(x, y, z) = \frac{\frac{2}{x+z} - \frac{2}{y+z}}{x-y} = -\frac{2}{(x+z)(y+z)}$$

13. Példa. A Kubo-Mori metrika esetén:

$$h(x, y, z) = \frac{\frac{\log(x) - \log(z)}{x-z} - \frac{\log(y) - \log(z)}{y-z}}{x-y} = \frac{(z-y)\log(x) + (x-z)\log(y) + (y-x)\log(z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

Nyilván $h(x, y, z) = h(y, z, x)$ és $h(x, y, z) = h(y, x, z)$, ezért h x, y, z permutációjától független. Ha $x = y$, akkor

$$h(x, x, z) = \frac{1}{x(x-z)} + \frac{\log(z) - \log(x)}{(x-z)^2}$$

Végül ha $x = y = z$, akkor

$$h(x, x, x) = -\frac{1}{2x^2}$$

14. Példa. A legnagyobb metrika esetén:

$$h(x, y, z) = \frac{\frac{x+z}{2xz} - \frac{y+z}{2yz}}{x-y} = -\frac{1}{2xy}$$

3.3.2. A metrika második deriváltja

A Riemann-tenzor számolásához a metrika második deriváltja kell.

$$\begin{aligned}
 D_X D_Y G \cdot Z = & P \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} X [x - D]^{-1} Y [x - D]^{-1} Z [y - D]^{-1} dx dy + \\
 & + P \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} Y [x - D]^{-1} X [x - D]^{-1} Z [y - D]^{-1} dx dy + \\
 & + P \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} Y [x - D]^{-1} Z [y - D]^{-1} X [y - D]^{-1} dx dy + \\
 & + P \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} X [x - D]^{-1} Z [y - D]^{-1} Y [y - D]^{-1} dx dy + \\
 & + P \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} Z [y - D]^{-1} X [y - D]^{-1} Y [y - D]^{-1} dx dy + \\
 & + P \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{1}{f(x/y)y} [x - D]^{-1} Z [y - D]^{-1} Y [y - D]^{-1} X [y - D]^{-1} dx dy
 \end{aligned}$$

Írjuk be a $D = \sum \lambda_i P_i$ spektrálfelbontást és használjuk a $\tau(x, y) = \frac{1}{f(x/y)y}$ jelölést. Ekkor három féle tagunk lesz: egyikben három x van, másikban három y , a harmadikban két x és két y .

A három x -et tartalmazó tag kiintegrálása:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dx dy \cdot \tau(x, y) \cdot \frac{1}{(x - \lambda_i)(x - \lambda_j)(x - \lambda_k)(y - \lambda_l)} \\
 = & \frac{1}{(2\pi i)} \oint dx \cdot \tau(x, \lambda_l) \cdot \frac{1}{(x - \lambda_i)(x - \lambda_j)(x - \lambda_k)} \\
 = & \frac{\tau(\lambda_i, \lambda_l)}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} + \frac{\tau(\lambda_j, \lambda_l)}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)} + \frac{\tau(\lambda_k, \lambda_l)}{(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_j)}
 \end{aligned}$$

Ha van két egyforma, mondjuk $\lambda_i = \lambda_j$, akkor

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dx dy \cdot \tau(x, y) \cdot \frac{1}{(x - \lambda_i)^2(x - \lambda_k)(y - \lambda_l)} \\
 = & \frac{1}{(2\pi i)} \oint dx \cdot \tau(x, \lambda_l) \cdot \frac{1}{(x - \lambda_i)^2(x - \lambda_k)} \\
 = & \frac{\partial_1 \tau(\lambda_i, \lambda_l)}{(\lambda_i - \lambda_k)} - \frac{\tau(\lambda_i, \lambda_l)}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} + \frac{\tau(\lambda_k, \lambda_l)}{(\lambda_k - \lambda_i)^2}
 \end{aligned}$$

Végül ha $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k$, akkor

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dx dy \cdot \frac{\tau(x, y)}{(x - \lambda_i)^3(y - \lambda_l)} = \frac{1}{(2\pi i)} \oint dx \cdot \frac{\tau(x, \lambda_l)}{(x - \lambda_i)^3} = \frac{1}{2} \partial_1^2 \tau(\lambda_i, \lambda_l)$$

A három y -t tartozó tag esetén kihasználva, hogy $\tau(x, y) = \tau(y, x)$, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint fent, csak az $(i, j, k, l) \mapsto (j, k, l, i)$ helyettesítést kell alkalmazni.

A két x -et és két y -t tartalmazó tag kiintegrálása:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dx dy \frac{\tau(x, y)}{(x - \lambda_i)(x - \lambda_j)(y - \lambda_k)(y - \lambda_l)} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)} \oint dx \frac{\tau(x, \lambda_k)}{(x - \lambda_i)(x - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_l)} + \frac{1}{(2\pi i)} \oint dx \frac{\tau(x, \lambda_l)}{(x - \lambda_i)(x - \lambda_j)(\lambda_l - \lambda_k)} \\ &= \frac{\tau(\lambda_i, \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_l)} + \frac{\tau(\lambda_j, \lambda_k)}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_l)} + \frac{\tau(\lambda_i, \lambda_l)}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_l - \lambda_k)} + \frac{\tau(\lambda_j, \lambda_l)}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_l - \lambda_k)} \end{aligned}$$

Ha $\lambda_i = \lambda_j$, akkor

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dx dy \frac{\tau(x, y)}{(x - \lambda_i)^2 (y - \lambda_k)(y - \lambda_l)} = \frac{\partial_1 \tau(\lambda_i, \lambda_k)}{\lambda_k - \lambda_l} + \frac{\partial_1 \tau(\lambda_i, \lambda_l)}{\lambda_l - \lambda_k}$$

Ha $\lambda_k = \lambda_l$, akkor hasonló kifejezésre jutunk a $\tau(x, y) = \tau(y, x)$ azonosságot használva. Végül, ha minden λ megegyezik, akkor

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dx dy \frac{\tau(x, y)}{(x - \lambda_i)^2 (y - \lambda_k)^2} = \partial_1 \partial_2 \tau(\lambda_i, \lambda_k)$$

Ahol kihasználtuk az $f(x) = x f(1/x)$ azonosságot.

Innen

$$\begin{aligned} D_X D_Y G.Z &= \sum_{ijkl} g_1(i, j, k, l) P_i X P_j Y P_k Z P_l + g_1(i, j, k, l) P_i Y P_j X P_k Z P_l \\ &\quad + g_2(i, j, k, l) P_i Y P_j Z P_k X P_l + g_2(i, j, k, l) P_i X P_j Z P_k Y P_l \\ &\quad + g_1(j, k, l, i) P_i Z P_j X P_k Y P_l + g_1(j, k, l, i) P_i Z P_j Y P_k X P_l \end{aligned}$$

A metrika második deriváltjából számolható a Riemann-tenzor az affin terek geometriájánál megismert módon. A mátrixelemekre írható:

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_l g_{ij} &= \sum_{mnpq} g_1(m, n, p, q) (\text{Tr}\{B_i P_m B_k P_n B_l P_p B_j P_q\} + \text{Tr}\{B_i P_m B_l P_n B_k P_p B_j P_q\}) \\ &\quad + g_2(m, n, p, q) (\text{Tr}\{B_i P_m B_l P_n B_j P_p B_k P_q\} + \text{Tr}\{B_i P_m B_k P_n B_j P_p B_l P_q\}) \\ &\quad + g_1(n, p, q, m) (\text{Tr}\{B_i P_m B_j P_n B_k P_p B_l P_q\} + \text{Tr}\{B_i P_m B_j P_n B_l P_p B_k P_q\}) \quad (35) \end{aligned}$$

15. Példa. A legkisebb metrika esetén

$$g_1(x, y, z, w) = \frac{2}{(w+x)(w+y)(w+z)}$$

Illetve

$$g_2(x, y, z, w) = \frac{2(x+y+z+w)}{(x+z)(y+z)(x+w)(y+w)}$$

16. Példa. A Kubo-Mori metrika esetén:

$$g_1(x, y, z, w) = \frac{\log(x)}{(x-y)(x-z)(x-w)} + \frac{\log(y)}{(y-x)(y-z)(y-w)} + \frac{\log(z)}{(z-x)(z-y)(z-w)} + \frac{\log(w)}{(w-x)(w-y)(w-z)}$$

g_1 nyilván invariáns a változóinak a permutálására. Számolásból adódik:

$$g_2(x, y, z, w) = g_1(x, y, z, w)$$

Ha van két egyenlő, mondjuk $x = y$, akkor

$$g_2(x, x, z, w) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\log(x)}{(x-z)(x-w)} \right) + \frac{\log(z)}{(z-x)(z-y)(z-w)} + \frac{\log(w)}{(w-x)(w-y)(w-z)}$$

Három egyforma változó esetén

$$g_2(x, x, x, w) = \frac{\log(x) - \log(w)}{(x-w)^3} + \frac{w - 3x}{2x^2(w-x)^2}$$

Végül csupa egyforma esetben

$$g_2(x, x, x, x) = \frac{1}{3x^3}$$

17. Példa. A legnagyobb metrika esetén

$$g_1(x, y, z, w) = \frac{1}{2xyz}$$

Illetve

$$g_2(x, y, z, w) = 0$$

3.3.3. A skalárgörbület

Az eddigi eredményeket összefoglalva a riemann-tenzor előáll a metrika első (34. formula) és második deriváltjából (35. formula) az affin terek geometriájánál tárgyalt 23 módon. A riemann-tenzorból pedig már tudunk skalárgörbületet számolni. Ez a módszer az állapotter tetszőleges affin alterére (így a kvantumcsatornákra is) és tetszőleges monoton metrikára működik.

3.4. A Kubo-Mori metrika skalárgörbülete

A Kubo-Mori metrikára a fentiek szerint h invariáns változóinak permutálására, továbbá $g_1 = g_2$ és szintén permutáció-invariáns. Ezt kihasználva a Christoffel-szimbólumok és a Riemann-tenzor számítása egyszerűsíthető.

A Christoffel-szimbólumokra (22) alapján

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij})$$

Ahol a metrika első deriváltjai kihasználva h szimmetriáit:

$$\partial_k g_{ij} = \sum_{lmn} h(l, m, n)(B_{nl}^i B_{lm}^k B_{mn}^j + B_{nl}^i B_{lm}^j B_{mn}^k)$$

Ahol B_{nl}^i az i . bázisvektor nl -edik mátrixeleme ρ sajátbázisában.

19. Állítás. A Kubo-Mori metrikára $\partial_j g_{ki} = \partial_i g_{kj} = \partial_k g_{ij}$.

Bizonyítás. A fentiek alapján

$$\partial_k g_{ij} = \sum_{lmn} h(l, m, n)(B_{nl}^i B_{lm}^k B_{mn}^j + B_{nl}^i B_{lm}^j B_{mn}^k) \quad (36)$$

$$\partial_i g_{kj} = \sum_{lmn} h(l, m, n)(B_{nl}^k B_{lm}^i B_{mn}^j + B_{nl}^k B_{lm}^j B_{mn}^i) \quad (37)$$

$$\partial_j g_{ik} = \sum_{lmn} h(l, m, n)(B_{nl}^j B_{lm}^k B_{mn}^i + B_{nl}^j B_{lm}^i B_{mn}^k) \quad (38)$$

Mivel az összegzések az összes l, m, n -en végigfutnak, az átindexelés nem változtatja meg az összeget. h permutáció-invarianciája alapján az átindexelés hatására h értéke nem változik. $\partial_i g_{kj}$ első tagja megegyezik $\partial_k g_{ij}$ második tagjával, a második tagban használjuk az $n \rightarrow l, l \rightarrow m, m \rightarrow n$ átindexelést. Ezzel látszik, hogy ez a tag $\partial_k g_{ij}$ első tagjával egyenlő. A másik deriváltra hasonlóan adódik az állítás. \square

Következmény: a Kubo-Mori metrikára

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}$$

Következmény : a Kubo-Mori metrika második deriváltjaira

$$\partial_j \partial_k g_{il} = \partial_j \partial_l g_{ik}$$

A Riemann-tenzor kifejezése (23) alapján

$$R_{lkij} = \frac{1}{2}(\partial_j \partial_k g_{is} - \partial_j \partial_s g_{ik} - \partial_i \partial_k g_{js} + \partial_i \partial_s g_{jk}) + \Gamma_{jls} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ils} \Gamma_{jk}^s$$

A fentiek miatt $\partial_j \partial_k g_{il} = \partial_j \partial_l g_{ik}$ és $\partial_i \partial_k g_{js} = \partial_i \partial_s g_{jk}$, így a második deriváltak kiesnek, ahogy Dittmann is megjegyzi [2] cikkében:

$$R_{lkij} = \Gamma_{jls} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ils} \Gamma_{jk}^s$$

Ebbe visszaírva a Christoffel-szimbólumok értékét kapjuk:

$$R_{lkij} = \frac{1}{4}g^{rs}(\partial_j g_{ls} \partial_r g_{ik} - \partial_i g_{ls} \partial_r g_{jk})$$

Végül a skalárgörbület:

$$S = \frac{1}{4}g^{kj} g^{il} g^{rs}(\partial_j g_{ls} \partial_r g_{ik} - \partial_i g_{ls} \partial_r g_{jk})$$

Ha a bázisban $g_{ij} = \delta_{ij}$, akkor

$$S = \frac{1}{4} \sum_{ijs} \partial_j g_{is} \partial_s g_{ij} - \partial_i g_{is} \partial_s g_{jj} = \frac{1}{4} \sum_{ijs} \partial_s g_{ij} \partial_s g_{ij} - \partial_s g_{ii} \partial_s g_{jj} \quad (39)$$

Ezt az eredményt a 4×4 -es állapotérre numerikusan összehasonlítottuk Andai [1] és [6] következő (általánosabb, nem csak a Kubo-Mori metrikára vonatkozó) eredményével és egyezést találtunk:

$$S = \sum_{\{|j,k,l\}|>1} \frac{h(\lambda_j, \lambda_k, \lambda_l)^2}{\tau(\lambda_j, \lambda_k) \cdot \tau(\lambda_k, \lambda_l) \cdot \tau(\lambda_j, \lambda_l)} - \frac{h(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_l) \cdot h(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_j)}{\tau(\lambda_k, \lambda_k) \cdot \tau(\lambda_k, \lambda_l) \cdot \tau(\lambda_k, \lambda_j)} + \frac{n^2(n^2 - 1)}{4}$$

A 39. formulát több idő kiszámolni, előnye ezzel szemben, hogy nem csak a teljes állapotérre igaz, hanem annak tetszőleges affin alterére is. Mivel a kvantumcsatornák sűrűségi mátrixok lineáris alterének képzeljük el, ezt a formulát tudjuk használni konkrét számolásban.

4. Numerikus eredmények

4.1. A 2×2 -es valós sűrűségi mátrixok

A 2×2 -tes valós sűrűségi mátrixok terén lehet a program működését tesztelni. Ezen a téren a sűrűségi mátrix

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + x \cdot \sigma_x + z \cdot \sigma_z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x \\ x & 1-z \end{pmatrix}$$

alakú. ρ sajátértékeire:

$$0 = \left| \begin{array}{cc} \lambda - \frac{1+z}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & \lambda - \frac{1-z}{2} \end{array} \right| = \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{z^2 + x^2}{4}$$

Innen a sajátértékek

$$\lambda = \frac{1 \pm r}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{x^2 + z^2}}{2}$$

és a sűrűségi mátrix spektrálfelbontására:

$$2\rho = (1+r)P + (1-r)(1-P) = 1 + r(2P - 1)$$

Ezért

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x \\ x & 1-z \end{pmatrix} = \frac{1+r}{2} \begin{pmatrix} \frac{r+z}{2r} & \frac{x}{2r} \\ \frac{x}{2r} & \frac{r-z}{2r} \end{pmatrix} + \frac{1-r}{2} \begin{pmatrix} \frac{r-z}{2r} & -\frac{x}{2r} \\ -\frac{x}{2r} & \frac{r+z}{2r} \end{pmatrix}$$

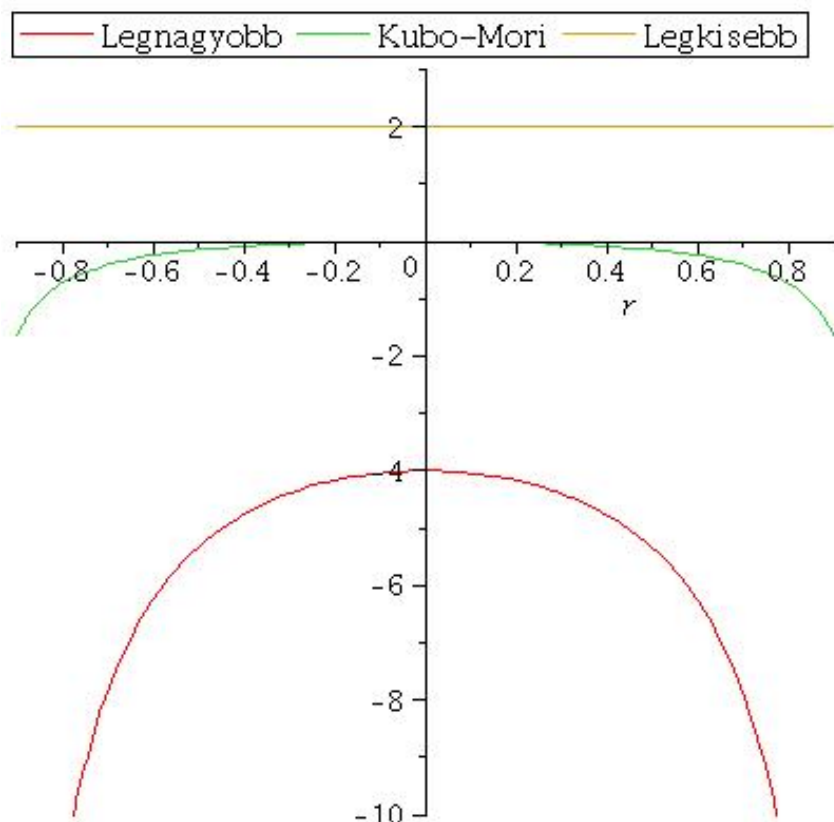
Innen erre a paraméterezésre a metrika alakja 32 alapján:

$$g = \frac{1}{2r^2} \begin{pmatrix} \frac{z^2}{1+r} + \frac{x^2}{1-r} + \frac{2xz}{f(\frac{1-r}{1+r})(1+r)} & \frac{z^2}{1-r} + \frac{x^2}{1+r} - \frac{2xz}{f(\frac{1-r}{1+r})(1+r)} \\ \frac{z^2}{1-r} + \frac{x^2}{1+r} - \frac{2xz}{f(\frac{1-r}{1+r})(1+r)} & \frac{z^2}{1+r} + \frac{x^2}{1-r} + \frac{2xz}{f(\frac{1-r}{1+r})(1+r)} \end{pmatrix}$$

A skalárgörbületet innen a MAPLE tenzor csomagjával számolhatjuk a legkisebb, legnagyobb és a Kubo-Mori metrikára. A skalárgörbület nyilván csak a sajátértékektől függ,

így ábrázolhatjuk $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ függvényében (6. ábra). Megjegyzés: MAPLE tenzor csomagja negatív definit metrikát vár, ezért a skalárgörbület számolásakor figyelni kell az előjelre.

A skalárgörbület számolható úgy is, hogy a metrika első illetve második deriváltjait kézzel számoljuk, míg a többi számolást a MAPLE tenzor csomagjával végezzük. A Kubo-Mori metrika esetén kipróbálható a 39. formula is. Minegyik esetben a 6. ábrán látható eredményhez jutunk.



6. ábra. A skalárgörbület 2 dimenziós valós sűrűségi mátrixok esetén

4.2. A kvantumcsatornák

A fenti eredmények alapján ki tudjuk számolni a kvantumcsatornák terének a monoton metrikák megszorításából vett görbületét. Ezt a 3. példa csatornáira végezzük el, amikre már a kapacitást is kiszámoltuk.

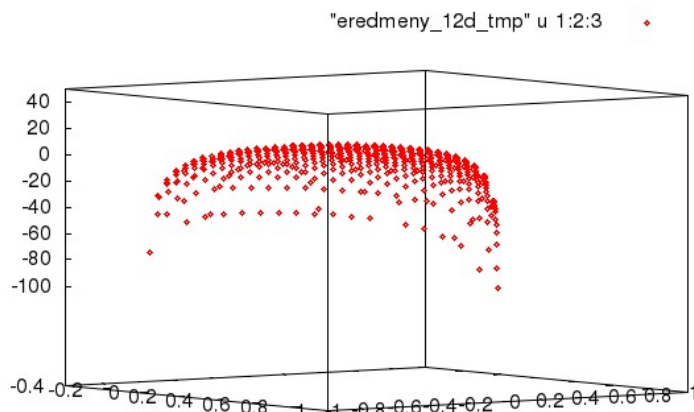
A számoláshoz először le kell gyártani egy bázist, ami ortonormált a skalárszorzásra nézve. Tegyük ezt a következő képpen: vegyünk egy tetszőleges B_i bázist a vizsgált X pont feletti érintőtéren. Legyen $X = UDU^\dagger$, ahol D diagonális, U unitér. Ekkor a számolás során az unitér invariancia miatt a D és $C_i = U^\dagger B_i U$ mátrixokkal lehet gyorsabban számolni. Legyen a metrika mátrixa ebben a bázisban $G = VdV^\dagger$, ahol d diagonális, V unitér. Egy, a skalárszorzásra nézve diagonális bázis legyártása ekkor:

$$E_i := \frac{1}{\sqrt{d_i}} \sum_j V_{ji} C_j$$

Hiszen ekkor

$$g(E_i, E_j) = \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \sum_{kl} V_{ki} V_{lj} g(C_k, C_l) = \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} (V^\dagger G V)_{ij} = \delta_{ij}$$

Innen a legyártott bázisban a fentebb ismertetett módon tudjuk számolni a skalárgörbületet a 39. formula alapján. Az eredményt a 7. ábrán ábrázoltuk.



7. ábra. A skalárgörbület az $\varepsilon : \frac{1}{2}(\sigma_0 + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \mapsto \frac{1}{2}(\sigma_0 + ax\sigma_x + ay\sigma_y + (az+b)\sigma_z)$ csatorna esetén a és b függvényében.

5. Összefoglalás

A diplomamunka során két témakört tekintettünk át: a kvantum-információelméletet és a differenciálgeometriát.

A kvantum-információelméleti rész végén kiszámoltuk egy könnyen kezelhető csatornaosztály Holevo-kapacitását. A differenciálgeometriai rész során megismertük az állapottér monoton metrikák által indukált geometriáját. Ennek segítségével metrikát definiáltunk a csatornák terén is, majd kiszámoltuk a görbületet a fenti csatornák esetén.

6. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Andai Attilának folyamatos segítségét és a témakörbe való bevezetésemet.

7. Annex

7.1. Perron Froebenius tétel

20. Állítás. $\text{Tr} |A|$ norma az önadjungált mátrixok valós vektorterén.

Bizonyítás. Valóban, ehhez a háromszög-egyenlőtlenség kell. Legyen ϕ_i ($i = 1..n$) az $A + B$ operátor egy teljes sajátfüggvényrendszere: $A + B = \sum_i \lambda_i P_i$, ahol P_i a ϕ_i sajátvektorra való vetítés. Innen $|A + B| = \sum_i |\lambda_i| P_i$, tehát

$$\langle \phi_i | |A + B| \phi_i \rangle = |\lambda_i| = |\langle \phi_i | (A + B) \phi_i \rangle|$$

Innen írhatjuk:

$$\begin{aligned} \text{Tr} |A + B| &= \sum_i \langle \phi_i | |A + B| \phi_i \rangle = \sum_i |\langle \phi_i | (A + B) \phi_i \rangle| \leq \\ &\sum_i (|\langle \phi_i | A \phi_i \rangle| + |\langle \phi_i | B \phi_i \rangle|) \leq \text{Tr} |A| + \text{Tr} |B| \end{aligned}$$

Itt az első egyenlőtlenség az abszolút értékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség, míg a másodikhoz bontsuk fel A -t a pozitív és negatív részére: $A = A_+ - A_-$, ahol $A_+ \geq 0$ és $A_- \geq 0$. Ekkor

$$|\langle \phi, A \phi \rangle| = |\langle \phi | A_+ \phi \rangle - \langle \phi | A_- \phi \rangle| \leq \langle \phi | A_+ \phi \rangle + \langle \phi | A_- \phi \rangle$$

a háromszög-egyenlőtlenség és A_+ illetve A_- pozitivitása miatt. Viszont $|A| = A_+ + A_-$, így $\text{Tr} |A| = \sum_i \langle \phi_i | A_- \phi_i \rangle + \langle \phi_i | A_+ \phi_i \rangle$, tehát a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. \square

Jelölje $S_A(H)$ a $H \rightarrow H$ önadjungált lineáris transzformációkat, H véges dimenziós Hilbert-tér.

8. Tétel (Perron-Froebenius). *Legyen $\varepsilon : S_A(H) \rightarrow S_A(H)$ pozitív, nyomtartó transzformáció. Ekkor $\exists A \in S_A(H)$, hogy $\varepsilon(A) = A$.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $\exists A \in B(H)$, hogy $\varepsilon(A) = A$. Valóban, $\varepsilon^*(\text{Id}) = \text{Id}$:

$$\langle A | \text{Id} \rangle = \text{Tr} A = \text{Tr} \varepsilon(A) = \langle \varepsilon(A) | \text{Id} \rangle = \langle A | \varepsilon^*(\text{Id}) \rangle$$

Ami csak $\text{Id} = \varepsilon^*(\text{Id})$ esetén teljesülhet minden A -ra. Ezért az $\varepsilon - \text{Id}$ leképzés is elfajuló, hisz az adjungáltja is az. Tehát $\exists A \in B(H)$, hogy $\varepsilon(A) = A$.

Legyen tehát A sajátvektor ε -hoz, és $A = A_+ - A_-$ a pozitív- és negatív részre való felbontása. Ekkor

$$\text{Tr} |A| = \text{Tr} \varepsilon(|A|) = \text{Tr} \varepsilon(A_+) + \text{Tr} \varepsilon(A_-) \geq \text{Tr} |\varepsilon(A)| = \text{Tr} |A|$$

Ahol az első egyenlőség ε nyomtartása, a második $|A|$ kifejtése, az egyenlőtlenség a háromszög-egyenlőtlenség, hisz $\varepsilon(A_+) \geq 0$, $\varepsilon(A_-) \geq 0$ és $\varepsilon(A) = \varepsilon(A_+) - \varepsilon(A_-)$. Az utolsó egyenlőség az $\varepsilon(A) = A$ egyenlőség.

Ez tehát csak úgy lehet, ha $\varepsilon(A) = \varepsilon(A_+) - \varepsilon(A_-)$ az $\varepsilon(A) = A$ felbontása pozitív és negatív részre. Ez viszont ε pozitivitása miatt csak $\varepsilon(A_+) = A_+$ és $\varepsilon(A_-) = A_-$ mellett lehet. Tehát ε -nak van $S(H)$ -beli sajátvektora. \square

Reducibilitás Ha 1 ε -nak illetve ε^* -nak egyszeres sajátértéke, akkor az 1-hez tartozó sajátvektor egyértelmű. Ez ε -ra a következő szükséges és elégséges feltételt is jelenti: nincs olyan $P < \text{Id}$ projekció, hogy $A \in S_1^+(H)$ esetén $\text{Tr}(AP) = 0 \Rightarrow \text{Tr}(\varepsilon(A)P) = 0$. Ha mégis van ilyen, akkor a H hilbert-tér is szétesik: $H = \text{Ker}(P) \oplus \text{Im}(P)$. ε az ezekre koncentrált valószínűségi mértékeket nem keveri egymással.

9. Tétel. Legyen $\varepsilon : B(H) \rightarrow B(H)$ nyomtartó, pozitív lineáris transzformáció. Ekkor ε minden λ sajátértékére $|\lambda| \leq 1$.

Bizonyítás. Legyen $\lambda + \mu i$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ε -nak sajátértéke, ehhez létezik sajátvektor: $a + bi$, ahol $a, b \in S(H)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\varepsilon(a) &= \lambda a - \mu b \\ \varepsilon(b) &= \mu a + \lambda b\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}\text{Tr}(|a|) &= \text{Tr}(\varepsilon(|a|)) \geq \text{Tr}(|\varepsilon(a)|) = \text{Tr}(|\lambda a - \mu b|) \\ \text{Tr}(|b|) &= \text{Tr}(\varepsilon(|b|)) \geq \text{Tr}(|\varepsilon(b)|) = \text{Tr}(|\lambda b + \mu a|)\end{aligned}$$

□

7.2. A Kullback-Leiber divergencia

$H(A, B) = \text{Tr} A(\ln A - \ln B)$. Ekkor $H(A, B) \geq 0$. És $H(A, B) = 0 \iff A = B$.

Bizonyítás. Legyen $A = \sum_{i \in I} a_i |i\rangle\langle i|$ illetve $B = \sum_j b_j |j\rangle\langle j|$. Ekkor

$$H(A, B) = \sum_{i,j} a_i \ln a_i - a_i \ln b_j \langle i|j\rangle\langle j|i\rangle = \sum_{i,j} (a_i \ln a_i - a_i \ln b_j) |\langle i|j\rangle|^2$$

Ahol kihasználtuk, hogy $\sum_j |\langle i|j\rangle|^2 = \langle i|i\rangle = 1$. Használjuk továbbá, hogy

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{y}{x} - 1$$

Átrendezve

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) \geq 1 - \frac{y}{x}$$

Tehát

$$H(A, B) = \sum_{i,j} (a_i \ln a_i - a_i \ln b_j) |\langle i|j\rangle|^2 \geq \sum_{i,j} (a_i - b_j) |\langle i|j\rangle|^2 = 0$$

És egyenlőség csak akkor lehet, ha a sajátvektorok és a sajátértékek is megegyeznek, tehát $A = B$. □

10. Tétel (Steiner). Legyen H a Kullback-Leibner relatív entrópia, I véges halmaz, p_i ($i \in I$) valószínűségi eloszlás, $\sigma_i \in S(H) \forall i \in I$, $D \in S(H)$. Ekkor

$$\sum_{i \in I} p_i H(\sigma_i, D) = H(\sigma, D) + \sum_{i \in I} p_i H(\sigma_i, \sigma)$$

Bizonyítás. Definíció szerint

$$\sum_{i \in I} p_i H(\sigma_i, D) = \sum_{i \in I} p_i \operatorname{Tr} \sigma_i \left\{ \ln \sigma_i - \ln \sigma \right\} = -\operatorname{Tr} \sigma \ln \sigma + \sum_{i \in I} p_i \operatorname{Tr} \sigma_i \ln \sigma_i$$

Bővítsük ezt

$$\sum_{i \in I} p_i \operatorname{Tr} \sigma_i \ln D = \operatorname{Tr} \sigma \ln D$$

-vel. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} p_i H(\sigma_i, D) &= \operatorname{Tr} \sigma \ln D - \operatorname{Tr} \sigma \ln \sigma + \sum_{i \in I} p_i \operatorname{Tr} \sigma_i \ln \sigma_i - p_i \operatorname{Tr} \sigma_i \ln D = \\ &= H(\sigma, D) + \sum_{i \in I} p_i H(\sigma_i, D) \end{aligned}$$

Ami pont az állítás volt. □

Hivatkozások

- [1] Attila Andai. *Információgeometria a kvantummechanikában*. PhD thesis, BME Matematikai Intézet, Analízis tanszék, 2003.
- [2] J. Dittmann. On the Curvature of Monotone Metrics and a Conjecture Concerning the Kubo-Mori Metric, June 1999. URL <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9906009>.
- [3] Szolcsányi Endre. *Differenciálgeometria I.* 1989.
- [4] F. Hiai, M. Mosonyi, D. Petz, and C. Beny. Quantum f-divergences and error correction. Technical Report Mittag-Leffler-2010fall, May 2011. URL <http://arxiv.org/abs/1008.2529>.
- [5] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000. ISBN 9780521635035. URL <http://www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521635035>.
- [6] W.M. PETER, D. Petz, and A. Andai. On the curvature of a certain Riemannian space of matrices. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 3(02):199–212, 2000.
- [7] D. Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statistics (Theoretical and Mathematical Physics)*. Berlin: Springer, 2008.
- [8] Denes Petz. From quasi-entropy, September 2010. URL <http://arxiv.org/abs/1009.2679>.
- [9] Denes Petz. *Matrix Analysis with some Applications*. 2011. URL <http://bolyai.cs.elte.hu/~petz/matrixbme.pdf>.